

3
2ej



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ARAGON

**MODELO DE UNA ESTRUCTURA
A BASE DE MARCOS SOMETIDO
A ACCION DINAMICA**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A N :
JOSE ALBERTO BECERRIL PEREZ
JOSE LUIS OLGUIN RODRIGUEZ

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

MODELO DE UNA ESTRUCTURA A BASE DE MARCOS SOMETIDO A ACCION DINAMICA

INTRODUCCION	1
CAPITULO I. ASPECTOS FUNDAMENTALES DE LAS VIBRACIONES MECANICAS.	7
I. 1 ANTECEDENTES.	7
I. 2 VIBRACIONES EN SISTEMAS DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD.	9
I. 2. 1 VIBRACION LIBRE.	9
I. 2. 2 VIBRACION LIBRE AMORTIGUADA.	11
I. 2. 3 VIBRACION FORZADA NO AMORTIGUADA.	14
I. 2. 4 VIBRACION FORZADA AMORTIGUADA.	17
I. 3 VIBRACIONES EN SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.	23
I. 3. 1 FUNDAMENTOS.	23
I. 3. 2 METODO DE RAYLEIGH.	30
I. 3. 3 METODO DE HOLZER.	32
I. 3. 4 METODO DE STODOLA - VIANELLO.	34
I. 4 METODOS PARA CALCULAR LAS RIGIDECES DE ENTREPISO.	39
I. 4. 1 METODO APROXIMADO (ECUACIONES DE WILBUR).	39
I. 4. 2 METODO EXACTO.	40
CAPITULO II. CONSTRUCCION DEL MODELO.	43
II. 1 ANTECEDENTES.	43

II.2	ASPECTOS BASICOS DE LA RESINA POLIESTER	45
II.2.1	CARACTERISTICAS Y COMPONENTES DE LAS MEZCLAS DE RESINA.	47
II.3	LEY DE HOOKE.	51
II.3.1	ELASTICIDAD.	51
II.3.2	RELACION ENTRE ESFUERZO Y DEFORMACION.	52
II.3.3	DIAGRAMAS ESFUERZO - DEFORMACION.	53
II.4.	ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LAS PROPIEDADES DE LOS MATERIALES.	58
II.4.1	ALGUNAS CARACTERISTICAS DE LOS PLASTICOS.	59
II.4.2	MAQUINAS DE ENSAYE.	60
II.4.3	HOMOGENEIDAD DE LOS MATERIALES.. . . .	60
II.5	PRUEBAS EFECTUADAS Y RESULTADOS OBTENIDOS.	62
II.5.1	PRUEBAS DE COMPRESION.	62
II.5.2	PRUEBAS DE TENSION.	68
II.5.3	PRUEBAS DE FLEXION.	72
II.5.4	RESUMEN DE RESULTADOS.	76
II.6	FABRICACION DEL MODELO.	80
II.6.1	PROCESO DE CONSTRUCCION.	82
II.6.2	PROCESO DE MONTAJE.	85
CAPITULO III.	CALCULO DE LAS CARACTERISTICAS DINAMICAS DEL MODELO.	89
II.1	CALCULO DE LAS RIGIDECEs DE ENTREPISO.	89
III.1.1	METODO APROXIMADO.	89
III.1.2	METODO EXACTO.	91

III.2 APLICACION DE LOS METODOS DESCRITOS.	98
III.2.1 METODO DE RAYLEIGH.	97
III.2.2 METODO DE HOLZER.	99
III.2.3 METODO DE STODOLA - VIANELLO.	99
III.2.4 RESUMEN DE RESULTADOS.	119
 CAPITULO IV. EXPERIMENTACION EN EL MODELO.	 123
IV.1 INSTRUMENTACION PARA LAS PRUEBAS.	123
IV.1.1 BREVE DESCRIPCION DE LA MESA VIBRATORIA.	123
IV.1.2 REVISION DE LA CALIBRACION DE LA MESA.	128
IV.1.3 DESCRIPCION DE LOS INSTRUMENTOS EMPLEADOS.	130
IV.2 DESARROLLO DE LAS PRUEBAS.	135
IV.2.1 PREPARACION DEL MODELO.	138
IV.2.2 DESCRIPCION DEL PROCEDIMIENTO SEGUIDO.	139
IV.2.3 RESULTADOS OBTENIDOS.	144
 CAPITULO V. INTERPRETACION Y COMPARACION DE RESULTADOS.	 151
V.1 INTERPRETACION DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES.	151
V.2 COMPARACION ENTRE LOS VALORES EXPERIMENTALES Y LOS TEORICOS.	152
V.3 CONSIDERACIONES SOBRE LOS FACTORES QUE INFLUYERON A LO LARGO DE ESTA INVESTIGACION.	158
 CONCLUSIONES.	 159
 REFERENCIAS.	 183

INTRODUCCION

En los cursos que se imparten en las carreras de Ingeniería, es común aprender conceptos, únicamente en forma teórica y sin tener clara idea de lo que representan físicamente.

En Ingeniería Sísmica uno de estos conceptos es el de la resonancia, el cual tiene una importancia fundamental en la prevención de desastres originados por los temblores.

La resonancia consiste, básicamente, en la amplificación acentuada de los desplazamientos de una estructura (cualquier edificio), provocada por una acción dinámica (sismo), debido a la coincidencia en la forma natural de vibrar tanto del edificio como del sismo, lo que eventualmente, ocasiona el colapso y la falla de la estructura.

El fenómeno anterior quedó claramente constatado, en los sismos de Septiembre de 1985 en la Ciudad de México, en donde las estructuras más dañadas fueron edificios de mediana altura (10-15 niveles) ubicados en terrenos blandos, es decir, que el periodo de vibración de los sismos coincidió con el periodo de los terrenos ubicados en zona blanda y éste a su vez, con el periodo de vibración de las estructuras mencionadas.

Por otra parte, en los laboratorios de Ingeniería Civil de la Escuela Nacional de Estudios Profesionales Aragón, existe una mesa vibratoria que fue instalada en el año de 1985, con la finalidad de someter a excitación dinámica diferentes modelos y estructuras y observar su comportamiento bajo condiciones similares a las que se presentan en un sismo, Sin embargo, por diversos motivos, esta mesa rara vez es utilizada.

Así pues, de la importancia del fenómeno de la resonancia y de la existencia y escasa utilización de la mesa vibratoria, surgió el objetivo principal de este trabajo, el cual fue, desarrollar un modelo que permitiera ilustrar físicamente dicho fenómeno y al que, adicionalmente, se le pudieran hacer algunos análisis teóricos que fueran susceptibles de ser comparados con los resultados que se obtuvieran experimentalmente.

De este modo, el presente trabajo inicia con una descripción de los fundamentos teóricos de la Dinámica Estructural, con el fin de tener una comprensión más cabal de los conceptos relativos a esta rama de la Ingeniería y de los análisis y métodos necesarios para determinar las características dinámicas de cualquier estructura y específicamente de nuestro modelo.

Sin embargo, para poder construir un modelo al que se le pudiera inducir el efecto resonante, era necesario un material sumamente flexible, por lo que se descartó la madera y el metal que son más bien rígidos y con los cuales el modelo, prácticamente, no daría respuesta apreciable al ser sometido al movimiento de la mesa.

Debido a lo anterior se propuso a la resina poliéster como material para fabricar el modelo, ya que es muy flexible y sumamente dúctil. Después de hacer innumerables ensayos y pruebas para conocer su comportamiento, así como su módulo de elasticidad aproximado, se decidió que era un material adecuado y se procedió a la construcción de un modelo a base de tres marcos transversales con tres entrepisos y 78 cm de altura; características estas, determinadas básicamente, para menor dificultad constructiva.

Una vez construido el modelo y conocidas todas sus propiedades geométricas y mecánicas, fueron aplicados los métodos descritos en el capítulo inicial (dos de ellos por computadora) para conocer las características dinámicas de nuestro modelo, específicamente su periodo natural de vibración, y tener un antecedente teórico que nos permitiera identificar e interpretar con mayor claridad los resultados experimentales.

De este modo, para tratar de medir el periodo de vibración en que se presenta la resonancia, además de verlo físicamente, fue necesario conseguir algunos aparatos indispensables para realizar tal medición y con los cuales no cuenta la ENEP Aragón.

Gracias a la valiosa e inestimable ayuda del Ingeniero Neftalí Rodríguez Cuevas, investigador del Instituto de Ingeniería de la UNAM, fue posible que nos fueran prestados dos acelerómetros y dos cajas acondicionadoras de señal pertenecientes al mismo Instituto de Ingeniería, que junto con un osciloscopio de persistencia facilitado por el área de Electrónica de la ENEP Aragón, nos permitieron realizar las mediciones correspondientes y obtener resultados experimentales congruentes con los analíticos y cuya interpretación y comparación se presentan en el último capítulo de esta investigación.

Aquí, es indispensable agradecer de nueva cuenta al Ingeniero Neftalí Rodríguez Cuevas, las gestiones efectuadas para poder disponer del equipo del Instituto de Ingeniería en la realización de las pruebas, así como al señor Raúl Maldonado, técnico académico del mismo Instituto, que con gran paciencia y esmero nos orientó y adiestró en el manejo de los aparatos prestados por ellos. Del mismo modo agradecemos a los Ingenieros: Felipe de Jesús Gutiérrez Escudero, Amilcar Galindo Solórzano, Joaquín Gutiérrez Vega, Eduardo Olivares Saldaña, Jorge Pantoja y

David González Máxines, quienes de un modo u otro colaborarán para la realización de este trabajo y gracias a los cuales se pudo culminar esta modesta investigación.

Finalmente, es necesario señalar que el modelo construido y sometido a movimiento en la mesa vibratoria, tiene un carácter ilustrativo y didáctico acerca de un fenómeno tan importante como lo es el de la resonancia; no se debe caer en el error de suponerlo modelo de una estructura real, ya que el material con que fue construido, dista mucho de parecerse a los materiales de uso común en las edificaciones; sin embargo, esperamos sirva de antecedente y soporte para futuras investigaciones, más ambiciosas y de mayores alcances, en las que se pueda experimentar con modelos a escala de estructuras reales, para lo cual sería de suma importancia la adquisición de algunos de los equipos que para este trabajo fue necesario pedir a préstamo y que sin duda, contribuirían a elevar el nivel académico de nuestra escuela y particularmente, de la carrera de Ingeniería Civil.

CAPITULO I

ASPECTOS FUNDAMENTALES DE LAS VIBRACIONES MECANICAS

I.1 ANTECEDENTES

Debido a los propósitos de este trabajo es importante conocer, aunque sea de modo general, los conceptos básicos del fenómeno de las vibraciones mecánicas, por lo que en este capítulo nos ocuparemos de desarrollar algunos aspectos que permitan tener una idea más clara de dicho fenómeno.

Para comenzar, podemos decir que una vibración mecánica es el movimiento de una partícula o de un cuerpo que oscila alrededor de una posición de equilibrio.

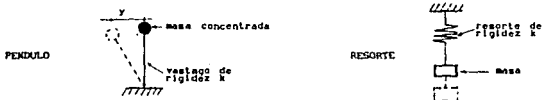
La mayor parte de las vibraciones en máquinas y estructuras son indeseables porque aumentan los esfuerzos y por las pérdidas de energía que las acompañan. Deben por lo tanto eliminarse o reducirse lo más que sea posible con diseños apropiados. Es por ello que el análisis de las vibraciones se ha vuelto cada vez más importante en los diversos campos de la Ingeniería.

Una vibración mecánica se produce casi siempre cuando un sistema es desplazado desde una posición de equilibrio estable. El sistema tiende a regresar a esa posición bajo la acción de fuerzas de restitución (ya sean fuerzas elásticas, como es el caso de la masa unida a un resorte, o fuerzas gravitacionales en el caso del péndulo). Pero el sistema alcanza generalmente su posición inicial con cierta velocidad adquirida que lo lleva más allá de esa posición. Como el proceso puede repetirse indefinidamente, el sistema permanece moviéndose de un lado al otro atravesando su posición de equilibrio.

El intervalo de tiempo necesario para que el sistema efectúe el ciclo completo de movimiento se llama *periodo* de la vibración y generalmente se mide en segundos. El número de ciclos por unidad de tiempo define la *frecuencia* y el desplazamiento máximo del sistema a partir de su posición de equilibrio se llama *amplitud* de la vibración.

El fenómeno de la vibración puede tener diferentes características. Así, cuando el movimiento es mantenido únicamente por las fuerzas de restitución se dice que se trata de una vibración *libre*. Cuando se aplica una fuerza externa al sistema el movimiento resultante se describe como una vibración *forzada*. Cuando los efectos del rozamiento pueden despreciarse se dice que las vibraciones son *no amortiguadas*. Pero en realidad todas las vibraciones son *amortiguadas* hasta cierto grado. Cada uno de estos casos se tratarán con detalle, pero antes es necesario definir el término *grado de libertad*, el cual puede entenderse como el número mínimo de datos que se requiere para conocer la deformada de una estructura.

Muchos sistemas pueden vibrar en más de una manera y dirección. Si un sistema está restringido de modo que sólo puede vibrar de una forma, o si se necesita únicamente una coordenada independiente para determinar por completo la localización geométrica de las masas del sistema en el espacio, se trata de un sistema de un solo grado de libertad.



EJEMPLOS DE SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

Tanto en el péndulo como en el resorte mostrados, sólo es necesario conocer una coordenada para determinar su posición en un instante cualquiera, por lo que se consideran sistemas con un grado de libertad.

Esta clase de sistemas, es decir, los de un grado de libertad, nos permitirán explicar los diferentes tipos de vibración mencionados.

I.2 VIBRACIONES EN SISTEMAS DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD

I.2.1 VIBRACION LIBRE

Este tipo de vibración se considera totalmente ideal, ya que es aquel en que la fuerza exterior es nula y en el que el amortiguamiento también es nulo.

Consideremos el siguiente sistema y su correspondiente diagrama de cuerpo libre:



Después de aplicar una fuerza instantánea las únicas fuerzas que intervienen son la de inercia y la de restricción elástica, ambas tratando de volver a su posición original al sistema.

Por lo tanto la ecuación del equilibrio dinámico, queda de la siguiente forma:

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = 0$$

Dividiendo entre m y llamando ω^2 a k/m , tenemos

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

Que es una ecuación diferencial cuya solución es:

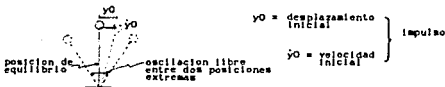
$$y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

Si hacemos $t = 0$, $\cos(\omega t) = 1$, $\sin(\omega t) = 0$ y $y_0 = C_1$, donde y_0 es el desplazamiento inicial en el instante 0. Derivando la ecuación:

$$\dot{y}(t) = -\omega C_1 \sin(\omega t) + \omega C_2 \cos(\omega t)$$

Si hacemos $t = 0$, $\sin(\omega t) = 0$, $\cos(\omega t) = 1$, $y(0) = \omega C_2$ y $C_2 = y(0)/\omega$, donde y_0 es la velocidad inicial en el instante 0. Entonces la solución nos queda

$$y(t) = y(0) \cos(\omega t) + (\dot{y}(0)/\omega) \sin(\omega t)$$



La expresión anterior permite conocer el desplazamiento del móvil en un instante cualquiera t_1 .

Obsérvese que un ciclo de movimiento se completará a intervalos de 2π radianes, es decir, cuando $\sqrt{k/m} T = 2\pi$, en donde T es el período, por consiguiente $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. La frecuencia es el valor inverso del período, o sea $f = 1/T = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$.

I.2.2 VIBRACION LIBRE AMORTIGUADA

Como su nombre lo indica, en este caso la fuerza exterior es nula, pero a diferencia del caso anterior, existe una fuerza adicional de amortiguamiento interno que se ejemplifica en la siguiente figura:



Se contemplan varios casos para evaluar $R(t)$. Se llama amortiguamiento *seco* a aquel en que el amortiguamiento interno es constante $R(t) = R$ (hipótesis de Coulomb) y amortiguamiento *viscoso* al que se tiene cuando la fuerza interna del amortiguamiento es proporcional a la velocidad del móvil, es decir $R(t) = B\dot{y}(t)$.

Experimentalmente se ha demostrado que las estructuras tienen un amortiguamiento aproximadamente viscoso, por lo que es este el caso que nos interesa.

De acuerdo con esto, la ecuación del equilibrio dinámico es la siguiente:

$$m\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + ky(t) = 0$$

Dividiendo entre m ,

$$\ddot{y}(t) + (\beta/m)\dot{y}(t) + (k/m)y(t) = 0$$

Recordando que $k/m = \omega^2$ y haciendo $\beta/m = 2c$, tenemos:

$$\ddot{y}(t) + 2c\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$y(t) = A^* e^{-ct} \cos(\omega^* t - \xi^*)$$

En donde:

e = base de los logaritmos naturales o neperianos

c = factor de amortiguamiento ($\beta/2m$)

$$A^* = \text{amplitud amortiguada} = \sqrt{y_0^2 + \left[\frac{y_0 c + c y_0}{\omega^*} \right]^2}$$

(y_0 , y_0 , desplazamiento y velocidad iniciales)

$$\omega^* = \text{frecuencia amortiguada} = \sqrt{\omega^2 - c^2}$$

$$\xi^* = \text{fase amortiguada} = \text{angtan} \frac{\frac{y_0 + c y_0}{\omega^*}}{\frac{y_0}{\omega^*}}$$

Usualmente el amortiguamiento se expresa como un porcentaje del amortiguamiento crítico al que se llama $\nu = c/\omega$.

El amortiguamiento es crítico cuando $\nu = 1$, $c = \omega$. Cuando esto sucede, no se produce oscilación.



El péndulo regresa lentamente a su posición de equilibrio sin oscilar.

Sustituyendo $c = \nu\omega$ en las expresiones anteriores, tenemos:

$$y(t) = A^* e^{-\nu\omega t} \cos(\omega^* t - \xi^*) \dots (1)$$

$$A^* = \sqrt{y_0^2 + \left[\frac{y_0 + \nu\omega y_0}{\omega^*} \right]^2}$$

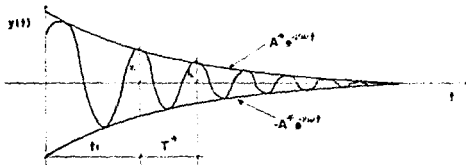
$$\xi^* = \text{angtan} \frac{y_0 + \nu\omega y_0}{y_0 \omega^*}$$

$$\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \nu^2 \omega^2} = \omega \sqrt{1 - \nu^2}$$

Los valores extremos de la ecuación (1) se tienen cuando $\cos(\omega^*t - \xi^*)$ vale 1 y -1.

$$y(t) = A^* e^{-\nu\omega t}, \quad y(t) = -A^* e^{-\nu\omega t}$$

Entonces, la gráfica de la ecuación (1) queda:



El tiempo de una oscilación completa es el período amortiguado $T = 2\pi/\omega^*$.

Si consideramos dos desplazamientos máximos sucesivos, y_1 que ocurre en el instante t_1 y y_2 que ocurre en el instante $t_1 + T^*$:

$$y_1 = A^* e^{-\nu\omega t}$$

$$y_2 = A^* e^{-\nu\omega(t + T^*)}$$

$$y_1/y_2 = e^{\nu\omega T^*} = e^{cT^*}$$

Tomando logaritmos naturales:

$$L y_1 - L y_2 = c T^* = \delta$$

δ es el llamado "decremento logarítmico"

$$c = \delta/T^*, \quad \nu = c/\omega$$

Estas expresiones permiten calcular experimentalmente el amortiguamiento, con lo cual se ha encontrado que los amortiguamientos en las estructuras son porcentajes muy bajos del amortiguamiento crítico. Así que para casos prácticos:

$$\omega^* = \omega \quad \text{y} \quad T^* = T$$

I.2.3 VIBRACION FORZADA NO AMORTIGUADA

En este caso el amortiguamiento es nulo $R(t) = 0$ y la fuerza exterior es una variable cualquiera respecto al tiempo $F(t)$, la ecuación del equilibrio dinámico queda:

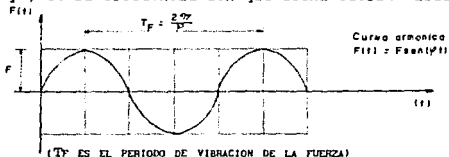
$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = F(t)$$

Consideraremos ahora, algunos subcasos dependiendo del valor asignado a la fuerza exterior $F(t)$.

La fuerza exterior es una armónica:

$$F(t) = F \text{sen}(\omega t)$$

Donde F es el valor máximo que puede adquirir la fuerza exterior y ω es la frecuencia con que dicha fuerza varía.



No debemos confundir ω y T , frecuencia y período propios del móvil con ω y T_F , frecuencia y período de la fuerza exterior.

En estas condiciones, la ecuación del equilibrio dinámico es:

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = F \text{sen} \omega t$$

Dividiendo entre m y recordando que $k/m = \omega^2$

$$y(t) = \underbrace{\text{Acos}(\omega t - \xi)}_1 + \underbrace{\frac{F}{m} \frac{1}{\omega^2 - \varphi^2}}_2 \text{sen} \omega t$$

El sumando 1 representa el efecto de la oscilación propia.

El sumando $\frac{\omega^2}{\omega^2 - \varphi^2}$ el efecto de la fuerza exterior. En los casos de interés práctico $\frac{\omega^2}{\omega^2 - \varphi^2}$ es muy pequeño comparado con $\frac{\omega^2}{\omega^2}$ y puede, por lo tanto, despreciarse:

$$y(t) = \frac{F}{m} \frac{1}{(\omega^2 - \varphi^2)} \operatorname{sen}\varphi t$$

Pero $m = k/\omega^2$, por lo tanto:

$$y(t) = \frac{F}{k} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \varphi^2)} \operatorname{sen}\varphi t$$

$$y(t) = y_{EST_F} \frac{1}{1 - (\varphi/\omega)^2} \operatorname{sen}\varphi t$$

Al valor F/k por definición de rigidez lo llamamos y_{EST_F} y comprende al desplazamiento que en el cuerpo causa una fuerza de valor F , aplicada estáticamente.

Como el máximo valor que puede adquirir $\operatorname{sen}\varphi t$ es 1:

$$y_{MAX} = y_{EST_F} \frac{1}{1 - (\varphi/\omega)^2}$$

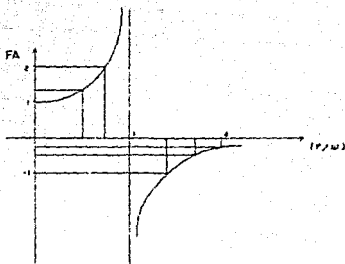
Al factor $1/[1 - (\varphi/\omega)^2]$ se le denomina factor de amplificación (FA).

$$y_{MAX} = y_{EST_F} \cdot FA$$

Esta expresión nos indica que el desplazamiento dinámico de una fuerza con variación armónica tiene un valor máximo igual al desplazamiento estático que produce la fuerza con su valor máximo, multiplicado por el factor de amplificación que es una función de la relación φ/ω :

$$\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\text{Frecuencia de la fuerza}}{\text{Frecuencia propia}}, \quad \Gamma_A = \frac{1}{1 - (\varphi/\omega)^2}$$

ν/ω	FA
0	1
1/2	4/3
$1/\sqrt{2}$	2
1	∞
$\sqrt{2}$	-1
$\sqrt{3}$	-1/2
2	-1/3



Cuando $\nu = \omega$ se tiene el caso de resonancia, en el que los desplazamientos dinámicos resultan infinitos, si el amortiguamiento es nulo.

La fuerza exterior es constante

Si $F(t) = F$, una constante, la ecuación del equilibrio dinámico queda:

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = F$$

Ecuación cuya solución es:

$$y(t) = \frac{F}{k} (1 - \cos \omega t)$$

Pero $F/k = y_{est}$, por lo tanto $y(t) = y_{est}(1 - \cos \omega t)$

El valor máximo que puede adquirir $(1 - \cos \omega t)$ es 2 (cuando $\cos \omega t = -1$).

$$y_{MAX} = 2y_{est}$$

Este resultado nos indica que el máximo desplazamiento de un cuerpo sujeto a una fuerza dinámica constante es igual al doble del desplazamiento que produce la misma fuerza aplicada estáticamente.

I.2.4 VIBRACION FORZADA AMORTIGUADA

La expresión general del equilibrio dinámico en este caso queda:

$$m\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + Ry(t) = F(t)$$

Considerando el amortiguamiento como viscoso

$$\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{F}{m}(t)$$

Para resolver esta ecuación necesitamos conocer la función de la fuerza $F(t)$.

La fuerza exterior es una armónica

$$F(t) = \text{sen}(\omega t)$$

En donde F es el valor máximo de la función $F(t)$ y ω es la frecuencia de la fuerza, por lo tanto

$$\ddot{y}(t) + 2\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{F}{m} \text{sen}(\omega t)$$

La solución de esta ecuación es:

$$y(t) = \underbrace{A e^{-\omega t}}_{\textcircled{1}} \cos(\omega t - \xi) + \underbrace{A \text{sen}(\omega t - \xi)}_{\textcircled{2}}$$

① representa el efecto de la oscilación propia

② representa el efecto de la fuerza exterior

En los casos de interés práctico ① \ll ②, ① puede entonces despreciarse, por lo que:

$$y(t) = A \text{sen}(\omega t - \xi)$$

Donde:

$$A = \text{Amplitud} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\nu^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \frac{F}{K}$$

$$\xi = \text{fase} = \arctan \frac{2\nu (\varphi/\omega)}{1 - (\varphi/\omega)^2}$$

El valor máximo del desplazamiento se tiene cuando $\sin(\varphi t - \xi) = 1$, $y_{\max} = A$

Por definición de rigidez $F/k = y_{\text{est.}}$

$$y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4\nu^2 \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2}} y_{\text{est.}}$$

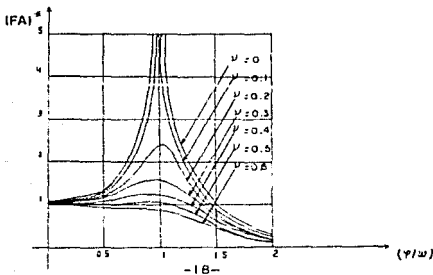
Que puede escribirse abreviadamente

$$y_{\max} = (FA)^* y_{\text{est.}}$$

El desplazamiento máximo dinámico producido por una fuerza F armónica es igual al desplazamiento estático multiplicado por el factor de amplificación amortiguado.

$$(FA)^* = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4\nu^2 \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2}}$$

La siguiente es una representación gráfica del factor de amplificación en función de la razón de frecuencias, y muestra el pico que aparece en la proximidad de $(\varphi/\omega) = 1$ para valores pequeños de ν , así como la influencia que el amortiguamiento ejerce sobre la altura de dichos picos.



A medida que aumenta el amortiguamiento disminuye el factor de amplificación, el (FA)^{*} no ocurre para $\varphi/\omega = 1$. Si hacemos $\mu = \varphi/\omega$

$$FA^* = \frac{1}{\sqrt{(1 - \mu)^2 + 4\nu^2\mu^2}}$$

Derivando respecto a μ

$$\begin{aligned} \frac{d(FA)^*}{d\mu} &= -\frac{1}{2} \left[(1 - \mu^2)^2 + 4\nu^2\mu^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \left[2(1 - \mu^2)(-2\mu) + 8\nu^2\mu \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{-4\mu + 4\mu^3 + 8\nu^2\mu}{\sqrt{[(1 - \mu^2)^2 + 4\nu^2\mu^2]^3}} \end{aligned}$$

Para encontrar el valor de μ que hace máximo (FA)^{*}, hacemos $\frac{dFA}{d\mu} = 0 = 4\mu - 4\mu^3 - 8\nu^2\mu$; $4\mu - 4\mu^3 = 8\nu^2\mu$; $1 - \mu^2 = 2\nu^2$
 $\mu^2 = -2\nu^2 + 1$, $\mu = \sqrt{1 - 2\nu^2}$

ν	$\mu(\varphi/\omega)$	(FA) [*] max
0	1.000	∞
0.1	0.990	5.025
0.2	0.960	2.550
0.3	0.906	1.747
0.4	0.825	1.363
0.5	0.707	1.115
0.6	0.530	1.040

La zona de resonancia se define para $0.7 < \varphi/\omega < 1.3$.

La fuerza exterior es una fuerza cualquiera

En este caso la ecuación del equilibrio dinámico queda:

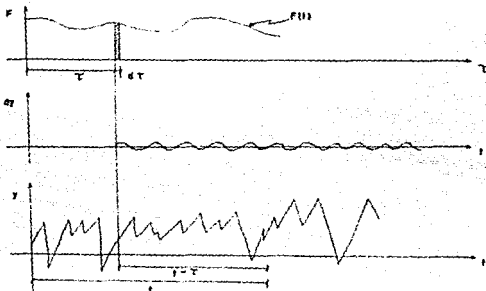
$$m\ddot{y}(t) + R(t) + ky(t) = F(t)$$

Si el amortiguamiento es viscoso:

$$R(t) = \beta\dot{y}(t) = 2c\dot{y}(t) = 2\omega\dot{y}(t)$$

$$m\ddot{y}(t) + 2\omega\dot{y}(t) + ky(t) = F(t)$$

Para resolver esta ecuación, suponemos a la función $F(t)$ descompuesta en impulsos diferenciales



Consideramos un valor de la fuerza F que ocurre en el instante τ . El impulso ocurre en $d\tau$

Aplicamos el principio Fuerza x tiempo = masa x velocidad

$$Fdt = m\dot{y} \dots \dots (1)$$

Para una oscilación libre, debido a un impulso, hemos encontrado la expresión:

$$y = y_0 \cos(\omega t) + (\dot{y}_0 / \omega) \sin(\omega t)$$

Si consideramos $y_0 = \text{desplazamiento inicial} = 0$

$$y = (\dot{y}_0/\omega) \text{sen}(\omega t) \quad \dot{y}_0 = y\omega/\text{sen}(\omega t)$$

Pero y , como se debe a un impulso diferencial, se substituye por dy

$$\dot{y}_0 = \frac{dy\omega}{\text{sen}(\omega t)}$$

Llevando esta expresión a (1)

$$Fdr = \frac{m dy \omega}{\text{sen}(\omega t)} \quad dy = \frac{F}{m \omega} \text{sen}(\omega t) dr$$

Pero t debe substituirse por $(t - \tau)$ ya que es el tiempo de acción del impulso:

$$d\dot{y} = \frac{1}{\omega} \frac{F}{m} \text{sen}[\omega(t - \tau)] dr$$

El desplazamiento total es la integral de la expresión anterior

$$y = \frac{1}{\omega} \int \frac{F}{m} \text{sen}[\omega(t - \tau)] dr$$

En esta ecuación no hemos considerado el efecto del amortiguamiento. Si se toma en cuenta obtenemos:

$$y = \frac{1}{\omega} \int \frac{F}{m} e^{-\nu\omega(t-\tau)} \text{sen}[\omega(t - \tau)] dr$$

Esta es la solución general del equilibrio dinámico, y se conoce como la *Integral de Duhamel*, la cual tiene gran importancia en Ingeniería Sísmica.

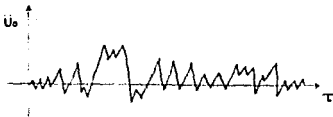
Si la fuerza exterior es la acción sísmica, la expresión anterior se modifica como sigue:

Tomando en cuenta que fuerza = masa x aceleración y
aceleración = fuerza / masa

Substituimos $F / m = \ddot{u}_0(\tau)$, que es la aceleración del terreno en la base del edificio

$$y = \frac{1}{\omega} \int \ddot{u}_0(\tau) e^{-\nu\omega(t-\tau)} \text{sen}[\omega(t-\tau)] d\tau$$

Donde $\ddot{u}_0(\tau)$ se obtiene de un acelerograma



Acelerograma correspondiente a un sismo dado, ocurrido en la base del edificio o en su cercanía

El desplazamiento máximo queda dado por:

$$y_{\text{MAX}} = \frac{1}{\omega} \left| \int \ddot{u}_0(\tau) e^{-\nu\omega(t-\tau)} \text{sen}[\omega(t-\tau)] d\tau \right|_{\text{MAX}}$$

Al valor absoluto máximo de la integral de Duhamel referida a la aceleración del terreno, se le llama "Espectro de velocidades" y se representa por S_v .

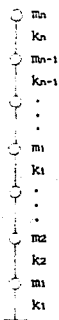
$$y_{\text{MAX}} = \frac{S_v}{\omega}$$

$$S_v = \left| \int \ddot{u}_0(\tau) e^{-\nu\omega(t-\tau)} \text{sen}[\omega(t-\tau)] d\tau \right|_{\text{MAX}}$$

I.3 VIBRACIONES EN SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

I.3.1 FUNDAMENTOS

Consideremos la oscilación en un plano de un sistema de "n" masas conectadas por resortes de rigidez k_i . Inicialmente consideraremos que el sistema no esta amortiguado. Como sabemos, en sistemas estructurales el amortiguamiento es bajo y el periodo es aproximadamente igual al periodo no amortiguado.



Este sistema representa un edificio alto, oscilando en una dirección, cada masa esta concentrada en un piso y se obtiene dividiendo el peso tributario a ese piso entre g .

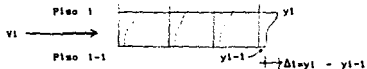
1/2 de la altura



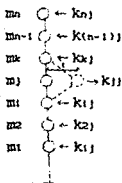
piso i ... \odot $w_i = \frac{w_i}{g}$
peso w_i

k_i nos representa la rigidez al cortante del entrepiso que termina en el nivel i .

Se entiende por rigidez al cortante de un entrepiso a la fuerza cortante que aplicada en él, produce un desplazamiento relativo unitario entre sus extremos.



$k_i = \frac{V_i}{\Delta y_i}$ (TON/CM)

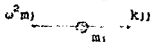


Consideremos a todas las masas fijas con excepción de la masa m_j a la que damos un desplazamiento unitario y la hacemos oscilar en amplitud máxima igual a ese desplazamiento.

$k_{j,j}$ = Fuerza que debemos aplicar para producir un desplazamiento unitario estando las demás masas fijas.

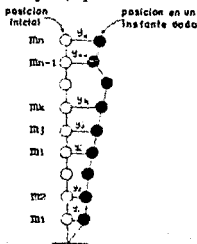
$k_{1,j}$ = Reacción que aparece en la masa 1 cuando en j hay un desplazamiento unitario y todas las demás están fijas.

En posición de amplitud máxima en m_j actúa la fuerza $k_{j,j}$ y la fuerza de inercia, esta última es masa por aceleración, aceleración = $\omega^2 \times$ desplazamiento = ω^2



$$k_{j,j} - \omega^2 m_j = 0$$

Si ahora se sueltan todas las masas y el sistema se deja oscilar libremente, de manera que en un instante dado tome la configuración definida por los desplazamientos $y_1, y_2, \dots, y_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \dots, y_{n-1}, y_n$.



$$(k_{j,j} - \omega^2 m_j) y_j + \underline{k_{j,1} y_1} + \underline{k_{j,2} y_2} + \dots + \underline{k_{j,i} y_i} + \underline{k_{j,k} y_k} + \dots + \underline{k_{j,(n-1)} y_{n-1}} + \underline{k_{j,n} y_n}$$

Fuerzas similares aparecen en las otras masas, por lo que en forma ordenada podemos escribir un sistema de ecuaciones que representan el equilibrio dinámico en cada masa.

$$\left. \begin{aligned} (k_{11} - \omega^2 m_1)y_1 + k_{12}y_2 + \dots + k_{1j}y_j + \dots + k_{1n}y_n &= 0 \\ k_{21}y_1 + (k_{22} - \omega^2 m_2)y_2 + \dots + k_{2j}y_j + \dots + k_{2n}y_n &= 0 \\ \cdot &\cdot \cdot \\ k_{j1}y_1 + k_{j2}y_2 + \dots + (k_{jj} - \omega^2 m_j)y_j + \dots + k_{jn}y_n &= 0 \\ \cdot &\cdot \cdot \\ k_{n1}y_1 + k_{n2}y_2 + \dots + k_{nj}y_j + (k_{nn} - \omega^2 m_n)y_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

El sistema de ecuaciones (A) se denomina "sistema de equilibrio dinámico de un sistema de n grados de libertad".

Se puede escribir también en forma matricial:

$$([K] - \omega^2 [M])(Y) = 0 \dots \dots (A)$$

En donde:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{j1} & k_{j2} & \dots & k_{jj} & \dots & k_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} = \text{Matriz de rigideces}$$

(LA MATRIZ DE RIGIDECES ES UNA MATRIZ SIMÉTRICA, EN GENERAL $k_{ij} = k_{ji}$)

$$\{ M \} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & m_j & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix} = \text{Matriz diagonal de masas}$$

(UNA MATRIZ ES DIAGONAL CUANDO TODOS SUS ELEMENTOS SON CERO EXCEPTO LOS UBICADOS EN LA DIAGONAL)

$$\{ Y \} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_j \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \text{Vector de desplazamientos}$$

La ecuación (A) tiene una solución trivial:

$$\{ Y \} = 0 = \begin{pmatrix} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_j = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n = 0 \end{pmatrix}$$

Esta solución no nos es útil porque representa la posición inicial de equilibrio.

Por lo tanto, la solución que nos interesa queda representada por:

$$| [K] - \omega^2 [M] | = 0 \dots \dots (B)$$

Es decir, que el determinante del sistema debe ser cero. Esta ecuación puede escribirse así:

$$\begin{pmatrix} (k_{11} - \omega^2 m_1) & k_{12} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & (k_{22} - \omega^2 m_2) & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{j1} & k_{j2} & \dots & (k_{jj} - \omega^2 m_j) & \dots & k_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nj} & \dots & (k_{nn} - \omega^2 m_n) \end{pmatrix} = 0 \quad (B)$$

Esta ecuación (B) se llama la "ecuación de los valores característicos de un sistema de "n" grados de libertad" y es una ecuación de grado n en ω^2 , del tipo

$$C + C_1(\omega^2) + C_2(\omega^2)^2 + \dots + C_j(\omega^2)^j + \dots + C_n(\omega^2)^n$$

Esta ecuación tiene n raíces, $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_1^2, \dots, \omega_n^2$, que representan las frecuencias características de oscilación del sistema.

Tomando uno de estos valores (por ejemplo ω_1) y llevandolo a la ecuación (A) podemos despejar un vector de desplazamientos:

$$(Y)_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \dots \\ y_{j1} \\ \dots \\ y_{n1} \end{pmatrix}$$

La ecuación (A), sin embargo, no es determinada, existen muchos vectores $\{ y \}$ que la resuelven, pero que tienen la propiedad de ser proporcionales entre sí.

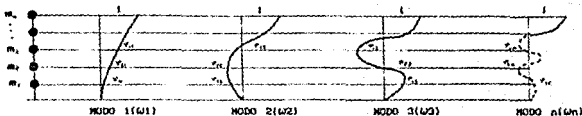
Para definir la solución, uno de los desplazamientos arbitrariamente se toma como 1.

$y_{n1} = 1$, $\varphi_{j1} = \frac{y_{j1}}{y_{n1}}$ (desplazamiento normalizado de la masa j para la frecuencia ω_1).

Así obtenemos el vector:

$$\{ \varphi \}_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \dots \\ \varphi_{j1} \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \text{modo } 1$$

Se llama modo a la ley de variación de los desplazamientos asociada a una frecuencia característica en un sistema de n grados de libertad.

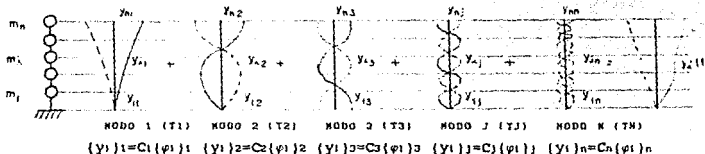


Se tendrá que $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_j < \dots < \omega_n$
 Para cada modo el periodo vale:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

Por lo que: $T_1 > T_2 > T_3 > \dots > T_j > T_n$

La oscilación de un sistema de n grados de libertad, matemáticamente puede considerarse descompuesta en n oscilaciones, cada una con su propia ley y su propio período.



En cada instante, el desplazamiento de la masa i queda dado por:

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n y_{ij}(t) = \sum_{j=1}^n C_j F_j(\varphi_j)$$

En esta expresión:

$y_i(t)$ = desplazamiento de la masa i en un instante t

C_j = coeficiente de participación del modo j ;

F_j = función del tiempo relativa al modo j ;

φ = desplazamiento normalizado de la masa i en el modo j ;

Para las estructuras comunes la contribución del primer modo en el desplazamiento es predominante. Por esta razón al primer modo se le llama el "modo fundamental de oscilación".

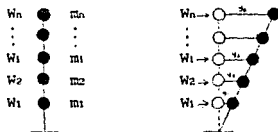
El procedimiento matemático expuesto, permite calcular las leyes y períodos de todos los modos de oscilación de un sistema de n grados de libertad. Sin embargo este procedimiento es muy complicado, implica el manejo de n sistemas de n ecuaciones con n incógnitas y la solución de una ecuación de grado n . Esto requiere en general de programas de computadora sumamente complejos (programa de "Eigen-valores, de valores característicos o valores Eigen).

Se han desarrollado por lo tanto, métodos aproximados para el cálculo de valores característicos en sistemas de n grados de libertad.

I.3.2. METODO DE RAYLEIGH

Este método permite calcular el periodo fundamental de oscilación de un sistema de n grados de libertad.

Consideremos un sistema de n masas, $m_1, m_2, \dots, m_1, \dots, m_n$, cuyos pesos son $W_1, W_2, \dots, W_1, \dots, W_n$ (en general $W_i/g = m_i$).



Consideremos que en cada masa se aplica una fuerza lateral igual al peso de esa masa. Bajo este sistema de fuerzas se definen los desplazamientos estáticos $y_1, y_2, \dots, y_1, \dots, y_n = \{y_i\}$

Consideremos además que el sistema oscila entre las posiciones extremas definidas por $\{y_i\}$ y $\{-y_i\}$.

En todo instante la energía total queda dada por la suma de la energía potencial y la energía cinética

$$E = E_p + E_c$$

Por el principio de la conservación de la energía esta suma se mantiene constante.

Cuando el sistema está en una posición extrema los desplazamientos son máximos y las velocidades nulas:

$$E_{\text{POSICION DE EXTREMA}} = E_{\text{P MAXIMA}} + 0$$

Por el contrario en la posición de equilibrio, los desplazamientos son nulos y las velocidades son máximas.

$$E_{\text{POSICION DE EQUILIBRIO}} = 0 + E_{\text{C MAXIMA}}$$

Como E se mantiene constante:

$$E_{\text{POSICION DE EXTREMA}} = E_{\text{POSICION DE EQUILIBRIO}}$$

$$E_{\text{P MAX}} = E_{\text{C MAX}}$$

$$E_{\text{P MAX}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} W_i y_i$$

$$E_{\text{C MAX}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{y}_i^2$$

Pero $m_i = \frac{W_i}{g}$, $\dot{y}_i = \omega y_i$, por lo que:

$$E_{\text{C MAX}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{W_i}{g} \omega^2 y_i^2$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n W_i y_i = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} \sum_{i=1}^n W_i y_i^2$$

$$\omega = \sqrt{g \frac{\sum_{i=1}^n W_i y_i}{\sum_{i=1}^n W_i y_i^2}}$$

Recordando que $T = \frac{2\pi}{\omega}$, y considerando que $g = 9.81 \text{ cm/s}^2$, llegamos a la expresión que nos permite calcular el periodo fundamental de vibración:

$$T_1 = 0.2 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n W_i y_i}{\sum_{i=1}^n W_i y_i^2}}$$

I.3.3 METODO DE HOLZER

Este método permite el cálculo del periodo y la ley de cualquier modo, mediante el procedimiento siguiente:

- 1.- Supóngase un valor de ω^2
- 2.- Supóngase para la primera masa un desplazamiento, por comodidad puede suponerse 1.



- 3.- Calculese la fuerza en la primera masa

$$F_1 = m_1 \omega^2 y_1 = m_1 \omega^2$$

4.- Calcúlese el cortante en el primer entrepiso

$$k_1 = \frac{V_1}{\Delta_1}, \quad V_1 = k_1 \Delta_1 = k_1$$

5.- Por equilibrio de fuerzas en la masa 1, calcúlese el cortante del segundo entrepiso



$$\Sigma F_y = 0$$

6.- Calcúlese el desplazamiento relativo del segundo entrepiso

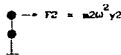
$$\Delta_2 = \frac{V_2}{k_2}$$

7.- Obténgase el desplazamiento total de la segunda masa



$$y_2 = y_1 + \Delta_2$$

8.- Calcúlese la fuerza en la segunda masa



9.- Por equilibrio de fuerzas en la masa 2 se obtiene V_3



$$\Sigma F_x = 0$$

10.- Así sucesivamente hasta llegar a la última masa



Si la hipótesis de partida es correcta (valor de ω^2), esta masa está en equilibrio, $\Sigma F_x = 0$, ω^2 corresponde a un modo y los desplazamientos y_1, y_2, \dots, y_n a su ley.

11.- Generalmente el valor de ω^2 supuesto no es correcto, al sumar las fuerzas de la masa n se obtiene un residuo

$$\begin{array}{r} m_n \\ y_n \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{RESIDUO} \\ F_n \end{array}$$

12.- Se hace otro tanteo cambiando el valor de ω^2 , repitiendo el procedimiento hasta obtener un residuo igual a cero.

Para la aplicación de este método es útil la analogía del resorte



F, y PARA ABAJO SON (+)

FUERZAS A LA DERECHA Y
DESPLAZAMIENTOS A LA DERECHA
SON (+)



Y QUE CAUSA LA COMPRESION DEL
RESORTE ES (+), SI CAUSA LA
EXTENSION ES (-)

I.3.4 METODO DE STODOLA - VIANELLO

El método de Stodola Rigideces es también conocido con el nombre de Vianello. Su calificativo "rigideces", se debe a la utilización de la matriz de rigidez de la estructura. Al igual que

todos los métodos parte de la ecuación del equilibrio dinámico, se despeja $[M]\{x\}$, se premultiplica por $[M]^{-1}$ y resulta:

$$\{x\} = \frac{1}{\omega^2} [M]^{-1} [K]\{x\}$$

Stodola sugiere: suponer un valor a $\{x\}$, premultiplicarlo por $[M]^{-1}[K]$ y si resulta un vector paralelo al supuesto, éste es la solución. En caso contrario se vuelve a suponer un valor para $\{x\}$ (el recientemente calculado), se premultiplica de nueva cuenta por $[M]^{-1}[K]$ y se compara con el supuesto. Se repite este ciclo hasta que la comparación se convierte en igualdad (puesto que importa la relación entre los componentes del vector, consideraremos igualdad la proporcionalidad entre estos).

Sea $\{^0x\}$ un vector cualquiera. Por conveniencia lo vamos a expresar en función de los modos de vibrar. Pues se ha visto que dado un vector cualquiera siempre es posible expresarlo como una combinación lineal de los modos

$$\{^0x\} = C_1\{^1y\} + C_2\{^2y\} + \dots + C_n\{^ny\}$$

Donde $\{^1y\}$, $\{^2y\}$... son los modos normalizados y C_1 , C_2 ... son constantes, que desde luego no conocemos.

Se efectúa el producto $[M]^{-1}[K]\{^0x\}$

$$[M]^{-1}[K]\{^0x\} = C_1[M]^{-1}[K]\{^1y\} + C_2[M]^{-1}[K]\{^2y\} + \dots$$

Según Stodola éste es el nuevo vector supuesto $\{^1x\}$. Antes de volver a premultiplicarlo por $[M]^{-1}[K]$, observemos que:

$$[M]^{-1}[K]\{^1y\} = \omega_1^2\{^1y\}$$

$$[M]^{-1}[K]\{^2y\} = \omega_2^2\{^2y\}$$

En razón a la ecuación del equilibrio dinámico. Entonces:

$${}^1x = C_1 \omega^2 {}^1y + C_2 \omega^2 {}^2y + \dots$$

El nuevo valor supuesto de 2x

$$\begin{aligned} {}^2x &= [M]^{-1}[K]({}^1x) = C_1 \omega^2 [M]^{-1}[K]({}^1y) + C_2 \omega^2 [M]^{-1}[K]({}^2y) + \dots \\ &= C_1 \omega^4 {}^1y + C_2 \omega^4 {}^2y + \dots \end{aligned}$$

Es decir, Stodola plantea un proceso iterativo que en general será:

$${}^{i+1}x = [M]^{-1}[K]({}^ix)$$

Para la iteración i , el valor de ix es:

$${}^ix = C_1 \omega^{2i} {}^1y + C_2 \omega^{2i} {}^2y + \dots + C_n \omega^{2i} {}^ny \dots (1)$$

Ahora bien, tomese la expresión (1) y multiplíquese por $\omega^{2i} / \omega^{2i}$, en que ω_n es la frecuencia del modo más alto

$$\begin{aligned} {}^ix &= \omega^{2i} \left[C_1 \frac{\omega^{2i}}{\omega_n^{2i}} {}^1y + C_2 \frac{\omega^{2i}}{\omega_n^{2i}} {}^2y + \dots + C_n \frac{\omega^{2i}}{\omega_n^{2i}} {}^ny \right] \\ &= \omega^{2i} \left[C_1 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^{2i} {}^1y + C_2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^{2i} {}^2y + \dots + C_n {}^ny \right] \end{aligned}$$

Cuando $i \rightarrow \infty$ (después de "muchas" iteraciones)

$$\lim_{i \rightarrow \infty} {}^ix = \omega_n^{2i} [C_1(0) {}^1y + C_2(0) {}^2y + \dots + C_n {}^ny] = C_n {}^ny$$

Ya que $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n$, o sea $\frac{\omega_1}{\omega_n} < 0$, $\frac{\omega_2}{\omega_n} < 0 \dots$

Los primeros términos desaparecen a medida que avanza el número de iteración y sólo se conserva el último, correspondiente al modo más alto (de la frecuencia más alta).

Como se ve, el método de Stodola Rigideces sí converge y lo hace al modo más alto (ny), en la medida que avanza el proceso iterativo.

Una vez obtenida la $\{^n x\}$ que convierte a la comparación en igualdad, se normaliza y se obtiene $\{^n y\}$.

¿ Y la frecuencia ω_n ? Una forma sería plantear la ecuación de equilibrio dinámico para el modo $\{^n y\}$

$$[K]\{^n y\} = \omega_n^2 [M]\{^n y\}$$

Premultiplicar por $\{^n y\}^T$

$$\{^n y\}^T [K] \{^n y\} = \omega_n^2 \{^n y\}^T [M] \{^n y\}$$

Al ser $\{^n y\}^T [M] \{^n y\}$ un escalar, se despeja ω_n^2

$$\omega_n^2 = \frac{\{^n y\}^T [K] \{^n y\}}{\{^n y\}^T [M] \{^n y\}}$$

Para nuestro caso $\{^n y\}^T [M] \{^n y\}$ es igual a uno porque el modo, hemos dicho, está normalizado. Esta expresión sirve por razones fáciles de imaginar para encontrar la frecuencia de cualquier modo i cambiando $\{^n y\}$ por $\{^i x\}$ (en que $\{^i x\}$ modo i en general no normalizado) y se le llama coeficiente de Rayleigh.

Una vez encontrado el modo más alto o último, con su respectiva frecuencia el mismo proceso iterativo nos debe dar otro modo, pero cualquier $\{^0 x\}$ supuesta, como se demostró, nos llevará al último modo otra vez, si hacemos que $\{^0 x\}$ no contenga al último modo el proceso iterativo nos llevaría al penúltimo modo que es el más alto que contiene $\{^0 x\}$. Dado un $\{^0 x\}$ cualquiera, para quitarle el último modo es necesario calcular C_n , veamos de que forma.

$$\{^0 x\} = C_1 \{^1 y\} + C_2 \{^2 y\} + \dots + C_n \{^n y\}$$

Si $\{^0 x\}$ es el vector $\{^0 x\}$ cualquiera sin el modo n , entonces

$$\{^0 x\} = \{^0 x\} - C_n \{^n y\} \quad (\{^n y\} \text{ conocido, } C_n \text{ desconocido})$$

Multiplíquese la ecuación por $({}^n y)^T [M]$

$$({}^n y)^T [M] ({}^0 x) = C_1 ({}^n y)^T [M] ({}^1 y) + C_2 ({}^n y)^T [M] ({}^2 y) + \dots + C_n ({}^n y)^T [M] ({}^n y)$$

Por la ortogonalidad de los modos

$$({}^1 y)^T [M] ({}^1 y) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Se tiene

$$({}^n y)^T [M] ({}^0 x) = C_n$$

Fórmula para encontrar el valor de C_n y en general para encontrar el valor de C_i

$$({}^i y)^T [M] ({}^0 x) = C_i$$

El vector cualquiera $({}^n x)$ sin el modo n es:

$$({}^0_n x) = ({}^0 x) - ({}^n y) ({}^n y)^T [M] ({}^0 x) = \left[[I] - ({}^n y) ({}^n y)^T [M] \right] ({}^0 x)$$

Con el que se entrara al proceso iterativo para encontrar el penúltimo modo.

Para el antepenúltimo modo el vector $({}^0 x)$ se le deberán quitar los modos n y $n-1$, fácilmente se ve que esto se logra con la expresión:

$$({}^{n-1}, {}^0_n x) = \left[[I] - ({}^n y) ({}^n y)^T [M] - ({}^{n-1} y) ({}^{n-1} y)^T [M] \right] ({}^0 x)$$

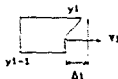
Es mas, la expresión para quitar a $({}^0 x)$ los modos n , $n-1$, $n-2$, ..., $n-i$ es:

$$({}^{n-i}, {}^0_n x) = \left[[I] - ({}^n y) ({}^n y)^T [M] - \dots - ({}^{n-1} y) ({}^{n-1} y)^T [M] - \dots - ({}^{n-i} y) ({}^{n-i} y)^T [M] \right] ({}^0 x)$$

1.4 METODOS PARA CALCULAR LAS RIGIDEZES DE ENTREPISO

1.4.1 METODO APROXIMADO (ECUACIONES DE WILBUR)

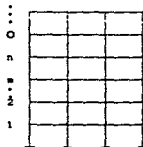
La rigidez de entrepiso es el cociente de la fuerza cortante en ese entrepiso entre el desplazamiento relativo entre los niveles que limitan el entrepiso:



$$k_1 = \frac{V_1}{\Delta_1} \left[\frac{\text{ton}}{\text{cm}} \right]$$

Un método aproximado para el cálculo de la rigidez son las ecuaciones de Wilbur, en el cual se consideran 2 casos.

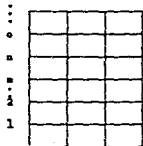
a.- Columnas empotradas en la base



$$k_1 = \frac{48E}{\left[\frac{4h_1}{EK_{c1}} + \frac{h_1 + h_2}{EK_{t1}} + \frac{EK_{c1}}{12} \right]}$$

$$k_2 = \frac{48E}{\left[\frac{4h_2}{EK_{c2}} + \frac{h_1 + h_2}{EK_{t1}} + \frac{EK_{c1}}{12} + \frac{h_2 + h_3}{EK_{t2}} \right]}$$

b.- Columnas articuladas en la base



$$k_1 = \frac{48E}{h_1 \left[\frac{8h_1}{EK_{c1}} + \frac{2h_1 + h_2}{EK_{t1}} \right]}$$

$$k_2 = \frac{48E}{h_2 \left[\frac{4h_2}{EK_{c2}} + \frac{h_2 + h_3}{EK_{t2}} + \frac{2h_1 + h_2}{EK_{t1}} \right]}$$

Para entrepisos intermedios en ambos casos:

$$k_n = \frac{48E}{h_n \left[\frac{4h_n}{\sum k_{cn}} + \frac{h_n + h_{n-1}}{\sum k_{tm}} + \frac{h_n + h_{n+1}}{\sum k_{tn}} \right]}$$

En estas expresiones:

- E es el módulo elástico
- h_n es la altura del entrepiso n
- k_n es la rigidez del entrepiso n
- $\sum k_{cn}$ es la suma de las rigideces relativas de las columnas que llegan por abajo al piso n
- $\sum k_{tn}$ es la suma de las rigideces relativas de las trabes en el piso n
- m, n, o son tres pisos sucesivos

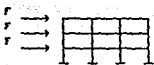
$$\left\{ \text{rigidez relativa} = \frac{I}{L} = \frac{\text{momento de inercia}}{\text{longitud}} \right\}$$

I.4.2 METODO EXACTO

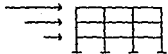
Como se mencionó la rigidez de entrepiso es el cociente de la fuerza cortante en ese entrepiso entre el desplazamiento relativo entre los niveles que limitan el entrepiso.

De acuerdo con esta definición la rigidez depende del sistema de fuerzas aplicado a la estructura.

Para el cálculo de k: se supone un sistema de fuerzas, por ejemplo:



$f = \text{CONSTANTE}$



$F = \text{PROPORCIONAL A LA ALTURA}$

De esta forma, de acuerdo al método de rigideces del análisis estructural, se aplican giros y desplazamientos unitarios para formar la "matriz de rigidez" de la estructura, la cual se iguala con el vector de fuerzas, previamente supuesto, para obtener los desplazamientos de cada entrepiso; despues de lo cual sólo resta aplicar la multicitada definición de rigidez (cortante entre desplazamiento).

CAPITULO II CONSTRUCCION DEL MODELO

II.1 ANTECEDENTES

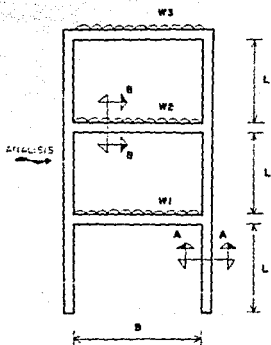
Debido a que la mesa vibratoria del laboratorio de construcción de nuestra escuela, sólo puede moverse con un periodo de vibración comprendido entre 0.5 y 3.5 segundos aproximadamente, de acuerdo a su curva de calibración (ver referencia 22), fue necesario hacer algunos cálculos preliminares proponiendo a la madera como material para el modelo y variando las características geométricas del mismo a fin de obtener diferentes periodos de vibración y poder, así, tener un punto de referencia.

para hacer dichos cálculos preliminares se empleó el método de Rayleigh que como se indicó en el capítulo anterior únicamente nos permite conocer las características del primer modo de vibración de la estructura; para obtener las rigideces de entrepiso se usarán las ecuaciones de Wilbur que a pesar de no ser un método exacto es bastante confiable; y el módulo de elasticidad considerado fue de $E = 80,000 \text{ kg/cm}^2$ para maderas de especies coníferas clase B de acuerdo a las Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcción del D.F. para el Diseño de estructuras de maderas.

El resumen de las opciones propuestas, así como de sus características y el periodo natural de vibración obtenido para cada una de ellas se indica en la siguiente tabla:

RESUMEN DE OPCIONES

Características	No. de niveles	No. de marcos	Sección de columnas	Sección de trabes	Altura entrepisos (L)	Claro (B)	Carga por entrepiso (kg)					Condiciones en la base	Periodo de vibración (seg)
No. opción	INVELES (PARALELOS)		b x h (cm)	B x H (cm)	L (cm)	B (cm)	w1	w2	w3	w4			
1	3	4	4 x 3	3 x 5	20	50	30	30	36	-	EMPOTRE	0.04	
2	3	4	4 x 3	3 x 4	30	80	45	45	54	-	EMPOTRE	0.09	
3	3	3	4 x 3	3 x 4	50	80	50	50	56	-	EMPOTRE	0.23	
4	3	2	5 x 4	4 x 5	60	80	50	50	50	-	EMPOTRE	0.19	
5	3	3	4 x 3	4 x 4	60	80	60	60	60	-	EMPOTRE	0.28	
6	4	2	4 x 4	4 x 4	60	80	15	15	15	15	EMPOTRE	0.21	
7	3	2	4 x 4	4 x 4	60	80	30	30	40	-	ARTICULACION	0.37	
8	3	2	4 x 4	4 x 4	80	80	30	30	40	-	ARTICULACION	0.51	
9	3	2	4 x 4	4 x 4	80	80	30	30	40	-	EMPOTRE	0.33	
10	3	2	4 x 4	4 x 4	100	80	30	30	40	-	EMPOTRE	0.44	
11	1	2	4 x 4	4 x 4	200	90	50	-	-	-	EMPOTRE	0.45	
12	1	2	4 x 4	4 x 4	200	90	20	-	-	-	ARTICULACION	1.00	
13	1	2	4 x 4	4 x 4	200	90	20	-	-	-	EMPOTRE	0.50	



CORTE A A

(Sección columna)



CORTE B B

(Sección trabe)

Emadera = 80,000 Kg/cm²

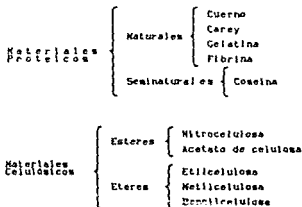
(NCODP 87)

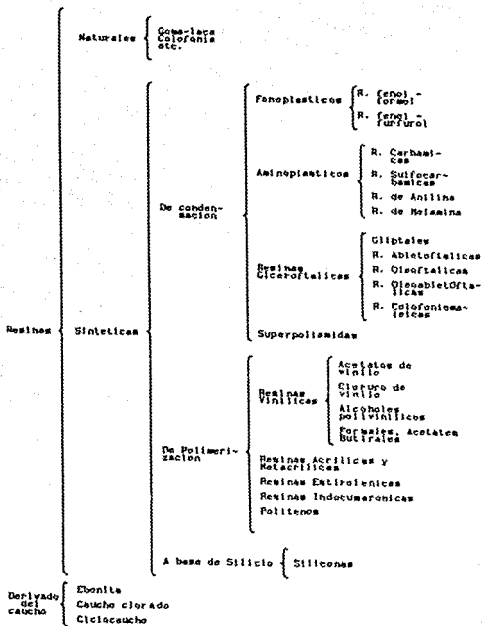
De acuerdo a los resultados anteriores es evidente que debido al módulo de elasticidad relativamente alto de la madera, es extremadamente difícil hacer el modelo con este material, aun proponiendo estructuras muy esbeltas y pesos más o menos grandes actuando en las mismas, lo que por otro lado sería muy difícil de lograr; esto hizo necesario buscar un material con un módulo de elasticidad sensiblemente más bajo que nos permitiera proponer estructuras menos esbeltas y más ligeras que fueran factibles de construir.

11.2 ASPECTOS BASICOS DE LA RESINA POLIESTER

Después de haber desechado algunos materiales, surgieron algunas ideas y recomendaciones para emplear resina poliéster, la que después de algunos estudios y pruebas demostró ser un material adecuado para la construcción del modelo.

Aun cuando no abundaremos en la composición y naturaleza química de este material, veamos dónde se encuentra ubicado dentro de los diversos materiales plásticos que existen, en una clasificación que está, precisamente, de acuerdo a la composición química :





II.2.1 CARACTERISTICAS Y COMPONENTES DE LAS MEZCLAS DE RESINA

La resina poliéster es fabricada con características diversas y en diferentes presentaciones, es por ello que en ocasiones la podemos apreciar en un tono amarillo paja, que es el más usual y en otros casos podemos observar que luce tan cristalina como el agua.

A la resina poliéster basta agregarle una sustancia llamada endurecedor o catalizador para que se convierta en una masa compacta y transparente. A esta reacción química que se produce en la resina se le llama "polimerización" y así es como de un líquido viscoso se convierte en un compuesto gelatinoso con gran desarrollo de calor (exotermia) hasta llegar a endurecerse y transformarse en un sólido.

La resina poliéster está catalogada dentro de los plásticos termofijos o termoestables, porque la reacción que acabamos de describir es irreversible, es decir, que no puede ablandarse con el calor o regresar a su estado líquido inicial.

Sin embargo, no en todos los tipos de resina poliéster el procedimiento se limita únicamente a agregarles el catalizador, pues existen algunas muy espesas que requieren de la adición de un diluyente llamado estireno (monómero de estireno). Otras como las de color ambarino requieren, además, de un promotor o acelerador.

Existen una gran diversidad de resinas, sin embargo, después de investigar y recabar información en los establecimientos comerciales donde se venden estos compuestos, se seleccionaron las siguientes para la elaboración del modelo :

TIPO DE RESINA	CARACTERISTICAS GENERALES	APLICACIONES MAS FRECUENTES
(M-70)+	Resina generalmente de color ambarino o amarillo claro, de reactividad media y que ha sido formulado para el trabajo de moldeo con fibra de vidrio.	Lanchas, Muebles y Artículos decorativos.
Fléxible (MF-100)+	Resina de color ámbar, de baja reactividad que se combina con la de uso general a fin de obtener mayor resistencia y flexibilidad al impacto.	Molduras para marcos y muebles, parches de carrocería.

Una adecuada combinación de ambas nos permitió obtener un módulo de elasticidad de acuerdo con nuestras necesidades ya que la primera es bastante rígida e indeformable y la segunda por el contrario, es sumamente flexible y se deforma fácilmente.

Por último veamos brevemente algunas de las características de los componentes complementarios, para poder preparar la mezcla de resina.

MONOMERO DE ESTIRENO

Este se emplea como un solvente que reduce la viscosidad de la resina poliéster. Es además un agente de enlace molecular, es decir, que favorece la reacción de polimerización al actuar como agente de enlace entre la moléculas de la resina poliéster.

La cantidad de monómero que suele agregarse a la resina poliéster depende esencialmente de lo espeso de la misma (densidad) y de su grado de viscosidad, pero en términos generales

el porcentaje recomendable es del 20 al 25%, ya que una proporción mayor produce piezas quebradizas y mayor opacidad en las piezas terminadas.

CATALIZADOR O INICIADOR

El catalizador es un líquido claro y oleoso, de apariencia turbia y que se agrega a la resina en una proporción del 1 al 1 1/2 por ciento para iniciar la reacción que conocemos como "polimerización" de la resina.

El tipo de catalizador más comúnmente empleado en la resina poliéster es el peróxido de Metil-Etil Cetona.

Una vez que se agregan las gotas de catalizador y se mezclan en la resina, revolviendo con una paleta, cambia inmediatamente el tono del compuesto y se inicia la reacción descrita como polimerización; sin embargo, el estado gelatinoso se obtiene hasta después que hayan transcurrido los primeros 10 o 15 minutos, por lo que se dispone del tiempo suficiente para verter la resina en uno o varios moldes.

El exceso de catalizador y/o acelerador, produce una reacción muy rápida en la resina con gran desarrollo de calor, lo cual en algunos casos puede dañar la apariencia del objeto y producirle grietas y cuarteaduras.

Así mismo, hay que tener presente que la temperatura ambiente influye también en cuanto a lograr una reacción muy rápida o muy lenta. Por ejemplo, abajo de los 15 °C la resina prácticamente no reacciona. Por el contrario, cuando la temperatura se eleva, la mezcla trabaja rápidamente y alcanza en breve tiempo la solidificación.

ACELERADOR O PROMOTOR

El acelerador controla la reacción de polimerización, a temperatura ambiente, permitiéndose alargar o acortar el tiempo de la reacción, conforme al porcentaje que se haya añadido (generalmente no debe exceder del 1%).

El acelerador debe mezclarse perfectamente con la resina y con bastante anticipación al empleo de ésta, pues nunca debe agregarse simultáneamente con el catalizador o iniciador, ya que ambos productos forman una mezcla explosiva y sólo deben de ser combinados en el "seno" de la resina.

Los aceleradores más comúnmente usados con la resina de tipo poliéster, son el naftenato de cobalto y el octato de cobalto, que generalmente se expenden con diversas claves y marcas.

Al igual que con el catalizador, el exceso de acelerador produce en breve tiempo la fase de endurecimiento, conjuntamente con un mayor desarrollo de calor, lo cual a su vez causa una rápida y fuerte contracción en la resina. Por lo anterior, es importante ajustar la dosificación de acelerador y catalizador conforme a los porcentajes recomendados.

Así, de acuerdo a las recomendaciones anteriores se hicieron varios especímenes de prueba con diferentes proporciones de las dos resinas seleccionadas y se realizaron pruebas de compresión, tensión y flexión para obtener su módulo de elasticidad aproximado y definir la mezcla con el proporcionamiento más adecuado para la fabricación del modelo.

II.3 LEY DE HOOKE

Antes de describir las pruebas efectuadas, así como las consideraciones hechas y los resultados obtenidos, es conveniente hacer una breve descripción de la ley de Hooke y de los conceptos que la fundamentan, ya que en ella se apoyan gran parte de las teorías de resistencia de materiales y del análisis estructural.

II.3.1 ELASTICIDAD

Si las fuerzas exteriores que deforman una estructura no rebasan un cierto límite, la deformación desaparece cuando se suprimen tales fuerzas, ésta propiedad es la que se conoce como elasticidad.

En la teoría elástica se supone que la materia del cuerpo elástico es homogénea distribuyéndose con continuidad en su volumen, de forma que cualquier elemento extraído de el, posee sus mismas propiedades físicas. Para simplificar los razonamientos también se supone que el cuerpo es isótropo, es decir, las propiedades elásticas son las mismas en todas las direcciones.

Los materiales estructurales no cumplen, en general las condiciones señaladas anteriormente. Un material tan importante como el acero, por ejemplo, consiste en cristales diferentes, distintamente orientados como puede verse al observarlo al microscopio, El material dista mucho de ser homogéneo, pero la experiencia muestra que las soluciones de la teoría elástica, admitiendo las condiciones de homogeneidad e isotropía, pueden ser aplicadas a las estructuras de acero y otros materiales con gran exactitud .

II.3.2 RELACION ENTRE ESFUERZO Y DEFORMACION

En forma sencilla podemos decir que el esfuerzo se define como la fuerza por unidad de área $\sigma = F/A$ esta formula se aplica a partes que están cargadas ya sea a tensión o a compresión, en las cuales las cargas están aplicadas a través del centroide de la sección transversal y coinciden con el eje.

Del mismo modo se dice que la deformación total es el cambio de longitud del miembro (δ). Y la deformación unitaria se define como el cambio de longitud por unidad de longitud $\epsilon = \delta/L$.

En base a las definiciones anteriores podemos remontarnos en el tiempo hacia el siglo XVII (1658), cuando Robert Hooke publicó un artículo en el que estableció que el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación unitaria. Este hecho se conoce como la ley de Hooke. Matemáticamente puede expresarse como $\sigma \propto \epsilon$, esta proporción puede convertirse en una ecuación agregando una constante de proporcionalidad, es decir : $\sigma = k \epsilon$.

Esta constante de proporcionalidad fue calculada a principios del siglo XIX (1802) por Thomas Young, un científico inglés y se conoce como el módulo de elasticidad, o módulo de Young.

Al incluir el módulo de elasticidad, la ley de Hooke $\sigma \propto \epsilon$ se convierte en una ecuación importante y útil, que se expresa como :

$$\sigma = E \epsilon$$

Aunque el termino módulo de elasticidad da la impresión que se trata de una medida de las propiedades elásticas del material, es una medida de su rigidez. Un nombre más apropiado hubiera sido, quizá, el de módulo de rigidez.

Así pues, el módulo de elasticidad "E" puede definirse como el esfuerzo que produce una deformación unitaria igual a la unidad, es decir, que será un esfuerzo tal que duplique la longitud de la barra en el caso de tensión o la reduzca a cero en el caso de compresión, siempre que no se modifiquen ni las propiedades elásticas del material ni la sección recta de la barra. Esta definición es completamente irrealizable en la práctica.

Cabe señalar que en la mayoría de los materiales estructurales el módulo de elasticidad E tiene el mismo valor en tensión que en compresión.

II.3.3 DIAGRAMAS ESFUERZO DEFORMACION

Con objeto de obtener gráficas que permitan estudiar las características de los materiales, independientemente de la sección transversal del espécimen de ensayo y de la longitud de medición, se acostumbra transformar las gráficas, carga - deformación en gráficas esfuerzo - deformación unitaria. Estos últimos parámetros son adimensionales y por lo tanto, las gráficas esfuerzo - deformación unitaria son iguales para un mismo material independientemente de las características del espécimen de ensayo.

Así, un material se considera dúctil si se producen grandes deformaciones antes de que ocurra la rotura del espécimen, y frágil si las deformaciones son pequeñas al momento de la ruptura.

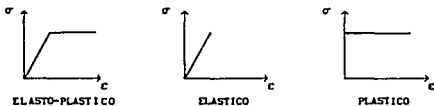
La ley de Hooke representa una relación esfuerzo - deformación bastante importante, ya que como se mencionó, los

análisis de esfuerzos y deformaciones, y el diseño de la mayor parte de las construcciones están basados en esta ley simple del comportamiento de materiales. Cuando la gráfica esfuerzo - deformación de un material cumple con la ley de Hooke se dice que su comportamiento es lineal. Si al descargar el espécimen, éste recupera toda su deformación el comportamiento es elástico. Un material puede tener un comportamiento lineal pero no elástico y viceversa, aunque en muchos casos la etapa lineal es también elástica.

Dentro de los diagramas esfuerzo - deformación existen dos etapas generales; una etapa inicial prácticamente lineal y elástica, en la cual se aplica la ley de Hooke y una etapa de comportamiento inelástico, en la que las deformaciones llegan a ser grandes y la ley de Hooke no es aplicable.

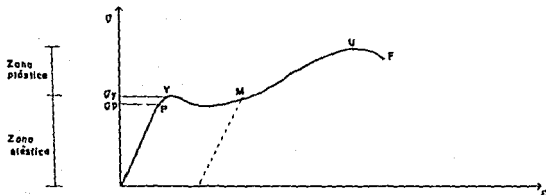
Una característica distintiva de la etapa inelástica es que si se descarga el espécimen, se tiene una deformación permanente. Si el espécimen se vuelve a cargar la relación esfuerzo - deformación coincide con la relación esfuerzo - deformación de la descarga.

Cuando en la etapa inelástica las deformaciones unitarias aumentan bajo un esfuerzo constante, se dice que el material tiene un comportamiento plástico.



GRAFICAS IDEALES ESFUERZO - DEFORMACION UNITARIA

En base a lo anterior, veamos uno de los diagramas más conocidos y estudiados de esfuerzo contra deformación, el del acero dulce.



La curva empieza en el origen y continua con una línea recta hasta que llega a P. Más adelante se encontrará el punto Y donde la curva disminuye su pendiente, se hace más horizontal e incluso puede bajar ligeramente. Después de continuar aproximadamente horizontal una cierta distancia la curva tiende otra vez a subir hasta U, alcanzando así el punto F donde ocurre la fractura.

El punto P es el límite de proporcionalidad del material. Para un esfuerzo mayor que el esfuerzo en el límite de proporcionalidad, ya no se cumple la ley de Hooke.

Y es el punto de fluencia en donde el material fluye o se deforma plásticamente, P y Y se encuentran muy juntos y es difícil distinguirlos.

U corresponde al esfuerzo último del material.

Los valores del esfuerzo en el diagrama se obtienen

generalmente usando el área original del espécimen y no el área real en los diversos tiempos a lo largo del ensayo.

El diagrama esfuerzo - deformación unitaria indica también la rigidez de un material. Considerando la porción recta de la curva, se encuentra que la pendiente de la recta es igual a la variación en el esfuerzo unitario dividido por la variación en la deformación unitaria. La expresión para la pendiente puede escribirse como :

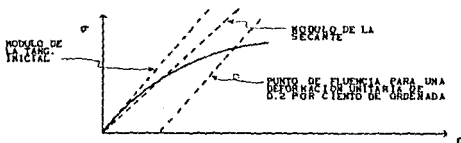
$$\text{TAN } \theta = \frac{\text{VARIACION DE ESFUERZO}}{\text{VARIACION DE DEFORMACION}} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Esto es también la definición del módulo de elasticidad ($E = \sigma/\epsilon$). Una indicación del módulo de elasticidad (o rigidez relativa) del material puede obtenerse observando la pendiente de la porción inicial de la curva. Entre mayor es la pendiente mayor es el módulo de elasticidad del material.

Para otros materiales diferentes al acero dulce, pueden trazarse diagramas esfuerzo - deformación unitario de una manera semejante a la descrita.

En la mayoría de los materiales no se presenta tanta proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación unitaria como para el acero. Sin embargo, esta falta de proporcionalidad no causa problemas en los casos usuales de los análisis y diseño, ya que los diagramas de la mayoría de los materiales estructurales más comunes son casi en forma de línea recta hasta alcanzar los esfuerzos que normalmente se usan en el diseño. Sin embargo, si se usa un material que se aparta de la linealidad aun para esfuerzos pequeños, debe tenerse en cuenta que las deformaciones calculadas usando la ley de Hooke tendrán algún error.

Como se indicó el módulo de elasticidad es la pendiente del diagrama esfuerzo deformación unitaria. Para materiales que no tienen una porción inicial recta, el módulo de elasticidad se toma generalmente, ya sea como la pendiente de la tangente inicial a la curva, o como la pendiente de una línea que une el origen y algún esfuerzo arbitrario, que, por lo general, es el esfuerzo de diseño.



Por último es importante señalar que siempre que se producen deformaciones en la dirección de la fuerza aplicada, también se producen deformaciones laterales.

Las deformaciones laterales que se producen tienen una relación constante con las deformaciones axiales. Mientras que el material se mantenga dentro del rango elástico de esfuerzos, esta relación es constante $\mu = \frac{\text{DEFORMACION LATERAL}}{\text{DEFORMACION AXIAL}}$ y se le llama módulo de Poisson, en honor de S. D. Poisson, quien expresó este concepto en 1828. En general, el valor de μ para la mayoría de los materiales está comprendido entre 0.25 y 0.35. Aunque las deformaciones laterales se producen en todos los cuerpos sometidos a esfuerzos, generalmente no afectan los esfuerzos longitudinales.

II.4 ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LAS PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

Para el estudio de las propiedades de los materiales y para obtener sus esfuerzos admisibles se ensayan probetas de estos materiales, casi siempre, hasta ser destruidos. Estos ensayos se realizan con diversos tipos de carga, como son: estáticas, de impacto y cíclicas (ensayos de fatiga). Según el tipo de deformación de la probeta, se distinguen los ensayos a tensión, compresión, flexión y torsión. Menos frecuentes son los ensayos de probetas sometidos a resistencia compuesta, como por ejemplo, la combinación de tensión y torsión.

Para la mayoría de los materiales existen especímenes estándar, o sea, especímenes cuyas dimensiones y procedimientos de fabricación están definidos, y ensayos en los que se han especificado el método de sujeción del espécimen en la máquina de ensaye, la duración del ensaye, etc. las normas de ensaye más usadas en nuestro medio son las de la Dirección General de Normas de la Secretaría de Industria y Comercio (D. G. N.) y las de la American Society For Testing and Materials (A.S.T.M.).

Así, los ensayos más difundidos corresponden al caso de tensión y compresión estáticos, puesto que son los más fáciles de realizar y al mismo tiempo, en muchos casos, permiten juzgar con suficiente exactitud, sobre el comportamiento del material cuando está sometido a otro tipo de deformaciones.

Por otra parte, los ensayos demuestran que las deformaciones originadas por la carga no aparecen instantáneamente, sino que necesitan cierto tiempo para desarrollarse. Este fenómeno, que consiste en la variación de las deformaciones elásticas en función del tiempo se denomina tiempo de efecto o reactividad.

Cuanto más homogéneo es el material, menor es su reactividad. En el caso de materiales refractarios, a temperaturas normales, la reactividad es tan insignificante que se puede prescindir de ella. Lo contrario ocurre en los materiales de procedencia orgánica. En estos el tiempo de efecto es tan grande, que no se puede prescindir de él.

II.4.1 ALGUNAS CARACTERISTICAS DE LOS PLASTICOS

En los últimos años en las construcciones se emplean cada vez con mayor amplitud nuevos materiales basados en los polímeros naturales y sintéticos comúnmente llamados plásticos.

Los plásticos son resinas puras o un conjunto de resinas con toda una serie de componentes, tales como el relleno, el plastificante, el estabilizador, el colorante, etc.

Los plásticos son poco rígidos. El módulo de elasticidad de los plásticos más rígidos (plásticos de fibra de vidrio) es, aproximadamente, 10 veces menor que el del acero. Como consecuencia, las piezas de plástico sometidas a cargas reciben deformaciones y desplazamientos mucho mayores que las piezas de acero. Sin embargo, hay muchos plásticos que son anisótropos, es decir, que tienen propiedades diferentes en las distintas direcciones. Esta anisotropía está bien manifestada en los plásticos laminares. Es necesario indicar que todavía queda por delante un gran trabajo de investigación y difusión sobre las propiedades mecánicas de los plásticos en general.

II.4.2 MAQUINAS DE ENSAYE

Para ejecutar los ensayos que darán por resultado las cantidades numéricas que miden las propiedades mecánicas, uno debe tener especímenes disponibles, medios para medir deformaciones unitarias y máquinas de ensaye. Las máquinas de ensaye ejecutan dos funciones principales : aplican la carga al espécimen y luego miden la carga aplicada. Se usan medidores de deformación de varios tipos para medir los cambios de longitud del espécimen, debido a la aplicación de la carga.

Por supuesto, es imperativo que una máquina de ensaye aplique la carga con el alineamiento adecuado y a una velocidad uniforme y controlable. La máquina también debe ser capaz de medir exactamente la carga aplicada en las etapas necesarias de carga. Es igualmente importante para el experimentador el ser capaz de medir los pequeños cambios de longitud con la exactitud requerida. Para este fin, se usa un medidor de deformaciones. Su operación puede estar basada en principios mecánicos, ópticos o eléctricos.

II.4.3 HOMOGENEIDAD DE LOS MATERIALES

Anteriormente se introdujo la suposición de que el material, dentro de los límites de una pieza dada, es homogéneo e isótropo. Sin embargo, las propiedades mecánicas y plásticas del material de piezas diferentes, obtenidos de un mismo material, pueden diferenciarse considerablemente entre sí (dispersión).

En efecto, si fabricamos de un mismo acero varias probetas iguales, las ensayamos a tensión y obtenemos el límite de

fluencia, observamos que como regla, lo resultados no coinciden.

Además de la uniformidad del material, las diferencias en los resultados dependen del tipo de ensaye, de las condiciones del equipo de laboratorio, de la propiedad mecánica que se trate de determinar y de otros factores. El estudio de la variabilidad de las propiedades mecánicas se hace utilizando las técnicas de probabilidad y estadística.

Debido a esta variabilidad en los resultados de los ensayes, para evaluar las diversas propiedades mecánicas de un material, no basta con efectuar un solo ensaye, es necesario hacer varios ensayes en muestras seleccionadas de ser posible de acuerdo con las técnicas de muestreo y determinar tanto la tendencia central de los resultados como la dispersión de los mismos. Una de las medidas más usuales de la tendencia central es el promedio.

De hecho, debe quedar claro que los conceptos de las propiedades de los materiales en muchas ocasiones están idealizados y simplificados. En realidad no determinamos las propiedades, es decir no describimos el comportamiento exacto y real de un material.

Sólo obtenemos medidas, indicaciones o manifestaciones de las propiedades descubiertas en las probetas y bajo ciertas circunstancias.

Una probeta nunca será igual a otra, dado que no existe una real homogeneidad en los materiales, la solución parcial viene a ser el ensayar cientos de especímenes y arrojar resultados con bases estadísticas.

II.5 PRUEBAS EFECTUADAS Y RESULTADOS OBTENIDOS

Como se indicó en páginas anteriores, una vez identificado el material que parecía el más apropiado para la elaboración del modelo, fue necesaria la realización de una serie de pruebas encaminadas a encontrar con el menor error posible el módulo de elasticidad del material.

De este modo se realizaron pruebas de compresión, tensión y flexión, las primeras en mayor número, debido a su sencillez y a que durante la realización de ellas se definió la mezcla de resina más adecuada.

El equipo empleado para realizar las pruebas es el que se encuentra en el laboratorio de construcción de nuestra escuela y principalmente la máquina de ensaye Universal que permite efectuar diversas pruebas en los materiales y cuenta para ello con varios aditamentos y accesorios. La máquina Universal es de la marca norteamericana Tinius - Olsen (especialista en este tipo de equipos) y puede aplicar cargas hasta de 60 toneladas.

II.5.1 PRUEBAS DE COMPRESION

En la prueba de compresión, la pieza de material se somete a una carga en los extremos que produce una acción aplastante que acorta la longitud del espécimen.

Para este tipo de ensayos se escogen probetas cúbicas o cilíndricas de poca altura ($h \leq 3d$) puesto que en el caso de probetas más altas puede ocurrir la flexión.

El empleo de probetas muy bajas tampoco es deseable puesto que las fuerzas que originan la fricción en los extremos de la probeta, obstaculizan su libre ensanche y como consecuencia la probeta adquiere la forma de un barril.

Los resultados de los ensayos a compresión dependen sensiblemente del valor de las fuerzas de fricción. En este sentido, las probetas cilíndricas son más convenientes que las cúbicas, no obstante que las fuerzas de fricción se pueden eliminar parcialmente engrasando los extremos de la probeta.

Respecto a la velocidad de prueba los resultados obtenidos en el concreto, que es uno de los materiales más estudiados, indican que la relación entre la resistencia y la velocidad de carga es aproximadamente logarítmica, ya que mientras más rápida es la velocidad, más alta es la resistencia indicada

También, el módulo de elasticidad parece aumentar con la velocidad de carga, aunque la mayoría de los observadores han atribuido este efecto a la reducción de la deformación de un material, al someterlo a una carga constante, durante la prueba.

En nuestro caso se elaboraron 18 especímenes de prueba, 6 de los cuales fueron cúbicos, empleando como moldes para el colado los usados para la obtención de muestras de mortero y cuyas dimensiones nos permitieron obtener piezas de 5 cm. por lado.

Posteriormente y atendiendo a la recomendación de lograr una relación de esbeltez mayor, logramos conseguir moldes metálicos de forma cilíndrica con un diámetro de 5cm. y una altura de 10cm. y que son empleados, igualmente, para la elaboración de muestras de

mortero. Del mismo modo se uso tubo PVC para colar 5 de las 13 muestras indicadas, con el fin de disminuir la cantidad de resina necesaria para colar los especimenes.

Es necesario señalar que el colado de las piezas de resina no fue fácil debido a que antes de que la resina se solidifique (al agregar el catalizador) permanece varios minutos en estado completamente líquido, y a pesar de que se sellaron con cera las uniones de los moldes, en varias ocasiones ocurrieron fugas que hicieron fracasar los colados, sobre todo al inicio de los trabajos y debido, también, al desconocimiento del comportamiento del material. Afortunadamente poco a poco se fue mejorando en el sellado y el problema dejo de presentarse.

Otro percance digno de comentarse es el que se presentó al descimbrar los especimenes, ya que la resina se adhería fuertemente al metal de los moldes y era extremadamente difícil lograr que se despegara.

Este problema se solucionó, primero, engrasando los moldes antes del colado, lo cual presentó todavía algunas deficiencias, y después con una cera y película desmoldante especiales para materiales del tipo de la resina y que resultó mucho mejor.

Una vez colados los especimenes eran llevados al taller de manufactura en donde con ayuda de un torno se pulian y alineaban las caras de apoyo con el objeto de garantizar que durante la prueba la distribución de fuerzas en el área de la sección transversal fuera lo más uniforme posible.

Las pruebas de compresión consistieron, básicamente, en

aplicar carga a las muestras y hacer lecturas de deformación (con ayuda de un micrómetro) a intervalos iguales de carga (a cada 100 o 500 Kg por ejemplo).

Así, conocidas las dimensiones de la muestra antes de la prueba y los valores de carga y deformación obtenidos, fueron calculados y tabulados los esfuerzos y deformaciones unitarias respectivas, y con estos datos se dibujaron los diagramas esfuerzo deformación para cada caso.

Sin embargo, los diagramas obtenidos nunca siguieron un comportamiento completamente lineal, que por otra parte era de esperarse. Así que para calcular el módulo de elasticidad empleamos el criterio que consiste en trazar una tangente a la curva en el origen del diagrama y la pendiente de dicha tangente representa el módulo de elasticidad del material.

En las figuras siguientes se pueden observar algunos aspectos de las pruebas efectuadas y el equipo utilizado

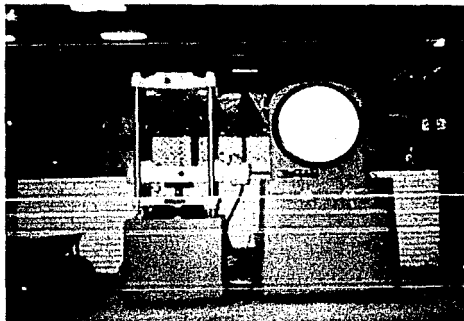


FIG. II.V.1.e

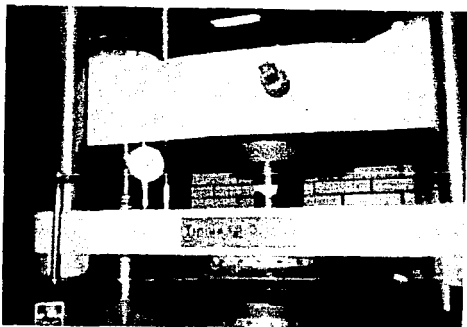


FIG. II. 5.1. b

Del mismo modo en la figura II.5.1.c se muestra uno de los diagramas obtenidos y las características del espécimen de esa prueba en particular.

El resumen de todas las pruebas efectuadas y los resultados obtenidos en cada una de ellas se muestra páginas adelante.

Por último hay que recordar que fue durante el desarrollo de estas pruebas cuando se estuvo variando la proporción de resinas a fin de obtener un módulo de elasticidad adecuado para nuestros cálculos. Dicha proporción fue de 70% de resina flexible y 30% de resina rígida, el total de ambas hace el 85% de la mezcla y el 15% restante corresponde al monómero de estireno.

Así es que los especímenes para tensión y flexión ya fueron hechos tomando en cuenta esta proporción.

RESULTADOS MUESTRA 12

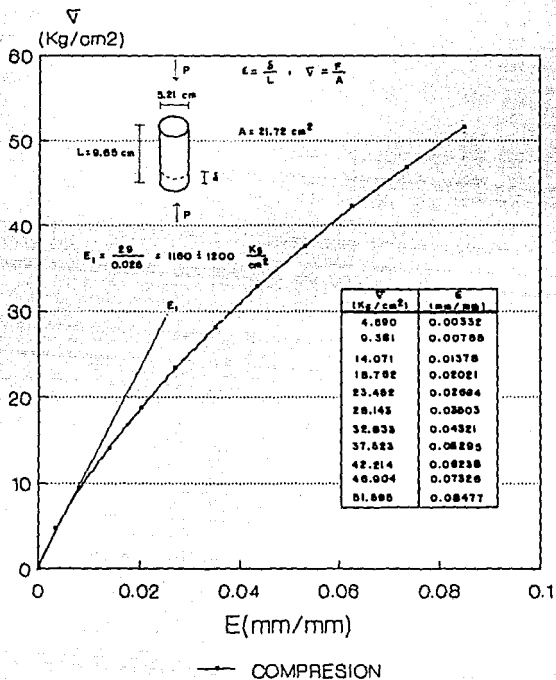


FIGURA II. 5.1.c

II.5.2 PRUEBAS DE TENSION

En este tipo de pruebas, una probeta es sometida a una carga monoaxial gradualmente, hasta que ocurra la falla. En sí la operación se realiza sujetando los extremos de la pieza, separandolos en una dirección paralela a la carga aplicada.

La máquina de ensaye tiene dispositivos de montaje que transmiten axialmente la carga a nuestra probetas, esto es, que las mordazas estén alineadas antes y durante la prueba, sin que existan movimientos de flexión o torsión.

Para ello las mordazas tienen una superficie estriada que evita o por lo menos reduce el desplazamiento de la probeta. Además cuando se prueba una muestra cilíndrica las mordazas deben apretar en forma de V.

El ajuste para este tipo de mordazas, se hace por medio de un alineador, de tal forma que el eje de la probeta coincida con el centro de los puentes de la máquina de prueba y las mordazas queden apropiadamente ubicadas en las cabeceras o extremos de la muestra.

Como es notorio la implementación y realización de esta prueba es más difícil que en el caso de la compresión, debido a ello principalmente, sólo se prepararon 5 especímenes para este tipo de prueba.

La longitud de las probetas fue de entre 25 y 30 cm y los moldes empleados fueron pedazos de tubo PVC de diferentes diámetros.

Las dos primeras probetas fueron de sección constante, sin embargo, debido a la superficie lisa que se obtiene con la resina fue necesario una vez coladas, hacerles algunas muescas en los extremos con el fin de lograr mayor agarre con las mordazas de la máquina pese a lo cual no fue posible evitar cierto deslizamiento durante el desarrollo de la prueba.

Para tratar de evitar el deslizamiento las dos muestras siguientes se fabricaron con algunas variantes; una se coló también de sección constante pero con unas armellas ahogadas en los extremos a fin de anclar la muestra en los cabezales de la máquina y la otra fue colada con una sección mayor en los extremos para tener mayor agarre con las mordazas.

De las dos variantes anteriores la que dio mejor resultado fue la de sección variable, por lo que la quinta y última muestra se preparó de la misma forma.

Algunos aspectos de las probetas usadas en estas pruebas y el desarrollo de las mismas se muestran en las figuras II.5.2.a y II.5.2.b.

De igual forma, en la figura II.5.2.c puede verse uno de los diagramas esfuerzo - deformación obtenido.



FIG II 5 2 0

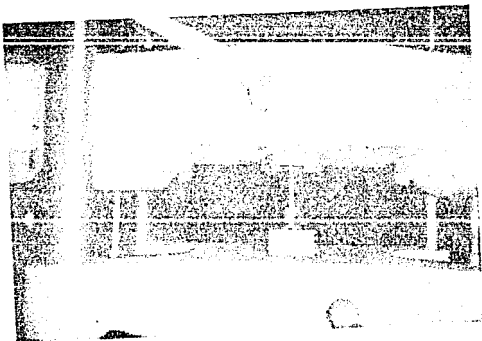


FIG II 5 2 1

RESULTADOS MUESTRA 23

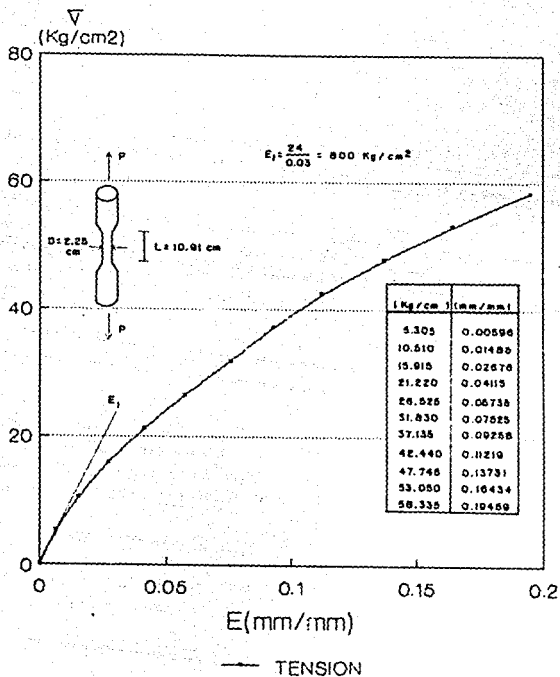


FIGURA II. 5.2.c

II.5.3 PRUEBAS DE FLEXION

El comportamiento en flexión de elementos estructurales se ha estudiado experimentalmente ensayando especímenes simplemente apoyados y sujetos a dos cargas concentradas generalmente en los tercios del claro o también con una carga concentrada en el centro del claro.

La deflexión de la viga es el desplazamiento de un punto sobre la superficie neutra de la viga y ocurre bajo la acción de una fuerza, además de deflexión es una medida de la rigidez general del elemento.

En este sentido la medición de las deflexiones constituye un medio para determinar el módulo de elasticidad del material en flexión. Es importante hacer notar que si hay esfuerzos cortantes transversales, el módulo de elasticidad en flexión tiende a ser inferior al correspondiente al esfuerzo axial, ya que las deformaciones por corte tienden a aumentar la deflexión.

Para el desarrollo de la prueba se utilizó, al igual que en las anteriores, la máquina Universal, pero en vez del plato de carga, se ajustó un dispositivo, triangular simulando una carga concentrada al centro del claro de la viga; los dos soportes o apoyos fueron de tipo articulado, colocados sobre un carril.

La deflexión se midió con un deflectómetro mecánico el cual está previsto de dos rangos de medición : 12.5mm y 75mm. Nosotros usamos el rango de 75mm, sin olvidar que al inicio de cada prueba el indicador del cuadrante estuviera ajustado en cero.

Cabe señalar que para producir la falla por flexión, el espécimen no debe ser demasiado corto con respecto a su peralte.

En nuestro caso sólo se colaron dos especímenes de 30 cm de longitud y 2.3 cm de peralte, para lo cual se usarón como moldes pedazos de canal de lamina galvanizada.

Para obtener el módulo de elasticidad se usó la fórmula para calcular la deflexión de una viga simplemente apoyada con una carga concentrada al centro del claro, es decir :

$$\Delta = \frac{PL^3}{48EI} \quad \longrightarrow \quad E = \frac{PL^3}{48\Delta I}$$

Con ayuda de la expresion anterior se dibujó lo que podríamos llamar un diagrama esfuerzo - deformación en flexión en donde el valor PL^3 va en el eje de las ordenadas y $48\Delta I$ en el de las abscisas.

El módulo de elasticidad se obtuvo aplicando el método usual de trazar una tangente al inicio de la curva y la pendiente de dicha tangente representa el módulo de elasticidad.

Uno de los diagramas obtenidos se muestra en la figura II.5.3.c el cual, como puede verse resulta un tanto irregular.

En las figuras II.5.3.a y II.5.3.b se indican aspectos del desarrollo de la pruebas y de las probetas que se emplearon.

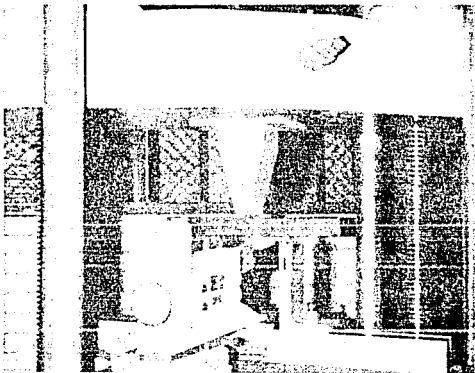


FIG. II. 5.3.a

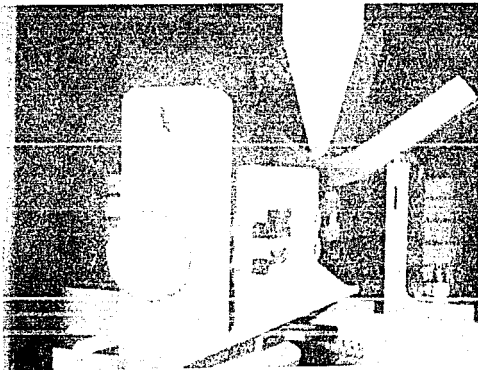


FIG. II. 5.3.b

RESULTADOS MUESTRA 24

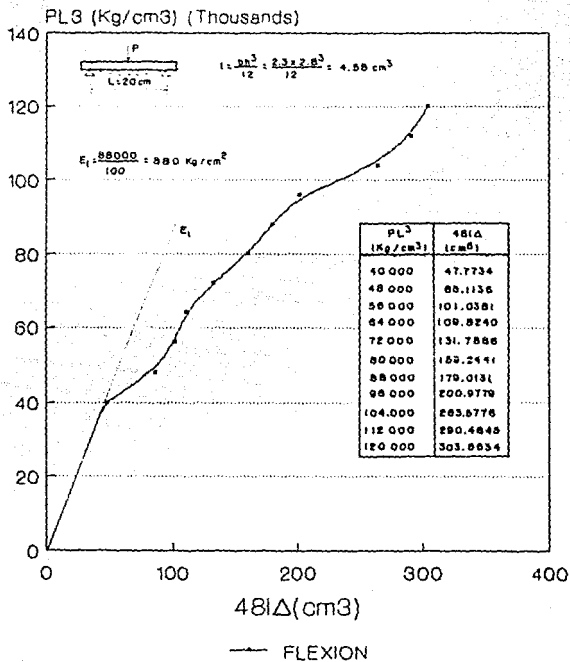
















FIGURA II. 5.3.c












Es conveniente señalar que en la mayoría de las pruebas se llegó hasta la falla del espécimen con deformaciones previas muy altas, mediante las cuales se obtuvieron diagramas esfuerzo - deformación con valores muy grandes en el eje de las abscisas (deformación unitaria), sin embargo, y tomando en cuenta que la zona de interés y la que se comporta casi linealmente se encuentra al principio del diagrama; en las gráficas que se incluyen en este capítulo sólo se muestra una parte de la curva que realmente se obtuvo.

II.5.4 RESUMEN DE RESULTADOS

Una vez descritas de modo general cada una de las pruebas que se efectuaron veamos la siguiente tabla con los resultados obtenidos en cada una de las probetas las cuales están numeradas de acuerdo al orden en que fueron fabricadas.

No.	TIPO DE PRUEBA	FORMA DE LA MUESTRA	PROPORCIÓN DE RESINA	MÓDULO DE ELASTICIDAD	OBSERVACIONES
1	COMPRESIÓN		100-0	30	EL MATERIAL RESULTANTE ES EXTREMADAMENTE DEFORMABLE
2	COMPRESIÓN		50-50	1200	
3	COMPRESIÓN		0-100	5000	EL MATERIAL RESULTANTE TIENE UN COMPORTAMIENTO FRÁGIL.

No.	TIPO DE PRUEBA	FORMA DE LA MUESTRA	PROPORCION DE RESINA	MODULO DE ELASTICIDAD	OBSERVACIONES
4	COMPRESION		50-50	1900	NO SE USO MONOMERO DE ESTIRENO
5	COMPRESION		50-50	—	RESULTO CON OQUEDADES AL DESCIMBRAR Y NO SE PROBO
6	COMPRESION		50-50	1600	
7	COMPRESION		50-50	2000	
8	COMPRESION		50-50	—	SE ROMPIO AL DESCIMBRAR
9	COMPRESION		50-50	2800	
10	COMPRESION		50-50	2800	
11	COMPRESION		50-50	2500	
12	COMPRESION		60-40	1200	
13	COMPRESION		60-40	—	HUBO ERROR EN LA COLOCACION DEL MICROMETRO.
14	COMPRESION		60-40	2300	PROMEDIO DE CARGA Y RECARGA

No.	TIPO DE PRUEBA	FORMA DE LA MUESTRA	PROPORCIÓN DE RESINA	MÓDULO DE ELASTICIDAD	OBSERVACIONES
15	TENSION		70-30	600	EXISTIO DESLIZAMIENTO DE LA PROBETA.
16	TENSION		70-30	500	TAMBIEN HUBO CIENTO DESLIZAMIENTO.
17	COMPRESION		70-30	900	PROMEDIO DE CARGA Y RECARGA
18	COMPRESION		70-30	1100	PROMEDIO DE CARGA Y RECARGA
19	TENSION		70-30	500	
20	TENSION		70-30	—	EXISTIO DESLIZAMIENTO
21	COMPRESION		70-30	700	
22	COMPRESION		70-30	1200	
23	TENSION		70-30	900	
24	FLEXION		70-30	900	
25	FLEXION		70-30	1700	

ESTA ES LA SALIDA DE LA DPT. 11/11/57

En base a los datos de la tabla se analizaron los módulos de elasticidad obtenidos en cada tipo de prueba de acuerdo a la proporción de resina empleada.

PRUEBAS DE COMPRESION

Prop. 50-50 :	1200, 1900, 1600, 2000 2800, 2800, 2500	Prom. 2115 Kg/cm ²
Prop. 60-40 :	1200, 2300	Prom. 1750 Kg/cm ²
Prop. 70-30 :	900, 1100, 700, 1200	Prom. 975 Kg/cm ²

En el caso de la proporción de 50-50 los valores extremos de E son 1200 y 2800 que implican un rango de variación relativamente grande, sin embargo hay que señalar que en todas estas pruebas no se puso la debida atención en la velocidad de aplicación de la carga, que es un parámetro importante, y que puede ser la razón de esta variación.

Además los promedios de cada proporción disminuyen, como era de esperarse, conforme se incrementa la cantidad de resina flexible.

Así, podemos asumir de acuerdo al comportamiento del material un módulo de elasticidad en compresión igual a 1000 Kg/cm² para la proporción 70 - 30 que será la que usaremos para la construcción del modelo.

PRUEBAS DE TENSION

Prop. 70-30 :	600, 500, 500, 800	Prom : 600 Kg/cm ²
---------------	--------------------	-------------------------------

Si bien el promedio nos indica que E vale 600 Kg/cm² para la

misma proporción de 70 - 30, es conveniente tomar, en este caso, un valor un poco mas alto para contemplar los posibles errores por deslizamiento de las probetas, por lo que para tensión adoptaremos un módulo de elasticidad de 700 Kg/cm².

PRUEBAS DE FLEXION

Prop. 70-30 : 900, 1700

Prom. : 1300 Kg/cm²

Para flexión son muy pocos los valores obtenidos en comparación con las pruebas de tensión y compresión, no obstante podemos asumir un valor de 1200 Kg/cm² ligeramente inferior al promedio, esto debido a que el segundo valor se obtuvo a una velocidad más alta, lo que evitó que el espécimen desarrollara toda su deformación para determinado valor de carga.

Así, los valores extremos del módulo de elasticidad obtenidos con las diferentes pruebas son de 700 y 1200 Kg/cm² por lo que podríamos adoptar un valor intermedio para nuestros cálculos definitivos (950 Kg/cm²), pero tomando en cuenta que el movimiento al que se sometera el modelo será muy rápido y podría compararse con una velocidad de aplicación alta en cualquiera de las tres pruebas que se hicieron es más conveniente asumir un valor ligeramente más alto para los cálculos definitivos que se presentan en el siguiente capítulo, el cual será de E=1000 Kg/cm².

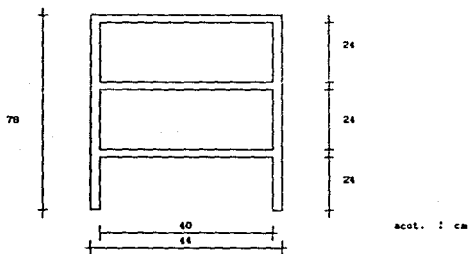
II.6 FABRICACION DEL MODELO

Una vez definida la mezcla de resina con un módulo de elasticidad que en combinación con ciertas características

geométricas de la estructura nos permite obtener un periodo de vibración que se puede reproducir en la mesa vibratoria, se inició la construcción de los marcos que forman la estructura.

Como se acaba de mencionar para obtener un periodo de vibración que este dentro del rango de la mesa vibratoria, además de que el material debe ser de un módulo de elasticidad sensiblemente bajo, la estructura debe tener determinadas características geométricas.

De este modo, con algunos cálculos preliminares empleando el método de Rayleigh, nuevamente, se propuso que la estructura fuera de tres marcos transversales paralelos y colados monolíticamente como el que se indica a continuación :



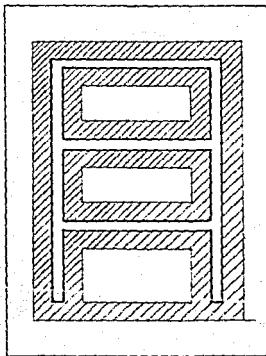
En el cual la sección de todas las traveses y columnas es de 2 x 2cm para facilidad tanto de construcción como de cálculo.

II.6.1 PROCESO DE CONSTRUCCION

El primer problema que se presentó, fue definir el material más adecuado para el molde donde se colarían los marcos de la estructura.

Para resolverlo se hicieron tres colados preliminares para probar algunos materiales tentativos; en estos colados se empleó madera, madera forrada con plástico, y poliestireno, este último fue desechado ya que al entrar en contacto con la resina se disolvió, sin embargo las dos primeras opciones funcionaron adecuadamente, por lo que procedimos a construir el molde, usando una tabla como base y barrotes de 2 x 3cm como cimbra perimetral atornillados a la base.

El aspecto del molde fabricado, visto en planta es el siguiente :



SIKBOLOGIA

BARROTE COMPI-
MANTE DE 3 X 2
CM.

COLADO PARA
FORRAR EL MAR-
CO

TABLA PARA BASE

Una vez terminado el molde se inicio el proceso de colado, el cual se repitió, siete veces, a pesar de que solamente necesitabamos tres marcos, debido a que al descimbrarlos se agrietaban, generalmente en alguno de los nudos, y se tenían que desechar.

La falla en el descimbrado se debió a dos cosas :

A que la resina se filtraba en las endiduras entre la base y los barrotes lo que dificultaba el descimbrado y ocasionaba la falla, lo cual se soluciono agregando más del doble de los tornillos que tenía originalmente (75 en total) a fin de lograr mayor confinamiento y evitar las fugas de resina.

A pesar de que se continuó usando la cera y película desmoldante en ocasiones la resina se adhería fuertemente a las paredes de la madera provocando la falla al momento de aflojar los tornillos y tratar de descimbrar, este problema fue resuelto poniendo cinta adhesiva transparente en las paredes confinantes de los barrotes y adicionalmente la cera y película desmoldante, lo que disminuyó la adherencia al momento de descimbrar y eliminó el problema.

Los siete colados se hicieron cada cuatro o cinco días aproximadamente y de los siete marcos que se obtuvieron, tres presentaron las grietas indicadas.

De los cuatro marcos en buen estado seleccionamos tres para formar la estructura del modelo y del restante junto con los tres que presentaron fractura, se recortaron y lijaron las trabes (12 en total) para emplearlas en la unión de los marcos en el sentido longitudinal.

En las siguientes figuras se pueden observar aspectos del colado y uno de los marcos terminados

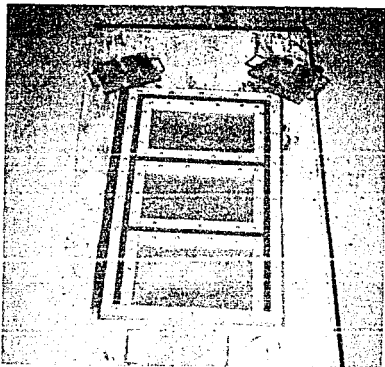


FIG. II. 6.1.a.

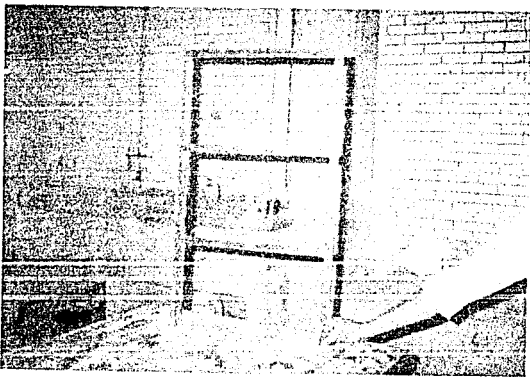


FIG. II. 6.1.b.

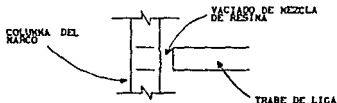
II.6.2 PROCESO DE MONTAJE

Una vez con los tres marcos terminados y las doce travesas de liga que resultaron de los marcos sobrantes se procedió a ensamblar y empotrar el modelo.

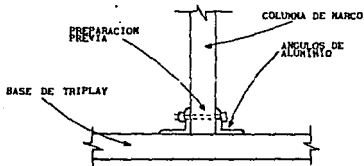
Antes de unir los marcos y por facilidad de maniobra, se llevaron al taller de manufactura donde se les hizo una pequeña perforación en las columnas de apoyo para su anclaje definitivo.

Posteriormente se realizó la unión de los marcos con las travesas longitudinales usando, también, una mezcla de resina como pegamento.

Un detalle de las juntas se muestra a continuación (las caras en contacto de ranuraron para una mayor adherencia) :



Una vez ensamblado el modelo se empotro en una tabla de triplay de 2cm de espesor de 1.0 x 1.10m. usando ángulos para ello, el detalle de empotre se indica a continuación.



Finalmente, la base en la que se encontraba empotrado el modelo se empotró a su vez en la mesa vibratoria.

En las siguientes figuras se presentan aspectos generales del modelo terminado.

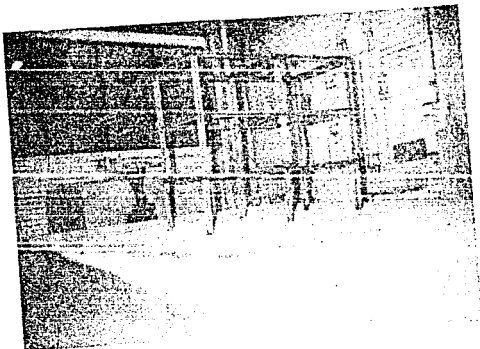


FIG II 6.2.3

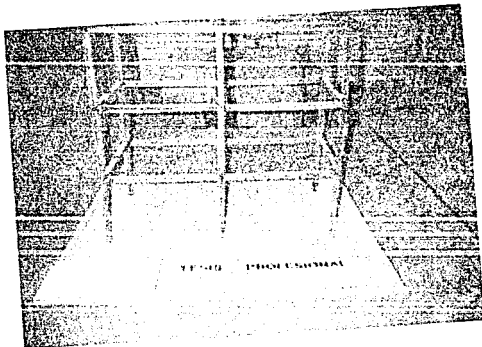
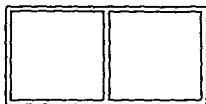
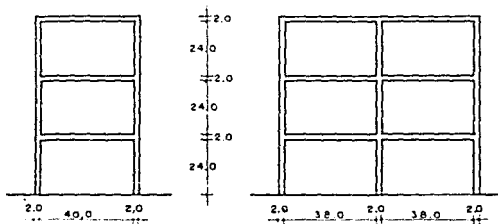


FIG II 6.2.4

De este modo las dimensiones definitivas de nuestro modelo, y con las cuales se efectuaron los cálculos del siguiente capítulo son :

DIMENSIONES FINALES PARA EL MODELO



Acol. en cm.

PLANTA

Además cada entrepiso llevará losas de acrílico simplemente apoyadas, para poder distribuir en ellas los pesos que se propongan en los análisis del capítulo siguiente y que son una variable importante.

CAPITULO III
CALCULO DE LAS CARACTERISTICAS DINAMICAS DEL MODELO

III.1. RIGIDECES DE ENTREPISO

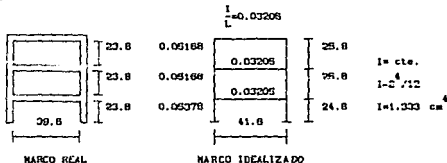
Las rigideces de entrepiso necesarias para el cálculo de las características dinámicas de nuestro modelo, serán obtenidas por los métodos descritos en el capítulo I y con tres valores diferentes del módulo de elasticidad del material:

- 1000 Kg/cm² que es el promedio obtenido de los resultados de las pruebas mecánicas.
- 1500 Kg/cm² que es 1.5 veces el valor anterior, y que de acuerdo a algunos comentarios es la proporción que existe entre el módulo de elasticidad en condiciones estáticas y el que se obtiene en condiciones dinámicas.
- y 1200 Kg/cm² que es un valor ligeramente menor del promedio de los dos primeros.

Lo anterior con el fin de tener un espacio más amplio de comparación con los resultados obtenidos experimentalmente.

III.1.2. METODO APROXIMADO (ECUACIONES DE WILBUR).

La idealización de los marcos que componen nuestro modelo es la siguiente:



De acuerdo a lo anterior, y usando las expresiones indicadas en el capítulo I para la condición que considera las columnas empotradas en la base, los cálculos son los siguientes:

$$\text{PARA } E = 1000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$k_1 = \frac{48(1000)}{24.8(922.619 + 1233.845)} = 0.8975 \text{ kg/cm} \times 3 \text{ marcos} = 2.6926 \text{ (kg/cm)}$$

$$k_2 = \frac{48(1000)}{25.8(998.45+1233.845+1609.98)} = 0.4842 \text{ kg/cm} \times 3 \text{ marcos} = 1.4526 \text{ (kg/cm)}$$

$$k_3 = \frac{48(1000)}{25.8(998.45+1609.984+804.992)} = 0.5430 \text{ kg/cm} \times 3 \text{ marcos} = 1.6351 \text{ (kg/cm)}$$

$$\text{Para } E = 1200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$k_1 = \frac{48(1200)}{24.8(922.619 + 1233.845)} = 1.077 \times 3 \text{ marcos} = 3.231 \text{ kg/cm}$$

$$k_2 = \frac{48(1200)}{25.8(998.45+1233.845+1604.984)} = 0.581 \times 3 \text{ marcos} = 1.743 \text{ kg/cm}$$

$$k_3 = \frac{48(1200)}{25.8(998.452+1609.984+804.992)} = 0.654 \times 3 \text{ marcos} = 1.962 \text{ kg/cm}$$

$$\text{Para } E = 1500 \text{ Kg/cm}^2$$

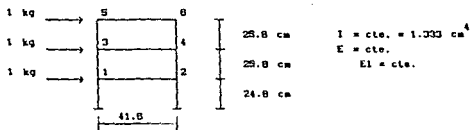
$$k_1 = \frac{48(1500)}{24.8(922.619 + 1233.845)} = 1.346 \times 3 \text{ marcos} = 4.0389 \text{ kg/cm}$$

$$K_2 = \frac{48(1500)}{25.8(998.45+1233.845+1609.984)} = 0.726 \times 3 \text{ marcos} = 2.1784 \text{ kg/cm}$$

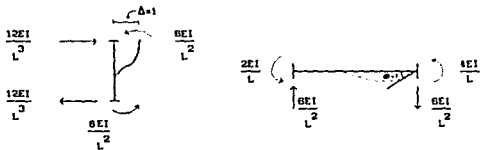
$$K_3 = \frac{48(1500)}{25.8(998.452+1609.984+804.992)} = 0.818 \times 3 \text{ marcos} = 2.4527 \text{ kg/cm}$$

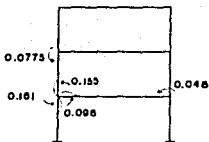
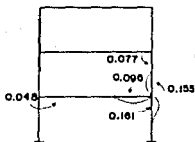
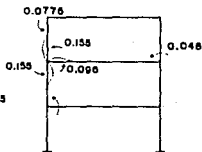
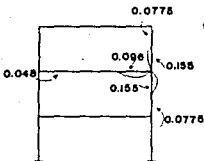
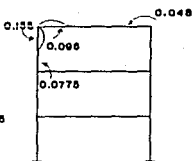
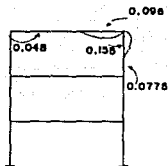
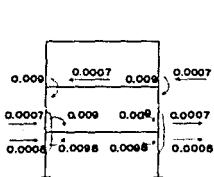
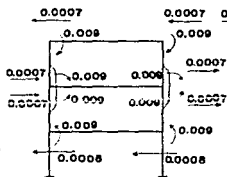
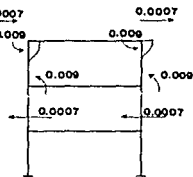
III.1.2 METODO EXACTO (RIGIDECES)

Para obtener los desplazamientos por entrepiso y a partir de ellos las rigideces, supongamos un sistema de fuerzas constante actuando en nuestro marco idealizado.



Después aplicamos giros y desplazamientos unitarios, recordando que para barras empotradas de sección constante de acuerdo a la teoría que fundamenta este método, las reacciones valen lo siguiente.



φ_1  φ_2  φ_3  φ_4  φ_5  φ_6  Δx_1  Δx_2  Δx_3 

De este modo conformamos la matriz de rigidez [K] de la estructura que igualada al vector de fuerzas previamente supuesto forman un sistema de ecuaciones que nos permite obtener los giros y desplazamientos de la estructura, que son precisamente las incognitas en este método.

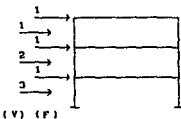
φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_8	Δx_1	Δx_2	Δx_3
0.412	.048	0.076	0	0	0	0.0008	0.009	0
0.048	0.412	0	0.076	0	0	0.0008	0.009	0
0.076	0	0.406	0.048	0.076	0	-0.009	0	0.009
0	0.076	0.048	0.406	0	0.076	-0.009	0	-0.009
0	0	0.076	0	0.251	0.048	0	-0.009	0.009
0	0	0	0.076	0.048	0.251	0	-0.009	0.009
0.0008	0.0008	-0.009	-0.009	0	0	0.003	-0.0014	0
0.009	0.009	0	0	-0.009	-0.009	-0.0014	0.0028	-0.0014
0	0	0.009	0.009	0.009	0.009	0	-0.0014	0.0014

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow [\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_8 \\ \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -161.7153 \\ -126.6605 \\ -126.6605 \\ -62.5188 \\ -62.5188 \\ 3856.0110 \\ 8992.2710 \\ 12138.8600 \end{bmatrix} \frac{1}{[EI]}$$

Al vector de desplazamientos obtenido al resolver el sistema de ecuaciones hace falta dividirlo por el valor constante de EI, lo cual se hace para los 3 valores propuestos de E y a partir de ellos se obtienen los valores de rigidez correspondientes.

Para $E=1000 \text{ Kg/cm}^2$

$$d = \begin{matrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2.89201 \\ 6.74420 \\ 9.104145 \end{bmatrix}$$



$$y_3 = 9.104145 \quad \Delta_3 = 2.359745 \quad k_3 = 0.4237 \times 3 \text{ MARCOS} = 1.2711 \text{ Kg/cm}$$

$$y_2 = 6.74420 \quad \Delta_2 = 3.85291 \quad k_2 = 0.5386 \times 3 \text{ MARCOS} = 1.6158 \text{ Kg/cm}$$

$$y_1 = 2.89201 \quad \Delta_1 = 2.89201 \quad k_1 = 1.0373 \times 3 \text{ MARCOS} = 3.1119 \text{ Kg/cm}$$

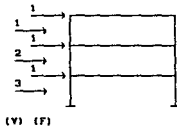
(y)

(Δ)

(k) = (V/k)

Para $E = 1200 \text{ Kg/cm}^2$

$$d = \begin{matrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2.41001 \\ 5.62017 \\ 7.58679 \end{bmatrix}$$



$$y_3 = 7.58679 \quad \Delta_3 = 1.96662 \quad k_3 = 0.5085 \times 3 \text{ MARCOS} = 1.5255 \text{ Kg/cm}$$

$$y_2 = 5.62017 \quad \Delta_2 = 3.20116 \quad k_2 = 0.6230 \times 3 \text{ MARCOS} = 1.8690 \text{ Kg/cm}$$

$$y_1 = 2.41001 \quad \Delta_1 = 2.41001 \quad k_1 = 1.2495 \times 3 \text{ MARCOS} = 3.7344 \text{ Kg/cm}$$

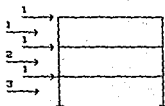
(y)

(Δ)

(k) = (V/k)

$$\text{Para } E = 1500 \text{ Kg/cm}^2$$

$$d = \begin{matrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1.92801 \\ 4.49613 \\ 6.06443 \end{bmatrix}$$



(V) (F)

$$y_3 = 6.06443 \quad \Delta_3 = 1.5733 \quad k_3 = 0.6356 \times 3 \text{ MARCOS} = 1.9068 \text{ Kg/cm}$$

$$y_2 = 4.49613 \quad \Delta_2 = 2.56812 \quad k_2 = 0.7788 \times 3 \text{ MARCOS} = 2.3364 \text{ Kg/cm}$$

$$y_1 = 1.92801 \quad \Delta_1 = 1.92801 \quad k_1 = 1.5560 \times 3 \text{ MARCOS} = 4.6680 \text{ Kg/cm}$$

(y)

(Δ)

(k) = (V/k)

Terminado lo anterior podemos agrupar los resultados obtenidos por los dos métodos en la tabla siguiente:

VALORES DE RIGIDECES OBTENIDOS

METODO EMPLEADO	RIGIDEZ (Kg/cm)	VALOR DEL MODULO DE YOUNG (kg/cm ²)		
		1000	1200	1500
APROXIMADO (ECUACIONES DE WILBUR)	k ₁	2.6926	3.231	4.0389
	k ₂	1.4526	1.743	2.1789
	k ₃	1.6351	1.962	2.4527
EXACTO (METODO DE LOS GIROS Y DESPLAZAMIENTOS)	k ₁	3.1119	3.7344	4.6680
	k ₂	1.6138	1.8690	2.3364
	k ₃	1.2711	1.5255	1.9068

Como se observa los valores de rigidez obtenidos con ambos procedimientos no difieren significativamente, sin embargo para la aplicación de los métodos de análisis dinámico se usarán, únicamente, las rigideces obtenidas por el método exacto.

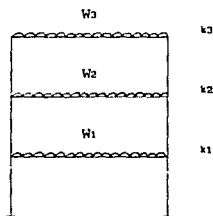
III.2 APLICACION DE LOS METODOS DESCRITOS

Una vez obtenidas las rigideces de entrepiso podemos aplicar los métodos descritos en el capítulo I para obtener las características dinámicas de nuestro modelo, es decir, periodos, frecuencias y desplazamientos de cada uno de los modos de vibrar de la estructura, y específicamente el periodo de la estructura en el primer modo, ya que es éste valor, el que se comparará directamente con el obtenido experimentalmente.

Además los cálculos se harán considerando tres condiciones de carga distintas (con 4, 6 y 8 Kg por entrepiso en cada caso).

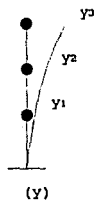
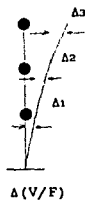
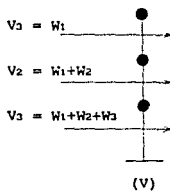
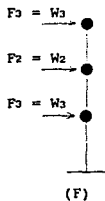
III.2.1. METODO DE RAYLEIGH

Los resultados conseguidos por este método se presentan en forma tabular y están de acuerdo a las consideraciones indicadas en el primer capítulo.



$$W_1 = W_2 = W_3 = \text{cte.}$$

$$T = 0.2 \sqrt{\frac{\sum W_i y_i^2}{\sum W_i y_i}}$$



W1 = W2 = W3 = 4Kg

I	K (Kg/cm)	V (Kg)	Δ (cm)	T (cm)	W1 Y1	Σ W1 Y1	W1 Y1 ²	Σ W1 Y1 ²	T (seg)	F (CPS)
1	3.1119	12	13.8562	3.8562	15.4248		59.4811			
2	1.6158	8	14.9511	8.8073	35.2292	98.4708	310.2741	941.3668	0.618	1.617
3	1.2711	4	13.1469	11.9542	47.8168		571.6116			
1	3.7344	12	13.2134	3.2134	12.8536		41.3038			
2	1.869	8	14.2804	7.4938	29.9752	83.2924	224.6282	675.2576	0.569	1.756
3	1.5255	4	12.6221	11.01159	40.4636		409.3257			
1	4.668	12	12.5707	2.5707	10.2828		26.434			
2	2.3364	8	13.4241	5.9948	23.9792	66.6324	143.7505	432.1452	0.509	1.963
3	1.9068	4	12.0978	8.0926	32.3704		261.9607			

W1 = W2 = W3 = 6Kg

I	K (Kg/cm)	V (Kg)	Δ (cm)	T (cm)	W1 Y1	Σ W1 Y1	W1 Y1 ²	Σ W1 Y1 ²	T (seg)	F (CPS)
1	3.1119	18	15.7842	5.7842	34.7052		200.7418			
2	1.6158	12	17.4267	13.2109	79.2654	221.5578	1104.1673	3177.0767	0.757	1.32
3	1.2711	6	14.7203	17.9312	1107.5872		1929.1676			
1	3.7344	18	14.8201	4.8201	28.9206		139.4002			
2	1.869	12	16.4205	11.2406	67.4436	187.4064	752.1005	2278.9537	0.697	1.434
3	1.5255	6	13.9331	15.1737	91.0422		1381.447			
1	4.668	18	13.8556	3.8556	23.136		85.2124			
2	2.3364	12	15.1361	8.9921	53.9526	149.9208	485.1472	1458.4478	0.624	1.603
3	1.9068	6	13.1466	12.1387	72.8322		884.0882			

W1 = W2 = W3 = 8Kg

I	K (Kg/cm)	V (Kg)	Δ (cm)	T (cm)	W1 Y1	Σ W1 Y1	W1 Y1 ²	Σ W1 Y1 ²	T (seg)	F (CPS)
1	3.1119	24	17.7123	7.7123	61.6984		475.8366			
2	1.6158	16	19.9022	17.6145	140.915	393.8808	12482.1649	7530.8550	0.875	1.143
3	1.2711	8	16.2938	23.9083	191.2664		14572.8545			
1	3.7344	24	16.4267	6.4267	51.4136		1330.4198			
2	1.869	16	18.5607	14.9874	119.8992	333.1656	1796.9773	15401.9382	0.805	1.242
3	1.5255	8	15.2442	20.2316	161.8528		13274.5411			
1	4.668	24	15.1414	5.1414	41.1312		211.472			
2	2.3364	16	16.8481	11.9895	95.916	266.5272	1149.9849	3457.0906	0.72	1.388
3	1.9068	8	14.1955	16.185	129.48		12095.6338			

III.2.2 METODO DE HOLZER

De acuerdo a la descripción hecha en el capítulo inicial este método es susceptible de ser programado en computadora debido a los cálculos iterativos que se tienen que hacer para llegar a los resultados requeridos.

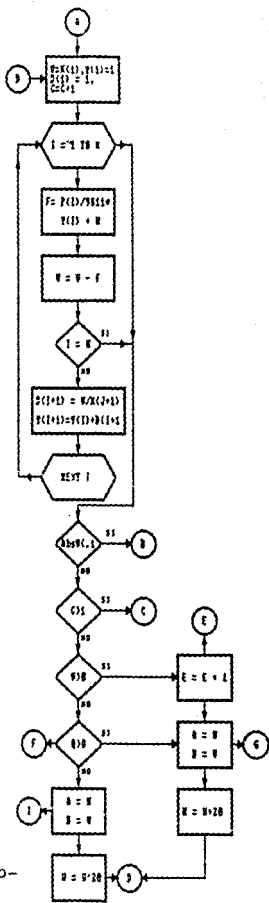
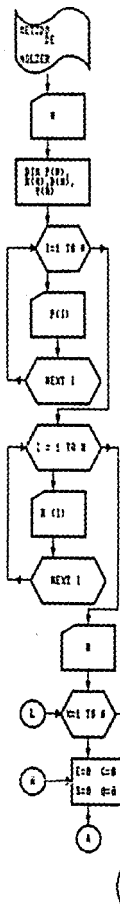
De hecho se conocen varios programas con diferentes alcances y características y en este trabajo se presenta una versión propia en lenguaje Basic en la cual los datos de entrada son: el número de grados de libertad, las rigideces de entrepiso, el peso por entrepiso y un valor inicial de velocidad angular con el cual comienza el proceso iterativo hasta darnos las características de cada una de los modos de vibrar de la estructura.

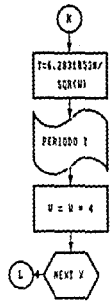
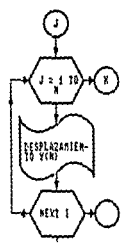
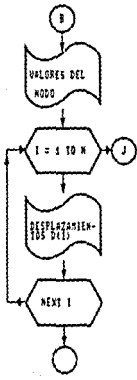
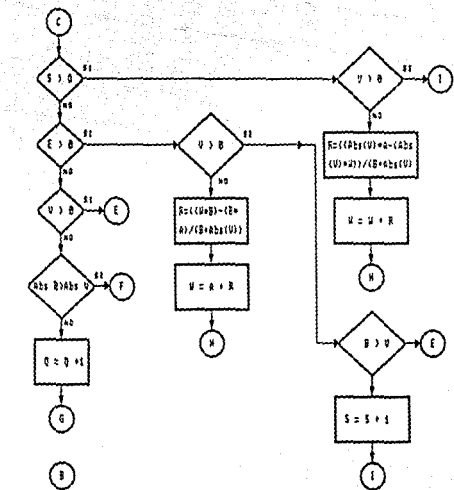
De este modo, en seguida se presenta el diagrama de flujo para la elaboración del programa, el listado del mismo y las corridas hechas para obtener los desplazamientos y periodos de los tres modos de vibrar de nuestra estructura.

III.2.3 METODO DE STODOLA-VIANELLO

Al igual que el anterior, este método también es adecuado para programarse por computadora y para su aplicación en el presente trabajo se utiliza una versión en lenguaje Basic incluida en la ref. No. 3 y del cual se elaboró el diagrama de flujo, para una mejor comprensión de las funciones de cada parte de dicho programa.

Así pues, lo mismo que en el método de Holzer, se muestra el diagrama de flujo, el listado del programa y las corridas del mismo.





```

10 TITLE
20 PRINT "MÉTODO DE HOLTIER"
30 INPUT "NÚMERO DE LIBERTAD=";N
40 DIM A(N),X(N),D(N),Y(N)
50 FOR I=1 TO N
60 PRINT "PESO(";I;")=";:INPUT P(I)
70 NEXT I
80 FOR I =1 TO N
90 PRINT "RIGIDEZ K(";I;")=";:INPUT K(I)
100 NEXT I
110 INPUT "VEL. ANGULAR SUPUESTA =" ;W
120 FOR X=1 TO N
130 E=0;C=0;S=0;Q=0
140 V=K(I);Y(I)=1;D(I)=1;C=C+1
150 FOR I=1 TO N
160 F=F(I)+P(I)*Y(I)-W
170 V=V-F
180 IF I=N THEN 230
190 D(I+1)=V/I*(I+1)
200 Y(I+1)=Y(I)+D(I+1)
210 NEXT I
220 IF ABS(V) <=.1 THEN 490
230 IF C=1 THEN 330
240 IF V>0 THEN 290
250 IF D>0 THEN 300
260 A=W;E=V
270 W=W-20
280 GOTO 140
290 E=E+1
300 A=W;E=V
310 W=W+20
320 GOTO 140
330 IF S>0 THEN 460
340 IF E>0 THEN 390
350 IF V>0 THEN 290
360 IF ABS(B)>ABS(V) THEN 250
370 Q=Q+1
380 GOTO 300
390 IF V>0 THEN 430
400 R = ((W*B)-(B*A))/(B+ABS(V))
410 W=A+R ;GOTO 130
430 IF B>V THEN 290
440 S=S+1 ; GOTO 260
460 IF V>0 THEN 260
470 R = ((ABS(V)*A)-(ABS(V)+W))/(B+ABS(V))
480 W=W+R ;GOTO 130
490 PRINT;PRINT; PRINT;PRINT"VALORES DEL MOD0 (";X;")=";PRINT
500 FOR I=1 TO N
510 PRINT "DESPLAZAMIENTO(";I;")=";D(I)
520 NEXT I;PRINT
525 FOR I=1 TO N
530 PRINT "DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(";I;")=";Y(I)/Y(N)
535 NEXT I
540 T = 6.2831853*/GCR(W)
550 PRINT; PRINT"PERIODO (";X;")=";T ; "SEG"
560 W=W+4 ;INPUT;A
570 NEXT X : END

```

METODO DE HOLZER

GRADOS DE LIBERTAD= 3

PESO(1)= 4
PESO(2)= 4
PESO(3)= 4

RIGIDEZ K(1)= 3.1119
RIGIDEZ K(2)= 1.6158
RIGIDEZ K(3)= 1.2711

VEL. ANGULAR SUPUESTA = 20

VALORES DEL MODO (1):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1
DESPLAZAMIENTO(2)= 1.673569
DESPLAZAMIENTO(3)= 1.269776
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)= .2535918
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)= .6779951
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (1)= .6283186 SEG

VALORES DEL MODO (2):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1
DESPLAZAMIENTO(2)= .2604089
DESPLAZAMIENTO(3)=-2.337469
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)=-.9284532
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)=-1.170231
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (2)= .2445727 SEG

VALORES DEL MODO (3):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1
DESPLAZAMIENTO(2)=-1.641223
DESPLAZAMIENTO(3)= .8213255
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)= 5.552406
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)=-3.560332
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (3)= .1671173 SEG

METODO DE HOLZER

GRADOS DE LIBERTAD= 3

PESO (1) = 6
PESO (2) = 6
PESO (3) = 6

RIGIDEZ K (1) = 3.1119
RIGIDEZ K (2) = 1.6158
RIGIDEZ K (3) = 1.2711

VEL. ANGULAR SUPUESTA = 20

VALORES DEL MODO (1) :

DESPLAZAMIENTO (1) = 1
DESPLAZAMIENTO (2) = 1.671621
DESPLAZAMIENTO (3) = 1.261308
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO (1) = .2542635
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO (2) = .6792956
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO (3) = 1

PERIODO (1) = .7665763 SEG

VALORES DEL MODO (2) :

DESPLAZAMIENTO (1) = 1
DESPLAZAMIENTO (2) = .247452
DESPLAZAMIENTO (3) = -2.347054
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO (1) = -.9094198
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO (2) = -1.134458
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO (3) = 1

PERIODO (2) = .2983807 SEG

VALORES DEL MODO (3) :

DESPLAZAMIENTO (1) = 1
DESPLAZAMIENTO (2) = -1.640517
DESPLAZAMIENTO (3) = .8184438
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO (1) = 5.620273
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO (2) = -3.599877
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO (3) = 1

PERIODO (3) = .2046963 SEG

METODO DE HOLZER

GRADOS DE LIBERTAD= 3

FESO(1)= 8
FESO(2)= 8
FESO(3)= 8

RIGIDEZ K(1)= 3.1119
RIGIDEZ K(2)= 1.6158
RIGIDEZ K(3)= 1.2711

VEL. ANGULAR SUPUESTA = 20

VALORES DEL MODO (1):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1
DESPLAZAMIENTO(2)= 1.670388
DESPLAZAMIENTO(3)= 1.255953
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)= .2546901
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)= .6801212
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (1)= .6830279 SEG

VALORES DEL MODO (2):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1
DESPLAZAMIENTO(2)= .2476843
DESPLAZAMIENTO(3)=-2.346886
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)=-.9097512
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)=-1.135082
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (2)= .3445642 SEG

VALORES DEL MODO (3):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1
DESPLAZAMIENTO(2)=-1.640491
DESPLAZAMIENTO(3)= .818341
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)= 5.622727
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)=-3.601308
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (3)= .2263338 SEG

METODO DE HOLZER

GRADOS DE LIBERTAD= 3

PESO(1)= 4

PESO(2)= 4

PESO(3)= 4

RIGIDEZ K(1)= 3.7344

RIGIDEZ K(2)= 1.869

RIGIDEZ K(3)= 1.5255

VEL. ANGULAR SUPUESTA = 20

VALORES DEL MODO (1):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1

DESPLAZAMIENTO(2)= 1.736278

DESPLAZAMIENTO(3)= 1.249592

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)= .2508863

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)= .6864946

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (1)= .5735737 SEG

VALORES DEL MODO (2):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1

DESPLAZAMIENTO(2)= .2527676

DESPLAZAMIENTO(3)=-2.36911

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)=-.8957826

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)=-1.122207

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (2)= .2221442 SEG

VALORES DEL MODO (3):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1

DESPLAZAMIENTO(2)=-1.633171

DESPLAZAMIENTO(3)= .8159978

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)= 5.46965

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)=-3.463222

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (3)= .1540079 SEG

METODO DE HOLZER

GRADOS DE LIBERTAD= 3

PESO(1)= 6
PESO(2)= 6
PESO(3)= 6

RIGIDEZ K(1)= 3.7344
RIGIDEZ K(2)= 1.869
RIGIDEZ K(3)= 1.5255

VEL. ANGULAR SUPUESTA = 20

VALORES DEL MODO (1):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1
DESPLAZAMIENTO(2)= 1.736278
DESPLAZAMIENTO(3)= 1.249591
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)= .2508863
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)= .6864946
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (1)= .7024815 SEG

VALORES DEL MODO (2):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1
DESPLAZAMIENTO(2)= .2571881
DESPLAZAMIENTO(3)=-2.366337
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)=-.9015919
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)=-1.133471
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (2)= .2724151 SEG

VALORES DEL MODO (3):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1
DESPLAZAMIENTO(2)=-1.627571
DESPLAZAMIENTO(3)= .7936398
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)= 6.021599
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)=-3.77898
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (3)= .188766 SEG

METODO DE HOLZER

GRADOS DE LIBERTAD= 3

FESO(1)= 8

FESO(2)= 8

FESO(3)= 8

RIGIDEZ K(1)= 3.7344

RIGIDEZ K(2)= 1.869

RIGIDEZ K(3)= 1.5255

VEL. ANGULAR SUPUESTA = 20

VALORES DEL MODO (1):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1

DESPLAZAMIENTO(2)= 1.736278

DESPLAZAMIENTO(3)= 1.249592

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)= .2508863

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)= .6864946

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (1)= .8111553 SEG

VALORES DEL MODO (2):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1

DESPLAZAMIENTO(2)= .2527676

DESPLAZAMIENTO(3)= -2.36911

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)= -.8957826

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)= -1.122207

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (2)= .3141593 SEG

VALORES DEL MODO (3):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1

DESPLAZAMIENTO(2)= -1.631937

DESPLAZAMIENTO(3)= .8110647

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)= 5.582608

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)= -3.527856

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (3)= .2178371 SEG

METODO DE HOLZER

GRADOS DE LIBERTAD= 3

PESO (1) = 4

PESO (2) = 4

PESO (3) = 4

RIGIDEZ K (1) = 4.668

RIGIDEZ K (2) = 2.3364

RIGIDEZ K (3) = 1.9068

VEL. ANGULAR SUPUESTA = 20

VALORES DEL MODO (1) :

DESPLAZAMIENTO (1) = 1

DESPLAZAMIENTO (2) = 1.739734

DESPLAZAMIENTO (3) = 1.26488

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO (1) = .2497119

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO (2) = .6841443

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO (3) = 1

PERIODO (1) = .516552 SEG

VALORES DEL MODO (2) :

DESPLAZAMIENTO (1) = 1

DESPLAZAMIENTO (2) = .2670223

DESPLAZAMIENTO (3) = -2.360044

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO (1) = -.9148953

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO (2) = -1.159193

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO (3) = 1

PERIODO (2) = .1995092 SEG

VALORES DEL MODO (3) :

DESPLAZAMIENTO (1) = 1

DESPLAZAMIENTO (2) = -1.633222

DESPLAZAMIENTO (3) = .8161878

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO (1) = 5.465501

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO (2) = -3.460877

DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO (3) = 1

PERIODO (3) = .1377459 SEG

METODO DE HOLZER

GRADOS DE LIBERTAD= 3

PESO(1)= 6
PESO(2)= 6
PESO(3)= 6

RIGIDEZ K(1)= 4.668
RIGIDEZ K(2)= 2.3364
RIGIDEZ K(3)= 1.9068

VEL. ANGULAR SUPUESTA = 20

VALORES DEL MODO (1):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1
DESPLAZAMIENTO(2)= 1.736167
DESPLAZAMIENTO(3)= 1.249677
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)= .250888
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)= .6864713
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (1)= .6283186 SEG

VALORES DEL MODO (2):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1
DESPLAZAMIENTO(2)= .2571331
DESPLAZAMIENTO(3)=-2.366419
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)=-.9014805
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)=-1.133281
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (2)= .2436528 SEG

VALORES DEL MODO (3):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1
DESPLAZAMIENTO(2)=-1.632927
DESPLAZAMIENTO(3)= .8150071
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)= 5.492082
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)=-3.476086
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (3)= .1687104 SEG

METODO DE HOLZER

GRADOS DE LIBERTAD= 3

PESO(1)= 8
PESO(2)= 8
PESO(3)= 8

RIGIDEZ K(1)= 4.668
RIGIDEZ K(2)= 2.3364
RIGIDEZ K(3)= 1.9068

VEL. ANGULAR SUPUESTA = 20

VALORES DEL MODO (1):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1
DESPLAZAMIENTO(2)= 1.739035
DESPLAZAMIENTO(3)= 1.261897
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)= .2499418
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)= .6845993
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (1)= .7295274 SEG

VALORES DEL MODO (2):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1
DESPLAZAMIENTO(2)= .2642242
DESPLAZAMIENTO(3)=-2.361872
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)=-.9110392
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)=-1.151758
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

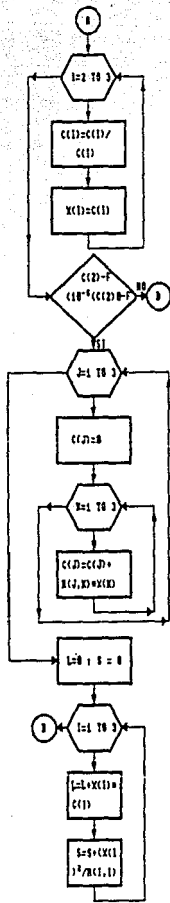
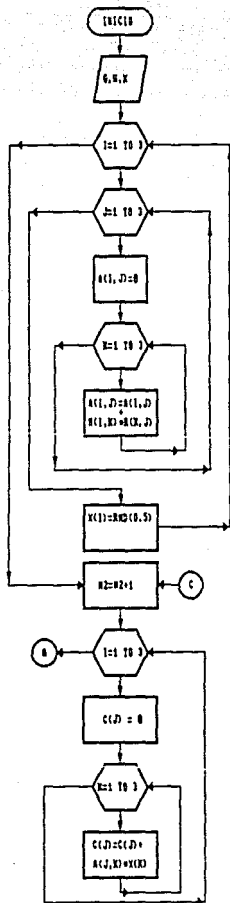
PERIODO (2)= .2819208 SEG

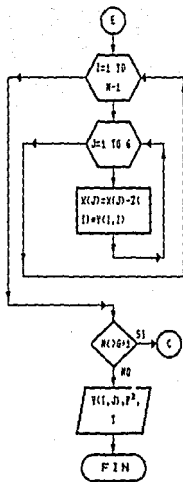
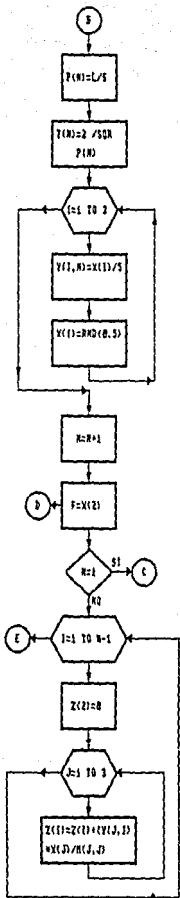
VALORES DEL MODO (3):

DESPLAZAMIENTO(1)= 1
DESPLAZAMIENTO(2)=-1.632551
DESPLAZAMIENTO(3)= .8135038
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(1)= 5.5263
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(2)=-3.495666
DESPLAZAMIENTO NORMALIZADO(3)= 1

PERIODO (3)= .1948201 SEG

METODO DE STODOLA - VIANELLO





```

1 REM << METODO DE STODOLA >>
2 REM LEE DATOS Y CALCULA (1/(M)*K)
5 N=1
10 READ G
12 DIM F(1), G(1), L(1), N(5), S(1), W(1)
14 DIM C(G), P(G), T(G), X(G), Z(G)
16 DIM A(G,G), M(G,G), R(G,G), Y(G,G)
20 FOR I=1 TO G
30 READ W
40 LET M(I,I)=981.0001/W
50 NEXT I
60 FOR I=1 TO G
70 FOR J=1 TO G
80 READ R(I,J)
90 NEXT J
100 NEXT I
110 FOR I=1 TO G
120 FOR J=1 TO G
130 LET A(I,J)=0
140 FOR K=1 TO G
150 LET A(I,J)=A(I,J)+M(I,K)*R(K,J)
160 NEXT K
170 NEXT J
180 LET X(I)=RND(.5)
190 NEXT I
192 REM ITERA
194 LET N2=N2+1
196 PRINT "ITERACION";N2,"MODO";G+1-N
200 FOR J=1 TO G
210 LET C(J)=0
220 FOR K=1 TO G
230 LET C(J)=C(J)+A(J,K)*X(K)
240 NEXT K
250 NEXT J
260 FOR I=2 TO G
270 LET C(I)=C(I)/C(1)
280 LET X(I)=C(I)
290 NEXT I
300 LET X(1)=1
310 IF (C(2)-F) < (.00001) AND (-.00001) < (C(2)-F) THEN 320 ELSE 510
315 REM CALCULA FRECUENCIAS Y PERIODOS
320 FOR J=1 TO G
330 LET C(J)=0
340 FOR K=1 TO G
350 LET C(J)=C(J)+R(J,K)*X(K)
360 NEXT K
370 NEXT J
380 LET L=0
390 LET S=0
400 FOR I=1 TO G
410 LET L=L+X(I)*C(I)
420 LET S=S+(X(I)^2)/M(I,I)
430 NEXT I
440 LET P(N)=L/S
450 LET T(N)=5.293185/SQR(P(N))

```

```

455 REM NORMALIZA Y ALMACENA MODOS
460 FOR I=1 TO G
470 LET Y(I,N)=X(I)/SQR(S)
480 LET X(I)=RND(.5)
490 NEXT I
500 LET N=N+1
505 REM DUITA MODOS
510 LET F=X(2)
520 IF N=1 THEN 194
530 FOR I= 1 TO N-1
540 LET Z(I)=0
550 FOR J=1 TO G
560 LET Z(I)=Z(I)+(Y(J,I)+X(J))/N(J,J)
570 NEXT J
580 NEXT I
590 FOR I= 1 TO N-1
600 FOR J=1 TO G
610 LET X(J)=X(J)-Z(I)+Y(J,I)
620 NEXT J
630 NEXT I
640 IF N=(G+1) THEN 194
645 REM IMPRIME RESULTADOS
650 PRINT "MATHIZ DE MODOS"
660 PRINT "MODDO 1, 2, ....., N"
670 PRINT
680 FOR I=1 TO G
690 FOR J=G TO 1 STEP -1
700 IF J=1 THEN PRINT Y(I,J) ELSE PRINT Y(I,J);
710 NEXT J
720 NEXT I
730 PRINT
740 FOR I= 0 TO G-1
750 PRINT "P("; I+1; "1^2=";P(G-I),"T(";I+1;")=";T(G-I);"SEG"
760 NEXT I
770 END
780 REM COLOCAR ABAJO EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD
790 DATA
800 REM COLOCAR ABAJO LOS PESOS "W"
810 DATA
820 DATA
830 DATA
900 REM COLOCAR LA MATRIZ DE RIGIDEZ
910 DATA
920 DATA
930 DATA

```

METODO DE STODOLA

W = 4 KG y E = 1000 KG/CM2

MATRIZ DE MODOS

MOD0 1, 2,, N

3.218951	8.070193	13.02915
8.604154	10.06579	-8.36051
12.68294	-8.877046	2.364986

P(1)^2=	100.2499	T(1)=	.6275349	SEG
P(2)^2=	665.2166	T(2)=	.2436118	SEG
P(3)^2=	1413.752	T(3)=	.1671065	SEG

METODO DE STODOLA

W = 5 KG y E = 1000 KG/CM2

MATRIZ DE MODOS

MOD0 1, 2,, N

2.628267	6.589285	10.63826
7.025256	8.218681	-6.826328
10.35558	-7.248078	1.931002

P(1)^2=	66.83327	T(1)=	.7685701	SEG
P(2)^2=	443.4778	T(2)=	.2983623	SEG
P(3)^2=	942.5011	T(3)=	.2046628	SEG

METODO DE STODOLA

W = 8 KG y E = 1000 KG/CM2

MATRIZ DE MODOS

MOD0 1, 2,, N

2.276135	5.706487	9.213
6.084062	7.117587	-5.911773
8.96819	-6.27702	1.672297

P(1)^2=	50.12496	T(1)=	.8874683	SEG
P(2)^2=	332.6083	T(2)=	.3445191	SEG
P(3)^2=	706.876	T(3)=	.2363242	SEG

METODO DE STODOLA

W = 4KG y E = 1200 KG/CM2

MATRIZ DE MODOS

MODD 1, 2,, N

3.16011 8.02194 13.07326
8.65922 10.08425 -8.281067
12.66024 -8.899801 2.400797

P(1)^2= 118.2322 T(1)= .5778458 SEG
P(2)^2= 798.0446 T(2)= .2224161 SEG
P(3)^2= 1664.588 T(3)= .1540021 SEG

METODO DE STODOLA

W = 4 KG y E = 1200 KG/CM2

MATRIZ DE MODOS

MODD 1, 2,, N

2.580223 6.549888 10.67427
7.070221 8.233753 -6.761463
10.33704 -7.266657 1.960242

P(1)^2= 78.82148 T(1)= .7077136 SEG
P(2)^2= 532.0298 T(2)= .272403 SEG
P(3)^2= 1109.725 T(3)= .1886132 SEG

METODO DE STODOLA

W = 8 KG y E = 1200 KG/CM2

MATRIZ DE MODOS

MODD 1, 2,, N

2.234535 5.672369 9.244191
6.122996 7.13064 -5.855599
8.952139 -6.29311 1.69762

P(1)^2= 59.11612 T(1)= .8171973 SEG
P(2)^2= 399.0223 T(2)= .3145439 SEG
P(3)^2= 832.2938 T(3)= .2177918 SEG

METODO DE STODOLA

W = 4 KG y E = 1500 KG/CM2

MATRIZ DE MODOS

MOD0 1, 2,, N

3.160176	8.021864	13.07329
8.659045	10.08439	-8.281081
12.66034	-8.89971	2.40059

P (1) ^2=	147.7936	T (1) =	.5168352 SEG
P (2) ^2=	997.5294	T (2) =	.1989377 SEG
P (3) ^2=	2080.794	T (3) =	.1377417 SEG

METODO DE STODOLA

W = 6 KG y E = 1500 KG/CM2

MATRIZ DE MODOS

MOD0 1, 2,, N

2.580273	6.549826	10.6743
7.070085	8.233869	-6.761474
10.33712	-7.266585	1.960074

P (1) ^2=	98.52907	T (1) =	.6329912 SEG
P (2) ^2=	665.0196	T (2) =	.2436479 SEG
P (3) ^2=	1387.196	T (3) =	.1686984 SEG

METODO DE STODOLA

W = 8 KG y E = 1500 KG/CM2

MATRIZ DE MODOS

MOD0 1, 2,, N

2.234585	5.672315	9.244212
6.122871	7.130739	-5.855607
8.952212	-6.293046	1.697474

P (1) ^2=	73.89679	T (1) =	.7309153 SEG
P (2) ^2=	498.7646	T (2) =	.2813404 SEG
P (3) ^2=	1040.397	T (3) =	.1947961 SEG

III.2.4 RESUMEN DE RESULTADOS

La comparación de los resultados analíticos con las experimentales será, básicamente, tomando en cuenta el periodo natural de vibración de la estructura en el primer modo por lo que para concluir este capítulo se muestra una tabla con los valores obtenidos por cada método y el promedio de los mismos. En dicha tabla se puede observar que los resultados obtenidos por uno y otro método no difieren significativamente.

Resultados Obtenidos con los Diferentes Metodos empleados:

$$E = 1000 \text{ Kg/cm}^2 \quad k_1 = 1.2711 \text{ Kg/cm}$$

$$k_2 = 1.6158 \text{ Kg/cm}$$

$$k_3 = 3.1119 \text{ Kg/cm}$$



PESO (W)	VALOR DE T ₁ (Seg)			PROMEDIO	
	RAYLEIGH	HOLZER	STODOLA	T(SEG)	f(CPS)
4 Kg	0.618	0.628	0.628	0.625	1.601
6 Kg	0.757	0.767	0.768	0.764	1.309
8 Kg	0.875	0.883	0.887	0.882	1.134

$$E = 1200 \text{ Kg/cm}^2 \quad k_1 = 1.5255 \text{ Kg/cm}$$

$$k_2 = 1.8690 \text{ Kg/cm}$$

$$k_3 = 3.7344 \text{ Kg/cm}$$



PESO (W)	VALOR DE T ₁ (Seg)			PROMEDIO	
	RAYLEIGH	HOLZER	STODOLA	T(SEG)	f(CPS)
4 Kg	0.569	0.574	0.578	0.574	1.743
6 Kg	0.697	0.702	0.708	0.702	1.424
8 Kg	0.805	0.814	0.812	0.811	1.233

$$E = 1500 \text{ Kg/cm}^2 \quad k_1 = 1.9068 \text{ Kg/cm}$$

$$k_2 = 2.3364 \text{ Kg/cm}$$

$$k_3 = 4.6680 \text{ Kg/cm}$$



PESO (W)	VALOR DE T ₁ (Seg)			PROMEDIO	
	RAYLEIGH	HOLZER	STODOLA	T(SEG)	f(CPS)
4 Kg	0.509	0.517	0.517	0.514	1.944
6 Kg	0.624	0.628	0.633	0.628	1.592
8 Kg	0.720	0.730	0.731	0.727	1.376

CAPITULO IV EXPERIMENTACION EN EL MODELO

IV.1 INSTRUMENTACION PARA LAS PRUEBAS

Una vez terminada la construcción del modelo y los cálculos de los parámetros dinámicos del mismo, sólo resta la realización de las pruebas en la mesa vibratoria, para poder comparar, finalmente, los valores medidos con los calculados. Para ello es necesaria una descripción de la mesa vibratoria, así como de los aparatos empleados para llevar a cabo las mediciones.

IV.1.1 BREVE DESCRIPCION DE LA MESA VIBRATORIA

La mesa vibratoria que se encuentra en los laboratorios de Ingeniería Civil de la ENEP Aragón, es una máquina construida en 1985 y su función es simular en forma aproximada los efectos que produce un movimiento senoidal, para poder desarrollar diversas investigaciones y experimentos que permitan conocer las propiedades dinámicas de diferentes estructuras y visualizar los fenómenos que se describen en las clases teóricas.

Las partes principales de la mesa vibratoria son:

1. *Motor eléctrico.* El cual es la parte principal del sistema, ya que es el que produce el movimiento de la mesa vibratoria, es de la marca General Electric modelo 21KT754GA, y opera con un voltaje de entre 220 y 440 volts a 1725 revoluciones por minuto.

2. *Sistema de poleas.* Está compuesto por tres poleas de acero que reducen el número de revoluciones por minuto que reciben del motor eléctrico y transmiten el movimiento al eje excéntrico.

3. *Eje excéntrico.* Es la parte del sistema mecánico en donde se transforma el movimiento que proviene del sistema de poleas en un movimiento de tipo senoidal que es transmitido a la placa de acero por medio de una biela.

4. *Volante de control de frecuencia.* Este volante controla la frecuencia de la mesa vibratoria al controlar la distancia que existe entre los dos ejes del sistema de poleas, uno de los cuales es móvil.

Dicho volante al hacerlo girar en sentido antihorario produce un alejamiento entre los ejes de las poleas, lo que ocasiona que las bandas que unen al motor y el sistema de poleas, se tensen, de tal forma que se produce un aumento en el número de revoluciones por minuto que se transmite al eje excéntrico y en consecuencia aumenta el valor de la frecuencia, que se proporciona a la mesa vibratoria.

Caso contrario ocurre al girar el volante en sentido horario y acercar los dos ejes, provocando que se aflojen las bandas de unión y que disminuya el número de revoluciones por minuto que se le proporciona al eje excéntrico y en consecuencia la frecuencia a la que vibra la mesa.

5. *Volante de control de desplazamiento.* Este volante es la parte que conecta a la biela que sobresale del eje excéntrico con la placa de acero.

El desplazamiento de la placa de acero se controla, al girar en cualquier sentido el volante mencionado con respecto a un eje transversal que es el punto de referencia para aumentarlo o disminuirlo ocasionando que suba o baje la posición del brazo que une a la placa de acero.

Se menciona que se gire el volante indistintamente, ya que el sistema está diseñado para que los desplazamientos sean simétricos, teniéndose un desplazamiento máximo en cualquiera de las dos posiciones extremas en que se tenga el brazo de la palanca de acero (en su parte más baja o más alta).

6. *Placa de acero.* Esta placa es de forma rectangular con dimensiones de 1.82 m. X 3.01 m. y es donde se colocan los modelos para estudiar sus propiedades dinámicas.

En las siguientes figuras se pueden observar cada una de las partes mencionadas. Además, para una descripción más detallada sobre la mesa vibratoria se debe consultar la referencia 22.

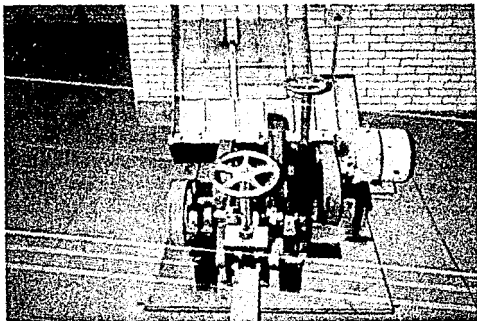


FIG. IV. 1.1. a

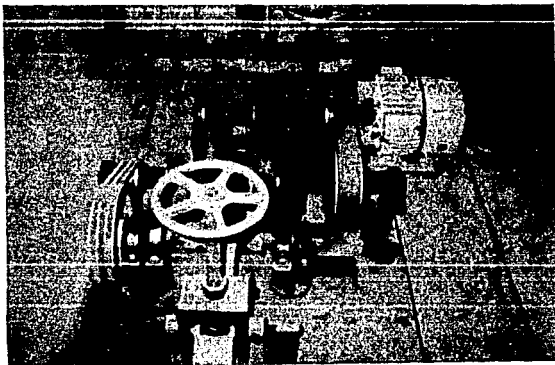


FIG. IV.1.1 b

Finalmente, podemos decir que las principales características de la mesa vibratoria de la ENEP Aragón, son:

- Que sólo produce movimiento en una dirección.
- El movimiento es horizontal.
- El movimiento que se produce es de tipo senoidal.
- Las variables son el valor de frecuencia y el desplazamiento.

IV.1.2 REVISIÓN DE LA CALIBRACIÓN DE LA MESA

Como se señaló, en la referencia 22 se presenta una descripción más detallada de las partes y el funcionamiento de la mesa vibratoria, así como una curva de calibración (Pag. 146) que nos permite conocer, de acuerdo al número de vueltas al volante de control de frecuencia, precisamente, la frecuencia a la que esta vibrando la mesa.

Sin embargo, debido al tiempo transcurrido a partir de esa calibración, se consideró necesario verificarla.

La revisión de la calibración de la mesa se llevo a cabo aumentando gradualmente el número de vueltas al volante de control de frecuencia y contando el número de ciclos que se presentaban en determinado tiempo, con ayuda de un cronómetro.

Esta verificación se realizó tres ocasiones, la primera aproximadamente dos meses antes de realizar las pruebas, la segunda un mes antes y la tercera y última dos días después de la ejecución del experimento .

Desde la primera revisión se observó que los valores de frecuencia para determinado número de vueltas de volante eran menores que los indicados en la citada referencia, esta diferencia se acentuó en la última revisión, la cual se debió seguramente, a que cada vez que se pone en funcionamiento la mesa, al ir aumentando la frecuencia, las bandas que unen el sistema de poleas se tensan, lo que ocasiona que se estiren gradualmente y que cada vez se necesiten más vueltas para obtener una frecuencia que antes se obtenía con un número de vueltas menor.

Los valores de la referencia 22, así como los obtenidos en las tres revisiones indicadas, se muestran a continuación.

Referencia 22:

No. Vueltas	C.P.N.	Periodo(seg.)
5	23.4	2.50
10	40.2	1.40
15	55.2	1.00
20	85.2	0.70
25	123.0	0.40

Revisión 1:

No. Vueltas	C.P.M.	Periodo(seg.)
5	18.0	3.75
10	20.5	2.93
15	27.0	2.22
20	37.0	1.62
25	50.0	1.20
30	72.0	0.83
35	106.0	0.57

Revisión 2:

No. Vueltas	C.P.M.	Periodo(seg.)
5	18.0	3.75
10	20.75	2.89
15	27.75	2.18
20	37.5	1.60
25	52.5	1.14
30	75.5	0.79
33	94.5	0.63
36	119.5	0.50

Revisión 3:

No. Vueltas	C.P.M.	Periodo(seg.)
5	14.63	4.10
10	19.25	3.12
15	25.28	2.38
20	34.09	1.76
25	47.08	1.28
30	67.04	0.90
33	84.11	0.71
34	91.84	0.65
35	98.90	0.61
36	107.14	0.56
37	115.38	0.52
38	125.00	0.48

Para mayor claridad, en la siguiente gráfica se muestran las curvas que se obtienen en cada caso: .

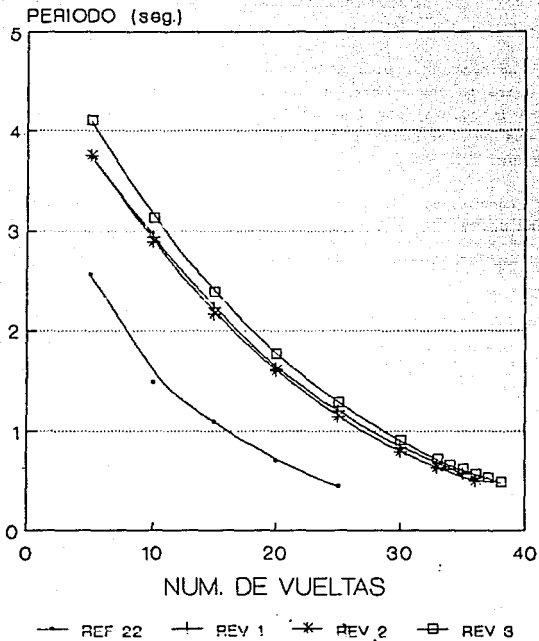


FIGURA IV. 1.2.4.

Aunque la segunda revisión se realizó un mes después que la primera, casi no existe diferencia entre ambas, ya que en ese lapso, prácticamente no se uso la mesa vibratoria, sin embargo, para la tercera revisión ya se habian hecho innumerables ensayos, así como las pruebas definitivas, razón por la cual existe una diferencia más notoria.

No obstante, para la comparación de los resultados obtenidos se usará la curva obtenida con la última calibración, ya que fue hecha inmediatamente después de terminar las pruebas y por ello es la que más se apega a las condiciones en que se realizaron las mismas.

Para ello, en la gráfica IV.1.2.b se muestra con más detalle dicha curva de calibración.

IV.1.3 DESCRIPCION DE LOS INSTRUMENTOS EMPLEADOS

Para el propósito de este trabajo, no es necesaria una descripción detallada de las características de los aparatos empleados y mucho menos de los principios que rigen su funcionamiento, por lo que sólo se dará una breve explicación de los mismos.

En términos generales los instrumentos necesarios para realizar las mediciones de manera adecuada son:

Un acelerómetro colocado en la parte más alta de la estructura que reciba directamente las vibraciones que se están produciendo.

CURVA DE CALIBRACION DE LA MESA
(REV. 8)

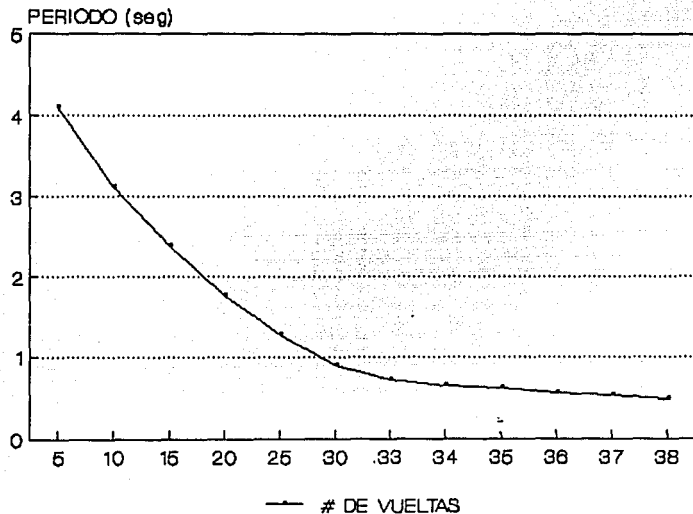


Fig. IV.1.2.b

Un acondicionador de señal o transductor, que recibe la señal mecánica del acelerómetro y la convierte en un impulso eléctrico.

Un osciloscopio en el que se visualiza la señal que viene del transductor y en la cual se pueden ver las características de frecuencia y amplitud de la vibración.

Así pues, en nuestro caso se emplearon dos acelerómetros del tipo piezoeléctrico y dos pequeñas cajas acondicionadoras de señal compatibles con este tipo de acelerómetro, todo lo cual fue proporcionado por el Instituto de Ingeniería de la UNAM, por intermedio del Doctor Neftalí Rodríguez Cuevas, Investigador de dicho Instituto. Respecto al osciloscopio el proceso fue más complicado.

En el Instituto de Ingeniería se nos indicó que debido a la baja frecuencia esperada en nuestro trabajo era necesario un osciloscopio de memoria (o persistencia) que permitiera guardar la señal recibida y poderla estudiar con detalle.

Con estas indicaciones en mente se logró conseguir en los laboratorios de electrónica de la ENEP Aragón un osciloscopio con esas características (de la marca Hewlett Packard) durante 15 días, sin embargo, debido al desconocimiento casi total de su manejo no se obtuvieron avances significativos y fue necesario entregar el aparato en el plazo convenido.

Debido a lo anterior se recurrió a otra de las áreas de Ingeniería Eléctrica, en la que se nos indicó que existía un analizador de espectros, que es un aparato que nos da directamente la frecuencia predominante, resultado de las vibraciones de una estructura.

El analizador de espectros indicado es de la marca Hewlett Packard modelo 3580A, y después de realizar una serie de pruebas preliminares, de revisar el manual del aparato y de consultar a técnicos del Instituto de Ingeniería, se concluyó que el diseño de este aparato está enfocado a la medición de frecuencias de audio y difícilmente podríamos captar frecuencias menores a los 5 Hertz por lo que el uso de este instrumento para realizar nuestras mediciones fue descartado.

Finalmente, fue necesario solicitar nuevamente el osciloscopio de memoria usado al principio y aunque con muchas dificultades logramos conseguirlo, por tres días únicamente.

Afortunadamente, debido al manejo que se había tenido de varios aparatos a lo largo del proceso (simultáneamente estuvimos usando un osciloscopio convencional y un generador de funciones, ambos de la marca Hewlett Packard), ya teníamos mucho más claro el modo de funcionamiento y los rangos en que debíamos esperar nuestras lecturas, por lo que fue finalmente con este aparato, además de los acelerómetros y los acondicionadores de señal prestados por el Instituto de Ingeniería, con el que se realizaron las pruebas definitivas durante los tres días que lo tuvimos en nuestro poder.

En las figuras IV.1.3.a, IV.1.3.b y IV.1.3.c; se pueden observar el analizador de espectros que tuvo que ser desechado, el osciloscopio convencional y el generador de funciones empleados como apoyo y el osciloscopio de memoria en el que se realizaron las mediciones, respectivamente.

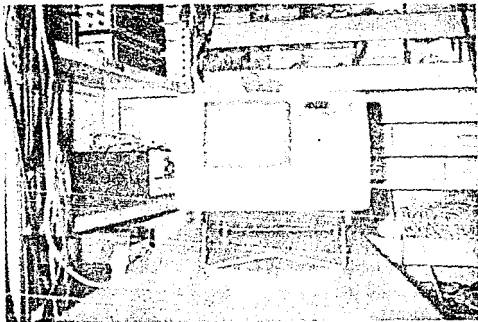


FIG. IV. 1. 3. 5

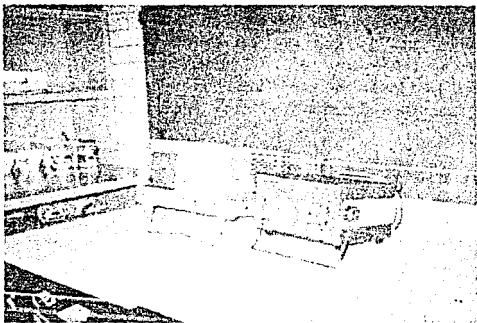


FIG. IV. 1. 3. 6



FIG. IV. 1.3.c

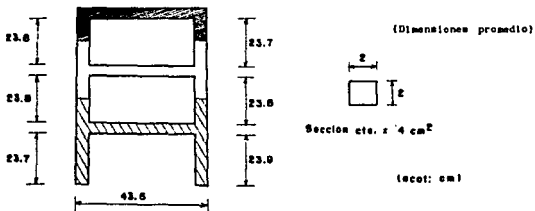
IV. 2 DESARROLLO DE LAS PRUEBAS

El proceso efectuado para poder llegar al momento culminante en que se realizarían las pruebas en el modelo llevo mes y medio aproximadamente y a lo largo del mismo, lo más difícil fue lo relativo al prestamo de los diferentes aparatos descritos y al funcionamiento de ellos, sin embargo, gracias al manejo constante que se les dio logramos familiarizarnos lo suficiente para tener la certeza de los rangos requeridos en las perillas de tiempo y amplitud, entre otras, para poder registrar adecuadamente nuestras mediciones. En seguida se describen los preparativos preliminares y el procedimiento seguido durante las pruebas definitivas.

IV. 2.1 PREPARACION DEL MODELO.

Durante el tiempo transcurrido para la determinación del aparato ideal para realizar las mediciones simultáneamente se preparó el modelo para el momento de la prueba colocándole unas láminas de acrílico simplemente apoyadas y a modo de losas, para poder distribuir en ellas los diferentes pesos por entrepiso considerados (4,6 y 8 kg.). Los pesos a distribuir en cada entrepiso fueron a base de pequeñas bolsas llenas de arena.

Para lograr el primer peso propuesto (4 kg.) fue necesario considerar el peso propio de la estructura, para lo que se determinó un peso volumétrico promedio de la resina de 1.20 gr/cm^3 (las losas fueron pesadas directamente) y se realizó la siguiente idealización de las contribuciones a cada entrepiso:



CONTRIBUCION AL ENTREPISO 1

Columnas y trabe:

$$(23.7 + 23.9 + 43.6 + \frac{23.8}{2} \times 2) \text{ cm} \times 4 \text{ cm}^2 \times 3 \text{ marcos} = 1380 \text{ cm}^3$$

Trabes longitudinales:

$$38 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}^2 \times 4 \text{ trabes} = 608 \text{ cm}^3$$

$$1380 \text{ cm}^3 + 608 \text{ cm}^3 = 1988 \text{ cm}^3 \times 1.2 \text{ gr/cm}^3 = 2385.6 \text{ gr.}$$

$$2385.6 \text{ gr.} + \underbrace{402 \text{ gr.} + 395 \text{ gr.}}_{\text{peso de losas}} = 3183 \text{ gr.}$$

$$\text{Peso propio en el entrepiso 1} = \boxed{3.183 \text{ kg.}}$$

CONTRIBUCION AL ENTREPISO 2

Columnas y trabes:

$$\left(\frac{23.8}{2} \times 2 + 43.6 + \frac{23.75}{2} \times 2\right) \text{ cm} \times 4 \text{ cm}^2 \times 3 \text{ marcos} = 1094 \text{ cm}^3$$

Trabes longitudinales:

$$38 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}^2 \times 4 \text{ trabes} = 608 \text{ cm}^3$$

$$1094 \text{ cm}^3 + 608 \text{ cm}^3 = 1702 \text{ cm}^3 \times 1.2 \text{ gr/cm}^3 = 2042.4 \text{ gr.}$$

$$2042 \text{ gr.} + \underbrace{407 \text{ gr.} + 408 \text{ gr.}}_{\text{peso de losas}} = 2857 \text{ gr.}$$

$$\text{Peso propio en el entrepiso 2} = \boxed{2.857 \text{ kg}}$$

CONTRIBUCION AL ENTREPISO 3

Columnas y trabes:

$$\left(\frac{23.75}{2} \times 2 + 43.6\right) \text{ cm} \times 4 \text{ cm}^2 \times 3 \text{ marcos} = 808 \text{ cm}^3$$

Trabes longitudinales:

$$38 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}^2 \times 4 \text{ trabes} = 608 \text{ cm}^3$$

$$808 \text{ cm}^3 + 608 \text{ cm}^3 = 1416 \text{ cm}^3 \times 1.2 \text{ gr/cm}^3 = 1699.2 \text{ cm}^3$$

$$1699.2 \text{ gr} + \underbrace{420 \text{ gr} + 407 \text{ gr}}_{\text{peso de losas}} = 2526 \text{ gr}$$

Contribución al entrepiso 3 = 2.526 kg

Por lo tanto para el aumento progresivo de peso por entrepiso a base de bolsitas de arena, podemos hacer la siguiente tabla:

ETAPA NIVEL	CANTIDAD DE ARENA POR AGREGAR			TOTAL KG
	PARA 6 EG	PARA 8 EG	PARA 8 EG	
1	0.817	2.00	2.00	4.817
2	1.143	2.00	2.00	5.143
3	1.474	2.00	2.00	5.474

Σ 15.434

En base a lo anterior, se prepararon:

48 bolsas de 250.0 gr cada una = 12.000 kg
 6 bolsas de 245.7 gr cada una = 1.474 kg
 4 bolsas de 285.8 gr cada una = 1.143 kg
 4 bolsas de 404.3 gr cada una = 0.817 kg
 Σ 15.434 kg

Para agregarlas paulatinamente a nuestra estructura y lograr los pesos indicados.

IV.2.2 DESCRIPCION DEL PROCEDIMIENTO SEGUIDO

Una vez hechos todos los preparativos llego el momento de las pruebas, las cuales se realizaron durante los tres días consecutivos que se nos permitio usar el osciloscopio de memoria.

El proceso seguido fue el siguiente:

- Se empotró el modelo en la mesa vibratoria.
- Se colocaron las bolsas necesarias para tener 4 kg por entrepiso.
- Se colocaron los dos acelerómetros en la parte más alta del modelo, es decir, en el entrepiso número 3 (uno en el marco central y otro en el extremo). Los acelerómetros fueron conectados a las cajas acondicionadoras de señal y estas a su vez al osciloscopio.
- Se puso a funcionar la mesa.
- Aumentamos la frecuencia de vibración llevando el volante de control hasta 25 vueltas.
- En este momento se hizo el primer registro, aprovechando la memoria del osciloscopio y copiando la señal recibida en unos formatos con la figura de la pantalla del osciloscopio (los cuales habian sido preparados previamente).
- Lo anterior se hizo para voltajes de 5 y 2.5 milivolts.

- Se aumentó la frecuencia paulatinamente y se repitió el procedimiento de registro de los resultados.

- Se desconectó la mesa vibratoria y se puso en cero el volante de control de frecuencia.

- Se colocaron las bolsas de arena necesarias para lograr los 6 kg por entrepiso.

- Se reinició el proceso de registro de datos.

- Finalmente, se repitió el procedimiento, ahora con 8kg por entrepiso.

De modo general estos fueron los pasos seguidos durante la realización del experimento, no obstante, es conveniente describir las variantes que se presentaron durante los tres días que se efectuaron las pruebas.

El primer día se omitió el peso de 6 kg por entrepiso y únicamente se obtuvieron registros para 4 y 8 kg. En esa ocasión se hicieron lecturas para 20, 25, 30, 33 y 36 vueltas del volante de control de frecuencia.

El segundo día se realizó una filmación del evento con el objeto de registrarlo y en la cual, además, se describe a grandes rasgos la serie de trabajos previos necesarios para llegar hasta ese momento.

Debido al carácter ilustrativo necesario para efectos de claridad en la filmación, este día no se tomo ningún registro del osciloscopio y todo fue encaminado a que se entendiera de la mejor manera posible todo el proceso seguido en esta modesta investigación.

El tercer y último día de pruebas fue muy similar al primero, sólo que en esta ocasión si se obtuvieron los registros completos, es decir, para 4, 6 y 8 kg por entrepiso y las lecturas se hicieron para 30, 34 y 38 vueltas al volante de control de frecuencia.

Aquí, es imprescindible señalar que al término de cada sesión el modelo terminaba visiblemente deformado, pero gracias a su gran ductilidad, era posible su recuperación total para probarlo nuevamente, sin embargo, es inegable que en cada ciclo de acción dinámica el modelo va perdiendo rigidez y las deformaciones se presentan en menor tiempo y de manera más acentuada.

Para mayor claridad en las figuras IV.2.2.a, IV.2.2.b, IV.2.2.c, IV.2.2.d y IV.2.2.e se muestra el modelo cargado con las bolsitas de arena para 4, 6 y 8 kg por entrepiso, así como el estado del mismo al término de las pruebas realizadas, en las cuales se aprecian perfectamente las deformaciones que sufrió el modelo y que son muy elocuentes sobre el efecto que ocasiona una acción dinámica que, específicamente, puede ser un sismo.

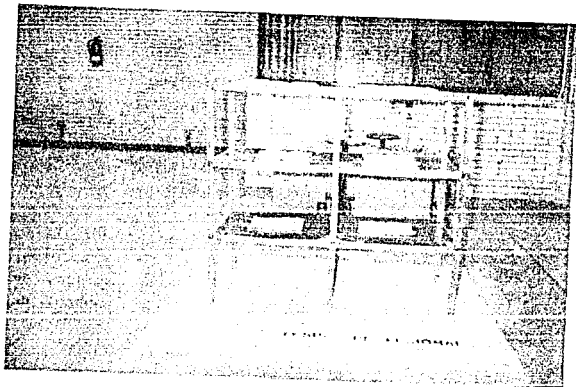


FIG. IV.2.2.a

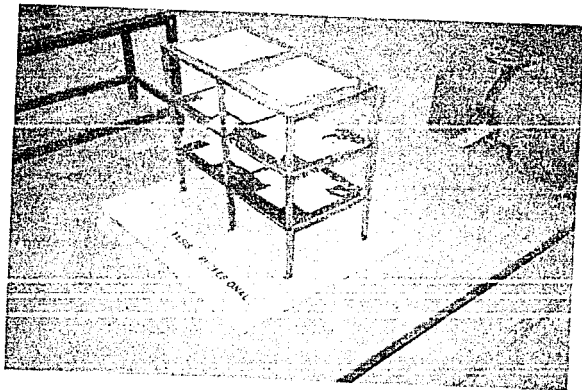


FIG. IV.2.2.b

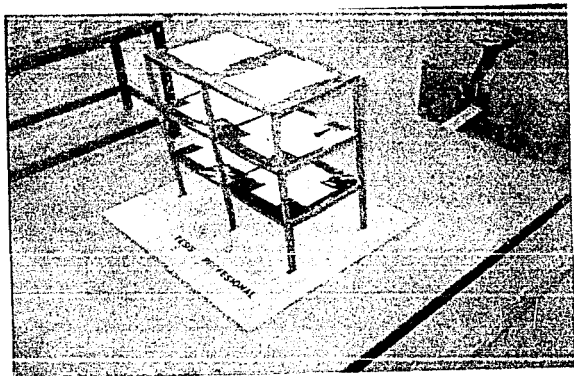


FIG. IV. 2.2.3

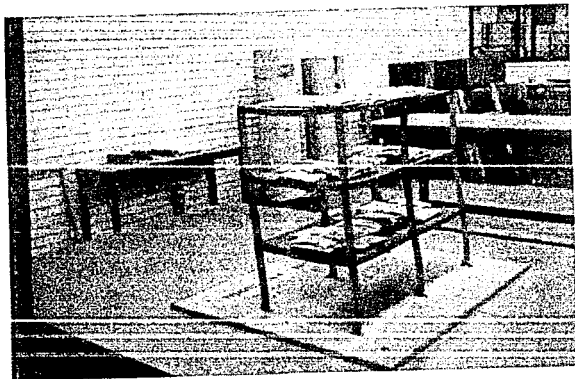


FIG. IV. 2.2.4

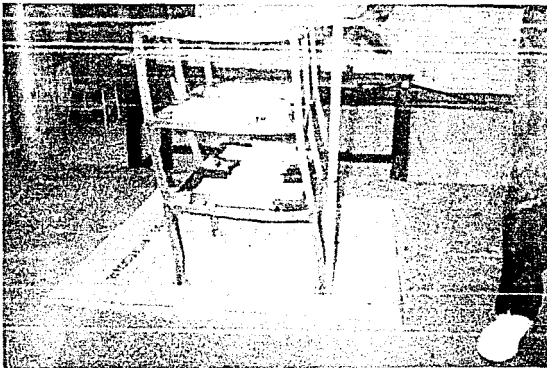


FIG. IV.2.2.

IV.2.3 RESULTADOS OBTENIDOS

Como se menciona anteriormente los resultados obtenidos fueron registrados en unos formatos con el dibujo de la pantalla del osciloscopio, en los cuales, posteriormente se realizó un análisis para determinar el periodo promedio en segundos al igual que la amplitud promedio en milivolts en cada caso.

Para poder obtener el valor de la amplitud en centímetros es necesario recurrir a las curvas de calibración de los dos acelerómetros usados, en las que a cada valor de voltaje le corresponde un valor en centímetros.

Mostrar todos los registros sería tedioso e innecesario por lo que sólo se presentan dos ejemplos de los registros típicos obtenidos con su análisis respectivo (figuras IV.2.3.a y IV.2.3.b).

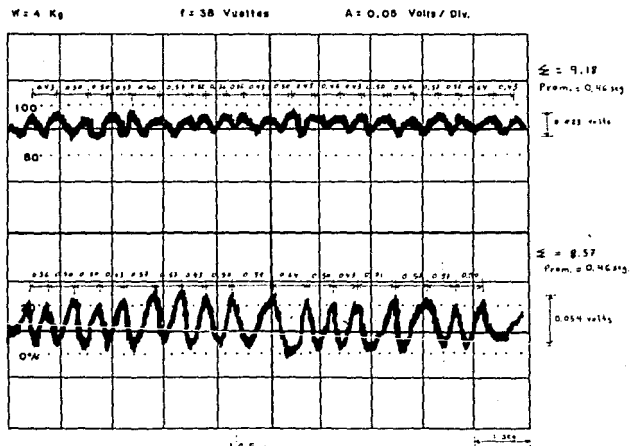
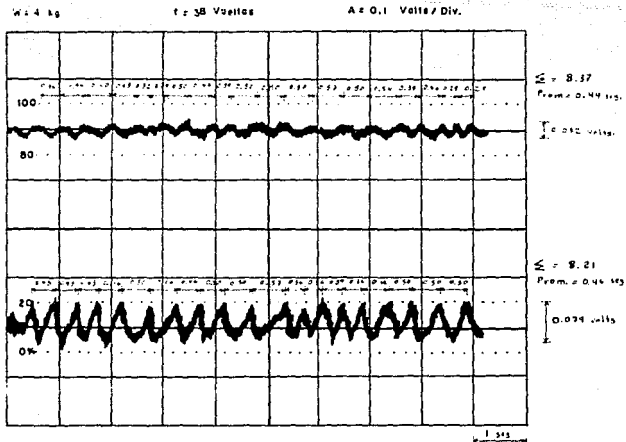
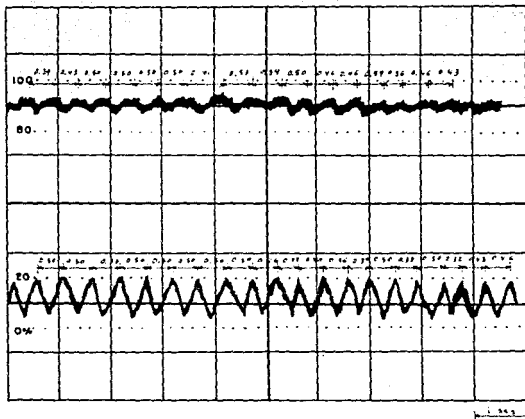


FIG. IV.2.3.a

W = 8 Kg

f = 38 Vueltas

A = 0.1 Volts / Div.



W = 8 Kg

f = 38 Vueltas

A = 0.05 Volts / Div.

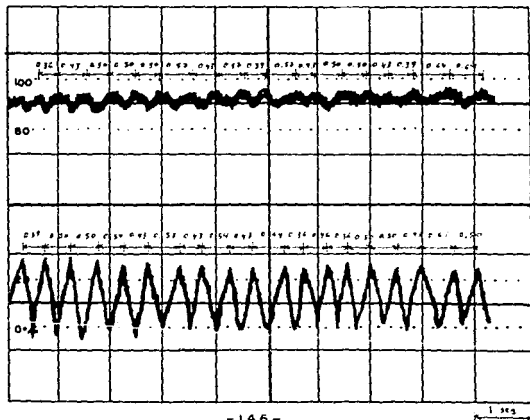


FIG. IV.2.3.b

Finalmente se muestran los resultados obtenidos en las siguientes tablas:

RESULTADOS DEL PRIMER DIA DE PRUEBAS

W (Kg)	No. DE VUELTAS AL VOLANTE DE CONTROL DE FREC.	CARACTERISTICAS DE LA VIBRACION				
		V = 5 MILIVOLTS		V = 2.5 MILIVOLTS		
		AMPLITUD (MILIVOLTS)	PERIODO PROMEDIO	AMPLITUD (MILIVOLTS)	PERIODO PROMEDIO	
4	125	E	--	--	0.54	--
		C	--	--	0.70	--
	130	E	--	--	1.79	--
		C	--	--	0.63	--
	133	E	1.80	0.59 #	1.45	0.62 #
		C	1.39	--	0.80	--
136	E	2.50	0.53 #	3.55	0.53 #	
	C	2.15	0.53 #	1.80	0.50 #	
8	125	E	--	--	1.07	--
		C	--	--	0.54	--
	130	E	--	--	1.07	--
		C	--	--	0.71	--
	133	E	1.95	0.72 #	1.80	0.70 #
		C	1.25	0.71 #	0.90	0.71 #
136 (**)	E					
	C					

E = ACELEROMETRO DE LA ESQUINA.
 C = ACELEROMETRO DEL CENTRO.
 ** = NO SE LLEVO A CABO.

RESULTADOS DEL TERCER DIA DE PRUEBAS

W (Kg)	No. DE VUELTAS AL VOLANTE DE CONTROL DE FRECUENCIAS	CARACTERISTICAS DE LA VIBRACION				
		V= 5 MILIVOLTS		V= 2.5 MILIVOLTS		
		AMPLITUD (MILIVOLTS)	PERIODO PROMEDIO	AMPLITUD (MILIVOLTS)	PERIODO PROMEDIO	
4	130	E	--	--	1.25	--
		C	--	--	0.45	--
	134	E	2.15	0.58 #	1.45	0.65 #
		C	--	--	2.90	0.72 #
	138	E	+3.95	0.46 #	+2.70	0.54 #
		C	1.60	0.44 #	1.15	0.46 #
6	130	E	--	--	1.25	--
		C	--	--	0.71	--
	134	E	1.60	0.63 #	1.00	0.63 #
		C	--	--	0.63	0.54 #
	138	E	+2.85	0.48 #	+2.50	0.49 #
		C	0.70	0.46 #	1.25	0.39 #
8	125	E	--	--	0.70	0.65 #
		C	--	--	--	--
	130	E	2.15	0.93 #	1.75	0.54 #
		C	1.95	0.88 #	1.25	--
	134	E	+4.30	0.63 #	+2.30	0.65 #
		C	1.80	0.64 #	1.25	0.62 #
	138	E	3.55	0.47 #	3.20	0.48 #
		C	1.45	0.49 #	0.90	0.45 #

(+) = MAYORES AMPLITUDES REGISTRADAS

CAPITULO V
INTERPRETACION Y COMPARACION DE RESULTADOS

V.1 INTERPRETACION DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES

De acuerdo a las tablas de resultados obtenidas podemos considerar, según las máximas amplitudes registradas, los periodos de resonancia aproximados y resumirlos en la siguiente tabla:

PESO POR ENTREPISO (kg)	No DE VUELTAS AL VOLANTE DE CONTROL DE FRECUENCIA	PERIODO PROMEDIO (seg)
4	38	0.50
6	38	0.49
8	34	0.64

Para el caso de 8 kg podemos asegurar que el periodo indicado es el que corresponde al periodo de resonancia, ya que las amplitudes máximas se obtuvieron al llegar a 34 vueltas del volante y disminuyeron al pasar a 38.

Sin embargo, para 6 kg y sobre todo para 4 kg hay que asumir con cautela que el periodo mostrado sea el periodo correspondiente a la resonancia, ya que en ambos casos se obtuvo en el límite del volante de control de frecuencia (38 vueltas) y no es difícil pensar, que de haber podido aumentar, aún más, la frecuencia de vibración de la mesa, se hubieran obtenido amplitudes mayores hasta llegar a un punto en que comenzaran a disminuir, sobre todo, para el valor de 4 kg por entrepiso.

V.2 COMPARACION ENTRE LOS VALORES EXPERIMENTALES Y LOS TEORICOS

Finalmente hay que hacer la comparación entre los valores obtenidos analíticamente en el capítulo III y los medidos durante el experimento, para lo cual es necesaria la siguiente tabla:

PESO POR ENTREPESO (kg)	PERIODO MEDIDO DE RESONANCIA (seg)	PERIODO ESPERADO (seg)		
		PARA 1000 Kg/cm ²	PARA 1200 Kg/cm ²	PARA 1500 Kg/cm ²
4	—	0.63	0.57	0.51
6	0.49	0.76	0.70	0.63
8	0.64	0.88	0.81	0.73

Para el peso de 4 kg no se indica valor medido del período, debido a las razones expuestas en el subcapítulo anterior, por lo que no se puede comparar de manera directa con los resultados teóricos.

Respecto a los casos de 6 y 8 kg, podemos observar que los períodos medidos se asemejan más, como era de esperarse, a los correspondientes al módulo de elasticidad del material para condiciones dinámicas ($E = 1500 \text{ kg/cm}^2$).

Las diferencias en cada caso, las podemos indicar en la siguiente tabla:

PESO POR ENTREPESO (kg)	PERIODO ESPERADO DINAMICO EN COND.	PERIODO MEDIDO DE RESONANCIA	DIFFERENCIA (seg)	%
4	0.51	—	—	—
6	0.63	0.49	0.14	22
8	0.81	0.64	0.17	21

Para conocer cual sería el verdadero módulo de elasticidad del material en condiciones dinámicas, podemos elaborar una gráfica de módulo de elasticidad contra periodo (en base a los cálculos previos) y de ahí interpolar para conocer el valor de E correspondiente a los periodos de resonancia medidos, lo cual se muestra en las figuras V.2.a y V.2.b.

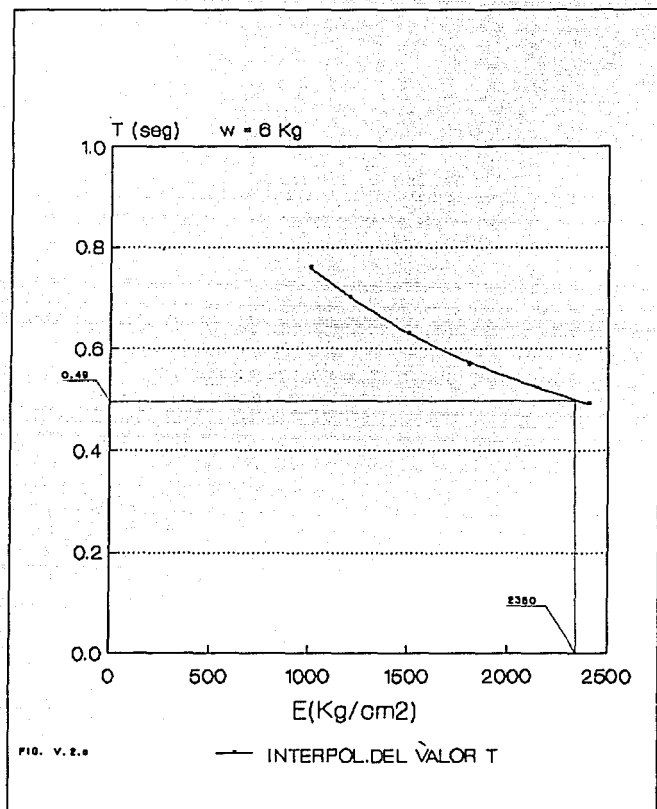
De acuerdo a dichas gráficas, el valor del módulo de elasticidad correspondiente al periodo de resonancia medido, para el caso de 6 kg es de 2350 kg/cm² y para el caso de 8 kg es de 1900 kg/cm², aproximadamente.

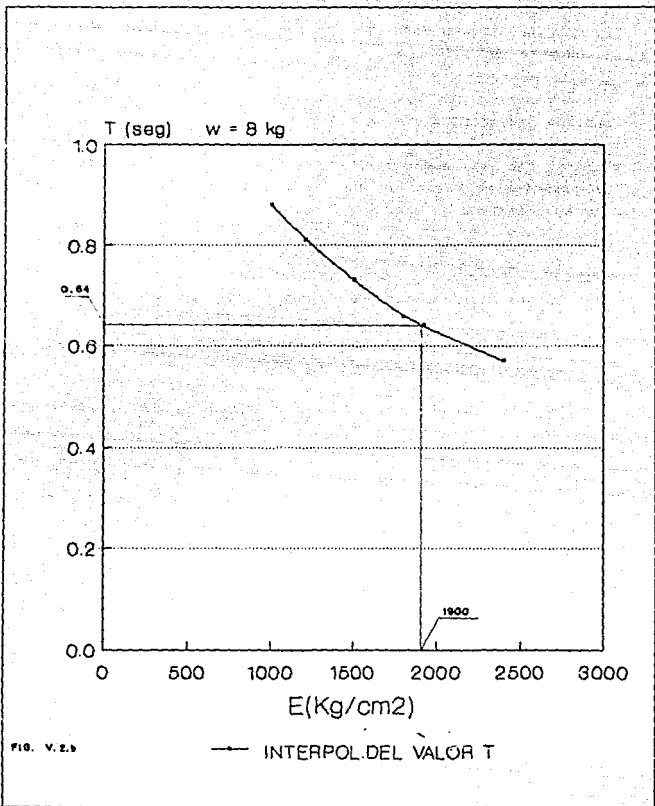
Por lo que, considerando un promedio, podemos asumir que el módulo de elasticidad del material del modelo en condiciones dinámicas, de acuerdo a las mediciones hechas, es de 2125 kg/cm².

Aquí, para inferir el módulo de elasticidad en condiciones estáticas, hay que ser cuidadosos y recordar que el E dinámico se supuso como 1.5 veces el E estático obtenido experimentalmente.

Si la relación anterior se cumple, podríamos decir que el verdadero módulo de elasticidad estático del material es $\frac{2125}{1.5} = 1400$ kg/cm². Sin embargo, esta recomendación se fundamenta en la experimentación con materiales de uso común en la construcción, como el acero y el concreto y no en uno tan peculiar como el que hemos usado en este trabajo, en el cual dicha relación puede ser aún mayor y por lo tanto el E estático aproximarse más al valor supuesto desde un principio (1000 kg/cm²).

Además, no hay que olvidar los repetidos ciclos de carga y descarga que sufrió el modelo, ya que se trata de un material de comportamiento no lineal, es decir, que la historia de cargas también determina una variación en el módulo elástico.





V.3 CONSIDERACIONES SOBRE LOS FACTORES QUE INFLUYERON A LO LARGO DE ESTA INVESTIGACION

A pesar de que los valores conseguidos experimentalmente se asemejan, razonablemente, a los esperados y el comportamiento del modelo durante la prueba, de acuerdo a los fundamentos teóricos, también fue el esperado, es conveniente recordar, por último, las principales variables que se presentaron durante el proceso correspondiente a la experimentación.

Durante el proceso de determinación del módulo de elasticidad estático del material con que se construyo el modelo

- La suposición de la homogeneidad e isotropía del material, que como se señaló, no es del todo cierta.

- Pequeños desajustes en el funcionamiento de la máquina de ensaye universal (como por ejemplo variaciones en la velocidad de aplicación de carga).

- Pequeños deslizamientos en las probetas fabricadas para las pruebas de tensión.

Durante la fabricación del modelo

- El empotre de los marcos en la base y ésta a su vez en la mesa, del cual a pesar del cuidado que se tuvo, no se puede afirmar que haya sido totalmente perfecto.

Durante la realización e interpretación de las pruebas

- Los posibles errores de calibración que hayan tenido, tanto los dos acelerómetros proporcionados por el Instituto de Ingeniería, como el osciloscopio donde se hicieron las lecturas.

- El promedio que se determinó en cada uno de los registros del osciloscopio para obtener el período y amplitud correspondientes a cada condición de carga.

Saber que tan determinante fue cada uno de estos factores es extremadamente difícil, no obstante a juzgar por los resultados, se puede pensar que la influencia de ellos fue aceptable y permitió comprobar de manera razonable las hipótesis de este trabajo.

CONCLUSIONES

Durante el desarrollo de cualquier trabajo experimental se presentan obstáculos de diversa índole, que pueden evitar su culminación. El presente trabajo no fue la excepción, pero afortunadamente, se pudo concluir, pese a algunas limitaciones referentes, principalmente, al equipo e instrumental necesario para realizar las pruebas requeridas y los ensayos preliminares.

De este modo, la medición del período de vibración en el que se presentó la resonancia para las tres condiciones de carga del modelo, gracias a los aparatos prestados por el Instituto de Ingeniería, nos permitió hacer varias consideraciones con respecto a los valores esperados según los cálculos teóricos.

Sin embargo, independientemente de las mediciones logradas durante las sesiones de prueba en el modelo, el aumento de los desplazamientos del mismo, es decir, el efecto de *resonancia*, se pudo observar a simple vista, en forma clara y contundente. Además, gracias a la gran ductilidad de la estructura, al término de cada prueba se observaban claramente las deformaciones debidas a la excitación dinámica, las cuales se aprecian en las fotografías incluidas en este trabajo y que son muy similares a los dibujos que frecuentemente se presentan en los textos de análisis y diseño estructural.

De esta forma queda demostrado el carácter didáctico e ilustrativo del modelo, el cual, por otra parte y tomando en cuenta únicamente los repetidos ciclos de carga y descarga, puede seguirse utilizando en futuras demostraciones o prácticas, ya que hasta la fecha, no ha sufrido ninguna fractura o falla que evite su nueva utilización.

Por otro lado, los métodos descritos en el capítulo I y empleados en el modelo para conocer sus características dinámicas, son aplicables a cualquier estructura, haciendo las consideraciones respectivas, por lo que los programas presentados constituyen una herramienta adecuada para el análisis dinámico y el cálculo de las fuerzas sísmicas que pueden actuar en cualquier edificación.

Finalmente, es necesario señalar que para la realización de este trabajo se tuvieron que librar obstáculos tan diversos como la ya mencionada falta de equipo, trabas burocráticas, limitación en los horarios de trabajo y algunos otros no menos trascendentes: sin embargo, el deseo de culminar este trabajo, al que de alguna forma le tomamos cariño, nos permitió superarlos y concluirlo satisfactoriamente; y aunque es difícil, no dudamos que surgieran trabajos de investigación similares y más completos, que contribuirán al desarrollo de las carreras de Ingeniería de nuestra querida escuela.

REFERENCIAS

1. "VIBRACIONES MECANICAS". W. Seto, William (serie Schaum). Mc Graw Hill, México, 1979.
2. "MECANICA PARA INGENIEROS (ESTATICA Y DINAMICA)". Mc Lean, W. G. & Nelson (serie Schaum). Mc Graw Hill, México, 1982.
3. "MECANICA VECTORIAL PARA INGENIEROS (DINAMICA)". 4a ed. P. Beer. Ferdinand & Johnston, E. Russell Jr. Mc Graw Hill, 1985.
4. "MECANICA DE LAS VIBRACIONES". Hartog, J.P. Den. C.E.C.S.A., México, 1976.
5. "DINAMICA ESTRUCTURAL". Martínez, I.; Navarro A. & Ceniceros, I. Universidad Autónoma de Zacatecas, México, 1983.
6. "VIBRACIONES MECANICAS". Roca Vila, R. & León L., Juan. LIMUSA, México.
7. "APUNTES DE LA MATERIA DE INGENIERIA SISMICA". (ENEP ARAGON). Prof. Galindo Solórzano, Amílcar.
8. "MANUAL DE DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS". Bazán Zurita, Enrique & Meli Piralla, Roberto. LIMUSA, México, 1989.
9. "VIBRATION PROBLEMS IN ENGINEERING". 4a ed. Timoshenko, S.; Young, P.H. & Weaver Jr. W. John Wiley and Sons, U.S.A., 1974.
10. "ESTRUCTURAL DYNAMICS (AN INTRODUCTION TO COMPUTER METHODS)". R. Craig, Roy. John Wiley and Sons, U.S.A. 1981.
11. "RESISTENCIA DE MATERIALES". Stioopin, R.A. Mir, Moscú, 1968.

12. "RESISTENCIA DE MATERIALES". W. Fitzgerald, Robert. Representaciones y Servicios de Ingeniería S.A., México, 1970.
13. "RESISTENCIA DE MATERIALES". L. Singer, Ferdinand & Pytel, Andrew (3a ed.). Harla, México, 1982.
14. "MANUAL DE RESISTENCIA DE MATERIALES". Pisarenko, G.S.; Yákovlev, A.P. & Matuéev, V.V. Mir, Rumania, 1979.
15. "INTRODUCCION A LA MECANICA DE SOLIDOS". V. Popov, Egor. LIMUSA, México, 1986.
16. "TEORIA DE LA ELASTICIDAD". Timoshenko & Goodier. Ediciones URMO, Bilbao, 1968.
17. "METODOS EXPERIMENTALES PARA INGENIEROS". 4a ed. Holman, Jack P. Mc Graw Hill, México, 1986.
18. "DICCIONARIO CIENTIFICO Y TECNOLOGICO". (TOMO I) T.C. Callacott, M.A. Omega, Barcelona, 1979.
19. "MANUAL DEL INGENIERO". (TOMO I) Hütte. Gustavo Gili, Barcelona, 1975.
20. "VACIADOS Y ENCAPSULADOS". (Colección Poliéster). G. Rosillo, J.A. & Trejo C., A. Ediciones Poliformas S.A., México, 1985.
21. "MANUAL DE PRACTICAS PARA EL LABORATORIO DE MECANICA DE MATERIALES DE INGENIERIA CIVIL DE LA ENEP ARAGON". Ramirez Mejía, Marco Antonio, 1986 (TESIS PROFESIONAL).
22. "ACCION DINAMICA EN SILOS". Gutierrez Vega, Joaquín, 1988 (TESIS PROFESIONAL).