

00362

4  
20j.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
Facultad de Ciencias

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

---

---

**UNA RECUPERACION DEL MODELO DE  
EINSTEIN DE DOS ESTADOS**

---

---

T E S I S

Que para obtener el Grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS  
(FISICA)

P r e s e n t a :

ARNULFO CASTELLANOS MORENO

México, D.F.

1992



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I C E

	Pág.
Introducción .....	2
Capítulo I. El camino de Planck hacia el quantum .....	5
Capítulo II. El trabajo de Einstein sobre la cuantización .....	14
2.1 Una analogía entre un gas ideal y la radiación monocromática .....	14
2.2 La teoría de fluctuaciones de Einstein .....	19
2.3 El modelo de Einstein de dos estados .....	20
Capítulo III. La teoría de Dirac sobre absorción y emisión de radiación .....	32
3.1 Antecedentes del trabajo de Dirac .....	32
3.2 La cuantización del campo según Dirac .....	33
3.3 El enfoque moderno para la segunda cuantización .....	46
Capítulo IV. La búsqueda de alternativas a la electrodinámica cuántica .....	57
4.1 Introducción .....	57
4.2 Las estocastizaciones del campo electromagnético .....	59
4.3 El enfoque semiclásico de la interacción de cargas eléctricas con radiación electromagnética .....	66
4.4 La Electrodinámica y la Optica Estocástica .....	73

<b>Capítulo V. Una recuperación del modelo de Einstein</b> .....	<b>77</b>
5.1 Descripción del sistema físico .....	77
5.2 Determinación de las probabilidades de transición ....	79
5.3 Cálculo de las propiedades estadísticas de la radiación electromagnética en equilibrio .....	82
5.4 Sobre la termodinámica de un gas de fotones .....	94
5.5 Transferencia de momento de una radiación monocromática a un espejo .....	97
5.6 Acerca del comportamiento fuera de equilibrio .....	99
5.7 Algunas conclusiones y consideraciones generales ....	102
5.8 Una evaluación breve de los distintos enfoques .....	104
 <b>Apéndice sobre procesos estocásticos</b> .....	 <b>111</b>
A. Definiciones .....	111
B. Ecuación de Chapman-Kolmogorov y ecuación maestra .....	117
C. Procesos de Nacimiento y Muerte .....	121
 <b>Referencias</b> .....	 <b>129</b>

## INTRODUCCION

Este estudio lleva como propósito recuperar el modelo de sistemas de dos estados atómicos con el cual Einstein obtuvo la ley de radiación de Planck y demostró que en la emisión y absorción de radiación de paquetes de energía se intercambia momento unidireccional entre la radiación y los sistemas atómicos.

Para demostrar que el moderno desarrollo de la teoría de procesos estocásticos -desconocido en los tiempos en que se desarrolló la vieja teoría cuántica- permite retomar muchas de las ideas físicas manejadas en aquella época, se estudia el intercambio de energía entre sistemas atómicos de dos niveles y una radiación formada por fotones.

Se considera que la mecánica cuántica es una teoría física útil porque proporciona formalismos matemáticos que predicen resultados confrontables con el experimento, pero que no brinda imágenes intuitivas de la naturaleza. Por lo tanto, se intenta establecer una diferencia entre las concepciones físicas con las cuales abordaban sus investigaciones los constructores de la vieja teoría cuántica, respecto de aquéllas a las cuales recurrieron los autores de la mecánica cuántica en su forma madura. Adjudicamos a los primeros una visión de la física como una ciencia capaz de proporcionar tanto los formalismos como las imágenes intuitivas señaladas.

Para evitar consideraciones filosóficas que ya han sido abordadas por muchos estudiosos de la filosofía de la física<sup>(1-3)</sup>, se recurre directamente a revisar los trabajos originales de Planck<sup>(4)</sup>, Einstein<sup>(5-6)</sup> y Dirac<sup>(7)</sup>, acerca del quantum de energía, seleccionándose aquellos materiales más representativos de las dos concepciones de hacer física que aquí se distinguen (con y sin imágenes de la naturaleza), buscando demostrar con las mismas consideraciones de los autores la aseveración arriba mencionada.

Es claro de diversos estudios<sup>(8)</sup> que los constructores de la

Es claro de diversos estudios<sup>(8)</sup> que los constructores de la

teoría cuántica madura basaron sus actividades en física en una concepción filosófica que fundamentaba su concepto de una ciencia sin imágenes; sin embargo, este aspecto no se revisa aquí. Nos concretamos a analizar en el primer capítulo de este estudio el trabajo que lleva a Max Planck a la hipótesis del quantum de energía, el de Einstein sobre creación y transformación de la luz (mal llamado del efecto fotoeléctrico), el de Einstein sobre la fórmula de fluctuaciones de la radiación y de los coeficientes AB, así como el de Dirac acerca de la cuantización del campo electromagnético.

Solo se incluyen aquellas partes de sus trabajos que a mi juicio indican claramente las ideas físicas que Planck, Einstein y Dirac tenían en mente. Al terminar el tercer capítulo se resume la teoría de la segunda cuantización en su versión moderna, con el fin de reforzar la tesis de que las ideas formalizadoras de Dirac -en realidad de casi todos los creadores de la versión madura de la teoría cuántica- dieron origen a un formalismo matemático que conjunta las concepciones ondulatoria y corpuscular de la luz, pero sólo en el formalismo matemático.

En el cuarto capítulo se revisan varias alternativas que se han intentado para explicar fenómenos de interacción de átomos con radiación electromagnética sin necesidad de recurrir a la electrodinámica cuántica. En este caso se tocan brevemente: las estocastizaciones del campo electromagnético con base en la mecánica cuántica estocástica, el llamado enfoque semiclásico -consistente en cuantizar la partícula manteniendo una descripción clásica del campo-, y por último la Electrodinámica Estocástica y la Óptica Estocástica. En este capítulo no se busca presentar discusiones exhaustivas del formalismo y de las ideas físicas en su totalidad, sólo se exponen aquellas que tienen importancia para los fines de este trabajo, que en este punto radican en el objetivo de demostrar que la electrodinámica cuántica es motivo de insatisfacción para muchos físicos y que esto puede deberse a la ausencia de una imagen concreta de la naturaleza, asociada con el formalismo matemático.

las ideas físicas aparentemente abandonadas, como es el caso del trasfondo estocástico de la mecánica cuántica (especulación planteada por Schrödinger ya en 1931), la interpretación electromagnética del cuadrado del valor absoluto de la función de onda (también de Schrödinger), la existencia de una radiación del punto cero (inicialmente planteada por Planck y explorada luego por Einstein), en realidad son ideas que han permanecido latentes y que podrían llevar a planteamientos importantes en la revisión de los fundamentos de la teoría cuántica. Sobre la consideración de que recurrir a viejas ideas, con nuevos conceptos y nuevos formalismos matemáticos, permite ofrecer alternativas menos misteriosas que la teoría cuántica, se trabaja el modelo de dos estados<sup>(9)</sup> utilizado por Einstein en 1917 para obtener la ley de Planck y la transmisión de un impulso en la emisión de paquetes de energía; se demuestra que sin recurrir al formalismo matemático de la mecánica cuántica madura se pueden obtener todas las propiedades termodinámicas de la radiación del cuerpo negro y se hace ver que este mismo modelo de Einstein puede permitir el estudio de una radiación electromagnética en un proceso de relajación hacia el equilibrio. Por último, se plantea a nivel de conjetura la idea de que el estudio de la transmisión del impulso junto con la emisión de paquetes de energía podría ofrecer descripciones interesantes de la interacción de cargas eléctricas con radiación.

## CAPITULO I

En su estudio sobre la radiación contenida en una cavidad, Planck se basa en que la ley de Kirchhoff es válida independientemente del material de las paredes de dicha cavidad. Por consiguiente, para establecer un modelo matemático de la interacción de la radiación con dichas paredes, selecciona el sistema que permite una descripción más simple: una partícula cargada moviéndose en potenciales de oscilador armónico de frecuencia  $\omega$  dada.

Su modelo matemático consiste, por lo tanto, en una partícula cargada bajo la influencia de una fuerza lineal, un campo eléctrico periódico en el tiempo (la radiación encerrada en la cavidad) y una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad de la partícula, que le permite modelar la transmisión de energía de la partícula a la radiación. Si la radiación es isotrópica podemos analizar sólo una de las coordenadas del oscilador; se tiene entonces la siguiente ecuación de movimiento

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x + \alpha \frac{dx}{dt} = \frac{e}{m} \mathcal{E}_x, \quad (1.1)$$

donde  $e$  es la carga de la partícula,  $m$  su masa y  $\omega$  la frecuencia con que vibra y  $\mathcal{E}_x$  la componente  $x$  del campo eléctrico de la radiación incidente.

Si la radiación y las paredes de la cavidad están en equilibrio térmico, es de esperarse que el movimiento de la partícula cargada sea estacionario; por consiguiente, se propone

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\Omega) \text{Exp}(i\Omega t) d\Omega, \quad (1.2)$$

$$\mathcal{E}_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{E}}_x(\Omega) \text{Exp}(i\Omega t) d\Omega,$$



se sustituye (1.2) en (1.1) para calcular la solución estacionaria de la ecuación diferencial y se calcula la energía  $\langle E \rangle_t$  del oscilador, promediada en un periodo

$$\langle E \rangle_t = m\omega^2 \langle x(t)x''(t) \rangle_t \quad (1.1)$$

y se encuentra

$$\langle E \rangle_t = \frac{3\pi c^3}{2\omega^2} |\tilde{\xi}_x(\omega)|^2, \quad (1.4)$$

Si la radiación es isotrópica, las tres componentes espaciales del campo contribuyen a la densidad de energía  $u$ , con la misma cantidad promediada en un periodo, luego

$$u = \frac{1}{4\pi} \langle \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 \rangle_t = \frac{3}{4\pi} \langle \xi_x^2 \rangle_t, \quad (1.5)$$

pero de que

$$\langle \xi_x^2 \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_x(\Omega)|^2 d\Omega,$$

se tiene

$$u = \frac{3}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_x(\Omega)|^2 d\Omega = \frac{3}{2\pi} \int_0^{\infty} |\xi_x(\Omega)|^2 d\Omega; \quad (1.6)$$

por otro lado

$$u = \int_0^{\infty} \rho(\omega, t) d\omega, \quad (1.7)$$

donde  $\rho(\omega, T)$  es la densidad espectral del campo. Por lo tanto, comparando (1.7) con (1.6) y usando (1.5) se establece

$$\rho(\omega, t) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \langle E \rangle_t \quad (1.8)$$

que relaciona la densidad espectral con la energía del oscilador promediada en el tiempo. Una vez obtenida esta ecuación, Planck puede estudiar las propiedades de la radiación trabajando con el oscilador arriba descrito.

En consideración a una crítica de Boltzmann al trabajo de Planck<sup>(10)</sup>, este último plantea una analogía con la hipótesis del caos molecular del primero y propone la que llama *radiación natural*, conforme a la cual las vibraciones armónicas parciales, que componen una onda de radiación térmica, son completamente incoherentes<sup>(11)</sup>.

En lo sucesivo, para simplificar la notación denotaremos  $\langle E \rangle_t = U$ . Planck asocia a los osciladores una entropía  $S$  dada de la forma

$$S = \frac{U}{av} \ln \frac{U}{ebv} \quad (1.9)$$

donde  $\nu$  es la frecuencia del oscilador (dada por  $\nu = \omega/2\pi$ ),  $e$  es el número de Euler y  $a$  y  $b$  son constantes. Enseguida considera dos osciladores cualesquiera de la pared, de frecuencias, entropías y energías  $\nu, S, U; \nu', S'$  y  $U'$  respectivamente. Impone las condiciones de conservación de la

energía y de equilibrio térmico mediante las expresiones

$$\begin{aligned}\delta U + \delta U' &= 0 \\ \delta S + \delta S' &= 0 \quad ,\end{aligned}\tag{1.10}$$

calcula

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial U} \delta U = \frac{1}{av} \ln\left(\frac{U}{bv}\right) \quad ,$$

análogamente

$$\delta S' = \frac{\partial S'}{\partial U'} \delta U' = \frac{1}{av'} \ln\left(\frac{U'}{bv'}\right) \quad .$$

y usando (1.10) resulta

$$-\frac{1}{av} \ln\left(\frac{U}{bv}\right) = -\frac{1}{av'} \ln\left(\frac{U'}{bv'}\right) \quad ,$$

de donde obtiene que

$$-\frac{1}{av} \ln\left(\frac{U}{bv}\right) = B \quad ,\tag{1.11}$$

con B constante. Por otro lado, de la termodinámica  $\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$ , por lo que puede proponer  $B=1/T$  y escribir

$$\frac{1}{T} = -\frac{1}{av} \ln\left(\frac{U}{bv}\right) .$$

resolviendo para U resulta

$$U = bv \text{Exp}\left(\frac{-av}{T}\right) , \quad (1.12)$$

finalmente usa (1.8) y encuentra la ley de radiación de Wien

$$\rho(\nu, T) = C\nu^3 \text{Exp}\left(\frac{-av}{T}\right) . \quad (1.13)$$

Como es sabido, los resultados tanto teorico-clásicos como experimentales indican que a bajas frecuencias la ley de radiación correcta es la de Rayleigh

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT . \quad (1.14)$$

Planck observa que la entropía de radiación dada por (1.9) cumple con

$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} \sim U^{-2}$ , mientras que la entropía que puede llevar a (1.14) cumple con

$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} \sim U^{-1}$ . Entonces propone una interpolación de la forma

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{a}{U(U+b)} , \quad (1.15)$$

que contiene a ambas como caso límite. Luego

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = \int \frac{adU}{U(U+b)},$$

e integrando e invirtiendo resulta:

$$U = \frac{b}{\text{Exp}\left(\frac{b}{aT}\right) - 1} \quad (1.16)$$

y usando (1.8) obtiene

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi b\nu^2/c^3}{\text{Exp}\left(\frac{b}{aT}\right) - 1}, \quad (1.17)$$

que Planck llama una mejora a la ley de radiación de Wien y contiene a (1.13) y (1.14) como casos límite.

Con el trabajo desarrollado hasta este punto Planck tiene un panorama en el cual las diversas definiciones de entropía lo llevan a distintas leyes de radiación. Sin embargo, sólo una es correcta, de donde concluye que necesita un criterio físico para seleccionar sólo una de las entropías posibles, a saber, aquella que cumpla con (1.15). Para construir la entropía, desarrolla entonces el enfoque microscópico que se esboza a continuación:

Sean  $N$  osciladores armónicos de frecuencia  $\nu$  en las paredes de la cavidad, sea  $S_N$  su entropía y  $U_N = NU$  su energía. Siguiendo el enfoque microscópico de Boltzmann, Planck propone

$$S_N = k \ln W, \quad (1.18)$$

donde  $W$  es el número total de posibles distribuciones de la energía  $U_N$  entre los  $N$  osciladores y  $k$  es la ahora llamada constante de Boltzmann.

Planck no sigue completamente a Boltzmann, puesto que no maximiza la entropía dada en (1.18), pero utiliza un método de conteo de estados como sigue:

Dividió la energía total  $U_N$  de los osciladores en  $P$  elementos de magnitud  $\epsilon$ , susceptibles de ser repartidos entre los  $N$  osciladores armónicos. Se trataba, entonces, de distribuir  $P$  objetos en  $N$  lugares separados por  $N-1$  separadores, lo cual en conteo estadístico vino a ser equivalente a distribuir en diferentes formas  $N+P-1$  objetos. Esto le dió por resultado  $(N+P-1)!$  formas distintas de distribuir los elementos de energía y los separadores. Por otro lado, considerando que al intercambiar los separadores no puede haber ningún efecto físico, Planck dividió entre  $(N-1)!$ , pero además, como tampoco puede haber efecto si intercambiamos los  $P$  elementos de energía, dividió entre  $P!$ . Esto le dió por resultado que

$$W = \frac{(N+P)!}{N!P!} \quad , \quad (1.19)$$

y con la fórmula de Stirling,  $n! = (2\pi)^{\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}} \text{Exp}(-n)$  válida para  $n$  muy grande, aproximó

$$W \cong \frac{(N+P)^{(N+P)}}{N^N P^P} \quad ,$$

Al parecer Planck procedió de esta forma porque así obtenía una expresión para la entropía con la propiedad dada en (1.15), pero aparentemente fue Ehrenfest, hasta 1911, quien puso en claro el razonamiento del primero. A la

luz de los conocimientos actuales es claro que lo que Planck estaba haciendo era introducir los conceptos básicos de la estadística de Bose y Einstein, pues estaba contando sobre estados físicos y no sobre partículas, además de que estaba introduciendo el concepto de indistinguibilidad.

Sustituyendo la expresión dada para  $W$  y usando  $N = U_N/U$  y  $P = NU/\epsilon$ , después de un manipuleo algebraico Planck llegó a la relación

$$S_N = Nk \left[ \left(1 + \frac{U}{\epsilon}\right) \ln \left(1 + \frac{U}{\epsilon}\right) - \frac{U}{\epsilon} \ln \frac{U}{\epsilon} \right] \quad (1.20)$$

Planck esperaba tomar el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  con  $P \rightarrow \infty$ , tal que  $U_N = \text{const.}$ , siguiendo el mismo artificio de conteo utilizado por Boltzmann con anterioridad.

La contribución de cada oscilador a la entropía es  $S = S_{N/U}$ , calculando  $\partial S / \partial U$  obtuvo

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{k}{\epsilon} \ln \left( \frac{\epsilon + U}{U} \right) ,$$

razonamiento que debe seguir siendo cierto si el miembro izquierdo es igual a  $1/T$ , luego, resolviendo para  $U$ , llegó a que

$$U = \frac{\epsilon}{\text{Exp}(\epsilon/kT) - 1} \quad (1.21)$$

Por otro lado, de la ley de Wien debe tenerse que

$$U = \nu \phi(\nu/T) , \quad (1.22)$$

con  $\phi(\nu/T)$  una función desconocida hasta el momento. Para que (1.21)

cumpliera con (1.22), Planck tuvo que proponer  $\epsilon=h\nu$  y usando (1.8) pudo establecer

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\text{Exp}(h\nu/kT) - 1} \quad (1.23)$$

En este punto Planck encontró que tomando  $h$  o perdía su ley de radiación, obteniendo la que ahora conocemos como ley de Rayleigh y Jeans. Además de que al calcular la ley de Stephan y Boltzmann la constante  $h$  quedaba relacionada con la constante de Boltzmann y permitía calcular, entre otras cosas, una expresión muy precisa para la carga elemental del electrón. Concluyó así que la única forma de obtener la densidad espectral correcta, era suponer que la energía sólo podía ser intercambiada en paquetes.



## CAPITULO II

### El trabajo de Einstein sobre la cuantización

#### 2.1 Una analogía entre un gas ideal y la radiación monocromática.

En su artículo "Sobre un punto de vista heurístico acerca de la emisión y transformación de la luz", Einstein<sup>(5)</sup> presentó un conjunto de consideraciones introductorias que establecen con claridad que desde entonces parecía tener una imagen física de la luz como un fenómeno con características corpusculares. Ellas son las siguientes:

1) Existe una diferencia teórica entre los conceptos desarrollados por los físicos para gases y otros cuerpos ponderables respecto de los utilizados en la teoría electromagnética de Maxwell. Esta diferencia consiste en que a los primeros se les asocia un número muy grande, pero finito, de números que especifiquen su posición y su velocidad, mientras que para los segundos se utilizan funciones continuas de la posición y del tiempo.

2) Tal diferencia lleva a que la energía electromagnética de una onda sea considerada como una función espacial continua, que, por ejemplo, para ondas esféricas salientes se dispersa en una superficie creciente con el tiempo, mientras que para cuerpos ponderables la energía está contenida en átomos y electrones, sin que pueda ser subdividida en partes arbitrariamente pequeñas.

3) La teoría ondulatoria de la luz, que opera con funciones continuas, es útil si se aplica a difracción, reflexión, refracción, etc., que son fenómenos en los cuales se trata con observaciones que se refieren a tiempos promedios, más que a valores instantáneos. A pesar de la confirmación de la teoría en experimentos con fenómenos ópticos, ésta podría llevar a contradicciones con la práctica cuando se aplica a

la emisión y transformación de la luz.

4) Las observaciones asociadas con la radiación del cuerpo negro, fluorescencia, producción de rayos catódicos por luz ultravioleta, etc., son más rápidamente entendidos si uno supone que la energía de la luz está discontinuamente distribuida en el espacio.

Enseguida Einstein considera radiación en una cavidad de volumen  $V$ , con densidad espectral  $\rho(\nu, T)$  y entropía por unidad de volumen  $\phi(\nu)d\nu$  para frecuencias en el intervalo  $(\nu, \nu+d\nu)$ . Supone que  $\phi = \phi(\rho, \nu)$  y escribe la entropía  $S$  de toda la cavidad como

$$S = V \int_0^{\infty} \phi(\rho, \nu) d\nu ; \quad (2.1)$$

impone sobre la radiación la condición de equilibrio térmico

$$\delta \int_0^{\infty} \phi(\rho, \nu) d\nu$$

frente a un cambio infinitesimal en  $\rho$  y obtiene la siguiente expresión con el método de multiplicadores de Lagrange y la conservación de la energía media como condición complementaria:

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \delta \rho - \lambda \delta \rho \right) d\nu = 0 ,$$

donde  $\lambda$  es una constante. De aquí se sigue que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \lambda , \quad (2.2)$$

es decir,  $\partial\phi/\partial\rho$  es independiente de la frecuencia.

Si la radiación incrementa en  $dT$  su temperatura, ocurre un cambio  $dS$  en la entropía dada por

$$dS = \frac{\partial S}{\partial U} dT,$$

trabajando para frecuencia dada  $d\phi = \left[ \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \right] d\rho$  y usando (2.11) resulta

$$dS = v \frac{\partial \phi}{\partial \rho} d \left( \int_0^{\infty} \rho dv \right),$$

con la densidad de radiación  $u$  dada por (1.7) encuentra

$$dS = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} du \quad (2.3)$$

de la termodinámica se tiene que  $[dS/dU]=1/T$ , luego

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \frac{1}{T} \quad (2.4)$$

Las leyes de radiación dadas por (1.13), (1.14) y (1.23) contienen expresiones que resueltas para  $1/T$  y sustituidas en (2.4) proporcionan una ecuación diferencial para  $\phi$  en términos de  $\rho$ .

De esta forma Einstein puede trabajar el problema inverso de Planck, que consiste en obtener una entropía a partir de una ley de radiación.

Enseguida trabaja con la ley de Wien para tomar lo que llama "Forma asintótica de la entropía de radiación monocromática en densidades de radiación bajas". Resolviendo en (1.13) para  $1/T$  y sustituyendo en (2.4) resulta

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = - \frac{1}{\beta \nu} \ln \frac{\rho}{\alpha \nu^3} ,$$

e integrando

$$\phi(\rho, \nu) = - \frac{\rho}{\beta \nu} \left[ \ln \frac{\rho}{\alpha \nu^3} - 1 \right] ,$$

de donde se tiene que la entropía  $S$  para una radiación con frecuencias en  $(\nu, \nu+d\nu)$  está dada por

$$S = - V \phi(\rho, \nu) d\nu = - \frac{V \rho}{\beta \nu} \left[ \ln \frac{\rho}{\alpha \nu^3} - 1 \right] d\nu ,$$

como  $E = \rho V d\nu$  es la energía de la radiación, queda

$$S = - \frac{E}{\beta \nu} \left[ \ln \frac{E}{V d\nu \alpha \nu^3} - 1 \right] . \quad (2.5)$$

Para una expansión libre en la que  $E$  permanece constante y el volumen  $V$  cambia a  $V_0$ , el cambio de entropía será

$$\Delta S = S - S_0 = \ln \left[ \frac{V}{V_0} \right]^{(E/\beta \nu)} . \quad (2.6)$$

A continuación Einstein considera un sistema físico formado por  $n$  puntos móviles en una cavidad de volumen  $V$ . Su cambio de entropía  $\Delta S$  para una expansión libre como la mencionada arriba será

$$\Delta S = \frac{R}{N} \ln W ,$$

donde  $R$  es la constante de universal de los gases,  $N$  es el número de Avogadro y  $W$  es la probabilidad de que el sistema pase del estado físico con volumen  $V$  a otro de volumen  $V_0$ .

Para gases ideales y soluciones diluidas la probabilidad de transición de uno de estos puntos móviles es  $V/V_0$  y para  $n$  partículas independientes

$$W = \left[ \frac{V}{V_0} \right]^n . \quad (2.8)$$

Sustituyendo (2.8) en (2.7)

$$\Delta S = \ln \left[ \frac{V}{V_0} \right]^{nR} / N . \quad (2.9)$$

Estableciendo una analogía entre este gas de puntos móviles y la radiación, Einstein compara (2.8) con (2.6) y resulta

$$E = \frac{nR\beta v}{N} , \quad (2.10)$$

de donde se tiene que la energía de la radiación está formada por  $n$  paquetes

de energía proporcional a la frecuencia.

Con este resultado Einstein explica lo que entonces era llamada ley de Stokes, la fotoionización de los gases y el efecto fotoeléctrico en la forma ya conocida en los textos.

## 2.2 La teoría de fluctuaciones de Einstein.

En 1909 Einstein desarrolla un nuevo trabajo sobre la cuantización, que puede ser considerado el primer paso firme hacia el establecimiento de un carácter corpuscular y ondulatorio de la luz.

Presenta una nueva derivación de su ley de fluctuación de la energía<sup>(12)</sup>

$$\langle \epsilon^2 \rangle = kT^2 \left( \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \right)_V \quad (2.11)$$

Adoptando enseguida la posición pragmática que consiste en tomar como punto de partida correcto a la ley de Planck, busca investigar cuales son los aspectos físicos que se encuentran partiendo de la ley de radiación dada en (1.23). Entonces, para una radiación con frecuencia en  $(\nu, \nu+d\nu)$ , en un volumen V, la energía promedio es

$$\bar{E} = V\rho(\nu, T)d\nu \quad (2.12)$$

y sustituyendo en (2.11)

$$\begin{aligned} \langle \epsilon^2 \rangle &= kT^2 \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{\partial}{\partial T} \left[ \text{Exp}[h\nu/kT] - 1 \right] V d\nu \\ &= \frac{8\pi h^2 \nu^4}{c^3} \left[ \frac{1}{\text{Exp}(h\nu/kT) - 1} + \frac{1}{\left( \text{Exp}(h\nu/kT) - 1 \right)^2} \right] V d\nu \end{aligned}$$

luego

$$\langle \epsilon^2 \rangle = \left[ h\nu\rho + \frac{c^3}{8\pi\nu^2} \rho^2 \right] V d\nu \quad (2.13)$$

Si en (2.12) se utiliza la ley de Rayleigh y Jeans, en (2.13) resulta sólo el segundo término, que Einstein demostró, mediante un análisis dimensional, que tiene un origen ondulatorio. En 1916 Lorentz dió una demostración rigurosa con base en la electrodinámica clásica.

En cambio, si se utiliza la ley de radiación de Wien en la fórmula de fluctuación de Einstein, sólo aparece el primer término, mismo que puede ser encontrado partiendo del supuesto de que la radiación consiste de un gas de partículas con energía  $h\nu$ , contenidas en un volumen  $V$  y distribuidas aleatoriamente con igual probabilidad en todos los puntos del espacio.

De lo anterior resulta que el primer término de (2.13) revela una estructura corpuscular de la radiación, mientras que el segundo indica un comportamiento ondulatorio. A partir de entonces Einstein planteó la necesidad de desarrollar una teoría de la radiación que incorporara ambas concepciones de la luz.

### 2.3 El modelo de dos estados de Einstein.

En 1916 Einstein desarrolló otra derivación de la ley de Planck, que fué publicada en 1917, y en la que partía de suponer moléculas con niveles energéticos discretos  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  con energías internas  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, \dots$ , además de su movimiento traslacional. Si estas moléculas pertenecen a un gas a temperatura  $T$ , una fracción  $W_n$  de ellas estará en el estado estacionario  $z_n$ , con  $W_n$  dada por

$$W_n = p_n \text{Exp}(-\epsilon_n/kT) \quad (2.16)$$

y p<sub>n</sub> el peso estadístico del estado z<sub>n</sub>. En el lenguaje moderno diríamos que el gas obedece la estadística de Maxwell-Boltzmann.

Considerando sistemas de dos estados z<sub>n</sub>, z<sub>m</sub>, con energías e<sub>n</sub>, e<sub>m</sub>, Einstein propone que en la interacción de estos sistemas con la radiación, ocurren procesos de absorción y de emisión que describe estadísticamente como sigue:

Para el fenómeno de emisión plantea la existencia de procesos en los que ocurre una transición de z<sub>m</sub> a z<sub>n</sub>, con la emisión de radiación de frecuencia ν y sin que medie causa externa. La probabilidad dW de que esta transición ocurra en el intervalo (0,dt) está dada por

$$dW = A_m^n dt . \quad (2.17)$$

Postula además la existencia de procesos en que la transición de z<sub>m</sub> a z<sub>n</sub> es inducida por una radiación de densidad espectral ρ y frecuencia ν. En este caso construye las probabilidades de transición en (0,dt) como

$$dW = B_m^n \rho dt . \quad (2.18)$$

Para el fenómeno de absorción propone la existencia de procesos en que la transición de z<sub>n</sub> a z<sub>m</sub> es inducida por una radiación de densidad espectral ρ y frecuencia ν, tal que

$$dW = B_n^m \rho dt . \quad (2.19)$$

Además la probabilidad de transición debe ser proporcional a la fracción de estados en z<sub>n</sub> y z<sub>m</sub> respectivamente, por consiguiente, la probabilidad de emisión dW<sub>e</sub> se obtiene sumando (2.17) con (2.18) y multiplicando por el



factor correspondiente dado por (2.11)

$$dW_e = p_m \text{Exp}(-\epsilon_m/kT) [A_m^n + B_m^n \rho] dt \quad (2.20)$$

análogamente para la probabilidad de absorción  $dW_a$

$$dW_a = p_n \text{Exp}(-\epsilon_n/kT) B_n^m \rho dt \quad (2.21)$$

Donde las constantes A y B son características atómicas, y por lo tanto, son independientes de la temperatura. Para que la radiación no perturbe la distribución de estados dada por (2.16), Einstein propone la siguiente condición de equilibrio

$$dW_e = dW_a \quad (2.22)$$

sustituyendo (2.20) y (2.21) en (2.22) y tomando el límite  $\rho \rightarrow \infty$  cuando  $T \rightarrow \infty$ , encuentra

$$p_n B_n^m = p_m B_m^n \quad (2.23)$$

con lo cual escribe (2.22) como

$$p_m B_m^n \left[ \text{Exp}(-\epsilon_n/kT) - \text{Exp}(-\epsilon_m/kT) \right] \rho = p_m \text{Exp}(-\epsilon_m/kT) A_m^n$$

y resolviendo para  $\rho$ , resulta

$$\rho = \frac{A_m^n / B_m^n}{\text{Exp}[(\epsilon_m - \epsilon_n)/kT] - 1} \quad (2.24)$$

Para que exista coincidencia con la ley de Wien  $\rho = \alpha \nu^3 \phi(\nu/T)$ , propone

$$\frac{A_m^n}{B_m^n} = \alpha \nu^3 \quad (2.25a)$$

$$\epsilon_m - \epsilon_n = h\nu \quad (2.25b)$$

y obtiene

$$\rho(\nu, T) = \frac{\alpha \nu^3}{\text{Exp}(h\nu/kT) - 1}, \quad (2.26)$$

la ley de radiación de Planck y el postulado de Bohr como un resultado de la teoría.

Enseguida estudia el movimiento de una molécula de masa  $M$  en el campo de radiación, que sufre cambios por dos razones en un intervalo pequeño de tiempo  $[0, \tau]$ , como sigue:

-Una fuerza originada por la radiación, que se opone al movimiento y que es proporcional a la velocidad, sería de la forma  $-Rv$ .

-Un impulso  $\Delta$  que proviene de las irregularidades de las transiciones radiativas.

En  $t=0$  el momento es

$$Mv$$

en  $t=\tau$  el momento es

$$Mv - Rv\tau + \Delta$$

Para que la distribución de velocidades sea constante en el tiempo debe cumplirse que

$$\langle (Mv - Rv\tau + \Delta)^2 \rangle = \langle (Mv)^2 \rangle$$

Desarrollando el cuadrado del lado izquierdo, despreciando el término cuadráticos en  $\tau$  y suponiendo que  $\langle v\Delta \rangle = 0$ , pues Einstein argumenta que se tiene interés en el efecto sistemático de  $v$  sobre la molécula, resulta

$$\langle \Delta^2 \rangle = 2R\tau \langle v^2 \rangle \quad (2.27)$$

Pero  $\langle v^2 \rangle$  debe ser igual a la que resulta de las leyes de los gases para moléculas a temperatura  $T$ , pues de lo contrario las moléculas aquí consideradas perturbarían el equilibrio térmico de la radiación con un gas arbitrario mantenido a la misma temperatura, por lo tanto

$$\frac{M\langle v^2 \rangle}{2} = \frac{kT}{2} \quad (2.28)$$

y sustituyendo en (2.27) encuentra

$$\frac{\Delta^2}{\tau} = 2RkT \quad (2.29)$$

A continuación Einstein plantea el siguiente argumento: se puede calcular  $\langle \Delta^2 \rangle$  y R por separado, que sustituidas en (2.29), deben llevar a una identidad siempre que  $\rho$  sea expresada en términos de la ley de Planck. Si esto se cumple se estaría demostrando que la ley de Planck implica emisión individual de la radiación.

Para calcular la constante R considera una molécula moviéndose a una velocidad relativa  $v$ , en la dirección  $x$ , en un sistema de referencia K. Además considera un sistema de referencia  $K'$ , tal que respecto a él la molécula está en reposo.

Respecto a K, la radiación es isotrópica, por lo tanto, la radiación por unidad de volumen en un rango de frecuencias  $(\nu, \nu+d\nu)$  y comprendida en un ángulo sólido relativo a su dirección de propagación, es

$$\rho d\nu \frac{d\Omega}{4\pi}, \quad (2.30)$$

con  $\rho$  una función de la frecuencia pero no de la dirección.

Observada desde  $K'$ , la radiación es

$$\rho'(\nu', \phi') d\nu' \frac{d\Omega'}{4\pi},$$

con  $\phi'$  el ángulo respecto al eje X y  $\psi'$  el ángulo respecto al plano  $Y'Z'$ . Análogamente, la dirección de  $d\Omega$  en K se determina con los ángulos  $\phi$  y  $\psi$ .

Einstein propone que la ley de transformación entre (2.30) y (2.31) debe ser la misma que la existente para el cuadrado de la amplitud de una onda plana con la dirección correspondiente. Visto desde K, dicha amplitud al cuadrado será  $A^2$  y desde  $K'$  se tendrá  $A'^2$ . Por consiguiente, a

primer orden en  $v/c$

$$\frac{\rho(v', \phi') dv' d\Omega'}{\rho(v) dv d\Omega} = 1 - 2 \left[ \frac{v}{c} \right] \cos\phi, \quad (2.32)$$

reacomodando

$$\rho(v', \phi') = \rho(v) \frac{dv}{dv'} \frac{d\Omega}{d\Omega'} \left[ 1 - 2 \left( \frac{v}{c} \right) \cos\phi \right]. \quad (2.33)$$

De la teoría de la relatividad se tiene, a primer orden en  $v/c$ , la siguiente expresión para el efecto Doppler

$$v' = v \left[ 1 - \left( \frac{v}{c} \right) \cos\phi \right] \quad (2.34a)$$

$$\cos\phi' = \cos\phi - \frac{v}{c} + \frac{v}{c} \cos^2\phi \quad (2.34b)$$

$$\psi' = \psi, \quad (2.34c)$$

la transformación inversa será

$$v = v' \left[ 1 + \left( \frac{v}{c} \right) \cos\phi \right],$$

por lo tanto  $\rho(v) = \rho(v') [1 + (v/c) \cos\phi]$ , desarrollando en serie de Taylor y

usando las ecuaciones (2.34), se obtiene

$$\frac{d\Omega}{d\Omega'} = 1 - 2\left(\frac{v}{c}\right)\cos\phi'$$

$$\frac{d\nu}{d\nu'} = 1 + \left(\frac{v}{c}\right)\cos\phi'$$

que sustituidas en (2.33) llevan a

$$\rho(\nu', \phi') = \left[ \rho(\nu) + \frac{v}{c} \nu' \cos\phi' \left( \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right) \right] \left[ 1 - 3\left(\frac{v}{c}\right)\cos\phi' \right] \quad (2.35)$$

A continuación Einstein estudia la absorción de momento de la molécula a partir de la radiación, tal que en cada absorción recibe una cantidad

$$\frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{c} \cos\phi'$$

de momento en la dirección  $x$ .

De las consideraciones anteriores se tiene que hay

$$E_n^m \rho'(\nu', \phi') \frac{d\Omega'}{4\pi}$$

absorciones por segundo y por molécula en el estado  $n$ , pero considerando que las moléculas no se regresan instantáneamente al estado  $z_n$ , sino que permanecen un tiempo finito en el estado  $z_m$ , sólo una fracción de ellas, dada

por

$$\frac{p_n \text{Exp}(-\epsilon_n/kT)}{p_n \text{Exp}(-\epsilon_n/kT) + p_m \text{Exp}(-\epsilon_m/kT)}$$

puede realizar la transición  $z_n \rightarrow z_m$  en un instante dado, por consiguiente, el número de transiciones por segundo será

$$\frac{p_n \text{Exp}(-\epsilon_n/kT)}{S} B_m^n \rho'(\nu', \phi') \frac{d\Omega'}{4\pi}, \quad (2.36)$$

con

$$S = p_n \text{Exp}(-\epsilon_n/kT) + p_m \text{Exp}(-\epsilon_m/kT)$$

Para emisiones el número de transiciones  $z_m \rightarrow z_n$  será

$$\frac{p_m \text{Exp}(-\epsilon_m/kT)}{S} B_m^n \rho'(\nu', \phi') \frac{d\Omega'}{4\pi}, \quad (2.37)$$

y el momento transferido estará dado por

$$\frac{-(\epsilon_m - \epsilon_n)}{c} \cos\phi',$$

luego, la transferencia total de momento por unidad de tiempo será

$$\frac{h\nu'}{cS} p_n B_n^m \left[ \text{Exp}(-\epsilon_n/kT) - \text{Exp}(-\epsilon_m/kT) \right] \int \rho(\nu', \phi') \cos\phi' \frac{d\Omega'}{4\pi} \quad (2.38)$$

sustituyendo (2.35) en (2.38) e integrando se tiene para el momento transferido

$$- \frac{h\nu}{c^2 S} \left[ \rho - \frac{\nu}{3} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right] p_n B_n^m \left[ \text{Exp}(-\epsilon_n/kT) - \text{Exp}(-\epsilon_m/kT) \right] \nu ,$$

con lo cual podemos identificar

$$R = \frac{h\nu}{c^2 S} \left[ \rho - \frac{\nu}{3} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right] p_n B_n^m \left[ \text{Exp}(-\epsilon_n/kT) - \text{Exp}(-\epsilon_m/kT) \right] . \quad (2.39)$$

Una vez obtenida la expresión para R, Einstein procede a calcular  $\langle \Delta^2 \rangle$  como sigue: Sea una molécula en reposo que recibe un impulso en la dirección x como resultado de un momento transferido  $\lambda$ , de forma tal que la transferencia ocurre conforme a una ley estadística que da un momento transferido que promedia cero.

Sea

$$\Delta = \sum_{\nu} \lambda_{\nu} ,$$



con  $v=1,2,\dots$ . Si no hay correlación entre los distintos momentos individuales

$$\langle \Delta^2 \rangle = \langle \sum_v \lambda_v^2 \rangle, \quad (2.40)$$

si  $\langle \lambda_v^2 \rangle = \langle \lambda^2 \rangle$  para toda  $v$ , después de  $l$  eventos se tiene

$$\langle \Delta^2 \rangle = l \langle \lambda^2 \rangle,$$

tal que si el impulso se transfiere unidireccionalmente en cada proceso, se tiene

$$\lambda = \frac{h\nu}{c} \cos\phi, \quad (2.42)$$

con  $\phi$  un ángulo respecto a  $x$  seleccionado al azar. Elevando (2.42) al cuadrado y promediando sobre  $d\Omega/4\pi$ , se tiene que en cada dirección ortogonal la molécula recibe un momento cuadrado promedio dado por

$$\langle \lambda^2 \rangle = \frac{1}{3} \left( \frac{h\nu}{c} \right)^2. \quad (2.43)$$

Si hay  $l$  eventos en  $[0, \tau]$ , serán el doble del número de transiciones  $z_n \rightarrow z_m$ , por lo tanto

$$I = \frac{2}{S} p_n B_{n\bar{n}}^m \text{Exp}(-\epsilon_n/kT) \rho \tau, \quad (2.44)$$

sustituyendo (2.43) y (2.44) en (2.41) resulta

$$\frac{\langle \Delta^2 \rangle}{\tau} = \frac{2}{3S} \left( \frac{h\nu}{c} \right)^2 \rho_n^2 B_n^2 \text{Exp}(-c_n/kT) \quad (2.45)$$

Por último, con  $\rho$  dada por la ley de Planck, se sustituye (2.45) y (2.39) en (2.29), obteniéndose la identidad esperada. Entonces Einstein concluye que una teoría de la radiación en la que ocurran transferencias de momento unidireccional a la vez que ocurren transferencias de energía, está en concordancia con la teoría del calor. Además, considerando que en una emisión de ondas esféricas no hay transferencia de momento, Einstein propone que este tipo de radiación no existe, sino que la emisión y absorción debe ocurrir mediante eventos direccionales. Esta era para Einstein la conclusión más importante de su trabajo y es considerada por A. Pais<sup>(13)</sup> como el paso definitivo de Einstein hacia el concepto corpuscular de la luz en toda la magnitud del término partícula, es decir como un ente individual con energía y momento bien definido. Sin embargo, como el propio Pais discute en la referencia citada arriba, la condición de concordancia de la teoría de la radiación (corpuscular en este caso), con la teoría del calor, venía a ser una condición necesaria pero no suficiente, en el sentido de que no eliminaba la posibilidad de que otras teorías de radiación también ofrecieran la misma concordancia. Este aspecto fue discutido por Pauli en la misma dirección y en 1923 Breit<sup>(14)</sup> apuntó que del éxito de la demostración aquí tratada no se seguía que el carácter corpuscular de la luz era la única hipótesis posible. De hecho Breit presentó una derivación clásica de la misma relación.

## CAPITULO III

### La teoría de Dirac sobre emisión y absorción de radiación

#### 3.1 Antecedentes del trabajo de Dirac.

En sus estudios sobre dispersión de ondas electromagnéticas en medios dieléctricos, que lo llevaron a predecir la existencia del ahora llamado efecto Ramhan, Heisenberg desarrolla una notación en la cual las frecuencias de la luz dispersada contienen como subíndice los números cuánticos que numeran los estados entre los cuales se efectúa la transición que da lugar a la radiación considerada. Por ejemplo  $\nu(\alpha, \beta)$  indica que una transición del estado cuántico  $\alpha$  al  $\beta$  dió lugar a una emisión de radiación de frecuencia  $\nu$ . Una notación análoga es introducida por el mismo autor para las amplitudes utilizadas en desarrollos en serie de Fourier, de forma tal que, utilizando de manera novedosa<sup>(15)</sup> el principio de correspondencia de Bohr, Heisenberg toma las ecuaciones de movimiento que proporciona la mecánica clásica, sustituye sus magnitudes por otras de carácter cuántico y se plantea el problema de cómo calcular potencias superiores de una variable dada, siempre que se tenga su descomposición en serie de Fourier. Cuidando que se cumpla el postulado de Bohr para emisión y absorción de radiación,  $\nu_{\alpha\beta} = \hbar^{-1}(E_{\alpha} - E_{\beta})$ , Heisenberg construye su conocida regla de multiplicación.

Después de que Born identifica la regla de multiplicación de Heisenberg como producto de matrices, se inicia un trabajo conjunto de ambos con Jordan, que culmina en una formulación de la teoría cuántica mediante una mecánica matricial que reconoce como aspecto fundamental de la misma la regla de conmutación de las matrices que representan a las magnitudes físicas.

Conociendo el trabajo de Heisenberg, Dirac desarrolla un trabajo equivalente, en el cual utiliza una teoría de operadores que no conmutan, que llama números- $q$ , y construye una mecánica cuántica a partir de sustituir por conmutadores los corchetes de Poisson utilizados en la mecánica clásica.

Por su parte, Born, Jordan y Heisenberg<sup>(16)</sup> aplican su teoría de matrices al estudio de una cuerda vibrante, modelada mediante una cadena de osciladores armónicos cuánticos y encuentran la relación

$$\langle \Delta^2 \rangle = h\nu \langle E \rangle + \frac{\langle E^2 \rangle}{Z\nu V} ,$$

dada por Einstein en 1909 para la energía de fluctuación de la radiación electromagnética en una cavidad. Concluyen entonces que el campo electromagnético puede ser estudiado con éxito mediante el procedimiento arriba mencionado.

### 3.2 La cuantización del campo según Dirac.

Dirac<sup>(17)</sup> considera un átomo interactuando con un campo de radiación confinado en una cavidad, tal que el átomo tiene un conjunto discreto de grados de libertad y la radiación es expresada en serie de Fourier, de modo que la energía y la fase de cada componente de las vibraciones son las variables dinámicas que describen al campo.

Cuando no hay interacción entre la radiación y el átomo, el hamiltoniano es

$$H = H_0 + \sum_r E_r , \quad (3.1)$$

donde  $H_0$  es el hamiltoniano del átomo y  $E_r$  es la energía de la  $r$ -ésima componente del campo. Las ecuaciones de movimiento de la radiación son

$$\dot{E}_r = - \frac{\partial H}{\partial \theta_r} = 0 , \quad \dot{\theta}_r = \frac{\partial H}{\partial E_r} = 1 , \quad (3.2)$$

con  $\theta_r$  la fase de la r-ésima componente.

Cuando hay interacción entre el campo y el átomo, Dirac recurre a la teoría clásica para adicionar un término de interacción al hamiltoniano (3.1). En este punto está usando el principio de correspondencia de Bohr en la forma introducida por Heisenberg.

En sus consideraciones introductorias Dirac hace dos diferencias entre una onda de luz y una de Schrodinger o de de Broglie asociada con los quanta de luz. Son las siguientes:

Primero: La onda de luz es siempre real y la de de Broglie asociada a un quantum de luz que se mueve en dirección definida es compleja.

Segundo: El concepto de intensidad utilizado en cada una es diferente, así, para una onda de luz, la intensidad es proporcional a la energía por unidad de volumen de la onda, que dividida entre  $h\nu$ , da el número de paquetes de luz por unidad de volumen asociados a una onda de luz monocromática; en cambio, una onda de de Broglie de amplitud  $a$  representa  $a^2$  quanta de luz de todas las frecuencias por unidad de volumen.

Para Dirac, esta interpretación de onda de de Broglie para quanta de luz es un caso especial de la regla general para interpretar el análisis matricial, conforme al cual  $\psi_\alpha, (\xi')$  (o  $(\xi' | \alpha')$  como él la denota) es tal que  $|\psi_\alpha, (\xi')|^2$  es la probabilidad de que cada  $\xi_k$  se localice en  $(\xi'_k, \xi'_k + d\xi'_k)$ .

Según Dirac la onda cuya intensidad es interpretada en la primera de esas dos formas aparece sólo cuando se trata de un ensamble de partículas que satisfacen la estadística de Bose-Einstein, mientras que ese tipo de ondas no puede asociarse a electrones.

Enseguida considera un sistema cuyo hamiltoniano no perturbado

es  $H_0$  sujeto a una perturbación  $V$ . Parte de la ecuación de Schrodinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (H_0 + V)\psi, \quad (3.3)$$

propone  $\Psi = \sum_r a_r \psi_r$  con  $\psi_r$  eigenfunciones de  $H_0$  y  $a_r$  dependientes del tiempo, impone la condición de normalización  $\sum_r |a_r|^2 = 1$  y obtiene para ellas la ecuación

$$i\hbar \frac{da_r}{dt} = \sum_s V_{rs} a_s, \quad (3.4)$$

por el mismo camino que ahora aparece en los textos de mecánica cuántica, de hecho, aquí se genera la forma usual de la teoría de perturbaciones dependientes del tiempo. En (3.4)  $V_{rs}$  son los elementos de matriz de  $V$ , calculadas respecto a las  $\psi_r$ .

Proponiendo

$$F_1 = \sum_{r,s} a_r^* V_{rs} a_s, \quad (3.5)$$

escribe (3.4) y su conjugada como

$$\frac{da_r}{dt} = (i\hbar)^{-1} \frac{\partial F_1}{\partial a_r^*}, \quad \frac{da_r^*}{dt} = -(i\hbar)^{-1} \frac{\partial F_1}{\partial a_r}, \quad (3.6)$$

de donde se tiene que  $a_r$  y  $i\hbar a_r^*$  pueden ser consideradas variables canónicas conjugadas, con  $F_1$  como hamiltoniano.

Si  $N_r$  es el número más probable de sistemas en el estado  $r$ , una transformación unitaria de las variables  $(a_r, a_r^*)$  a las variables  $(N_r, \phi_r)$ , con

$$a_r = N_r^{1/2} \text{Exp}(-i\phi_r/\hbar) \quad , \quad a_r^* = N_r^{1/2} \text{Exp}(i\phi_r/\hbar) \quad , \quad (3.7)$$

el nuevo hamiltoniano será

$$F_1 = \sum_{r,s} V_{rs} N_r^{1/2} N_s^{1/2} \text{Exp}[i(\phi_r - \phi_s)/\hbar] \quad , \quad (3.8)$$

con las ecuaciones canónicas dadas por

$$\dot{N}_r = - \frac{\partial F_1}{\partial \phi_r} \quad , \quad \dot{\phi}_r = \frac{\partial F_1}{\partial N_r} \quad . \quad (3.9)$$

Otras variables para llegar a la misma formalización son  $(b_r, b_r^*)$  dadas por

$$b_r = a_r \text{Exp}(-iW_r t/\hbar) \quad , \quad b_r^* = a_r^* \text{Exp}(iW_r t/\hbar) \quad , \quad (3.10)$$

con  $W_r$  energía del sistema en el estado  $r$ .

Derivando respecto a  $t$ , multiplicando por  $i\hbar$  y definiendo

$$V_{rs} = v_{rs} \text{Exp}[i(W_r - W_s)t/\hbar] ,$$

tal que  $v_{rs}$  es constante cuando  $V_{rs} \neq V_{rs}(t)$ , obtiene

$$i\hbar \dot{b}_r = W_r b_r + \sum_s v_{rs} b_s$$

y definiendo  $H_{rs} = W_r \delta_{rs} + V_{rs}$ , encuentra

$$i\hbar \dot{b}_r = \sum_s H_{rs} b_s , \quad (3.11)$$

donde  $H_{rs}$  son los elementos de matriz de  $H_0 + V$ .

Con el hamiltoniano

$$F = \sum_{r,s} b_r^* H_{rs} b_s , \quad (3.12)$$

puede escribir (3.11) y su conjugada como ecuaciones canónicas.

Para hacer la transformación  $(b_r, b_r^*) \rightarrow (N_r, \theta_r)$  propone la transformación unitaria

$$b_r = N_r^{1/2} \text{Exp}(-i\theta_r/\hbar) , \quad b_r^* = N_r^{1/2} \text{Exp}(i\theta_r/\hbar) , \quad (3.13)$$

donde  $\theta_r$  es la nueva fase de la representación en serie de Fourier.



El hamiltoniano será

$$F = \sum_{r,s} H_{rs} N_r^{1/2} N_s^{1/2} \text{Exp}[i(\theta_r - \theta_s)/\hbar] \quad (3.14)$$

y las ecuaciones canónicas serán

$$N_r = - \frac{\partial F}{\partial \theta_r} , \quad \theta_r = \frac{\partial F}{\partial N_r} \quad (3.15)$$

Escribiendo en (3.14) la definición explícita de  $H_{rs}$  escribe

$$F = \sum_r W_r N_r + \sum_{r,s} v_{rs} N_r^{1/2} N_s^{1/2} \text{Exp}[i(\theta_r - \theta_s)/\hbar] , \quad (3.16)$$

donde el segundo término es el operador de la energía de interacción.

A continuación Dirac considera un ensamble de sistemas que satisfacen la estadística de Bose-Einstein y busca la ecuación de Schrodinger como sigue:

Para que las variables  $(b_r, b_r^*)$  sean números-q deben satisfacer la relación

$$b_r (i\hbar b_r^*) - (i\hbar b_r^*) b_r = i\hbar ,$$

o bien

$$b_r b_r^* - b_r^* b_r = 1 ,$$

o en general

$$b_r b_s^* - b_s^* b_r = \delta_{rs} \quad (3.17)$$

Sin embargo esta regla de conmutación no se cumplirá si conservamos las ecuaciones (3.13) en su forma actual, por lo tanto, se puede proponer que  $N_r$  y  $\theta_r$  son números- $q$  que no conmutan, tales que

$$b_r = (N_r + 1)^{1/2} \text{Exp}(-i\theta_r/\hbar) = \text{Exp}(-i\theta_r/\hbar) N_r^{1/2} \quad (3.18a)$$

$$b_r^* = N_r^{1/2} \text{Exp}(i\theta_r/\hbar) = \text{Exp}(i\theta_r/\hbar) (N_r + 1)^{1/2} \quad (3.18b)$$

con las cuales es directo demostrar que en (3.12) tenemos que el hamiltoniano se escribe como

$$F = \sum_{r,s} N_r^{1/2} \text{Exp}(i\theta_r/\hbar) H_{rs} (N_s + 1)^{1/2} \text{Exp}(-i\theta_s/\hbar) ,$$

pero usando (3.18b) se tiene que el término en la sumatoria es igual a

$$\begin{aligned} H_{rs} N_r^{1/2} (N_s + 1)^{1/2} \text{Exp}[i(\theta_r - \theta_s)/\hbar] & \quad \text{si } r \neq s \\ H_{rs} N_r^{1/2} N_s^{1/2} \text{Exp}[i(\theta_r - \theta_s)/\hbar] & \quad \text{si } r = s , \end{aligned}$$

con lo cual resulta que el hamiltoniano será

$$F = \sum_{r,s} H_{rs} N_r^{1/2} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{1/2} \text{Exp}[i(\theta_r - \theta_s)/\hbar] \quad (3.19)$$

donde los elementos de matriz  $H_{rs}$  son números-c.

Otra forma de escribir (3.19) es sustituir explícitamente la expresión para  $H_{rs}$ ; resulta

$$F = \sum_{r,s} W_r N_r + \sum_{r,s} v_{rs} N_r^{1/2} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{1/2} \text{Exp}[i(\theta_r - \theta_s)/\hbar], \quad (3.19')$$

que difiere de (3.16) en que el campo ya ha sido cuantizado.

Este hamiltoniano actuará sobre una función de onda que depende de las variables  $N_r$  y la ecuación de onda será

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(N'_1, N'_2, \dots)}{\partial t} = F \Psi(N'_1, N'_2, \dots). \quad (3.20)$$

Con  $\Psi$  definida en el espacio de las  $N$ -s y el operador  $\theta_r$  tal que

$$\theta_r = i\hbar \frac{\partial}{\partial N'_r}$$

luego

$$\text{Exp}\left[\frac{+i\theta_r}{\hbar}\right] = \text{Exp}\left[\frac{\partial}{\partial N_r}\right].$$

Como las  $N_r$  son discretas,  $\partial/\partial N_r$  se entiende en el sentido de aumentar o

disminuir en 1 la variable  $N_r$ , según sea el signo que antecede al operador, entonces

$$\begin{aligned} \text{Exp} \left[ \pm i \theta_r / \hbar \right] f(N'_1, N'_2, \dots) &= \text{Exp} \left[ \pm \frac{\partial}{\partial N_r} \right] f(N'_1, N'_2, \dots, N'_r, \dots) \\ &= f(N'_1, \dots, N'_r \pm 1, \dots) \end{aligned}$$

Usando esta regla en (3.20) con F dado por (3.19), se obtiene

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(N'_1, \dots)}{\partial t} = \sum_{r, s} H_{rs} N_r^{1/2} (N'_s + 1 - \delta_{rs})^{1/2} \Psi(N'_1, \dots, N'_r - 1, \dots, N'_s + 1, \dots) \quad (3.21)$$

Comparando con el lenguaje moderno, las fases juegan el papel de los operadores de creación y aniquilación y las  $\Psi(N-s)$ , están definidas en el espacio de Fock<sup>(18)</sup>. En este punto cabe hacer notar que el uso de la teoría de Schrödinger plantea la dificultad de que implica que el número de partículas se conserva. Aspecto que es salvado por Dirac de la forma que se verá posteriormente.

Si el ensamble contiene sólo un elemento  $\Psi(N'_1, \dots) = \Psi(q)$  y todos los términos son cero, excepto cuando  $r=q$ , la ecuación (3.21) se reduce a

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(q)}{\partial t} = \sum_s H_{qs} \Psi(s) \quad ,$$

que es análoga a la ecuación (3.4). Por lo tanto, esta teoría reproduce la establecida inicialmente.

Hasta este punto no está claro que el ensamble de sistemas

descritos por (3.21) obedece la estadística de Bose-Einstein, por lo tanto, para demostrar que así es, Dirac procede como sigue.

Sea un ensamble con un número arbitrario de sistemas que obedecen la estadística de Bose-Einstein, para que se cumpla esta condición, Dirac sigue un trabajo elaborado con anterioridad<sup>(19)</sup> e impone la condición equivalente de que las funciones sean simétricas bajo intercambios de las variables que describen a todos los sistemas del ensamble.

Sean  $r_1, r_2, \dots$  las variables que especifican los estados estacionarios en los cuales se colocan los sistemas y sea  $H(n)$  el hamiltoniano del  $n$ -ésimo sistema. El hamiltoniano será  $H_A = \sum_n H(n)$  y la ecuación de Schrödinger se escribirá de la forma

$$i\hbar b(r_1, r_2, \dots) = \quad (3.22)$$

$$\sum_{s_1, s_2, \dots} H_A(r_1, r_2, \dots; s_1, s_2, \dots) b(s_1, s_2, \dots),$$

donde  $H_A(r_1, r_2, \dots; s_1, s_2, \dots)$  son los elementos de matriz de  $H_A$ . Mediante una transformación de las variables  $(r_1, r_2, \dots)$  a las variables  $(N_1, N_2, \dots)$ , donde  $N_r$  es el número más probable de sistemas en el estado  $r$ , obtiene

$$i\hbar b(N_1, \dots) = \sum_r \sum_{s \neq r} N_r^{1/2} (N_s + 1)^{1/2} H_{rs} b(N_1, \dots, N_r - 1, \dots, N_s + 1, \dots) \\ + \sum_r N_r H_{rr} b(N_1, \dots), \quad (3.23)$$

que es idéntica a la ecuación (3.21). Por consiguiente, el método de cuantización del campo utilizado es tal que la radiación que se describe obedece la estadística de Bose-Einstein.

Enseguida considera un sistema perturbador A descrito por variables  $J_k, w_k$ , tal que las  $J$ -s son integrales primeras cuando está aislado. A interactúa con un sistema perturbado B formado por un conjunto de sistemas no interactuantes entre sí y que obedecen la estadística de Bose Einstein. El objetivo que se plantea es el de dar una descripción mecanicocuántica de esta interacción.

Sea  $H_p$  el hamiltoniano de A y  $H(n)=H_0(n)+V$  el del n-ésimo sistema B, tal que  $V(n)$  es la energía de interacción con A. El hamiltoniano total es

$$H_T = H_p(J) + \sum_n H(n)$$

y la ecuación de Schrodinger es

$$i\hbar b(J', N'_1, N'_2, \dots) = H_p(J') b(J', N'_1, N'_2, \dots) + \sum_{J''} \sum_{s_1, s_2, \dots} \sum_r N_r^{1/2} (N'_s + 1 - \delta_{rs})^{1/2} H(J'', J'_s) b(J'', N'_1, \dots, N'_r - 1, \dots, N'_s + 1, \dots)$$

que corresponde al hamiltoniano

$$F = H_p(J) + \sum_{r,s} H_{rs} N_r^{1/2} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{1/2} \text{Exp}[i(\theta_r - \theta_s)/\hbar] \quad (3.24)$$

donde  $H_{rs} = H(J_r, w_s)$  son los elementos de matriz. De que

$$H_{rs} = W_r \delta_{rs} + v_{rs}$$

con  $v_{rs} = v(J_r', J_s'')$ , se tiene que (3.24) se puede escribir como

$$F = H_p(J) + \sum_r N_r W_r + \sum_{r,s} v_{rs} N_r^{1/2} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{1/2} \text{Exp}[i(\theta_r' - \theta_s'')/\hbar], \quad (3.25)$$

con  $H_p(J)$  el hamiltoniano de A cuando está aislado,  $\sum_r N_r W_r$  el de B, también aislado y el tercer término como el hamiltoniano de interacción de A con B.

Antes de aplicar su teoría a paquetes de luz, Dirac obtiene la sección eficaz de dispersión de una partícula que se representa en el infinito como una onda plana y se dispersa un ángulo  $\theta', \phi'$ . Llega a la siguiente expresión

$$\frac{E' E_0}{\hbar c^2} |v(p', p_0)|_{p_0}^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$$

con  $E'$ ,  $p'$  la energía y el momento antes de la colisión,  $E_0$ ,  $p_0$  energía y momento después de ella y  $v(p', p_0)$  el elemento de matriz correspondiente.

Enseguida considera paquetes de luz interactuando con sistemas atómicos tales que uno de estos paquetes está en un estado estacionario cuando se mueve en línea recta con momento bien definido. Según Dirac "El paquete de luz tiene la peculiaridad de que aparentemente deja de existir cuando está en uno de sus estados estacionarios, el estado cero, en el cual su momento, y por consiguiente su energía, son cero. Cuando un paquete de luz es absorbido puede considerarse que salta a este estado cero, y cuando un paquete es emitido salta a partir del estado cero a uno en el cual es físicamente evidente, así que parece haber sido creado."

El uso de la frase *aparentemente deja de existir* es interesante en varios aspectos. Puede verse que Dirac no está considerando que la función  $\Psi(N_1, \dots)$  describe partículas que se crean y destruyen, sino paquetes de energía que pasan a estados físicamente evidentes en el caso de emisión, o bien, al estado cero, donde dejan de serlo. Así salva la

dificultad que mencionamos anteriormente. Por otro lado, si consideramos que este trabajo fue publicado en 1927, años antes de su teoría de hoyos para el electrón y el positrón, puede apreciarse que aquí se encuentra un antecedente de las ideas manejadas en torno a las "partículas" del llamado mar de Dirac.

Si  $N_0$  es el número de paquetes de luz en el estado cero, Dirac argumenta para hacer ver que su valor tiene que ser infinito y que la ecuación de la variable canónica conjugada  $\theta_0$  será de la forma

$$\dot{\theta}_0 = \frac{\partial F}{\partial N_0} = W_0 + \text{términos proporcionales a } N^{1/2} + \text{términos proporcionales a } (N+1)^{-1/2}$$

tal que  $W_0$  es cero. Para que el hamiltoniano  $F$ , dado por (3.25) sea finito, propone que  $v_{rs}$  debe ser infinitamente pequeña para  $s=0$ , (éstas son  $v_{r0}$  y  $v_{0r}$ ), luego define el  $r$ -ésimo estado de paquetes de luz como

$$\begin{aligned} v_r &= v_{r0} (N_0 + 1)^{1/2} \text{Exp}(-i\theta_0/\hbar) \\ v_r^* &= v_{0r} N_0^{1/2} \text{Exp}(i\theta_0/\hbar) \end{aligned} \quad (3.26)$$

tal que  $v_r$  sea finita. Reescribe el hamiltoniano (3.25) como sigue

$$\begin{aligned} F = H_p(J) + \sum_r W_r N_r + \sum_{r \neq 0} \left[ v_r N_r^{1/2} \text{Exp}(i\theta_r/\hbar) + v_r^* (N_r + 1)^{1/2} \text{Exp}(-i\theta_r/\hbar) \right] \\ + \sum_{r \neq 0} \sum_{s \neq 0} v_{rs} N_r^{1/2} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{1/2} \text{Exp}[i(\theta_r - \theta_s)/\hbar] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Los términos que describen la radiación son el tercero y el cuarto y se interpretan como se expone a continuación:

-El término conteniendo  $\text{Exp}(i\theta_r/\hbar)$  debe ser de absorción, por lo tanto, de que la probabilidad de transición entre estados



es proporcional al cuadrado de los elementos de matriz correspondiente, la probabilidad de absorción debe ser proporcional a  $N_r$  si el paquete de luz tiene una frecuencia  $\nu_r$ .

-El término conteniendo  $\text{Exp}(-i\theta_r/\hbar)$  debe ser de emisión, de donde resulta que la probabilidad correspondiente es proporcional a  $N_r + 1$ .

-El término conteniendo  $\text{Exp}[i(\theta_r - \theta_s)/\hbar]$  baja un quantum de luz al estado cero pero sube otro al estado  $s$ , de donde se infiere que debe tratarse de dispersión.

Enseguida Dirac considera una cavidad de volumen finito conteniendo radiación y demuestra que la probabilidad de absorción debe ser proporcional a la intensidad  $I_r$  de la radiación incidente, que la probabilidad de emisión debe ser proporcional a  $I_r + h\nu_r^3/c^3$  y las identifica como las leyes de Einstein. Demuestra también que la probabilidad de dispersión de un paquete de luz es proporcional a  $I(I_s + \nu_s^2/c^2)$ , donde  $I_r$  es intensidad de la radiación incidente e  $I_s$  es la de la radiación dispersada. Esta última la identifica como la ley de Pauli.

Finalmente calcula el coeficiente de probabilidad para procesos de absorción, que Einstein introdujo en 1917 de forma fenomenológica para sistemas de dos estados y hace ver que el de emisión se calcula de forma análoga. Con esto recupera la relación de Einstein y la ley de Planck.

### 3.3 El enfoque moderno para la segunda cuantización.

La técnica de segunda cuantización mediante fases y amplitudes en la forma en que fue introducida por Dirac ya no se usa en la teoría de campos, en su lugar se utiliza un enfoque que consiste en buscar una densidad lagrangiana que es una funcional del campo, se define una acción tal que, mediante un principio de Hamilton, se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange que llevan a la ecuación diferencial para el campo, al cálculo de los momentos conjugados y de la densidad hamiltoniana. Enseguida se

resuelve la ecuación del campo mediante un desarrollo de ondas planas y se expresa la densidad hamiltoniana en términos de los coeficientes de la serie de Fourier obtenida. Esto permite interpretar al campo como un conjunto infinito de osciladores armónicos, de forma tal que se cuantizan en la misma forma que se procede con el oscilador en la teoría cuántica no relativista.

En el caso de la radiación electromagnética es conocida la función hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \int (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) d^3x \quad , \quad (3.28)$$

por lo tanto, podemos abreviar el proceso arriba descrito y partir del siguiente desarrollo para el potencial vectorial (que tomaremos en la norma de Coulomb)

$$A(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}^{1/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} \hat{e}_{\alpha} \left[ C_{\mathbf{k}\alpha}(0) \text{Exp}(i\mathbf{k}\mathbf{x}) + C_{\mathbf{k}\alpha}^*(0) \text{Exp}(-i\mathbf{k}\mathbf{x}) \right] \quad , \quad (3.29)$$

donde  $\mathbf{k}\mathbf{x} = \mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t$ . Haciendo

$$q_{\mathbf{k}\alpha} = c^{-1} (C_{\mathbf{k}\alpha} + C_{\mathbf{k}\alpha}^*) \quad (3.30)$$

$$p_{\mathbf{k}\alpha} = -i\omega c^{-1} (C_{\mathbf{k}\alpha} - C_{\mathbf{k}\alpha}^*) \quad ,$$

se calcula la función hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \int \left[ |\nabla \times A|^2 + \left| c^{-1} \frac{\partial A}{\partial t} \right|^2 \right] d^3x = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} \frac{1}{2} (p_{\mathbf{k}\alpha}^2 + \omega^2 q_{\mathbf{k}\alpha}^2) \quad , \quad (3.31)$$

donde las variables de campo  $p_{k\alpha}$ ,  $q_{k\alpha}$  cumplen con las ecuaciones canónicas

$$\dot{p}_{k\alpha} = - \frac{\partial H}{\partial q_{k\alpha}}, \quad \dot{q}_{k\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{k\alpha}} \quad (3.32)$$

Postulando que las variables de campo son operadores que cumplen con la siguiente relación canónica de conmutación

$$\begin{aligned} [q_{k\alpha}, p_{k'\alpha'}] &= i\hbar \delta_{kk'} \delta_{\alpha\alpha'} \\ [q_{k\alpha}, q_{k'\alpha'}] &= 0 \\ [p_{k\alpha}, p_{k'\alpha'}] &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

se definen los operadores

$$\begin{aligned} a_{k\alpha} &= \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}} \begin{pmatrix} \omega q_{k\alpha} + ip_{k\alpha} \\ \omega q_{k\alpha} - ip_{k\alpha} \end{pmatrix} \\ a_{k\alpha}^+ &= \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}} \begin{pmatrix} \omega q_{k\alpha} - ip_{k\alpha} \\ \omega q_{k\alpha} + ip_{k\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.34)$$

cuya relación de conmutación resulta ser

$$\begin{aligned} [a_{k\alpha}, a_{k'\alpha'}^+] &= \delta_{kk'} \delta_{\alpha\alpha'} \\ [a_{k\alpha}, a_{k'\alpha'}] &= [a_{k\alpha}^+, a_{k'\alpha'}^+] = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

y actúan sobre los eigenvectores normalizados  $\{|n\rangle\}$ ,  $n=0,1,2,\dots$  en la siguiente forma

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= n^{1/2}|n-1\rangle \\ a^+|n\rangle &= (n+1)^{1/2}|n+1\rangle \end{aligned} \quad (3.36)$$

Los operadores  $a$ ,  $a^+$  reciben el nombre de operadores de aniquilación y creación de fotones de frecuencia  $\omega$ . Al conjunto  $\{|n\rangle\}$  se le llama espacio de Fock y el hamiltoniano

$$H = (1/2) \sum_{k\alpha} \sum_{\alpha} \hbar\omega \left[ a_{k\alpha}^+ a_{k\alpha} + a_{k\alpha} a_{k\alpha}^+ \right] \quad (3.37)$$

pasa a ser un operador actuando sobre este espacio.

Definiendo el operador de número

$$N_{k\alpha} = a_{k\alpha}^+ a_{k\alpha} \quad (3.38)$$

se reescribe el hamiltoniano como

$$H = \sum_{k\alpha} \left[ N_{k\alpha} + \frac{1}{2} \right] \hbar\omega \quad (3.39)$$

Cualquier estado  $|n\rangle$  se puede escribir en términos del estado

de vacío  $|n\rangle$  mediante la aplicación sucesiva del operador de creación

$$(a_{k\alpha}^+)^n |0\rangle = |n\rangle \quad (3.40)$$

El potencial vectorial pasa a ser un operador actuando sobre el mismo espacio de Fock

$$A(\mathbf{x}, t) = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} c \hat{\epsilon}_{\alpha} \left( \frac{\hbar}{2\omega} \right)^{1/2} \left[ a_{k\alpha} \text{Exp}(i\mathbf{k}\mathbf{x}) + a_{k\alpha}^+ \text{Exp}(-i\mathbf{k}\mathbf{x}) \right] \quad (3.41)$$

la función

$$A_{k\alpha}(\mathbf{x}, t) = c \left( \frac{\hbar}{2V\omega} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_{\alpha} \text{Exp}(i\mathbf{k}\mathbf{x}) \quad (3.42)$$

puede interpretarse como la función de onda de un fotón de momento  $p=\hbar k$  y polarización  $\hat{\epsilon}_{\alpha}$ , pero sin recibir la interpretación probabilista de la función  $\Psi$  que aparece en la teoría cuántica no relativista. La razón física que se esgrime parte de que del principio de Heisenberg

$$\Delta p \Delta q \cong \hbar \quad (3.43)$$

se infiere, haciendo  $\Delta p \cong mc$ , las siguientes relaciones

$$\Delta q \cong \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{\epsilon} \quad (3.44)$$

para el caso ultrarrelativista  $\epsilon \cong pc$ , por lo tanto

$$\Delta q \cong \hbar/p \quad (3.45)$$

En el caso de un electrón ultrarrelativista tiene sentido hablar de la localización de una partícula cuando las dimensiones del problema son muy grandes comparadas con su longitud de onda de de Broglie, pero para un fotón se trata del límite clásico de la óptica geométrica. Por lo tanto, introducir una función de onda  $\Psi(q)$  tal que  $|\Psi(q)|^2 dq$  es la probabilidad de que el fotón esté en el intervalo  $(q, q+dq)$ , carece de sentido si de entrada no está resuelto el problema de asociar una coordenada a un fotón. Además, existe la limitación matemática de que no es posible construir una densidad de probabilidad que cumpla con la invarianza relativista y sea no negativa<sup>(20)</sup>.

Para obtener una descripción del electrón en segunda cuantización, se toma como clásico al espinor  $\Psi$ , que es la solución a la ecuación de Dirac. Se parte de la densidad lagrangiana de campo libre

$$\mathcal{L} = -c\bar{\Psi}\gamma_{\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial x_{\mu}} - mc^2\bar{\Psi}\Psi \quad , \quad (3.46)$$

donde  $m$  es la masa en reposo del electrón y  $\gamma^{\mu}$  ( $\mu=1,\dots,4$ ), son las matrices de Dirac, que cumplen con la relación de anticonmutación

$$\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} - \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} = 2\delta_{\mu\nu} \quad , \quad (3.47)$$

la adjunta de Dirac  $\bar{\Psi}$  está dada por

$$\bar{\Psi} = \Psi^{\dagger}\gamma_4 \quad , \quad (3.48)$$

y cumple con la ecuación adjunta

$$-\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_{\mu}}\gamma_{\mu} + \frac{mc}{\hbar}\bar{\Psi} = 0 \quad . \quad (3.49)$$

De las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi_{\beta}}{\partial x_{\mu}} \right)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\beta}} = 0 \quad , \quad (3.50)$$

aplicadas a la densidad lagrangiana dada por (3.46), se obtiene la ecuación adjunta (3.49). Además, el momento conjugado resulta ser

$$\Pi_{\beta} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi_{\beta}}{\partial t} \right)} = i\hbar \psi_{\beta}^{\dagger} \quad (3.51)$$

y la densidad hamiltoniana resulta

$$\mathcal{H} = c \Pi_{\beta} \frac{\partial \psi_{\beta}}{\partial x_0} - \mathcal{L} = \psi^{\dagger} (-i\hbar c \bar{\alpha} \cdot \nabla + \beta m c^2) \psi \quad . \quad (3.52)$$

La solución en ondas planas de la ecuación de Dirac es

$$\Psi = (m c^2 / E v)^{1/2} u_r(p) \text{Exp}[i(p \cdot x - Et) / \hbar] \quad (3.53)$$

con  $r=1,2$  y  $E=(p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2} > 0$ ,

$$\Psi = (m c^2 / |E| v)^{1/2} u_r(p) \text{Exp}[i(p \cdot x + Et) / \hbar] \quad , \quad (3.54)$$

con  $r=3,4$  para  $E=-(p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2} < 0$ . Las funciones  $\Psi$  pueden encontrarse

tabuladas en el libro de Sakurai<sup>(21)</sup>, por ejemplo.

El desarrollo en ondas planas es

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{r=1}^4 (mc^2/|\mathbf{E}|)^{1/2} b_{\mathbf{p}}^{(r)}(t) u_{\mathbf{p}}^{(r)} \text{Exp}(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) . \quad (3.55)$$

El cuadrivector  $\bar{\Psi} \gamma_{\mu} \Psi$  que cumple con la ecuación

$$\frac{\partial \bar{\Psi} \gamma_{\mu} \Psi}{\partial x_{\mu}} = 0 , \quad (3.56)$$

es tal que

$$S_{\mu} = ic \bar{\Psi} \gamma_{\mu} \Psi , \quad (3.57)$$

puede ser interpretado como el cuadrivector de corriente. Su componente temporal puede interpretarse como la densidad de probabilidad, en tanto que las componentes espaciales

$$S_{\mathbf{k}} = ic \bar{\Psi} \gamma_{\mu} \Psi = c \Psi^{\dagger} \alpha_{\mathbf{k}} \Psi , \quad (3.58)$$

se identifican con el flujo de probabilidad.

La existencia de soluciones con energía negativa llevó a Dirac a proponer, en 1930, lo que ahora se conoce como teoría de hoyos. Conforme a ésta se postula que todos los estados de energía negativa están ocupados (a este conjunto se le llama mar de Dirac) y no es posible una emisión de un fotón con energía  $\hbar\omega \geq 2mc^2$  por que el principio de Pauli lo prohíbe. Sin embargo, con la absorción de un fotón si es posible el salto de una partícula de un estado de energía negativa a otro de energía positiva, creando un hoyo en el mar de Dirac. Al quedar vacante un estado de energía negativa, aparece



necesariamente una energía positiva que antes era anulada. Además, si  $Q$  es la carga total del mar de Dirac y  $Q_{vac}$  la del vacío, resulta que al producirse la vacante

$$Q = Q_{vac} - e = Q_{vac} - (-|e|) = Q_{vac} + |e| \quad , \quad (3.59)$$

por lo tanto, la carga observable  $Q_{obs}$  está dada por

$$Q_{obs} = Q - Q_{vac} = |e| \quad , \quad (3.60)$$

de donde Dirac infirió la existencia de la partícula que ahora llamamos positrón.

Sin embargo esta interpretación produce nuevas dificultades<sup>(21)</sup>, que pueden ser resueltas si se cuantiza, a su vez, el campo, postulando que las  $b_r$  son operadores que actúan sobre un espacio de Fock, pero cumplen con las relaciones de anticonmutación

$$\begin{aligned} \{b_r, b_r'\} &= \delta_{rr'} \quad , \quad (3.61) \\ \{b_r, b_r^+\} &= \{b_r^+, b_r^+\} = 0 \quad , \end{aligned}$$

en este caso  $b_r^+$  es el operador de creación, pues

$$b_r^+ |0\rangle = |1_r\rangle \quad , \quad (3.62)$$

etc., a su vez de

$$b_r |1_r\rangle = |0\rangle \quad , \quad (3.63)$$

se sigue que  $b_r$  es el operador de aniquilación.

El operador de número es

$$N_r = b_r^\dagger b_r \quad . \quad (3.64)$$

Con este procedimiento se pueden desarrollar formalismos de segunda cuantización para partículas de espines diversos. Ejemplos de ellos se desarrollan en cualquier texto de teoría de campos.

En segunda cuantización la interacción de electrones con radiación electromagnética se describe mediante el operador de interacción

$$H_I = -ie \int \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi A_\mu d^3x \quad , \quad (3.65)$$

donde el campo electrónico  $\Psi$  y el fotónico  $A_\mu$  están cuantizados y actúan sobre sus respectivos espacios de Fock.

Sea  $\Phi^s(t)$  el estado físico de un sistema en la representación de Schrödinger; su ecuación de movimiento es

$$i \frac{\partial \Phi^s}{\partial t} = H^s \Phi^s \quad , \quad (3.66)$$

con  $\hbar=1$  y  $H^s$  el hamiltoniano en la representación de Schrodinger dado explícitamente por

$$H^s = H_0^s + H_I^s \quad , \quad (3.67)$$

con  $H_0^s$  el hamiltoniano del sistema sin interacción y  $H_I^s$  el hamiltoniano de interacción.

Con la transformación

$$\phi(t) = \text{Exp}(iH_0 t) \phi^s \quad (3.68)$$

$$O(t) = \text{Exp}(iH_0 t) O^s \text{Exp}(-iH_0 t)$$

la ecuación de movimiento se reescribe como

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = H_I \phi \quad (3.69)$$

La transformación utilizada puede ser considerada un cambio de la representación de Schrödinger a otra llamada representación de interacción. Ahora la ecuación de movimiento de un operador es

$$\dot{O} = i[H_0^s, O] = i[H_0, O] \quad (3.70)$$

de donde puede verse que la evolución temporal de los operadores  $O$  está determinada por el hamiltoniano de partícula libre. En cambio, la evolución temporal de la función de onda está determinada por el hamiltoniano de la interacción, (ver la ecuación (3.69)). Por esta razón la representación de interacción es de utilidad para calcular la amplitud de probabilidad para una transición de un estado inicial  $|i\rangle$  a uno final  $|f\rangle$ , permitiendo usar el formalismo de campos libres para los operadores.

A partir de aquí normalmente se usa un método perturbativo para calcular las probabilidades de transición de un estado inicial a un estado final.

## CAPITULO IV

### La búsqueda de alternativas a la electrodinámica cuántica

#### 4.1 Introducción.

Aunque no existen evidencias de discrepancias entre los resultados experimentales y las predicciones de la electrodinámica cuántica, se han realizado diversos esfuerzos tendientes a ofrecer alternativas distintas a la segunda cuantización. Esta búsqueda se fundamenta sobre distintos argumentos, algunos de los cuales han sido resumidos por Crisp y Jaynes<sup>(22)</sup> como sigue:

Aunque se ha mejorado mucho la formulación de la teoría y se han desarrollado métodos de cálculo más poderosos, la electrodinámica cuántica contiene en la actualidad muchas dificultades lógicas y matemáticas. En casi todos los cálculos se encuentran integrales divergentes de las cuales es necesario deshacerse por diversos procedimientos. La energía del punto cero es sustraída arbitrariamente; algunas expresiones divergentes son igualadas a cero con base en la invarianza relativista, otras con fundamento en la invarianza de norma, también se recurre a la renormalización de la masa y de la carga.

Segun estos autores, aunque se ha adquirido experiencia en el arte de manejar las divergencias para extraer resultados finitos significativos, la mayoría de los físicos teóricos están de acuerdo en que se requieren profundas modificaciones a la electrodinámica cuántica. Por otro lado, la creencia generalizada de que la explicación del efecto fotoeléctrico, la dispersión de radiación por electrones libres, la emisión estimulada, etc., sólo pueden ser explicadas recurriendo a la segunda cuantización, es una afirmación carente de verdad. Por consiguiente, Jaynes, Milonni<sup>(23)</sup> y otros, han desarrollado un enfoque interesante que consiste en cuantizar el comportamiento de las partículas cargadas, manteniendo un comportamiento clásico para la radiación electromagnética. Su teoría recibe

el nombre de semiclásica y con ella ha sido posible explicar de manera precisa varios resultados experimentales que comúnmente son considerados competencia exclusiva de la electrodinámica cuántica. Sin embargo, es un hecho demostrado que no todos los fenómenos cuánticos pueden obtenerse con este enfoque.

Otra dirección de desarrollo tiene sus orígenes desde 1931, cuando Schrodinger llama la atención sobre la semejanza de la ecuación de onda de partícula libre en mecánica cuántica y la ecuación de difusión del calor, estableciendo algunas analogías interesantes<sup>(24)</sup>.

Aunque en la actualidad ya no se le reconoce vigencia a la línea iniciada por Schrödinger, resulta interesante señalar que Zambrini<sup>(25)</sup> ha demostrado recientemente que usando un tipo de procesos de difusión llamados "procesos de Bernstein", el programa iniciado por Schrödinger lleva a la mecánica estocástica que presentaremos brevemente más adelante.

Esta mecánica estocástica, desarrollada inicialmente por Nelson<sup>(26)</sup> y profundizada por diversos autores<sup>(27)</sup>, consiste en un enfoque que permite generalizar la segunda ley de Newton al caso de procesos estocásticos sin fricción en el espacio de configuración y obtener la ecuación de Schrödinger como una consecuencia.

Sobre esta base se ha desarrollado una teoría de estocastización del campo electromagnético, que ha podido ser generalizada a otros campos. La hipótesis de trabajo consiste, como en la segunda cuantización, en partir del desarrollo en ondas planas del campo e interpretarlo como un conjunto infinito de osciladores armónicos con un comportamiento estocástico susceptible de ser desarrollado mediante la teoría de Nelson o generalizaciones de la misma<sup>(28)</sup>.

Sobre la base de que la mecánica cuántica acepta una interpretación estocástica, ha surgido la pregunta sobre la posibilidad de construir una teoría que explique las causas físicas de esa estocasticidad y amplíe las perspectivas de la teoría cuántica misma, en una forma semejante a como ocurre con la teoría cinética y la termodinámica. En esta dirección se

ha desarrollado la electrodinámica estocástica<sup>(29)</sup>, que parte de asignar un carácter real a la radiación del punto cero, considerándola como un campo electromagnético estocástico que cuando interacciona con partículas cargadas les imprime un comportamiento azaroso que podría dar como resultado las propiedades cuánticas observadas en la materia. En esta dirección también se han explicado varios efectos físicos<sup>(30-31)</sup> que comúnmente son considerados de explicación exclusiva de la mecánica cuántica.

De este último enfoque se ha desprendido en los últimos años una teoría de Marshall y Santos<sup>(32)</sup>, que ellos llaman óptica estocástica y busca competir con las aplicaciones de la electrodinámica cuántica en el campo de los fenómenos ópticos. Se trata de una teoría puramente ondulatoria del campo electromagnético y sus ideas básicas consisten en tratar la transmisión de la luz a través de lentes polarizadores, espejos, etc., exactamente como en la óptica clásica, pero incluyendo la existencia de la radiación del punto cero presente en todas partes. Cabe recordar, por ser importante para las conclusiones que se busca fundamentar con este capítulo, que la energía del punto cero apareció por primera vez en un trabajo de Planck sobre su ley de radiación y que pocos meses después fue explorada por Einstein como una alternativa para obtener la ley de Planck sobre una base que ahora podríamos llamar estocástica.

Estos enfoques que parten de reconocer la existencia real del campo del punto cero reproducen los resultados cuánticos conocidos, para casos como el oscilador armónico cargado, la partícula libre, dieléctricos macroscópicos, pero no plantea una correspondencia uno a uno con la teoría cuántica, sino que ofrece resultados diferentes, por ejemplo, para la dispersión de energía en el estado base del oscilador armónico a cero grados, para la entropía de la radiación a cero grados Kelvin<sup>(33)</sup>, etc.

#### 4.2 Las estocastizaciones del campo electromagnético.

Sea  $x(t)$  un proceso estocástico, debido a que en muchos casos no es diferenciable, resulta conveniente definir un sustituto de la derivada temporal. Nelson propone la siguiente definición para la derivada media

hacia adelante

$$D_+ x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \langle [x(t+\Delta t) - x(t)]/\Delta t \rangle_t \quad (4.1)$$

y la derivada media hacia atras

$$D_- x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^-} \langle [x(t+\Delta t) - x(t)]/\Delta t \rangle_t \quad (4.2)$$

donde  $\langle \dots \rangle_t$  indica el promedio bajo la condición de que el sistema esté en  $x(t)$  al tiempo  $t$ , en tanto que  $0^+$  y  $0^-$  indican que  $\Delta t$  tiende a cero por la derecha y por la izquierda respectivamente.

El sustituto de la aceleración es entonces la aceleración estocástica dada por

$$a(t) = (1/2) [D_+ D_- + D_- D_+] x(t) \quad (4.3)$$

Se introduce un proceso de Wiener  $W(t)$ , tal que el proceso diferencial  $dW(t)$  es gaussiano, con media cero y función correlación dada por

$$\langle dW_i(t) dW_j(t) \rangle = 2\nu \delta_{ij} dt \quad (4.4)$$

donde  $\nu$  es el coeficiente de difusión.

Se postula que el proceso  $x(t)$  satisface la ecuación

$$dx(t) = b^+[x(t), t] dt + dW_+(t) \quad (4.5)$$

donde

$$D_+ x(t) = b^+ [x(t), t] \quad (4.6)$$

También se puede definir

$$D_- x(t) = b^- [x(t), t] \quad (4.7)$$

desarrollando  $df[x(t), t]$  en serie de Taylor hasta segundo orden y tomando el promedio  $\langle \dots \rangle_t$  se infieren las siguientes expresiones aproximadas para  $D_+$  y  $D_-$

$$\begin{aligned} D_+ &= \partial/\partial t + b^+ \cdot \nabla + \nu \nabla^2 \\ D_- &= \partial/\partial t + b^- \cdot \nabla + \nu \nabla^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

que permiten escribir la aceleración estocástica como sigue

$$a = \frac{1}{2} \frac{\partial(b^+ + b^-)}{\partial t} + \frac{1}{2} (b^+ \cdot \nabla) b^- + \frac{1}{2} (b^- \cdot \nabla) b^+ - \frac{1}{2} \nu \nabla^2 (b^+ - b^-) \quad (4.9)$$

de modo que definiendo la velocidad de flujo

$$v = (1/2)(b^+ + b^-) \quad (4.10)$$

y la velocidad de difusión

$$u = (1/2)(b^+ - b^-) \quad (4.11)$$



se reescribe la ecuación (4.9) en la forma equivalente

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a - (v \cdot \nabla)v + (u \cdot \nabla)u + \nu \nabla^2 u \quad (4.12)$$

Esta cinemática permitió a Nelson formular una teoría estocástica que lleva a la ecuación de Schrodinger. Una definición diferente de aceleración estocástica, dada por Davidson<sup>(35)</sup> y que también reproduce los resultados de Nelson es

$$a = [(D_+ + D_-)/2]^2 + \beta[(D_+ - D_-)/2]^2 \quad (4.13)$$

Sobre esta base Guerra y Loffredo<sup>(28)</sup> plantearon una estocastización del campo electromagnético como sigue: Sean las variables dinámicas  $E(x,t)$ ,  $B(x,t)$ , el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left( E^2(x,t) + B^2(x,t) \right) \quad (4.14)$$

que cumplen con los corchetes de Poisson

$$\begin{aligned} \langle E_i(x,t), E_j(y,t) \rangle &= \langle B_i(x,t), B_j(y,t) \rangle = 0 \\ \langle E_i(x,t), B_j(y,t) \rangle &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial y_k} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Las ecuaciones canónicas serán

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} = \langle E_i, H \rangle \quad , \quad \frac{\partial B_i}{\partial t} = \langle B_i, H \rangle \quad (4.16)$$

Supongamos ahora un espacio de funciones vectoriales  $\{u_n(x)\}$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$  en el volumen  $\Omega$ , tal que cumplen con las condiciones de,

ortonormalidad

$$\int_{\Omega} u_n(\mathbf{x}) \cdot u_{n'}(\mathbf{x}) d^3x = \delta_{nn'} \quad (4.17)$$

completez

$$\sum_n u_{n_i}(\mathbf{x}) u_{n_j}(\mathbf{y}) = \delta_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \quad (4.18)$$

transversalidad

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}_n(\mathbf{x}) &= 0 \\ \nabla^2 u_n(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{m_n} u_n(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde

$$\delta_{ij}^T(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \text{Exp}[ip \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})] \left( \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{p^2} \right) \quad (4.20)$$

Se introducen las coordenadas canónicas  $\{p_n(t), q_n(t)\}$  tales que

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x}, t) &= \sum_n u_n(\mathbf{x}) q_n(t) \\ E(\mathbf{x}, t) &= -\sum_n [\nabla \times \mathbf{u}_n(\mathbf{x})] p_n(t) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Un cálculo directo permite ver que

$$\begin{aligned} \{p_n, p_{n'}\} &= \{q_n, q_{n'}\} = 0 \\ \{p_n, q_{n'}\} &= \delta_{nn'} \end{aligned} \quad (4.22)$$

En términos de estas coordenadas canónicas la hamiltoniana resulta ser

$$H = \sum_n \frac{1}{2} \left( \frac{p_n^2}{m_n} + q_n^2 \right) \quad (4.23)$$

y la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \sum_n \frac{1}{2} \left( m_n \dot{q}_n^2 - q_n^2 \right) \quad (4.24)$$

que llevan a las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{q}_n + \frac{1}{m_n} q_n = 0 \quad (4.25)$$

El campo es entonces un conjunto infinito de osciladores armónicos independientes que pueden ser estocastizados usando la ecuación

$$dq_n(t) = b_n^+(q, t)dt + dW_n(t) \quad (4.26)$$

con  $dW_n(t)$  un proceso gaussiano cuya función correlación es

$$\langle dW_n(t) dW_{n'}(t) \rangle = \frac{\hbar}{m_n} \delta_{nn'} dt \quad (4.27)$$

y generalizando la ecuación (4.25) para escribir:

$$\frac{1}{2} \left( D_+ b_n^- + D_- b_n^- \right) + \frac{1}{m_n} q_n = 0 \quad (4.28)$$

Las ecuaciones que se obtienen para los campos son

$$\begin{aligned} D_+ B(x, t) &= -\nabla \times E_+(x, t) \\ \frac{1}{2} \left( D_- E_- + D_+ E_- \right) &= \nabla \times B \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde

$$E_+(x, t) = -\sum_n m_n \nabla \times u_n(x) b_n^+(q, t) \quad (4.30)$$

$$dB(x, t) = -\nabla \times E_+(x, t) + dW(x, t)$$

Las ecuaciones (4.29-4.30) son la generalización estocástica de las ecuaciones de Maxwell.

Una estocastización diferente, basándose en los potenciales y en la definición (4.13) de aceleración estocástica, fué dada por Davidson en 1979.

Estos enfoques fueron después generalizados a campos de Bose y

de Fermi. Davidson estudió, además, la estocastización del campo gravitacional con las ecuaciones del campo linealizadas.

De manera general, si  $A(t)$  y  $B(t)$  son operadores actuando sobre un espacio de Hilbert, que obedecen a la relación de conmutación

$$A(t)B(t') - \lambda B(t')A(t) = \Gamma(t', t)$$

con  $\lambda \geq -1$  y  $\Gamma(t, t')$  una función definida en los reales, U. Frisch y R. Bourret<sup>(36)</sup> demostraron que en ciertos aspectos estos operadores se comportan como funciones aleatorias gaussianas, en el sentido de que se puede establecer un isomorfismo entre los valores esperados de los primeros y los momentos de las segundas. Por otro lado, motivado también por la falta de claridad conceptual de la teoría cuántica, E. Santos<sup>(37)</sup> construyó un formalismo de tipo cuántico para variables aleatorias  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ , a las cuales les asoció operadores en espacios de Hilbert. Enseguida aplicó su formalismo a un campo electromagnético de radiación libre, obteniendo varias semejanzas con el campo de segunda cuantización. La conclusión más importante de Santos vino a ser que la teoría del campo cuántico podría ser solamente una teoría de campos estocásticos cuyo significado físico de fondo ha estado escondido hasta ahora.

#### 4.3 El enfoque semiclásico de la interacción de cargas eléctricas con radiación electromagnética.

Este enfoque consiste en tratar a la partícula a base de la ecuación de Schrodinger, mientras que los campos reciben una representación clásica mediante funciones continuas.

$$H = H_0 - V \quad , \quad (4.31)$$

El hamiltoniano es entonces el operador hermiteano

$$H = H_0 + V \quad , \quad (4.31)$$

donde  $H_0$  es el hamiltoniano del sistema atómico en la ausencia de campos electromagnéticos y  $V$  el término de interacción que surge de la presencia de los campos, entonces

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \quad (4.32)$$

$$V = \frac{e}{mc} A(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{p}$$

donde el término cuadrático ha sido despreciado bajo el supuesto de que se trata de campos débiles.

Se supone que el átomo en el estado  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  contiene corrientes de carga dadas por

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{m} \operatorname{Re} \left[ \Psi^*(\mathbf{x}, t) \mathbf{p} \Psi(\mathbf{x}, t) \right] \quad (4.33)$$

donde de nuevo se ha despreciado el término de orden superior

$$\frac{e^2}{mc} A(\mathbf{x}, t) |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$$

Se introducen los elementos de matriz

$$\sigma_{\alpha\beta}(t) = a_{\beta}(t) a_{\alpha}^*(t) \quad (4.34)$$

donde  $a_{\beta}(t)$  es tal que

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\beta} a_{\beta}(t) \psi_{\beta}(\mathbf{x}) \quad (4.35)$$

donde  $\psi_\beta$  es eigenfunción de  $H_0$ .

La densidad de corriente queda

$$J(\mathbf{x}, t) = \frac{eh}{2mi} \sum_{\alpha\beta} \left\{ \sigma_{\alpha\beta} \psi_\alpha^* \nabla \psi_\beta - \sigma_{\alpha\beta} \psi_\alpha \nabla \psi_\beta^* \right\}. \quad (4.36)$$

Para calcular la ecuación de evolución de la matriz  $\sigma$ , derivamos respecto al tiempo en (4.34) y usamos que la ecuación de evolución de los coeficientes del desarrollo  $\Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_n a_n(t) \phi_n(\mathbf{x})$  está dada por

$$\dot{a}_\beta(t) = (ih)^{-1} \sum_\alpha V_{\alpha\beta}(t) a_\alpha(t),$$

donde  $\phi_n(\mathbf{x})$  son las eigenfunciones del hamiltoniano sin perturbar y  $V_{\alpha\beta}(t)$  son los elementos de matriz del operador de la perturbación calculados respecto a las  $\phi_n(\mathbf{x})$ . Sustituyendo esta expresión en  $d\sigma_{\alpha\beta}/dt$ , resulta la ecuación de evolución de la matriz  $\sigma$

$$ih\dot{\sigma}_{lm} = \sum_j (H_{lj} \sigma_{jm} - \sigma_{lj} H_{jm}). \quad (4.37)$$

Si la ecuación (4.33) representa una densidad de corriente debido a movimientos atómicos, es conveniente escribirla en términos de las eigenfunciones  $\phi$  y de la matriz  $\sigma$ . Para lograrlo sustituimos (4.35) en (4.33) y luego de un reacomodo resulta

$$J = \frac{eh}{2mi} \sum_{\alpha, \beta} (\sigma_{\beta\alpha} \phi_\alpha^* \nabla \phi_\beta - \sigma_{\alpha\beta} \phi_\alpha \nabla \phi_\beta^*)$$

Las corrientes atómicas crean un potencial vectorial que se

puede escribir como

$$A(\mathbf{x}, t) = c^{-1} \int \frac{J_t(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + A_0(\mathbf{x}, t) ,$$

donde  $J_t(\mathbf{x}, t)$  es la componente transversal de la densidad de corriente y  $A_0(\mathbf{x}, t)$  es el potencial vectorial debido a un campo externo. Si  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$  es muy pequeño, se puede desarrollar en serie de Taylor en la variable temporal para obtener

$$J_t(\mathbf{x}', t') = J_t(\mathbf{x}', t) - c^{-1} \frac{\partial J(\mathbf{x}', t)}{\partial t} |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| + \dots ,$$

con  $t' = t - |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|/c$ . Sustituyendo esta expresión para  $J_t$  en la expresión de arriba para  $A$ , resulta

$$A(\mathbf{x}, t) = c^{-1} \int \frac{J_t(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' - c^{-1} \frac{d}{dt} \int J_t(\mathbf{x}', t) d^3x' + A_0(\mathbf{x}, t) .$$

La expresión para  $J$  en términos de  $\sigma$  y las eigenfunciones  $\phi$  puede usarse ahora para llevar a la expresión

$$A(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha\beta}(t) \left( \frac{-ie\hbar}{2\pi^2 mc} \int_0^{\infty} dk \left[ d\Omega(\alpha | \text{Exp}(-ik \cdot \mathbf{x}) \nabla | \beta) \text{Exp}(ik \cdot \mathbf{x}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{3} \frac{\Omega^2}{c^2} \alpha\beta \bar{\mu}_{\alpha\beta} \right] \right) + A_0(\mathbf{x}, t) , \quad (4.38)$$

donde  $\bar{\mu}_{\alpha\beta}$  es el momento dipolar del átomo y  $\Omega_{\alpha\beta}$  es la frecuencia de la



radiación absorbida o emitida en una transición de  $|\alpha\rangle$  a  $|\beta\rangle$ . En este caso la expresión del integrando significa

$$\langle \alpha | \text{Exp}(-ik \cdot x) \nabla | \beta \rangle = -\frac{k}{|k|} \times \left( \frac{k}{|k|} \times \langle \alpha | \text{Exp}(-ik \cdot x) \nabla | \beta \rangle \right).$$

En la obtención de (4.38) es necesario el uso de las siguientes identidades (ver referencia (22)):

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1} = (2\pi^2)^{-1} \int_0^\infty dk \int d\Omega \text{Exp}[ik \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')]$$

$$\int J_t(\mathbf{x}', t) \text{Exp}(-ik \cdot \mathbf{x}') d^3x' = -\frac{k}{|k|} \times \left( \frac{k}{|k|} \times \int J(\mathbf{x}', t) \text{Exp}(-ik \cdot \mathbf{x}') d^3x' \right)$$

$$\int J_t(\mathbf{x}', t) d^3x' = \frac{2}{3} \int J(\mathbf{x}', t) d^3x' .$$

Usando la ecuación (4.38), la segunda de (4.32) y el hamiltoniano de la forma (4.31) en la ecuación (4.37), se obtiene después de despreciar los términos no resonantes<sup>(22)</sup>

$$\dot{\sigma}_{1m} = -i \left( \Omega_{1m} - \sum_j (\Gamma_{1j} - \Gamma_{jm}) \sigma_{jj}(t) \right) \sigma_{1m} - \left( \sum_j Z^{-1} (A_{1j} + A_{mj}) \sigma_{jj}(t) \right) \sigma_{1m} - \frac{A_0(0, t)}{\hbar c} \sum_j (\Omega_{1j} \bar{\mu}_{1j} \sigma_{jm} - \sigma_{1j} \Omega_{jm} \bar{\mu}_{jm}) \quad (4.39)$$

que es el punto de partida para la explicación de varios efectos físicos, como es el caso de la emisión espontánea para átomos de dos niveles. En este punto esta teoría predice para la amplitud de probabilidad del estado excitado un decaimiento exponencial sólo para tiempos largos. Primero ocurre

un proceso de crecimiento del valor del momento dipolar, hasta que ocurre el decaimiento. La electrodinámica cuántica, en cambio, predice un decaimiento exponencial desde el principio.

Han sido desarrolladas diversas presentaciones<sup>(38)</sup> de este enfoque de la teoría semiclásica, pero por razones de espacio éstas no serán expuestas aquí. En cambio, para los fines que persigue este trabajo, pondremos atención en algunos aspectos físicos de la concepción semiclásica. Un punto importante es que de la ecuación (4.33) resulta claro que se utiliza la interpretación<sup>(39)</sup> de Schrodinger de la función  $\Psi$ , en contraposición a la formulación probabilista usual de la mecánica cuántica. Por consiguiente, la crítica de los autores del enfoque semiclásico no va dirigida sólo al formalismo matemático de la electrodinámica cuántica, sino también al fundamento conceptual de la teoría.

Esta concepción ha facilitado una interesante interpretación<sup>(40)</sup> del fenómeno de interacción de radiación electromagnética con átomos, que parte de la ecuación de Schrodinger y entiende su solución

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_i C_i(t) \psi_i(\mathbf{x}, t) ,$$

como una función que describe un estado no estacionario que evoluciona en el tiempo y que no es una eigenfunción del operador hamiltoniano. La novedad consiste en que si

$$\rho = e |\Psi|^2 ,$$

es interpretada como una densidad de carga, el paso de un estado estacionario a otro, cuando se efectúa una transición, puede ser visualizado como un estado físico donde el centro de carga efectúa movimientos que dan lugar a una radiación clásica. En el trabajo de referencia, Henderson presenta, entre otros ejemplos, la transición de un estado 2P a otro 1S del átomo hidrogenoide, que una vez graficada con la ayuda de una computadora, nos deja

ver claramente un paso continuo del estado 2P, con dos regiones de densidad de carga muy definidas, al estado 1S, con una región esférica alrededor del centro de masa. El paso de una distribución de carga a otra se efectúa mediante oscilaciones que dan origen a un pulso electromagnético que el autor identifica con un fotón.

Este enfoque semiclásico también ha permitido estudiar el efecto Compton, el corrimiento Lamb<sup>(41)</sup> y el efecto fotoeléctrico.

Para explicar el efecto Compton, Barwick utiliza un sistema de dos estados cuya función de onda es

$$\Psi = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2, \quad (4.41)$$

que lleva a la distribución de carga

$$\rho = e\Psi\Psi^* = e\left(C_1^2\psi_1^2 + C_2^2\psi_2^2 + C_1^*C_2\psi_1^*\psi_2 + C_1C_2^*\psi_1\psi_2^*\right), \quad (4.42)$$

donde los dos primeros términos se entienden como una densidad de carga estática para estados 1 y 2 del electrón, mientras que el tercero y el cuarto dependen del tiempo. Estos últimos términos producen una densidad de corriente  $J_{\text{rad}}$  que da lugar a un potencial vectorial de radiación  $A$ , proporcional a una delta de Dirac  $\delta^3(k'_2 - \omega'_2 r/c)$ , de donde se infiere que la energía dispersada es casi monocromática.

Para explicar el efecto Lamb, Barwick hace ver que en un estado físico dado, (n=2, l=1, m=1) por ejemplo, el electrón da lugar a una energía magnética que tiene consecuencias sobre su velocidad y su energía eléctrica, dando lugar a un ligero corrimiento en la energía.

Otro resultado interesante es el presentado por Cray, Shih y Milonni<sup>(42)</sup>, quienes estudian un sistema de dos estados y obtienen que la causa de la emisión y la absorción inducida puede ser la interferencia del campo dipolar eléctrico del átomo -modelable con un oscilador- con el campo

eléctrico incidente. En otro trabajo posterior, Milonni<sup>(43)</sup> ha podido demostrar que "si hay un campo de reacción de radiación, entonces debe haber un campo del punto cero y viceversa, de modo tal que si el espectro de la radiación de fondo va como  $\omega^3$ , esto se debe a que la fuerza de reacción de radiación va como la tercera derivada de la posición." Además, él concluye que ambos efectos dan lugar a la llamada emisión espontánea.

En general, este enfoque neoclásico puede ser considerado como una muestra más de la búsqueda de explicaciones tangibles a nuestra imaginación macroscópica, es decir, como una negativa a admitir ciencia que proporciona formalismos predictores de resultados experimentales, sin imágenes inteligibles de la naturaleza.

El carácter ondulatorio y continuo de la luz, versus su comportamiento cuantizado, ha generado una larga discusión en torno a los fenómenos ópticos de interferometría, mismos que han podido ser explicados tanto con la concepción cuántica como con la ondulatoria de la radiación. Se trata de una larga sucesión de argumentos en que las dos posiciones se rebaten entre si mutuamente. Sin embargo, en 1983, Milonni reconoció que el fenómeno llamado "photon-antibunching", consistente en que la intensidad  $I(t)$  de la radiación proveniente de átomos bajo la influencia de un campo externo presenta correlación  $\langle I(t)I(t+\tau) \rangle$  cero para  $\tau=0$ , puede ser explicado con la electrodinámica cuántica pero no con el enfoque semiclásico. Aparentemente, ahora se reconoce, de manera general, que la teoría neoclásica no cubre toda la gama de fenómenos que sí explica la electrodinámica cuántica.

#### 4.4 La electrodinámica y la óptica estocástica.

Un enfoque diferente, que ha sido manejado durante las últimas décadas, llamado electrodinámica estocástica, busca entender el fenómeno cuántico como el resultado de la interacción de las partículas cargadas con la radiación de fondo, que es un campo electromagnético incongelable, presente aún a cero grados Kelvin, cuya densidad espectral está dada por

$$\rho(\omega) = \hbar\omega^3/2\pi^2c^3 \quad (4.43)$$

y cuyo potencial vectorial puede expresarse mediante ondas planas como sigue

$$A(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{n}, \sigma} \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\mathbf{n}}} \right)^{1/2} \hat{c}_{\mathbf{n}\sigma} a_{\mathbf{n}\sigma} \text{Exp}\{-i(\omega_{\mathbf{n}} t - \mathbf{k}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x})\} + \text{C.C.} \quad (4.44)$$

donde los coeficientes de Fourier son variables aleatorias gaussianas tales que

$$\begin{aligned} \langle a_{\mathbf{n}\sigma} \rangle &= 0 \quad , \quad \langle a_{\mathbf{n}\sigma} a_{\mathbf{n}'\sigma'} \rangle = 0 \\ \langle a_{\mathbf{n}\sigma}^* a_{\mathbf{n}'\sigma'} \rangle &= 2^{-1} \delta_{\mathbf{n}\mathbf{n}'} \delta_{\sigma\sigma'} \end{aligned} \quad (4.45)$$

y la ecuación fundamental de las partículas cargadas es

$$m d^2 \mathbf{x} / dt^2 = F(X) + m \tau d^3 \mathbf{x} / dt^3 + eE + ec^{-1} d\mathbf{x} / dt \times \mathbf{B} \quad (4.46)$$

con  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  los campos eléctrico y magnético, respectivamente.

Tomando al campo electromagnético como una perturbación del sistema mecánico, ha sido posible desarrollar una serie de cálculos de las propiedades físicas de varios sistemas, obteniéndose resultados acordes con la mecánica cuántica sólo para los casos de fuerza lineal y fuerza constante, incluida la partícula libre, de forma tal que el sistema físico sigue un proceso de relajación que tiende asintóticamente al régimen cuántico.

Las dificultades encontradas con las fuerzas no lineales han llevado a la disyuntiva de abandonar la teoría o modificarla. Trabajando en la segunda dirección, L. de la Peña y A. M. Cetto<sup>(44)</sup> han desarrollado un nuevo tratamiento que busca considerar al campo de radiación de fondo como una fuerza dominante en la interacción y no como una simple perturbación.

Bajo una serie de consideraciones todavía en desarrollo, cuya

discusión nos aparta del objetivo fundamental de este trabajo, es posible demostrar que la potencia media de absorción de energía de la partícula se compensa con la potencia de energía perdida, siempre y cuando la densidad espectral del campo sea de la forma

$$\rho(\omega) = \hbar\omega^3/2\pi^2c^3 \quad , \quad (4.47)$$

es decir, se cumple el balance detallado con una radiación que es solución a las ecuaciones de Maxwell, pero con espectro  $\omega^3$ , salvándose el resultado clásico de que este balance sólo es posible cuando la distribución espectral es la de Rayleigh y Jeans. También es posible obtener la ley de radiación de Planck, los coeficientes A y B de Einstein, la fórmula correcta del corrimiento Lamb, así como una conexión interesante con el formalismo de Heisenberg de la mecánica cuántica.

En los últimos cinco años Marshall y Santos<sup>(32)</sup> han desarrollado una línea de trabajo que recibe el nombre de óptica estocástica y que igual que la electrodinámica estocástica parte de considerar como real al campo de radiación de fondo, presenta una discusión semicualitativa de algunos fenómenos ópticos que comúnmente se consideran reservados a la óptica cuántica, incluido el fenómeno de correlación cero llamado "photon-antibunching", que según Milonni no es posible explicar con el enfoque semiclásico como ya se dijo.

En esta concepción el campo electromagnético es considerado ondulatorio y aleatoriamente fluctuante. Marshall, por su parte, ha realizado una serie de conferencias en las que expone este punto de vista y presenta diversas consideraciones interesantes. De ellas presentamos las siguientes:

-La naturaleza de la luz está bien establecida experimentalmente, sin embargo, ¿Puede decirse lo mismo de su carácter corpuscular? Marshall responde que apenas en los experimentos de Clauser y Grangier en 1974, y de Roger y Aspect

en 1986, se ha logrado alguna evidencia directa. Los primeros miden la desviación de un átomo individual ante la interacción de lo que podría llamarse un fotón y los segundos muestran una expulsión direccional del electrón durante el efecto fotoeléctrico. Por lo demás, la presencia del fotón, siguiendo a Marshall, ha permanecido siempre a nivel de una teoría cuyas explicaciones pueden ser casi siempre reproducidas sobre la base de una concepción ondulatoria.

-Pensar que la luz está cuantizada porque ocurren destellos en la pantalla del experimento de la doble rendija cuando se baja mucho la intensidad del haz, es como pensar que un viento fuerte está cuantizado porque tumba las ramas de algunos árboles mientras deja ilesas a otras.

-Una alternativa posible a la concepción corpuscular, versus la ondulatoria de la luz, es la de de Broglie, conforme a la cual una onda piloto, que no transporta energía, dirige a la partícula. Marshall considera que ésta última es una posibilidad interesante.

Esta última concepción ha sido manejada por F. Selleri<sup>(3)</sup>, quien propone la existencia de una onda tal que las probabilidades de transición de los átomos varían en función del valor que toma la onda en distintos puntos del espacio. Con anterioridad, el mismo Einstein había manejado, en 1925, la posibilidad de un enfoque basado sobre la existencia de una onda que él llamaba "onda fantasma"<sup>(5)</sup>, que cumpliría una función semejante a la onda piloto de de Broglie. Esta es una muestra más de cómo muchas ideas nuevas en física tienen su cuna en otras presentadas en el pasado, pero que en su tiempo no recibieron la elaboración, ni la atención que podría haberles dado una estructura más convincente.

La electrodinámica estocástica y la óptica estocástica son otro prototipo de esfuerzos tendientes a elaborar teorías físicas que eliminen el exceso de misterio en la teoría cuántica.

## CAPITULO V

### Una recuperación del modelo de Einstein

#### 5.1 Descripción del sistema físico.

Consideremos un gas compuesto de átomos cuyo espectro de energía consta de niveles discretos, con un peso estadístico descrito por la estadística de Maxwell-Boltzmann cuando se encuentra en equilibrio térmico con una radiación electromagnética.

En el lenguaje de los procesos estocásticos diremos que esta radiación se encuentra en un estado estacionario cuando está en equilibrio térmico con el gas, que se da como resultado de un balance detallado en el cual dos niveles de energía 1 y 2 cualesquiera de los átomos del gas, mantienen una radiación monocromática de frecuencia  $\omega=(E_1-E_2)/h$ , en un régimen en el cual la probabilidad de una emisión es igual a la probabilidad de una absorción.

Esto nos permite simplificar nuestro enfoque y tratar solamente un gas formado por átomos de dos niveles en interacción con una radiación electromagnética monocromática que postulamos compuesta por fotones.

Puesto que el número de átomos intercambiando radiación es muy grande, no es posible especificar cuántos fotones hay por unidad de volumen en un instante dado; en consecuencia, buscaremos una descripción estadística conforme a la cual asociaremos al gas de fotones una probabilidad por unidad de tiempo  $g_m(t)$  de que el número de fotones  $m(t)$  aumente en uno y una probabilidad por unidad de tiempo  $r_m(t)$  de que dicha densidad disminuya en uno. Estas probabilidades dependerán de las propiedades de los sistemas atómicos y de la radiación y serán construidas sobre una base intuitiva, siguiendo el razonamiento de Einstein expuesto en el segundo capítulo. Esto introduce un contenido fenomenológico importante en la descripción.

Sea  $P_m(t)$  la probabilidad de que al tiempo  $t$  la densidad de



fotones tome el valor  $m(t)$ , tal que en el intervalo de tiempo  $(t, t+\delta t)$  puede cambiar al valor  $P_m(t+\delta t)$  como resultado de alguno de los siguientes eventos:

1) Al tiempo  $t$  la densidad de fotones está en el estado  $m(t)$  con probabilidad  $P_m(t)$  y no ocurre ninguna emisión ni absorción. Este evento tendrá una probabilidad dada por,  $(1-g_m\delta t-r_m\delta t)P_m(t)$ , más términos de orden superior en  $\delta t$ .

2) Al tiempo  $t$  la densidad de fotones está en el estado  $m+1$  y ocurre una disminución en una unidad. La probabilidad de este evento será  $r_{m+1}\delta tP_{m+1}(t)$ , más términos de orden superior en  $\delta t$ .

3) Al tiempo  $t$  la densidad de fotones está en el estado  $m-1$  y ocurre un incremento en una unidad. La probabilidad de este evento será  $g_{m-1}\delta tP_{m-1}(t)$ , más términos de orden superior en  $\delta t$ .

Sumando las tres contribuciones tendremos para la probabilidad

$P_m(t+\delta t)$

$$P_m(t+\delta t) = (1 - g_m\delta t - r_m\delta t)P_m(t) + r_{m+1}\delta tP_{m+1}(t) + g_{m-1}\delta tP_{m-1}(t) ,$$

reacomodando, dividiendo entre  $\delta t$  y tomando el límite  $\delta t \rightarrow 0$ , se obtiene la ecuación para la evolución temporal de la probabilidad  $P_m(t)$

$$\dot{P}_m(t) = r_{m+1}P_{m+1}(t) + g_{m-1}P_{m-1}(t) - (r_m + g_m)P_m(t) , \quad (5.1)$$

que coincide con la ecuación maestra (C.4) dada en el apéndice para procesos de nacimiento y muerte.

Claramente la probabilidad  $r_m$  de que ocurra una transición del

estado  $m$  al estado  $m-1$  está dada por la probabilidad de que sea absorbido un fotón, mientras que la probabilidad  $g_m$  del estado  $m$  al estado  $m+1$  está dada por la probabilidad de que sea emitido un fotón.

Como se desprende de las consideraciones anteriores, la evolución de la densidad de fotones es descriptible, de manera natural, mediante un proceso estocástico de nacimiento y muerte. Nótese que no hemos hecho alusión a la indistinguibilidad de las partículas.

Del material expuesto en el apéndice tenemos que, una vez que logremos construir las probabilidades de transición, estaremos en posibilidad de calcular la evolución temporal de todos los momentos de la densidad de fotones, así como la entropía de la radiación. De que la densidad de energía esta dada por  $\rho = m\hbar\omega$ , obtendremos la energía  $E$  y la energía libre de Helmholtz  $F = E - TS$ , donde  $T$  es la temperatura. Esto proporcionará los elementos necesarios para una descripción termodinámica del gas de fotones<sup>(46)</sup>.

## 5.2 Determinación de las probabilidades de transición.

Los procesos de nacimiento y muerte se clasifican como lineales o no lineales según sea la dependencia funcional de las probabilidades de transición  $r_m$  y  $g_m$  respecto del estado  $m$ . En las aplicaciones de esta herramienta matemática, la no linealidad aparece cuando hay interacción entre los individuos o elementos bajo estudio<sup>(53-55)</sup>. Por ejemplo, cuando se describen reacciones químicas como resultado de colisiones y disociaciones de moléculas para obtener las ecuaciones macroscópicas de la cinética química, o bien, cuando se describe la evolución de especies biológicas con competencia por alimentación entre los individuos. etc. Cuando no hay interacción entre los elementos que describe el proceso, las probabilidades de transición son lineales. En este caso se dice que el proceso de nacimiento y muerte es lineal.

Desde el punto de vista de este enfoque, podemos catalogar como ejemplos de interacción entre fotones a la creación y aniquilación de pares que se estudia en la física de altas energías. Pero para las temperaturas en las cuales pueden formarse los sistemas atómicos, no son

frecuentes este tipo de fenómenos, por lo que podemos restringir nuestro tratamiento al caso lineal. Por otro lado, siguiendo el razonamiento de Einstein ya mencionado, las probabilidades de transición que se construyen son lineales. La argumentación es como sigue:

1) La probabilidad de transición  $r_m$  es proporcional a la probabilidad  $R_1(t)$  de que el sistema esté en el estado  $i$  de energía mas baja  $E_i$  y al número de fotones  $m$  por unidad de volumen, resulta

$$r_m(t) = \alpha_{ij} R_1(t) m(t) \quad , \quad (5.2)$$

donde  $\alpha_{ij}$  es independiente de la temperatura y de la energía del sistema atómico.

2) La probabilidad de transición  $g_m$  es proporcional a la probabilidad  $R_j(t)$  de que el sistema se encuentre en el estado  $j$  de energía mas alta  $E_j$  y al número de fotones  $m$  por unidad de volumen. Además, considerando la emisión espontánea, debe existir un término proporcional a  $R_j(t)$  pero no a  $m$ , de donde resulta

$$g_m(t) = \beta_{ij} R_j(t) m(t) + \gamma_{ji} R_j(t) \quad , \quad (5.3)$$

con  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_{ji}$  independientes de la temperatura y de la energía del sistema atómico.

Puesto que para tiempos grandes los sistemas atómicos deben obedecer la estadística de Maxwell y Boltzmann, postulamos la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_{i,j}(t) = Z^{-1} \text{Exp}(-E_{i,j}/kT) \quad , \quad (5.4)$$

donde  $Z = \int \text{Exp}(-E/kT) d^3p d^3q / h^3$  en el caso continuo y  $Z = \sum_i \text{Exp}(-E_i/kT)$  para el caso discreto.

Para las probabilidades de transición debemos tener la condición del balance detallado en equilibrio

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_{m_e} = \lim_{t \rightarrow \infty} r_{m_e}, \quad (5.5)$$

donde  $m_e$  es el estado estacionario de la radiación.

Sustituyendo (5.3) y (5.4) en (5.5) se obtiene

$$\alpha_{ij} Z^{-1} \text{Exp}(-E_i/kT) m_e = \beta_{ji} Z^{-1} \text{Exp}(-E_j/kT) m_e + \gamma_{ji} Z^{-1} \text{Exp}(-E_j/kT), \quad (5.6)$$

suponiendo que  $m_e$  tiende a infinito cuando  $T$  tiende a infinito, resulta  $\alpha_{ij} = \beta_{ji}$ . Además, de que estas constantes no dependen de la temperatura, tenemos que esta igualdad se mantiene para toda  $T$ .

Resolviendo en (5.6) para  $m_e$  se obtiene

$$m_e = \frac{\gamma_{ji} / \alpha_{ij}}{\text{Exp}(h\omega/kT) - 1} \quad (5.7)$$

de modo que la densidad de energía de la radiación resulta ser

$$\rho(\omega, T) = \frac{\left( \gamma_{ji} / \alpha_{ij} \right) h\omega}{\text{Exp}(h\omega/kT) - 1} \quad (5.8)$$

Para determinar las constantes  $\gamma_{ji}$  y  $\alpha_{ij}$  aplicamos la condición de que para  $\omega/T$  pequeña la radiación cumpla con el principio de equipartición de la energía

$$\rho(\omega, T) \approx \frac{\gamma_{ji} kT}{\alpha_{ij}}, \quad (5.9)$$

de donde resulta que  $\alpha_{ij} = \gamma_{ji}$ , por lo tanto, las probabilidades de transición pueden escribirse como

$$g_m(t) = \beta_{ij} R_j(t) \left[ m(t) + 1 \right] \quad (5.10)$$

$$r_m(t) = \alpha_{ij} R_i(t) m(t)$$

En lo sucesivo, por simplicidad usaremos

$$a = \alpha_{ij} R_i(t)$$

$$b = \beta_{ij} R_j(t) \quad (5.11)$$

y solo hasta el final introduciremos explícitamente los valores de a y de b.

### 5.3 Cálculo de las propiedades estadísticas de la radiación electromagnética en equilibrio.

Usando las expresiones (C.11) y (C.12) obtenidas en el apéndice para el primero y segundo momento de  $m(t)$  y las probabilidades de transición dadas arriba, se obtiene

$$\frac{d\langle m \rangle}{dt} + (a-b)\langle m \rangle = b \quad (5.12)$$

la ecuación para el promedio. Para el caso de equilibrio tenemos que  $d\langle m \rangle / dt = 0$ , luego, resolviendo para el valor de equilibrio  $\langle m \rangle_0$  resulta

$$\langle m \rangle_0 = \frac{1}{ab^{-1} - 1} \quad (5.13)$$

Para el segundo momento la ecuación será

$$\frac{d\langle m^2 \rangle}{dt} + 2(a-b)\langle m^2 \rangle = (a+3b) \left( \langle m(t=0) \rangle - \frac{b}{a-b} \right) \text{Exp}[(b-a)t] + \frac{b(a+3b)}{a-b} + b \quad (5.14)$$

En el caso de equilibrio  $d\langle m^2 \rangle / dt = 0$ , después de sustituir (5.13), resulta

$$\langle m^2 \rangle_0 = \frac{(a+3b)\langle m \rangle_0 + b}{2(a-b)} \quad (5.15)$$

La varianza puede calcularse entonces de manera directa

$$D_m^2 = \langle m^2 \rangle_0 - \langle m \rangle_0^2 = \frac{ab}{(a-b)^2} \quad (5.16)$$

y con  $a/b = \text{Exp}[(E_j - E_1)/kT]$ , se puede escribir el momento y la varianza como

$$\langle m \rangle_0 = \frac{1}{\text{Exp}(\hbar\omega/kT) - 1} \quad (5.17)$$

$$D_m^2 = \frac{\text{Exp}(\hbar\omega/kT)}{\left[ \text{Exp}(\hbar\omega/kT) - 1 \right]^2}$$

que reproducen los resultados predichos por la física estadística cuántica para los números de ocupación del gas de fotones.

Usando la expresión (C.13) presentada en el apéndice se pueden obtener los momentos de orden superior para el caso de equilibrio, mediante un procedimiento algebraico que obtendremos enseguida:

Reescribiendo (C.13) tenemos

$$\frac{d\langle m^k \rangle}{dt} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \left[ \langle m^i g_m \rangle + (-1)^{k-i} \langle m^i r_m \rangle \right] \quad (5.18)$$

y sustituyendo (5.10) y (5.11), resulta, después de un reacomodo

$$\frac{d\langle m^k \rangle}{dt} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \left\{ \left[ b + (-1)^{k-i} a \right] \langle m^{i+1} \rangle + b \langle m^i \rangle \right\} \quad (5.19)$$

Para el caso de equilibrio que estamos estudiando hacemos

$$d\langle m^k \rangle_0 / dt = 0 \quad ,$$

resulta

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \left[ b + (-1)^{k-i} a \right] \langle m^{i+1} \rangle_0 + b \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \langle m^i \rangle_0 = 0$$

y separando el  $(k-1)$ -ésimo sumando del primer término, se obtiene, después de resolver para  $\langle m_0^k \rangle$

$$\langle m_0^k \rangle = k^{-1} \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} \langle m^{i+1} \rangle_0 \frac{1 + (-1)^{k-1} \text{Exp}(\theta)}{\text{Exp}(\theta) - 1} + k^{-1} \left[ \text{Exp}(\theta) - 1 \right]^{-1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \langle m^i \rangle_0 \quad (5.20)$$

con  $\theta = \hbar\omega/kT$ .

Esta expresión permite calcular todos los momentos de la densidad de fotones en equilibrio térmico mediante un procedimiento algebraico relativamente simple. Por ejemplo, para  $k=1$  resulta

$$\langle m \rangle_0 = \left( \text{Exp}(\theta) - 1 \right)^{-1}, \quad (5.21)$$

como era de esperarse. Para  $k=2$  se obtiene

$$\langle m^2 \rangle_0 = \frac{\text{Exp}(\theta) + 1}{\left( \text{Exp}(\theta) - 1 \right)^2}. \quad (5.22)$$

Para  $k=3$ , la expresión (5.20) ofrece la siguiente expresión

$$\langle m^3 \rangle_0 = \frac{1}{3} \left\{ \binom{3}{0} \langle m \rangle_0 \frac{1 - \text{Exp}(\theta)}{\text{Exp}(\theta) - 1} + \binom{3}{1} \langle m^2 \rangle_0 \frac{1 + \text{Exp}(\theta)}{\text{Exp}(\theta) - 1} \right. \\ \left. \frac{1}{\text{Exp}(\theta) - 1} \left[ \binom{3}{0} + \binom{3}{1} \langle m \rangle_0 + \binom{3}{2} \langle m^2 \rangle_0 \right] \right\}$$

y simplificando resulta

$$\langle m^3 \rangle_0 = \frac{\text{Exp}(2\theta) + 4\text{Exp}(\theta) + 1}{\left( \text{Exp}(\theta) - 1 \right)^3}. \quad (5.23)$$



Para  $k=4$ , se obtiene de (5.20)

$$\langle m^4 \rangle_0 = \frac{1}{4} \left\{ \binom{4}{0} \langle m \rangle_0 \frac{1 + \text{Exp}(\theta)}{\text{Exp}(\theta) - 1} + \binom{4}{1} \langle m^2 \rangle_0 \frac{1 - \text{Exp}(\theta)}{\text{Exp}(\theta) - 1} + \binom{4}{2} \langle m^3 \rangle_0 \frac{1 + \text{Exp}(\theta)}{\text{Exp}(\theta) - 1} + \frac{1}{\text{Exp}(\theta) - 1} \left[ \binom{4}{0} + \binom{4}{1} \langle m \rangle_0 + \binom{4}{2} \langle m^2 \rangle_0 + \binom{4}{3} \langle m^3 \rangle_0 \right] \right\},$$

de donde resulta

$$\langle m^4 \rangle_0 = \frac{\text{Exp}(3\theta) + 11\text{Exp}(2\theta) + 11\text{Exp}(\theta) + 1}{(\text{Exp}(\theta) - 1)^4} \quad (5.24)$$

Para  $k=5$  se sigue un procedimiento similar y se obtiene

$$\langle m^5 \rangle_0 = \frac{\text{Exp}(4\theta) + 22\text{Exp}(3\theta) + 66\text{Exp}(2\theta) + 22\text{Exp}(\theta) + 1}{(\text{Exp}(\theta) - 1)^5} \quad (5.25)$$

Este algoritmo se puede repetir indefinidamente para obtener cualquier momento  $\langle m^k \rangle_0$ , conociendo solamente las probabilidades de nacimiento y muerte de fotones, sin necesidad de conocer las probabilidades  $P_m^S$  de que haya  $m$  fotones de frecuencia  $\omega$  por unidad de volumen.

En cambio, para obtener la entropía del gas de fotones no es suficiente con la información que se obtiene a partir de (5.20), en consecuencia, resulta útil estudiar la solución estacionaria  $P_m^S$ , válida cuando se ha alcanzado el equilibrio. Esta se obtiene con las ecuaciones

(C.22), (C.24) y las probabilidades de transición dadas arriba, resulta

$$P_m^s = (1 - ba^{-1})(ba^{-1})^m \quad (5.26)$$

Un enfoque distinto, planteado por Cetto y de la Peña en la referencia (58), permite obtener la expresión

$$\langle p_n \rangle = (1 - \epsilon)\epsilon^n \quad (5.27)$$

donde  $\epsilon = ba^{-1}$  y  $\langle p_n \rangle$  es la distribución de probabilidad, promediada, de que haya  $n$  fotodetecciones producidas por un campo de radiación estocástico clásico.

En este enfoque se considera un haz de luz monocromática incidiendo sobre un aparato de medición. Se supone que la probabilidad  $P(t)$  de una fotodetección al tiempo  $t$  es proporcional a la intensidad  $I(t)$  del haz, y por lo tanto, a la energía  $E(t)$ .

Si  $U(t, t+\Delta t)$  es la probabilidad de una fotodetección en el intervalo de tiempo pequeño  $(t, t+\Delta t)$ , ésta está dada por

$$U(t, t+\Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} I(t') dt' \quad (5.28)$$

La probabilidad de  $n$  fotodetecciones en un intervalo finito  $(t, t+\Delta t)$ , está dada por la distribución de Poisson

$$p(n) = \frac{1}{n!} (\alpha U)^n \text{Exp}(-\alpha U) \quad (5.29)$$

siempre que las fotodetecciones sean eventos independientes entre sí.

Si se trata de un campo incidente fluctuante,  $U$  es una variable estocástica, de donde se tiene que  $p(n)$  debe ser promediada para obtener una probabilidad efectiva  $\langle p(n) \rangle$  de que haya  $n$  fotodetecciones en  $(t, t+\Delta T)$ . Se tiene entonces

$$\langle p(n) \rangle = \frac{1}{n!} \langle (\alpha U)^n \text{Exp}(-\alpha U) \rangle \quad (5.30)$$

Por otro lado, usando la ecuación (5.47), que presentaremos más adelante, que el promedio de fotodetecciones está dado por  $\bar{n} = \alpha \bar{U}$  y desarrollando en serie de Taylor el lado derecho de (5.30), Cetto y de la Peña obtienen

$$\langle p_n \rangle = \frac{(\bar{n})^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}} \quad (5.31)$$

En particular, si

$$\bar{n} = \frac{1}{\text{Exp}(\beta \hbar \omega) - 1} = \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \quad (5.32)$$

resulta la ecuación (5.27) dada arriba.

Resulta entonces que un modelo de fotones como el aquí planteado es equivalente, en lo que al primer momento se refiere, a un modelo de fotodetecciones producidas por un campo estocástico clásico. Y lo que es la probabilidad  $\Gamma_m$  de que haya  $m$  fotones por unidad de volumen, es análogo a la probabilidad efectiva  $\langle p(m) \rangle$  de que haya  $m$  fotodetecciones en un intervalo finito de tiempo. El problema que el modelo clásico deja abierto es porque existen fotodetecciones, en lugar de un intercambio continuo de energía en el sentido usual de la electrodinámica clásica.

Regresando a nuestro modelo, de la expresión (5.26) se puede

calcular el promedio de  $m$  en el estado estacionario, resulta

$$\langle m \rangle_0 = \frac{1}{\text{Exp}(\hbar\omega/kT) - 1}, \quad (5.33)$$

que coincide con el promedio predicho mediante la relación de recurrencia dada en (5.20).

La expresión para la entropía del proceso estocástico, dada en (C.25), permite calcular la entropía de la radiación, sea

$$S(\omega, T) = -k \langle \ln P_m^s \rangle,$$

sustituyendo (5.18) en esta expresión y reacomodando se obtiene

$$S(\omega, T) = -k \ln \left( 1 - \text{Exp}(-\hbar\omega/kT) \right) + \frac{\hbar\omega/T}{\text{Exp}(\hbar\omega/kT) - 1}, \quad (5.34)$$

que coincide con la expresión dada por la física estadística cuántica para la entropía de un gas de fotones<sup>(46)</sup>.

La expresión (5.26) se conoce con el nombre de distribución geométrica o de Pascal, y como es bien sabido de la teoría de procesos estocásticos, a partir de la distribución de probabilidad se pueden obtener todas las propiedades estadísticas del sistema. En términos de las variables físicas que caracterizan al gas de fotones, la ec. (5.26) se puede escribir como sigue:

$$P_m^s = \left( 1 - \text{Exp}(-\hbar\omega/kT) \right) \text{Exp}(-m\hbar\omega/kT), \quad (5.35)$$

que coincide con la distribución de probabilidad que predice la física estadística cuántica para un gas de osciladores armónicos independientes, en contacto con un baño térmico.

Los momentos  $\langle m^k \rangle_0$  pueden calcularse directamente a partir de su definición

$$\langle m^k \rangle_0 = \sum_{m=0}^{\infty} m^k P_m^s, \quad (5.36)$$

pero la evaluación de cada uno de ellos involucra trabajar con el límite de una serie distinta en cada caso. Por lo tanto, resulta más fácil calcular los momentos a partir de la función característica

$$G(\kappa) = \langle \text{Exp}(i\kappa n) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \text{Exp}(i\kappa n) \quad (5.37)$$

Haciendo  $\gamma = \text{Exp}(-\hbar\omega/kT)$  en (5.35) y sustituyendo en (5.37) se obtiene

$$G(\kappa) = \sum_{m=0}^{\infty} (1 - \gamma) \gamma^m \text{Exp}(i\kappa m) = (1 - \gamma) \sum_{m=0}^{\infty} \left( \gamma \text{Exp}(i\kappa) \right)^m,$$

luego, la función característica será

$$G(\kappa) = \frac{1 - \gamma}{1 - \gamma \text{Exp}(i\kappa)} \quad (5.38)$$

De (A.5) resulta que

$$\langle m^k \rangle_0 = i^{-k} G^{(k)}(\kappa=0) \quad (5.39)$$

donde  $G^{(k)}$  ( $\kappa=0$ ) es la  $k$ -ésima derivada, valuada en cero, de la función característica. Sustituyendo (5.38) en (5.39), se obtiene

$$\langle m^k \rangle_0 = i^{-k} (1 - \gamma) \left. \frac{d}{d\kappa} \left( 1 - \gamma \text{Exp}(i\kappa) \right)^{-1} \right|_{\kappa=0} \quad (5.40)$$

y comparando (5.40) con (5.20), se obtiene para la  $k$ -ésima derivada de la función característica, valuada en cero,

$$G^{(k)}(0) = \frac{1}{i^k k (1 - \text{Exp}(-\theta))} \left\{ \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} \langle m^{i+1} \rangle_0 \frac{1 + (-1)^{i-1} \text{Exp}(\theta)}{\text{Exp}(\theta) - 1} \right. \\ \left. + \frac{1}{\text{Exp}(\theta) - 1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \langle m^i \rangle_0 \right\} \quad (5.41)$$

Obteniendo la primera derivada de la función característica a partir de (5.38), resulta

$$G'(\kappa) = \frac{i\gamma(1 - \gamma)\text{Exp}(i\kappa)}{\left( 1 - \gamma\text{Exp}(i\kappa) \right)^2}$$

valuando en  $\kappa=0$  y usando (5.39) se obtiene

$$\langle m \rangle_0 = \frac{1}{\text{Exp}(\theta) - 1} \quad (5.42)$$

Análogamente, calculando la segunda y la tercera derivada de la función

característica, se obtiene de (5.39)

$$\langle m^2 \rangle_0 = i^{-2} G^{(2)}(\kappa=0) = \frac{\gamma^{-1} + 1}{(\gamma^{-1} - 1)^2} = \frac{\text{Exp}(\hbar\omega/kT) + 1}{(\text{Exp}(\hbar\omega/kT) - 1)^2} \quad (5.43)$$

$$\langle m^3 \rangle_0 = i^{-3} G^{(3)}(0) = \frac{1 + 4\gamma^{-1} + \gamma^{-3}}{(\gamma^{-1} - 1)^3} = \frac{\text{Exp}(3\theta) + 4\text{Exp}(\theta) + 1}{(\text{Exp}(\theta) - 1)^3} \quad (5.44)$$

que coinciden con las ecuaciones (5.21)-(5.23).

Aunque la expresión (5.39) es más simple que la ecuación (5.20), en la práctica lleva a un cálculo más complicado. De donde resulta que el procedimiento empleado inicialmente es más sencillo.

El k-ésimo momento de la energía por unidad de volumen, y por modo normal de la radiación, puede encontrarse mediante la relación

$$\langle E^k \rangle = (\hbar\omega)^k \langle m^k \rangle_0 \quad (5.45)$$

Los momentos de la energía de la radiación calculados de esta forma coinciden con los predichos por A. M. Cetto y L. de la Peña en la referencia (58), mediante un enfoque enteramente distinto que consiste en lo siguiente:

1. Sea un campo aleatorio en su estado de máxima entropía, tal que cada uno de sus modos tiene una energía media definida y que su densidad está normalizada a la unidad. Con estas condiciones y definiendo la entropía como  $S = -k \langle \ln W \rangle$ , se obtiene

$$W(E) = Z^{-1} \text{Exp}(-\phi E) \quad (5.46)$$

con  $\phi(\beta) = (\beta=1/kT)$  una función no especificada de la temperatura.

2. Si  $f(E)$  es una función de la energía, se define su promedio como

$$\langle f(E) \rangle = Z^{-1} \int f(E) \text{Exp}(-\phi E) dE \quad (5.47)$$

3. Retomando el enfoque utilizado por Einstein en 1906 para estudiar los calores específicos, proponen

$$W(E) = Z^{-1} \text{Exp}[-\beta E g(E)] \quad (5.48)$$

donde  $g(E)$  es una densidad de estados energéticos.

4. Encuentran que para obtener la ley de Planck,  $g(E)$  tiene que estar dada como

$$g(E) = \sum_n \delta(E - n\gamma) \quad (5.49)$$

donde  $\gamma = \hbar\omega$ . Luego calculan

$$\langle E^r \rangle = \sum_n E^r W(E) \quad (5.50)$$

y obtienen la relación

$$\langle E^r \rangle = (-1)^r Z_T^{-1} \partial^r Z_T / \partial \beta^r \quad (5.51)$$



con  $Z_T = \langle E \rangle + \hbar\omega$ .

Si aplicamos esta ecuación en forma sucesiva, resulta

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{\text{Exp}(\beta\hbar\omega) - 1} \quad (5.52a)$$

$$\langle E^2 \rangle = \frac{(\hbar\omega)^2 \left[ \text{Exp}(\beta\hbar\omega) + 1 \right]}{\left[ \text{Exp}(\beta\hbar\omega) - 1 \right]^2} \quad (5.52b)$$

$$\langle E^3 \rangle = \frac{(\hbar\omega)^3 \left[ \text{Exp}(2\beta\hbar\omega) + 4\text{Exp}(\beta\hbar\omega) + 1 \right]}{\left[ \text{Exp}(\beta\hbar\omega) - 1 \right]^2} \quad (5.52c)$$

que coinciden con los momentos predichos mediante el modelo que desarrollo en este capítulo.

#### 5.4 Sobre la termodinámica de un gas de fotones.

Si  $\langle m(t) \rangle_0$  dada por (5.19) es el promedio del número de fotones por unidad de volumen, con frecuencia y espin dado, y el cálculo de la densidad de estados en el espacio fase lleva a

$$dN(\omega) = \omega^2 d\omega / \pi^2 c^3 ,$$

entonces, la energía E de la radiación y el número total de fotones en un volumen V serán

$$E = \frac{Vh}{\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{\text{Exp}(\hbar\omega/kT) - 1} \quad (5.53)$$

$$N = \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{\text{Exp}(\hbar\omega/kT) - 1} \quad (5.54)$$

La entropía estará dada por

$$S = - \frac{kV}{\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \omega^2 \ln \left( 1 - \text{Exp}(-\hbar\omega/kT) \right) d\omega + \frac{\hbar V}{\pi^2 c^3 V} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{\text{Exp}(\hbar\omega/kT) - 1} \quad (5.55)$$

De donde se puede calcular la entropía libre de Helmholtz  $F=E-TS$  para obtener

$$F = \frac{kTV}{\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \omega^2 \ln \left( 1 - \text{Exp}(\hbar\omega/kT) \right) d\omega \quad (5.56)$$

A partir de esta expresión es posible calcular las propiedades termodinámicas de la radiación del cuerpo negro<sup>(47)</sup>, como se puede ver a continuación:

Las variables independientes naturales cuando se utiliza la energía libre de Helmholtz como potencial termodinámico son: la temperatura  $T$  y el volumen  $V$ . A partir de allí se tiene

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V, \quad P = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \quad (5.57)$$

y también

$$E = -T^2 \left( \frac{\partial [F/T]}{\partial T} \right)_V \quad (5.58)$$

Haciendo  $x = h\nu/kT$  en (5.56) se tiene

$$F = - \frac{V k^4 T^4}{3\pi^2 h^3 c^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\text{Exp}(x) - 1}$$

pero como

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\text{Exp}(x) - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

resulta

$$F = - \frac{4\sigma}{3c} VT^4 \quad (5.59)$$

donde

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60h^3 c^2} \quad (5.60)$$

Usando la primera ecuación de (5.57) resulta

$$S = \frac{16\sigma}{3c} VT^3 \quad (5.61)$$

Usando la primera ecuación de (5.57) resulta

$$P = \frac{4\sigma}{3c} T^4 \quad (5.62)$$

De la ecuación (5.58) resulta para la energía

$$E = \frac{4\sigma}{c} VT^4 \quad (5.63)$$

La capacidad calorífica a volumen constante

$$C_v = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_v = \frac{16\sigma}{c} VT^3 \quad (5.64)$$

La entalpía  $H=E+PV$  se obtiene de (5.62) y (5.63), resulta

$$H = \frac{16\sigma}{3c} VT^4 \quad (5.65)$$

### 5.5 Transferencia de momento de una radiación monocromática a un espejo.

En 1909 Einstein estudió las fluctuaciones en el momento transferido de una radiación monocromática a un espejo durante un intervalo de duración  $\tau$ . El enfoque de procesos de nacimiento y muerte que aquí desarrollo permite encontrar, de manera muy sencilla, la misma expresión obtenida por Einstein.

Sea un sistema formado por un espejo y un gas de fotones que interacciona con él, de forma tal que son absorbidos con probabilidad  $r_m$  y emitidos con probabilidad  $g_m$ . Sea  $m(t)$  el número neto de fotones emitidos en una dirección  $(\Omega, \Omega+d\Omega)$  con probabilidad  $d\Omega/4\pi$ . Llamaremos un nacimiento a la emisión de un fotón y una muerte a la absorción de un fotón. Si cada uno de ellos lleva un momento  $h\omega/c$ , entonces el momento transferido del espejo a la radiación, por unidad de área y por unidad de tiempo, en la dirección  $(\Omega, \Omega+d\Omega)$ , será

$$m(t)h\omega d\omega/2\pi c$$

Las probabilidades de transición  $g_m$ ,  $r_m$  pueden ser construidas con base en los mismos argumentos que llevan a (5.11). El problema matemático es, por lo tanto, esencialmente el mismo, de forma tal que

$$m(t)\hbar\omega\hat{k}/c$$

será el momento promedio transferido del espejo a cada modo normal de una radiación monocromática, por unidad de área y por unidad de tiempo, en la dirección  $\hat{k}$  del semiespacio en que se encuentra la radiación. Por consiguiente, para una radiación con frecuencia en el intervalo  $(\omega, \omega+d\omega)$ , el momento promedio transferido a un espejo de área  $A$ , durante  $\tau$  segundos, en una dirección  $\hat{k}$ , será

$$\langle p \rangle = \langle m(t) \rangle \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^4} A \tau d\omega \hat{k} \quad (5.68)$$

Para la fluctuación cuadrática se tendrá

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle = \left[ \langle m^2(t) \rangle - \langle m(t) \rangle^2 \right] \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^4} A \tau d\omega \quad (5.69)$$

En el caso de equilibrio resultará

$$\langle p \rangle_0 = \frac{\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^4} A \tau d\omega \hat{k}}{\text{Exp}(\hbar\omega/kT) - 1} \quad (5.70)$$

Para la fluctuación cuadrática tendremos

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle = N(\omega) A \tau \frac{\hbar\omega}{c} \left[ \langle m^2 \rangle_0 - \langle m \rangle_0^2 \right] d\omega$$

con  $N(\omega) = \omega^2 / \pi^2 c^3$ . Usando (5.17) tenemos

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle_0 = N(\omega) A \tau \frac{\hbar \omega}{c} \frac{\text{Exp}(\theta) d\omega}{(\text{Exp}(\theta) - 1)^2} \quad (5.71)$$

pero

$$\frac{\text{Exp}(\theta)}{(\text{Exp}(\theta) - 1)^2} = \langle m^2 \rangle_0 + \langle m \rangle_0^2$$

y escribiendo  $\rho(\omega, T) = N(\omega) \langle m \rangle_0$  se obtiene de (5.71)

$$\langle (\Delta p^2) \rangle = A \tau \frac{\hbar \omega}{c} d\omega \left[ \rho + \frac{\pi^2 c^3}{\omega^2} \rho^2 \right] \quad (5.72)$$

que es la fórmula obtenida por Einstein en 1909.

## 5.6 Acerca del comportamiento fuera de equilibrio.

Supongamos ahora el caso más general posible para las probabilidades de transición dadas en (5.11). Este es aquél en que las probabilidades de ocupación de los niveles energéticos  $E_{1,j}$  dependen del tiempo y no están necesariamente dadas por la distribución de Boltzmann, aunque esperaríamos que tendieran a ella para tiempos muy grandes. ¿Que ocurre con la evolución temporal de los momentos  $\langle m^k(t) \rangle$  de la densidad de fotones en la cavidad? Retomando la ecuación (5.19), tenemos que multiplicándola por  $b^{-1}$  y haciendo  $ab^{-1} = \text{Exp}[\theta(t)]$ , con  $\theta(t) = R_i(t)/R_j(t)$ , se

puede reescribir como

$$b^{-1} \frac{d\langle m^k \rangle}{dt} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \left\{ \left[ 1 + (-1)^{k-i} \text{Exp}[\theta(t)] \right] \langle m^{i+1} \rangle + \langle m^i \rangle \right\} ,$$

reacomodando resulta

$$b^{-1} \frac{d\langle m^k \rangle}{dt} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \langle m^i \rangle + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \left[ 1 + (-1)^{k-i} \text{Exp}[\theta(t)] \right] \langle m^{i+1} \rangle ,$$

separando el  $(k-1)$ -ésimo sumando del segundo término del miembro derecho de esta ecuación y pasándolo al lado izquierdo, resulta

$$b^{-1} \frac{d\langle m^k \rangle}{dt} + k \left[ \text{Exp}[\theta(t)] - 1 \right] \langle m^k \rangle = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \langle m^i \rangle + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} \left[ 1 + (-1)^{k-i} \text{Exp}[\theta(t)] \right] \langle m^{i+1} \rangle ,$$

(5.73)

que es la ecuación para la evolución temporal del  $k$ -ésimo momento.

La solución a esta ecuación es de la forma

$$\langle m^k(t) \rangle = \text{Exp}[-A(t)] \left\{ \langle m(t=0) \rangle + \int_0^t Q(t') \text{Exp}[A(t')] dt' \right\} , \quad (5.74)$$

con

$$A(t) = \int_0^t kb(t') [\text{Exp}[\theta(t')] - 1] dt'$$

y  $Q(t')$  igual al miembro derecho de la ecuación (5.73). De (5.74) es claro que  $\langle m^k(t) \rangle$  tenderá a un valor finito dado por

$$\langle m^k \rangle_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Exp}[-A(t)] \int_0^t Q(t') \text{Exp}[A(t')] dt' \quad (5.75)$$

siempre que  $A(t)$  sea positiva. Veamos bajo que condiciones se cumple esta condición:

Se tiene que

$$\theta(t) = \ln \frac{a}{b} = \ln \frac{R_1(t)}{R_j(t)},$$

donde  $R_1(t)$ ,  $R_j(t)$  son las probabilidades de ocupación de  $E_1$ ,  $E_j$  respectivamente (con  $E_1 < E_j$ ). De que la función  $\ln(y)$  toma valores positivos sólo para  $y > 0$ , se tiene que  $\theta(t)$  será positiva siempre que  $R_1(t) > R_j(t)$ . Pero si  $\theta(t)$  es positiva, entonces el integrando de la expresión que define a  $A(t)$  será positivo, de donde resulta que  $A(t)$  será positivo también. Por consiguiente,  $\langle m^k(t) \rangle$  tenderá a un valor finito para tiempos muy grandes siempre que la probabilidad de ocupación del nivel más bajo sea mayor que la probabilidad de ocupación del nivel más alto, o por lo menos, que esto ocurra el tiempo suficiente como para que las contribuciones positivas del integrando lleven a la integral que define a  $A(t)$  a converger a valores positivos cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esta condición es de esperarse para los gases en un proceso de relajación hacia el equilibrio.



Las ecuaciones obtenidas en esta sección sugieren que podría existir una radiación fuera de equilibrio cuando ésta está en interacción con un gas de sistemas atómicos que se encuentra fuera de equilibrio y en proceso de relajación hacia él. Entre otras cosas, debería mantenerse una desviación respecto de la ley de Planck durante el tiempo de relajación de la radiación.

### 5.7 Algunas conclusiones y consideraciones generales.

Sin recurrir al formalismo de la mecánica cuántica, y por consiguiente, sin utilizar la física estadística cuántica, ni el concepto de indistinguibilidad de las partículas, la aplicación de los procesos estocásticos de nacimiento y muerte al modelo de Einstein de dos estados atómicos permite encontrar lo siguiente:

1. Se obtienen todas las propiedades termodinámicas de un gas de fotones a temperatura  $T$  en una cavidad y éstas coinciden con los resultados que predice la física estadística cuántica.

2. Se encuentra una relación de recurrencia para calcular los momentos estadísticos  $\langle m^k \rangle_0$  de la densidad de fotones en equilibrio térmico, mediante un procedimiento puramente algebraico.

3. Para el caso de equilibrio térmico, los tres primeros momentos coinciden con los que se obtienen a partir de la teoría que A. M. Cetto y L. de la Peña llaman metaclásica y que han desarrollado replanteando para la radiación el enfoque estadístico usado por Einstein en 1906 para estudiar los calores específicos de los sólidos.

4. La función de distribución de probabilidad  $P_m$  de que haya  $m$  fotones por u. de vol., en equilibrio, coincide con la distribución de probabilidad que se obtiene, a partir de la física estadística cuántica, para el número de ocupación de un gas de osciladores armónicos independientes, de la misma frecuencia, y en contacto con un baño térmico a temperatura  $T$ .

5. Dicha función de distribución  $P_m$  en equilibrio coincide también con la obtenida por A. M. Cetto y L. de la Peña para las fotodetecciones producidas por un campo estocástico clásico sobre un instrumento de medición. Sólo que lo que en mi modelo es la probabilidad de que haya  $m$  fotones por unidad de volumen, viene a ser, en el modelo arriba citado, la probabilidad de que ocurran  $m$  fotodetecciones en un intervalo de tiempo finito.<sup>(59)</sup>

6. El modelo que he desarrollado permite obtener, también, la fórmula de fluctuaciones para la transferencia de momento entre una radiación y un espejo. Esta coincide con la que fue obtenida por Einstein en 1909.

7. El formalismo matemático que obtengo proporciona ecuaciones diferenciales para la evolución temporal de todos los momentos  $\langle m^k(t) \rangle$  de la densidad de fotones.

8. Estos momentos  $\langle m^k(t) \rangle$  tenderán a un valor finito para tiempos muy grandes, siempre que el sistema de átomos de dos estados con los cuales interacciona la radiación se encuentren en un proceso de relajación hacia el equilibrio.

9. Este último resultado sugiere que podría existir radiación fuera de equilibrio y que presentaría desviaciones respecto de la ley de Planck, durante el tiempo que dure el proceso de relajación.

Por consiguiente:

10. La teoría de procesos de nacimiento y muerte resulta ser una herramienta apropiada, de manera natural, para la descripción estadística de un gas de fotones en interacción con sistemas atómicos de dos estados.

11.El modelo utilizado por Einstein en 1917 para estudiar la radiación resulta ser potencialmente más rico de lo que reveló en la época en que fué planteado.

12.El éxito que brinda el estudio de transferencia de energía lleva a pensar en el estudio de transferencia de momento, lo cual posiblemente podría ofrecer nuevos resultados interesantes, especialmente en lo que se refiere a modelos matemáticos que faciliten una imagen tangible para nuestra imaginación macroscópica. Esto no puede ser expresado aquí más que como una conjetura.

13.Para reforzar el punto anterior, cabe traer a colación la discusión, de actualidad como ha podido verse en el cuarto capítulo de este trabajo, acerca del carácter de los fotones como partículas reales o ficticias. No hay que olvidar el hecho particular de que el modelo de Einstein lo llevó a predecir la existencia de la emisión de radiación como un fenómeno direccional.

14.Un punto que no es cuestión de conjetura, es que la aplicación de los procesos de nacimiento y muerte al modelo de Einstein permite estudiar la radiación fuera de equilibrio, siempre que se conozca la distribución de energías del gas de partículas atómicas ejecutando un proceso de relajación.

## 5.8 Una evaluación breve de los distintos enfoques.

Entenderemos por enfoque original el intento de Einstein, durante sus contribuciones a la teoría cuántica primitiva, por plantear una relación entre el concepto de onda y el de corpúsculo que diera una imagen física tangible de la naturaleza para nuestro pensamiento macroscópico. Llamaremos enfoque moderno a la síntesis formalizadora desarrollada con los trabajos de la mecánica ondulatoria y la matricial, hasta llevar al formalismo de segunda cuantización. Por último, hablaremos de nuevas

alternativas para referirnos a los enfoques de estocastización formal, neoclásico y de la óptica y la electrodinámica estocástica que fueron revisados en el cuarto capítulo.

Como se desprende de la revisión de los primeros tres capítulos, existe una diferencia de fondo entre los creadores de la física cuántica, en cuanto a la forma de percibir las teorías físicas. Mientras que Planck y Einstein buscan la formalización de sus ideas a partir de una imagen física definida y tangible para nuestro pensamiento macroscópico, los trabajos que se suceden con el desarrollo de la mecánica matricial tienen una tendencia formalizadora, que releva a la física de la obligación de facilitar imágenes a un nivel ontológico.

Aunque para Planck la cuantización surge como una hipótesis irreconciliable con su punto de vista clásico, el quantum de energía aparece dentro de una imagen física muy nitida de un sistema de osciladores armónicos que simulan a la pared de la cavidad sobre la base del teorema de Kirchoff.

El caso de Einstein es más notable, desde 1905, en las consideraciones introductorias al primero de sus trabajos sobre radiación, describe un campo formado por partículas, de forma tal que su efecto promedio sobre los dispositivos ópticos llevaría a detectar un fenómeno ondulatorio, mientras que los efectos instantáneos, que tendrían relación con el intercambio de energía entre los átomos y la radiación, necesariamente deberían revelar un carácter corpuscular en el campo.

En su trabajo de 1917 Einstein considera la emisión de radiación de un átomo como ondas esféricas, contraponiéndola a la emisión direccional de paquetes de luz que también involucran transferencia de momento.

Esta física que complementa la búsqueda de formalismos matemáticos con la de imágenes descriptivas de los fenómenos naturales bajo estudio, está presente también en los trabajos iniciales de Bohr acerca del átomo hidrogenoide y en los diversos estudios posteriores para analizar la estructura del átomo de helio. Sin embargo, esta concepción de la física es

abandonada después, cuando se adopta un punto de vista conforme al cual esta ciencia debe proporcionar formalismos que permitan calcular valores de magnitudes físicas medibles en el laboratorio. El trabajo de Heisenberg sobre la nueva cinemática para describir los fenómenos cuánticos es de este tipo y es una consideración metodológica a la cual él le concede mucha importancia. En sus artículos iniciales Schrodinger<sup>(48)</sup> pretende ver al átomo como un proceso vibracional aprehensible a nuestra imaginación macroscópica, pero después su concepción es abandonada cuando la interpretación ondulatoria que plantea no resiste la crítica. Cabe recalcar, sin embargo, que su interpretación de la función de onda ha sido retomada en las últimas décadas, acompañada de argumentos que buscan resolver las dificultades que llevaron a Schrodinger a abandonarla.

Todos los intentos posteriores que buscan una interpretación del mundo microscópico sobre bases distintas a las de la escuela de Bohr, no generan consenso, básicamente porque la interpretación ortodoxa extiende su éxito en un marco social y académico que facilita su aceptación por razones ajenas a la física<sup>(49)</sup>.

A raíz de la maduración de la teoría cuántica en 1925 y 1926, la física avanza hacia una creciente formalización y abstracción de la cual el trabajo de Dirac es una buena muestra, quien en su estudio sobre la cuantización del campo electromagnético vincula los conceptos de onda y de partícula en una sola teoría, exitosa porque obtiene las leyes de Einstein y de Pauli con un solo formalismo, que así demuestra su capacidad de síntesis y lo acertado del enfoque.

Esa integración de los conceptos corpuscular y ondulatorio se da a un nivel formal, sin imágenes de la naturaleza que se busca describir, siendo este último un requisito que la física no tiene que llenar en opinión de los autores de la nueva teoría.

Otro aspecto que se debe hacer notar es el uso de un principio de correspondencia cuya validez no resulta clara y que en realidad reduce la teoría a un nivel fenomenológico, toda vez que no existe un hilo conductor que relacione nuestra intuición con respuestas a preguntas como las siguientes:

- ¿Porqué es la regla de cuantización de Dirac correcta?

- ¿Porqué funciona el principio de correspondencia cuando se está llevando a cabo un proceso de generalización hacia una teoría más rica? ¿Cuáles son las limitaciones de este principio? En este punto es claro que una teoría más general debe reproducir a otra considerada como caso límite, pero no es tan evidente que a partir de una teoría particular sea correcto construir otra más general. En este último punto cabe traer a colación el análisis presentado por Fine<sup>(50)</sup> sobre la diferencia metodológica entre Einstein y Bohr acerca del principio de correspondencia: Según este autor, tanto Einstein como Bohr estaban de acuerdo en el uso de la propuesta metodológica de Mach que consistía en investigar los límites de aplicación de un concepto, como un primer paso hacia la construcción de otro más refinado que el anterior. De forma tal que el nuevo viniera a sustituir al viejo concepto, conteniéndolo como un caso particular (caso límite). En lo que no estuvieron de acuerdo fue en el segundo paso, que en el trabajo de Bohr vino a consistir en el desarrollo del principio de complementariedad para aplicar conceptos ondulatorios o corpusculares según las condiciones del fenómeno. Por su parte, Einstein consideraba que los conceptos de la física clásica debían ser desplazados por otros nuevos y no simplemente segregados a la manera del principio de complementariedad de Bohr. La propuesta de Einstein era, por lo tanto, más radical.

Cuando hablamos del contenido fenomenológico de la teoría cuántica lo consideramos en un sentido un tanto diferente al caso de la termodinámica y la física estadística de procesos de equilibrio, aquí catalogamos al formalismo cuántico como fenomenológico, en particular a la segunda cuantización, porque introduce y se guía por reglas cuyo uso y justificación están fundamentadas en la precisión de los resultados a los que llega, sin reparar en los requisitos que deben llenar sus puntos de partida.

De hecho, la actitud pragmática que llevó al desarrollo del formalismo cuántico no se fundamenta en un sistema de primeros principios evidentes, como ocurre con las teorías especial y general de la relatividad, sino que una vez descubierto el aparato matricial y ondulatorio, se fueron estableciendo axiomas para derivar el formalismo. A raíz de este proceso los físicos crearon una estructura matemática cuyo significado físico no podían entender completamente sobre la base de la intuición desarrollada con el estudio de la física clásica. El proceso histórico para la construcción de la teoría dio lugar a que en la mecánica cuántica no quedara claro cuál es el origen del comportamiento probabilista, mientras que en la física estadística si se tiene una idea tangible del caos molecular.

Si aceptamos entonces la exigencia de tangibilidad como una condición a llenar por las teorías físicas, resulta que la mecánica cuántica tiene una característica conceptual distinta de la de la física estadística, pues aunque en ambas existe el elemento probabilista, en la última es claro el origen pero en la primera no. A menos que se acepte la idea original de Bohr, preconcebida desde su trabajo con Kramer y Slater, de que el electrón es aleatorio *per se*.

En esta dirección cabe valorar las estocastizaciones del campo basadas en la mecánica de Nelson, pues tienden a dejar asentado, de manera fehaciente, que detrás de la teoría cuántica pueden existir procesos azarosos primarios que dan lugar al comportamiento cuántico. La limitación de estas teorías consiste en que no nos dicen cual es la causa física de ese comportamiento estocástico.

El enfoque neoclásico es valioso en un terreno diferente: la generalidad de los textos en física infunden la convicción de que para explicar el efecto fotoeléctrico, Compton, corrimiento Lamb, etc., es necesario recurrir al formalismo de la electrodinámica cuántica. De los trabajos desarrollados en el enfoque neoclásico resulta que esto no es cierto, pues todos estos efectos pueden calcularse cuantizando solo partículas y dejando al campo representado mediante funciones continuas. Por consiguiente, el carácter corpuscular del campo no es tan directo, más aún, según Marshall, no hay evidencia contundente de esta característica

corpúscular, como si la hay del ondulatorio.

Otra enseñanza valiosa del enfoque neoclásico es la búsqueda de sencillez y de descripciones panorámicas -susceptibles de ser imaginadas- de los fenómenos naturales. Además de que, al no reparar en las críticas a la interpretación de Schrodinger de la función de onda, plantea una muestra de recuperación de las ideas originales de los físicos, a fin de extraer al máximo sus posibilidades científicas. Este último punto es de particular interés para la realización del Capítulo V de este trabajo.

La principal limitación del enfoque neoclásico radica en que no da respuesta a la pregunta, discutida por de la Peña y Cetto<sup>(51)</sup> ¿Porqué la Ecuación de Schrodinger? y que en consecuencia, deja de lado toda una gama de motivos de insatisfacción frente a la teoría cuántica.

En este último sentido, el esfuerzo que gira alrededor de la Electrodinámica Estocástica y la Óptica Estocástica es más ambicioso en sus propósitos, se busca una teoría física que además de llevarnos a una explicación de los fenómenos cuánticos, reproduciéndolos, nos daría -de tener éxito- una base conceptual más clara. En mi opinión, proporcionaría una descripción tangible del fenómeno cuántico. Sin embargo, este camino ha sido el menos fructífero de todos y se encuentra aún bajo exploración, sin que pueda decirse todavía que ofrece resultados concluyentes. En consecuencia, cabe una crítica semejante a la de las alternativas anteriores, aunque ofrece la ventaja de ser un campo explorable, y por sus objetivos, promisorio.

Estas tres alternativas revisadas dejan de lado la existencia real del fotón y causan la impresión de que es, como señala Marshall, un concepto obsoleto. Es aquí donde se inicia mi interés personal.

Contrario a la impresión ampliamente difundida en los libros de texto, el concepto de fotón necesita una revisión profunda y no existe acuerdo de los físicos sobre un modelo único, aceptado por la comunidad de físicos. Como señalan Kidd, Ardini y Anton<sup>(52)</sup>, desde 1905 hasta la fecha se han manejado cuando menos cuatro modelos de fotón:



- El fotón como una partícula análoga al electrón, pero sin carga, ni masa, espín distinto, etc.
- El fotón como una singularidad en el espacio.
- El modelo de fotón como una paquete de onda o un pulso electromagnético.
- El modelo de fotón de la electrodinámica cuántica, que lleva a tomarlo como aumentos y decrementos discretos de coeficientes de Fourier.

En lugar de emprender una defensa ciega a favor o en contra del concepto de fotón como una partícula realmente existente, puede ser benéfico adoptar una posición metodológica similar a la atribuida a Mach por parte de Fine. Esta consistiría en trabajar algunas viejas ideas a la luz de la experiencia moderna, a fin de profundizar sus consecuencias y agotar sus posibilidades para encontrar sus limitaciones, adquirir experiencia sobre su campo de aplicación y encontrar -si acaso fuera posible- nuevos enfoques físicos que vengan a coadyuvar en la solución de las fuentes de insatisfacción actual de la teoría cuántica.

Cabe entonces proponer la revisión de viejos y nuevos conceptos y modelos físicos que fueron dejados de lado en el momento histórico en que fueron presentados, como ha ocurrido en muchos casos en el desarrollo de la física y sucede en la actualidad con la conjetura de Schrodinger sobre las analogías del fenómeno de difusión con la partícula libre cuántica y un posible sustrato estocástico de la teoría, con la interpretación que él dió de la función  $\Psi$  y con la hipótesis de realidad de la radiación del campo de radiación de fondo.

## APENDICE

### Algunos elementos acerca de los procesos estocásticos<sup>(53-57)</sup>

#### A. Definiciones.

Una variable aleatoria se define mediante un conjunto de valores posibles y una distribución de probabilidad sobre un conjunto, que recibe el nombre de *rango, conjunto de estados, espacio fase*, entre otros.

Este conjunto de valores posibles depende de la naturaleza del fenómeno que los produce, puede ser discreto y finito, discreto e infinito, continuo en un cierto intervalo, en una o mas variables, etc.

Si el conjunto es discreto y numerable, la distribución de probabilidad se da mediante un conjunto de números no negativos  $p_n$  tales que

$$\sum_n p_n = 1 \quad . \quad (A.1)$$

Si el rango es un intervalo  $I$  del eje real, la distribución de probabilidad se determina mediante una función no negativa  $P(x)$  tal que

$$\int_I P(x) dx = 1 \quad , \quad (A.2)$$

a  $P(x)$  se le llama densidad de probabilidad.

Sea  $X$  una variable estocástica (o aleatoria) con rango en  $(-\infty, \infty)$ , se definen sus momentos como

$$\mu_m = \langle x^m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^m P(x) dx \quad m = 1, 2, \dots \quad (A.3)$$

Se define la función característica de la variable aleatoria X como

$$G(\kappa) = \langle \text{Exp}(i\kappa x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Exp}(i\kappa x) P(x) dx \quad (A.4)$$

Desarrollando  $\text{Exp}(i\kappa x)$  en serie de Taylor, e integrando en  $(-\infty, \infty)$  se tiene

$$G(\kappa) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(i\kappa)^m}{m!} x^m P(x) dx$$

de donde

$$G(\kappa) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\kappa)^m}{m!} \mu_m \quad (A.5)$$

con lo cual resulta que la función característica es útil como generadora de los momentos de la variable aleatoria X.

Tomando el logaritmo natural de  $G(K)$  y desarrollando en serie podemos definir los cumulantes  $\chi_m$  tales que

$$\ln G(\kappa) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(i\kappa)^m}{m!} \chi_m \quad (A.6)$$

donde el  $m$ -ésimo cumulante de la variable aleatoria  $X$  debe ser igual al  $m$ -ésimo término de la serie de Taylor de  $G(k)$ .

Para una variable vectorial  $X$  de  $n$  componentes  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  las expresiones (A.2) - (A. 4) se generalizan directamente en términos de integrales múltiples y para la función característica se tiene

$$G(k) = \langle \text{Exp}(ikx) \rangle = \sum_{m_1, \dots, m_n} \frac{(ik_1)^{m_1} \dots (ik_n)^{m_n}}{(m_1)! \dots (m_n)!} \mu_{m_1, \dots, m_n} \quad (\text{A.7})$$

donde

$$\mu_{m_1, \dots, m_n} = \langle x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \rangle \quad (\text{A.8})$$

Si  $X$  es una variable aleatoria con rango en  $n=0, 1, \dots$ , la función característica es ahora una serie de potencias en  $z=\text{Exp}(ikx)$ . En este caso se define la función generadora de probabilidad como

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \quad (\text{A.9})$$

donde el coeficiente de la  $n$ -ésima potencia de  $z$  da la probabilidad del  $n$ -ésimo elemento del rango.

En este caso se pueden definir los momentos factoriales  $\phi_m$  dados por

$$F(1-z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-z)^m}{m!} \phi_m \quad (\text{A.10})$$

y los cumulantes factoriales  $\theta_m$  tales que

$$\ln F(1-z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-z)^m}{m!} \theta_m \quad . \quad (A.11)$$

Como en los casos anteriores, dada  $F(z)$  se cambia a las variables  $1-z$ , se desarrolla en serie de Taylor y se toma como  $\phi_m$  al término que acompaña a  $(-z)^m/m!$ . Análogamente para (A.11).

Sea  $y=f(x)$  una función definida de los reales en los reales, se dice que  $y=f(x)$  es una función aleatoria si  $X$  y  $Y$  son dos variables aleatorias relacionadas a través de la función  $f$ .

Si  $P_x(x)$  es la densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $X$ , entonces la densidad de probabilidad de  $Y$  está dada por

$$P_y(y) = \int \delta[f(x) - y] P_x(x) dx \quad . \quad (A.12)$$

También puede suceder que

$$Y(t) = f(t, x) \quad , \quad (A.13)$$

a estas funciones se les llama funciones estocásticas, el valor de  $y$  en un punto  $t_1$  es una variable aleatoria. Generalmente el parámetro  $t$  es el tiempo.

Para  $y$  en el punto  $t_1$  se tiene

$$P_1(y, t) = \int \delta[f(t_1, x) - y] P_x(x) dx \quad (A.14)$$

y valuando en  $n$  instantes  $t_1, \dots, t_n$ , se tiene una variable aleatoria  $n$ -dimensional con densidad de probabilidad

$$P_n(y_1, t_1; \dots; y_n, t_n) = \int \delta[f(t_1, x) - y_1] \cdots \delta[f(t_n, x) - y_n] P_x(x) dx .$$

En lo sucesivo numeraremos los instantes  $t_1, \dots, t_n$  en forma cronológica, de forma tal que  $t_i < t_j$  si  $i < j$ .

La sucesión de estas funciones  $P_n$  definen a la función estocástica y tienen las siguientes propiedades

- i)  $P_n \geq 0$
- ii)  $P_n$  no cambia al permutar dos pares cualesquiera  $(x_k, t_k)$  y  $(x_i, t_i)$ , (A.15)
- iii)  $\int P_n(y_1, t_1; \dots; y_n, t_n) dy_n = P_{n-1}(y_1, t_1; \dots; y_{n-1}, t_{n-1})$
- iv)  $\int P_1(y_1, t_1) dy_1 = 1$  .

A las funciones estocásticas generalmente se les llama procesos estocásticos.

Cuando se cumple que para cualquier intervalo  $\tau$

$$P_n(y_1, t_1; \dots; y_n, t_n) = P_n(y_1, t_1 + \tau; \dots; y_n, t_n + \tau) , \quad (A.16)$$

se dice que  $y(t, x)$  es un proceso estacionario. En este caso la expresión  $\langle y_1(t_1) y_2(t_2) \rangle$ , que recibe el nombre de correlación, depende sólo de la diferencia de tiempos.

Se define la probabilidad condicional

$$P_{1|1}(y_1, t_1 | y_2, t_2) ,$$

como la probabilidad de que el proceso estocástico  $y(t,x)$  tome el valor  $y_2$  al tiempo  $t_2$  si ya había tomado el valor  $y_1$  al tiempo  $t_1 < t_2$ .

Esta probabilidad condicional está dada por

$$P_1(y_1, t_1) P_{1|1}(y_1, t_1 | y_2, t_2) = P_2(y_1, t_1; y_2, t_2) \quad (A.17)$$

Usando (iii) de (A.15) para  $n=2$  y sustituyendo (A.17) en el integrando

$$P_1(y_2, t_2) = \int P_1(y_1, t_1) P_{1|1}(y_1, t_1 | y_2, t_2) dy_1 \quad (A.18)$$

Se puede generalizar este concepto para hablar de una densidad de probabilidad condicional conjunta

$$P_{k|1}(y_1, t_1; \dots; y_k, t_k | y_{k+1}, t_{k+1}, \dots, y_{k+1}, t_{k+1})$$

que da la probabilidad de que el proceso tome los valores  $y_{k+1}, \dots, y_{k+1}$  en los tiempos  $t_{k+1}, \dots, t_{k+1}$ , cuando ya ha tomado los valores  $y_1, \dots, y_k$  en los tiempos  $t_1, \dots, t_k$

$$\begin{aligned} & P_{k|1}(y_1, t_1; \dots; y_k, t_k | y_{k+1}, t_{k+1}; \dots; y_{k+1}, t_{k+1}) \\ &= \frac{P_{k+1}(y_1, t_1; \dots; y_k, t_k; y_{k+1}, t_{k+1}; \dots; y_{k+1}, t_{k+1})}{P_k(y_1, t_1; \dots; y_k, t_k)} \end{aligned} \quad (A.19)$$

Estas densidades de probabilidad condicionales conjuntas son importantes cuando hay correlaciones entre las variables estocásticas a tiempos diferentes. En este caso se dice que el proceso tiene memoria de su pasado.

y valuando en  $n$  instantes  $t_1, \dots, t_n$ , se tiene una variable aleatoria  $n$ -dimensional con densidad de probabilidad

$$P_n(y_1, t_1; \dots; y_n, t_n) = \int \delta[f(t_1, x) - y_1] \cdots \delta[f(t_n, x) - y_n] P_n(x) dx.$$

En lo sucesivo numeraremos los instantes  $t_1, \dots, t_n$  en forma cronológica, de forma tal que  $t_i < t_j$  si  $i < j$ .

La sucesión de estas funciones  $P_n$  definen a la función estocástica y tienen las siguientes propiedades

- i)  $P_n \geq 0$
- ii)  $P_n$  no cambia al permutar dos pares cualesquiera  $(x_k, t_k)$  y  $(x_l, t_l)$ , (A.15)
- iii)  $\int P_n(y_1, t_1; \dots; y_n, t_n) dy_n = P_{n-1}(y_1, t_1; \dots; y_{n-1}, t_{n-1})$
- iv)  $\int P_1(y_1, t_1) dy_1 = 1$

A las funciones estocásticas generalmente se les llama procesos estocásticos.

Quando se cumple que para cualquier intervalo  $\tau$

$$P_n(y_1, t_1; \dots; y_n, t_n) = P_n(y_1, t_1 + \tau; \dots; y_n, t_n + \tau), \quad (A.16)$$

se dice que  $y(t, x)$  es un proceso estacionario. En este caso la expresión  $\langle y_1(t_1) y_2(t_2) \rangle$ , que recibe el nombre de correlación, depende sólo de la diferencia de tiempos.

Se define la probabilidad condicional

$$P_{1|2}(y_1, t_1 | y_2, t_2).$$





Se define un proceso de Markov como aquel que cumple con la condición

$$P_{n-1|1}(y_1, t_1; \dots; y_{n-1}, t_{n-1} | y_n, t_n) = P_{1|1}(y_{n-1}, t_{n-1} | y_n, t_n), \quad (\text{A.20})$$

es decir, cuando el valor  $y_n$  al tiempo  $t_n$  está determinado sólo por su valor inmediato anterior  $y_{n-1}$ .

### B. Ecuación de Chapman y Kolmogorov y ecuación maestra.

Para procesos de Markov se puede pensar en que dos pasos sucesivos son estadísticamente independientes y escribir

$$\begin{aligned} P_3(y_1, t_1; y_2, t_2; y_3, t_3) &= P_2(y_1, t_1; y_2, t_2) P_{2|1}(y_1, t_1; y_2, t_2 | y_3, t_3) \quad (\text{B.1}) \\ &= P_1(y_1, t_1) P_{1|1}(y_1, t_1 | y_2, t_2) P_{1|1}(y_2, t_2; y_3, t_3), \end{aligned}$$

integrando esta expresión en  $y_2$  y dividiendo entre  $P_1(y_1, t_1)$  resulta

$$P_{1|1}(y_1, t_1 | y_3, t_3) = \int P_{1|1}(y_1, t_1; y_2, t_2) P_{1|1}(y_2, t_2 | y_3, t_3) dy_2, \quad (\text{B.2})$$

donde del lado izquierdo se usó (A.17).

A (B.2) se le llama ecuación de Chapman y Kolmogorov y es válida sólo para procesos de Markov.

Una ecuación mas útil y que permite una interpretación

intuitiva y sencilla es la ecuación maestra, para obtenerla considérese

$$P_2(y_1, t_1; y_2, t_2) = P_1(y_1, t_1) P_{1|1}(y_1, t_1 | y_2, t_2), \quad (\text{B.3})$$

integrando sobre  $y_1$  y usando (iii) de (A.15)

$$P_1(y_2, t_2) = \int P_1(y_1, t_1) P_{1|1}(y_1, t_1 | y_2, t_2) dy_1, \quad (\text{B.4})$$

sea  $t_2 = t_1 + \tau$  con  $\tau$  muy pequeño, se puede desarrollar la probabilidad de transición del integrando en serie de Taylor

$$P_{1|1}(y_1, t_1 | y_2, t_1 + \tau) = P_{1|1}(y_1, t_1 | y_2, t_1) + a_0 \tau + O(\tau^2),$$

el desarrollo a primer orden debe contener la densidad de probabilidad de pasar de  $y_1$  a  $y_2$  en  $[t_1, t_1 + \tau]$  mas la densidad de probabilidad de que no haya transiciones en ese intervalo, sea

$$W_t(y_1, y_2) \quad (\text{B.5})$$

la probabilidad por unidad de tiempo de que haya una transición de  $y_1$  a  $y_2$ , entonces

$$\tau \int W_t(y_1, y) dy$$

es la probabilidad total de que alguna transición parta de  $y_1$  en el intervalo

$[t_1, t_1 + \tau)$  y

$$1 - \tau \int W_{t_1}(y_1, y) dy$$

es la probabilidad total de que no haya alguna transición que parta de  $y_1$  en el intervalo mencionado. Podemos tener una densidad de probabilidad haciendo

$$\delta(y_1 - y_2) \left[ 1 - \tau \int W_{t_1}(y_1, y) dy \right] \quad (B.6)$$

Usando (B.5) y (B.6) podemos escribir

$$P_{1|1}(y_1, t_1 | y_2, t_1 + \tau) = \delta(y_1 - y_2) \left[ 1 - \tau \int W_{t_1}(y_1, y) dy \right] + \tau W_{t_1}(y_1, y_2) \quad (B.7)$$

sustituyendo (B.7) en (B.4)

$$P_1(y_2, t_1 + \tau) = P_1(y_2, t_1) + \tau \int P_1(y_1, t_1) W_{t_1}(y_1, y_2) dy_1 - \tau \int dy_1 P_1(y_1, t_1) \delta(y_1 - y_2) \int W_{t_1}(y_1, y) dy \quad (B.8)$$

trabajando el tercer término

$$- \tau \int dy \int dy_1 P_1(y_1, t_1) W_{t_1}(y_1, y) \delta(y_1 - y_2) = - \tau \int dy P_1(y_2, t_1) W_{t_1}(y_2, y) \quad ,$$

sustituyendo esta expresión en (B.8), reacomodando, tomando el límite  $\tau \rightarrow 0$  y homogeneizando la notación

$$\frac{\partial P_1(y_2, t)}{\partial t} = \int dy_1 \left\{ W(y_1, y_2) P_1(y_1, t) - W(y_2, y_1) P_1(y_2, t) \right\}, \quad (\text{B.9})$$

se obtiene la ecuación maestra para la densidad de probabilidad  $P(y, t)$  del proceso estocástico.

Para procesos estocásticos discretos la ecuación maestra es de la forma

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = \sum_{n'} \left[ W_{n, n'} P_{n'}(t) - W_{n, n} P_n(t) \right], \quad (\text{B.10})$$

donde  $W_{mm}$  es la matriz de probabilidad de transición.

En esta forma queda claro el significado de la ecuación maestra: dado un estado  $n$ , (B.10) proporciona una ecuación de ganancia y pérdida de probabilidad de cada estado. Análogamente ocurre para (B.9) y procesos continuos.

### C. Procesos de nacimiento y muerte.

Sea la matriz  $W$  tal que

$$W_{nn'} = W_{nn'} - \delta_{nn'} \sum_n W_{n''n} \quad , \quad (C.1)$$

de donde resulta

$$W_{nn'} = \begin{cases} W_{nn'} & \text{si } n \neq n' \\ -\sum_n W_{n''n} & \text{si } n=n' \end{cases}$$

donde  $\sum_{n''}$  indica sumatoria sobre todas las  $n'' \neq n$ .

Nótese que

$$\begin{aligned} \sum_n W_{nn'} P_n(t) &= \sum_n (W_{nn'} - \delta_{nn'} \sum_n W_{n''n}) P_n(t) \\ &= \sum_n W_{nn'} P_n(t) - \sum_n \delta_{nn'} \sum_n W_{n''n} P_n(t) \\ &= \sum_n W_{nn'} P_n(t) - \sum_n W_{n''n} P_n(t) \quad , \end{aligned}$$

cambiando  $n'' \rightarrow n'$

$$\sum_n W_{nn'} P_n(t) = \sum_n (W_{nn'} P_n(t) - W_{nn'} P_n(t)) \quad ,$$

por lo tanto, si  $W_{nn'}$  es la matriz de transición de (B.10) y  $P_n(t)$  la probabilidad del  $n$ -ésimo estado al tiempo  $t$ , la ecuación maestra se reescribe como

$$\dot{P}_n(t) = \sum_n W_{nn'} P_n(t) \quad . \quad (C.2)$$

Se definen los procesos de nacimiento y muerte mediante la matriz de transición

$$W_{nn'} = \begin{cases} r_n \delta_{n,n'-1} + g_n \delta_{n,n'+1} & \text{si } n \neq n' \\ -(r_n + g_n) & \text{si } n = n' \end{cases} \quad (C.3)$$

que sustituyendo en (C.2) produce

$$P_n(t) = r_{n+1} P_{n+1}(t) + g_{n-1} P_{n-1}(t) - (r_n + g_n) P_n(t) \quad (C.4)$$

la ecuación maestra para procesos de nacimiento y muerte (PNM). A las magnitudes  $r_n$ ,  $g_n$  se les llama probabilidades de transición y dependen de la naturaleza del problema.

Ejemplos de PNM son:

1) Los procesos de Poisson con

$$r_n = 0 \quad , \quad g_n = q \quad , \quad P_n(0) = \delta_{n0} \quad (C.5)$$

la ecuación maestra es

$$P_n = q(P_{n-1} - P_n) \quad (C.6)$$

2) Las caminatas aleatorias con tiempo continuo, donde

$$r_n = C \quad , \quad g_n = C$$

y la ecuación maestra es

$$P_n(t) = C(P_{n+1} + P_{n-1}) - 2CP_n \quad (C.7)$$

con  $c$  una constante.

Definimos el operador de paso  $E$  tal que

$$Ef(n) = f(n+1) \quad , \quad E^{-1}f(n) = f(n-1) \quad , \quad (C.8)$$

donde  $f(n)$  es una función arbitraria de  $n$  y  $E^{-1}$  es el inverso de  $E$ .

La ecuación maestra (C.4) se puede escribir como

$$P_n = (E - 1)r_n P_n + (E^{-1} - 1)g_n P_n \quad . \quad (C.4')$$

Enseguida obtendremos una propiedad importante del operador de paso, sean  $f$  y  $g$  dos funciones arbitrarias de  $n$

$$\sum_{n=0}^{N-1} g(n)Ef(n) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)f(n+1) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n+1)E^{-1}g(n+1)$$

sea  $m=n+1$

$$= \sum_{m=1}^N f(m)E^{-1}g(m) \quad ,$$

se tiene

$$\sum_{n=0}^{N-1} g(n)Ef(n) = \sum_{n=1}^N f(n)E^{-1}g(n) \quad . \quad (C.9)$$

Esta propiedad nos permite obtener, a partir de la ecuación maestra, ecuaciones diferenciales para los momentos del proceso estocástico  $n(t)$ , que pueden ser resueltos sin necesidad de conocer la densidad de probabilidad  $P_n(t)$ .



Multiplicando (C.4') por  $n$  y sumando sobre  $n$

$$\sum_n n \dot{P}_n = \sum_n n(\mathbb{E} - 1) r_n P_n(t) + \sum_n n(\mathbb{E}^{-1} - 1) g_n P_n(t) \quad (C.10)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_n n P_n = \sum_n n \mathbb{E} r_n P_n - \sum_n r_n P_n + \sum_n n \mathbb{E}^{-1} g_n P_n - \sum_n n g_n P_n$$

usando (C.9) en el primero y tercer término

$$\sum_n n \mathbb{E} r_n P_n = \sum_n r_n P_n \mathbb{E}^{-1} n, \quad \sum_n n \mathbb{E}^{-1} g_n P_n = \sum_n g_n P_n \mathbb{E} n,$$

sustituyendo en (C.10) se obtiene rápidamente, después de reacomodar y cancelar términos

$$\frac{d}{dt} \sum_n n P_n = \sum_n g_n P_n - \sum_n r_n P_n$$

de donde

$$\frac{d\langle n \rangle}{dt} = \langle g_n - r_n \rangle \quad (C.11)$$

Para el segundo momento se multiplica  $n^2$  por (C.4'), se suma sobre  $n$  y con un procedimiento análogo se obtiene

$$\frac{d\langle n^2 \rangle}{dt} = \langle g_n + r_n \rangle - 2\langle n(g_n - r_n) \rangle \quad (C.12)$$

Con el mismo procedimiento se obtiene la ecuación para el momento de orden  $k$

$$\frac{d\langle n^k \rangle}{dt} = \langle g_n [(n+1)^k - n^k] \rangle - \langle r_n [n^k - (n-1)^k] \rangle \quad k=1,2,\dots$$

y usando la fórmula de Newton para el binomio resulta finalmente

$$\frac{d\langle n^k \rangle}{dt} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \left[ \langle n^i g_n \rangle + (-1)^i \langle n^i r_n \rangle \right] \quad (C.13)$$

donde

$$\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!} \quad (C.14)$$

Los procesos de nacimiento y muerte pueden clasificarse en tres subclases según su rango

- a)  $-\infty < n < \infty$
- b)  $n=0, 1, 2, \dots$
- c)  $n=0, 1, \dots, N$

En el caso de (b) y (c) existen uno y dos extremos respectivamente, que se llaman fronteras y pueden ser clasificadas cada una en

- 1) fronteras absorbentes,
- 2) fronteras reflectantes.

Como su nombre lo indica, las fronteras absorbentes son tales que cuando el sistema llega a ese estado, se queda atrapado en él: mientras que las fronteras reflectantes no permiten que el sistema se mantenga en ese estado y lo regresan al interior del rango.

La aplicación de PNM que se realiza en ese estudio es del tipo (b), cabe señalar sin embargo que las diversas combinaciones de (b) y (c) con (1) y (2) requiere de atención especial. En particular, la ecuación maestra se modifica en las fronteras.

Para el caso estacionario es sencillo resolver la ecuación

maestra, sea  $P_n = 0$

$$(E - 1)r_n P_n^s + (E^{-1} - 1)g_n P_n^s = 0, \quad (C.15)$$

donde  $P_n^s$  es la solución estacionaria. Desarrollando el segundo término y usando que  $EE^{-1}=1$

$$(E - 1)r_n P_n^s - EE^{-1}g_n P_n^s + E^{-1}g_n P_n^s = 0$$

factorizando

$$(E - 1)(r_n P_n^s - E^{-1}g_n P_n^s) = 0, \quad (C.16)$$

pero esta ecuación implica que la expresión dentro de las llaves no depende de  $n$ , sea entonces

$$J = r_n P_n^s - E^{-1}g_n P_n^s, \quad (C.17)$$

usando (C.17) reescribimos la ecuación maestra como

$$P_n = (E - 1)(-J), \quad (C.18)$$

de donde se tiene que  $J$  puede ser interpretada como el flujo de probabilidad de  $n$  a los estados vecinos.

Para el caso  $n=0, 1, \dots, N$ , tenemos que  $n=0$  es una frontera donde la ecuación maestra toma la forma

$$P_0 = r_1 P_1 - g_0 P_0 \quad (C.19)$$

con

$$r_0 = g_{-1} = 0$$

o bien en la otra frontera ( $n=N$ )

$$P_N = g_{N-1} P_{N-1} - r_N P_N \quad (C.20)$$

con

$$r_{N+1} = g_N = 0$$

haciendo  $n=1$  en (C.17) y usando (C.19), o bien,  $n=N$  en (C.20), es claro que  $J=0$ , luego

$$r_n P_n^s = E^{-1} g_n P_n^s$$

para toda  $n$ . Resolviendo para  $P_n^s$  y aplicando  $E^{-1}$ , resulta

$$P_n^s = \frac{g_{n-1} P_{n-1}^s}{r_n} \quad (C.21)$$

que podemos utilizar como fórmula de recurrencia y obtener

$$P_n^s = \frac{g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_1 g_0 P_0^s}{r_n \cdots r_2 r_1} \quad (C.22)$$

La constante  $P_0^s$  se determina imponiendo la condición de normalización

$$\sum_{n=1}^N P_n^s = 1 \quad ,$$

de donde resulta

$$\frac{1}{P_0^n} = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{g_{n-1} \cdots g_1 g_0}{r_n \cdots r_2 r_1} \quad (C.24)$$

Por último definiremos la entropía del proceso  $n(t)$  para el caso estacionario

$$S = -k \langle \ln P_n^s \rangle, \quad (C.25)$$

donde el promedio se calcula con la densidad de probabilidad dada por (C.22) y (C.24).

C. Procesos de nacimiento y muerte.

Sea la matriz  $W$  tal que

$$W_{nn'} = W_{nn'} - \delta_{nn'} \sum_n W_{n'n} \quad , \quad (C.1)$$

de donde resulta

$$W_{nn'} = \begin{cases} W_{nn'} & \text{si } n \neq n' \\ -\sum_n W_{n'n} & \text{si } n = n' \end{cases}$$

donde  $\sum_n'$  indica sumatoria sobre todas las  $n' \neq n$ .

Nótese que

$$\begin{aligned} \sum_n W_{nn'} P_{n'}(t) &= \sum_n (W_{nn'} - \delta_{nn'} \sum_n W_{n'n}) P_{n'}(t) \\ &= \sum_n W_{nn'} P_{n'}(t) - \sum_n \delta_{nn'} \sum_n W_{n'n} P_{n'}(t) \\ &= \sum_n W_{nn'} P_{n'}(t) - \sum_n W_{n'n} P_n(t) \quad , \end{aligned}$$

cambiando  $n' \rightarrow n'$

$$\sum_n W_{nn'} P_{n'}(t) = \sum_n (W_{nn'} P_{n'}(t) - W_{n'n} P_n(t)) \quad ,$$

por lo tanto, si  $W_{nn'}$  es la matriz de transición de (B.10) y  $P_n(t)$  la probabilidad del  $n$ -ésimo estado al tiempo  $t$ , la ecuación maestra se reescribe como

$$\dot{P}_n(t) = \sum_n W_{nn'} P_{n'}(t) \quad . \quad (C.2)$$

Se definen los procesos de nacimiento y muerte mediante la matriz de transición

$$W_{nn'} = \begin{cases} r_n \delta_{n,n'-1} + g_{n'} \delta_{n,n'+1} & \text{si } n \neq n' \\ -(r_n + g_n) & \text{si } n = n' \end{cases} \quad (C.3)$$

que sustituyendo en (C.2) produce

$$\dot{P}_n(t) = r_{n+1} P_{n+1}(t) + g_{n-1} P_{n-1}(t) - (r_n + g_n) P_n(t) \quad (C.4)$$

la ecuación maestra para procesos de nacimiento y muerte (PNM). A las magnitudes  $r_n$ ,  $g_n$  se les llama probabilidades de transición y dependen de la naturaleza del problema.

Ejemplos de PNM son:

1) Los procesos de Poisson con

$$r_n = \lambda, \quad g_n = \mu, \quad P_n(0) = \delta_{n0} \quad (C.5)$$

la ecuación maestra es

$$\dot{P}_n = \lambda(P_{n-1} - P_n) - \mu P_n \quad (C.6)$$

2) Las caminatas aleatorias con tiempo continuo, donde

$$r_n = C, \quad g_n = C$$

y la ecuación maestra es

$$\dot{P}_n(t) = C(P_{n+1} + P_{n-1}) - 2CP_n, \quad (C.7)$$

con  $c$  una constante.

Definimos el operador de paso  $E$  tal que

$$Ef(n) = f(n+1) \quad , \quad E^{-1}f(n) = f(n-1) \quad , \quad (C.8)$$

donde  $f(n)$  es una función arbitraria de  $n$  y  $E^{-1}$  es el inverso de  $E$ .

La ecuación maestra (C.4) se puede escribir como

$$\dot{P}_n = (E - 1)P_n + (E^{-1} - 1)g_n P_n \quad . \quad (C.4')$$

Enseguida obtendremos una propiedad importante del operador de paso, sean  $f$  y  $g$  dos funciones arbitrarias de  $n$

$$\sum_{n=0}^{N-1} g(n)Ef(n) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)f(n+1) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n+1)E^{-1}g(n+1)$$

sea  $m=n+1$

$$= \sum_{m=1}^N f(m)E^{-1}g(m) \quad ,$$

se tiene

$$\sum_{n=0}^{N-1} g(n)Ef(n) = \sum_{n=1}^N f(n)E^{-1}g(n) \quad . \quad (C.9)$$

Esta propiedad nos permite obtener, a partir de la ecuación maestra, ecuaciones diferenciales para los momentos del proceso estocástico  $n(t)$ , que pueden ser resueltos sin necesidad de conocer la densidad de probabilidad  $P_n(t)$ .



Multiplicando (C.4') por  $n$  y sumando sobre  $n$

$$\sum_n n P_n = \sum_n n(E-1)r_n P_n(t) + \sum_n n(E^{-1}-1)g_n P_n(t) \quad (C.10)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_n n P_n = \sum_n n E r_n P_n - \sum_n r_n P_n + \sum_n n E^{-1} g_n P_n - \sum_n n g_n P_n,$$

usando (C.9) en el primero y tercer término

$$\sum_n n E r_n P_n = \sum_n r_n P_n E^{-1} n, \quad \sum_n n E^{-1} g_n P_n = \sum_n g_n P_n E n,$$

sustituyendo en (C.10) se obtiene rápidamente, después de reacomodar y cancelar términos

$$\frac{d}{dt} \sum_n n P_n = \sum_n g_n P_n - \sum_n r_n P_n$$

de donde

$$\frac{d\langle n \rangle}{dt} = \langle g_n - r_n \rangle \quad (C.11)$$

Para el segundo momento se multiplica  $n^2$  por (C.4'), se suma sobre  $n$  y con un procedimiento análogo se obtiene

$$\frac{d\langle n^2 \rangle}{dt} = \langle g_n + r_n \rangle - 2\langle n(g_n - r_n) \rangle \quad (C.12)$$

Con el mismo procedimiento se obtiene la ecuación para el momento de orden  $k$

$$\frac{d\langle n^k \rangle}{dt} = \langle g_n [(n+1)^k - n^k] \rangle - \langle r_n [n^k - (n-1)^k] \rangle \quad k=1,2,\dots$$

y usando la fórmula de Newton para el binomio resulta finalmente

$$\frac{d\langle n^k \rangle}{dt} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \left[ \langle n^i g_n \rangle + (-1)^i \langle n^i r_n \rangle \right], \quad (C.13)$$

donde

$$\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!} \quad (C.14)$$

Los procesos de nacimiento y muerte pueden clasificarse en tres subclases según su rango

- a)  $-\infty < n < \infty$
- b)  $n=0, 1, 2, \dots$
- c)  $n=0, 1, \dots, N$ .

En el caso de (b) y (c) existen uno y dos extremos respectivamente, que se llaman fronteras y pueden ser clasificadas cada una en

- 1) fronteras absorbentes,
- 2) fronteras reflectantes.

Como su nombre lo indica, las fronteras absorbentes son tales que cuando el sistema llega a ese estado, se queda atrapado en él: mientras que las fronteras reflectantes no permiten que el sistema se mantenga en ese estado y lo regresan al interior del rango.

La aplicación de PNM que se realiza en ese estudio es del tipo (b), cabe señalar sin embargo que las diversas combinaciones de (b) y (c) con (1) y (2) requiere de atención especial. En particular, la ecuación maestra se modifica en las fronteras.

Para el caso estacionario es sencillo resolver la ecuación

maestra, sea  $P_n^s = 0$

$$(E - 1)r_n P_n^s + (E^{-1} - 1)g_n P_n^s = 0 \quad , \quad (C.15)$$

donde  $P_n^s$  es la solución estacionaria. Desarrollando el segundo término y usando que  $EE^{-1}=1$

$$(E - 1)r_n P_n^s - EE^{-1}g_n P_n^s + E^{-1}g_n P_n^s = 0$$

factorizando

$$(E - 1)(r_n P_n^s - E^{-1}g_n P_n^s) = 0 \quad , \quad (C.16)$$

pero esta ecuación implica que la expresión dentro de las llaves no depende de  $n$ , sea entonces

$$J = r_n P_n^s - E^{-1}g_n P_n^s \quad , \quad (C.17)$$

usando (C.17) reescribimos la ecuación maestra como

$$P_n = (E - 1)(-J) \quad , \quad (C.18)$$

de donde se tiene que  $J$  puede ser interpretada como el flujo de probabilidad de  $n$  a los estados vecinos.

Para el caso  $n=0, 1, \dots, N$ , tenemos que  $n=0$  es una frontera donde la ecuación maestra toma la forma

$$P_0 = r_1 P_1 - g_0 P_0 \quad (C.19)$$

con

$$r_0 = g_{-1} = 0$$

o bien en la otra frontera ( $n=N$ )

$$P_N = g_{N-1} P_{N-1} - r_N P_N \quad (C.20)$$

con

$$r_{N+1} = g_N = 0$$

haciendo  $n=1$  en (C.17) y usando (C.19), o bien,  $n=N$  en (C.20), es claro que  $J=0$ , luego

$$r_n P_n^s = E^{-1} g_n P_n^s$$

para toda  $n$ . Resolviendo para  $P_n^s$  y aplicando  $E^{-1}$ , resulta

$$P_n^s = \frac{g_{n-1} P_{n-1}^s}{r_n} \quad (C.21)$$

que podemos utilizar como fórmula de recurrencia y obtener

$$P_n^s = \frac{g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_1 g_0 P_0^s}{r_n \cdots r_2 r_1} \quad (C.22)$$

La constante  $P_0^s$  se determina imponiendo la condición de normalización

$$\sum_{n=1}^N P_n^s = 1 \quad ,$$

de donde resulta

$$\frac{1}{P_0^B} = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{g_{n-1} \cdots g_1 g_0}{r_n \cdots r_2 r_1} \quad (C.24)$$

Por último definiremos la entropía del proceso  $n(t)$  para el caso estacionario

$$S = -k \langle \ln P_n^B \rangle, \quad (C.25)$$

donde el promedio se calcula con la densidad de probabilidad dada por (C.22) y (C.24).

## REFERENCIAS

- (1) M. Jammer, Conceptual Development of Quantum Mechanics, Mc-Graw Hill, (1966).
- (2) M. Jammer, Philosophy of Quantum Mechanics, Wiley & Sons, (1974).
- (3) F. Selleri, El Debate de la Teoría Cuántica, Serie de Ciencias No. 453, Alianza Editorial, (1986).
- (4) La referencia (1) contiene un análisis amplio del trabajo de Planck y sus antecedentes.
- (5) A. Einstein, "Uber Einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes Betreffenden Euristischen Gesichtspunkt", Ann. Physik 17, 132-148 (1905). Una traducción al inglés puede verse en A. B. Arons y M.B. Peppard, "Einstein Proposal of the Photon Concept- a traslation of the Annalen der Physik Paper of 1905", Am J. Phys. 33, 367-374 (1965).
- (6) A. Einstein, "Quantentheorie der Strahlung", Phys. Zs. 18, 121-128 (1917). Una traducción al inglés puede encontrarse en Sources of Quantum Mechanics, editado por B. L. Waerden, Dover (1968).
- (7) P. A. M. Dirac, "The Quantum Theory of the Emission and the Absorption of Radiation", Proc. Roy. Soc. of London 114 A, 243 (1927), también puede encontrarse en la selección hecha por J. Schwinger, Quantum Electrodynamics, Dover (1958).
- (8) Sobre este punto la referencia (3) contiene un análisis muy interesante y conciso, además, una gama bibliográfica muy amplia.
- (9) A. Castellanos, "Birth-and-Death Processes Applied to AB-Coefficients Einstein's Model", enviado a publicación.
- (10) Una descripción sintetizada pero didáctica de las críticas de Boltzmann a Planck puede encontrarse en : L. García Colín S., La Naturaleza Estadística de la Teoría de los cuantos, Universidad Autónoma Metropolitana (1987).

- (11) M. Planck, The Theory of Heat Radiation, Dover, (1959).
- (12) A. Einstein, Phys. Zeitschr. 10, 187 (1909): poco después presenta una fórmula para la fluctuación del momento en: A. Einstein, Phys. Zeitschr. 10, 817 (1909); una discusión amena y muy documentada puede ser consultada en: A. Pais, Subtle is the Lord, Oxford University Press (1982), p. 402; también puede verse: A. Pais, "Einstein and the Quantum Theory", Rev. of Mod. Phys. 51, 863-914 (1979).
- (13) Ver la tercera y cuarta referencia de (12).
- (14) B. Breit, Phys. Rev. 22, 314 (1923).
- (15) W. Heisenberg, "Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen", Z. Phys. 33, 879 (1925). Una traducción al inglés puede encontrarse en la segunda referencia de (6).
- (16) La segunda referencia de (6) contiene una traducción al inglés de la serie de artículos de Born, Heisenberg y Jordan.
- (17) P. A. M. Dirac, "The Quantum Theory of Emission and Absorption of Radiation, Proc. Roy. Soc. of London 114A, 243-265 (1927).
- (18) Una breve discusión de este método de cuantización de Dirac, dentro del esquema moderno de segunda cuantización, puede encontrarse en: W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation, Dover (1954).
- (19) Como es bien conocido, la simetrización de la función de onda es ahora una condición de uso generalizado, ver por ejemplo: Landau y Lifshitz, Mecánica Cuántica (Teoría no Relativista), Reverté.
- (20) Landau y Lifshitz, Mecánica Cuántica Relativista I, Reverté, (1971).
- (21) J. J. Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley, (1967).
- (22) M. D. Crisp and E. T. Jaynes, "Radiative Effects in Semiclassical

Theory", Phys. Rev. 179, 1253 (1969).

(23) Una exposición amplia puede encontrarse en P. W. Milonni, "Semiclassical and Quantum-electrodynamical Approaches in Nonrelativistic Radiation Theory", Phys. Rep. 25C, 1 (1976).

(24) Una discusión sobre este aspecto, actualizada hasta la época de publicación del libro, que además tiene una amplia perspectiva histórica, puede encontrarse en la referencia (2).

(25) J. C. Zambrini, "Stochastic Mechanics According to E. Schrödinger", Phys. Rev. A33, 1532 (1986).

(26) E. Nelson, "Derivation of the Schrödinger Equation from Newtonian Mechanics", Phys. Rev. 150, 1079 (1966).

(27) L. de la Peña, J. Math. Phys. 10, 1620 (1969); L. de la Peña, J. Math. Phys. 10, 1620 (1969); L. de la Peña y A. M. Cetto, F. Phys. 5, 355 (1975); L. de la Peña y A. M. Cetto, F. Phys. 12, 1017 (1982).

(28) F. Guerra y Loffredo, "Stochastic Equations for the Maxwell Field", Lett. al N. Cim. 27, 41 (1980).

(29) L. de la Peña, "Stochastic Electrodynamics: its Development, Present Situation and Perspectives" en Stochastic Processes Applied to Physics and Other Related Fields, ed. por B. Gómez, S. M. Moore, A. M. Rodríguez Vargas y A. Rueda, World Scientific (1983). Una nueva perspectiva puede verse en: L. de la Peña y A. M. Cetto, "The Physics of Stochastic Electrodynamics", N. Cim. 92B, 189 (1986).

(30) La referencia (29) contiene un recuento de los logros alcanzados con base en la EDE así como una amplia bibliografía al respecto.

(31) L. de la Peña y A. M. Cetto, J. Math. Phys. 20, 469 (1979), A. Jauregui y L. de la Peña, Phys. Lett. 86A, 280 (1981); J. Math. Phys. 24, 2751, (1983).



- (32) T. Marshall and E. Santos, F. Phys. 18, 185 (1988).
- (33) A. Castellanos, Rev. Mex. Fis. 34, 564 (1988).
- (34) Ph. Blanchard, Ph. Combe, W. Zheng, Mathematical and Physical Aspects of Stochastic Mechanics, Springer-Verlag (1987).
- (35) M. Davidson, Lett. in Math. Phys. 3, 271 (1979); Physica 96A, 465 (1979).
- (36) U. Frisch and R. Bourret, J. of Math. Phys. 11, 364 (1970). Trabajos de Bourret que antecedieron a este, y de mayor claridad en algunos aspectos, se encuentran en: Phys. Lett. 12, 323 (1964); Can. J. Phys. 44, 2519 (1966).
- (37) E. Santos, "Foundations of Stochastic Electrodynamics. I" Preprint (1975).
- (38) Varias referencias pueden encontrarse en: R. Kidd, J. Ardini y A. Anton, Am. J. Phys. 57, 27 (1989).
- (39) Ver las referencias (22, 23, 40 y 41).
- (40) G. Henderson, Am. J. Phys. 48, 604 (1980).
- (41) J. Barwick, Phys. Rev. A17, 1912 (1978).
- (42) M. Cray, M. Shih y P. W. Milonni, Am. J. Phys. 50, 1016 (1982).
- (43) P. W. Milonni, Am. J. Phys. 52, 340 (1984).
- (44) L. de la Peña y A. M. Cetto, "New Approach to Stochastic Electrodynamics" Preprint IFUNAM (1989).
- (45) Ver cuarta referencia de (12).
- (46) Landau y Lifshitz, Física Estadística, Reverté, (1969).

- (47) R. E. Kelly, "Thermodynamics of Blackbody Radiation", Am. J. Phys. 49, 714 (1981).
- (48) E. Schrodinger, Collected Papers on Wave Mechanics, Blackie & Son Limited, (1928).
- (49) A. Castellanos, "Sobre las Razones que Facilitan la Aceptación de la Interpretación Ortodoxa de la Teoría Cuántica", Rev. Mex. Fis. 32, 695 (1986).
- (50) A. Fine, The Shaky Game: Einstein Realism and the Quantum Theory, The University of Chicago Press, (1986).
- (51) L. de la Peña y A. M. Cetto, "Why Schrodinger Equation?", Int. J. of Quant. Chem. 12, 23 (1977).
- (52) R. Kid, J. Ardini y A. Anton, "Evolution of the Modern Photon", Am. J. Phys. 57, 27 (1989)
- (53) N. G. Van Kampen, Stochastic Processes in Physics and Chemistry, North Holland.
- (54) N. S. Goel y Reichter-Lyn, Stochastic Models in Biology, Academic Press, (1974)
- (55) L. E. Reichl, A Modern Course in Statistical Physics, University of Texas Press.
- (56) W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, John Wiley & Sons.
- (57) R. L. Stratonovitch, Topics in the Theory of Random Noise, Gordon and Breach.
- (58) A. M. Cetto y L. de la Peña, "Continuous and Discrete Aspects of Blackbody Radiation", F. Phys. 19, 419 (1989).

(59) A. Castellanos, "Análisis Comparativo de Tres Enfoques para el Estudio de la Radiación Electromagnética", enviado a publicación.