

01162

4
rej.



DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Facultad de Ingeniería

**DETERMINACION DEL COEFICIENTE DE DISPERSION
LONGITUDINAL EN RIOS**

FALLA DE ORIGEN

JOSE ALFREDO GONZALEZ VERDUGO

T E S I S

**PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO DE LA**

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

Universidad Nacional Autónoma de México.

**COMO REQUISITO PARA OBTENER
EL GRADO DE**

MAESTRO EN INGENIERIA HIDRAULICA

CIUDAD UNIVERSITARIA

1 9 9 1



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**EL PRESENTE TRABAJO SE IMPRIMIO CON EL APOYO
DE LA COMISION NACIONAL DEL AGUA A TRAVES DEL
INSTITUTO MEXICANO DE TECNOLOGIA DEL AGUA**

Resumen: En la actualidad un problema común a nivel mundial es la contaminación de las aguas superficiales y subterráneas. Esto limita la cantidad y calidad del agua disponible que se puede utilizar principalmente para fines domésticos, de riego e industriales.

Para mantener un control de la contaminación del agua, en el caso de las corrientes superficiales, es necesario conocer la capacidad de dichas corrientes para transportar, dispersar y diluir los contaminantes. Un parámetro importante que caracteriza esta capacidad de autodepuración de los ríos es el llamado "coeficiente de dispersión longitudinal". Su evaluación correcta permite predecir con buena aproximación la variación de la concentración a lo largo del escurrimiento, mediante el uso de la ecuación de dispersión unidimensional.

En este trabajo además de presentar algunos métodos reportados en la literatura, se llega a proponer un método similar a los existentes. Al comparar los resultados que arrojan los métodos que se describen con mediciones de campo del coeficiente de dispersión, se demuestra que con el método propuesto se tienen mejores resultados. Adicionalmente se valida la aplicación de la ecuación de dispersión en corrientes naturales, utilizando el método propuesto para calcular el coeficiente de dispersión, con los resultados de estudios de trazado reportados en la literatura.

C o n t e n i d o

1.- INTRODUCCION	1
2.- FUNDAMENTOS DE DIFUSION	5
2.1. <i>Procesos de difusión</i>	5
2.1.1.- <i>Propiedades y características de fluidos no-homogéneos</i>	6
2.2.- <i>Difusión molecular</i>	8
2.2.1.- <i>Ecuación de conservación de la materia en fluidos no-homogéneos</i>	9
2.3.- <i>Difusión turbulenta</i>	13
2.3.1.- <i>Algunos conceptos estadísticos de turbulencia</i>	14
2.3.2.- <i>Definición del coeficiente de mezclado turbulento</i>	19
2.3.2.1.- <i>Análisis de Taylor</i>	20
2.3.3.- <i>Ecuación de difusión turbulenta</i>	25
Figuras	31
3.- DISPERSION EN FLUJOS CORTANTES	34
3.1.- <i>Dispersión en un flujo laminar</i>	35
3.2.- <i>Dispersión en un flujo turbulento</i>	42
3.3.- <i>Dispersión longitudinal en ríos</i>	45
3.3.1.- <i>Derivación teórica del coeficiente de dispersión longitudinal</i>	45
Figuras	49
4.- METODOS PARA CALCULAR EL COEFICIENTE DE DISPERSION LONGITUDINAL	52
4.1.- <i>Análisis del coeficiente de dispersión</i>	52
4.2.- <i>Cálculo del coeficiente de dispersión en corrientes naturales</i>	55
4.2.1.- <i>Método de McQuivey y Keefer</i>	60
4.2.2.- <i>Método de Fischer</i>	62
4.2.3.- <i>Método de Liu</i>	63

C o n t e n i d o (C o n t i n u a c i ó n)

4.2.4.- Método propuesto	65
Tablas y Figuras	69
5.- COMPARACION DE METODOS Y EJEMPLOS DE APLICACION	75
5.1.- Comparación y análisis de resultados de los métodos	75
5.2.- Ejemplos de aplicación del modelo de dispersión unidimensional	77
Tablas y Figuras	83
6.- CONCLUSIONES	90
NOTACION	94
REFERENCIAS	97

1.- INTRODUCCIÓN

Actualmente un problema común a nivel mundial es la contaminación de las aguas superficiales y subterráneas. Si bien no es nuevo que el ser humano utilice los cuerpos de agua (ríos, lagos, etc.) como un medio para eliminar sus desechos, hoy en día, debido al desarrollo industrial y al incremento de población, esta práctica ha provocado que se tengan serios problemas de contaminación de dichas aguas.

Como las descargas residuales pueden contener desde inocuos inorgánicos hasta sustancias tóxicas como son los metales pesados y materiales radiactivos, los ingenieros hidráulicos ya no se encuentran solamente interesados con la *cantidad* del agua disponible sino además con la *calidad* de ella. Es decir, resulta necesario entender los procesos hidrodinámicos de mezclado y de transporte que se llevan a cabo.

Existen un gran número de estudios de dispersión en ríos, donde se ha pretendido entender el fenómeno y tratado de establecer algunos modelos para predecir el comportamiento de los contaminantes, tanto en la zona cercana a las descargas como hacia aguas abajo de éstas. Precisamente en zonas ya alejadas de las descargas, donde se tiene un mezclado completo transversal del contaminante, el fenómeno cae dentro de lo que se llama *dispersión longitudinal*.

A partir de la zona anterior, la simulación y la predicción del contaminante hacia aguas abajo, es descrita mediante la ecuación de *dispersión unidimensional*. Para poder utilizar dicha ecuación es necesario conocer de antemano un parámetro importante que caracteriza la autodepuración de los ríos, llamado *coeficiente de dispersión longitudinal*.

El objetivo de este trabajo fue realizar una investigación bibliográfica sobre los métodos de cálculo del coeficiente de dispersión, comprobar los resultados de los distintos métodos y proponer una metodología para predecir

adecuadamente dicho coeficiente.

Durante el desarrollo de la investigación, se analizaron los valores medidos de los coeficientes en diversos ríos y aplicándose la técnica del análisis dimensional, se obtuvo un nuevo método para la estimación del coeficiente de dispersión, que arroja mejores resultados que los métodos analizados.

Este trabajo consta, además de la presente introducción, de cinco capítulos donde se describen la teoría de difusión, los métodos analizados para la estimación del coeficiente, la comparación de dichos métodos con el método propuesto, así como las conclusiones derivadas del presente estudio.

En el capítulo 2 se comentan los fundamentos de transferencia de masa, tanto a nivel molecular como turbulenta, iniciando primeramente con una breve descripción de los procesos de difusión en fluidos homogéneos y no-homogéneos, presentando enseguida ciertas propiedades y características del flujo de mezclas y por último, se describen las ecuaciones de difusión tanto en régimen laminar como turbulento.

En el capítulo 3 se presentan los fundamentos de dispersión en flujos cortantes así como su aplicación al mezclado en ríos, siguiendo el enfoque desarrollado por Fischer en 1967.

En el cuarto capítulo, además de mostrar algunos métodos para el cálculo del coeficiente de dispersión reportados en la literatura, se llega a proponer un nuevo método de características similares a los existentes, con la salvedad de que proporciona mejores resultados.

En el capítulo 5 se realiza una comparación de los métodos descritos en el capítulo anterior; y se demuestra que con el método propuesto se tienen mejores resultados. Adicionalmente se valida la aplicación del modelo de dispersión unidimensional para el caso de contaminantes conservativos en ríos, haciéndose hincapie en lo importante que es el evaluar correctamente el coeficiente de dispersión longitudinal.

Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones derivadas de este trabajo.

2.- FUNDAMENTOS DE DIFUSIÓN

En los problemas relacionados con el movimiento de los fluidos, es necesario identificar el mecanismo predominante de transporte o de transferencia que se requiere estudiar y utilizar la ley correspondiente para solucionar correctamente el problema. Existen básicamente tres procesos de transferencia que son: de masa, calor y de cantidad de movimiento, y si bien es cierto éstos se dan simultáneamente, es posible hacer una jerarquización de dichos procesos, dependiendo del fenómeno bajo estudio. Tal es el caso del transporte de contaminantes en ríos, donde interesa conocer la evolución de la concentración del contaminante en el transcurso de la corriente. Aquí, es importante determinar la transferencia de masa, lo que conduce a utilizar la ley de conservación de la materia.

En este capítulo se comentan los fundamentos de transferencia de masa, tanto a nivel molecular como turbulenta, iniciando primeramente con una breve descripción de los procesos de difusión en fluidos homogéneos y no homogéneos, presentando enseguida ciertas propiedades y características del flujo de mezclas y por último, se describen las ecuaciones de difusión tanto en régimen laminar como turbulento.

2.1.-Procesos de difusión

En general, todos los fluidos en movimiento deben satisfacer el principio de conservación de la materia, sin embargo, en el caso de procesos de difusión de sustancias en un medio fluido, es conveniente hacer una distinción entre los fluidos homogéneos y los no homogéneos.

Un fluido se considera homogéneo cuando dentro de la región en estudio, éste es de una sola especie, mientras que en los no-homogéneos existen dos o más especies, caracterizándose éstos por las variaciones en la cantidad de una sustancia con respecto a otra.

En los fluidos homogéneos, al aplicar la ley de conservación de la materia resulta una expresión conocida como **ecuación de continuidad**, la cual relaciona al tiempo y las variaciones espaciales de la densidad y la velocidad. Más aún, si el fluido se considera incompresible, la ecuación se reduce a una expresión en las derivadas de la velocidad, respecto a las variables de posición.

Para un fluido no homogéneo, el principio de conservación de la materia debe ser aplicado a cada componente o especie de la mezcla del fluido. En este caso se tienen dos tipos de transferencia de masa, una debida a la velocidad local del flujo de la mezcla conocida como **difusión convectiva**, y la otra originada por las diferencias de concentración de un componente dentro del fluido, llamada **difusión molecular**.

En los flujos turbulentos, como el escurrimiento en ríos, el intercambio macroscópico de partículas de fluido es más importante que el proceso molecular, sin embargo es necesario mencionar la difusión molecular antes de presentar la ecuación de difusión para flujos turbulentos, debido a la analogía existente entre los dos procesos, en el fenómeno de la transferencia de masa.

2.1.1.- Propiedades y características de fluidos no homogéneos

A continuación se mencionan ciertas propiedades del fluido y algunos parámetros cinemáticos del mismo, que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. Asimismo, se considerará que dicho fluido tendrá dos componentes, es decir, será un sistema binario.

Densidad. Es la masa total de la mezcla contenida en la unidad de volumen

$$\rho = \rho_a + \rho_b \quad (2.1)$$

donde ρ_a y ρ_b son las densidades de cada componente

Concentración. Es la cantidad de masa de cada componente por unidad de masa de la mezcla.

Para el componente A es igual a :

$$C_a = \frac{\text{masa de A}}{\text{masa de la mezcla}} = \frac{\rho_a}{\rho} \quad (2.2)$$

Para el componente B :

$$C_b = \frac{\text{masa de B}}{\text{masa de la mezcla}} = \frac{\rho_b}{\rho} \quad (2.3)$$

Flujo de masa. El flujo de masa para cada componente por unidad de área es igual al producto de la densidad y la velocidad, es decir:

Para la componente A

$$N_a = \rho_a \bar{v}_a \quad (2.4)$$

Para la componente B

$$N_b = \rho_b \bar{v}_b \quad (2.5)$$

donde \bar{v}_a y \bar{v}_b son las velocidades medias de las moléculas de cada componente, medidas respecto a un sistema de coordenadas fijo.

Velocidad hidrodinámica. Es el flujo de masa total por unidad de masa de la mezcla

$$\bar{V} = \frac{N_a + N_b}{\rho_a + \rho_b} = \frac{\rho_a \bar{v}_a + \rho_b \bar{v}_b}{\rho} \quad (2.6)$$

utilizando las ecuaciones (2.2) y (2.3), la ecuación anterior resulta igual a :

$$\bar{V} = c_a \bar{v}_a + c_b \bar{v}_b \quad (2.7)$$

Por último, podemos definir el flujo de masa del componente A, respecto a la velocidad hidrodinámica \bar{V} del fluido , como:

$$J_a = \rho_a (\bar{v}_a - \bar{V}) \quad (2.8)$$

2.2.- Difusión molecular

La difusión molecular es el proceso en el cual la masa se transporta a nivel molecular debido básicamente al movimiento browniano, donde las diferencias de concentración dentro del fluido tienden a cero en el tiempo , sin importar la convección que se tenga dentro del sistema. En problemas de contaminación, este tipo de transferencia es importante en reacciones químicas y biológicas a escala molecular.

Los fundamentos teóricos de su formulación están basados, como en otros procesos físicos, en una descripción empírica del fenómeno.

Fick (1855), apoyándose, de manera analógica, en las bases del flujo de calor de Fourier (1822), estableció que el flujo de masa de una sustancia en una dirección dada es proporcional al gradiente de concentración de la sustancia en esa dirección. Con ello, postuló lo que se llama **primera ley de Fick**.

Para un proceso de difusión unidimensional, la ley anterior se escribe matemáticamente como

$$\mathbf{J}_x = - \rho D_x \frac{\partial C}{\partial X} \quad (2.9)$$

siendo \mathbf{J}_x el flujo de masa, D_x es un coef. de proporcionalidad conocido como coeficiente de difusión y C es la concentración. Para el sistema binario considerado, la ecuación anterior para el componente A se expresa como

$$J_a = - \rho D_{ab} \frac{\partial C_a}{\partial X} \quad (2.10)$$

donde :

J_a es el flujo de masa de A , D_{ab} el coeficiente de difusión molecular de A que se difunde en B , y $\frac{\partial C_a}{\partial X}$ es el gradiente de la concentración de A .

2.2.1.- Ecuación de conservación de la materia en fluidos no homogéneos

Una vez presentado el proceso de difusión de una sustancia a nivel molecular, se puede establecer la ecuación general de conservación de masa para flujos de mezclas, en régimen laminar.

De acuerdo con el principio de conservación de la materia aplicado a un volumen de control diferencial dx , dy , dz en un sistema fijo de coordenadas, fig. 2.1, y el sistema binario considerado, para la componente A se tiene :

$$\left[\begin{array}{l} \text{El flujo neto de masa de } A \\ \text{a través del elemento de} \\ \text{de fluido} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{La rapidez de producción de} \\ \text{la masa de } A \text{ por reacción} \\ \text{química o biológica dentro} \\ \text{del elemento de fluido} \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{La rapidez de acumulación de} \\ \text{masa de } A \text{ dentro del elemento} \\ \text{de fluido} \end{array} \right]$$

De la ec.(2.8), $\vec{v}_a = \frac{J_a}{\rho_a} + \vec{V}$ y sustituyendo en (2.4) resulta

$$N_a = \rho_a \left(\frac{J_a}{\rho_a} + \bar{V} \right) = J_a + \rho_a \bar{V} \quad (2.11)$$

en la que, al utilizar la primera ley de Fick, ec.(2.10), e introduciendo $\rho_a = C_a \rho$, resulta

$$N_a = -\rho D_{ab} \nabla C_a + \rho C_a \bar{V} \quad (2.12)$$

Ahora bien, al representar en forma matemática el principio de conservación de la materia, en las direcciones x , y y z quedaría :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(N_a)_x}{\partial X} dx dy dz - \frac{\partial(N_a)_y}{\partial Y} dx dy dz - \frac{\partial(N_a)_z}{\partial Z} dx dy dz + \\ + R_a dx dy dz = \frac{\partial \rho_a}{\partial t} dx dy dz \end{aligned}$$

donde R_a es la masa de A producida por unidad de volumen y por unidad de tiempo. Si hubiera destrucción de masa de A , R_a sería negativa.

dividiendo entre $dx dy dz$ y reordenando

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial(N_a)_x}{\partial X} + \frac{\partial(N_a)_y}{\partial Y} + \frac{\partial(N_a)_z}{\partial Z} = R_a$$

en forma vectorial, la ecuación anterior resulta

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \nabla \cdot N_a = R_a \quad (2.13)$$

Similarmente, al plantearse la ecuación de conservación de masa para el componente B se tiene :

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \nabla \cdot N_b = R_b \quad (2.14)$$

En un sistema binario y conservativo, la producción ó destrucción de A

ocurre solamente a expensas de B ya que la masa total de la mezcla debe conservarse, de aquí que $R_a = -R_b$.

Al combinar las ecuaciones (2.13) y (2.14), se obtiene

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \nabla N_a + \frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \nabla N_b = 0$$

y apoyándose en las ecs. (2.1) y (2.6), resulta :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \bar{V}) = 0 \quad (2.15)$$

siendo ésta la ecuación general de conservación de masa para el flujo de mezclas de un sistema conservativo de cualquier número de componentes y completamente análoga a la de un fluido homogéneo.

Ahora bien, considerando solamente el comportamiento de un componente y sea éste el soluto o contaminante respecto del disolvente, al retomar las ecuaciones (2.12) y (2.13) y recordando que $\rho_a = \rho C_a$, se tiene :

$$\frac{\partial (\rho C_a)}{\partial t} + \nabla (-\rho D_{ab} \nabla C_a + \rho C_a \bar{V}) = R_a$$

desarrollando términos

$$\frac{\partial (\rho C_a)}{\partial t} + \nabla (-\rho D_{ab} \nabla C_a) + \nabla (\rho C_a \bar{V}) = R_a$$

$$\frac{\partial (\rho C_a)}{\partial t} + \rho C_a \nabla \bar{V} + \bar{V} \nabla (\rho C_a) = R_a + \rho D_{ab} \nabla^2 C_a +$$

$$+ \nabla C_a \nabla (\rho D_{ab})$$

Si se considera flujo incompresible, $\nabla \bar{V} = 0$; la mezcla diluida (es decir, tanto la densidad ρ como el coeficiente D_{ab} son constantes) y la sustancia conservativa, quedaría :

$$\rho \frac{\partial C_a}{\partial t} + \rho \bar{V} \nabla C_a = \rho D_{ab} \nabla^2 C_a$$

$$\frac{\partial C_a}{\partial t} + \bar{V} \nabla C_a = D_{ab} \nabla^2 C_a \quad (2.16)$$

En forma cartesiana, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_a}{\partial t} + u \frac{\partial C_a}{\partial x} + v \frac{\partial C_a}{\partial y} + w \frac{\partial C_a}{\partial z} &= \\ &= D_{ab} \left[\frac{\partial^2 C_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_a}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde u , v y w son los componentes de velocidad en las direcciones x , y y z respectivamente.

A la ecuación (2.16) ó (2.17) se le llama **ecuación de la difusión convectiva**, y es la expresión de conservación de masa para la sustancia A , en un flujo laminar incompresible.

Si se supone que el cuerpo de agua en estudio está en reposo, entonces $\bar{V}(x,y,z,t) = 0$, y la ecuación (2.16) se reduce a:

$$\frac{\partial C_a}{\partial t} = D_{ab} \nabla^2 C_a \quad (2.18)$$

que expresada en forma cartesiana resulta

$$\frac{\partial C_a}{\partial t} = D_{ab} \left[\frac{\partial^2 C_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_a}{\partial z^2} \right] \quad (2.19)$$

A la ecuación anterior se le conoce como la **ecuación de difusión** la cual describe la transferencia de masa mediante un proceso de difusión Fickiano.

Analizando la difusión solamente en la dirección x y considerando D_{ab} constante, se puede encontrar la solución fundamental de la ecuación (2.19) para una cantidad de masa M introducida en el origen. Unidimensionalmente la ecuación se simplifica a:

$$\frac{\partial C_a}{\partial t} = D_{ab} \left[\frac{\partial^2 C_a}{\partial x^2} \right] \quad (2.20)$$

Como se puede observar, debido a que la ecuación anterior es lineal, su solución es muy usada para construir soluciones a problemas con condiciones iniciales y de frontera más complejos. La solución fundamental se puede obtener con diversas técnicas matemáticas (Crank, 1956). Una de las más sencillas es la que utiliza el análisis dimensional (Fischer et al, 1979) y que se presenta a continuación el resultado:

$$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp -(x^2/4Dt) \quad (2.21)$$

La concentración en este caso sigue una distribución gaussiana y cuando $M = 1$ a la distribución se le conoce como normal. Algunas propiedades estadísticas importantes de la distribución gaussiana, en términos de los momentos de dicha distribución son:

$$\mu = 0 ; \sigma^2 = 2 D t$$

donde μ y σ^2 son la media y la varianza de la distribución respectivamente. En este caso se observa que la varianza es lineal respecto al tiempo, concepto importante que se considera en el estudio de difusión en los flujos turbulentos, como se verá en la siguiente sección.

2.3.- Difusión turbulenta

De acuerdo con la clasificación de los flujos con base en el tipo de régimen, la contraparte del escurrimiento laminar es el flujo turbulento. Este se caracteriza por el movimiento irregular de partículas, las cuales

siguen trayectorias fluctuantes y erráticas. Mientras que en un flujo laminar el mezclado o difusión de la masa presenta un patrón bien definido (recordar el experimento clásico de Reynolds), en un flujo turbulento, aparte de que se tiene una difusión más rápida, la masa se mezcla o dispersa transversalmente moviéndose irregularmente.

Debido al carácter aleatorio de movimiento de las partículas, es lo que hace pensar que el flujo turbulento ocurre en rangos de tamaños o "escalas" de movimiento, donde para entender mejor el fenómeno es costumbre utilizar la teoría estadística cuya aplicación se debe a G.I. Taylor. Precisamente dicho investigador al utilizar dicha teoría en el análisis de la difusión de la masa en los flujos turbulentos, llegó a sugerir la existencia de un coeficiente de mezclado turbulento análogo al de difusión molecular, para describir el mezclado de sustancias en este tipo de escurrimientos.

El objetivo de esta sección es mostrar cómo y bajo qué condiciones dicho coeficiente se usa para estudiar el fenómeno de mezclado de sustancias en ríos. Sin embargo, debido al carácter aleatorio del flujo turbulento, es conveniente mencionar antes algunos conceptos estadísticos propios de este tipo de régimen, que serán utilizados posteriormente.

2.3.1.- Algunos conceptos estadísticos de turbulencia

Supóngase que una partícula de fluido en un flujo turbulento, en el tiempo t_0 , se localiza en un punto cuyo vector de posición es χ con las coordenadas cartesianas (ξ, η, ζ) . Para un tiempo después t , la partícula se mueve a una nueva posición teniendo el vector de posición X de coordenadas cartesianas (X, Y, Z) . De aquí, se puede establecer que la trayectoria de la partícula estará dada por una relación funcional de la forma :

$$X = X(\chi, t, t_0) \quad (2.22)$$

donde :

$$X = X(\xi, \eta, \zeta, t, t_0), Y = Y(\xi, \eta, \zeta, t, t_0), Z = Z(\xi, \eta, \zeta, t, t_0) \quad (2.23)$$

Similarmente, si se observa el movimiento de otra partícula existirá una relación funcional diferente de X , reflejándose con ello la naturaleza aleatoria de las trayectorias de las partículas contenidas en un flujo turbulento. Por otro lado, el vector X se puede interpretar como una variable aleatoria en el tiempo para cualquier partícula analizada, donde existe poca correlación entre la posición de la partícula en el tiempo t y una siguiente posición para el tiempo $t+\tau$, es decir $X = X(t)$.

Estas interpretaciones de la ecuación (2.22) son importantes ya que las propiedades estadísticas del movimiento de alguna partícula pueden ser diferentes si se promedia respecto al número total de partículas analizadas o promediando individualmente para cada partícula respecto al tiempo.

Con la idea de diferenciar y esclarecer cada forma de análisis, se tomará en cuenta el siguiente experimento : Considere que en un punto fijo se descarga un número de partículas en diferentes tiempos, observando el desplazamiento X de cada partícula, para un mismo tiempo T fig.(2.2). Enseguida se descarga una sola partícula la cual es seguida en su movimiento, observando el desplazamiento X durante un gran número de intervalos de tiempo (iguales al número de partículas descargadas en el caso anterior), de duración T cada intervalo.

En el primer caso, las propiedades estadísticas de la variable aleatoria X se pueden determinar promediando los desplazamientos sobre todas las partículas descargadas, llamándose a esta forma " promedio global". Respecto al segundo caso, X también es una variable aleatoria pero sus propiedades estadísticas pueden resultar diferentes a las obtenidas mediante el promedio global. Cuando el promedio de los desplazamientos resulta ser igual entre las dos formas de análisis se dice que el proceso satisface la propiedad de ergodicidad.

A continuación se mencionan algunas propiedades estadísticas de la variable aleatoria X ; y considerando por razones de simplicidad movimiento solamente en una dirección , interesa describir las propiedades estadísticas de $X =$

$X(\xi, \eta, \zeta, t, t_0)$.

Media global. Para la variable X , ésta resulta de promediar los desplazamientos de las partículas para un número considerable de pruebas, siendo igual a :

$$\langle X \rangle = E [X(\chi, t, t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} X p(X|\chi, t, t_0) dX \quad (2.24)$$

donde el paréntesis $\langle \rangle$ indica media global, E es el valor esperado de $p(X|\chi, t, t_0)dX$ es la probabilidad de que X tenga un valor entre X y $X+dX$ en el tiempo t partiendo de χ en el tiempo t_0 , siendo $p(X|\chi, t, t_0)$ una función de densidad de probabilidad de X .

Similarmente, el k -ésimo momento de la distribución de probabilidad se define como :

$$\langle X^k \rangle = E [X^k(\chi, t, t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} X^k p(X|\chi, t, t_0) dX \quad (2.25)$$

La **autocovarianza** del desplazamiento X de la partícula se define como la esperanza de X teniendo el valor de X_1 en el tiempo t_1 y X_2 en el tiempo t_2 , siendo igual a

$$B_{xx}(\chi, t_1, t_2, t_0) = E [X_1 X_2] =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_1 X_2 p(X_1, X_2|\chi, t_1, t_2, t_0) dX_1 dX_2 \quad (2.26)$$

en la que $p(X_1, X_2|\chi, t_1, t_2, t_0)dX_1dX_2$ es la probabilidad de que X tenga un valor entre X_1 y X_1+dX_1 en el tiempo t_1 y entre X_2 y X_2+dX_2 en el tiempo t_2 , partiendo del valor χ en el tiempo t_0 .

Finalmente, la **covarianza cruzada** entre las componentes del desplazamiento de la partícula, es decir, entre X y Y o X y Z , se define como la esperanza de XY o XZ , por ejemplo :

$$B_{xy}(\chi, t, t_0) = E [X Y] =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X Y p(X, Y | \chi, t, t_0) dX dY \quad (2.27)$$

siendo $p(X, Y | \chi, t, t_0)$ la función de densidad conjunta de probabilidad para las componentes X y Y del desplazamiento de la partícula.

Por otro lado, no olvidando que el interés principal del tema es el control de la contaminación en ríos, es importante definir parámetros estadísticos relacionados con las concentraciones .

Sea $n(\mathbf{x}, t)$ la concentración observada en el punto \mathbf{x} en el tiempo t , y $p(n | \mathbf{x}, t) dn$ la probabilidad de que la concentración de la sustancia tenga un valor entre n y $n+dn$ en el punto \mathbf{x} en el tiempo t , la función de densidad se puede escribir como :

$$C(\mathbf{x}, t) = \langle n(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_0^{\infty} n p(n | \mathbf{x}, t) dn \quad (2.28)$$

donde $C(\mathbf{x}, t)$ es la media global de la concentración $n(\mathbf{x}, t)$ medida en el punto \mathbf{x} en el tiempo t , después de muchas pruebas repetidas en las que varias nubes de partículas se descargan bajo las mismas condiciones estadísticas.

La coordenada x del centro de masa de una nube de partículas resultante de un experimento en particular, se define como :

$$\bar{X} = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x n(x, y, z, t) dx dy dz \quad (2.29)$$

donde M es la masa total de la nube, siendo igual a

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(x, y, z, t) dx dy dz \quad (2.30)$$

La **varianza** de la nube, que son los desplazamientos medios cuadrados x , con

relación al centro de masa de las partículas para una nube en particular, está dada por :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{X})^2 n(x,y,z,t) dx dy dz \quad (2.31)$$

Para el caso de un conjunto de nubes, la posición media global esperada del centro de masa, para todo el grupo de nubes sería :

$$\langle \bar{X} \rangle = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x C(x,y,z,t) dx dy dz \quad (2.32)$$

De aquí que la varianza de la concentración en este caso sea igual a

$$\sum x^2 = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\langle \bar{X} \rangle)^2 C(x,y,z,t) dx dy dz \quad (2.33)$$

Ahora bien, si se desarrolla la ec.(2.31) y se toma la media global se tiene

$$\langle \sigma_x^2 \rangle = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 C(x,y,z,t) dx dy dz -$$

$$\frac{1}{M^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 2x^2 C^2(x,y,z,t) dx^2 dy^2 dz^2 +$$

$$\frac{1}{M^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 C^3(x,y,z,t) dx^2 dy^2 dz^2$$

Similarmente si se desarrolla la ecuación (2.33) y se compara con la expresión anterior, la varianza de la concentración para todo el conjunto de nubes se puede expresar como:

$$\sum x^2 = \langle \sigma_x^2 \rangle + \langle (\bar{X} - \langle \bar{X} \rangle)^2 \rangle \quad (2.34)$$

donde

$$\langle (\bar{X} - \langle \bar{X} \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{M^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 C^2(x, y, z, t) dx^2 dy^2 dz^2 -$$

$$\frac{1}{M^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 2x^2 C^2(x, y, z, t) dx^2 dy^2 dz^2 +$$

$$\frac{1}{M^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 C^2(x, y, z, t) dx^2 dy^2 dz^2$$

La ecuación (2.34) nos dice que la varianza de un conjunto de nubes de partículas es igual al promedio global de la varianza de cada nube, más el desplazamiento medio cuadrado global del centro de masa de cada nube.

Por último, el tamaño de una nube en particular lo definimos como

$$l(t) = \left[\frac{1}{3} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) \right]^{1/2} \quad (2.35)$$

donde se toma un promedio de las varianzas en las tres direcciones x, y, z , y el tamaño de un conjunto de nubes sería

$$L(t) = \left[\frac{1}{3} \left(\sum x^2 + \sum y^2 + \sum z^2 \right) \right]^{1/2} \quad (2.36)$$

2.3.2.- Definición del coeficiente de mezclado turbulento

Anteriormente se mencionó que el mezclado en un flujo turbulento se puede estudiar mediante un coeficiente análogo al de difusión molecular. Taylor en 1921 publicó un artículo titulado " Difusión por movimientos continuos ", en el cual presenta un análisis justamente de cómo y bajo qué condiciones se lleva a cabo la difusión en un flujo turbulento. Enseguida se presenta el desarrollo realizado por Taylor, aplicado al caso de la difusión de la concentración media global, cuyo resultado proporciona las propiedades de dicha concentración, demostrándose con ello la posibilidad de la existencia

del coeficiente de mezclado turbulento.

Antes de iniciar con la teoría de Taylor, conviene mencionar las características del flujo consideradas en el análisis realizado por él, siendo básicamente las siguientes :

1) El flujo turbulento es homogéneo y estacionario. Un ejemplo de este campo de flujo sería el caso del flujo en una tubería recta de longitud seminfinita, donde existe solamente difusión en una sola dirección, es decir, en la dirección axial.

2) La velocidad media del flujo es cero. En el ejemplo anterior, esto se cumple si el sistema de ejes coordenados se mueve con la velocidad media del flujo (lo que supone adoptar un punto de vista Lagrangiano).

2.3.2.1.- **Análisis de Taylor.** Considere una serie de experimentos, donde en cada uno de ellos se introduce a cada partícula del fluido en el tiempo t_0 y en el punto χ , una masa "m" de materia. Al tomar en cuenta solamente difusión de la masa en la dirección X, las ecuaciones (2.36) y (2.33) se simplifican (unidimensionalmente se puede establecer que $L^2 = \sum_x^2$ omitiendo el factor 1/3, Fischer et al 1979), teniéndose que:

$$L^2(t) = \sum_x^2 = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 C(x, y, z, t) dx dy dz \quad (2.37)$$

donde M/m es el número de partículas descargadas.

Si se desprecian los efectos de difusión molecular, la masa m adicionada a cada partícula permanecerá siempre con ésta, de manera que la concentración media $C(x, t)$ medida en un punto fijo x en el espacio, será proporcional a la probabilidad de que la partícula esté en dicho punto, de aquí :

$$C(x, t) = M p(x|\chi, t, t_0) \quad (2.38)$$

sustituyendo (2.38) en (2.37) se tiene

$$L^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(\mathbf{x}|\chi, t, t_0) dx dy dz$$

y recordando la definición del *k-ésimo* momento de distribución de probabilidad (ec.2.25), resulta

$$L^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x|\xi, t, t_0) dx = \langle x^2 \rangle \quad (2.39)$$

Si bien el resultado anterior es válido si todas las partículas se mueven desde un mismo punto χ , se puede obtener una expresión similar a (2.39) para cuando se tiene una nube de partículas distribuidas espacialmente, es decir, con una distribución $C(\chi, t_0)$ en el tiempo t_0 . Al superponer los efectos de cada partícula, la concentración media registrada en el punto fijo \mathbf{x} , será :

$$C(\mathbf{x}, t) = \int_V C(\chi, t_0) p(\mathbf{x}|\chi, t, t_0) d\xi \quad (2.40)$$

obsérvese en la expresión anterior que si bien la integración es sobre un volumen y la diferencial es una dirección solamente, significa que la masa total M tiene unidades de masa por unidad de área. Al sustituir (2.40) en (2.39) y cambiando tanto el orden como el origen del dominio de integración, se tiene que (Fischer et al, 1979)

$$L^2(t) = \langle x^2 \rangle + L^2(t_0) \quad (2.41)$$

donde $L^2(t_0)$ es la longitud media de la nube de partículas en el tiempo inicial t_0 .

Así, el problema de determinar el tamaño o longitud media de la nube de partículas es equivalente a calcular los desplazamientos medios cuadrados de las partículas del fluido, siendo esto último, el problema resuelto por Taylor en 1921.

El procedimiento es el siguiente : Sea U la velocidad de la partícula, con

velocidad media igual a cero (el sistema coordinado se mueve con la velocidad media, $\bar{U}=0$), para el punto $\xi=0$ y $t_0=0$, la posición de la partícula en cualquier tiempo sería

$$X(t) = \int_0^t U dt$$

por lo que

$$X^2(t) = \left[\int_0^t U d\tau_1 \right] \left[\int_0^t U d\tau_2 \right] = \int_0^t \int_0^t U(\tau_1)U(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.42)$$

y la media, para un conjunto de partículas, resulta ser

$$\langle X^2 \rangle = \int_0^t \int_0^t \langle U(\tau_1)U(\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.43)$$

Como el término $\langle U(\tau_1)U(\tau_2) \rangle$ representa el promedio de un gran número de ensayos del producto de la velocidad de una partícula en τ_1 con la velocidad de la misma partícula en el tiempo τ_2 , y debido a que la turbulencia es estacionaria, este producto resulta ser función solamente de la diferencia entre τ_1 y τ_2 , de tal manera que se puede definir un coeficiente de correlación como

$$R_x(\tau_2-\tau_1) = \langle U(\tau_1)U(\tau_2) \rangle / \langle U^2 \rangle \quad (2.44)$$

donde a R_x se le llama función de autocorrelación Lagrangiana, y $\langle U^2 \rangle = \langle U(0)U(0) \rangle$. Sustituyendo (2.44) en (2.43), se tiene

$$\begin{aligned} \langle U(\tau_1)U(\tau_2) \rangle &= \langle U^2 \rangle R_x(\tau_2-\tau_1) \\ \langle X^2(t) \rangle &= \int_0^t \int_0^t \langle U^2 \rangle R_x(\tau_2-\tau_1) d\tau_2 d\tau_1 \\ \langle X^2(t) \rangle &= \langle U^2 \rangle \int_0^t \int_0^t R_x(\tau_2-\tau_1) d\tau_2 d\tau_1 \quad (2.45) \end{aligned}$$

La parte final del análisis de Taylor requiere solamente manipulaciones de la doble integral; no es necesario considerar hipótesis o recurrir a

aspectos físicos del fenómeno, razón por la que a dicho análisis se le considera como un clásico de la difusión.

Haciendo el cambio de variables

$$s = \tau_2 - \tau_1 \text{ y } \tau = (\tau_1 + \tau_2)/2$$

e integrando por partes respecto a τ la ec.(2.45), resulta (Fischer et al, 1979)

$$\langle X^2(t) \rangle = 2 \langle U^2 \rangle \int_0^t (t-s) R_x(s) ds \quad (2.46)$$

Analizando la expresión anterior, se tienen dos casos límites: para tiempos muy cortos después de que la masa de partículas es descargada, la velocidad de la partícula es casi constante y R_x se puede considerar igual a la unidad, de manera que

$$\langle X^2 \rangle = \langle U^2 \rangle t^2 \quad (2.47)$$

Por otro lado, para tiempos grandes es razonable suponer que R_x tienda a cero, debido a que los desplazamientos de las partículas no pueden correlacionarse entre sí. De manera que suponiendo que las integrales $\int_0^t R_x(s) ds$ y $\int_0^t s R_x(s) ds$ tienden a un valor a medida que t crece, la ec.(2.46) bajo estas condiciones, resulta

$$\langle X^2(t) \rangle = 2 \langle U^2 \rangle \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (t-s) R_x(s) ds$$

$$\langle X^2 \rangle = 2 \langle U^2 \rangle T_x t + \text{cont.} \quad (2.48)$$

en la que $T_x = \int_0^\infty R_x(s) ds$ y se le conoce como escala de tiempo Lagrangiana.

Al diferenciar la ecuación anterior, se tiene :

$$\frac{d\langle X^2 \rangle}{dt} = 2 \langle U^2 \rangle T_x \quad (2.49)$$

La ecuación anterior señala que para tiempos grandes, la varianza de la distribución de la concentración media de nubes de partículas dispersas en un flujo turbulento, crece linealmente con el tiempo, siendo esto análogo para el caso de difusión molecular como se señaló en la sección anterior. Este resultado, siendo el más importante de la teoría de Taylor, permite definir un coeficiente de mezclado turbulento análogo al de difusión molecular, ya que una característica en cualquier proceso de difusión es que la varianza de la distribución en cuestión (calor, contaminantes, ect.), se incrementa linealmente con el tiempo (Fischer et al, 1979).

De lo anterior, podemos definir a dicho coeficiente de la forma siguiente

$$\epsilon_x = \frac{1}{2} \frac{d\langle X^2 \rangle}{dt} = \langle U^2 \rangle T_x \quad (2.50)$$

donde ϵ_x es el coeficiente de mezclado turbulento.

En el análisis de la ecuación (2.46) se mencionaron los términos "tiempos muy cortos y tiempos grandes", obteniendo en cada caso las ecs.(2.47) y (2.48). Una forma más clara de diferenciar precisamente cuándo son válidas las ecs. anteriores, es que para tiempos mucho menores a la escala de tiempo Lagrangiana ($t \ll T_x$) es válida la ec.(2.47) y para tiempos mayores a T_x , la ec.(2.48).

Ahora bien, debido a que es difícil conocer el tiempo cuando se tiene una descarga de contaminantes en una corriente, la forma de saber a partir de que condición es aplicable la ecuación de la difusión turbulenta, es mediante la determinación de la longitud o tamaño de la nube de partículas.

Considerando difusión en tres dimensiones, apoyándose en la ec.(2.48) y despreciendo la constante, el tamaño de la nube sería

$$L^2 = 2 \langle U^2 \rangle T_L t \quad (2.51)$$

donde L es el tamaño de la nube, $T_L = 1/3(T_x + T_y + T_z)$ siendo T_y y T_z definidas similarmente a T_x .

Al definir una escala de longitud Lagrangiana, l_L , de la forma

$$l_L = \langle U^2 \rangle T_L^2 \quad (2.52)$$

se tiene que la condición a cumplir para utilizar la ecuación de difusión turbulenta, en términos del tamaño de la nube está dada por :

$$L^2 > 2 l_L^2 \quad (2.53)$$

Resumiendo, el análisis de Taylor demuestra que la difusión de un grupo o nube de partículas en un flujo turbulento, se puede estudiar mediante la definición de un coeficiente análogo al de difusión molecular, donde las condiciones a satisfacer para utilizar la ecuación turbulenta son :

- 1) Flujo turbulento homogéneo y estacionario .
- 2) La varianza de los desplazamientos de la nube de partículas crece linealmente con el tiempo, es decir, es posible admitir la ley de Fick (ec.2.9) para relacionar el flujo de masa del contaminante y el gradiente de la concentración utilizando un coeficiente de mezclado y
- 3) El tamaño o longitud de la nube de partículas deberá ser mayor que la distancia donde los movimientos turbulentos se pueden correlacionar .

2.3.3.- Ecuación de difusión turbulenta

Una vez demostrado que es posible estudiar el mezclado en ríos mediante la definición del coeficiente de mezclado turbulento, la ecuación de difusión turbulenta resulta simplemente de realizar un desarrollo similar al que se efectúa en la obtención de las ecuaciones de Reynolds (Daily, 1981).

Antes de pasar a la deducción de la ecuación, considere las siguientes reglas. Sea $\bar{A} = \frac{1}{h} \int_0^h A \, dh$, $\bar{B} = \frac{1}{h} \int_0^h B \, dh$, $A = \bar{A} + a'$ y $B = \bar{B} + b'$ donde a' y b' son componentes fluctuantes, entonces A y B satisfacen lo siguiente:

$$\overline{A} = \overline{A+a'} = \overline{A} + \overline{a'} \quad , \quad \text{donde } \overline{a'} = 0$$

$$\overline{B} = \overline{B+b'} = \overline{B} + \overline{b'} \quad , \quad \text{donde } \overline{b'} = 0$$

$$\overline{A+B} = \overline{A+a'} + \overline{B+b'} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{A \overline{B}} = \overline{A} \overline{B} \quad , \quad \overline{B a'} = \overline{B} \overline{a'} = 0$$

$$\overline{A \overline{B}} = \left(\overline{A + a'} \right) \left(\overline{B + b'} \right) = \overline{A} \overline{B} + \overline{A} \overline{b'} + \overline{B} \overline{a'} + \overline{a' b'}$$

$$\overline{A \overline{B}} = \overline{A} \overline{B} + \overline{a' b'}$$

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} (\overline{A+a'}) = \frac{\partial \overline{A}}{\partial S} + \frac{\partial \overline{a'}}{\partial S} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial S}$$

Ahora bien, volviendo a la ecuación (2.17)

$$\begin{aligned} \frac{\partial Ca}{\partial t} + u \frac{\partial Ca}{\partial x} + v \frac{\partial Ca}{\partial y} + w \frac{\partial Ca}{\partial z} &= \\ &= D_{ab} \left[\frac{\partial^2 Ca}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Ca}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Ca}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

y realizando un desarrollo similar al que se efectúa en la obtención de las ecuaciones de Reynolds :

Sea $u = \overline{u} + u'$, $v = \overline{v} + v'$, $w = \overline{w} + w'$, $Ca = \overline{Ca} + Ca'$

al desarrollar cada término de la ec.(2.17), se tiene

$$\frac{\partial Ca}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\overline{Ca} + Ca') = \frac{\partial \overline{Ca}}{\partial t} + \frac{\partial Ca'}{\partial t}$$

si se toma el valor medio

$$\frac{\partial \overline{Ca}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{Ca}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{Ca'}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{Ca}}{\partial t} \quad (2.54)$$

Para el término $u \frac{\partial Ca}{\partial x}$ resulta que

$$\begin{aligned} (\bar{u}+u') \left(\frac{\partial}{\partial t} (\bar{C}_a+Ca') \right) &= u \frac{\partial Ca}{\partial x} \\ u \frac{\partial Ca}{\partial x} &= (u+u') \left(\frac{\partial \bar{C}_a}{\partial x} + \frac{\partial Ca'}{\partial x} \right) \\ &= \bar{u} \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial Ca'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial x} + u' \frac{\partial Ca'}{\partial x} \end{aligned}$$

tomando el valor medio, o la media

$$\overline{u \frac{\partial Ca}{\partial x}} = \bar{u} \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial Ca'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial x} + u' \frac{\partial Ca'}{\partial x}$$

considerando las reglas antes vistas (por ejemplo $\overline{\bar{A} \bar{B}} = \bar{A} \bar{B}$), la expresión anterior resulta

$$\overline{u \frac{\partial Ca}{\partial x}} = \bar{u} \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial x} + u' \frac{\partial Ca'}{\partial x}$$

por otro lado

$$\frac{\partial (u' Ca')}{\partial x} = u' \frac{\partial Ca'}{\partial x} + Ca' \frac{\partial u'}{\partial x}$$

$$\text{entonces } u' \frac{\partial Ca'}{\partial x} = \frac{\partial (u' Ca')}{\partial x} - Ca' \frac{\partial u'}{\partial x}$$

sustituyendo en la expresión correspondiente

$$\overline{u \frac{\partial Ca}{\partial x}} = \bar{u} \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial x} + \overline{\frac{\partial (u' Ca')}{\partial x}} - \overline{Ca' \frac{\partial u'}{\partial x}} \quad (2.55)$$

similarmente para los otros términos, resultaría que

$$\overline{v \frac{\partial Ca}{\partial y}} = \bar{v} \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial y} + \overline{\frac{\partial (v' Ca')}{\partial y}} - \overline{Ca' \frac{\partial v'}{\partial y}} \quad (2.56)$$

$$\overline{w \frac{\partial Ca}{\partial z}} = \bar{w} \frac{\partial \bar{Ca}}{\partial z} + \frac{\partial(\overline{w'Ca'})}{\partial z} - Ca' \frac{\partial \overline{w'}}{\partial z} \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial^2 \overline{Ca}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{Ca}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \overline{Ca}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \bar{Ca}}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \overline{Ca}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \bar{Ca}}{\partial z^2} \quad (2.58)$$

sustituyendo en la ecuación (2.17)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{Ca}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{Ca}}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'Ca'})}{\partial x} - Ca' \frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{Ca}}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial(\overline{v'Ca'})}{\partial y} - Ca' \frac{\partial \overline{v'}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{Ca}}{\partial z} + \frac{\partial(\overline{w'Ca'})}{\partial z} - Ca' \frac{\partial \overline{w'}}{\partial z} = \\ & D_{ab} \left[\frac{\partial^2 \bar{Ca}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{Ca}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{Ca}}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

reordenando

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{Ca}}{\partial t} + \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{Ca}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{Ca}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{Ca}}{\partial z} \right] + \left[\frac{\partial(\overline{u'Ca'})}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial(\overline{v'Ca'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{w'Ca'})}{\partial z} \right] - Ca' \left(\frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'}}{\partial z} \right) = \\ & D_{ab} \left[\frac{\partial^2 \bar{Ca}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{Ca}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{Ca}}{\partial z^2} \right] \quad (2.59) \end{aligned}$$

Recordando que el flujo se ha considerado incompresible en la obtención de la ec.(2.17), es decir, $\nabla q = 0$, por lo que

$$\nabla q = \nabla (\bar{q} + q') = 0$$

y puesto que $\text{div } \bar{q} = 0$, entonces $\text{div } q' = 0$. Con esto, la ecuación (2.59)

quedaría

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial z} = - \left[\frac{\partial(\overline{u'Ca'})}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial(\overline{v'Ca'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{w'Ca'})}{\partial z} \right] + D_{ab} \left[\frac{\partial^2 \bar{C}_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}_a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}_a}{\partial z^2} \right] \quad (2.60) \end{aligned}$$

En la ecuación anterior, el valor medio de los términos cruzados $u'Ca'$, $v'Ca'$ y $w'Ca'$ representan los flujos de volumen por unidad de área de la sustancia A , debidos a la turbulencia del flujo. Al multiplicar dichos términos por la densidad media, nos resulta el flujo de masa de A por unidad de área.

$$\text{flujo turbulento de masa por unidad de área} = \rho(u'Ca')$$

Por analogía con la primera ley de Fick, se puede suponer que el flujo turbulento es proporcional al gradiente de concentración media, es decir :

$$\rho(\overline{u'Ca'}) = -\rho E_x \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial x}, \quad \rho(\overline{v'Ca'}) = -\rho E_y \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial y}; \quad y$$

$$\rho(\overline{w'Ca'}) = -\rho E_z \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial z}$$

donde E_x , E_y , E_z son los coeficientes de difusión turbulenta.

Al sustituir en la ecuación (2.60) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (E_x \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial x}) + \\ \frac{\partial}{\partial y} (E_y \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (E_z \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial z}) + D_{ab} \left[\frac{\partial^2 \bar{C}_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}_a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}_a}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

En casos prácticos, como el escurrimiento en ríos, el intercambio

macroscópico de partículas es más importante que el intercambio molecular, razón por la que es común despreciar el último término del segundo miembro de la ecuación anterior, quedando

$$\frac{\partial \bar{C}_a}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(E_x \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(E_y \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(E_z \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial z} \right) \quad (2.61)$$

Esta expresión es la forma más general de la ecuación de difusión turbulenta, donde se considera a los coeficientes variables respecto al espacio, cuya fundamentación teórica fué dada por Kolmogorov (1931,1933).

Si bien se puede pensar que debido a la forma de expresar la ecuación anterior se esté violando una de las restricciones del análisis de Taylor, es decir de turbulencia homogénea y estacionaria, en la práctica se ha verificado experimentalmente en diversos campos de flujo la existencia de procesos de gradiente de difusión, donde no se respetan estrictamente las restricciones del análisis de Taylor.

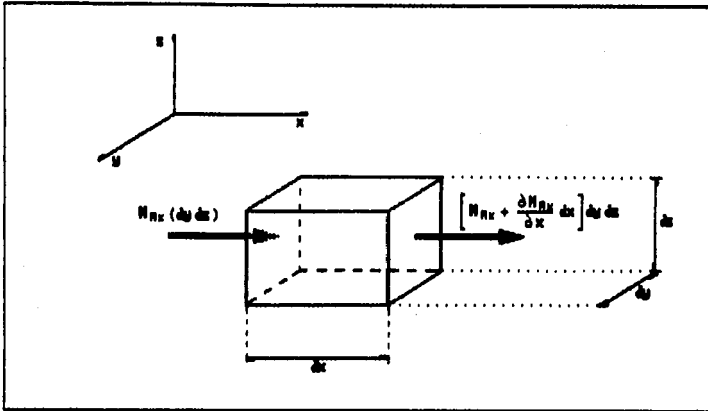


FIG. 2.1 Flujo de masa a través de un volumen de control diferencial

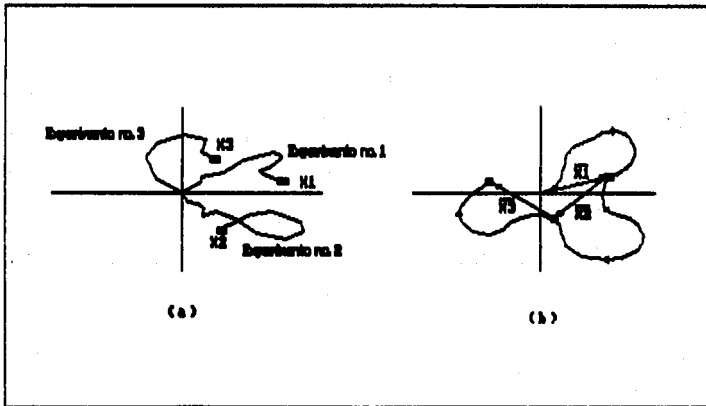


FIG. 2.2 a) Desplazamientos de tres partículas observadas para un tiempo t

b) Desplazamiento de una partícula para un tiempo $2t$
observando su trayectoria para cada tiempo igual a t

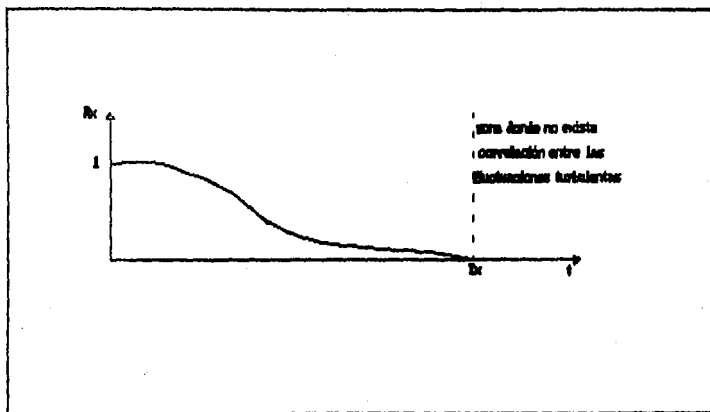


FIG. 2.3 Función de autocorrelación lagrangiana

3.- DISPERSION EN FLUJOS CORTANTES

En el capítulo anterior se establecieron las ecuaciones de difusión tanto para régimen laminar como turbulento. Mediante el análisis realizado por Taylor en 1921 de difusión por movimientos continuos, se mostró que es posible estudiar el mezclado en un flujo turbulento mediante la definición de un coeficiente de mezclado análogo al de difusión molecular, lo que significa precisamente que el mezclado debido a las fluctuaciones de velocidad temporales se puede expresar como un proceso de gradiente de difusión.

Desde el punto de vista práctico, la ec.(2.57) no es muy aplicable en el caso de mezclado en estuarios y ríos, donde es importante conocer las concentraciones medias ya sea respecto a la profundidad o transversalmente. Taylor al seguir analizando el fenómeno de dispersión de sustancias en un flujo, inicialmente en flujo laminar (1953) y después en flujo turbulento (1954), encontró que si se promedia espacialmente la ec.(2.57) en una o más direcciones, el mezclado debido a las variaciones espaciales de velocidad también se puede expresar como un proceso de gradiente de difusión.

Dicho proceso es descrito mediante un modelo unidimensional en el que la causa principal de la difusión del contaminante en la dirección del flujo es la no uniformidad del perfil de velocidades transversal en la sección, llamándose al fenómeno **dispersión en flujos cortantes**.

En este capítulo se presentan los fundamentos de dispersión en flujos cortantes así como su aplicación al mezclado en ríos, siguiendo el enfoque desarrollado por Fischer en 1967.

3.1.- Dispersión en un flujo laminar

El análisis efectuado por Taylor en 1953 sobre el mezclado de partículas en una tubería en régimen laminar es similar al que realizó en 1921, de difusión por movimientos continuos, es decir, adopta un sistema coordinado moviéndose con la velocidad media del flujo de tal manera que la velocidad longitudinal de las partículas pueda tomarse como una función estacionaria en el tiempo, llegando a establecer que la dispersión longitudinal de un grupo de partículas descargadas en una sección $x=0$, tendrá un comportamiento similar a un proceso de gradiente de difusión, después de que ha pasado un tiempo considerable desde su descarga en el flujo.

Los argumentos e ideas de este análisis según Taylor, son los siguientes : Si en un flujo laminar en una tubería con distribución de velocidades transversal como la mostrada en la fig.3.1, se observa el movimiento de dos partículas localizadas una al centro de la tubería y la otra cerca de la pared, la separación entre ellas causada por la diferencia de velocidades será mucho mayor que la originada por el movimiento molecular. Asimismo, cualquier molécula tenderá a viajar aleatoriamente en todo lo ancho de la sección debido a la difusión molecular, después de que ha pasado bastante tiempo de que fué descargada.

Lo anterior trae como consecuencia que, por un lado, al promediar la velocidad de cualquier partícula respecto al tiempo, ésta deberá ser igual al promedio transversal instantáneo de las velocidades de todas las partículas, y por otro, en algún punto la velocidad de la partícula será independiente de su velocidad inicial, lo cual es similar al análisis de difusión por movimientos continuos.

Siguiendo Taylor con las ideas antes mencionadas, llegó a determinar un coeficiente de dispersión longitudinal, análogo al de difusión molecular, para el gradiente de la concentración media transversal en una tubería. El desarrollo se muestra a continuación .

Considere un flujo bidimensional como el mostrado en la fig.3.2, el cual fluye entre dos placas paralelas separadas por una distancia h , donde las líneas de flujo son igualmente paralelas a las paredes. La distribución de velocidades está dada por la función $u(y)$ y la velocidad media es \bar{u} .

Al realizar un análisis similar al efectuado en la obtención de la ecuación de la difusión turbulenta, se tiene que sin importar el tipo de distribución de velocidades, la velocidad media está dada por

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u \, dy \quad (3.1)$$

y la desviación de la velocidad respecto a la media transversal será

$$u'(y) = u(y) - \bar{u} \quad (3.2)$$

donde la sobrebarra denota la media transversal. Al transportar el flujo un soluto con una concentración $C(x,t)$ y coeficiente de difusión molecular D , la concentración media transversal en cualquier sección es igual a

$$\bar{C} = \frac{1}{h} \int_0^h C \, dy \quad (3.3)$$

y como en el caso de la velocidad, la desviación de la concentración respecto a la media resulta ser

$$C'(y) = C(y) - \bar{C} \quad (3.4)$$

Al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación de difusión unidimensional (ya que el flujo ocurre solamente en la dirección x), se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{C} + C') + (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{C} + C') =$$

$$D \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{C} + C') + \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2} \right] \quad (3.5)$$

Al adoptar un sistema coordenado moviéndose con la velocidad media, es decir con el cambio de variables

$$\xi = x - \bar{u}t, \quad \tau = t \quad (3.6)$$

y haciendo uso de la regla de la cadena,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3.7a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} = -\bar{u} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (3.7b)$$

la ecuación (3.5) se transforma entonces en

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\bar{C} + C') + u' \frac{\partial}{\partial \xi} (C' + \bar{C}) =$$

$$D \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\bar{C} + C') + \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2} \right] \quad (3.8)$$

Una de las ideas de Taylor expuestas anteriormente, es que la dispersión en la dirección del flujo debida al perfil de velocidades es mucho mayor que la causada por difusión molecular, de aquí que se puede despreciar el primer término del segundo miembro de la ecuación anterior, teniéndose que

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} + \frac{\partial C'}{\partial \tau} + u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} + u' \frac{\partial C'}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2} \quad (3.9)$$

La limitante de la ecuación (3.9) es que al variar u' con y , se tiene una ecuación diferencial parcial con coeficientes variables siendo muy difícil

de manejar con los métodos disponibles actualmente. Al respecto, Taylor haciendo gala de una brillantez admirable, encontró la solución a dicha ecuación al despreciar tres de sus primeros cuatro términos de la ecuación, incluyendo el término $\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau}$ el cual expresa el grado de decaimiento de la concentración y siendo ésto justamente lo que interesa determinar.

Con lo anterior, la ecuación (3.9) quedaría

$$u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2}, \text{ con } \frac{\partial C'}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0, h \quad (3.10)$$

La solución para $C'(y)$ se puede obtener mediante la integración de la ecuación (3.10), sin embargo antes de presentar dicha solución conviene mencionar los argumentos de Taylor para justificar el haber simplificado la ec.(3.9) y así entender mejor su análisis.

Básicamente, el problema tiene que ver con el orden de magnitud de los términos de la ecuación. Al aplicar el operador $1/h \int_0^h ()$ a cada miembro de la ec.(3.9), se tiene

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} + u' \overline{\frac{\partial C'}{\partial \xi}} = 0 \quad (3.11)$$

donde la sobrerbarra indica el promedio transversal de todo el término. Restando (3.11) de (3.9) resulta

$$\frac{\partial C'}{\partial \tau} + u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} + u' \frac{\partial C'}{\partial \xi} - u' \overline{\frac{\partial C'}{\partial \xi}} = D \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2} \quad (3.12)$$

La primera hipótesis de Taylor fué que si C' y \bar{C} son funciones que varían suavemente, donde \bar{C} es mucho mayor que C' , entonces

$$u' \frac{\partial C'}{\partial \xi} \cong u' \overline{\frac{\partial C'}{\partial \xi}}$$

con lo que la ec. (3.12) quedaría

$$\frac{\partial C'}{\partial \tau} - D \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2} = -u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \quad (3.13)$$

Taylor reconoció a la expresión anterior como una simple ecuación de difusión unidimensional, en la que el término $-u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi}$ juega el papel de término fuente de intensidad variable, cuya contribución neta en todo lo ancho de la sección es cero (ya que $\bar{u}' = 0$).

Finalmente, si después de un tiempo bastante grande la fuente puede considerarse constante, el término $\frac{\partial C}{\partial \xi}$ se mantendrá igualmente constante teniéndose un estado uniforme (en el sistema de coordenadas móvil), de tal manera que $\frac{\partial C}{\partial \tau}$ es igual a cero. De aquí, la ecuación (3.13) se reduce a

$$u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2} \quad (3.14)$$

siendo justamente esta expresión igual a la ec. (3.10), justificando con ello la simplificación efectuada a la ec. (3.9).

Volviendo al análisis de Taylor, la solución de la ecuación (3.9) resulta ser

$$C'(y) = \frac{1}{D} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \int_0^y \int_0^y u' dy dy + C(0) \quad (3.15)$$

la cual implica según dicho investigador, la existencia de un balance entre el transporte convectivo longitudinal y el transporte difusivo transversal, ver fig.3.3.

Ahora bien, el transporte total de masa en la dirección transversal estará dado por la integración del producto $u'(y) C'(y)$, es decir

$$\dot{M} = \int_0^h u' C' dy = \frac{1}{D} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \int_0^h u' \int_0^y \int_0^y u' dy dy dy \quad (3.16)$$

donde el término $\int_0^h u' \{C'(0)\} dy = 0$, ya que $\int_0^h u' dy = 0$.

La ecuación (3.16) señala que el transporte total de masa en la dirección transversal es proporcional al gradiente de la concentración media en esa dirección, lo cual es precisamente la definición de un proceso de gradiente de difusión.

Con base en este resultado tan importante, y considerando la analogía con el coeficiente de difusión molecular, se puede definir un coeficiente de transporte de masa o coeficiente de dispersión mediante la ecuación

$$\dot{M} = h K \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \quad (3.17)$$

donde h , la profundidad, es el área por unidad de ancho del flujo.

Al igualar las ecs. (3.16) y (3.17) se tiene

$$K = - \frac{1}{h D} \int_0^h u' \int_0^y \int_0^y u' dy dy dy \quad (3.18)$$

siendo K un coeficiente de dispersión, el cual expresa la propiedad difusiva de la distribución de velocidades y es conocido generalmente como coeficiente de dispersión longitudinal.

De lo anterior, se puede escribir la ecuación de difusión unidimensional promediada transversalmente, para el sistema coordenado moviéndose con la velocidad media del flujo, como

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} = K \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} \quad (3.19)$$

Al volver a un sistema de referencia fijo, la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = K \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} \quad (3.20)$$

Esta ecuación es conocida como la **ecuación de dispersión unidimensional**, utilizada ampliamente en el análisis de la dispersión en ríos y estuarios.

Por último, se recordará que cuando en el capítulo 2 se mostró el análisis de difusión por movimientos continuos y se llegó a definir un coeficiente de mezclado turbulento análogo al de difusión molecular, se establecieron las condiciones en que la ecuación de la difusión turbulenta es válida. En la presentación de la ec.(3.20) sucede lo mismo, es decir, es necesario definir las condiciones para cuando dicha ecuación es válida.

Anteriormente se hizo mención, de acuerdo con Taylor, de la existencia de un balance entre el transporte convectivo y difusivo, expresado éste por la ec.(3.15) y que además dicho balance ocurre cuando ha pasado un tiempo suficientemente grande después de que la masa de partículas ha sido descargada. Chatwin (1970) mediante el uso del análisis dimensional y la realización de una serie de experimentos, identificó un **periodo difusivo** en el que las hipótesis de Taylor se cumplen.

Según Chatwin, la ecuación (3.20) es válida para tiempos mayores que $\frac{h^2}{D}$, aunque de acuerdo con Fischer *et al* (1979) es razonable considerar un tiempo $t > 0.4 \frac{h^2}{D}$, ya que para esta condición si bien no cumple exactamente con las restricciones del análisis de Taylor, sí se tiene una buena aproximación del problema (en este período ya la nube de contaminante crece linealmente con el tiempo).

3.2.- Dispersión en un flujo turbulento

Un año después de haber publicado el análisis de dispersión en un flujo laminar en una tubería, Taylor (1954) hizo la extensión a los flujos turbulentos. Es decir, llegó a establecer que es posible analizar la dispersión en un flujo turbulento mediante la ecuación de dispersión unidimensional bajo las restricciones ya señaladas, donde la variante es justamente el coeficiente de dispersión K .

Las diferencias fundamentales entre los dos tipos de análisis es que para los flujos turbulentos consideró una ley empírica de distribución de velocidades logarítmica y la variación espacial del coeficiente turbulento transversal $\epsilon(y)$.

De acuerdo con el análisis de flujo unidimensional turbulento en una tubería, las ecuaciones (3.10) y (3.18) resultan ser

$$u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial y} \epsilon(y) \frac{\partial C'}{\partial y} \quad (3.21)$$

$$K = - \frac{1}{h} \int_0^h u' \int_0^y \frac{1}{\epsilon} \int_0^y u' dy dy dy \quad (3.22)$$

Para resolver las ecuaciones anteriores es necesario conocer la distribución de velocidades y el coeficiente de mezclado transversal ϵ . Según Taylor, todos los flujos turbulentos en tuberías tienen un perfil de velocidades del tipo

$$u = u_0 - \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} f(z) = u_0 - u^* f(z) \quad (3.23)$$

donde τ_0 es el esfuerzo cortante en la pared del tubo, $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u^*$ es la velocidad al cortante y $f(z)$ es una función empírica.

Utilizando la analogía de Reynolds (1874), quien postuló que los mecanismos de transferencia de energía y momento son idénticos bajo ciertas condiciones; al aplicarse al caso de la transferencia de masa, los coeficientes de mezclado de momento y de masa son iguales. Con esto, el flujo de momento a través de la superficie equivalente al flujo de masa q es el esfuerzo cortante en la superficie dividido entre la densidad del fluido.

Al realizar un balance de fuerzas en cualquier distancia r del centro de la tubería de radio a , el esfuerzo cortante en cada punto estará dado por $\tau(r) = (r/a)\tau_0$. De aquí se tiene que

$$c = \frac{q}{\frac{\partial C}{\partial r}} = \frac{\tau}{-\rho \frac{\partial u}{\partial r}} = \frac{a Z}{d f} u^* \quad (3.24)$$

Expresando en coordenadas radiales la ec.(3.21)

$$u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} = \epsilon \left[\frac{\partial^2 C'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C'}{\partial r} \right] \quad (3.25)$$

Si se tabula $u'(r) = u(r) - \bar{u}$ y $\epsilon(r)$, se obtiene la solución para $C'(r)$ al integrar numéricamente la ec.(3.25). Taylor al resolver (3.25) y (3.22) encontró que el coeficiente de dispersión de dispersión para flujos turbulentos en conductos a presión, es igual a

$$K = 10.1 a u^* \quad (3.26)$$

Como se ha podido observar, el resultado final del análisis de Taylor ha sido justamente el cálculo de K , después de haber establecido que el estudio de la dispersión de contaminantes, se puede realizar mediante la ecuación de dispersión unidimensional.

Lo anterior hace resaltar la gran importancia que tiene el conocer de antemano dicho coeficiente para solucionar adecuadamente la ecuación de dispersión, lo que ha originado la realización de numerosas investigaciones, tendientes a definir por diferentes métodos el valor del coeficiente K .

Tal es el caso de Elder (1959), el cual hizo la extensión del análisis de Taylor para flujos a superficie libre. Dicho investigador asume un flujo en un canal infinitamente ancho, donde la distribución vertical de la velocidad longitudinal está dada por el perfil de velocidades de Von Karman

$$u' = \left(\frac{u^*}{k} \right) \left(1 + \ln y' \right) \quad (3.27)$$

siendo k la constante de Von Karman igual a 0.4 y $y' = y/d$, donde d es el tirante y y es una distancia vertical. Al hacer un balance de fuerzas similar al de la tubería (ec.3.24), encontró que el coeficiente de mezclado c resulta ser igual a

$$c = k y' (1 - y') d u^* \quad (3.28)$$

Elder al sustituir (3.28) y (3.27) en (3.22), y realizando las integrales correspondientes, determinó el siguiente valor del coeficiente de dispersión

$$K = 5.93 d u^* \quad (3.29)$$

En forma general, el coeficiente de dispersión longitudinal en flujos unidireccionales turbulentos expresado por la ec.(3.22) se puede plantear, al introducir en dicha ecuación las variables adimensionales $y' = y/h$; $u' = u' / \sqrt{u'^2}$ y $c' = c/E$ siendo E el promedio en la sección transversal y $\sqrt{u'^2}$ la intensidad de la desviación de la velocidad, como (Fischer et al, 1979):

$$K = \frac{h^2 \overline{u'^2}}{E} I \quad (3.30)$$

donde I es la integral adimensional definida por:

$$I = - \int_0^1 u'' \int_0^{y'} \frac{1}{\varepsilon'} \int_0^{y'} u'' dy' dy' dy' \quad (3.31)$$

Finalmente, mediante analogía con el resultado de Chatwin para difusión

molecular, el tiempo para el cual se tiene un proceso de gradiente de difusión siendo válidas las ecuaciones (3.20) y (3.29), debe ser mayor que

$$T_1 = 0.4 \frac{d^2}{e_y} \quad (3.32)$$

donde d es el tirante del flujo y e_y el coeficiente de mezclado vertical igual a $(k/6)(du^*)$. Existen varias fórmulas del tipo de la ecuación (3.29); sin embargo, tienen el inconveniente de que como ésta, son aplicables solamente a canales (Acosta, 1986).

En la sección siguiente se mencionará la formulación e ideas de Fischer (1967), y se presentará una expresión semejante a (3.22) aplicable al caso que nos ocupa, es decir, a la dispersión en ríos.

3.3.- Dispersión longitudinal en ríos

El proceso de dilución o mezclado en ríos se divide básicamente en tres etapas. En la primera de ellas el grado de dilución depende de los efectos provocados en la zona de descarga, es decir, de la magnitud y características del chorro descargado. Después, en una segunda etapa, el contaminante es mezclado transversalmente debido a la turbulencia del escurrimiento para que finalmente, se tenga la última etapa donde las variaciones de concentración en la dirección del flujo tienden a disminuir por efectos de la dispersión longitudinal. Es justamente en esta etapa donde Fischer (1967) aplicó la teoría de Taylor para obtener una expresión para el cálculo del coeficiente de dispersión longitudinal K en corrientes naturales. Enseguida se comentan las ideas de Fischer y el desarrollo condensado de su análisis.

3.3.1.- Derivación teórica del coeficiente de dispersión longitudinal

Al observarse que la ecuación propuesta por Elder (ec.3.29) subestima los valores del coeficiente de dispersión medidos en corrientes naturales, ver

por ejemplo Godfrey y Frederick (1970), Fischer argumenta que mientras en el caso analizado por Elder la dispersión se debe a las variaciones de la velocidad entre la superficie del agua y la plantilla del canal, en una corriente natural la causa principal de dicha dispersión se debe a las diferencias de velocidad en el sentido transversal (ancho del cauce) a la dirección del flujo.

Realizando un desarrollo similar al de Taylor (sección 3.1), Fischer establece la existencia de un balance entre la convección diferencial longitudinal y la difusión transversal promediada con respecto al tirante. En este caso, considerando un volumen de control como el mostrado en la fig.3.4, el balance o equilibrio está dado por la expresión

$$\int_0^y u'(y) d(y) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} dy = d \epsilon_t \frac{\partial C'}{\partial y} \quad (3.33)$$

donde $u'(y)$ es la desviación local de la velocidad promediada con el tirante, respecto de la velocidad media transversal, $C'(y)$ se define en forma similar a $u'(y)$ y d es el tirante.

Al integrar la ec.(3.33) se obtiene la solución para $C'(y)$, con la que el flujo total de contaminante en todo lo ancho de la sección resulta de la integración del producto $u'(y)C'(y)$; es decir

$$C'(y) = \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \int_0^y \frac{1}{d \epsilon_t} \int_0^y u'(y) d(y) dy dy$$

y el flujo total de contaminante sería

$$\dot{M} = \int_0^W u'(y) c'(y) = \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \int_0^W u'(y) \int_0^y \frac{1}{d \epsilon_t} \int_0^y u'(y) d(y) dy dy$$

Al utilizar la ecuación (3.17) y al compararla con la expresión anterior se tiene:

$$K = - \frac{1}{A \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}} \int_A u' C' dA =$$

$$- \frac{1}{A} \int_0^w u' d \int_0^y \frac{1}{c_t d} \int_0^y u' d dy dy dy \quad (3.34)$$

en la que w es el ancho de la sección, $c_t = 0.23 d u^*$ (Elder, 1959) y d es el tirante.

Según Fischer, la ec.(3.34) sirve para predecir coeficientes de dispersión para corrientes con relaciones w/d grandes (mayores a 6) y solamente se requiere conocer la geometría del canal, la distribución de velocidades transversal, u' , y la velocidad al cortante u^* .

Finalmente, Fischer establece al igual que Taylor y Elder, que la ecuación de dispersión unidimensional es válida después de un periodo inicial convectivo, siendo el mezclado transversal el factor predominante. Así, determina que dicho periodo, en términos de la distancia medida a partir de la descarga, es igual a

$$L > 1.8 \frac{l^2}{R} \frac{\bar{u}}{u^*} \quad (3.35)$$

siendo L la distancia medida a partir de la descarga, R el radio hidráulico y l es una longitud característica definida como la distancia entre la zona de máxima velocidad y el banco más alejado en la sección .

En resumen, se puede decir que el factor común entre los análisis de Taylor, Elder y de Fischer, es la suposición de la existencia de un gradiente de difusión de mezclado debido a las desviaciones de velocidad respecto del valor medio (en el espacio o en el tiempo), y cuyo resultado proporciona el uso de la ecuación de dispersión unidimensional para simular el comportamiento de contaminantes, bajo ciertas restricciones.

Finalmente, debido a que la aplicación de la ec.(3.34) en corrientes naturales representa prácticamente un trabajo muy laborioso y engorroso de realizar (desde la captura de los datos necesarios como es la distribución transversal de velocidades, hasta la solución de la ecuación), con el fin de calcular en forma simple y rápida el coeficiente de dispersión K , se han propuesto varios métodos que están en función de las propiedades hidráulicas y geométricas de los ríos. En el siguiente capítulo se describen algunos de los métodos que reúnen dichas características.

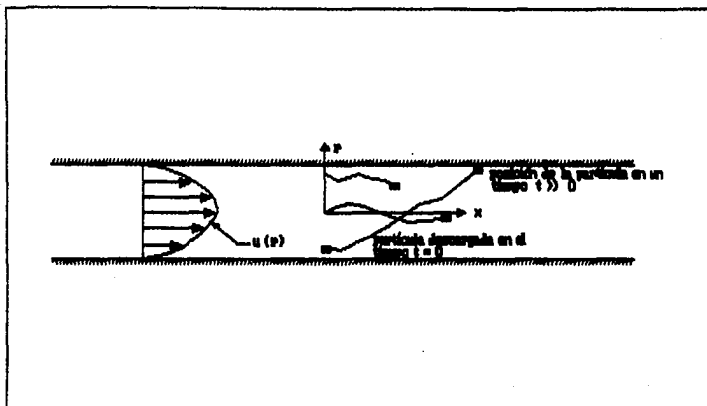


FIG.3.1 Distribución de velocidades transversal de un flujo laminar en una tubería. Fundamentos del análisis de Taylor

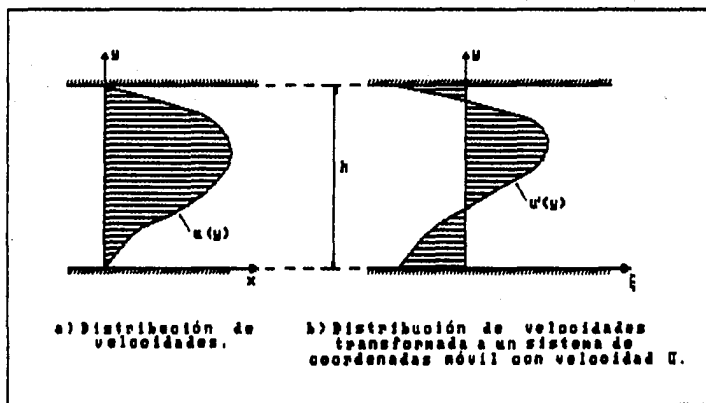


FIG. 3.2 Flujo bidimensional considerado por Taylor

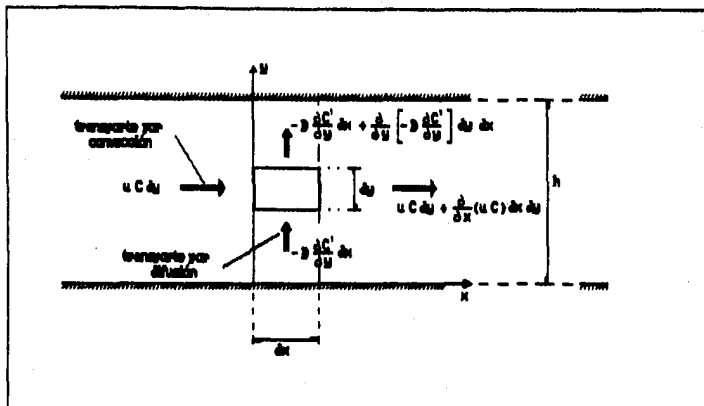


FIG. 3.3 Representación del balance de la ecuación (3.10) entre el transporte convectivo longitudinal y el transporte difusivo transversal

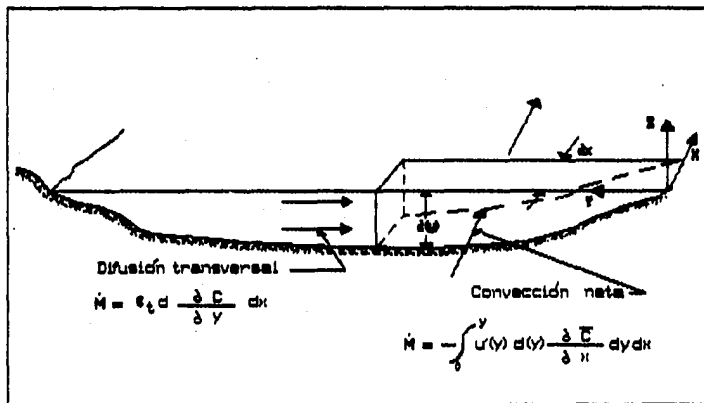


FIG. 3.4 Representación del balance de la ecuación (3.31) entre el transporte convectivo y el transporte difusivo transversal

4.- MÉTODOS PARA CALCULAR EL COEFICIENTE DE DISPERSIÓN LONGITUDINAL

En la sección anterior se formuló la ecuación de dispersión unidimensional (ec.3.20), dentro del contexto de dispersión en flujos cortantes, tanto en flujos laminares como turbulentos y se presentó además; la aplicación de dicha ecuación al caso de mezclado en ríos. En este último, Fischer llegó a proponer la ecuación (3.34) para calcular el coeficiente de dispersión longitudinal K , cuyo empleo no resulta tan simple desde el punto de vista práctico. Al respecto, se han propuesto varios métodos de aplicación más fácil que están en función de las propiedades geométricas e hidráulicas de la corriente.

En este capítulo, además de mostrar algunos métodos reportados en la literatura, se llega a proponer un nuevo método de características similares a los existentes, con la salvedad de que proporciona mejores resultados.

La importancia que encierra el coeficiente K no se debe menospreciar o pasar por alto. El resultado final tanto de Taylor y Elder como de Fischer, condujo justamente al establecimiento de una ecuación para determinar el valor de K en cada uno de sus análisis .

Antes de presentar los métodos que existen para evaluar el coeficiente de dispersión en corrientes naturales, y con la idea de entender el significado físico que representa una buena estimación de dicho coeficiente, se hará un experimento para ver cómo influye en la predicción de las concentraciones.

4.1.- Análisis del coeficiente de dispersión

Mientras que la manera de solucionar la ecuación (3.20) es un problema

netamente numérico, la estimación del coeficiente de dispersión tiene mucho que ver con el problema físico.

La teoría de dispersión permite predecir el comportamiento del contaminante aguas abajo, conociendo la distribución de la concentración de dicho contaminante en una sección aguas arriba.

En particular interesa conocer el tiempo que tarda en pasar la nube de contaminante y el valor de la concentración máxima. El predecir con buena aproximación dichos valores, dependerá mucho del valor del coeficiente K, ya que según Fischer (1968), un coeficiente de dispersión obtenido por cualquier método que no prediga correctamente los valores anteriores, no es de uso práctico.

Con el fin de ver justamente la influencia del coeficiente de dispersión en los valores antes mencionados, se hará el siguiente experimento:

Considere un río cuyas características geométricas e hidráulicas más importantes son :

Ancho del cauce.-	$W = 50 \text{ m}$
Pendiente del cauce.-	$s = .0002$
Radio Hidráulico.-	$R = 1.4 \text{ m}$
Velocidad media.-	$u = 1.5 \text{ m/s}$
Velocidad al cortante.-	$u^* = .052 \text{ m/s}$
Gasto	$Q = 105 \text{ m}^3/\text{s}$

el cual se encuentra sujeto a una condición de descarga variada en el tiempo, con la ley siguiente:

Conc.	Tiempo(s)
0.0	0
0.2	60
0.6	120
0.8	180
1.0	240
0.7	300
0.4	360
0.0	420

y que para efectos de aplicación de la ec.(3.20), el contaminante ya se ha mezclado completamente en todo lo ancho del río, de tal manera que los valores de la tabla anterior se tomarán como la condición inicial del problema ($x = 0$). Por último, el tramo bajo estudio tendrá una longitud de 5 Km. y el tiempo de simulación será de 90 minutos.

Básicamente el experimento consiste en suponer un coeficiente de dispersión, el cual es considerado como el *correcto*, y resolver la ec.(3.20). Enseguida se proporcionan otros valores de K , uno mayor al *correcto* y otro menor, y resolver de nuevo la ecuación en cada caso.

En este experimento se tomó como valor *correcto* $K=300$ m²/s, $K_{sup.}=5K_{corr.}=1500$ m²/s y $K_{inf.}=K_{corr.}/5=60$ m²/s. Para resolver la ecuación de dispersión unidimensional, ecuación (3.20), se utilizó un programa desarrollado por León V.(1990).

De los resultados obtenidos, en primer lugar, para comparar las concentraciones máximas (pico) para los tres valores del coeficiente de dispersión, se generó la figura 4.1 donde se muestran los valores de las concentraciones máximas, para todo el tramo del río en estudio.

De esta figura se pueden hacer las siguientes observaciones :

- 1) Existe un defasamiento en el valor de la concentración a lo largo del escurrimiento, siendo esto más notable para $K=60$ m²/s.
- 2) Mientras K crece, el decaimiento de la concentración es mayor, es decir, se tiene claramente el efecto de una dispersión más rápida.
- 3) Si quisiéramos comparar las concentraciones con algún criterio de calidad del agua, por ejemplo que en la sección a 2000 m la concentración máxima permisible fuera igual a 0.2, para $K=60$ m²/s se ve que el valor de la concentración está por arriba de $C=0.2$ y para los otros valores de K se tienen concentraciones ligeramente por debajo de la permisible.

Pareciera que para un valor mayor que el *correcto* de K , no se tiene un efecto importante en el valor de la concentración; sin embargo, existe diferencia, como se demuestra a continuación.

Para aclarar la tercera observación, se dibujaron las concentraciones máximas contra los valores de los tiempos para los cuales dichas concentraciones se presentaron, figura 4.2.

De-esta figura se observa que existe un efecto de defasamiento en el tiempo, similar a lo que ocurre en la figura 4.1, y que si bien para $K=300$ m²/s y $K=1500$ m²/s los valores de la concentración máxima para la sección $x=2000$ m son parecidos, para la K mayor existe una evolución de la dispersión más rápida en el tiempo.

Por otro lado, para mostrar la influencia del coeficiente de dispersión en el paso de la nube del contaminante para una determinada sección, se presenta la figura 4.3 donde se muestra la variación de la concentración respecto al tiempo, para la sección $x=2000$ m. En este caso, el tiempo total que tarda en pasar el contaminante es mayor a medida que el valor del coeficiente K crece, y recordando que el valor correcto es $K=300$ m²/s, se comete más error en la predicción de las concentraciones cuando se subestima dicho valor.

Con lo anterior, queda bien ilustrada la importancia que tiene una correcta estimación del coeficiente de dispersión al tratar de predecir el transporte de contaminantes.

Es importante mencionar que en este experimento se tomó un factor de 5 veces el valor correcto de K , y sin embargo al emplear algún método existente para su estimación, se pueden cometer fácilmente errores aún mayores de 5 veces el valor, e incluso de varios órdenes de magnitud.

4.2.- Cálculo del coeficiente de dispersión en corrientes naturales

El cálculo de la dispersión mediante la ecuación de dispersión unidimensional (ec.3.20) ha sido motivo de discusión en cuanto a la validez de su aplicación en corrientes naturales (ver por ejemplo Beltaos S., 1980, Liu H. y Cheng A., 1980, Nordin F. y Sabol V., 1974).

Debido a que los ríos son en general de geometría irregular, tienen tramos curvos, zonas muertas, etc., diversos investigadores señalan que difícilmente se cumplen las condiciones para las que la ecuación de dispersión es aplicable. Es decir, las características del modelo Fickiano de dispersión difieren de lo que se ha observado en varios ríos.

Nordin y Sabol (1974), al analizar los resultados de 49 estudios de dispersión en ríos y en dos canales concluyen que la teoría Fickiana no describe adecuadamente la dispersión longitudinal en muchos ríos. Las principales diferencias que encontraron fueron:

- 1) La distribución de las concentraciones son sesgadas con descensos prolongados y valores pequeños de concentración y según la teoría Fickiana se debe tener distribución Gaussiana.
- 2) La varianza de las concentraciones, como una medida de dispersión, se incrementa más rápido que linealmente con el tiempo.
- 3) Las concentraciones máximas se atenúan más rápido que inversamente proporcional a la raíz cuadrada del tiempo.

La explicación que se puede dar a lo señalado anteriormente es que definitivamente el rango de los estudios realizados difícilmente alcanzaron el periodo final de equilibrio donde la varianza crece linealmente con el tiempo (Valentine y Wood, 1977), como lo establece la teoría de Taylor (ec.3.15) y el desarrollo de Fischer para el caso de corrientes naturales (ec.3.33).

Sin embargo, aún con los inconvenientes señalados anteriormente, la ecuación de dispersión describe aproximadamente la evolución de los contaminantes en ríos, siempre que se haga una buena estimación del coeficiente de dispersión.

Con respecto a la estimación del coeficiente de dispersión longitudinal K , éste se puede realizar mediante técnicas de trazado en campo. Generalmente los métodos empleados para obtener los valores observados de K son el método

de cambio de momento (Fischer, 1966b) y el método de ruteo (Fischer, 1968).

En el primero, la ecuación que se utiliza resulta realizando el siguiente procedimiento: suponga que se descarga una cantidad de trazador en un río donde interesa observar la distribución de la concentración del trazador en el tiempo. Al adoptar un sistema de referencia moviéndose con la velocidad media del flujo, la ecuación (3.20) se simplifica a

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por x_1^2 e integrando respecto de x_1 desde $-\infty$ a ∞ resulta que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} K x_1^2 \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} dx_1 \quad (4.2)$$

Si se cambia el orden de diferenciación y de integración del miembro izquierdo de la ecuación (4.2) se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} dx_1 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \bar{C} dx_1 \quad (4.3)$$

y al integrar por partes dos veces el miembro del lado derecho resulta

$$K \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} dx_1 = 2K \int_{-\infty}^{\infty} \bar{C} dx_1 = 2KM \quad (4.4)$$

donde M es la cantidad total del trazador. Sustituyendo (4.3) y (4.4) en (4.2) se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \bar{C} dx_1 = 2KM$$

Debido a que M es constante

$$K = \frac{1}{2M} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \bar{C} dx_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \bar{C} dx_1}{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{C} dx_1} \right)$$

Ahora

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \bar{C} dx_1}{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{C} dx_1} = \sigma_x^2, \text{ es la varianza o segundo momento de la distribución}$$

de manera que al sustituir en la expresión correspondiente resulta

$$K = \frac{1}{2} \frac{d(\sigma_x^2)}{dt}$$

Si K se considera constante, dicho coeficiente se puede calcular midiendo σ_x^2 de dos distribuciones de concentración en diferentes tiempos, al ir viajando con la velocidad media del flujo. De aquí que

$$K = \frac{1}{2} \frac{\Delta(\sigma_x^2)}{\Delta t} \quad (4.5)$$

Sin embargo debido a que el realizar lo anterior resulta prácticamente imposible, es más factible medir la distribución de la concentración como una función del tiempo en dos secciones fijas. Dado que la razón de cambio de la concentración respecto al tiempo es pequeña, esto es $\partial\bar{C}/\partial t$ tiende a 0, dicha distribución temporal será aproximadamente igual a la distribución espacial, con lo que la varianza de las dos distribuciones se pueden relacionar mediante la expresión:

$$\sigma_x^2 = u^2 \sigma_t^2$$

al sustituir dicha ecuación en (4.5) se tiene

$$K = \frac{1}{2} u^2 \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\bar{t}_2 - \bar{t}_1} \quad (4.6)$$

donde u es la velocidad media del flujo, σ_1^2 y σ_2^2 son las varianzas de las curvas de concentración respecto al tiempo en las secciones aguas arriba y aguas abajo respectivamente, y \bar{t}_1 y \bar{t}_2 son los tiempos medios de paso del contaminante por cada sección.

El inconveniente de este método es que cuando se tienen curvas de concentraciones con descensos extendidos, es decir, variaciones pequeñas de

concentración en tiempos largos, el cálculo de la varianza se hace muy difícil.

El método de Ruteo es un procedimiento de integración basado en la teoría de difusión y consiste básicamente en suponer un coeficiente de dispersión y utilizar como dato la curva de concentraciones contra el tiempo de una sección aguas arriba y predecir la curva de concentraciones aguas abajo.

Si dicha curva no es aproximada a la observada, se selecciona otro valor de K y se repite el procedimiento hasta tener buenos resultados entre la curva calculada y la observada.

Matemáticamente, el procedimiento es el siguiente : Si en un tiempo $t=t_0$ se conoce una distribución inicial de trazador $C_0(\xi, t_0)$ donde ξ varía desde $-\infty$ a ∞ , la masa total M del trazador será igual a

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} C_0(\xi, t_0) d\xi$$

y al considerar la ecuación (2.21) la concentración de dicho trazador para un tiempo después, será igual a:

$$C(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_0(\xi', t_0) \frac{\exp\left[-\frac{(\xi-\xi')^2}{4K(t-t_0)}\right]}{(4\pi K(t-t_0))^{1/2}} d\xi' \quad (4.7)$$

Mediante la transformación de los datos de concentraciones-tiempos a concentraciones-distancia con la expresión

$$C(\xi, t) = C(X_0, t) \quad (4.8)$$

donde $\xi = u(t_0-t)$ y realizando un cambio de variables, la predicción de las concentraciones en la estación X_1 estará dada por la ecuación:

$$C(X_1, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_0(X_0, \tau) \frac{\exp\left[-\frac{(u(\bar{t}_1 - \bar{t}_0 - t + \tau))^2}{4K(t_1 - t_0)}\right]}{(4\pi K(\bar{t}_1 - \bar{t}_0))^{1/2}} u \, d\tau \quad (4.9)$$

donde : \bar{t}_0 y \bar{t}_1 son los tiempos medios de paso de la nube del contaminante en las secciones X_0 y X_1 respectivamente, u la velocidad media del flujo, K el coeficiente de dispersión longitudinal y t es el tiempo.

Debido a que el coeficiente de dispersión obtenido por este método es por definición el que teóricamente da una mejor comparación entre los valores calculados y los observados de las concentraciones, dicho valor es, en un sentido objetivo, el *mejor* coeficiente de dispersión.

El problema de utilizar cualesquiera de los métodos anteriores, es que se dependerá de la disponibilidad que se tenga tanto de personal calificado como del equipo para realizar el estudio de trazado, ya que se requiere de un gran esfuerzo de trabajo de campo y de laboratorio.

Por otro lado, si bien existen mediciones reportadas de coeficientes de dispersión en corrientes naturales (Godfrey 1970), es imposible extrapolar estos valores a otros ríos debido a la gran variabilidad de éstos.

Con el fin de contar con un método que prediga con buena aproximación coeficientes de dispersión y que sea sencillo de aplicar, se han propuesto varios métodos que están en función de las propiedades geométricas e hidráulicas de los ríos. En esta sección además de presentar algunos de ellos, se propone un nuevo método de características similares a los que se van a describir, con la salvedad de que sus resultados son más consistentes.

4.2.1.- Método de McQuivey y Keefer

Con la idea de poder contar con un método simple para la obtención de

coeficientes de dispersión, McQuivey y Keefer (1974) proponen una ecuación en función de las propiedades geométricas e hidráulicas del cauce.

Los fundamentos del método parten de hacer una analogía entre la dispersión de una onda y la dispersión de un contaminante. Las ecuaciones utilizadas en el análisis , y que pueden compararse entre sí son la de flujo unidimensional

$$\frac{\partial q}{\partial t} + C \frac{\partial q}{\partial X} = P \frac{\partial q^2}{\partial X^2} \quad (4.10)$$

en la que q es el gasto unitario , y la antes citada de dispersión unidimensional

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U_t \frac{\partial C}{\partial X} = K \frac{\partial C^2}{\partial X^2} \quad (4.11)$$

En este caso, en la ec.(4.10) el flujo q viaja con una velocidad \bar{C} , y la dispersión a lo largo del canal está descrita por el coeficiente de dispersión del flujo P . Para la ec.(4.11), el contaminante C viaja a la velocidad correspondiente al tiempo medio de viaje de las partículas, U_t , y la dispersión está dada por el coeficiente K .

Según McQuivey y Keefer, el hecho de que los dos procesos estén descritos por la misma ecuación diferencial con parámetros similares, hace posible determinar las condiciones para las que estos procesos son análogos.

Examinando la relación entre \bar{C} y U_t , R y K , con la ayuda de estudios de trazado y utilizando el método de Ruteo de Fischer para el cálculo de K , dichos investigadores establecen las siguientes expresiones :

- para los coeficientes

$$K = 0.66 \frac{U_t^3}{\bar{C}^3} P \quad (4.12)$$

- para las velocidades

$$\bar{C} = 1.79 U_t \quad (4.13)$$

al sustituir (4.13) en (4.12) resulta

$$K = 0.115 P \quad (4.14)$$

Utilizando McQuivey y Keefer la expresión propuesta por Harley (1967) para el cálculo de P

$$P = \frac{Q_0}{2 S_0 W_0} \left(1 - \frac{F^2}{4} \right) \quad (4.15)$$

llegan a proponer la siguiente ecuación para el cálculo del coeficiente de dispersión :

$$K = .058 \frac{Q_0}{S_0 W_0} \quad \text{para } F < 0.5 \quad (4.16)$$

donde Q_0 es el gasto, S_0 la pendiente del río, W_0 el ancho y F es el número de Froude. El subíndice 0 indica condiciones de flujo uniforme .

Al comparar los resultados que arroja la ec.(4.16) con los valores de coeficientes observados, los autores de este método establecen que con él, se tiene un error estándar aproximadamente del 30% en la predicción de K .

4.2.2.- Método de Fischer

El método que se describe a continuación resultó de una crítica que Fischer (1975) hizo al método descrito anteriormente. Mientras Fischer reconoce la originalidad del trabajo de McQuivey y Keefer, él no está de acuerdo en que el mecanismo de dispersión de una onda y el de un contaminante sean similares. Además según Fischer, la expresión (4.16) es muy parecida a la que él derivó en trabajos anteriores .

Fischer inicia con la ecuación (3.30)

$$K = \frac{h^2 \overline{u'^2}}{E} I \quad (3.30)$$

donde I es la integral adimensional definida por la ecuación (3.31), u' es la desviación de la velocidad respecto a la media \bar{u} , h es una longitud característica definida como la distancia entre la zona de máxima velocidad y el banco más alejado de dicha zona en la sección transversal.

De acuerdo con experimentos de laboratorio realizados por este investigador, $\overline{u'^2} / \bar{u}^2$ varía entre 0.17 - 0.25 y para el caso de corrientes naturales es razonable suponer que $\overline{u'^2} = 0.2 \bar{u}^2$, $h = 0.7 W$, $I = 0.07$ y $E = \epsilon_z = 0.6 d u^*$.

Al sustituir estos valores en la ec.(3.30) se tiene

$$K = 0.011 \frac{\bar{u}^2 W^2}{d u^*} \quad (4.17)$$

donde W es el ancho del río, d el tirante, \bar{u} la velocidad media y u^* es la velocidad al cortante.

Al retomar los datos que presentan McQuivey y Keefer de coeficientes de dispersión observados y haciendo una especie de selección de ellos (desecha los datos para los que se tienen velocidades U_c mayores del 10% que la velocidad media transversal \bar{U}), compara los valores obtenidos con la ec.(4.13) y los observados, concluyendo que si bien el método no predice exactadamente el valor de K , sí proporciona resultados con errores de órdenes de magnitud aceptables.

4.2.3.- Método de Liu

Este método se basa en la ecuación (3.34) derivada por Fischer (1967):

$$K = - \frac{1}{A \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}} \int_A u' C' dA = - \frac{1}{A} \int_0^W u' d \int_0^y \frac{1}{\epsilon_t d} \int_0^y u' d dy dy dy \quad (3.34)$$

Haciendo uso del análisis inspeccional (Birkhoff, 1955), aplicándolo a la ecuación anterior, Liu (1977) propone la siguiente expresión

$$K = \beta \frac{U^2 W^3}{u^* A} \quad (4.18)$$

donde U es la velocidad media, W el ancho de la sección, u^* es la velocidad al cortante, A el área transversal y β es un factor que depende de la forma tanto de la sección como de la distribución de velocidades transversal, siendo igual a :

$$\beta = \frac{1}{\kappa} \int_0^1 (h^\circ - q^\circ) \int_0^x (h^\circ)^{-2} \int_0^x (h^\circ - q^\circ) dz^\circ dz^\circ dz^\circ \quad (4.19)$$

donde el superíndice denota cantidades adimensionales y en este caso $q^\circ = q/UR$, $h^\circ = h/R$, $z^\circ = z/w$.

Según Liu, el poder involucrar individualmente todos los factores que intervienen en la obtención del coeficiente K , como son la sinuosidad, las contracciones y expansiones, las zonas muertas, etc., es imposible, así que relaciona el parámetro β con la fricción ya que los factores antes mencionados están reflejados en ella.

Tomando datos de corrientes naturales de varias fuentes publicadas, determina una relación entre β y el factor de fricción f de la ecuación de Darcy-Weisbach, considerando por razones prácticas la relación u^*/U , que no es mas que $\sqrt{f/8}$.

Al dibujar en un papel doble logarítmico los valores de β y u^*/U , figura 4.4, encontró que :

$$\beta = 0.18 (u^*/U)^{1.5} = 0.18 \left[\frac{\sqrt{gRS}}{U} \right]^{1.5} \quad (4.20)$$

La ecuación (4.18) se puede expresar si $U=Q/A$ y $A/W = h = R$, como :

$$K = \beta \frac{Q^2}{u^*R^3} \quad (4.21)$$

El método consiste en aplicar la ec.(4.21) apoyándose en la ec.(4.20), el cual da coeficientes de dispersión dentro de factor de 6, según Liu .

Al hacer una comparación de resultados de coeficientes de dispersión de estos métodos con mediciones en corrientes naturales (como se verá el siguiente capítulo), pudo descubrirse que el método que proporciona valores más cercanos a los medidos es variable, es decir, a veces es McQuivey, ó Liu ó Fischer e incluso es frecuente que entre ellos no se tengan valores parecidos, lo que naturalmente origina la incertidumbre de cuál método utilizar si se quiere calcular el coeficiente de dispersión K, previo a la solución de la ecuación (3.20), y el cálculo de la dispersión de cualquier contaminante .

De lo anterior, surgió la interrogante de que método utilizar en el cálculo de K y tener cierto grado de confianza en los resultados en la predicción de las concentraciones. Este hecho motivó a encontrar y proponer un método más consistente que los anteriores, basándose en comparaciones con mediciones de campo de coeficientes de dispersión. Dicho método se describe a continuación.

4.2.4.- Método propuesto

Este método se obtuvo en forma similar a los anteriores, es decir, empíricamente a partir de las mediciones de coeficientes de dispersión

reportados en la literatura especializada .

Una diferencia importante, no obstante, es que se siguió un enfoque empírico casi puro; es decir sin tomar como base el análisis previo de Taylor o Fischer.

Analizando las variables principales que intervienen en el fenómeno de la dispersión, se puede plantear la siguiente relación funcional :

$$f = (K , Q , U , S , u^* , R , W) \quad (4.22)$$

al aplicar el teorema Π (Streeter, 1982), se llega a la expresión

$$f1 = (K/Ru^* , Q/R^2u^* , U/u^* , W/R , S) \quad (4.23)$$

Estos parámetros fueron escogidos después de una cuidadosa selección y prueba con respecto a los datos mostrados en la tabla 4.1. El análisis consistió en observar la variación del coeficiente de dispersión respecto a los parámetros geométricos e hidráulicos de tal manera que de los parámetros anteriores, se seleccionaban aquellos que tenían un comportamiento más o menos definido al variar el coeficiente de dispersión.

Al despejar de la ecuación (4.23) el parámetro que contiene al coeficiente de dispersión, resulta:

$$K/Ru^* = f2 (Q/R^2u^* , U/u^*S , W/R) \quad (4.24)$$

Utilizando los datos de la tabla 4.1 se observó la variación de K/Ru^* respecto a los parámetros de la ecuación (4.24). En este caso se encontró que el parámetro K/Ru^* sigue un comportamiento definido solamente con respecto al parámetro $Q/WRu^*S = U/u^*S$, como se ve en la figura 4.5.

Sin embargo, de ella se observa que para valores de este parámetro menores a 50000, existen varios valores de K/Ru^* para un solo valor de Q/WRu^*S , lo cual hizo pensar en hacer una distinción entre los efectos propios del

escurrimiento y la geometría de la corriente.

Relacionando el parámetro Q/WRu^* con el factor de fricción f , figura 4.6, y con la ayuda de la ecuación de ajuste resultante tanto de ésta figura como de la 4.5, se generó una nueva curva, que se muestra en la figura 4.7, donde el parámetro K/Ru^* es función del coeficiente de fricción f de Darcy-Weisbach y la pendiente del cauce S .

Al realizar un ajuste de regresión lineal múltiple a los puntos de la curva generada, se observó que la pendiente de cada recta era función del coeficiente de fricción f , con lo que al relacionar a éstos, como se ve en la figura 4.8, se determinó una ecuación para la pendiente en función de f , resultando por último la siguiente expresión, la cual constituye el método propuesto para el cálculo de coeficientes de dispersión en corrientes naturales :

$$\frac{K}{R u^*} = 131.3524 + (.102 f^{-.527}) \left[\frac{1}{S} \right] \quad (4.25)$$

donde K es el coeficiente de dispersión longitudinal, R el radio hidráulico, u^* la velocidad al cortante, f el coeficiente de fricción y S es la pendiente del cauce.

Una de las ventajas importantes de la ecuación anterior es que al tener separados los efectos del escurrimiento y la geometría de la corriente, es posible sensibilizarse con la física del problema a través del parámetro K/Ru^* y que además proporciona un rango de valores de dicho parámetro mucho menor que el reportado por algunos investigadores (Beltaos, 1978).

Adicionalmente, cabe mencionar que si bien la ecuación anterior se presenta en forma adimensional, solamente es válida para condiciones de campo, es decir, no se puede extrapolar para condiciones de laboratorio.

Por otro lado, si presentamos los otros métodos en forma adimensional como la ecuación (4.25) resulta:

McQuiver y Keefer $\frac{K}{R u^*} = 0.164 f^{-0.5} (1/S)$

Fischer $\frac{K}{R u^*} = 0.088 f^{-1} (W/R)^2$

Liu $\frac{K}{R u^*} = 8 \beta f^{-1} (W/R)^2$

Una diferencia importante que se observa de lo anterior es que, mientras los métodos de Fischer y Liu relacionan a K/Ru^* con f y (W/R) , el método propuesto y el de McQuivey lo hacen con f y S . Precisamente dicha diferencia es la que hace que con los métodos propuesto y de McQuivey y Keefer, se obtengan mejores predicciones del coeficiente de dispersión K como se verá en el siguiente capítulo.

T A B L A 4.1 CARACTERISTICAS HIDRAULICAS Y GEOMETRICAS

Datos de Mcquivey y Fischer

RIO	W (m)	U (m/s)	Q (m ³ /s)	S (-)	d (m)	R (m)	u* (m/s)
Missouri	196.72	1.53	936.30	0.00020	3.11	3.01	0.08
Missouri	201.30	1.27	913.60	0.00020	3.56	3.44	0.08
Missouri	183.00	0.93	380.19	0.00020	2.23	2.17	0.07
Nooksack	64.05	0.67	32.63	0.00050	0.76	0.74	0.06
Sabine	103.70	0.56	119.17	0.00015	2.04	1.96	0.05
Wind/Bighorn	68.63	1.56	231.24	0.00130	2.17	2.04	0.16
Elkhorn	32.63	0.43	4.26	0.00073	0.30	0.30	0.05
Elkhorn	50.94	0.46	9.93	0.00073	0.42	0.41	0.05
Clinch (below)	59.48	0.86	85.12	0.00055	2.13	1.99	0.10
Wind/Bighorn	67.10	0.88	58.02	0.00130	0.98	0.95	0.11
Sabine	127.49	0.64	390.12	0.00015	4.75	4.42	0.08
White River	67.10	0.35	12.77	0.00036	0.55	0.54	0.04
Clinch (below)	53.38	0.79	51.07	0.00060	2.10	1.95	0.11
John Day	25.01	1.01	14.19	0.00355	0.56	0.54	0.14
Comite	12.50	0.31	0.99	0.00078	0.26	0.25	0.04
Comite	15.86	0.37	2.41	0.00078	0.41	0.39	0.05
Bayou Anacoco	19.82	0.29	2.41	0.00050	0.42	0.40	0.04
Antietam Creek	24.40	0.52	8.94	0.00100	0.71	0.67	0.08
Monocacy	36.60	0.32	5.22	0.00060	0.45	0.43	0.05
Yadkin	71.67	0.77	212.79	0.00044	3.85	3.47	0.12
Monocacy	47.58	0.44	18.44	0.00060	0.88	0.85	0.07
Clinch (above)	35.99	0.30	6.81	0.00043	0.58	0.56	0.05
Antietam Creek	19.82	0.43	4.37	0.00100	0.52	0.49	0.07
Amite	42.39	0.42	14.19	0.00061	0.80	0.77	0.07
Bayou Anacoco	36.60	0.40	13.48	0.00050	0.92	0.88	0.07
Susquehanna	202.82	0.39	106.11	0.00032	1.35	1.33	0.06
Antietam Creek	15.86	0.32	1.99	0.00100	0.39	0.37	0.06
Chattahoochee	65.58	0.39	29.08	0.00052	1.13	1.09	0.07
Sab-Texas	35.07	0.21	7.38	0.00018	0.99	0.93	0.04
Bayou Anacoco	25.93	0.34	8.23	0.00050	0.94	0.87	0.07
Cooper C.	18.30	0.52	8.51	0.00132	0.85	0.78	0.10
Monocacy	35.07	0.21	2.41	0.00060	0.32	0.32	0.04
Muddy Creek	19.52	0.45	10.64	0.00083	1.20	1.07	0.09
Muddy Creek	13.42	0.37	3.97	0.00083	0.81	0.72	0.08
Yadkin	70.15	0.43	70.93	0.00044	2.33	2.19	0.10
Amite	36.60	0.29	8.65	0.00061	0.81	0.77	0.07
Clinch (below)	46.97	0.28	9.16	0.00056	0.85	0.82	0.07
Cooper C	16.16	0.25	1.36	0.00139	0.49	0.46	0.08
John Day	34.16	0.82	69.23	0.00355	2.46	2.15	0.27
Powell	33.85	0.16	3.97	0.00038	0.85	0.81	0.06
Cooper C.	15.86	0.21	1.53	0.00139	0.49	0.46	0.08
Nooksack	86.01	1.20	303.59	0.00980	2.94	2.75	0.51
Cooper C.	18.61	0.14	13.70	0.00360	0.40	0.38	0.12

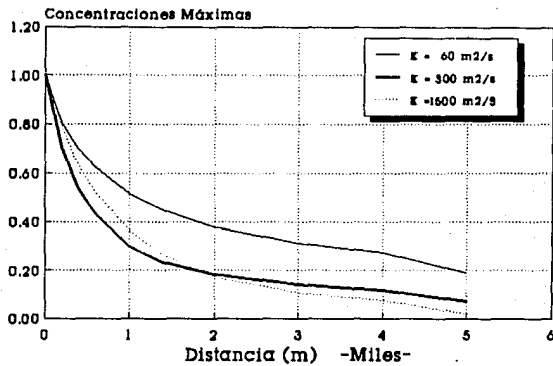


Figura 4.1- Variación de las concentraciones máximas respecto a la distancia, para tres valores de K

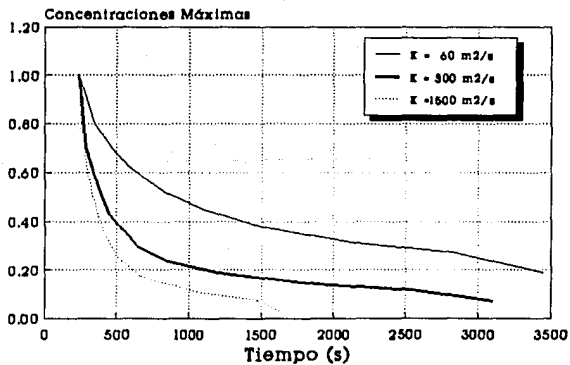


Figura 4.2- Variación de las concentraciones máximas respecto al tiempo, para tres valores de K.

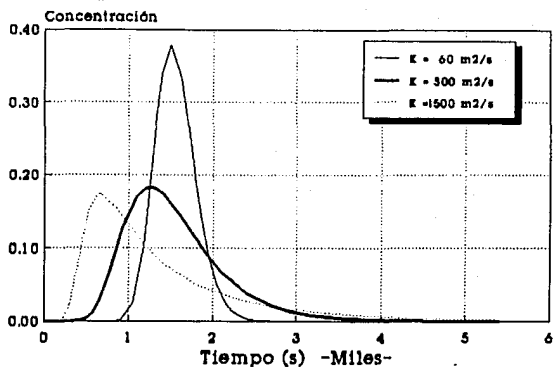


Figura 4.3- Distribución de concentraciones para la sección $x = 2000$, para tres valores de K .

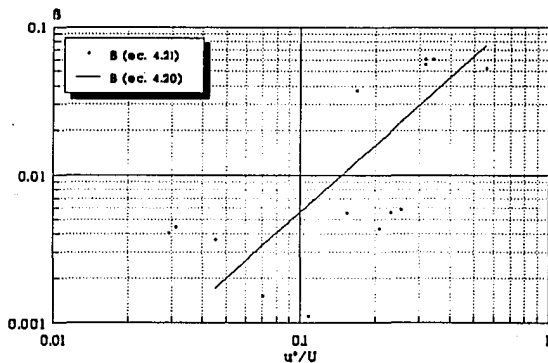


Figura 4.4.- Relación entre B y u^*/U según Liu

Datos de Fischer y McQuivey

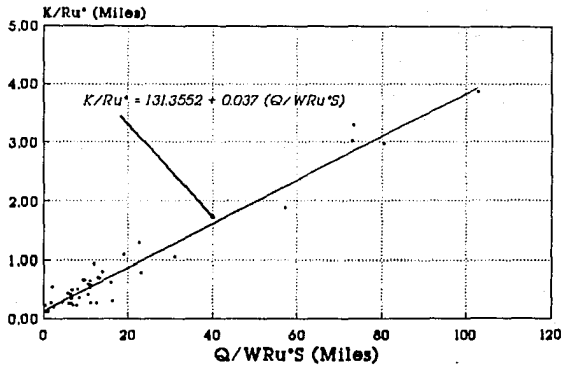


Figura 4.5- Variación de K/Ru^* en función de Q/WRu^*S

Datos de Fischer y McQuivey

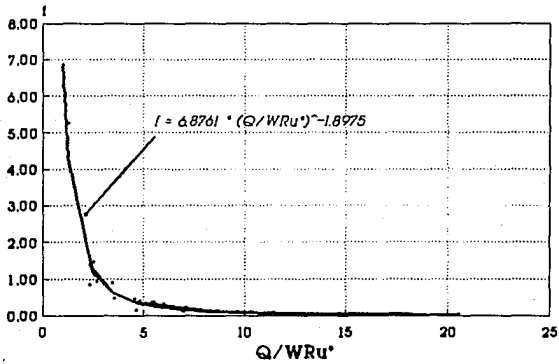


Figura 4.6- Variación de f respecto de Q/WRu^*

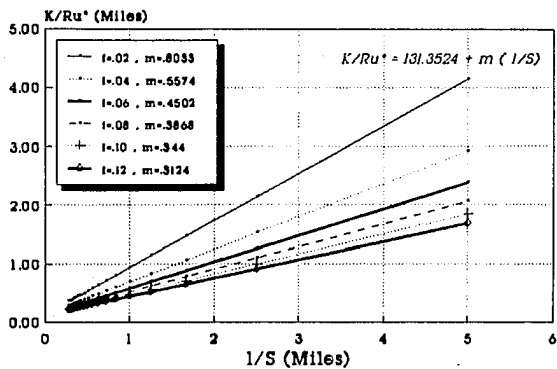


Figura 4.7- Variación de K/Ru^* en función de $(f, 1/S)$

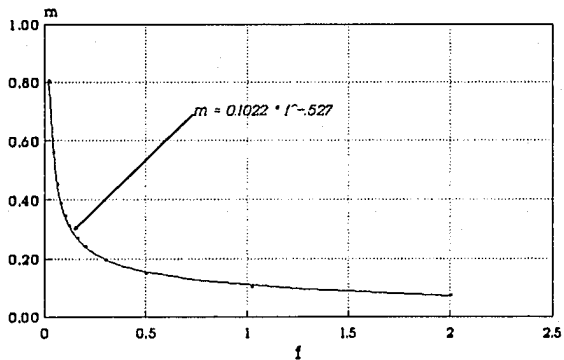


Figura 4.8- Variación de la pendiente ' m ', respecto de f

5.- COMPARACION DE METODOS Y EJEMPLOS DE APLICACION

En esta sección del trabajo además de realizar una comparación de los métodos descritos en el capítulo anterior; y demostrar que con el método propuesto se tienen mejores resultados, se valida la aplicación del modelo de dispersión unidimensional (ec.3.20), al caso de dispersión de contaminantes conservativos en ríos.

5.1.-Comparación y análisis de resultados de los métodos

Con el fin de mostrar los resultados que se tienen con el método propuesto y contrastarlos con los otros métodos, se tomaron los datos de varios ríos presentados en los trabajos de McQuivey (1974) y Fischer (1968). Las características geométricas e hidráulicas de los ríos considerados, corresponden a los presentados en la tabla 4.1 del capítulo anterior.

El cálculo del coeficiente de dispersión con los distintos métodos y la comparación con los valores medidos en campo se muestra en la tabla 5.1. Al subrayar en dicha tabla los valores calculados más parecidos a los medidos y considerando el número total de datos empleados (un total de 43), es posible darse cuenta que con el método propuesto se tienen 19 casos de valores mas parecidos a los medidos (44%), siguiendo en orden descendente el de McQuivey y Keefer con 13 (30%), Liu con 6 (14%) y Fischer con 5 (12%).

Además, con la idea de tratar de definir si existe alguna relación en cuanto a la aplicación del método propuesto respecto al número de veces que arrojaron valores de coeficientes cercanos a los medidos, se establecieron intervalos de valores de los coeficientes medidos de tal forma que se tuviera un mismo número aproximado de datos en cada intervalo, el resultado se muestra a continuación :

INTERVALO DE K	McQuivey	Fischer	Liu	Propuesto
0 - 20	6	2	2	6
20 - 40	5	3	1	3
40 - 100	1		2	3
100 - 1000	1		1	7

Como se puede observar de la tabla anterior, mientras que para coeficientes menores de 40 m²/s el mayor número de veces de cuando se tiene mejor predicción del coeficiente de dispersión está entre los métodos de McQuivey y el propuesto (en este rango se tiene el 65% del total de valores de coeficientes de dispersión medidos), para valores arriba de 40 m²/s el método propuesto predomina notablemente sobre los demás. De lo anterior se puede decir que en general, el método propuesto es más consistente con sus resultados que los métodos existentes.

Adicionalmente, si consideramos la aseveración de Fischer (1968) que dice que un coeficiente de dispersión que esté dentro de un factor de 4 es bastante aceptable, cuando éste se obtiene con base en las características hidráulicas y geométricas del cauce, con el método propuesto se tienen valores estimados cuando mucho dentro de un factor cercano a 3 (aproxim. 2.8), y mientras con los otros se tienen estimaciones incluso de varios órdenes de magnitud.

Por otro lado, la confianza en su empleo aumenta si se analizan los resultados de acuerdo con la importancia que tiene el estimar correctamente el coeficiente de dispersión K (inciso 4.1). Es decir, para determinar el rango de error que se tiene con los métodos, se prepararon las tablas 5.2 y 5.3 donde en la primera de ellas se muestra el error relativo medio para cada método y en la segunda se señalan los porcentajes de error relativo al *subestimar* ó *sobrestimar* el valor del coeficiente de dispersión.

De la tabla 5.2 se observa que con el método propuesto se tiene un menor porcentaje de error relativo medio, definido éste como $(|K_{medido} - K_{calculado}| / K_{mayor}) * 100$, en la estimación del coeficiente de

dispersión, siendo aproximadamente del 22%, siguiendo en orden ascendente el método de McQuivey y Keefer con un error del 27%, después el método de Liu con un 51% y por último el método de Fischer con un 59%.

Si bien la diferencia del error relativo medio entre el método propuesto y el de McQuivey y Keefer no es grande, en la tabla 5.3 sí se aprecia que existe una importante diferencia en la subestimación del coeficiente de dispersión, siendo más acentuada obviamente para los métodos de Liu y Fischer.

En conclusión, se puede decir que el método propuesto arroja mejores resultados que los otros métodos, teniéndose menos error tanto en la sobrestimación y subestimación del coeficiente de dispersión, siendo más notable en ésta última; y recordando que se comete mayor error en la predicción de las concentraciones al subestimar el coeficiente de dispersión, se resalta la importancia que tiene el método propuesto.

5.2.-Ejemplos de aplicación del modelo de dispersión unidimensional

Para validar la aplicación del modelo de dispersión o modelo Fickiano unidimensional al caso de dispersión en ríos, se tomaron algunos datos de estudios de trazado reportados en la literatura en diferentes ríos. Dichos estudios son, en todos los casos, experimentos realizados en corrientes con trazadores fluorescentes, conservativos a corto plazo.

La idea es resolver la ecuación (3.20) utilizando el coeficiente de dispersión calculado por el método propuesto y comparar los resultados con las mediciones que se tienen en cada estudio. La solución de la ecuación de dispersión se llevó a cabo mediante el programa *DISPER*, desarrollado por León (1990), en donde para efectos de dicho programa, se tomaron los valores reportados en la primera sección como condición inicial y se calcularon hacia aguas abajo las variaciones en la concentración para compararlos contra las mediciones en las secciones reportadas.

La tabla 5.4 muestra las características generales de los casos seleccionados para las pruebas. El coeficiente de dispersión obtenido por el procedimiento de ruteo (Fischer, 1968), se presenta tal y como se reporta en las referencias indicadas.

El coeficiente calculado con el método propuesto por la ecuación (4.25), se obtuvo con los valores medios reportados en la misma tabla 5.4. Las pruebas se realizaron con la siguiente metodología:

a) De la referencia citada se ampliaron y obtuvieron los datos de concentración en el tiempo para las distintas secciones.

b) En todos los casos se modificaron los tiempos, corriendo el eje cero a la llegada de la curva de concentración de la primera sección.

c) Para la prueba (d), las concentraciones se transformaron a concentraciones relativas -a la máxima medida-, con el objeto de tener valores entre cero y uno. Para las restantes se dejaron en las unidades reportadas (mg/l).

d) Se introdujeron los valores de las concentraciones respecto al tiempo de la primera sección como condición inicial y se procedió a correr el programa para obtener las concentraciones en las secciones deseadas y poder compararlas con las medidas.

En las figuras 5.1 a 5.4 se muestran los resultados de la comparación, así como los errores obtenidos para las concentraciones máximas (pico) y tiempos de defase en la llegada de dicho máximo. Cabe destacar que las gráficas mostradas en las figuras fueron generadas a partir de los resultados arrojados por *DISPER* y manipulados con un paquete de graficación.

Como se puede observar de las figuras, los resultados que se obtienen al aplicar la ecuación de dispersión longitudinal al caso de corrientes naturales, tienen una excelente aproximación. El error más alto es del 12.21% lo cual es bastante aceptable para problemas de dispersión (Fischer, 1967).

Adicionalmente a los ejemplos mostrados anteriormente, y tratando de

reafirmar la importancia de una buena estimación del coeficiente de dispersión así como la aplicación del modelo unidimensional en ríos, se seleccionaron otros casos reportados en las siguientes referencias:

Jobson (1989). En este trabajo se describe un modelo para predecir el comportamiento de un cauce al presentarse diferentes hidrogramas de entrada a dicho cauce, es decir, se simula el efecto transitorio generado. Dicho modelo fue diseñado de tal manera que sus resultados se han utilizados para alimentar a un modelo de transporte desarrollado por Jobson y Schoellhamer (1987).

Al presentar un ejemplo de aplicación de los modelos (de flujo y de transporte) en un río en particular, para el modelo de transporte menciona lo difícil que es el estimar el coeficiente de dispersión. En este caso, asume que el coeficiente de dispersión K es igual a 1000 veces el producto $u \cdot h$. Si aplicamos los métodos para calcular K se tiene: Con $Q = 85.11 \text{ m}^3/\text{s}$, $h = 1.77 \text{ m}$, $u = 0.64 \text{ m/s}$ y $u^* = .079 \text{ m/s}$, los valores de K son

METODO	VALOR DE $K(\text{m}^2/\text{s})$
McQuivey y Keefer	181.33
Fischer	181.54
Liu	129.42
Propuesto	138.53

Es decir, si calculamos el producto $1000(u \cdot h)$ se tiene un valor de $K = 140 \text{ m}^2/\text{s}$ de donde se observa que el método propuesto se acerca más a este valor.

Elhadi et al (1984). Este artículo es un reporte del estado del arte del mezclado en ríos, donde se mencionan aspectos de modelación bidimensional y unidimensional. Con respecto a esta última, según los autores se demuestra que el modelo Fickiano no es aplicable en corrientes naturales, al problema de la dispersión longitudinal.

Con el fin de observar nuevamente la *gran importancia* del coeficiente de dispersión K y demostrar la aplicación del modelo Fickiano, se reprodujo el ejemplo de mezclado unidimensional reportado en este trabajo.

Se desea conocer el posible impacto que podría ocasionar una planta industrial al tener una descarga accidental, en una zona localizada a 100 km. aguas abajo de dicha planta, donde se tiene una importante area de criadero de peces. De acuerdo con la operación de la planta, la máxima cantidad que se podría descargar es de 2000 kg. Además, se sabe que para descargas instantáneas las concentraciones permisibles son de 400 $\mu\text{g}/\text{l}$.

Las condiciones hidráulicas y geométricas del escurrimiento son :

$$Q = 600 \text{ m}^2/\text{s} \quad u = 1.1 \text{ m/s} \quad h = 1.4 \text{ m}$$

$$W = 390 \text{ m} \quad S = 0.0005$$

La solución de este problema se obtiene utilizando un modelo que considera el comportamiento no Fickiano de dispersión propuesto por Beltaos (1980), el cual se divide en tres fases . De acuerdo con los datos que se tienen, la solución cae dentro de la primera fase llamada rango lineal, donde la expresión para calcular la concentración máxima es

$$C_p = \frac{M}{\sqrt{2\pi\beta} A x} \quad ; \text{ donde } M \text{ es la masa, } A \text{ es el area de la sección, } x \text{ la distancia y } \beta \text{ es un factor que depende del parámetro } u^*/u$$

De acuerdo con los datos, $u^*/u = 0.075$ y al entrar a una gráfica se obtiene que el rango del valor de β es $0.0018 < \beta < 0.004$. Al sustituir los valores en la expresión de C_p resulta, en unidades de $\mu\text{g}/\text{l}$ (microgramos por litro)

$$\frac{2000 \cdot 10^9}{390 \cdot 1.4 \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot 0.004}} < C_p < \frac{2000 \cdot 10^9}{390 \cdot 1.4 \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot 0.0018}}$$

$231 \mu\text{g}/\text{l} < C_p < 345 \mu\text{g}/\text{l}$, y el valor medio sería $C_p = 288 \mu\text{g}/\text{l}$

Al compararse este resultado con el modelo Fickiano, concluyen que dicho

modelo subestima el valor de la concentración máxima durante el rango lineal, donde según Beltaos (1980) no se cumplen las restricciones impuestas por el modelo de dispersión unidimensional (ec.3.20).

En este caso, la concentración máxima para una descarga instantánea para la ecuación de dispersión es igual a

$$C_p = \frac{M}{2A \sqrt{\pi K t}}$$

donde M es la masa, A es el area de la sección, K el coeficiente de dispersión longitudinal y t es el tiempo. Al calcular C_p de la expresión anterior y al considerarse un coeficiente K obtenido de una gráfica propuesta por Beltaos, resulta

$34 \mu\text{g/l} < C_p < 109 \mu\text{g/l}$ para los valores de K entre $988 < K < 9880 \text{ m}^2/\text{s}$ teniéndose una concentración media de $C_p = 71.5 \mu\text{g/l}$, siendo mucho menor que la calculada con el modelo propuesto por Beltaos.

Sin embargo, si se calcula el coeficiente de dispersión con el método propuesto y los otros métodos, se tiene lo siguiente:

Con McQuivey y Keefer $K = 178.46 \text{ m}^2/\text{s}$, para Fischer $K = 17464 \text{ m}^2/\text{s}$, con Liu se tiene que $K = 5890 \text{ m}^2/\text{s}$ y con el método propuesto, $K = 135.87 \text{ m}^2/\text{s}$. Al sustituir los datos en la expresión correspondiente resulta

-Para McQuivey y Keefer

$$C_p = 256.54 \mu\text{g/l}$$

-Con Liu

$$C_p = 44.655 \mu\text{g/l}$$

-Para Fischer

$$C_p = 25.93 \mu\text{g/l}$$

-Con el método Propuesto

$$C_p = 294 \mu\text{g/l}$$

Como se puede observar de los resultados anteriores, y aceptando que el valor correcto de la concentración máxima o pico C_p es el que proporciona el

modelo de Beltaos, el coeficiente de dispersión longitudinal tiene mucho que ver con los resultados del modelo Fickiano de dispersión. Mientras que en este ejemplo reportado se utilizó un coeficiente de dispersión obtenido de una gráfica propuesta por Beltaos (teniéndose dos valores de K con un factor de 10), y mencionándose que el modelo Fickiano difícilmente se puede aplicar a corrientes naturales, de los cálculos efectuados queda demostrado que con una buena estimación del coeficiente de dispersión K , la ecuación de dispersión proporciona resultados bastante aceptables al aplicarse en ríos.

TABLA 5.1 COMPARACIÓN DE MÉTODOS EN EL CÁLCULO DEL COEFICIENTE DE DISPERSIÓN LONGITUDINAL

Coefficientes de dispersión Longitudinal (K)

RIO	K(Obs.) (m ² /s)	K _M (m ² /s)	K _F (m ² /s)	K _L (m ² /s)	K _P (m ² /s)
Missouri	893.04	1380.23	4175.67	<u>844.11</u>	956.60
Missouri	837.23	1316.16	2478.01	<u>735.86</u>	<u>905.30</u>
Missouri	465.13	602.49	2207.68	718.46	<u>418.57</u>
Nooksack	34.88	59.09	443.75	209.91	<u>44.60</u>
Sabine	316.28	444.33	344.40	185.71	<u>299.73</u>
Wind/Bighorn	162.79	<u>150.33</u>	358.97	235.45	137.27
Elkhorn	9.30	10.36	158.62	94.94	<u>8.55</u>
Elkhorn	20.93	<u>15.49</u>	267.97	185.27	13.03
Clinch (below)	53.95	150.92	129.14	<u>66.95</u>	145.97
Wind/Bighorn	41.86	<u>38.58</u>	360.11	281.92	38.44
Sabine	669.78	1183.21	193.00	173.98	<u>772.35</u>
White River	30.23	<u>30.66</u>	250.91	191.42	22.96
Clinch (below)	46.51	93.11	86.72	<u>29.61</u>	125.37
John Day	13.95	9.27	90.26	84.69	<u>15.52</u>
Comite	6.98	<u>5.90</u>	15.06	14.43	5.11
Comite	13.95	11.31	<u>16.71</u>	18.18	9.83
Bayou Anacoco	13.95	<u>14.11</u>	20.17	21.92	11.15
Antietam Creek	25.58	21.24	<u>30.79</u>	36.79	20.17
Monocacy	13.95	<u>13.79</u>	67.07	74.06	11.65
Yadkin	260.47	391.35	71.42	100.32	<u>285.79</u>
Monocacy	37.21	<u>37.47</u>	78.79	91.53	31.33
Clinch(above)	8.09	25.34	45.92	62.88	<u>18.35</u>
Antietam Creek	16.28	<u>12.78</u>	22.02	27.47	12.36
Amite	30.23	<u>31.82</u>	63.44	76.08	26.80
Bayou Anacoco	39.54	42.71	<u>38.91</u>	49.08	33.97
Susquehanna	93.02	<u>94.83</u>	777.17	902.92	72.03
Antietam Creek	9.30	7.26	12.41	18.81	<u>7.39</u>
Chattahoochee	32.56	49.47	87.13	130.16	<u>41.48</u>
Sab-Texas	39.54	67.77	15.43	24.65	<u>46.31</u>
Bayou Anacoco	32.56	36.82	13.80	23.69	<u>29.62</u>
Cooper C.	21.40	20.44	11.53	23.27	<u>21.76</u>
Monocacy	4.65	6.65	44.40	69.69	<u>5.98</u>
Muddy Creek	32.56	38.09	7.74	16.67	<u>34.85</u>
Muddy Creek	13.95	20.68	4.28	9.45	<u>19.10</u>
Yadkin	111.63	133.29	44.75	94.45	<u>107.73</u>
Amite	23.26	22.48	<u>23.00</u>	47.97	20.63
Clinch (below)	13.95	<u>20.21</u>	32.54	47.92	22.34
Cooper C.	9.49	3.52	4.54	<u>7.85</u>	7.76
John Day	65.12	33.11	12.92	<u>60.68</u>	95.42
Powell	9.49	17.91	<u>7.01</u>	19.08	18.40
Cooper C.	19.54	4.03	3.17	<u>12.68</u>	7.29
Nooksack	153.49	20.89	77.82	434.44	<u>197.72</u>
Cooper C.	9.86	<u>11.87</u>	1.70	3854.67	6.31

Los subíndices (M,F,L,P) indican método de: McQuivey, Fischer, Liu y Propuesto respectivamente

T A B L A 5.2

COMPARACION DE METODOS
(Error relativo medio E)

K(Obs.) (m ² /s)	EM (%)	EF (%)	EL (%)	EP (%)
893	35.30	78.61	5.48	6.64
837	36.39	66.21	12.11	7.52
465	22.80	78.93	35.26	10.01
35	40.97	92.14	83.38	21.78
316	28.82	8.16	41.28	5.23
163	7.65	54.65	30.86	15.68
9	10.22	94.14	90.20	8.09
21	25.99	92.19	88.70	37.73
54	64.25	58.22	19.42	63.04
42	7.84	88.38	85.15	8.17
670	43.39	71.18	74.02	13.28
30	1.38	87.95	84.21	24.07
46	50.05	46.36	36.35	62.90
14	33.59	84.54	83.52	10.11
7	15.36	53.66	51.66	26.73
14	18.97	16.48	23.26	29.52
14	1.12	30.83	36.33	20.09
26	16.95	16.93	30.47	21.14
14	1.19	79.20	81.16	16.52
260	33.44	72.58	61.48	8.86
37	0.69	52.77	59.35	15.79
8	68.07	82.37	87.13	55.89
16	21.48	26.05	40.74	24.05
30	4.98	52.34	60.26	11.34
39	7.44	1.58	19.45	14.09
93	1.90	88.03	89.70	22.57
9	21.92	25.01	50.55	20.61
33	34.18	62.63	74.99	21.52
39	41.66	60.97	37.65	14.62
33	11.56	57.60	27.23	9.04
21	4.48	46.09	8.05	1.67
5	30.02	89.52	93.33	22.26
33	14.52	76.23	48.81	6.56
14	32.54	69.32	32.30	26.93
112	16.25	59.92	15.39	3.49
23	3.33	1.11	51.52	11.29
14	30.95	57.11	70.88	37.55
9	62.95	52.17	17.26	18.22
65	49.15	80.15	6.82	31.75
9	47.02	26.14	50.27	48.43
20	79.37	83.76	35.12	62.70
153	86.39	49.30	64.67	22.37
10	16.91	82.73	99.74	35.99
	27.52	59.40	51.06	22.23

Los subíndices (M,F,L,P) indican método ó error de: McQuivey, Fischer, Liu y Propuesto respectivamente

T A B L A 5.3 ERROR RELATIVO RESPECTO A LA SUBESTIMACION Y SOBRESTIMACION DEL COEFICIENTE DE DISPERSION LONGITUDINAL

RIO	K(Obs.)	McQ. y Keef.		Fischer		Liu		Propuesto	
		(ft2/s)	Eso(%)	Eso(%)	Eso(%)	Eso(%)	Eso(%)	Eso(%)	Eso(%)
Missouri	893	-35.30		-78.61			5.48	-6.64	
Missouri	837	-36.39		-66.21			12.11	-7.52	
Missouri	465	-22.80		-78.93		-35.26			10.01
Nooksack	35	-40.97		-92.14		-83.38		-21.78	
Sabine	316	-28.82		-8.16			41.28		5.23
Wind/Big.	163		7.65	-54.65		-30.86			15.68
Elkhorn	9	-10.22		-94.14		-90.20			8.09
Elkhorn	21		25.99	-92.19		-88.70			37.73
Clinch	54	-64.25		-58.22		-19.42		-63.04	
Wind/Big.	42		7.84	-88.38		-85.15			8.17
Sabine	670	-43.39			71.18		74.02	-13.28	
White R.	30	-1.38		-87.95		-84.21			24.07
Clinch	46	-50.05		-46.36			36.35	-62.90	
John Day	14		33.59	-84.54		-83.52		-10.11	
Comite	7		15.36	-53.66		-51.66			26.73
Comite	14		18.97	-16.48		-23.26			29.52
Bayou An.	14	-1.12		-30.83		-36.33			20.09
Antietam	26		16.95	-16.93		-30.47			21.14
Monocacy	14		1.19	-79.20		-81.16			16.52
Yadkin	260	-33.44			72.58		61.48	-8.86	
Monocacy	37	-0.69		-52.77		-59.35			15.79
Clinch	8	-68.07		-82.37		-87.13		-55.89	
Antietam	16		21.48	-26.05		-40.74			24.05
Amite	30	-4.98		-52.34		-60.26			11.34
Bayou An.	39	-7.44			1.58	-19.45			14.09
Susqueh.	93	-1.90		-88.03		-89.70			22.57
Antietam	9		21.92	-25.01		-50.55			20.61
Chattahoo	33	-34.18		-62.63		-74.99		-21.52	
Sab-Texas	39	-41.66			60.97		37.65	-14.62	
Bayou An.	33	-11.56			57.60		27.23		9.04
Cooper C.	21		4.48		46.09	-8.05		-1.67	
Monocacy	5	-30.02		-89.52		-93.33		-22.26	
Muddy C.	33	-14.52			76.23		48.81	-6.56	
Muddy C.	14	-32.54			69.32		32.30	-26.93	
Yadkin	112	-16.25			59.92		15.39		3.49
Amite	23		3.33		1.11	-51.52			11.29
Clinch	14	-30.95		-57.11		-70.88		-37.55	
Cooper C.	9		62.95		52.17		17.26		18.22
John Day	65		49.15		80.15		6.82	-31.75	
Powell	9	-47.02			26.14	-50.27		-48.43	
Cooper C.	20		79.37		83.76		35.12		62.70
Nooksack	153		86.39		49.30	-64.67		-22.37	
Cooper C.	10	-16.91			82.73	-99.74			35.99
MEDIA(%)		-26.92	28.54	-61.61	55.68	-60.15	32.24	-25.46	19.67

Esu y Eso indican el porcentaje de error que se tienen con los métodos a subestimar ó sobrestimar el coeficiente de dispersión, de acuerdo con datos de campo.

T A B L A 5.4 DATOS EMPLEADOS EN LA VALIDACION DEL MODELO DE DISPERSION UNIDIMENSIONAL (Ecuación 3.20)

Sitio (Referencia)	Ancho medio W (m)	Tirante medio d (m)	Pendiente s	Velocidad media u (m/s)	Coeficientes K (Ruteo) ² (eq.4.21) (m ² /s)	
a) Rio en 'Copper Creek' (Fischer, 1968)	18.28	0.854	0.00132	0.518	21.36	21.7
b) 'White River' (McQuivey, 1974 ^{**})	67	0.55	0.00036	0.347	30.2	22.9
c) 'Wind/Bighorn River' (McQuivey, 1974 ^{**})	68.6	2.16	0.0013	1.55	162.8	136.5
d) 'Monocacy River' (McQuivey, 1974 ^{**})	47.5	0.876	0.0006	0.44	37.2	31.3

* Valores reportados obtenidos con el procedimiento de ruteo (Fischer, 1968).

** Aunque de esta referencia se tomaron los datos, éstos son reportados por otros autores y recopilados por McQuivey en 1974.

Río en 'Copper Creek, Va.'
(Fischer, 1968)

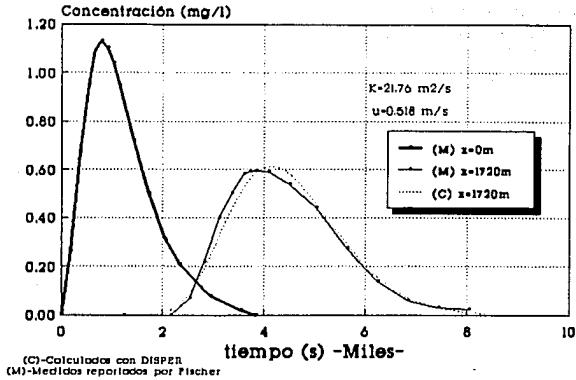


Figura 5.1.- Comparación de resultados caso (a)
Error relativo de pico: $E_c=3.75 \%$ Error de defasamiento: $E_t=7.24 \%$

'White River'
(McGuivrey, 1974)

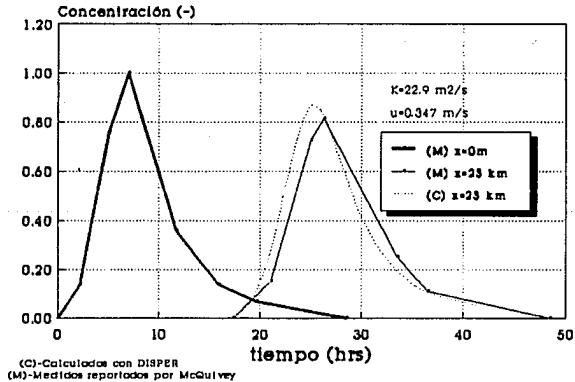


Figura 5.2.- Comparación de resultados caso (b)
Error relativo de pico: $E_c=6.43 \%$ Error de defasamiento: $E_t=4.07 \%$

6.- CONCLUSIONES

Un problema hoy en día a nivel mundial es la contaminación de los cuerpos de agua. Para poder mantener un control de la calidad del agua en el caso del escurrimiento en ríos, es necesario conocer la capacidad que tienen dichas corrientes para transportar, dispersar y diluir los contaminantes que son descargados en ellas.

El primer estudio importante de dispersión en un flujo turbulento, fue realizado por Taylor en 1954 para el caso de flujo en tuberías, el cual fue extendido por Elder en 1959 para canales y por Fischer en 1967, para el caso de corrientes naturales.

El factor común entre los análisis de Taylor, Elder y Fischer fue el suponer la existencia de un gradiente de difusión ó de mezclado debido a las variaciones de velocidad respecto del valor medio (en el espacio o en el tiempo), y cuyo resultado proporciona el uso de la ecuación de dispersión unidimensional para simular el comportamiento de contaminantes, bajo ciertas restricciones.

Las hipótesis más importantes del flujo consideradas en dichos análisis fueron :

- 1) Flujo unidimensional
- 2) Turbulencia homogénea e isotrópica
- 3) Flujo uniforme e incompresible
- 4) Se adopta la primera ley de Fick de la difusión

La diferencia entre los análisis fue la estimación del coeficiente de dispersión longitudinal K . A partir de los resultados de Fischer, se desarrollaron diversas investigaciones con el fin de determinar dicho coeficiente en corrientes naturales, el cual es un factor importante de la

capacidad de autodepuración de éstas.

En este trabajo, además de mostrar y analizar algunos de los métodos que existen para calcular el coeficiente de dispersión longitudinal, se propuso un nuevo método el cual se obtuvo empíricamente a partir de mediciones de coeficientes de dispersión reportados por diversos investigadores.

Dicho método fué comparado con los existentes y se encontró que arroja mejores resultados. Mientras que con el método propuesto se tienen estimaciones bastantes aceptables, con los otros se llegaron a tener diferencias notables respecto a los medidos e incluso algunas veces de varios órdenes de magnitud.

En cuanto al error cometido en la estimación del coeficiente de dispersión, ya sea al subestimarse ó al sobrestimarse, fiel reflejo de lo señalado en el párrafo anterior, para el método propuesto fué del 19.67% y 25.46%, para McQuivey y Keefer del 28.54% y 26.9%, para Liu del 32.34% y 60.15% y para Fischer del 55.68% y 61.61%, respectivamente.

Por otro lado, al presentar los métodos que se describieron en forma adimensional y similar al método propuesto, se encontró que los métodos de Fischer y Liu definen al parámetro K/Ru^* como función de f y (W/R) mientras que el de McQuivey y Keefer y el método propuesto lo definen con f y S . Es decir, con base en los resultados obtenidos en la comparación de los métodos, se puede decir que influye más la pendiente S que la relación (W/R) en la estimación del coeficiente de dispersión longitudinal K .

Asimismo, ya que el método propuesto separa los efectos del escurrimiento y la geometría de la corriente, hace posible sensibilizarse con la física del problema a través del parámetro K/Ru^* y proporciona además un rango de valores de dicho parámetro mucho menor que el reportado por algunos investigadores (Beltaos, 1978). Adicionalmente, si bien la ecuación propuesta se presenta en forma adimensional, solamente es válida para condiciones de campo, es decir, no se puede extrapolar para condiciones de laboratorio.

Por último, considerando los resultados de algunos estudios de trazado y algunos ejemplos reportados en la literatura, se demostró que si se estima correctamente el coeficiente de dispersión K , el modelo Fickiano sí describe adecuadamente el comportamiento de los contaminantes a lo largo del escurrimiento, una vez que se ha cumplido la restricción más importante de dicho modelo, que es la de haberse completado el mezclado transversal del contaminante desde su descarga. Al aplicar la ecuación de dispersión utilizando el valor de K estimado con el método propuesto, se tuvieron resultados sumamente satisfactorios.

NOTACIÓN UTILIZADA

a	radio de tubería
a, b	componentes en un sistema binario
C	concentración
\bar{C}	concentración media
C'	desviación de la concentración
d	tirante del flujo
D	coeficiente de difusión molecular
f	coeficiente de fricción de Darcy-Weisbach
F	número de Froude
g	aceleración de la gravedad
h	ancho del cauce
J	flujo de transferencia de masa
k	constante de Von Karman
K	coeficiente de dispersión longitudinal
l_L	escala de longitud lagrangiana
$l(t)$	tamaño de una nube de partículas
$L(t)$	tamaño de un conjunto de nubes de partículas
m, M	masa
n	concentración
N	flujo de masa
P	coeficiente de dispersión de flujo
Q	gasto del escurrimiento
R	radio hidráulico
Ra, b	reacción de producción de masa de a, b
Rx	coeficiente de autocorrelación lagrangiana
S	pendiente del cauce
t, T	tiempo

NOTACIÓN UTILIZADA (continuación)

T_x, T_y, T_z	escalas de tiempo lagrangiana
u, v, w	velocidades instantáneas en x, y, z
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	velocidades medias en x, y, z
u', v', w'	fluctuaciones de velocidad
u^*	velocidad al cortante
U	velocidad media
\bar{V}	vector velocidad
W	ancho del río
x, y, z	coordenadas cartesianas
X	vector de posición
$X(t)$	desplazamiento de una partícula
β	factor en función de (u^*/U)
Δ	incremento
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	coeficientes de mezclado turbulento
E_x, E_y, E_z	coeficientes de difusión turbulenta
π	número Pi
ρ	densidad
χ	vector de posición con coordenadas ζ, η, ξ
σ_x^2	varianza de los desplazamientos de una nube de partículas
\int_x^2	varianza de los desplazamientos de un conjunto de nubes de partículas
τ_0	esfuerzo cortante
(ξ, τ)	ejes transformados de (x, t)
∞	infinito
∇	$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$
∇^2	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

REFERENCIAS

Acosta, R.J.L., 1986, "*Determinación del coeficiente de Dispersión Longitudinal en Canales*", Trabajo de Investigación 1, Sección de Hidráulica, DEPMI, UNAM, Cd. Universitaria, México D.F.

Beltaos, S., 1978, "*An Interpretation of Longitudinal Dispersion Data in Rivers*", Internal Report No.SWE78-3, Transportation and Surface Water Engineering Division, Alberta Research Council, Edmonton, Alberta

_____, 1980, "*Longitudinal Dispersion in Rivers*", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 106, No.HY1, January, pp.151-172

Birkhoff, G., Hydrodynamics, Dover Publication, Inc., New York, 1955, p.186

Chatwin, P.C., 1970, "*The Approach to Normality of the Concentration Distribution of a Solute in a Solvent Flowing along a Straight Pipe*", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 43, pp.321-352

Crank, J., 1956, "*The Mathematics of Diffusion*", Oxford Univ. Press (Clarendon), Londres y New York.

Daily, J.W., y Harleman, D.R.F., 1981, "*Dinámica de los Fluidos*", Editorial Trillas, Primera reimpresión, México D.F.

Elder, J.W., 1959, "*The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent Shear Flow*", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 5, No.4, May, pp.544-560

Elhadi, N., et al, 1984, "*River Mixing-A State-of-The-Art Report*", Canadian Journal of Civil Engineering, Vol. 11, number 3, September, pp.584-609

Fick, A., *Ann. Physick*, 94, 59, 1855

Fischer, B.H., 1966a, "*Longitudinal Dispersion in Laboratory and Natural Streams*", Report KH-R-12, W.M. Keck Laboratory of Hydraulic and Water Resources, California Institute of Technology, Pasadena, Calif., June

REFERENCIAS (CONTINUACION)

_____, 1966b, " *A Note on the One-Dimensional Dispersion Model*", Journal International of the Air and Water Pollution, Vol. 10, June-July, pp.443-452

_____, 1967, " *The Mechanics of Dispersion in Natural Streams*", Journal of the Hydraulic Division, ASCE, Vol. 93, No.HY6, Proc. Paper 5592, Nov., pp.187-216

_____, 1968, " *Dispersion Predictions in Natural Streams*", Journal of the Sanitary Engineering Division, ASCE, Vol. 94, October pp.927-943

_____, 1975, discussion of " *Simple Method for Predicting Dispersion in Streams*", Journal of the Environmental Engineering Division, ASCE, Vol. 101, No.EE3, June, pp.453-455

Fischer, *et al*, 1979, " *Mixing in Inland and Coastal Waters*", Academic Press, Inc., New York, USA

Fourier, J.B.J., 1822, " *Theorie Analytique de la Chaleur*", Didot, Paris

Godfrey, R.G., and Frederick, B.J., 1970, " *Stream Dispersion at Selected Sites*", U.S. Geological Survey Professional Paper, No.433-K, U.S. Geological Survey, Washington D.C.

Harley, B.M., 1967, " *Linear Routing in Uniform Open Channels*", Thesis presented to University College, at Cork, Ireland, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science

Jobson, H.E., 1989, " *Users Manual for An Open-Channel Streamflow Model Based on The Diffusion Analogy*", Report 89-4133, Water-Resources Investigations, U.S. Geological Survey, Reston, Virginia

Jobson, H.E., and Schoellhamer, D.H., 1987, " *Users Manual for a Branched Lagrangian Transport Model*", Report 87-4163, Water-Resources Investigations, U.S. Geological Survey, Reston, Virginia

REFERENCIAS (CONTINUACION)

Kolmogorov, A.N., 1931, "*Über die Analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*", Math. Ann. 104, 415-458

_____, 1933, "*Zur Theorie der Stetigen Zufälligen Prozesse*", Math. Ann. 108, 149-160

León Vizcaíno, L.F., 1990, "*DISPER V-1.2 Programa para el cálculo de la dispersión longitudinal*", Manual de Usuario del Programa, IMTA, en proceso de publicación.

Liu, Henry, 1977, "*Predicting Dispersion Coefficient of Streams*", Journal of the Environmental Engineering Division, ASCE, Vol. 103, No.EE1, February, 1977, pp.59-69

Liu, H., and Cheng, A.H.D., 1980, "*Modified Fickian Model for Predicting Dispersion*", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 106, No.HY6, June, pp.1021-1040

McQuivey, S.R., and Keefer, T.N., 1974, "*Simple Method for Predicting Dispersion in Streams*", Journal of the Environmental Engineering Division, ASCE, Vol. 100, NO.EE4, August, pp.997-1011

Nordin, C.F., and Sabol, G.V., 1974, "*Empirical Data on Longitudinal Dispersion in Rivers*", United States Geological Survey, Water Resources Investigations 20-74

Reynolds, O., 1874, *Proc. Manchester Lit. Phil. Soc.*, 8

Streeter, L.V., and Wylie, B.E., 1982, "*Mecánica de los Fluidos*", Mc Graw-Hill, Sexta Edición, pp.219-235

Taylor, G.I., 1921, "*Diffusion by Continuous Movements*", Proc. London Math. Soc., Ser. A 20, 196-211

REFERENCIAS (CONTINUACION)

_____, 1953, "*Dispersion of Soluble Matter in Solvent Flowing Slowly Through a tube*", Proceedings of the Royal Society, London, England, Series A, Vol. 219, Aug., pp.186-203

_____, 1954, "*The Dispersion of Matter in Turbulent Flow Through a pipe*", Proceedings of the Royal Society, London, England, Series A, Vol. 223, May., pp.446-468

Valentine, E.M., and Wood, I.R., 1977, "*Longitudinal Dispersion with Dead Zones*", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 103, No.HY9, September, pp.975-989