



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTABILIDAD DE POLINOMIOS  
(ANALISIS INTRODUCTORIO EXHAUSTIVO)

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

NADESCDA GOMEZ ALCARAZ

México, D. F.

1990

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## "INDICE"

Indice.	i
Introducción.	iv
Capítulo I. Primer Intento.	1
Teorema 1.	2
Teorema 2.	2
Capítulo II. Bases para el método de amplitudes de fase (Hermite-Mijailov) y otros métodos.	3
Caso $n=1$ .	3
Caso $n=2$ .	4
Caso $n=3$ .	5
Lema 1.	8
Lema 2.	9
Capítulo III. Criterios.	19
Proposición 1.	20
Teorema Principal.	21
Criterio 1.	21
Criterio 2.	22
Etapas para llegar al Criterio 3.	23
Proposición 2.	29
Proposición 3.	30
Criterio 3.	31
Criterio 3'.	32
Capítulo IV. Indice de Cauchy.	33
1. Definiciones.	33
2. Caracterización de una función racional en un polo.	35
3. Indice de Cauchy.	37
4. Propiedades del indice.	38
Propiedad 1.	38
Propiedad 1'.	38
Propiedad 2.	38
Propiedad 3.	39
Propiedad 3'.	39
Propiedad 4.	39
Propiedad 5.	40

Proposición 1.	40
5.Condiciones de Estabilidad a través del índice	42
Teorema 1.	43
Lema Auxiliar.	43
Simplificación 1.	44
Teorema 1'.	44
Simplificación 2.	44
Teorema 2.	47
<b>Apéndicos del Capítulo I</b>	<b>1</b>
Apéndice 1.A.	1
Apéndice 1.B.	1
Apéndice 1.C.	4
Apéndice 1.D.	7
<b>Apéndicos del Capítulo II</b>	<b>9</b>
Apéndice 2.A.	9
Apéndice 2.B.	10
Apéndice 2.C.	11
Apéndice 2.D.	16
Apéndice 2.E.	17
Apéndice 2.F.	24
Apéndice 2.G.	25
<b>Apéndicos del Capítulo III</b>	<b>26</b>
Apéndice 3.A.	26
Apéndice 3.B.	26
Apéndice 3.C.	27
Apéndice 3.D.	28
Apéndice 3.E.	29
Apéndice 3.F.	29
Apéndice 3.G.	30
Apéndice 3.H.	35
Apéndice 3.I.	39
<b>Apéndicos del Capítulo IV</b>	<b>40</b>
Apéndice 4.A.	40
Apéndice 4.B.	41
Apéndice 4.C.	41
Apéndice 4.D.	42
Apéndice 4.E.	43
Apéndice 4.F.	44

<b>Apéndice 4.G.</b>	<b>45</b>
<b>Apéndice 4.H.</b>	<b>48</b>
<b>Apéndice 4.I.</b>	<b>51</b>
<b>Apéndice 4.J.</b>	<b>52</b>
<b>Apéndice 4.K.</b>	<b>53</b>
<b>Referencias</b>	<b>55</b>

## "INTRODUCCIÓN"

La motivación básica del problema que aquí será tratado se encuentra en las ecuaciones diferenciales que sirven de modelos a un sinnúmero de fenómenos de naturaleza muy variada. Un método típico para buscar las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes consiste en buscarlas como funciones exponenciales, lo cual reduce la ecuación diferencial a un polinomio llamado polinomio característico. Por otro lado un teorema básico de la Teoría de Estabilidad en el sentido de Lyapunov consiste en caracterizar a una solución trivial como estable si la parte real de las raíces del polinomio característico es negativa. Por esto es que resulta relevante plantearse el buscar los criterios bajo los cuales todas las raíces de un polinomio tienen parte real negativa.

Los resultados descritos en el presente trabajo son de tipo cualitativo debido a que sin conocer las raíces de los polinomios se obtiene información acerca de su comportamiento.

A mediados del siglo pasado las máquinas de vapor eran poco potentes, muy seguras y funcionaban adecuadamente con reguladores de aspas de Watt. Posteriormente el incremento en la potencia y rapidez alcanzada por las máquinas hicieron que tales reguladores, por causas que no se entendían fallaran lo cual se manifestaba en problemas de inestabilidad en su funcionamiento llegando incluso a su destrucción.

El físico inglés Maxwell J. fue el primero que intentó encontrar los principios bajo los cuales trabajan los reguladores automáticos de las máquinas de vapor. En 1868 publicó un trabajo sobre reguladores, donde por primera vez se da una explicación, con base en la investigación teórica desarrollada, de las causas del trabajo inestable de las máquinas de vapor. Para poderlo analizar en forma teórica tuvo que imponer hipótesis simplificadoras que excluyeron el caso práctico importante de las máquinas de vapor con regulador de aspas de Watt.

De hecho con este trabajo se plantea el problema de buscar las condiciones de estabilidad de polinomios de cualquier grado.

Este problema fue planteado y resuelto por el matemático francés Hermite en 17 años antes que Maxwell; sin embargo, los trabajos de Hermite pasaron desapercibidos porque a los ingenieros les interesaban algoritmos prácticos o fórmulas, y los trabajos de Hermite no llegaron a tal.

En ese sentido tuvieron mayor repercusión práctica los resultados del Ing. Vishnegradskii, con su trabajo (1876) sobre reguladores de acción directa que lo dedicó específicamente a la "maquina de vapor-regulador de Watt"; así como su investigación teórica de un criterio práctico (Criterio 2 del Capítulo III) y una interpretación geométrica, que fueron muy usados por proyectistas y constructores.

El problema planteado por Maxwell fue resuelto por el inglés Rauss (en 1875) mediante un algoritmo que con un número finito de operaciones aritméticas permitía determinar si un polinomio cualquiera era de tipo estable o no.

Por otro lado, el iniciador de la Teoría de Regulación en Turbinas fue el Ing. eslovaco Stodola, quien demostró la condición necesaria de estabilidad para polinomios con coeficientes reales (Teorema 2 del Capítulo I). A su vez planteó el problema de la obtención de condiciones necesarias y suficientes al matemático alemán Hurwitz. Todo esto fue hecho en forma independiente al trabajo de Rauss a fines del siglo pasado. Hurwitz con base en los trabajos de Hermite resolvió el problema mediante desigualdades.

Al inicio del presente siglo los trabajos de los franceses Lienard y Shipard permitieron disminuir las operaciones para la comprobación de desigualdades Criterio de Rauss-Hurwitz a la mitad.

Los ingenieros y los matemáticos de alguna forma han investigado y redescubierto los criterios anteriormente mencionados; así por ejemplo, el llamado Criterio Geométrico del Ing. Mijailov no

sólo aparece en el trabajo de Hermite, sino que es la base fundamental de su investigación. Sin embargo en 1937 su Criterio alcanza fama en círculos ingenieriles. En este trabajo aparece como el Criterio 1 del Capítulo III.

Este trabajo corresponde a un tema clásico muy tratado en artículos, monografías y libros de texto, por lo tanto, puede considerarse como un tema alternativamente sistematizado. El presente trabajo, a pesar de no contener nuevos resultados matemáticos, da un este enfoque logrado en gran parte gracias a los trabajos de Gantmajer [2] y Postnikov [3] que pretende hacer accesible el material incluso a estudiantes de Ingeniería, incorporando para ello apéndice donde aparecen casi todas las demostraciones de las proposiciones, teoremas, afirmaciones y criterios del texto principal.

El contenido de la presente tesis consiste en el Capítulo I, donde por la sencillez de los polinomios tratados de grado 1 y 2 se busca una condición necesaria y suficiente para su estabilidad a través de la obtención explícita de las soluciones de tales polinomios. Sin embargo en toda la tesis se busca obtener resultados sin conocer explícitamente las soluciones. Por otro lado, la existencia de las soluciones de tales ecuaciones queda garantizada por el Teorema fundamental del Álgebra. En el Capítulo II se sigue la metodología de ir analizando casos particulares para ubicar regularidades generales; se introduce la característica de amplitud de fases y la característica de fases. En base al Capítulo II, en el Capítulo III se llegan a formular criterios específicos si un polinomio es estable; particularmente el Criterio 3, requiere técnicamente para ser resuelto un aparato matemático altamente sistematizado, como lo son los Índices de Cauchy de una función racional. Estos son introducidos en el Capítulo IV y es reformulado el Criterio 3 a través de los Índices de Cauchy.



## CAPITULO I.

### PRIMER INTENTO.

#### DEFINICION 1:

Llamaremos a un polinomio ESTABLE, si la parte real de todas sus raíces es negativa.

En este primer intento consideraremos a los polinomios de coeficientes reales con la restricción de que el coeficiente de su máxima potencia  $a_0$  sea positivo.

•El polinomio de primer grado:

$$P(x) = a_0 x + a_1 \quad \dots(1.1)$$

tiene como única raíz al número real:

$$x = -\frac{a_1}{a_0} \quad \dots(1.2)$$

luego entonces la raíz será negativa si y sólo si  $a_1 > 0$ . Véase el APENDICE (1.A).

-- o --

•El polinomio de segundo grado:

$$P(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 \quad \dots(1.3)$$

tiene por raíces a:

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0} \quad \dots(1.4)$$

y los posibles casos cuando sus partes reales son negativas se analizan a través de los valores que toma el radicando.

En todos los casos resulta que las raíces tienen parte real negativa si y sólo si  $a_1 > 0$  y  $a_2 > 0$ , bajo la hipótesis de  $a_0 > 0$ . Véase el APENDICE (1.B).

Los resultados que aseguran estabilidad de los polinomios de primer y segundo grados están contenidos en el siguiente TEOREMA 1.

**TEOREMA 1:**

Los polinomios de primer y segundo grado, con coeficientes reales y el coeficiente de su máxima potencia mayor que cero, son estables si y sólo si todos los demás coeficientes son positivos.

-- o --

Para polinomios de grados mayores que dos la situación cambia.

• En efecto el polinomio de tercer grado:

$$P(z) = z^3 + z^2 + 2z + 8 \quad \dots(1.5)$$

tiene todos sus coeficientes positivos y sin embargo dentro de sus raíces aparecen, además de una raíz con parte real negativa que es la raíz real  $z_1 = -2$ , dos raíces con parte real positiva que son:

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15} i}{2} \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15} i}{2}$$

cuya obtención se hizo usando el procedimiento dado en el APÉNDICE (1.C).

El polinomio (1.5) sirve de contraejemplo a la proposición de que si los coeficientes de un polinomio de grado tres son positivos, entonces el polinomio es estable.

Este ejemplo nos da la pauta para enunciar el siguiente teorema general:

**TEOREMA 2:**

Si el polinomio

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad \dots(1.6)$$

con coeficientes  $a_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ) reales y  $a_0 > 0$  es estable, entonces todos sus coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son positivos.

La demostración se detalla en el APÉNDICE (1.D).

El teorema recíproco no es cierto, recuérdese el polinomio (1.5).

## CAPITULO II.

### BASES PARA EL METODO DE AMPLITUDES DE FASE (HERMITE-MIJAILOV) Y OTROS CRITERIOS.

En lo sucesivo consideraremos polinomios  $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Comencemos la primera etapa de este método estudiando a los polinomios  $P$  restringiendo la variable  $z$  al eje imaginario es decir, consideremos complejos  $z$  de la forma  $i\omega$ , que sirve para separar las raíces con parte real negativa y no negativa y estudiar la curva resultante de separar la parte real de la parte imaginaria poniendo en correspondencia dicho polinomio con la representación paramétrica:

$$\begin{cases} x = u(\omega) \\ y = v(\omega) \end{cases}$$

Para ilustrar la primera etapa del método, veámoslo funcionar en el caso de los siguientes polinomios:

• Caso  $n=1$ :

$$P(z) = a_0 z + a_1$$

$$\therefore P(i\omega) = a_0 i\omega + a_1$$

denotando la parte real e imaginaria por  $x$  y  $y$  respectivamente tenemos la siguiente representación paramétrica de la curva:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 \\ y &= a_0 \omega \end{aligned} \right\} \dots (2.1)$$

que al variar  $\omega$  de  $-\infty$  a  $+\infty$  resulta ser la recta vertical  $x=a_1$ , ya que en efecto al cambiar  $\omega$  de  $-\infty$  a  $+\infty$  el punto  $(x(\omega), y(\omega)) = (a_1, a_0 \omega)$  perteneciente a la recta  $x=a_1$  que varía monótonamente sobre dicha recta de abajo hacia arriba y por lo tanto su orientación es la indicada en la Fig. 2.1.

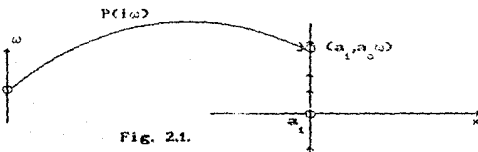


Fig. 2.1.

•Caso  $n=2$ :

$$\begin{aligned}
 P(z) &= a_0 z^2 + a_1 z + a_2 \\
 \therefore P(i\omega) &= a_0 (i\omega)^2 + a_1 i\omega + a_2 \\
 &= [-a_0 \omega^2 + a_2] + ia_1 \omega \\
 \left. \begin{aligned}
 x &= -a_0 \omega^2 + a_2 \\
 y &= a_1 \omega
 \end{aligned} \right\} \dots(2.2)
 \end{aligned}$$

Esta admite los siguientes 2 subcasos discriminados por los posibles valores de  $a_1$ , factor entre el cual hay que dividir para eliminar  $\omega$  en (2.2).

Subcaso 1.

Si  $a_1=0$ , entonces al variar  $\omega$  de  $-\infty$  a  $+\infty$  la curva tendrá la forma de una semirecta en el eje horizontal, ya que cuando  $\omega \rightarrow -\infty$  la curva se recorre de izquierda a derecha hasta  $a_2$  y cuando  $\omega \rightarrow +\infty$  de

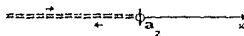


Fig. 2.2.

derecha a izquierda, es decir siempre se tiene que  $x \leq a_2$ . Véase la Fig. 2.2.

Subcaso 2.

Si  $a_1 \neq 0$ , entonces en la representación de la curva (2.2) eliminemos el parámetro  $\omega$ , obteniéndose que

$$x = -a_0 \frac{y^2}{a_1^2} + a_2$$

Esta es la ecuación de una parábola abierta hacia la izquierda cuyo eje coincide con el semieje que llega hasta  $a_2$ . La orientación de la parábola para el caso  $a_1 > 0$  y su contraria  $a_1 < 0$  se ilustran en la Fig. 2.3. Lo cual es fácilmente perceptible en la computadora.

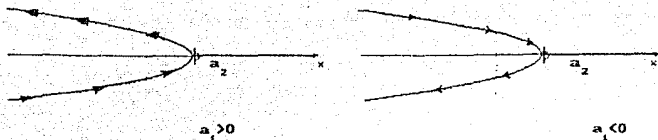


Fig. 2.3.

• Caso  $n=3$ :

$$\begin{aligned}
 P(z) &= a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 \\
 \therefore P(i\omega) &= a_0 (i\omega)^3 + a_1 (i\omega)^2 + a_2 (i\omega) + a_3 \\
 &= [-a_1 \omega^2 + a_3] + i[-a_0 \omega^3 + a_2 \omega] \\
 \left. \begin{aligned}
 x &= -a_1 \omega^2 + a_3 \\
 y &= -a_0 \omega^3 + a_2 \omega
 \end{aligned} \right\} \dots (2.3)
 \end{aligned}$$

y si en esta curva hacemos variar  $\omega$  de  $-\infty$  a  $+\infty$ , obtendremos los casos siguientes, discriminados por los valores de  $a_1$  factor entre el cual hay que dividir para eliminar el parámetro  $\omega$  de (2.3).

1) Para  $a_1 \neq 0$ :

Eliminemos el parámetro  $\omega$  de la representación paramétrica (2.3), para ello despejamos  $\omega^2$  de la primera expresión de (2.3) y la sustituimos en la segunda obteniendo así la parábola somicúbica:

$$y = -a_0 \left( \frac{x - a_3}{-a_1} \right)^{3/2} + a_2 \left( \frac{x - a_3}{-a_1} \right)^{1/2}$$

Una ecuación más manejable puede darse efectuando algunas operaciones que se realizan en APENDICE(2.A). La siguiente es la ecuación simplificada de la parábola somicúbica

$$y^2 = -\frac{a_0^2}{a_1^3} (x - a_3)(x - A)^2$$

$$\text{con } A = a_3 - \frac{a_2^2}{a_0}$$

obsérvese que la forma de la curva depende de los signos de  $a_1$  y  $a_0$ , cosa que claramente se ve en la tercera fórmula del desarrollo del

APENDICE (2.A) que a su vez nos lleva a los siguientes tres casos cualitativamente diferentes. Véase el APENDICE (2.B).

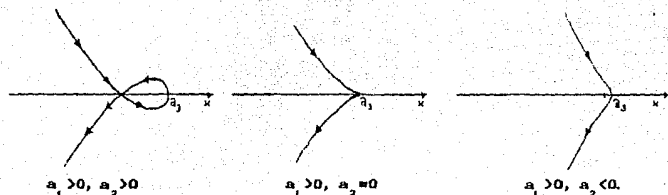


Fig. 2.4.

Aquí la posición del eje y queda determinada en términos del valor de:

$$\frac{a_1^2}{a_1^3} a_2 A^2$$

En particular el polinomio  $\omega$  evaluado en  $\omega_0$  pasará por el origen si y sólo si:  $a_2 \omega_0 = 0$ , o bien  $A=0$ , es decir cuando  $a_1 \omega_0 = a_1 a_2$ , teniendo los siguientes casos:

$$a_2 < 0 \begin{cases} a_1 > 0, a_2 < 0 \\ a_1 < 0, a_2 > 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad a_2 > 0 \begin{cases} a_1 > 0, a_2 > 0 \\ a_1 < 0, a_2 < 0 \end{cases}$$

El análisis de estos casos posibles puede hacerse conforme al esquema indicado en el APENDICE (2.C).

ii) Para  $a_1 = 0$ :

En este caso observamos que las ecuaciones paramétricas (2.3) degeneran en:

$$\begin{cases} x = a_2 \\ y = -a_0 \omega^3 + a_2 \omega = -\omega(a_0 \omega^2 - a_2) \end{cases} \quad \dots(2.4)$$

esto significa que  $x = a_2$  es una recta vertical, pero además como la  $y = -\omega(a_0 \omega^2 - a_2)$  cuando el valor absoluto de  $\omega$  es muy grande pero  $\omega$  es positivo el punto  $(x, y)$ , de la curva 'en nuestro caso de la recta' estará en la parte superior de la recta y al variar  $\omega$  desde dichos

valores hasta valores muy grandes, pero positivos la recta  $x=a_2$ , será recorrida de arriba hacia abajo.

Entonces al variar  $\omega$  de  $-\infty$  a  $+\infty$  nuestra curva será una recta vertical dirigida hacia abajo, pero además el punto  $(x,y)$  montado en la recta  $x=a_2$ , sólo dependerá del signo de  $a_2$ , o bien se mueve monótonamente hacia abajo, o bien realiza una oscilación al pasar por su intersección con el eje horizontal.

El análisis más detallado puede verse en el APENDICE (2.D).

--o--

Lo que hicimos para los casos anteriores podemos generalizarlo al polinomio de grado  $n$ .

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

donde  $a_0 > 0$ , y además introducimos las funciones  $u$  y  $v$  que representan las partes real e imaginaria del polinomio anterior respectivamente al evaluar en  $z=i\omega$ , es decir

$$P(i\omega) = a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (i\omega) + a_n$$

y la generalización a cualquier  $n$  puede tomar la forma :

$$\text{cuando } n \text{ es impar } n=2m+1: \begin{cases} u(\omega) = (-1)^m a_1 \omega^{n-1} + (-1)^{m-1} a_2 \omega^{n-2} + \dots + a_n \\ v(\omega) = (-1)^m a_0 \omega^n + (-1)^{m-1} a_1 \omega^{n-1} + \dots + a_{n-1} \omega \end{cases} \dots(2.5)$$

$$\text{cuando } n \text{ es par } n=2m: \begin{cases} u(\omega) = (-1)^m a_0 \omega^n + (-1)^{m-1} a_1 \omega^{n-1} + \dots + a_n \\ v(\omega) = (-1)^{m-1} a_1 \omega^{n-1} + (-1)^{m-2} a_2 \omega^{n-2} + \dots + a_{n-1} \omega \end{cases}$$

donde la validación de estas fórmulas puede hacerse intuitivamente a partir de analizar los casos concretos para  $n=1,2,3$  y una vez propuestas las fórmulas de (2.5), estas pueden demostrarse por inducción.

Por comodidad, como se verá en el Capítulo IV, podemos introducir las funciones  $U$  y  $V$  definidas por:

$$U(x) = \begin{cases} a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_n, & \text{si } n=2m+1 \\ a_0 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_n, & \text{si } n=2m \end{cases} \quad \dots(2.6)$$

$$V(x) = \begin{cases} a_0 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_{n-1}, & \text{si } n=2m+1 \\ a_1 x^{m-1} + a_3 x^{m-2} + \dots + a_{n-1}, & \text{si } n=2m \end{cases}$$

Observándose que las partes reales del polinomio par e impar son tales que  $u(\omega) = U(-\omega^2)$ , lo cual se comprueba directamente substituyendo  $x = -\omega^2$  en  $U(x)$ . Para las partes imaginarias del polinomio impar y par respectivamente tenemos:

$$v = \begin{cases} (-1)^m a_0 \omega^n + (-1)^{m-1} a_2 \omega^{n-2} + \dots + a_{n-1} \omega = \omega [(-1)^m a_0 \omega^{n-1} + (-1)^{m-1} a_2 \omega^{n-3} + \dots + a_{n-1}] \\ (-1)^{m-1} a_1 \omega^{n-1} + (-1)^{m-2} a_3 \omega^{n-3} + \dots + a_{n-1} \omega = \omega [(-1)^{m-1} a_1 \omega^{n-2} + (-1)^{m-2} a_3 \omega^{n-4} + \dots + a_{n-1}] \end{cases}$$

en las cuales observamos que  $v(\omega) = \omega V(-\omega^2)$  lo que se comprueba también substituyendo  $x = -\omega^2$  en  $V(x)$  y por ende

$$\begin{cases} u(\omega) = U(-\omega^2) \\ v(\omega) = \omega V(-\omega^2) \end{cases}$$

o sea,

$$P(i\omega) = U(-\omega^2) + i\omega V(-\omega^2) \quad \dots(2.7)$$

Para el caso de coeficientes complejos se obtienen resultados similares. Esto puede verse al inicio del Capítulo III.

Todo lo anterior lo podemos resumir en el siguiente lema:

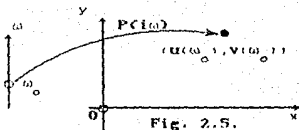
LEMA 1:

$$\begin{cases} \text{Si } n \text{ es impar} & \begin{cases} \text{el grado del polinomio } u \text{ es } = n-1, \\ \text{y el grado del polinomio } v \text{ es } = n, \end{cases} \\ \text{Si } n \text{ es par} & \begin{cases} \text{el grado del polinomio } u \text{ es } = n, \\ \text{y el grado del polinomio } v \text{ es } = n-1, \end{cases} \end{cases}$$

La demostración es en esencia la justificación por inducción de las fórmulas (2.5).



Obsérvese que geoméricamente el complejo  $P(i\omega)$  describe una curva, al variar el número real  $\omega$  en el intervalo  $(-\infty, +\infty)$ , sobre el plano complejo en el que la variable  $z$  toma sus valores. Tal curva es descrita por las ecuaciones paramétricas (el parámetro es  $\omega$ ) son:



$$\begin{cases} x=au(\omega) \\ y=av(\omega) \end{cases} \quad \dots(2.8)$$

donde  $z = x + iy$ .

#### DEFINICION 1:

A las ecuaciones paramétricas (2.8) se le llama curva de amplitud de fases del polinomio P. Y a la gráfica de la curva (2.8) se le llama la característica de la amplitud de fases del polinomio P.

Observemos que al variar  $\omega$  en  $\mathbb{R}$ , el punto  $i\omega$  recorre el "eje imaginario" que representa la frontera de los semiplanos izquierdo y derecho. La característica de amplitud de fases resulta ser la imagen del eje imaginario  $i\omega$  bajo la transformación  $P(z)$  del plano.

Por otro lado también obsérvese que la introducción de los polinomios  $u$  y  $v$  es conveniente, dado que un  $\omega_0$  que haga simultáneamente  $u(\omega_0)=0$  y  $v(\omega_0)=0$  significa que tal  $\omega_0$  es el valor del parámetro para el que la curva (2.8) pasa por el origen de coordenadas, lo cual significa que  $i\omega_0$  es raíz del polinomio original P lo que a su vez significa que el polinomio P no es estable, ya que la parte  $\text{Re}(i\omega) = 0$ , por todo esto se justifica el LEMA 2 y el COROLARIO 1 siguientes:

#### LEMA 2:

El polinomio P tiene por raíz imaginaria pura a  $z_0 = i\omega_0$  si y sólo si los polinomios  $u$  y  $v$  tienen por raíz real común a  $\omega_0$ .

La demostración de este LEMA es inmediata.

**COROLARIO 1:**

Si los polinomios  $u$  y  $v$  tienen una raíz real común, esto es si la característica de amplitud de fases pasa por el origen, entonces el polinomio  $P$  no es estable.

Es suficiente con indagar si la curva que llamamos característica de amplitud de fases pasa o no por el cero (Fig. 2.6. y 2.7.).

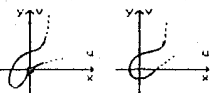


Fig. 2.6. Fig. 2.7.

Obsérvese que de la estructura de  $P$ , con coeficientes reales, por haberse podido llevar a la forma  $P(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$ , donde

$$\begin{cases} u(\omega) = U(-\omega^2) \\ v(\omega) = \omega V(-\omega^2) \end{cases}$$

tendremos que al cambiar a  $\omega$  por  $-\omega$  la función  $u$  no varía ( $u$  resulta ser una función par), mientras que  $v$  resulta ser una función impar ya que cambia de signo al variar  $\omega$  por  $-\omega$ . Esto significa que la característica de amplitudes de fases:

$$\begin{cases} x = u(\omega) \\ y = v(\omega) \end{cases}$$

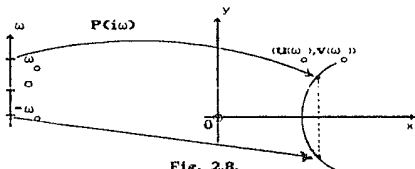


Fig. 2.8.

es simétrica respecto al eje horizontal  $x$  donde los puntos simétricos corresponden a valores del parámetro  $\omega$  con signos contrarios y por tanto la gráfica de dicha curva es de la forma indicada en la Fig. 2.8.

Antes de empezar con la segunda parte de este método recuerdese las definiciones básicas de números complejos, por ejemplo véanse en [4] o [5].

Usaremos las siguientes propiedades cuya justificación puede verse en algún texto de variable compleja, en particular en [4] o [5].

i)  $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$  / donde  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  y esta igualdad se sigue cumpliendo si en su parte derecha agregamos un número entero de vueltas, es decir si agregamos  $2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

ii)  $\forall \left\{ z : \begin{matrix} a, b \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ z = z(\omega) = u(\omega) + iv(\omega) \in \mathbb{C}_{(a,b)} \\ \neq 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \exists ! \left\{ \begin{matrix} \varphi : a, b \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi = \varphi(\omega) \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \varphi(\omega_0) = \arg z(\omega_0) = \varphi_0 \\ -\pi < \varphi_0 \leq \pi \end{matrix} \right\}$

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{v(\omega)}{u(\omega)}$$

/Para cualquier función  $z$  no cero de variable real no cero con valores complejos y continua en su dominio, existe una única función  $\varphi$  de variable real con valores reales tal que dado un valor inicial  $\varphi_0$  su  $\tan \varphi(\omega) = \frac{v(\omega)}{u(\omega)}$ .

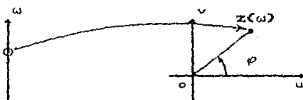


Fig. 2.9.

La función  $\varphi(\omega)$  la podemos interpretar para cada  $\omega$  como el argumento del complejo  $z(\omega)$ , es decir, como el ángulo formado por el vector de posición del mismo complejo  $z(\omega)$ . Véase la Fig. 2.9.

En nuestro caso, esto es, en el caso de la característica de amplitud de fases, o sea para

$$\begin{aligned} P(i\omega) &= u(\omega) + iv(\omega) \\ &= |P(i\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

Podemos expresar la propiedad arriba mencionada en el siguiente lema:

**LEMA 3:**

Si la parte real o imaginaria  $u$  y  $v$  del polinomio  $P(i\omega)$ , no tiene raíces  $\omega$  que reduzcan a cero simultáneamente los dos polinomios, entonces existe una única función  $\omega \mapsto \varphi(\omega)$ , con  $\omega \in \mathbb{R}$ , que satisface

las siguientes propiedades:

i)  $\varphi(\omega) \in \mathbb{C}_R$  (la función  $\varphi$  es continua para todo  $\omega$ ).

ii)  $-\pi < \varphi(0) \leq \pi$  (la función  $\varphi$  en  $\omega=0$  queda caracterizada por tal desigualdad).

$$\cos \varphi(0) = \frac{u(0)}{\sqrt{u(0)^2 + v(0)^2}}, \quad \text{sen } \varphi(0) = \frac{v(0)}{\sqrt{u(0)^2 + v(0)^2}}$$

$$\text{iii) } \tan \varphi(\omega) = \frac{v(\omega)}{u(\omega)}, \quad \forall \omega \in \mathbb{P}.$$

---o---

Obsérvese en particular que si  $P(z)$  es el polinomio de grado  $n$ :

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

con coeficientes reales  $a_k \in \mathbb{R}$  y  $a_n \neq 0$ , entonces

$$P(i\omega) = a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \dots + a_n = u(\omega) + iv(\omega)$$

evaluado en  $\omega=0$  tendremos

$$P(0) = a_n = u(0) + iv(0) = u(0) + i0$$

pero a este valor pueden corresponder sólo dos posibles valores del ángulo  $\varphi(0)$ .

i) Si  $a_n > 0$ :

$$\text{sen } \varphi(0) = \frac{v(0)}{\sqrt{u(0)^2 + v(0)^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen } \varphi(0) = \frac{0}{a_n} \rightarrow \varphi(0) = 0$$



Fig. 2.10.

ii) Si  $a_n < 0$ :

$$\cos \varphi(0) = \frac{u(0)}{\sqrt{u(0)^2 + v(0)^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos \varphi(0) = \frac{a_n}{|a_n|} \rightarrow \cos \varphi(0) = -1 \rightarrow \varphi(0) = \pi$$

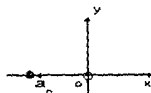


Fig. 2.11.

Hemos obtenido así que cuando  $P(z)$  es de coeficientes reales :

$$\rho(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_n > 0 \\ \pi, & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

DEFINICION 2:

A la función  $\begin{cases} \rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \rho = \varphi(\omega) \end{cases}$ , que satisface las condiciones del LEMA 3 se le llama función de fases del polinomio  $P$  y a su gráfica característica de fases de dicho polinomio.

A esta función  $\rho$  se le puede interpretar como el ángulo del vector de posición que genera a la característica de amplitud de fases, aunque tiene su gráfica propia que es lo que estamos llamando característica de fases. Obsérvese la ilustración de la Fig. 2.12.

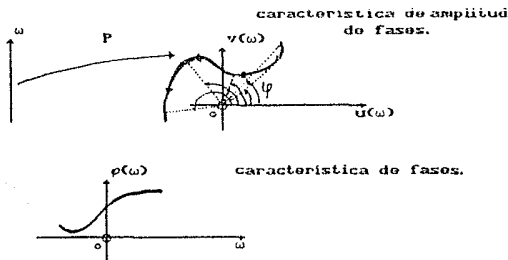


Fig. 2.12.

La función de fases  $\rho: \omega \mapsto \rho(\omega)$  nos queda caracterizada para el caso general de un polinomio  $P$  de grado  $n$  en los siguientes dos subcasos, basados en el LEMA 1.

i) Si  $n$  es impar:  $\tan \varphi(\omega) = \frac{v(\omega)}{u(\omega)} = \frac{\text{polinomio de grado } n}{\text{polinomio de grado } n-1}$

$$\therefore \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \tan \varphi(\omega) = \infty, \text{ es decir } \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \tan \varphi(\omega) = +\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \tan \varphi(\omega) = -\infty \end{cases}$$

ii) Si  $n$  es par:  $\tan \varphi(\omega) = \frac{\text{polinomio de grado } n-1}{\text{polinomio de grado } n}$

$$\therefore \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \tan \varphi(\omega) = 0, \text{ es decir } \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \tan \varphi(\omega) = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \tan \varphi(\omega) = 0 \end{cases}$$

Todos estos casos, pero desglosados los resumimos en el siguiente:

**LEMA 4:**

Si la función de fases  $\varphi(\omega)$  admite la existencia de sus límites infinitos, los cuales serán denotados por :

$$\begin{cases} \varphi(-\infty) = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \varphi(\omega) \\ \varphi(+\infty) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \varphi(\omega) \end{cases}$$

se observan los siguientes casos:

i) Si  $n$  es impar:  $\begin{cases} \varphi(-\infty) = \pi/2 + N\pi \\ \varphi(+\infty) = \pi/2 + M\pi \end{cases}$

ii) Si  $n$  es par:  $\begin{cases} \varphi(-\infty) = N\pi \\ \varphi(+\infty) = M\pi \end{cases}$

donde la  $N$  y la  $M$  son ciertos números enteros.

A este LEMA 4 podemos darle la siguiente interpretación:

La característica de fases, tiene dos asíntotas horizontales en cada caso (ya que tales asíntotas horizontales están dadas por los límites infinitos de  $\varphi(\omega)$  si existen,  $\lim_{\omega \rightarrow -\infty} \varphi(\omega)$  y  $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \varphi(\omega)$ ).

Si  $n$  es impar:

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \varphi(\omega) = \pi/2 + N\pi \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \varphi(\omega) = \pi/2 + M\pi \end{cases}$$

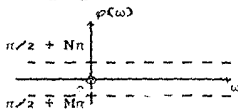


Fig. 2.13.

Si  $n$  es par:

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \varphi(\omega) = N\pi \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \varphi(\omega) = M\pi \end{cases}$$

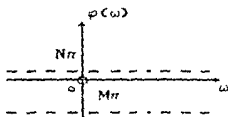


Fig. 2.14.

Y como el ángulo final  $\varphi(+\infty)$  menos el ángulo inicial  $\varphi(-\infty)$  es igual en ambos casos a  $(M-N)\pi$ , esta será la distancia entre las asíntotas descritas en las figuras (2.13), (2.14) y (2.15).

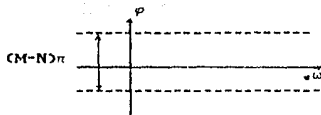


Fig. 2.15.

No obstante que la gráfica de las ramas infinitas de la curva de amplitud de fases  $\begin{cases} x=uv(\omega) \\ y=vv(\omega) \end{cases}$ , cuando  $\omega \rightarrow -\infty$  y  $\omega \rightarrow +\infty$ , no se aproximan asintóticamente a los ejes coordenados, pues ambas coordenadas  $(x,y)$  aumentan su valor sin cota alguna, la dirección del vector de posición  $\vec{OM}$  ( $M=(x,y)$ ) tiende a la dirección del eje vertical si  $n$  es impar y si  $n$  es par tiende a la dirección del eje horizontal.

En rigor para  $n$  impar la ordenada  $y$  crece en valor absoluto significativamente más rápido que la abscisa  $x$  e inversamente si  $n$  es par.

Finalmente introduzcamos un nuevo parámetro  $\Delta_p$  que caracteriza el número de medias vueltas que da el ángulo  $\varphi(\omega)$ .

En otras palabras definamos :

$$\Delta_p = (\text{ángulo final} - \text{ángulo inicial})/\pi$$

$$\Delta_p = \frac{\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)}{\pi}$$

/mide las medias vueltas que da el vector de posición/.

1

Observese que en efecto

$$\Delta_p = \frac{\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)}{\pi} = \frac{M\pi - N\pi}{\pi} = M-N.$$

/medias vueltas queda el vector de posición de la característica de amplitud de fases/.

Analizemos de nuevo los polinomios elementales:

CASO  $n=1$  :

$$P(z) = a_0 z + a_1 \quad \text{con } a_0 > 0, \quad \begin{cases} x = a_1 \\ y = a_0 \omega \end{cases}$$

$$i) \ a_1 > 0 \quad \therefore \Delta_p = \frac{\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)}{\pi}$$

$$\begin{aligned} \varphi(-\infty) &= -\pi/2 \\ \varphi(+\infty) &= \pi/2 \end{aligned} \quad \Delta_p = \frac{\pi/2 - (-\pi/2)}{\pi} \quad \therefore \Delta_p = 1 \text{ /da una media vuelta completa} \\ \text{contrareloj/}.$$

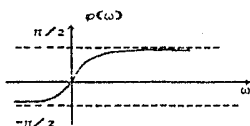
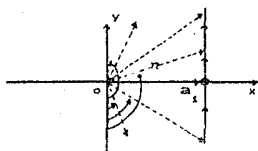


Fig. 2.16.

ii)  $a_1 < 0$

$$\begin{aligned} \varphi(-\infty) &= -\pi/2 \\ \varphi(+\infty) &= -3\pi/2 \end{aligned} \quad \therefore \Delta_p = \frac{-3\pi/2 - (-\pi/2)}{\pi} \quad \therefore$$

$\Delta_p = -1$  /da una media vuelta completa, pero a reloj/.

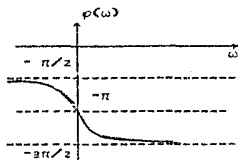
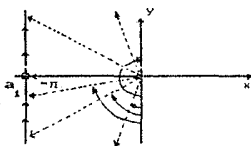


Fig. 2.17.

El caso del polinomio  $P$  para  $n = 2$  y  $3$  puede verse desglosado en APÉNDICE (2.E).



Todos los casos desglosados para  $n = 3$  en el APENDICE (2.E) los podemos resumir en la siguiente:

**PROPOSICION 1:**

Para el polinomio de tercer grado  $P(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$  se cumplen :

- i)  $\Delta_p = 3 \Leftrightarrow a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$  y  $a_1 a_2 > a_0 a_3$
- ii)  $\Delta_p = 1 \Leftrightarrow a_3 < 0$  (además, si  $a_1 < 0$  y  $a_2 > 0$  entonces también  $a_1 a_2 < a_0 a_3$ )
- iii)  $\Delta_p = -1 \Leftrightarrow a_3 > 0$  (además, si  $a_1 > 0$  y  $a_2 > 0$  entonces también  $a_1 a_2 < a_0 a_3$ )
- iv)  $\Delta_p = -3 \Leftrightarrow a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 < 0$  y  $a_1 a_2 > a_0 a_3$ .

En todos los casos se supone que  $P$  no tiene raíces imaginarias  $P(i\omega) \neq 0$ , es decir que la característica de amplitud de fases no pasa por el origen esto es  $a_3 \neq 0$  y  $a_1 a_2 \neq a_0 a_3$ .

El análisis de la característica de fases  $\varphi(\omega)$  se simplifica mediante el siguiente:

**LEMA 5:**

Si  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son las funciones de fases de los polinomios  $P_1$  y  $P_2$ , entonces la función de fase  $\varphi$  del polinomio  $P_1 P_2$  está dada por:

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + 2\pi k$$

donde  $k=0,1,-1$  y toda  $\omega \in \mathbb{R}$ .

La demostración de este LEMA 5 puede verse en el APENDICE (2.F).

**COROLARIO 2:**

Cualesquiera que sean los polinomios  $P_1$  y  $P_2$  se tendrá que el número de medias vueltas completas que realiza  $\varphi(\omega)$  para el polinomio producto  $P_1 P_2$  está dado por:

$$\Delta_{P_1 P_2} = \Delta_{P_1} + \Delta_{P_2}$$

La demostración de este puede verse en el APENDICE (2.G).

--o--

Detengámonos un momento para resumir lo que hemos hecho hasta aquí. Para el polinomio  $P$  de grado  $n$  nos fijamos en  $P(i\omega)$  que nos

generó  $P(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$ , es decir la curva:  $\begin{cases} x = u(\omega) \\ y = v(\omega) \end{cases}$ , cuya gráfica llamamos característica de amplitud de fases. Asociado a esta curva introdujimos la función  $\varphi$  que describa el ángulo que formaba el vector de posición  $\overline{OM}$  con la parte positiva del eje horizontal. A la gráfica de tal función le llamamos característica de fases. A través de esta función  $\varphi$  pudimos medir el número de medias vueltas completas que realiza el vector de posición. Esto quedó expresado a través del número  $\Delta_p$ . Lo que nos falta para concluir con este método consiste en dar los criterios para caracterizar cuándo un polinomio es ESTABLE.

### CAPITULO III.

#### CRITERIOS.

Recordemos que para el polinomio  $P$  de primer grado con coeficientes reales:

$$P(z) = a_0 z + a_1, \quad P(i\omega) = a_1 + i a_0 \omega, \quad \begin{cases} x = a_1 \\ y = a_0 \omega \end{cases}, \text{ con } a_0 > 0$$

obtuvimos que la condición necesaria y suficiente para que fuera estable resultaba ser  $a_1 > 0$ . Véase la Fig. 3.1.

Esto significa que la función de fases  $\varphi(\omega)$  queda definida en forma única como:  $\tan \varphi(\omega) = \frac{v(\omega)}{u(\omega)}$ , es decir como:  $\varphi(\omega) = \arctan(a_0 \omega / a_1)$ , cuya gráfica resulta ser la de una función monótona creciente. Véase la Fig. 3.2.

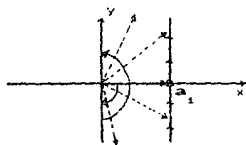


Fig. 3.1

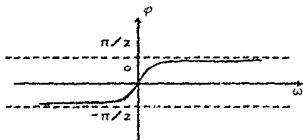


Fig. 3.2

Para el polinomio  $P$  con el mismo grado  $i$ , pero donde el coeficiente  $a_1$  es complejo, digamos:  $a_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ , también tenemos:

$$P(i\omega) = a_1 + i a_0 \omega = \alpha_1 + i(\alpha_0 \omega + \beta_1)$$

$$\therefore \begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = \alpha_0 \omega + \beta_1 \end{cases}, \text{ con } \alpha_0 \in \mathbb{R}^+, \alpha_1 = (\alpha_1 + i\beta_1) \in \mathbb{C}$$

Obteniéndose que el polinomio  $a_0 z + a_1$ , con  $a_0 \in \mathbb{R}^+$ ,  $a_1 \in \mathbb{C}$  es estable si y sólo si  $\text{Re } a_1 = \alpha_1 > 0$ . Para los detalles de la demostración véase el APENDICE (3.A).

Luego, la característica de amplitud de fases de  $P$  será la recta  $x = \alpha_1$ . De la forma paramétrica de  $y$ ,  $y = \alpha_0 \omega + \beta_1$  se ve que al variar  $\omega$  en  $(-\infty, \infty)$  la característica de amplitud de fases de  $P$  se recorre de abajo hacia arriba independientemente del signo de  $\beta_1$ . Esto se ilustra en la Fig. 3.3. Consecuente con esto resulta que si  $\alpha_1 > 0$ , es decir el polinomio es estable, entonces el ángulo  $\varphi$  recorrerá los

valores de  $-\pi/2$  hasta  $+\pi/2$ . Véase la Fig. 3.4, esto es, de nuevo la función  $\varphi(\omega) = \arctan((\alpha_0 \omega + \beta_1)/\alpha_1)$  será monótona creciente.

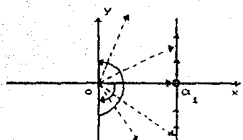


Fig. 3.3

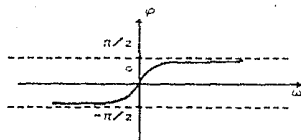


Fig. 3.4

Incluso si tomamos de nuevo el polinomio  $P$  de primer grado, pero con ambos coeficientes complejos:  $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ , con  $a_0 \neq 0$ ,  $a_0 = \alpha_0 + i\beta_0$  y  $a_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ .

$$P(i\omega) = a_1 + ia_0\omega = \alpha_1 + i\beta_1 + i(\alpha_0 + i\beta_0)\omega = \alpha_1 - \beta_0\omega + i(\beta_1 + \alpha_0\omega)$$

Luego, la forma paramétrica de la característica de amplitud de fase es

$$\begin{cases} x = \alpha_1 - \beta_0\omega \\ y = \alpha_0\omega + \beta_1 \end{cases}$$

En este caso puede demostrarse que  $P(z)$  es estable si y sólo si  $(\text{Re } a_0 \text{Re } a_1 + \text{Im } a_0 \text{Im } a_1) > 0$ , es decir si y sólo si  $(\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1) > 0$ . Véase la demostración en el APÉNDICE (3.B).

Pero lo que aquí nos interesa es ver qué ocurre con la función  $\varphi$  al variar  $\omega$  de  $-\infty$  a  $+\infty$ , bajo la hipótesis de que el polinomio es estable, esto es bajo la hipótesis de que  $(\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1) > 0$ . Lo que ocurre con todos los posibles casos de signos diferentes que puedan tomar  $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1$  y  $\beta_1$  con tal de que  $(\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1) > 0$ , es que de nuevo la función de fases  $\varphi = \arctan((\alpha_1 - \beta_0\omega)/(\alpha_0\omega + \beta_1))$  resulta ser monótona creciente.

Estos casos son suficientes como para sugerir la siguiente proposición:

#### PROPOSICION 1.

Todo polinomio  $P$  estable tiene por función de fases  $\varphi$  a una función monótona creciente.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Si el polinomio  $P$  es Completamente Inestable entonces tiene por función de fases  $\varphi$  monótona decreciente.

La demostración de esta proposición es casi inmediata de la representación general de un polinomio y del LEMA 5 del capítulo II. Véase el APÉNDICE (3.C).

En forma análoga podemos demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA PRINCIPAL:

Si el polinomio P no admite raíces imaginarias puras,  $P(i\omega) \neq 0$ , pero tiene k raíces con parte real negativa y l con parte real positiva<sup>3</sup>, entonces

$$\Delta_p = k-l \quad \dots(3.1)$$

/número de medias vueltas de p/.

La demostración de este teorema se encuentra en el APÉNDICE (3.D).

De esta forma podemos ya enunciar los criterios anteriormente prometidos, donde el primero no es sino la acumulación de las proposiciones y teoremas demostrados anteriormente:

CRITERIO 1. (Criterio de Estabilidad de Amplitud de Fases de Hermite - Mitallov).

El polinomio P de grado n, sin raíces imaginarias  $P(i\omega) \neq 0$ , es estable, si y sólo si:

$$\Delta_p = n \quad \dots(3.2)$$

Obsérvese que en general  $-n \leq \Delta_p \leq n$ , teniéndose siempre que el número  $\Delta_p$  y n son de la misma paridad.

---

<sup>3</sup> Cada raíz la estaríamos contando tantas veces como su multiplicidad de manera que:  $k+l = n = \text{grado de P}$ .

El caso extremo:  $\Delta = n$  caracteriza a los polinomios estables, mientras que  $\Delta = -n$  caracteriza a lo que podríamos llamar polinomios completamente inestables (todas sus raíces tienen parte real positiva y por ende su función de fases  $\varphi$  será monótona decreciente).

Regresemos al caso de polinomios P de grado tres. Restringidos a estos polinomios y con ayuda de las funciones de fase  $\varphi$  (recuérdese la PROPOSICION 1 del capítulo II) podemos regresar al problema de condiciones necesarias y suficientes para la ecuación de tercer grado con coeficientes reales; problema que en el capítulo I quedó resuelto sólo para polinomios de grado uno y dos, ya que para los polinomios de grado 3 sólo pudimos obtener una condición necesaria, pero no suficiente para que fuera estable.

CRITERIO 2. (Criterio de Vyshnegradskii).

El polinomio:

$$P(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 \quad \dots(3.3)$$

con coeficientes reales y  $a_0 > 0$ , es estable si y sólo si  $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$  y  $a_1 a_2 > a_0 a_3$ .

Una demostración sencilla puede intentarse reduciéndolo al CRITERIO 1. Esta puede observarse en el APENDICE (3.E).

Por otro lado vale la pena puntualizar que Vyshnegradskii formuló su criterio sólo para polinomios de la forma:

$$z^3 + \sigma z^2 + \tau z + 1 \quad \dots(3.4)$$

con  $\sigma > 0$  y  $\tau > 0$ . Pero dado que cualquier polinomio  $a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$  puede ser llevado a un polinomio del tipo (3.4) mediante la transformación  $z + \sqrt[3]{a_3/a_0} z$ . Esto puede verificarse en el APENDICE (3.F).

El considerar sólo polinomios del tipo (3.4) esencialmente no restringe la generalidad de los resultados para la ecuación general cubica y si, en cambio, permite dar una interpretación geométrica de los resultados en el espacio de parámetros  $\sigma, \tau$ .

En efecto, dado que  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$  y  $a_1 a_2 > a_0 a_3$  la condición de estabilidad para la ecuación (3.4) queda expresada como:

$$\sigma > 1 \quad \dots(3.5)$$

Esto se debe a que en la ecuación (3.4)  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = \sigma$ ,  $a_2 = \tau$  y  $a_3 = 1$ , y por lo tanto al sustituir estos valores en la condición  $a_1 a_2 > a_0 a_3$  se obtiene la condición (3.5).

Luego cada ecuación del tipo (3.4) cuya pareja  $(\sigma, \tau)$  cae en la región superior de la rama derecha de la hipérbola  $\tau = 1/\sigma$  será estable y recíprocamente todo punto  $(\sigma, \tau)$  de esta región corresponde a un polinomio estable de tipo (3.4). Véase la ilustración de la Fig. 3.5.

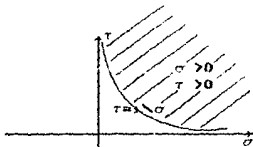


Fig. 3.5

### CRITERIO 3. (Criterio de Hermite Bilere).

Para llegar a este criterio tenemos que cubrir varias etapas:

1) La primera etapa consiste en indagar el comportamiento de la característica de amplitud de fases o sea la gráfica de  $\begin{cases} x = u(\omega) \\ y = v(\omega) \end{cases}$ , cuando el parámetro  $\omega$  tiende a  $-\infty$  y a  $+\infty$ , sabiendo que si tenemos un polinomio estable P de grado n, al variar  $\omega$  de  $-\infty$  a  $+\infty$ , el vector de posición  $\vec{OM}$  de la curva se mueve monótonamente en la dirección positiva (contrareloj).

Usando la metodología de analizar casos particulares concretos y generalizando podemos llegar a la TABLA 1 del APÉNDICE (3.6).

TABLA 1.

$\omega \rightarrow -\infty$ $\omega \rightarrow +\infty$	0	$\begin{array}{c c} + & + \\ \hline + & - \end{array}$	del 1 <sup>er</sup> al 4 <sup>to</sup>	0
$\omega \rightarrow -\infty$ $\omega \rightarrow +\infty$	1	$\begin{array}{c c} + & - \\ \hline + & + \end{array}$	del 4 <sup>to</sup> al 1 <sup>er</sup>	1
$\omega \rightarrow -\infty$ $\omega \rightarrow +\infty$	2	$\begin{array}{c c} - & - \\ \hline + & - \end{array}$	del 3 <sup>er</sup> al 2 <sup>do</sup>	2
$\omega \rightarrow -\infty$ $\omega \rightarrow +\infty$	3	$\begin{array}{c c} + & - \\ \hline - & - \end{array}$	del 2 <sup>do</sup> al 3 <sup>er</sup>	3
$\omega \rightarrow -\infty$ $\omega \rightarrow +\infty$	4	$\begin{array}{c c} + & + \\ \hline + & - \end{array}$	del 1 <sup>er</sup> al 4 <sup>to</sup>	0
$\omega \rightarrow -\infty$ $\omega \rightarrow +\infty$	5	$\begin{array}{c c} + & - \\ \hline + & + \end{array}$	del 4 <sup>to</sup> al 1 <sup>er</sup>	1
$\omega \rightarrow -\infty$ $\omega \rightarrow +\infty$	6	$\begin{array}{c c} - & - \\ \hline + & - \end{array}$	del 3 <sup>er</sup> al 2 <sup>do</sup>	2
$\omega \rightarrow -\infty$ $\omega \rightarrow +\infty$	7	$\begin{array}{c c} + & - \\ \hline - & - \end{array}$	del 2 <sup>do</sup> al 3 <sup>er</sup>	3
$\omega \rightarrow -\infty$ $\omega \rightarrow +\infty$	8	$\begin{array}{c c} + & + \\ \hline + & - \end{array}$	del 1 <sup>er</sup> al 4 <sup>to</sup>	0

Además podemos llegar por inducción al siguiente resultado general:

Para el polinomio P de grado n con coeficientes reales, la característica de amplitud de fases sólo tiene los siguientes comportamientos cuando  $\omega$  tiende a  $-\infty$  y a  $+\infty$ :

• Si n es impar  $n=2m+1$ , o bien la característica de amplitud de fases pasará del 4<sup>to</sup> cuadrante al 1<sup>er</sup>o si m es par, o bien pasará del 2<sup>do</sup> al 3<sup>er</sup> cuadrante cuando m es impar.

• Si n es par  $n=2m$ , o bien la característica de amplitud de fases pasará del 1<sup>er</sup> cuadrante al 4<sup>to</sup> si m es par, o bien pasará del 3<sup>er</sup> al 2<sup>do</sup> cuadrante cuando m es impar. Véase la Tabla 2 del APENDICE (3.G).



Como señalamos en la página 15 cuando  $\omega$  tiende a  $-\infty$  o a  $+\infty$  el vector de posición  $\vec{OM}$  de la característica de amplitud de fases tiende, cuando  $n$  es impar, a la dirección del eje vertical, mientras que si  $n$  es par tiende a la dirección del eje horizontal.

Si tomamos en cuenta el análisis detallado del APENDICE (3.6), lo anterior significa que si el residuo  $r$  que resulta de dividir el grado del polinomio  $n$  entre 4 es impar (1 y 3) entonces el vector de posición  $\vec{OM}$  tenderá a la dirección del eje vertical, mientras que si  $r$  es par (0 y 2), entonces  $\vec{OM}$  tenderá a la dirección del eje horizontal.

Estos comportamientos se repiten periódicamente, ya que los únicos residuos  $r$  generados por  $n/4$  son 0,1,2,3 (mod 4).

Veamos como interseca la característica de amplitud de fases a los ejes coordenados. Siempre ocurre que en el espacio  $(u,v)$  al variar  $\omega$  de  $-\infty$  a  $+\infty$  la curva dada por  $\begin{cases} x=uu(\omega) \\ y=vv(\omega) \end{cases}$ , interseca a alguno de los ejes coordenados si y sólo si se reduce a cero el otro eje. Esto se ilustra en las Fig. 3.6 y 3.7.

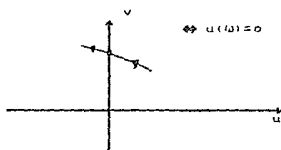


Fig.3.6.

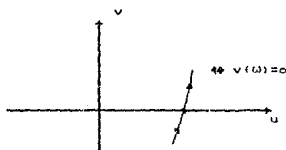


Fig.3.7.

Por consiguiente, la característica de amplitud de fases interseca sucesivamente los ejes coordenados al variar  $\omega$  de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Es de hacer notar que si el grado del polinomio estable  $P$  es impar la gráfica primero interseccionará al eje de las abscisas, luego al de las ordenadas de nuevo al de las abscisas y así sucesivamente hasta por último terminar interseccionando al eje de las abscisas, por ejemplo

para el polinomio estable con  $n=3$ ,  $z^3 + z^2 + 2z + 1$ . Véase la Fig. 3.8.

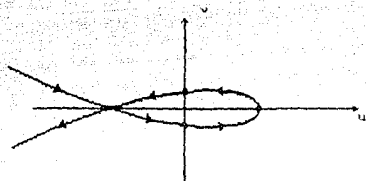


Fig. 3.8.

En este caso al empezar por intersectar al eje de las abscisas, significa que el eje de las ordenadas será cero:  $v(\omega_1) = 0$  y por tanto al irse intercalando en las intersecciones tendremos que  $v(\omega_1) = v(\omega_3) = \dots = v(\omega_{2n-1}) = 0$  y recíprocamente si en  $\omega = \omega_2$ ;  $v(\omega_2) \neq 0$ , entonces la curva de amplitud de fases intersectará al eje de las abscisas.

Por otro lado si para el polinomio estable  $P$  dicho grado  $n$  es par la curva primero intersectará al eje de las ordenadas, luego al de las abscisas y de nuevo al de las ordenadas y así sucesivamente con la última intersección en el eje de las ordenadas por ejemplo para  $n = 2$  con el polinomio estable  $z^2 + z + 2$ . Véase la Fig. 3.9.

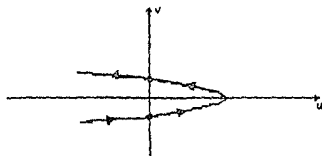


Fig. 3.9.

Y recíprocamente si en  $\omega = \omega_1$ ;  $u(\omega_1) = 0$ , entonces la curva intersectará al eje de las ordenadas.

En este caso se comenzará intersectando el eje de las ordenadas, es decir, cuando el eje de las abscisas es cero:  $u(\omega_1) = 0$  y por tanto al ir intercalando dichas intersecciones tendremos

para el polinomio estable con  $n=3$ ,  $z^3 + z^2 + 2z + 1$ . Véase la Fig. 3.8.

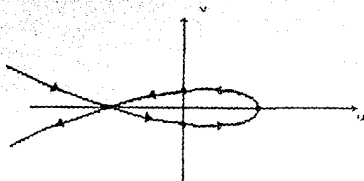


Fig. 3.8.

En este caso al empezar por intersectar al eje de las abscisas, significa que el eje de las ordenadas será cero:  $v(\omega_1) = 0$  y por tanto al irse intercalando en las intersecciones tendremos que  $v(\omega_1) = v(\omega_3) = \dots = v(\omega_{n-1}) = 0$  y recíprocamente si en  $\omega = \omega_k$ :  $v(\omega_k) = 0$ , entonces la curva de amplitud de fases intersectará al eje de las abscisas.

Por otro lado si para el polinomio estable P dicho grado n es par la curva primero intersectará al eje de las ordenadas, luego al de las abscisas y de nuevo al de las ordenadas y así sucesivamente con la última intersección en el eje de las ordenadas por ejemplo para  $n = 2$  con el polinomio estable  $z^2 + z + 2$ . Véase la Fig. 3.9.

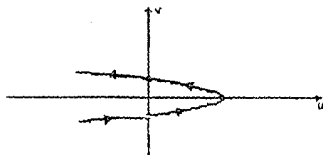


Fig. 3.9.

Y recíprocamente si en  $\omega = \omega_j$ :  $u(\omega_j) = 0$ , entonces la curva intersectará al eje de las ordenadas.

En este caso se comenzará intersectando el eje de las ordenadas, es decir, cuando el eje de las abscisas es cero:  $u(\omega_1) = 0$  y por tanto al ir intercalando dichas intersecciones tendremos

$$u(\omega_3) \geq u(\omega_2) \geq \dots \geq u(\omega_{2n-1}) = 0.$$

En general en todos los casos el número de intersecciones de la curva de amplitud de fases de un polinomio estable P de grado n con los ejes coordenados es de 2n-1. Esto se infiere del análisis de los casos particulares analizados con anterioridad y de que en general habrá tantas intersecciones con los ejes como la suma de los grados de los polinomios u y v que siempre suman 2n-1.

Supongamos que los valores de  $\omega$  para los cuales la característica de amplitud de fases intersecta a los ejes coordenados sean

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2n-1}$$

los cuales supondremos están ya ordenados de menor a mayor

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{2n-2} < \omega_{2n-1}$$

y como arriba ya fue obtenido si:

$$\begin{cases} \text{en es impar} & \begin{cases} \omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{2n-1} \text{ son raíces del polinomio } v(\omega), \\ \omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{2n-2} \text{ son raíces del polinomio } u(\omega). \end{cases} \\ \text{en es par} & \begin{cases} \omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{2n-1} \text{ son raíces del polinomio } u(\omega), \\ \omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{2n-2} \text{ son raíces del polinomio } v(\omega). \end{cases} \end{cases}$$

ii) Como segunda etapa veamos lo que le ocurre a la característica de fases. En todos los casos  $\rho$  esta dada como:

$$\tan \rho = \frac{v(\omega)}{u(\omega)},$$

es decir

$$\rho(\omega) = \arctan \frac{v(\omega)}{u(\omega)}$$

que siempre toma valores en la franja de longitud  $n\pi$  teniendo por asíntotas (extremos de la franja) a  $-n\pi/2$  y a  $n\pi/2$ .

Todo esto se manifiesta en la característica de fases de la siguiente forma:

Consideremos el espacio de fases  $(\omega, \rho)$  y en él las rectas paralelas al eje horizontal:  $l_k$  cuyas ecuaciones son

$$\rho(\omega_k) = (k-n)\pi/2$$

Véase la ilustración de la Fig. 3.10.

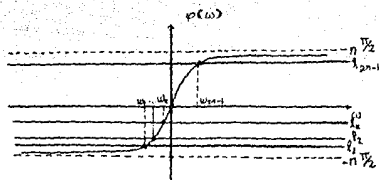


Fig. 3.10

donde  $k=1,2,\dots,2n-1$ . Entonces si en  $\omega_k$  la función  $\varphi$  interseca a la recta  $l_k$  tendremos que:

• Si  $k-n$  es impar la  $u(\omega_k) \neq 0$

• Si  $k-n$  es par la  $v(\omega_k) \neq 0$

luego estas  $\omega_k$  resultan ser las mismas  $\omega_k$  para las que la característica de amplitud de fases interseca a los ejes coordenados y las  $l_k$  resultan ser los ángulos de los vectores de posición de la característica de amplitud de fases con la intersección de los ejes coordenados.

Todas estas propiedades pueden resumirse en la siguiente definición:

#### DEFINICION 1:

Las raíces de los polinomios  $u$  y  $v$  se les llaman intercaladas si:

• los polinomios  $u$  y  $v$  admiten sólo raíces reales simples.

• entre dos raíces consecutivas de uno de los polinomios aparece sólo una raíz del otro polinomio.

En particular de esta definición podemos concluir que los polinomios  $u$  y  $v$  no tienen raíces comunes (son primos entre sí).

Por eso es que dichos polinomios tienen el mismo grado o bien su grado difiere en una unidad.

Por todo esto podemos concluir con la siguiente proposición:

## PROPOSICION 2:

Si  $P$  es un polinomio estable, entonces las raíces de  $u$  y  $v$  son intercaladas (donde por  $u$  y  $v$  recuérdese que se denota a la  $\text{Re}(P(i\omega))$  e  $\text{Im}(P(i\omega))$ ).

Como los argumentos principales que se utilizaron para llegar a la proposición anterior fueron:

• Que por ser el polinomio estable la característica de fases era monótona creciente.

• Que la característica de amplitud de fases realiza  $n$  medias vueltas completas positivas (contrareloj), por ser el polinomio estable.

Pero tales propiedades de los polinomios estables no dependen de que los coeficientes del polinomio sean reales, luego esta proposición es también válida para polinomios estables con coeficientes complejos arbitrarios.

Finalmente qué tipo de condición nos está definiendo la PROPOSICION 2. Es evidente que hasta aquí sólo es una condición necesaria. Por otro lado resulta que si analizamos los polinomios completamente inestables todos los razonamientos hechos para llegar a la PROPOSICION 2 serán los similares correspondientes.

Esto se debe a que para tales polinomios completamente inestables la función de fases también es monótona aunque decreciente y la característica de amplitud de fases también realiza  $n$  medias vueltas completas, pero a reloj. Por todo esto, para los polinomios  $P$  completamente inestables las raíces de sus partes real e imaginaria  $u(\omega)$  y  $v(\omega)$  también se intercalan. Sin embargo resulta que las raíces de  $u(\omega)$  y  $v(\omega)$  se intercalan sólo en estos 2 casos en los polinomios estables y en los completamente inestables. Esto lo resumimos en la siguiente:

**PROPOSICION 3:**

Si las raíces de los polinomios  $u(\omega)$  y  $v(\omega)$  se intercalan, entonces el polinomio P es estable o bien completamente inestable.

Esta proposición es casi la recíproca de la PROPOSICION 2.

La demostración puede verse en el APÉNDICE (3.H).

**COROLARIO:**

Si las raíces de los polinomios  $u(\omega)$  y  $v(\omega)$  se intercalan, entonces el polinomio P tiene por función de fases  $\rho$  a una función monótona creciente, o bien a una monótona decreciente.

En terminos de la característica de amplitud de fases esto significa que dicha característica da vueltas en una misma dirección.

La demostración puede verse en el APÉNDICE (3.I).

**RESUMIENDO:**

Hemos recorrido un camino sistemático para llegar a poder caracterizar cuando un polinomio P es estable y cuando es completamente inestable.

Después de todo este recorrido la respuesta a esta caracterización es relativamente simple dado que la función de fases nos asegura que el polinomio P es estable si  $\rho$  es monótona creciente y completamente inestable si  $\rho$  es monótona decreciente.

-- o --

Por otro lado un resultado de Cálculo Diferencial nos asegura que una función  $\rho$  es monótona creciente (decreciente) si su derivada  $\rho' > 0$ , ( $\rho' < 0$ ). Pero en nuestro caso conocemos la fórmula de  $\rho'$  la cual toma el mismo signo de su numerador :

$$\rho(\omega) = \arctan \frac{v(\omega)}{u(\omega)} \Rightarrow \rho'(\omega) = \frac{1}{1 + (v/u)^2} \left[ \frac{v}{u}(\omega) \right]' \Rightarrow \rho'(\omega) = \frac{uv' - u'v}{u^2 + v^2}(\omega)$$

/véase el LEMA 1 del APÉNDICE (3.H)./

por consiguiente el polinomio P será estable (completamente inestable) si  $(uv' - u'v)(\omega) > 0$  ( $< 0$ )...(3.6)

Es más, es suficiente con determinar el signo de la anterior expresión en un sólo punto  $\omega_0$ , por ejemplo en  $\omega_0 = 0$ .

En particular observese que si el polinomio P es de coeficientes reales el signo de la expresión (3.6) en  $\omega_0 = 0$  se reduce al signo de  $a_{n-1} a_n$ . Todo esto nos lleva al

**CRITERIO 3: (Hermito-Bitjora).**

El polinomio P es estable si y solamente si:

• Las raíces de los polinomios u y v se intercalan.

• Existen al menos un  $\omega_0$  para el cual se cumple

$$u(\omega_0)v'(\omega_0) - u'(\omega_0)v(\omega_0) > 0 \quad \dots(3.7)$$

Observaciones:

• Recordando del LEMA 1 del capítulo II que para el polinomio P de grado n, si:

$$n \text{ es impar } \begin{cases} \text{el grado del polinomio } v \text{ es } n \\ \text{el grado del polinomio } u \text{ es } = n-1. \end{cases}$$

$$n \text{ es par } \begin{cases} \text{el grado del polinomio } u \text{ es } n \\ \text{el grado del polinomio } v \text{ es } = n-1. \end{cases}$$

Observamos que cuando el polinomio P es de coeficientes reales los polinomios u y v se expresan a través de los polinomios auxiliares U y V, introducidos en el capítulo I.

$$\begin{cases} u(\omega) = U(-\omega^2) \\ v(\omega) = \omega V(-\omega^2) \end{cases}$$

de donde obtenemos que:

i) Las raíces de u y v son simples si y sólo si las raíces de U y V son simples y distintas de cero.

ii) Todas las raíces de los polinomios u y v son reales si y sólo si las raíces de U y V son reales y no positivas.

iii) Entre dos raíces sucesivas cualesquiera de alguno de los polinomios u ó v se encuentra una raíz del otro polinomio si y solamente si la misma propiedad la tiene U y V.



Y finalmente como consecuencia

iv) Las raíces de los polinomios  $u$  y  $v$  se intercalan si y solamente si las raíces de  $U$  y  $V$  se intercalan y son negativas.

Todo ello por consiguiente deservoca en el siguiente:

**CRITERIO 3'. (Hermita Bilere para polinomios con coeficientes reales)**

El polinomio  $P$  con coeficientes reales es estable si y solamente si  $a_{n-1} a_n > 0$  (o bien  $a_1 > 0$ ) y las raíces de los polinomios  $U$  y  $V$  se intercalan y son negativas.

Observemos que efectivamente como lo dijimos al principio de este capítulo los CRITERIOS 3 y 3' no presuponen que el polinomio  $P$  no tenga raíces imaginarias.

INDICE DE CAUCHY.

• En el capítulo anterior se formuló el CRITERIO 3 que nos da una condición necesaria y suficiente para que un polinomio sea estable. Tal criterio quedó expresado a través de las siguientes condiciones:

- i) que las raíces de los polinomios  $u$  y  $v$  se intercalen,  
 ii) que exista al menos un  $\omega_0$  para el cual se cumpla que:

$$u(\omega_0)v'(\omega_0) - u'(\omega_0)v(\omega_0) > 0$$

en la segunda condición de alguna manera nos dan las funciones y es fácil de comprobar, en cambio en la primera condición es necesario por introducir un criterio práctico que nos ayude a decidir si las raíces del polinomio se intercalan o no. Un criterio tal está basado en el Índice de Cauchy.

Aquí nos estamos proponiendo sin obtener directamente las raíces de los polinomios  $u$  y  $v$  tener maneras de asegurar si tales raíces se intercalan sólo de esta manera podemos usar en forma práctica el CRITERIO 3.

Para lograr esto daremos primero algunas definiciones.

DEFINICIONES:

$$\bullet \begin{cases} R = P/Q & ; D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ R(x) = P(x)/Q(x) \end{cases}$$

• Si  $P$  y  $Q$  son polinomios entonces  $R = P/Q$  nos representa una función racional, cuyo dominio  $D = \{x \in \mathbb{R}; Q(x) \neq 0\}$ .

$$\bullet R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)S(x)}{Q_1(x)S(x)}$$

• Cualquiera que sea el polinomio  $S$ , supondremos que la función racional  $R$  está definida a través del cociente de polinomios  $P$  y  $Q$  primos entre sí, es decir  $P$  y  $Q$  no tienen raíces comunes, esto es,  $P$  y  $Q$  son polinomios irreducibles.

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - x_0)^{n_0} Q_0(x)}, \text{ con } Q_0(x_0) \neq 0$$

✓ Aquí suponemos que el denominador  $Q$  tiene una raíz  $x_0$  de multiplicidad  $n_0$  y por ello  $Q$  está sustituida por su representación  $(x - x_0)^{n_0} Q_0(x)$ , donde  $Q_0$  es otro polinomio de grado menor que el grado de  $Q$ . Esto significa que  $x_0 \in D$ . Un tal  $x_0$  se llama polo de la función racional  $R$ . En general para una función racional  $R = P/Q$ , con  $P$  y  $Q$  irreducibles, a los puntos  $x_0 \in D$  (los  $x_0$  que si son raíces del denominador  $Q$ ) se los denomina polos de la función  $R$ . El orden de un polo es la multiplicidad de la misma raíz  $x_0$  del denominador  $Q$ .

$$R_0 = \frac{P(x_0)}{Q_0(x_0)} \neq 0$$

✓ Al número  $R_0$  se lo llama coeficiente principal de la función racional  $R$  en el polo  $x_0$ . En símbolos se escribió que es diferente de cero por definición, dado que  $Q_0(x_0) \neq 0$  por ser  $x_0$  polo de  $Q$  por hipótesis y además  $P(x_0) \neq 0$ , ya que si fuera  $P(x_0) = 0$  la  $P$  tendría raíz común con  $Q$  lo que contradiría la hipótesis de que  $P$  y  $Q$  son irreducibles/.

✓ Si  $x_0$  es un polo de orden  $n_0$  de  $R = P/Q$ ,

$$\rightarrow R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ con } Q(x) = (x - x_0)^{n_0} Q_0(x) \rightarrow$$

$$\rightarrow R(x) = \frac{P(x)}{(x - x_0)^{n_0} Q_0(x)}, x \neq x_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x - x_0)^{n_0} R(x) = \frac{P(x)}{Q_0(x)}, x \neq x_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{n_0} R(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q_0(x)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{n_0} R(x) = \frac{P(x_0)}{Q_0(x_0)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{n_0} R(x) = R_0 \rightarrow$$

¿Qué ocurre con el mismo límite pero con  $(x - x_0)$  elevado a una potencia  $m$  respectivamente mayor o menor que la  $n_0$ ?

$$\begin{aligned} & \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^m R(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)^m P(x)}{(x - x_0)^{n_0} Q(x)} = \\ & = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)^m}{(x - x_0)^{n_0}} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = R_0 \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)^m}{(x - x_0)^{n_0}} = \begin{cases} 0, & \text{si } m > n_0 \\ \omega, & \text{si } m < n_0 \end{cases} \end{aligned}$$

El recíproco también es cierto.

De hecho hemos demostrado el siguiente:

LEMA 1:

La  $x_0$  es un polo de orden  $n_0$  de la función racional  $R$  si y sólo si:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^m R(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } m > n_0 \\ \omega, & \text{si } m < n_0 \end{cases} \\ \text{donde } R_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{n_0} R(x) \end{array} \right.$$

## 2. CARACTERIZACION DE UNA FUNCIÓN RACIONAL EN UN POLO.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = \omega$$

$$\begin{aligned} \text{En efecto } \lim_{x \rightarrow x_0} R(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{(x - x_0)^{n_0} Q(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^{n_0}} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R_0}{\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{n_0}} = \omega. \end{aligned}$$

Partiremos de este límite para poder caracterizar el comportamiento de una función racional  $R = P/Q$ , con  $P$  y  $Q$  irreducibles en una vecindad del polo  $x_0$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} R(x_0^-) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} R(x) \\ R(x_0^+) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} R(x) \end{array} \right.$$

Esta es la notación de los límites laterales cuando  $x$  tiende a  $x_0$  por la izquierda y derecha respectivamente, los cuales nos caracterizan los diferentes comportamientos cualitativamente distintos de la gráfica de

R, o sea cuando  $R(x_0^-) = +\infty$  y  $R(x_0^+) = -\infty$ .

TABLA 4.1

Tipo	1	2	3	4
$R(x_0^-)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$R(x_0^+)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

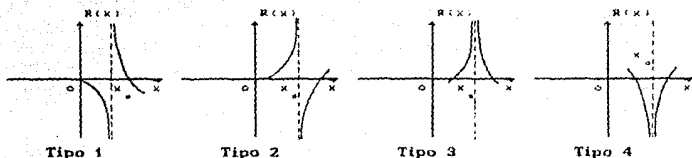


Fig. 4.1

Tanto en la TABLA 4.1 como en Fig. 4.1 quedan caracterizados los comportamientos cualitativamente distintos, a saber en todos ellos  $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = \infty$ , pero habrá los siguientes casos:

Tipo 1: Este tipo queda caracterizado porque en el polo  $x_0$  la función R tiene una discontinuidad infinita de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Tipo 2: Este caso se caracteriza porque el salto infinito de la función R en el polo  $x_0$  es de  $+\infty$  a  $-\infty$ .

Tipo 3: Se caracterizan porque la función R al pasar por el polo  $x_0$  no cambia de signo quedándose positiva.

Tipo 4: Tampoco hay cambio de signo, pero los valores que toma la función R al pasar por el polo  $x_0$  permanecen negativos.

$$eR_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^n R(x)$$

Utilizaremos este límite para caracterizar el comportamiento de R en una vecindad del polo  $x_0$ . En efecto este límite nos dice que para las x cercanas a  $x_0$  los valores de  $(x - x_0)^n R(x)$  tiene el mismo signo que  $R_0$ , ya que  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \rightarrow R(x) = \frac{P(x)}{(x - x_0)^n Q_0(x)} \rightarrow (x - x_0)^n R(x)$

$$= \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ con } Q(x_0) \neq 0 \text{ y } P \text{ y } Q \text{ polinomios continuos en } x_0.$$

$$\bullet \text{ El polo } x_0 \text{ es de } \begin{cases} \text{Tipo 1} \\ \text{Tipo 2} \\ \text{Tipo 3} \\ \text{Tipo 4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_0 > 0 \text{ y } n_0 \text{ impar} \\ R_0 < 0 \text{ y } n_0 \text{ impar} \\ R_0 > 0 \text{ y } n_0 \text{ par} \\ R_0 < 0 \text{ y } n_0 \text{ par} \end{cases}$$

/Esta proposición se obtiene de desglosar los comportamientos de la función  $R$  comparada con  $(x - x_0)^{-n_0} R_0$ . Para su demostración véase el APENDICE (4.A)/.

### 3. INDICE DE CAUCHY.

$$\bullet \text{Ind}_{x_0} R \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1, \text{ si } R_0 > 0 \text{ y } n_0 \text{ impar} \\ -1, \text{ si } R_0 < 0 \text{ y } n_0 \text{ impar} \\ 0, \text{ si } n_0 \text{ es par} \end{cases}$$

/Así queda definido el número llamado índice de una función racional  $R$  en el polo  $x_0$ /.

$$\bullet \begin{cases} \text{Ind}_{x_0} R = +1 \rightarrow x_0 \text{ es un polo de Tipo 1.} \\ \text{Ind}_{x_0} R = -1 \rightarrow x_0 \text{ es un polo de Tipo 2.} \\ \text{Ind}_{x_0} R = 0 \rightarrow x_0 \text{ es un polo de Tipo 3 o 4.} \end{cases}$$

/Estas implicaciones se siguen de la definición de índice y de la condición necesaria y suficiente para que un polo sea del Tipo 1-4 dada al final del punto anterior/.

$$\bullet \text{Ind}_a^b R \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a < x_0 < b} \text{Ind}_{x_0} R$$

/Esta notación  $\text{Ind}_a^b R$  se utiliza para denotar al índice de la función racional  $R$  en el intervalo abierto  $(a,b)$ , donde la suma se extiende a todos los polos  $x_0$  en  $(a,b)$ /.

$$\bullet \text{Ind}_a^b R = \sum_{\substack{a < x_k < b \\ n_k \text{ impar}}} \text{sign } R_k$$

/Esta representación del índice de  $R$  en  $(a,b)$   $\text{Ind}_a^b R$  se expresa a través de la función signo, que por definición es  $\text{sign } R_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1, \text{ si } R_k > 0 \\ -1, \text{ si } R_k < 0 \end{cases}$  y la sumatoria se extiende a los polos  $x_k$  de orden  $n_k$ , pertenecientes al intervalo abierto  $(a,b)$  y donde finalmente las  $R_k$  son los coeficientes principales de la función  $R$  en los polos  $x_k$ /.

$$\text{Ind}_{-\infty}^{+\infty} R \stackrel{\text{not}}{=} \text{Ind } R$$

✓Esta es una simple notación✓.

$$e-n \leq \text{Ind}_a^b R \leq n$$

✓El índice de la función racional  $R = \frac{P}{Q}$  queda acotado por el grado del polinomio de su denominador  $Q$ ✓.

#### 4.PROPIEDADES DEL INDICE.

##### Propiedad 1.

Para todo  $c$  perteneciente al intervalo  $(a,b)$ , que no sea polo de la función racional  $R$  se cumple:

$$\text{Ind}_a^b R = \text{Ind}_a^c R + \text{Ind}_c^b R \quad \dots(4.1)$$

##### Propiedad 1'.

Para todo  $c$  del intervalo  $(a,b)$  que sea polo de la función racional  $R$  se cumple:

$$\text{Ind}_a^b R = \text{Ind}_a^c R + \text{Ind}_c^b R + \text{Ind}_c R \quad \dots(4.2)$$

Sus demostraciones pueden verse en el APENDICE (4.B).

##### Propiedad 2.

Si  $R$  y  $S$  son funciones racionales y si  $x_0$  es un polo de orden  $n_0$  de la función racional  $R$  y además  $x_0$  no es polo, o bien es polo, pero de orden menor que  $n_0$  de la otra función racional  $S$ , entonces  $x_0$  es polo de orden  $n_0$  de la función racional  $R + S$  y además:

$$\text{Ind}_{x_0} (R + S) = \text{Ind}_{x_0} R \quad \dots(4.3)$$

Véase la demostración en el APENDICE (4.C).

<sup>1</sup> En estas propiedades el intervalo abierto  $(a,b)$  admite la posibilidad extrema de que  $a=-\infty$  y  $b=+\infty$ .

Propiedad 3.

Cualesquiera que sean las funciones racionales R y S en el intervalo (a,b), tales que no tienen polos comunes ni del mismo orden, entonces

$$\text{Ind}_a^b (R + S) = \text{Ind}_a^b R + \text{Ind}_a^b S \quad \dots(4.4)$$

Propiedad 3'.

Si R y S son funciones racionales en el intervalo (a,b) y S no tiene polos en (a,b), digamos por ejemplo un polinomio, entonces

$$\text{Ind}_a^b (R + S) = \text{Ind}_a^b R \quad \dots(4.5)$$

Véase las demostraciones en el APÉNDICE (4.D).

¶Dado que el cálculo del índice del producto de funciones racionales es complicado aquí nos restringiremos al siguiente caso particular que nos interesa:

Propiedad 4.

Para toda función racional R en (a,b) y para toda S función racional en (a,b) sin raíces ni polos en (a,b) (o sea que conserva su signo constante), entonces

$$\text{Ind}_a^b RS = \begin{cases} \text{Ind}_a^b R, & \text{si } S(x) > 0 \text{ en } (a,b) \\ -\text{Ind}_a^b R, & \text{si } S(x) < 0 \text{ en } (a,b) \end{cases} \quad \dots(4.6)$$

Véase la demostración en el APÉNDICE (4.E).

¶Aquí de nuevo nos vemos obligados a restringirnos a una composición particular, dado que el cálculo del índice de la composición para dos funciones racionales cualesquiera S y T : S ∘ T : x ↦ S(T(x)), resulta muy complicado. Compondremos, sólo con la función particular que si usaremos:

$$T(x) = -x^2$$



Propiedad 5.

Si la función racional R es de la forma  $R(x) \stackrel{\text{def}}{=} S(-x^2)$ , donde S es a su vez una función racional, con  $S(0) = S_0 \neq 0$ , entonces todos los polos reales de R son de la forma  $\pm \sqrt{-x_0}$ , con  $x_0$  un polo negativo cualquiera de S y donde la multiplicidad de  $\pm \sqrt{-x_0}$  es igual al orden del polo  $x_0$  de S. Además se cumple que

$$\begin{cases} \text{Ind}_{-\sqrt{-x_0}} R = \text{Ind}_{x_0} S \\ \text{Ind}_{+\sqrt{-x_0}} R = -\text{Ind}_{x_0} S \end{cases} \quad \dots(4.7)$$

Véase la demostración en el APENDICE (4.F).

La siguiente proposición es una que relaciona al índice de cualquier función racional R y su inversión 1/R (que también es racional) a través de la semidiferencia de la función signo al final y al inicio del intervalo (a,b). Será básico usar el hecho de que un polo de R es un cero de la inversión 1/R y viceversa.

**PROPOSICION 1.**

Toda función racional R definida en un intervalo (a,b) tal que R evaluada en a y b no sea cero ni infinito (a y b no pueden ser ceros o polos de R). Entonces:

$$\text{Ind}_a^b R + \text{Ind}_a^b 1/R = \frac{\text{sign } R(b) - \text{sign } R(a)}{2} \quad \dots(4.8)$$

Véase la demostración en el APENDICE (4.G).

**Observaciones:**

Podemos definir la función signo de R(a), no obstante que R en  $x=a$  estrictamente no está definida porque a es el extremo izquierdo del intervalo abierto (a,b).

Para toda función racional R y todo intervalo (a,b) finito o infinito tomamos a

$$\text{sign } R(a) \stackrel{\text{def}}{=} \text{sign } R(a') \quad \dots(4.9)$$

para todo  $a' > a$ , pero suficientemente cercanas a a.

Por lo tanto la ecuación (4.9) permite definir  $\text{sign } R(a)$  a través del  $\text{sign } R(a')$  donde la función  $R$  si está definida en los puntos  $a'$ , dado que  $a' \in (a, b)$ , teniendo así que  $\text{sign } R(a) = \pm 1$ .

En forma análoga:

$$\boxed{\text{sign } R(b) \stackrel{\text{def}}{=} \text{sign } R(b')} \quad \dots(4.10)$$

para toda  $b' < b$ , pero suficientemente cercanas a  $b$ , es decir que los puntos  $b'$  pertenecen al intervalo abierto  $(a, b)$ , teniendo así que  $\text{sign } R(b) = \pm 1$ .

Si  $a$  y  $b$  no son ceros de la función racional  $R$  ni tampoco son polos de la misma, es decir

$$R(a) \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \quad \text{y} \quad R(b) \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$$

entonces

$$\text{sign } R(a) \quad \text{y} \quad \text{sign } R(b)$$

quedan definidos como arriba se explicó.

Otros casos particulares son los siguientes :

$$\text{eSi } a = -\infty \text{ y } \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} R(x) = A \neq 0 \Rightarrow \text{sign } R(a) = \text{sign } A.$$

$$\text{eSi } a = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} R(x) = \pm \infty \Rightarrow \text{sign } R(a) = \text{sign } (\pm \infty) = \pm 1.$$

$$\text{eSi } a \text{ es un polo de } R, \text{ es decir } R(a) = \infty \text{ y } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} R(x) = R(a^+)$$

$\therefore \text{sign } R(a) = \text{sign } R(a^+)$  algo análogo sucede para el extremo  $b$ .

Mientras que para  $R(a) = 0$  y  $R(b) = 0$  no se encuentran definidos, pero pueden manipularse como los  $\text{sign } R(a)$  y  $\text{sign } R(b)$  respectivamente, que depende no sólo de  $a$  o  $b$ , sino de si es el extremo derecho o izquierdo del intervalo  $(a, b)$ .

Después de observar que se puede hablar en forma precisa del  $\text{sign } R(a)$  y del  $\text{sign } R(b)$  en todos estos casos la fórmula (4.8) queda completamente justificada.

## 5.CONDICIONES DE ESTABILIDAD A TRAVES DEL INDICE.

De nuevo consideremos el polinomio P de grado n

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

pero en general con coeficientes complejos, luego:

$$P(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$$

donde u,v son funciones reales con valores reales (coeficientes reales) y

$$\begin{cases} x=u(\omega) \\ y=v(\omega) \end{cases} \quad -\infty < \omega < +\infty$$

nos define la curva que llamamos característica de amplitud de fases del polinomio P.

Si los polinomios u y v no tienen raíces reales comunes, es decir, si la característica de amplitud de fases no pasa por el origen de coordenadas cero, entonces queda bien definida la función de fases  $\varphi$  que satisface la ecuación

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{v(\omega)}{u(\omega)}$$

donde por ser u y v polinomios en  $\omega$  la función  $\frac{v}{u}$  es una función racional, junto con la función inversión  $1/(v/u) = u/v$ , sin embargo no supondremos a priori que u y v no tienen raíces reales comunes.

Supongamos que  $\omega = \omega_0$  es un polo real arbitrario de la función  $v/u$ , es decir que es raíz del denominador u, pero no es raíz del numerador v.

Entonces en  $\omega = \omega_0$  la característica de amplitud de fases interseccionará al eje de las ordenadas ( $u(\omega_0)=0$  y  $v(\omega_0) \neq 0$ ) en un punto distinto del origen de coordenadas. Véase la Fig. 4.2.



Fig. 4.2.

En forma análoga si  $\omega_0$  es un polo real cualquiera de  $u/v$ , o

sea raíz de  $v$ , que no sea de  $u$  ( $v(\omega_0)=0$  y  $u(\omega_0)\neq 0$ ), entonces la curva  $\begin{cases} x^n = u(\omega) \\ y = v(\omega) \end{cases}$  intersectará al eje de las abscisas en  $\omega = \omega_0$ . Obsérvese la ilustración de la Fig. 4.3.

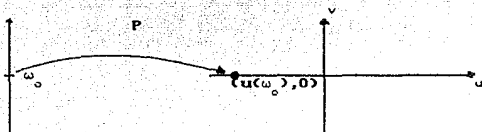


Fig. 4.3.

Para deducir una condición necesaria y suficiente de la estabilidad de un polinomio  $P$  a través de el índice de la función racional  $v/u$  y su inversión  $u/v$  enunciaremos el siguiente:

**TEOREMA 1.** (Condición necesaria y suficiente de estabilidad a través de dos índices).

Todo polinomio  $P$  de grado  $n$  es estable si y sólo si :

$$\begin{cases} \text{Ind}_{-\infty}^{+\infty} \frac{v}{u} = \text{Ind}_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{v} = -n, \text{ si } n \text{ es par} \\ \text{Ind}_{-\infty}^{+\infty} \frac{v}{u} = n, \text{ si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad \dots(4.11)$$

La demostración puede verse en el APENDICE (4.H).

Pero para completar esta demostración hay que demostrar un resultado auxiliar que lo enunciamos como:

**LEMA AUXILIAR.**

$$\text{Ind}_{\omega_0} \frac{v}{u} = -1 \text{ si y sólo si } \begin{cases} x = u(\omega_0) = 0 \\ y = v(\omega_0) \neq 0 \end{cases}$$

/es decir la característica de amplitud de fases intersecta al eje de las ordenadas contrareloj/.

La demostración puede verse en el APENDICE (4.I).

Con esto LEMA AUXILIAR queda completamente demostrada la condición necesaria y suficiente para que un polinomio  $P$  sea estable a través del índice de la función racional  $v/u$  y su inversión  $u/v$ .

**SIMPLIFICACION 1.**

La condición necesaria y suficiente para que un polinomio P sea estable dada por la expresión (4.11) para n par o impar puede expresarse en una forma simplificada si introducimos las funciones

$$\hat{u} \quad \text{y} \quad \hat{v}$$

definidas por

$$\hat{u} = \begin{cases} (-1)^m v, & \text{si } n=2m+1 \\ (-1)^m u, & \text{si } n=2m \end{cases} \quad \dots(4.12)$$

$$\hat{v} = \begin{cases} (-1)^m u, & \text{si } n=2m+1 \\ (-1)^{m-1} v, & \text{si } n=2m \end{cases}$$

con estos nuevos polinomios  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$  podemos reformular el TEOREMA 1 que nos da la condición necesaria y suficiente para la estabilidad de un polinomio, pero a través del índice de una sola función racional, a saber

**TEOREMA 1'.**(Condición necesaria y suficiente de estabilidad a través de un índice).

El polinomio P de grado n es estable si y sólo si

$$\text{Ind} \frac{\hat{v}}{\hat{u}} = n.$$

La demostración puede verse en el APENDICE (4.J).

**SIMPLIFICACION 2.**

Si los coeficientes del polinomio P son reales, entonces

$$\hat{u} \text{ def } \begin{cases} (-1)^m v = (-1)^m [(-1)^m a_0 \omega^n + (-1)^{m-1} a_2 \omega^{n-2} + \dots + a_n] = a_0 \omega^n - a_2 \omega^{n-2} + \dots \\ (-1)^m u = (-1)^m [(-1)^m a_0 \omega^n + (-1)^{m-1} a_2 \omega^{n-2} + \dots + a_n] = a_0 \omega^n - a_2 \omega^{n-2} + \dots \end{cases}$$

o sea que ambas expresiones coinciden y por tanto

$$\hat{u} = a_0 \omega^n - a_2 \omega^{n-2} + a_4 \omega^{n-4} - \dots \quad \dots(4.13)$$

y análogamente

$$\hat{v} = a_1 \omega^{n-1} - a_3 \omega^{n-3} + a_5 \omega^{n-5} - \dots \quad \dots(4.14)$$

Por esto la relación entre el polinomio  $P$  y los polinomios  $u$  y  $v$  es:

$$i^n P(i\omega) = \hat{u}(\omega) + i\hat{v}(\omega) \quad \dots(4.15)$$

•Recalquemos que a diferencia del CRITERIO I de estabilidad (Hermito-Mijallov) en este TEOREMA I y I' del polinomio  $P$  no se presupone que no admita raíces imaginarias puras.

No obstante lo anterior, si dicho presupuesto sí se cumple y por tanto está definido el número  $\Delta_p$ , entonces para el caso de los polinomios estables:

Todo polinomio  $P$  es estable si y sólo si

$$\Delta_p = \begin{cases} \text{Ind } \frac{u}{v}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ -\text{Ind } \frac{u}{v}, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \quad \dots(4.16)$$

o bien

Todo polinomio  $P$  es estable si y sólo si

$$\Delta_p = \text{Ind } \frac{\hat{v}}{\hat{u}} \quad \dots(4.17)$$

Estas proposiciones se comprueban de inmediato con el Teorema I y I' y el Criterio I del Capítulo II.

Obsérvese que todo se reduce al cálculo de índices

•Cuál es el grado de complejidad del cálculo del índice de una función racional?

Lo que podemos decir es que tal complejidad crece con el grado del polinomio del denominador. En este sentido el TEOREMA I y I' nos dice que tienen una complejidad  $n$ , dado que la función racional involucrada tiene por denominador a un polinomio de grado  $n$ .

Tratar de disminuir tal complejidad, por lo tanto, consiste en tratar de restringirse en cuanto a la clase de polinomios admisibles.

Veamos, por ejemplo, qué ocurre si nos restringimos a los polinomios con coeficientes reales. En tal caso como ya vimos en el

Capítulo II.

$$\begin{cases} u(\omega) = U(-\omega^2) \\ v(\omega) = \omega V(-\omega^2) \end{cases}$$

donde

$$U(x) = \begin{cases} a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_n, & \text{si } n = 2m+1 \\ a_0 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_n, & \text{si } n = 2m \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} a_0 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_{n-1}, & \text{si } n = 2m+1 \\ a_1 x^{m-1} + a_3 x^{m-2} + \dots + a_{n-1}, & \text{si } n = 2m \end{cases}$$

Podemos ahora introducir la función  $v^*$  como

$$v^*(\omega) = V(-\omega^2)$$

$$\therefore v(\omega) = \omega v^*(\omega)$$

Puede demostrarse que :

$$\text{Si } a_n a_{n-1} > 0, n=2m+1 \text{ y } \text{Ind}_{\infty}^{\frac{v}{u}} = n \text{ si y sólo si } \text{Ind}_{\infty}^{\frac{u}{v}} = -n \quad \dots(4.18)$$

$$\text{Si } a_n \neq 0, n=2m \text{ y } \text{Ind}_{\infty}^{\frac{v}{u}} = -n \text{ si y sólo si } \text{Ind}_{\infty}^{\frac{u}{v}} = n \quad \dots(4.19)$$

La demostración puede verse en el APENDICE (4.K).

Por otro lado en el Capítulo I logramos establecer que los polinomios estables pueden ser sólo los polinomios con coeficientes positivos. Por esto podemos restringirnos a estudiar tales polinomios.

Esta nueva restricción de los polinomios  $P$  a considerar nos lleva a que entonces también los polinomios  $U$  y  $V$  tendrán los coeficientes positivos y por ende, no tendrán raíces no negativas, es decir las funciones  $\frac{v}{u}$  y  $\frac{u}{v}$  no admitirán polos no negativos, por lo cual:

$$\text{Ind}_{\infty}^{\frac{v}{u}} = \text{Ind}_{\infty}^{\frac{u}{v}} \quad \text{not} \quad \frac{v}{u} \quad \frac{u}{v}$$

$$\text{Ind}_{\infty}^{\frac{u}{v}} = \text{Ind}_{\infty}^{\frac{v}{u}}$$

Esto último junto con los resultados obtenidos inmediatamente antes, de hecho nos demuestran que:

Capítulo II.

$$\begin{cases} u(\omega) = U(-\omega^2) \\ v(\omega) = \omega V(-\omega^2) \end{cases}$$

donde

$$U(x) = \begin{cases} a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_n, & \text{si } n = 2m+1 \\ a_0 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_n, & \text{si } n = 2m \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} a_0 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_{n-1}, & \text{si } n = 2m+1 \\ a_1 x^{m-1} + a_3 x^{m-2} + \dots + a_{n-1}, & \text{si } n = 2m \end{cases}$$

Podemos ahora introducir la función  $v^*$  como

$$v^*(\omega) = V(-\omega^2)$$

$$\therefore v(\omega) = \omega v^*(\omega)$$

Puede demostrarse que :

$$\text{Si } a_n a_{n-1} > 0, n=2m+1 \text{ y } \text{Ind} \frac{u}{v} = n \text{ si y sólo si } \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{U}{V} = -m \quad \dots(4.18)$$

$$\text{Si } a_n \neq 0, n=2m \text{ y } \text{Ind} \frac{v}{u} = -n \text{ si y sólo si } \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{V}{U} = m \quad \dots(4.19)$$

La demostración puede verse en el APÉNDICE (4.K).

Por otro lado en el Capítulo I logramos establecer que los polinomios estables pueden ser sólo los polinomios con coeficientes positivos. Por esto podemos restringirnos a estudiar tales polinomios.

Esta nueva restricción de los polinomios  $P$  a considerar nos lleva a que entonces también los polinomios  $U$  y  $V$  tendrán los coeficientes positivos y por ende, no tendrán raíces no negativas, es decir las funciones  $\frac{V}{U}$  y  $\frac{U}{V}$  no admitirán polos no negativos, por lo cual:

$$\text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{V}{U} = \text{Ind}_{-\infty}^{+\infty} \frac{V}{U} = \text{Ind} \frac{V}{U}$$

$$\text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{U}{V} = \text{Ind} \frac{U}{V}$$

Esto último junto con los resultados obtenidos inmediatamente antes, de hecho nos demuestran que:



**TEOREMA 2.**

Todo polinomio  $P(z) = U(z^2) + zV(z^2)$ , de grado  $n$ , es estable si y sólo si

$$\begin{cases} \text{Ind } \frac{U}{V} = -m, \text{ si } n = 2m+1 \\ \text{Ind } \frac{V}{U} = m, \text{ si } n = 2m \end{cases}$$

Obsérvese que el TEOREMA 2 tiene una complejidad 2 veces menor que el TEOREMA 1 y 1' ya que para el cálculo del índice sus denominadores son de orden  $m = \lfloor n/2 \rfloor$ .

## APENDICE 1.A

Sabemos que por hipótesis  $a_0 > 0$ , además igualamos a cero el polinomio para poder así obtener las raíces

$$a_0 z + a_1 = 0$$

En el texto se afirma que

$$z = -\frac{a_1}{a_0} < 0 \Leftrightarrow a_1 > 0$$

Demostración:

$$\Rightarrow -\frac{a_1}{a_0} < 0 \rightarrow -a_1 < 0 \rightarrow a_1 > 0.$$

$$\Leftarrow a_1 > 0 \rightarrow \frac{a_1}{a_0} > 0 \text{ ya que por hipótesis } a_0 > 0 \rightarrow -\frac{a_1}{a_0} < 0. \quad \square$$

y por lo tanto el polinomio de primer grado es estable si y sólo si  $a_0 > 0$  y  $a_1 > 0$ .

## APENDICE 1.B

Por hipótesis  $a_0 > 0$ , además igualamos el polinomio a cero para obtener sus raíces

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

porque aún para el polinomio de segundo grado es sencillo hacerlo. En el texto se afirma que:

$$\operatorname{Re} z_{1,2} = \operatorname{Re} \frac{-a_1 \mp \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \end{cases}$$

Demostración:

Podemos analizar el signo de las raíces si nos detenemos a observar los tres valores que puede tomar el radicando:

$$1) \text{ Si } a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0$$

$$\text{Re } z_{1,2} = \text{Re} \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0} = -\frac{a_1}{2a_0} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 > 0 \\ a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \end{cases}$$

Demostración :

$$\rightarrow -a_1/2a_0 < 0 \rightarrow -a_1 < 0 \rightarrow \boxed{a_1 > 0}, \text{ pero además se cumple}$$

$$a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0 \rightarrow a_1^2 < 4a_0 a_2 \rightarrow a_2 > \frac{a_1^2}{4a_0} \rightarrow \boxed{a_2 > 0} \text{ y por hipótesis } \boxed{a_0 > 0}.$$

$$\left. \begin{matrix} a_0 > 0 \\ a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \frac{a_1}{2a_0} > 0 \rightarrow -\frac{a_1}{2a_0} < 0 \rightarrow \text{Re } z_{1,2} < 0. \quad \square$$

$$2) \text{ Si } a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0$$

$$\text{Re } z_{1,2} = \text{Re} \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0} = -\frac{a_1}{2a_0} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 > 0 \\ a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \end{cases}$$

Demostración :

Por esta demostración es casi la misma que la realizada en 1) observe:

$$\rightarrow -a_1/2a_0 < 0 \rightarrow -a_1 < 0 \rightarrow \boxed{a_1 > 0}, \text{ pero además se cumple}$$

$$a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0 \rightarrow a_1^2 = 4a_0 a_2 \rightarrow a_2 = \frac{a_1^2}{4a_0} \rightarrow \boxed{a_2 > 0} \text{ y por hipótesis } \boxed{a_0 > 0}.$$

$$\left. \begin{matrix} a_0 > 0 \\ a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \frac{a_1}{2a_0} > 0 \rightarrow -\frac{a_1}{2a_0} < 0 \rightarrow \text{Re } z_{1,2} < 0. \quad \square$$

3) Si  $a_1^2 - 4a_0 a_2 > 0$

$$\text{Re } z_{1,2} = \text{Re } \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 > 0 \\ a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \end{cases}$$

Demostración :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Re } z_{1,2} &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0} < 0 \rightarrow \\ &\rightarrow -a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2} < 0 \rightarrow -a_1 < -\sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2} \rightarrow a_1 > \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2} \\ &\rightarrow a_1 > \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2} \rightarrow \begin{cases} a_1 > 0 \\ a_1^2 > a_1^2 - 4a_0 a_2 \rightarrow 4a_0 a_2 > 0 \rightarrow a_2 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ya que por hipótesis  $a_0 > 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} a_0 > 0 \\ a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ya que por hipótesis } a_1^2 - 4a_0 a_2 > 0 \rightarrow \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2} \in \mathbb{R}^+,$$

además a  $a_1$  se le resta algo positivo ya que  $a_0 > 0, a_2 > 0$  y por tanto

$$\begin{aligned} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2} < a_1 \\ -\sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2} < a_1 \end{array} \right. &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2} < 0 \end{array} \right. \\ \rightarrow \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0} < 0 \rightarrow \text{Re } z_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0} < 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto para ambas raíces  $z_1$  y  $z_2$  se cumple lo propuesto.  
En los tres valores posibles que toma el radicando se cumple

que el polinomio de segundo grado sea estable si y solamente si  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ .

### APENDICE 1.C

El polinomio de grado 3:

$$P(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3, \quad a_0 > 0$$

usualmente se transforma dividiendo por  $a_0$  en

$$z^3 + r z^2 + s z + t \quad \dots(1C.2)$$

donde

$$r = \frac{a_1}{a_0}, \quad s = \frac{a_2}{a_0}, \quad t = \frac{a_3}{a_0} \quad \dots(1C.3)$$

llevandose a su forma reducida mediante la transformación que asegure la igualdad a cero del coeficiente de  $z^2$ , a saber  $z = z' - \frac{r}{3}$

$$z'^3 + p z' + q \quad \dots(1C.4)$$

donde

$$p = s - \frac{r^2}{3}, \quad q = 2\frac{r^3}{27} - \frac{sr}{3} + t \quad \dots(1C.5)$$

Las raíces de (1C.4) se buscan introduciendo dos nuevas incógnitas

$$z = u + v \quad \dots(1C.6)$$

lo que nos genera una nueva ecuación a partir de (1C.4) igualada a cero:

$$(u^3 + v^3 + q) + (u + v)(3uv + p) = 0$$

obligando a que el último factor del segundo sumando sea cero:

$$3uv + p = 0$$

$$\boxed{uv = -\frac{p}{3}} \quad \dots(1C.7)$$

obtendremos

$$u^3 + v^3 + q = 0$$

$$\boxed{u^3 + v^3 = -q} \quad \dots(1C.8)$$

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{elevando al cuadrado}} \\ \xrightarrow{\text{elevando al cubo y}} \\ \xrightarrow{\text{multiplicando por 4}} \end{array} \left. \begin{array}{l} u^6 + 2u^3v^3 + v^6 = q^2 \\ 4u^3v^3 = -4(p/3)^3 \end{array} \right\} + \\
 \\
 \left. \begin{array}{l} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 - v^3 = \sqrt{q^2 + 4(p/3)^3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} u^6 - 2u^3v^3 + v^6 = q^2 + 4(p/3)^3 \\ (u^3 - v^3)^2 = q^2 + 4(p/3)^3 \\ (u^3 - v^3) = \sqrt{q^2 + 4(p/3)^3} \end{array} \\
 \\
 \left. \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right\} \begin{array}{l} u^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4(p/3)^3}}{2} \\ v^3 = \frac{-q \mp \sqrt{q^2 + 4(p/3)^3}}{2} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} \dots (10.9) \\ v = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Del resultado obtenido observamos que cada raíz cúbica tendrá en el campo de los complejos 3 valores. Combinando cualquier valor de  $u$  con cualquier valor de  $v$  obtendremos en total 9 sumas posibles  $u+v$ , pero entre dichas 9 sumas solo 3 serán raíces de la ecuación reducida (10.4), precisamente aquellas que satisfacen (10.7).

Las anteriores expresiones corresponden a las fórmulas de Cardano.

En ellas tenemos 3 posibles casos cuando  $(q/2)^2 + (p/3)^3 > 0$  ( $< 0$ ,  $= 0$ ).

Si  $(q/2)^2 + (p/3)^3 > 0$ , entonces el discriminante  $D = -4p^3 - 27q^2 = -108[(q/2)^2 + (p/3)^3] < 0$  en este caso la raíz cuadrada es de un número positivo y por tanto la raíz cúbica será de un número real. Pero sabemos que la raíz cúbica de un número real tiene un valor real y dos valores complejos conjugados.

Es este el caso que corresponde a la ecuación planteada

$$z^3 + z^2 + 2z + 8 = 0$$

ya que

$$\begin{aligned} (q/2)^2 + (p/3)^3 &= [(2-\frac{r^3}{27} - \frac{8r}{3} + t)/2]^2 + [(m-\frac{r^2}{3})/3]^3 = \\ &= (\frac{2}{27} - \frac{2}{9} + 8t/2)^2 + [(2-\frac{1^3}{3})/3]^3 > 0 \end{aligned} \quad \dots(10.10)$$

Si suponemos que  $u_1$  es la raíz real de  $u$  en (10.8) y  $v_1$  la correspondiente a  $v$ , pero asociada con  $u_1$  mediante (10.7) también será real dado que el número  $p$  que aparece en (10.7) también es real. Esto significa que de (10.6) la raíz

$$z_1 = u_1 + v_1$$

será real.

Las otras dos raíces se sabe que se obtiene como

$$\begin{aligned} z_2 &= u_2 + v_2 = u_1 \epsilon + v_1 \epsilon^2 = u_1 \epsilon + v_1 \epsilon^2 \\ z_3 &= u_3 + v_3 = u_1 \epsilon^2 + v_1 \epsilon = u_1 \epsilon^2 + v_1 \epsilon \end{aligned}$$

donde  $\epsilon$  y  $\epsilon^2$  son las raíces cúbicas de la unidad ( $\epsilon^3 = 1$ ,  $\epsilon = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$ ) con  $k=0,1,2$ , o sea que las raíces son:  $1$ ,  $\epsilon = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = -1/2 + i\sqrt{3}/2$  y  $\epsilon^2 = \cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3) = -1/2 - i\sqrt{3}/2$ .

$$\begin{aligned} z_2 &= u_2 + v_2 = u_1 \epsilon + v_1 \epsilon^2 = u_1 (-1/2 + i\sqrt{3}/2) + v_1 (-1/2 - i\sqrt{3}/2) \\ &= \frac{u_1 + v_1}{2} + i\sqrt{3} \frac{u_1 - v_1}{2} \\ z_3 &= u_3 + v_3 = u_1 \epsilon^2 + v_1 \epsilon = u_1 (-1/2 - i\sqrt{3}/2) + v_1 (-1/2 + i\sqrt{3}/2) \\ &= \frac{u_1 + v_1}{2} - i\sqrt{3} \frac{u_1 - v_1}{2} \end{aligned}$$

En nuestro caso de (10.9) y (10.10) tendremos que:

$$\begin{aligned} z_1 &= u_1 + v_1 = -2 \\ z_2 &= 1/2 + \sqrt{15}/2i \\ z_3 &= 1/2 - \sqrt{15}/2i \end{aligned}$$

con  $\text{Re } z_{2,3} > 0$ .

## APENDICE 1.0

### TEOREMA 2 :

Si el polinomio

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n,$$

con  $a_0 > 0$  y sus coeficientes reales  $a_k \in \mathbb{R}$  ( $k=0,1,2,\dots,n$ ) es estable, entonces todos sus coeficientes son positivos.

#### Demostración:

Partiremos del hecho de que cualquier polinomio con coeficientes reales puede representarse como producto de polinomios irreducibles de primero y segundo grados, es decir como producto de polinomios también con coeficientes reales, pero de grados menores o iguales que 2.

En efecto, es conocido el hecho de que cualquier polinomio con coeficientes reales puede ser expresado como el producto de polinomios irreducibles de primer y segundo grados, además de que cualquier raíz compleja  $z_k = x_k + iy_k$ , también resulta ser raíz de la misma multiplicidad que su compleja conjugada, esto es que  $\bar{z}_k = x_k - iy_k$ . Es por esto que al factorizar el polinomio en factores  $z - z_k$  los factores aparecerán por pares del tipo  $(z - z_k)(z - \bar{z}_k)$ , pero  $(z - z_k)(z - \bar{z}_k) = z^2 + 2pz + q$ , con  $p = -x_k$  y  $q = x_k^2 + y_k^2$ . Es así como cualquier polinomio de grado  $n$  con coeficientes reales admite las representaciones siguientes:

• Si todas sus raíces son distintas:

$$P(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

• Si  $z_j$  es una raíz de multiplicidad  $n_j$  con  $j=1, \dots, k$  :

$$P(z) = a_0 (z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \dots (z - z_k)^{n_k}$$

con  $k \leq n$  ya que  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  donde  $n$  es el grado del polinomio.

• Si hay  $r$  raíces reales y  $2s$  complejas tendremos:

$P(z) = a_0 (z - x_1)(z - x_2) \dots (z - x_r)(z^2 + 2p_1z + q_1)(z^2 + 2p_2z + q_2) \dots (z^2 + 2p_s z + q_s)$   
 el grado del polinomio es  $r + 2s = n$  y donde  $x_1, x_2, \dots, x_r$  son raíces reales mientras que los factores:

$$(z^2 + 2p_1z + q_1), (z^2 + 2p_2z + q_2), \dots, (z^2 + 2p_s z + q_s)$$



son trinomios que provienen de pares conjugados de raíces complejas, con  $p_k^2 < q_k$   $k=1, \dots, n$  (esta condición asegura que el polinomio proviene de raíces complejas conjugadas).

Tomando en cuenta que cualquier divisor de un polinomio estable es también estable, entonces esto junto con la afirmación del TEOREMA 1 del texto consistente en que un polinomio de primer y segundo grados es estable si y sólo si sus coeficientes son positivos, nos lleva a la conclusión de que cualquier polinomio estable con coeficientes reales positivos resulta ser el producto de polinomios con coeficientes positivos y por tanto el propio polinomio resulta tener coeficientes positivos, ya que los coeficientes del producto total se obtienen de coeficientes de factores bajo multiplicaciones y sumas, pero sin ninguna resta.

Otra forma de ver lo mismo sería :

i) Cuando las raíces son reales tenemos:

Debido a que el polinomio es estable y tiene como divisor a los factores lineales de la forma  $(z-x_j)$  que a su vez son estables, ya que  $x_j < 0$  por lo tanto los coeficientes de los binomios serán todos positivos.

ii) Cuando las raíces son complejas:

El polinomio de nuevo por hipótesis es estable y tiene como divisores a los trinomios  $z^2+2p_j z+q_j$  que a su vez son estables, ya que sus coeficientes  $p_j$  y  $q_j$  son positivos, dado que  $p_j = -x_j$  y como las partes reales de las raíces son negativas, entonces  $p_j > 0$  lo mismo sucede con  $q_j = x_j^2 + y_j^2 > 0$ .

En el texto ya se apuntó que la proposición recíproca no es cierta y se da el contraejemplo (15), aunque también puede servir de contraejemplo al polinomio siguiente  $z^3+z^2+3z+60$ , cuyas raíces son

$$z_1 = -4, \quad z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{51}}{2}, \quad z_3 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{51}}{2}$$

## APENDICE 2.A

Para simplificar el aspecto de la parábola semicúbica

$$y = -a_0 \left( \frac{x-a_3}{-a_1} \right)^{2/3} + a_2 \left( \frac{x-a_3}{-a_1} \right)^{1/3}$$

**eleveamos al cuadrado ambos lados de la igualdad:**

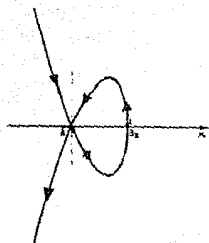
$$\begin{aligned} y^2 &= a_0^2 \left( \frac{x-a_3}{-a_1} \right)^4 - 2a_0 a_2 \left( \frac{x-a_3}{-a_1} \right)^2 + a_2^2 \left( \frac{x-a_3}{-a_1} \right) \\ &= -\frac{a_0^2}{a_1^4} (x-a_3)^4 \left[ (x-a_3)^2 + \frac{2a_1 a_2}{a_0} (x-a_3) + \frac{a_1^2 a_2^2}{a_0^2} \right] \\ &= -\frac{a_0^2}{a_1^4} (x-a_3)^4 \left[ x^2 - 2a_3 x + a_3^2 + \frac{2a_1 a_2}{a_0} x - \frac{2a_1 a_2 a_3}{a_0} + \frac{a_1^2 a_2^2}{a_0^2} \right] \\ &= -\frac{a_0^2}{a_1^4} (x-a_3)^4 \left[ x^2 + 2x \left[ \frac{a_1 a_2}{a_0} - a_3 \right] + \left[ \frac{a_1 a_2}{a_0} - a_3 \right]^2 \right] \\ &= -\frac{a_0^2}{a_1^4} (x-a_3)^4 \left[ x-a_3 + \frac{a_1 a_2}{a_0} \right]^2 \\ &= -\frac{a_0^2}{a_1^4} (x-a_3)^4 \left[ x - \left[ a_3 - \frac{a_1 a_2}{a_0} \right] \right]^2 \end{aligned}$$

Sea  $A = a_3 - \frac{a_1 a_2}{a_0}$  obteniéndose así lo que queríamos :

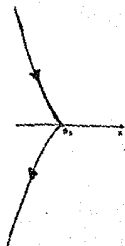
$$y^2 = -\frac{a_0^2}{a_1^4} (x-a_3)^4 (x-A)^2$$

APENDICE 2.8

$a_1 > 0$



$a_2 > 0$

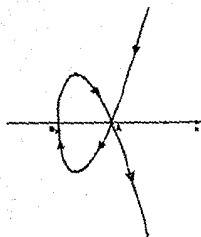


$a_2 = 0$

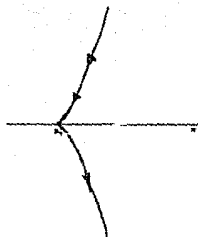


$a_2 < 0$

$a_1 < 0$



$a_2 > 0$



$a_2 = 0$



$a_2 < 0$

## APENDICE 2.C

La ecuación paramétrica de la curva de amplitud de fases que genera el polinomio de tercer grado en  $i\omega$  :

$$P(i\omega) = a_0 (i\omega)^3 + a_1 (i\omega)^2 + a_2 (i\omega) + a_3$$

$$P(i\omega) = [-a_1 \omega^2 + a_3] + i[-a_0 \omega^3 + a_2 \omega]$$

$$\begin{cases} x = -a_1 \omega^2 + a_3 \\ y = -a_0 \omega^3 + a_2 \omega = \omega(-a_0 \omega^2 + a_2) \end{cases} \quad \text{con } \omega \in (-\infty, +\infty) \quad \dots(2C.1)$$

Tomemos el primer caso para analizarlo detalladamente:

$$1) a_1 > 0, a_2 > 0, a_1 a_2 < a_0 a_3 \quad (\therefore a_3 > 0)$$

De (2C.1) podemos observar que si  $\omega \rightarrow -\infty$ , entonces  $\begin{cases} x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow +\infty \end{cases}$ .

Esto significa que la gráfica de la curva (2C.1) viene del "infinito" por la parte izquierda superior del plano (segundo cuadrante). Véase la Fig. (2C.1).

Cuando  $\omega \rightarrow +\infty$ , entonces  $\begin{cases} x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty \end{cases}$ , lo cual significa que la gráfica de la curva (2C.1) se aleja al "infinito" por la parte izquierda inferior del plano (tercer cuadrante). Obsérvese la Fig. (2C.1).

El eje horizontal  $y=0$  es intersectado por la curva en :

$$-a_0 \omega^3 + a_2 \omega = -\omega(a_0 \omega^2 - a_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ a_0 \omega^2 - a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \pm \frac{a_2}{a_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega_{2,3} = \pm \sqrt{a_2/a_0} \end{cases}$$

o sea que la curva (2C.1) intersecta al eje horizontal primero en el

$(x,y)$  correspondiente a  $\omega_3 = -\sqrt{a_2/a_0}$ , luego en el correspondiente a

$\omega_1 = 0$  y finalmente en el que corresponde a  $\omega_2 = +\sqrt{a_2/a_0}$ , es decir en los puntos  $[-a_1 a_2/a_0 + a_3, 0]$ ,  $(a_3, 0)$  y  $[-a_1 a_2/a_0 + a_3, 0]$ , que en la notación introducida son los puntos  $(A, 0)$ ,  $(a_3, 0)$  y de nuevo  $(A, 0)$ .

A su vez el eje vertical  $x=0$  es intersectado por la curva (2C.1) en

$$-a_1 \omega^2 + a_3 = 0$$

de donde

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{a_3/a_1}$$

primero en  $\omega_1 = -\sqrt{a_3/a_1}$  y luego en  $\omega_2 = +\sqrt{a_3/a_1}$ , ya que por hipótesis

$$a_1 a_2 < a_0 a_3, \text{ luego } \frac{a_3}{a_1} > \frac{a_2}{a_0} \Rightarrow \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} > \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} \Rightarrow -\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} < -\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}$$

que comparadas con el cero estas dos últimas desigualdades nos dan:

$$-\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} < -\sqrt{\frac{a_2}{a_0}} < 0 < \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} < \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$$

Esta desigualdad la podemos interpretar de la siguiente manera: al variar monótonamente  $\omega$  de  $-\infty$  a  $+\infty$  la curva (2C.1) primero intersecta el eje  $y$  en

$$y = -a_0 \left[ -\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} \right]^3 + a_2 \left[ -\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} \right] = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} \left[ \frac{a_0 a_3}{a_1} - a_2 \right] = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} \left( \frac{a_0 a_3 - a_2 a_1}{a_1} \right) > 0$$

luego tres veces intersecta el eje horizontal sucesivamente en los puntos con abscisas  $A = -a_1 (a_2/a_0) + a_3 > 0$ ,  $a_3 > 0$  y de nuevo en  $A = -a_1 (a_2/a_0) + a_3 > 0$  y finalmente de nuevo intersecta el eje vertical en el punto de ordenada

$$y = -\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} \left( \frac{a_0 a_3 - a_2 a_1}{a_1} \right) < 0$$

Todo esto resumido aparece en la gráfica de la Fig. (2C.1).

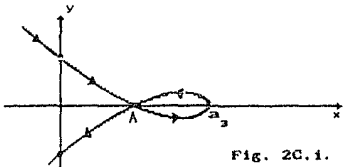


Fig. 2C.1.

En forma análoga se hace el análisis de los restantes casos.

Nota: Todas las gráficas fueron generadas con el programa "Derive" [7].

2)  $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_0 a_3$

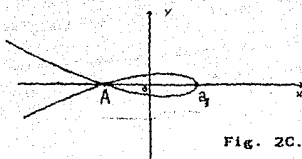


Fig. 2C.2

3)  $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 < 0$

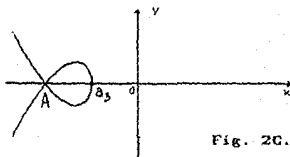


Fig. 2C.3

4)  $a_1 > 0, a_2 = 0, a_3 > 0$

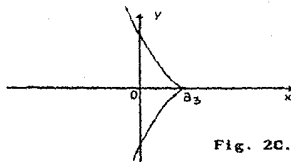


Fig. 2C.4

5)  $a_1 > 0, a_2 < 0, a_3 > 0$

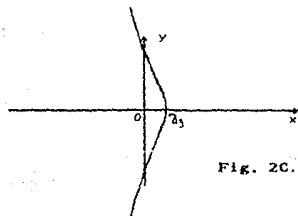


Fig. 2C.5

6)  $a_1 > 0, a_2 = 0, a_3 < 0$

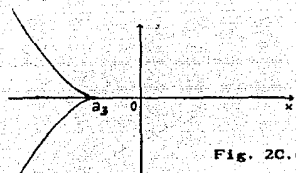


Fig. 2C.6

7)  $a_1 > 0, a_2 < 0, a_3 < 0$

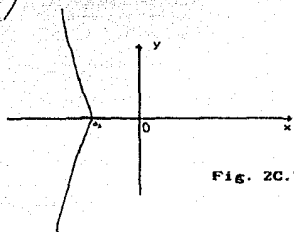


Fig. 2C.7

8)  $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 > 0$

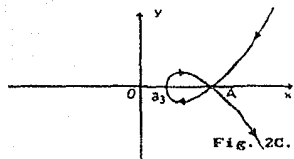


Fig. 2C.8

9)  $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 < 0$

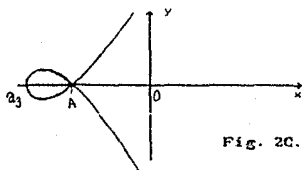


Fig. 2C.9

$$10) a_1 < 0, a_2 = 0, a_3 > 0$$

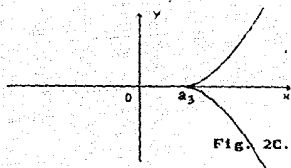


Fig. 2C.10

$$11) a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 > 0$$

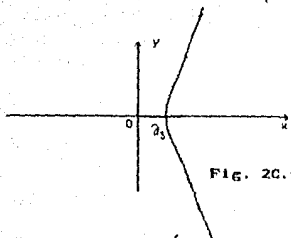


Fig. 2C.11

$$12) a_1 < 0, a_2 = 0, a_3 < 0$$

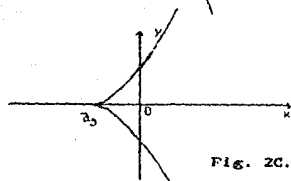


Fig. 2C.12

$$13) a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 < 0$$

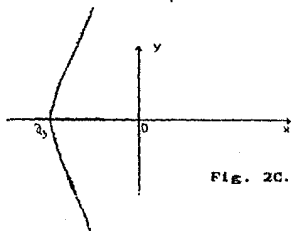


Fig. 2C.13



## APENDICE 2.D

El caso  $n=3$ :  $P(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$  nos lleva a la representación paramétrica

$$\begin{cases} x = -a_1 \omega^2 + a_2 \\ y = -a_0 \omega^3 + a_3 \omega \end{cases} \quad \dots(2D.3)$$

En el subcaso cuando  $a_1=0$  tenemos la curva

$$\begin{cases} x = a_2 \\ y = -\omega(a_0 \omega^2 - a_3) \end{cases} \quad \dots(2D.4)$$

que realmente es una recta vertical y como  $\omega$  varía de  $-\infty$  a  $+\infty$  tal recta es recorrida de arriba hacia abajo. Aquí queremos mostrar que en efecto solo depende del signo de  $a_2$  si la orientación con la que recorre dicha recta es monótona o llega a tener una oscilación.

En efecto

i) Si  $a_2 < 0$ , dado que por hipótesis  $a_0 > 0$ , entonces  $\omega_{2,3} = \pm \sqrt{a_2/a_0}$  no es un número real y por tanto solo  $\omega=0$  es mandado al  $(a_2, 0)$  y por ende la recta cuando  $\omega$  varía de  $-\infty$  a  $+\infty$  es recorrida monótonamente de arriba hacia abajo (véase la Fig. 2D.1).

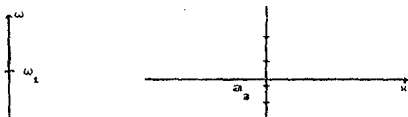


Fig. 2D.1

ii) Si  $a_2 > 0$ , entonces al  $\omega$  recorrer los valores de  $-\infty$  a  $+\infty$  pasará por las raíces de  $y = -\omega(a_0 \omega^2 - a_3) = 0$ , es decir por  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_{2,3} = \pm \sqrt{a_3/a_0}$  y precisamente en el orden  $\omega_3, \omega_1$  y  $\omega_2$ . Pero esto significa que al pasar por  $\omega_1$  la recta (2.4) pasa por el punto  $(a_2, 0)$  hacia abajo, pero tiene que volver a subir porque al llegar a ser  $\omega = \omega_2$  de nuevo pasa por  $(a_2, 0)$  y como de nuevo en  $\omega = \omega_3$  tiene que pasar por  $(a_2, 0)$  se ve obligado a regresar hacia abajo, lo cual constituye la oscilación mencionada (véase la Fig. 2D.2).

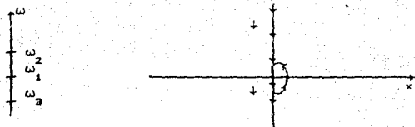


Fig. 2D.2.

## APENDICE 2.E

Caso  $n=2$  :

$$P(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2 \quad \text{con } a_0 > 0, \quad \begin{cases} x = -a_0 \omega^2 + a_2 \\ y = a_1 \omega \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{I) } a_1 > 0, a_2 > 0 \quad \therefore \Delta_p &= \frac{\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)}{\pi} \\ \varphi(-\infty) &= -\pi \quad \Delta_p = \frac{\pi - (-\pi)}{\pi} \quad \therefore \Delta_p = 2 \text{ /da dos medias vueltas/.} \\ \varphi(+\infty) &= \pi \end{aligned}$$

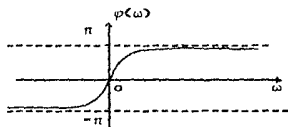
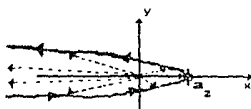


Fig. 2E.1

II)  $a_1 > 0, a_2 < 0$

$$\begin{aligned} \varphi(-\infty) &= \pi \quad \Delta_p = \frac{\pi - \pi}{\pi} \quad \therefore \Delta_p = 0 \text{ /no da ninguna media vuelta completa/.} \\ \varphi(+\infty) &= \pi \end{aligned}$$

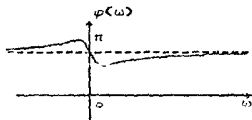
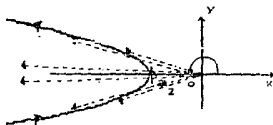


Fig. 2E.2

/Empieza con un vector de posición que es el eje horizontal negativo formando un ángulo  $\pi$ , dicho ángulo crece hasta llegar a un ángulo donde

el vector de posición es tangente a la gráfica de la parábola, pero no alcanza a dar una media vuelta completa y a continuación se mueve simétricamente con respecto al eje de las  $x$  llegando su ángulo final a tomar también el valor  $\rho(+\infty)=\pi/$ .

iii)  $a_1 < 0, a_2 > 0$

$$\rho(-\infty) = \pi \quad \Delta_p = \frac{-\pi - \pi}{\pi} \therefore \Delta_p = -2 \text{ da dos medias vueltas, pero a reloj.}$$

$$\rho(+\infty) = -\pi$$

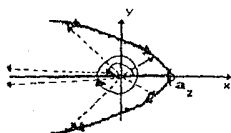
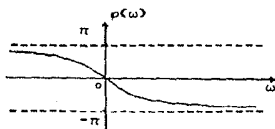


Fig. 2E.3



iv)  $a_1 < 0, a_2 < 0$

$$\rho(-\infty) = \pi \quad \Delta_p = \frac{\pi - \pi}{\pi} \therefore \Delta_p = 0 \text{ /no da ninguna media vuelta/}$$

$$\rho(+\infty) = \pi$$

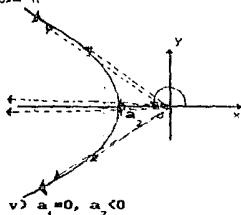
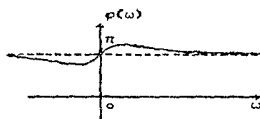


Fig. 2E.4



$$\rho(-\infty) = \pi \quad \Delta_p = \frac{\pi - \pi}{\pi} \therefore \Delta_p = 0 \text{ /no da ninguna media vuelta/}$$

$$\rho(+\infty) = \pi$$

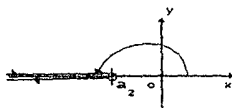
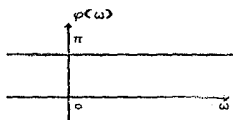


Fig. 2E.5



$$vi) a_1 = 0, a_2 > 0$$

$$\begin{aligned} \varphi(-\omega) &= \pi \\ \varphi(+\omega) &= \pi \end{aligned}$$

$$\Delta_p = \frac{\pi - \pi}{\pi} \therefore \Delta_p = 0 \text{ /no da ninguna media vuelta/}$$

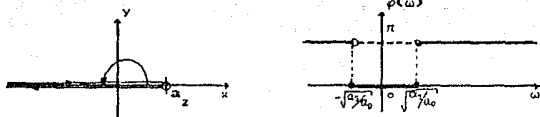


Fig. 2E.6

Caso n=3 :

$$F(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 \quad \text{con } a_0 > 0, \quad \begin{cases} x^3 - a_1 \omega^2 + a_2 \\ y^3 - a_0 \omega^3 + a_2 \omega \end{cases}$$

Los primeros 4 casos tienen en común :  $a_1 = 0$  y la gráfica de la función de fases  $\varphi$  será monótona si  $a_2 < 0$  y le aparecen 2 jorobas si  $a_2 > 0$ . Si  $a_2 < 0$  la función de fases toma valores de  $\pi/2$  a  $3\pi/2$  y si  $a_2 > 0$  variará entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ . El observar el ángulo inicial y final de cada caso nos lleva a que  $N=0$  y  $M=1$  o bien  $-1$  y por tanto  $\Delta_p = M-N$  será  $1$  o  $-1$ .

$$i) a_1 = 0, a_2 < 0, a_3 < 0 \therefore \Delta_p = 1$$

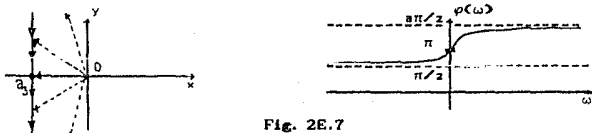
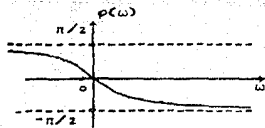


Fig. 2E.7

ii)  $a_1=0, a_2<0, a_3>0 \therefore \Delta_p = -1$



Fig. 2E.8



iii)  $a_1=0, a_2>0, a_3<0 \therefore \Delta_p = 1$

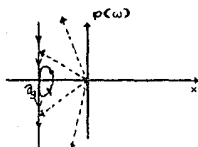
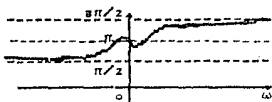


Fig. 2E.9



iv)  $a_1=0, a_2>0, a_3>0 \therefore \Delta_p = -1$

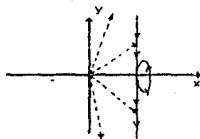
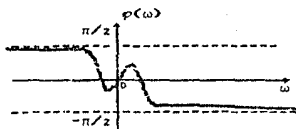


Fig. 2E.10



v) Analicemos detalladamente este caso. En este caso  $a_1>0, a_2>0, a_3>0$  y  $a_1 a_2 < a_0 a_3$  y la gráfica de la característica de amplitud de fases ya fue deducida en la Fig. 2E.11. De la gráfica observamos que es simétrica con respecto al eje horizontal y por tanto basta con analizar la gráfica generada por la variación de  $\omega$  entre 0 y  $+\infty$ . Entonces al variar  $\omega$  de 0 a  $+\infty$  el radio vector  $\overline{OM} / M=(x(\omega), y(\omega)) /$  comienza en la posición horizontal se levanta y llega hasta una posición donde empieza a bajar hasta de nuevo pasar por la posición horizontal después de la cual seguirá bajando, pasando por la vertical, hasta llegar a una posición tangente a la gráfica, luego de lo cual de nuevo se empieza a levantar hasta quedar en la posición del eje vertical negativo. Como se en la Fig. 2E.12 .

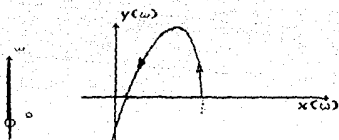


Fig. 2E.11

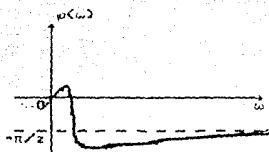


Fig. 2E.12

Pero lo que realmente nos interesa es el ángulo  $\varphi$  que toma el vector de posición  $\overline{OM}$ , el cual empieza en  $\varphi_0=0$  aumenta hasta un máximo  $\varphi_{\max}$  y luego decrece hasta llegar de nuevo a ser cero sigue decreciendo pasa por el valor  $-\pi/2$  sigue decrementando hasta llegar a un mínimo  $\varphi_{\min}$  (cuando el vector de posición es tangente a la característica de amplitud de fase) y de nuevo empieza a crecer tomando como posición final la vertical negativa o sea el ángulo límite que es  $-\pi/2$  (esto queda resumido en la Fig. 2E.12).

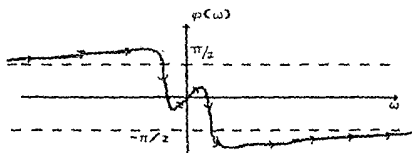


Fig. 2E.13

Por simetría ésta gráfica queda como en la Fig. 2E.13. Aquí  $M=1$  y  $N=0 \therefore \Delta_p = -1$ . Análogamente se discuten todos los demás casos observándose la coincidencia de algunos de dichos casos. Resumiendo:

v)  $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 < a_0 a_3 \therefore \Delta_p = -1$

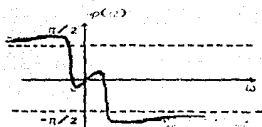
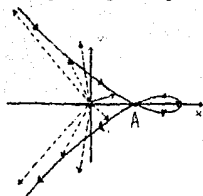


Fig. 2E.14

vi)  $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_0 a_3 \therefore \Delta_p = 3$

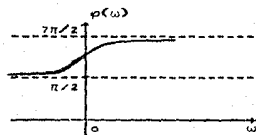
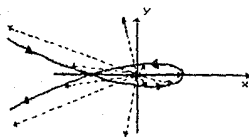


Fig. 2E.15

vii)  $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 < 0 \therefore \Delta_p = 1$

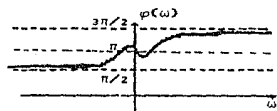
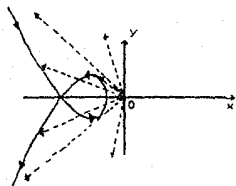


Fig. 2E.16

viii)  $a_1 > 0, a_2 \leq 0, a_3 > 0 \therefore \Delta_p = -1$

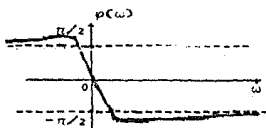
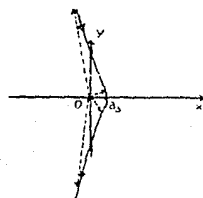


Fig. 2E.17

ix)  $a_1 > 0, a_2 \leq 0, a_3 < 0 \therefore \Delta_p = 1$

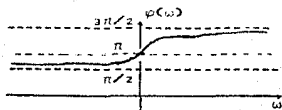
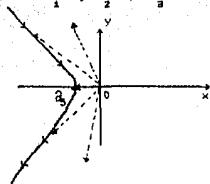


Fig. 2E.18

x)  $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 > 0 \therefore \Delta_p = -1$

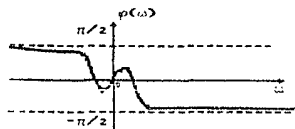
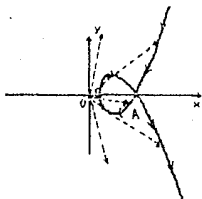


Fig. 2E.19

xi)  $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_0 a_3 \therefore \Delta_p = -3$

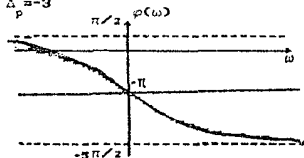
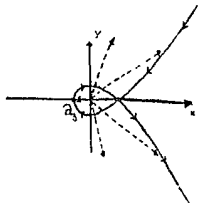


Fig. 2E.20

xii)  $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 < 0, a_1 a_2 < a_0 a_3 \therefore \Delta_p = 1$

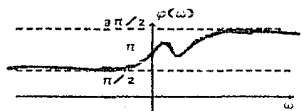
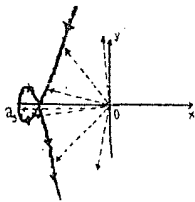


Fig. 2E.21



xiii)  $a_1 < 0, a_2 \leq 0, a_3 > 0 \therefore \Delta_p = -1$

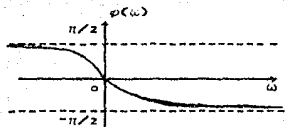
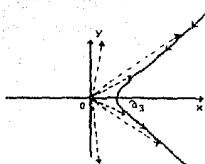


Fig. 2E.22

xiv)  $a_1 < 0, a_2 \leq 0, a_3 < 0 \therefore \Delta_p = 1$

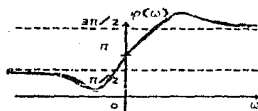
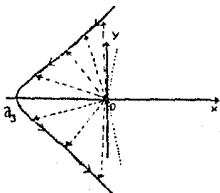


Fig. 2E.23

## APENDICE 2.F

### LEMA 5.

( $\forall P_1, P_2; P = P_1 P_2$  polinomios)  $(\exists \varphi_1, \varphi_2, \varphi$  funciones de fase)  $\Rightarrow$   

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + 2l\pi$$

con  $l = 0, 1, -1$ ; no depende de  $\omega, \forall \omega \in \mathbb{R}$ .

### Demostración:

Dado que :

$$\arg P(i\omega) = \arg P_1(i\omega) + \arg P_2(i\omega)$$

significa que:

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}$$

en particular

$$\varphi(0) = \varphi_1(0) + \varphi_2(0) + 2l\pi$$

pero del LEMA 3 que nos asegura la existencia de  $\varphi(\omega)$ , una de cuyas propiedades es la restricción de que su valor inicial está acotado por  $-\pi < \varphi(0) \leq \pi$ , luego también:

$$-\pi < \varphi_1(0) \leq \pi \quad \text{y} \quad -\pi < \varphi_2(0) \leq \pi,$$

o sea

$$\pi > -\varphi_1(0) \geq -\pi \quad \text{y} \quad \pi > -\varphi_2(0) \geq -\pi,$$

por lo tanto

$$-3\pi < \varphi(0) - \varphi_1(0) - \varphi_2(0) < 3\pi$$

pero entonces

$$-3\pi < 2l\pi < 3\pi$$

y por ende no se cumple para todos los  $l$  enteros, sino solo para

$$l = 0, 1, -1.$$

## APENDICE 2.G

### COROLARIO 2.

$$(\forall P_1, P_2 \text{ polinomios}) \Delta_{P_1 P_2} = \Delta_{P_1} + \Delta_{P_2}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \Delta_{P_1 P_2} &= \frac{\rho(+\infty) - \rho(-\infty)}{\pi} \underset{z.F.}{=} \frac{\rho_1(+\infty) + \rho_2(+\infty) + 2l\pi - \rho_1(-\infty) - \rho_2(-\infty) - 2l\pi}{\pi} \quad l=0, 1, -1 \\ &= \frac{\rho_1(+\infty) - \rho_1(-\infty)}{\pi} + \frac{\rho_2(+\infty) - \rho_2(-\infty)}{\pi} = \Delta_{P_1} + \Delta_{P_2} \end{aligned}$$

### APENDICE 3.A

Para  $n=1$ :

$$P(z) = a_0 z + a_1; \text{ con } a_0 \in \mathbb{R}^+, a_1 = (\alpha_1 + i\beta_1) \in \mathbb{C}$$

$$z_1 = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$P(z) \text{ es estable} \Leftrightarrow \alpha_1 > 0$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \operatorname{Re} z_1 < 0 &\Rightarrow \operatorname{Re} \left[ -\frac{a_1}{a_0} \right] < 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \left[ -\frac{\alpha_1 + i\beta_1}{a_0} \right] < 0 \Rightarrow -\frac{\alpha_1}{a_0} < 0 \Rightarrow \alpha_1 > 0. \\ \Leftrightarrow \alpha_1 > 0 \Rightarrow -\alpha_1 < 0 &\Rightarrow -\frac{\alpha_1}{a_0} < 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \left[ -\frac{\alpha_1 - i\beta_1}{a_0} \right] < 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \left[ \frac{-\alpha_1 - i\beta_1}{a_0} \right] < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{Re} \left[ -\frac{\alpha_1 + i\beta_1}{a_0} \right] < 0 &\Rightarrow \operatorname{Re} \left[ -\frac{a_1}{a_0} \right] < 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(z_1) < 0. \end{aligned}$$

### APENDICE 3.B

Para  $n=1$ :

$$P(z) = a_0 z^2 + a_1; \text{ con } a_0 = (\alpha_0 + i\beta_0) \in \mathbb{C} \text{ y } a_1 = (\alpha_1 + i\beta_1) \in \mathbb{C}$$

$$P(z) \text{ es estable} \Leftrightarrow (\operatorname{Re} a_0 \operatorname{Re} a_1 + \operatorname{Im} a_0 \operatorname{Im} a_1) > 0$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \text{P.D. } (\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} \left[ -\frac{a_1}{a_0} \right] < 0) &\Leftrightarrow (\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1 > 0) \\ \Rightarrow \operatorname{Re} z_1 < 0 &\Rightarrow \operatorname{Re} \left[ -\frac{a_1}{a_0} \right] < 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \left[ -\frac{a_1 \bar{a}_0}{a_0 \bar{a}_0} \right] < 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \left[ \frac{-a_1 \bar{a}_0}{|a_0|^2} \right] < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{Re} \left[ \frac{-(\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_0 - i\beta_0)}{\alpha_0^2 + \beta_0^2} \right] < 0 &\Rightarrow \operatorname{Re} \left[ \frac{-\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1 + i(\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0)}{\alpha_0^2 + \beta_0^2} \right] < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1}{\alpha_0^2 + \beta_0^2} < 0 &\Leftrightarrow \alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1 > 0. \end{aligned}$$

$$\omega) \quad \alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1 > 0 \Rightarrow \frac{\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1}{\alpha_0^2 + \beta_0^2} > 0 \Rightarrow -\frac{\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1}{\alpha_0^2 + \beta_0^2} < 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{-\frac{a_1}{a_0}}{\left| \frac{a_1}{a_0} \right|^2} \right] < 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \left[ \frac{-\frac{a_1}{a_0}}{\frac{a_1}{a_0}} \right] < 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \left[ -\frac{a_1}{a_0} \right] < 0 \Rightarrow \operatorname{Re} z_1 < 0. \blacksquare$$

### APENDICE 3.C

#### PROPOSICION 1.

$$(\forall P = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}) (\forall z_k : P(z_k) = 0) (\operatorname{Re} z_k < 0) \Leftrightarrow (\varphi(\omega) \uparrow)$$

$k = 1, 2, \dots, n$

#### Demostración:

En el texto para variantes de coeficientes de la ecuación de primer grado obtuvimos que la proposición es cierta, pues en todos los casos en que se aseguraba que el polinomio era estable la función de fases  $\varphi(\omega)$  resultó que era en efecto monótona creciente.

Para los polinomios de grados  $n > 1$  el análisis directo es suficientemente complicado, en particular, si los coeficientes son complejos. Por esto es que es preferible que la demostración se base en la representatividad de cualquier polinomio como producto de polinomios de grado uno:

$$P(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

De esta manera es como caemos en las condiciones del LEMA 5, es decir tenemos polinomios  $P_1 = (z - z_1)$  y  $P_2 = (z - z_2)$ , que si son estables, entonces sus funciones de fases  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  respectivamente serán monótonas crecientes por ser polinomios de primer grado. En consecuencia el producto de polinomios  $P_1 P_2$ , por el LEMA 5 del Capítulo II, tendrá por función de fases  $\varphi$ :

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + 2l\pi, \text{ con } l=0, 1 \text{ y } -1.$$

pero esto significa que la nueva función de fases  $\varphi$  del producto de polinomios será una suma de funciones monótonas con a lo mas otra función constante ó  $2\pi$  ó  $-2\pi$ , pero como sabemos suma de funciones crecientes seguirá siendo creciente y como todo polinomio de grado  $n$  tiene un numero finito  $n$  de productos de primer grado, entonces el polinomio de grado  $n$  será estable si y sólo si sus factores lineales lo



Pero sabemos que todo polinomio tiene tal representación y por tanto siempre tendremos que  $\Delta'_p = \Delta_p$ .

### APENDICE 3.E

CRITERIO 2.(1876).

Criterio de Vyshnegradskii.

El polinomio

$$P(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$$

con coeficientes reales y  $a_0 > 0$ , es estable si y sólo si  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$  y  $a_1 a_2 > a_0 a_3$ .

Demonstración:

P.D.

$$(\forall P(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3; a_k \in \mathbb{K}, a_0 \in \mathbb{R}^+) (\mathbb{R}e z_k < 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 > 0 \\ a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \\ a_3 > 0 \\ a_1 a_2 > a_0 a_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Si P es estable  $\rightarrow$  P no tiene raíces imaginarias puras  $\rightarrow$  P cumple con el Criterio 1  $\rightarrow \Delta_p = 3 \rightarrow$  por la PROPOSICION 1 del Capítulo II  $\rightarrow a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$  y  $a_1 a_2 > a_0 a_3$ .

$\Leftarrow$  Si  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$  y  $a_1 a_2 > a_0 a_3$ , por un lado,  $\rightarrow$  P no tiene raíces imaginarias pues esto ocurre si y sólo si  $a_3 = 0$  ó  $a_1 a_2 = a_0 a_3$ , (cosa que aquí no se cumple), pero por otro lado  $\rightarrow$  del CRITERIO 1  $\rightarrow \Delta_p = 3 \rightarrow$  P es Estable.

$\therefore$  P es estable.  $\square$

### APENDICE 3.F

Todo polinomio  $a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$  puede llevarse mediante la transformación  $z = \lambda w$  al polinomio  $w^3 + \alpha w^2 + \tau w + 1$ .

En efecto substituyendo la transformación en la ecuación original:

$$a_0 \lambda^3 w^3 + a_1 \lambda^2 w^2 + a_2 \lambda w + a_3$$

obligando al primer coeficiente a ser 1, esto es dividiendo por  $a_0 \lambda^3$

obtenemos:

$$w^2 + \frac{a_1 \lambda^2 w^2}{a_0 \lambda^3} + \frac{a_2 \lambda w}{a_0 \lambda^3} + \frac{a_3}{a_0 \lambda^3}$$

de esta manera obligamos al término independiente también a ser 1 y así determinamos el valor de  $\lambda$ :

$$\frac{a_3}{a_0 \lambda^3} = 1 \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{a_3/a_0}$$

Es así que mediante la transformación  $z = \sqrt[3]{a_3/a_0} w$ , obtendremos:

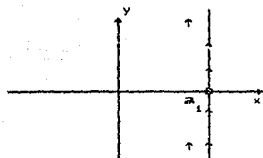
$$w^2 + \sigma w^2 + \tau w + 1$$

donde

$$\sigma = \frac{a_1}{a_0 \lambda} = \frac{a_1}{a_0 \sqrt[3]{a_3/a_0}} = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_3 a_0^2}}$$

$$\tau = \frac{a_2}{a_0 \lambda^2} = \frac{a_2}{a_0 \left(\sqrt[3]{a_3/a_0}\right)^2} = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_3^2 a_0}}$$

### APENDICE 3.G

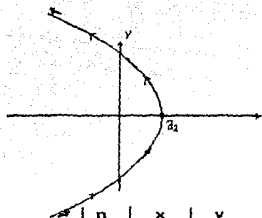


$$n = i: \begin{cases} x = a_1 \\ y = a_0 \end{cases} \quad (m = 0 \text{ par})$$

	n	x	y
$\omega \rightarrow -\infty$	1	>0	<0
$\omega \rightarrow +\infty$	1	>0	>0

(viene del 4<sup>to</sup> cuadrante)

(va al 1<sup>er</sup> cuadrante).

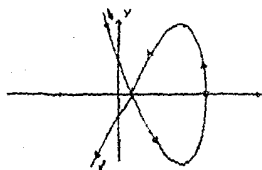


$\omega$	$n$	$x$	$y$
$\omega \rightarrow -\infty$	2	$< 0$	$< 0$
$\omega \rightarrow +\infty$	2	$< 0$	$> 0$

(viene del 3<sup>er</sup> quadrante)

(va al 2<sup>do</sup> quadrante).

$$n=2: \begin{cases} x = a_2 - a_0 \omega^2 \\ y = a_1 \omega \end{cases} \quad (m=1 \text{ impar})$$



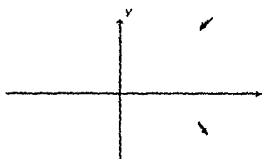
$\omega$	$n$	$x$	$y$
$\omega \rightarrow -\infty$	3	$< 0$	$> 0$
$\omega \rightarrow +\infty$	3	$< 0$	$< 0$

(viene del 2<sup>do</sup> quadrante)

(va al 3<sup>er</sup> quadrante).

$$n=3: \begin{cases} x = a_3 - a_1 \omega^2 \\ y = a_2 \omega - a_0 \omega^3 = \omega(a_2 - a_0 \omega^2) \end{cases}$$

( $m=1$  impar)



$\omega$	$n$	$x$	$y$
$\omega \rightarrow -\infty$	4	$> 0$	$> 0$
$\omega \rightarrow +\infty$	4	$> 0$	$< 0$

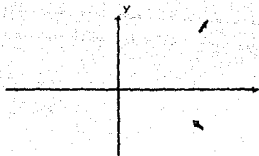
(viene del 1<sup>er</sup> quadrante)

(va al 4<sup>to</sup> quadrante).

$$n=4: \begin{cases} x = \omega^2(-a_2 + a_0 \omega^2) + a_4 \\ y = \omega(-a_1 \omega^2 + a_3) \end{cases}$$

( $m=2$  par)





$$n=5: \begin{cases} x = \omega^2(-a_3 + a_1 \omega^2) + a_5 \\ y = \omega(\omega^2(-a_2 + a_0 \omega^2) + a_4) \end{cases}$$

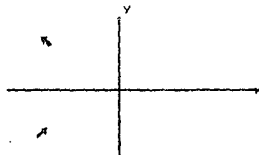
(m = 2 par)

	n	x	y
$\omega \rightarrow -\infty$	5	>0	<0
$\omega \rightarrow +\infty$	5	>0	>0

(viene del 4<sup>to</sup> cuadrante)

(va al 1<sup>er</sup> cuadrante).

Observemos que cualitativamente el caso n=1 coincide con el caso n=5, mientras que el n=2 debería coincidir con el n=6 si es que la regularidad observada es correcta.



$$n=6: \begin{cases} x = \omega^2[\omega^2(a_2 - a_0 \omega^2) - a_1] + a_0 \\ y = \omega[\omega^2(-a_3 + a_1 \omega^2) + a_4] \end{cases}$$

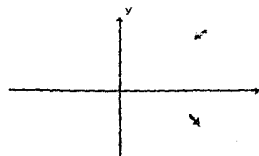
(m = 3 impar)

	n	x	y
$\omega \rightarrow -\infty$	6	<0	<0
$\omega \rightarrow +\infty$	6	<0	>0

(viene del 3<sup>er</sup> cuadrante)

(va al 2<sup>do</sup> cuadrante).

Como efectivamente n=6 coincide cualitativamente con el caso n=2, entonces es presumible que se repitan los comportamientos cualitativos de la característica de amplitud de fases cada cuatro casos por lo tanto el caso n=8 debería coincidir con el comportamiento del caso degenerado n=0.



$$n=8: \begin{cases} x = \omega^2[\omega^2[\omega^2(-a_2 + a_0 \omega^2) + a_4] - a_0] + a_0 \\ y = \omega[\omega^2[\omega^2(-a_3 - a_1 \omega^2) - a_5] + a_7] \end{cases}$$

(m = 4 par)

	n	x	y
$\omega \rightarrow -\infty$	8	>0	>0
$\omega \rightarrow +\infty$	8	>0	<0

(viene del 1<sup>er</sup> cuadrante)

(va al 4<sup>to</sup> cuadrante)

Por lo tanto el comportamiento del caso  $n=0$  debería ser similar al del caso  $n=8$ .

Resumiendo lo anterior hecho podemos clasificar todos los casos en términos del grado del polinomio  $n$  o lo que sería más conveniente observar el residuo de la división del grado del polinomio,  $n$ , por 4, ya que la TABLA 1 que resume los casos particulares analizados refleja que a través del residuo pueda observarse que todos los casos se repiten módulo 4.

TABLA 1.

	n	x	y	cuadrante	residuo
$\omega \rightarrow -\infty$	0	+	+	del 1 <sup>er</sup> al 4 <sup>to</sup>	0
$\omega \rightarrow +\infty$		+	-		
$\omega \rightarrow -\infty$	1	+	-	del 4 <sup>to</sup> al 1 <sup>er</sup>	1
$\omega \rightarrow +\infty$		+	+		
$\omega \rightarrow -\infty$	2	-	-	del 3 <sup>er</sup> al 2 <sup>do</sup>	2
$\omega \rightarrow +\infty$		+	-		
$\omega \rightarrow -\infty$	3	+	-	del 2 <sup>do</sup> al 3 <sup>er</sup>	3
$\omega \rightarrow +\infty$		-	-		
$\omega \rightarrow -\infty$	4	+	+	del 1 <sup>er</sup> al 4 <sup>to</sup>	0
$\omega \rightarrow +\infty$		+	-		
$\omega \rightarrow -\infty$	5	+	-	del 4 <sup>to</sup> al 1 <sup>er</sup>	1
$\omega \rightarrow +\infty$		+	+		
$\omega \rightarrow -\infty$	6	-	-	del 3 <sup>er</sup> al 2 <sup>do</sup>	2
$\omega \rightarrow +\infty$		+	-		
$\omega \rightarrow -\infty$	7	+	-	del 2 <sup>do</sup> al 3 <sup>er</sup>	3
$\omega \rightarrow +\infty$		-	-		
$\omega \rightarrow -\infty$	8	+	+	del 1 <sup>er</sup> al 4 <sup>to</sup>	0
$\omega \rightarrow +\infty$		+	-		

Esto lo podemos generalizar por inducción a cualquier caso de grado impar  $n = 2m + 1$  y de grado par  $n = 2m$ , donde la regularidad observada en el cuadrante de partida y de llegada puede clasificarse a través de los  $m$  impares y pares  $m \in \mathbb{N}$ . De la TABLA 1 observamos que los casos impares  $n = 1$  y  $n = 5$  provienen de valores de  $m$  pares, es decir  $n = 2(0)+1$  con  $m = 0$  y  $n = 2(2)+1$  con  $m = 2$  teniéndose que ambas comienzan en el cuarto cuadrante y terminan en el primero, de manera similar se observa que para los impares  $n = 3$  y  $n = 7$ , que provienen de  $m$  impares ( $m = 1$  y  $m = 3$ ) ambas curvas comienzan en el segundo cuadrante y finalizan en el tercero.

En forma análoga si  $n$  es par  $n = 2m$  también se darán 2 casos según que  $m$  sea par o impar. Esto queda resumido en la siguiente:

TABLA 2

$n = 2m + 1$	$\begin{cases} x = u(\omega) \\ y = v(\omega) \end{cases}$ comienza en el:	$\begin{cases} x = u(\omega) \\ y = v(\omega) \end{cases}$ termina en el:
Si $m$ impar	2 <sup>o</sup> cuadrante	3 <sup>er</sup> cuadrante
Si $m$ par	4 <sup>o</sup> cuadrante	1 <sup>er</sup> cuadrante
$n = 2m$		
Si $m$ impar	3 <sup>er</sup> cuadrante	2 <sup>do</sup> cuadrante
Si $m$ par	1 <sup>o</sup> cuadrante	4 <sup>o</sup> cuadrante

Esta TABLA 2 fue inferida de los casos particulares analizados en la TABLA 1, la demostración se puede obtener directamente por inducción en  $m$ , para  $n$  impar y  $n$  par.

Demostación:

Caso  $n = 2m + 1$  :

Para  $m$  par:

Para  $m = 2 \rightarrow n = 5$ , en el texto se demostró que este tipo de

polinomios comienzan su característica de amplitud de fases en el 4<sup>to</sup> cuadrante y finaliza en el 1<sup>er</sup> cuadrante.

Supondremos que la TABLA 2 es cierta para  $m = 2k$ , entonces el grado del polinomio será de la forma  $n = 4k + 1$ , se supone que por hipótesis  $\begin{cases} x = u(\omega) \\ y = v(\omega) \end{cases}$  va del 4<sup>to</sup> al 1<sup>er</sup> cuadrante.

Demostremos que la TABLA 2 es cierta para  $m = 2(k+1)$ , entonces el grado del polinomio será de la forma  $n = 4(k+1) + 1 \Rightarrow n = 4k + 5 = (4k+1) + 4$ , por ser  $(\text{mod } 4)$ , entonces el comportamiento en este caso es el mismo que para el caso que por hipótesis es cierto y que corresponde en la última igualdad al primer paréntesis  $(4k+1)$ , por lo tanto la proposición dada por la TABLA 2 es cierta para todas las  $m$  pares.

En forma similar se demostraría para  $m$  impar y también en forma análoga el caso  $n$  par  $[n = 2m]$ , respectivamente con la misma técnica para  $m$  par o impar.

### APENDICE 3.H

Si las raíces de  $u(\omega)$  y  $v(\omega)$  se intercalan, entonces el polinomio  $P$  es estable o bien completamente inestable.

#### Demostración:

Partiremos de que los polinomios  $u(\omega)$  y  $v(\omega)$  intercalan sus raíces.

Esto significa que el punto  $P(i\omega)$  al moverse a lo largo de la característica de amplitud de fases, cuando  $\omega$  crece, sucesivamente interseca a los ejes coordenados.

De esto evidentemente debemos excluir que la característica de amplitud de fases sea tangente a alguno de los ejes coordenados (la demostración de esta afirmación queda pendiente para el final).

Por lo tanto la característica de amplitud de fases sólo puede intersectar a los ejes coordenados en una sola dirección a reloj o contrareloj.

Para fijar ideas supongamos que todas las intersecciones de la característica de amplitud de fases con los ejes coordenados ocurren contrarreloj (en dirección positiva).

Entonces al movernos de una raíz de los polinomios  $u(\omega)$  y  $v(\omega)$  a la siguiente, la función de fases  $\varphi$  aumenta en  $\pi/2$ . (Recuérdese que por hipótesis los polinomios  $u$  y  $v$  no admiten raíces reales comunes y por tanto para el polinomio  $P$  está definida su característica de amplitud de fases  $\varphi$ ).

Dado que el número de raíces que admiten  $u$  y  $v$  y por tanto el número de las intersecciones de la característica de fases  $\varphi$  con las rectas horizontales  $l_k$  es  $2n-1$ , tendremos que al crecer  $\omega$  de  $-\infty$  a  $+\infty$  la función de fases  $\varphi$  aumenta por lo menos en  $(2n-2)\pi/2 = (n-1)\pi$ , ya que el ángulo inicial  $-\pi/2 \leq \varphi_0 < \pi/2$  y si el ángulo inicial parte de  $-\pi/2$ , entonces dará una media vuelta adicional, es decir  $n\pi$ ; lo que a su vez significa que  $\Delta_p > n-1$ .

Por otro lado sabemos que  $\Delta_p$  y  $n$  tienen la misma paridad y satisface:  $\Delta_p \leq n$ , luego entonces  $\Delta_p = n$  y por el CRITERIO 1 podemos concluir que el polinomio  $P$  es estable.

En forma análoga si la característica de amplitud de fases intersecciona a los ejes coordenados en la dirección de las manecillas del reloj, entonces por razonamientos similares obtendremos que  $\Delta_p = n$  y por ende el polinomio  $P$  resulta ser completamente inestable. ■

Para demostrar la afirmación que quedó pendiente en la anterior demostración las cosas se facilitan si tenemos previamente deducida una fórmula para la derivada de la función de fases. La deducción de tal fórmula la enunciaremos como LEMA 1 y la de la afirmación pendiente como LEMA 2.

LEMA 1:

La función de fases  $\varphi$  del polinomio arbitrario  $P$ , sin raíces imaginarias, tiene derivada para todo  $\omega \in \mathbb{R}$  y tal derivada nos queda dada por

$$\rho'(\omega) = \frac{u(\omega)v'(\omega) - u'(\omega)v(\omega)}{u^2(\omega) + v^2(\omega)} \quad \dots(3H.1)$$

**Demostración:**

Por definición de la función de fases  $\rho$ , en cada intervalo del eje  $\omega$  que no tenga  $\omega$  que hagan cero al polinomio  $u(\omega)$ , tenemos:

$$\rho(\omega) = \arctan \frac{v(\omega)}{u(\omega)} + k\pi \quad \dots(3H.2)$$

donde  $k$  es un cierto número entero que depende solo del intervalo escogido (en un intervalo dado el número  $k$  depende continuamente de  $\omega$  y por tanto tal número entero será el mismo para todas las  $\omega$  en tal intervalo).

Derivando (3H.2) como composición de funciones tendremos:

$$\rho'(\omega) = \frac{1}{1 + \left[\frac{u(\omega)}{v(\omega)}\right]^2} \left[ \frac{u(\omega)}{v(\omega)} \right]' = \frac{\frac{uv' - u'v}{u^2}}{\frac{u^2 + v^2}{u^2}} (\omega) = \frac{uv' - u'v}{u^2 + v^2} (\omega)$$

válida para todas las  $\omega$  que no son raíces de  $u$ .

Por otro lado en cada intervalo de  $\omega$  que no tenga raíces de  $v$  también podemos escribir:

$$\rho(\omega) = \operatorname{arccot} \frac{u(\omega)}{v(\omega)} + k\pi \quad \dots(3H.3)$$

y derivando llegamos a la misma fórmula (3H.1), pero para las  $\omega$  que no son raíces de  $v$  y en particular para todas las  $\omega$  que sean raíces del polinomio  $u$ .

Con esto queda demostrada la fórmula (3H.1) para todas las  $\omega$ .

**LEMA 2.**

Si las raíces de  $u$  y  $v$  se intercalan, entonces la característica de fases  $\rho$  no es tangente a ninguna de las rectas  $l_k$  con  $k=1,2,3,\dots,2n-1$ .

Demostración: (Por reducción al absurdo).

Supongamos que lo que afirma el LEMA 2 es falso.

Es decir que si existe algún  $\omega_0$  y una recta  $l_k$  para las que  $p(\omega_0)$  es tangente a dicha recta  $l_k$ .

Esto significa que tal  $\omega_0$ :

- i) es raíz de  $v$  (si  $k-n$  es par), o bien de  $u$  (si  $k-n$  es impar)
- ii) es raíz de la derivada  $p'$ .

O sea que existe un  $\omega_0$ , tal que :

- i) o bien  $v(\omega_0)=0$ , o bien  $u(\omega_0)=0$
- ii)  $p'(\omega_0)=0$ .

Pero si  $p'(\omega_0)=0$ , entonces de la fórmula (3H.1) del LEMA 1:

$$u(\omega_0)v'(\omega_0) - u'(\omega_0)v(\omega_0)=0 \quad \dots(3H.4)$$

Pero entonces de i):

$$\begin{aligned} \text{o bien } \boxed{v(\omega_0)=0} & \xrightarrow{\text{por (3H.4)}} u(\omega_0)v'(\omega_0)=0 \Rightarrow \boxed{v'(\omega_0)=0} \\ \text{o bien } \boxed{u(\omega_0)=0} & \xrightarrow{\text{por (3H.4)}} u'(\omega_0)v(\omega_0)=0 \Rightarrow \boxed{u'(\omega_0)=0} \end{aligned} \quad \dots(3H.5)$$

ya que en el primer caso  $u(\omega_0) \neq 0$  y en el segundo caso  $v(\omega_0) \neq 0$ , pues en cada caso se supone que  $u$  y  $v$  no tienen raíces reales comunes dado que por hipótesis las raíces de  $u$  y  $v$  se intercalan.

Por otro lado el resultado (3H.5) indica que si  $\omega_0$  es raíz de un polinomio y de su derivada, entonces  $\omega_0$  es una raíz múltiple, lo cual contradice que las raíces de los polinomios  $u$  y  $v$  son raíces simples.

Hay que observar que la condición de que las raíces de los polinomios sean intercaladas no es indispensable, pues basta con pedir que estos polinomios no tengan raíces reales múltiples, además de que no es admisible que tengan raíces reales comunes.

Finalmente el LEMA 2 para la característica de amplitud de fases se manifiesta en que tal gráfica sólo intersecta, pero nunca resulta ser tangente a dichos ejes.

### APENDICE 3.1

Si las raíces de los polinomios  $u(\omega)$  y  $v(\omega)$  se intercalan, entonces la función de fases  $\varphi$  es monótona creciente o bien monótona decreciente.

#### Demostración:

De la hipótesis de que las raíces de los polinomios  $u$  y  $v$  se intercalan podemos deducir por la PROPOSICION 3 que el polinomio  $P$  es estable o bien completamente inestable, pero esto a su vez implica que la función de fases  $\varphi$  sea respectivamente monótona creciente o bien monótona decreciente con base en la PROPOSICION 1.<sub>2</sub>

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA



$$\left[ x_0 \text{ polo } \begin{cases} \text{Tipo 1} \\ \text{Tipo 2} \\ \text{Tipo 3} \\ \text{Tipo 4} \end{cases} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} R_0 > 0 \text{ y } n_0 \text{ impar} \\ R_0 < 0 \text{ y } n_0 \text{ impar} \\ R_0 > 0 \text{ y } n_0 \text{ par} \\ R_0 < 0 \text{ y } n_0 \text{ par} \end{cases}$$

Demostremos detalladamente sólo el primer caso:

El polo  $x_0$  es de Tipo 1 si y solo si  $R_0 > 0$  y  $n_0$  impar.

Demostración:

$$\Rightarrow x_0 \text{ es un polo del Tipo 1} \Rightarrow \begin{cases} \text{i) } R(x_0^-) = -\infty \\ \text{ii) } R(x_0^+) = +\infty \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} R(x_0^-) &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^- \\ x < x_0}} R(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^- \\ x < x_0}} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^- \\ x < x_0}} \frac{P(x)}{(x-x_0)^{n_0} Q_0(x)} \\ R(x_0^+) &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ x > x_0}} R(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ x > x_0}} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ x > x_0}} \frac{P(x)}{(x-x_0)^{n_0} Q_0(x)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^- \\ x < x_0}} \frac{1}{(x-x_0)^{n_0}} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^- \\ x < x_0}} \frac{P(x)}{Q_0(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^- \\ x < x_0}} \frac{1}{(x-x_0)^{n_0}} R_0 \stackrel{\substack{n_0 \text{ impar} \\ R_0 > 0}}{=} -\infty \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ x > x_0}} \frac{1}{(x-x_0)^{n_0}} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ x > x_0}} \frac{P(x)}{Q_0(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ x > x_0}} \frac{1}{(x-x_0)^{n_0}} R_0 \stackrel{\substack{\forall n_0 \in \mathbb{N} \\ R_0 > 0}}{=} +\infty \end{aligned} \right.$$

Como deseamos que se cumpla i) y ii) simultáneamente necesitamos pedir que los resultados finales  $R_0 > 0$  se cumpla en ambos (cosa que ocurre) y simultáneamente que  $(n_0 : n_0 \text{ impar}) \cap (n_0 : n_0 \in \mathbb{N}) = (n_0 \text{ impar})$ , resumiendo llegamos a que simultáneamente se debe cumplir que

$$\boxed{R_0 > 0} \quad \text{y} \quad \boxed{n_0 \text{ impar}}.$$

$\Leftrightarrow$  Regresándose "literalmente" en forma inversa obtendremos que si  $R_0 > 0$  y  $n_0$  impar entonces  $x_0$  es un polo Tipo 1.

En forma análoga se analizan los demás casos.

APENDICE 4.B

Propiedad 1.

$$(\forall c \in (a,b)) \quad (\forall R = \frac{P}{Q}, Q(c) \neq 0) \quad \rightarrow$$

$\text{Ind}_a^b R = \text{Ind}_a^c R + \text{Ind}_c^b R$	...(4B.1)
--	-----------

Demostración:

Esta demostración consistirá en analizar todas las posibles variantes donde se cumplan las hipótesis.

Tales posibles casos se reducen a dos:

i) Cuando en (a,b) no hay ningún polo, por ende tampoco existirán polos en los subintervalos (a,c) y (c,b) respectivamente, pero una función racional R sin polos significa:

$$\text{Ind}_a^b R \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a < x_0 < b} \text{Ind}_{x_0}^R \stackrel{\text{sin polos } x_0}{=} 0$$

y además

$$\text{Ind}_a^c R = 0, \quad \text{Ind}_c^b R = 0$$

y por lo tanto la igualdad (4B.1) se cumple.

ii) Cuando en (a,b) existe al menos un polo  $\sum$  de R y por tanto tal o tales polos de R estarán en alguno de los subintervalos (a,c) y (c,d) y como:

$$\text{Ind}_a^b R \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a < x_0 < b} \text{Ind}_{x_0}^R, \quad \text{Ind}_a^c R \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a < x_0 < c} \text{Ind}_{x_0}^R, \quad \text{Ind}_c^b R \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{c < x_0 < b} \text{Ind}_{x_0}^R,$$

entonces se cumplirá (4B.1).  $\square$

APENDICE 4.C

Propiedad 2.

$$\left[ \begin{array}{l} \left( \forall R = \frac{P}{Q}, S = \frac{P_1}{Q_1} \right) \quad \left( R(x) = \frac{P(x)}{(x-x_0)^{n_0} Q_0(x)} \right) \\ \left( \begin{array}{l} \text{i) } Q_1(x_0) \neq 0, \delta \\ \text{ii) } S(x) = P_1(x) / (x-x_0)^m Q_{10}(x), \quad m < n_0 \end{array} \right) \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{l} \left( (R+S)(x) = \frac{P_2(x)}{(x-x_0)^{n_0} Q_2(x)} \right) \quad \left( \text{Ind}_{x_0} (R+S) = \text{Ind}_{x_0} R \right) \end{array} \right]$$

Demostración:

Para demostrar que el  $\text{Ind}_{x_0}(R+S) = \text{Ind}_{x_0} R$  partiremos de la caracterización de un polo  $x_0$  de orden  $n_0$ :

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x-x_0)^{n_0} Q_0(x)} \Rightarrow (x-x_0)^{n_0} R(x) = \frac{P(x)}{Q_0(x)} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^{n_0} R(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q_0(x)} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^{n_0} R(x) = R_0}$$

Pero por otro lado;

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^{n_0} (R+S)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^{n_0} R(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^{n_0} S(x) =$$

$$R_0 + 0 = R_0}$$

por lo tanto las funciones  $R$  y  $R+S$  tienen al mismo  $x_0$  como polo de orden  $n_0$  y sus coeficientes principales resultaron ser el mismo es decir  $R_0$  y como finalmente el índice de una función en un polo  $x_0$  está definida a través de  $R_0$  y  $n_0$  entonces las dos funciones  $R$  y  $R+S$  tendrán el mismo índice por tener el mismo  $R_0$  y  $n_0$ .

$$\therefore \text{Ind}_{x_0}(R+S) = \text{Ind}_{x_0} R$$

### APENDICE 4.D

Propiedad 3.

$$\left( \forall R = \frac{P}{Q}, S = \frac{P_1}{Q_1}; D = (a,b) \cup \mathbb{R} \right) \begin{cases} \text{eNo tienen polos comunes,} \\ \text{o si los poseen no tienen} \\ \text{ordenes comunes} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ind}_a^b(R+S) = \text{Ind}_a^b R + \text{Ind}_a^b S}$$

Demostración:

Como  $R$  y  $S$  no tienen polos comunes, entonces para los polos  $x_0$  de  $R$  (que no son de  $S$ ) tenemos:

$$\text{Ind}_{x_0}(R+S) = \text{Ind}_{x_0} R \quad (\text{por la Propiedad 2.})$$

Para los polos  $x_1$  de  $S$

$$\text{Ind}_{x_1}(R+S) = \text{Ind}_{x_1} S \quad (\text{por la propiedad 2.})$$

Si ahora sumamos todos los índices de todos los polos tendremos:

$$\sum_{a < x < b} \text{Ind}_x (R+S) = \sum_{a < x_0 < b} \text{Ind}_{x_0} R + \sum_{a < x_1 < b} \text{Ind}_{x_1} S$$

pero por definición estas sumatorias serán

$$\text{Ind}_a^b (R+S) = \text{Ind}_a^b R + \text{Ind}_a^b S.$$

Si admito R y S un polo común, pero no tienen ordenes comunes, entonces alguna de tales funciones tendrá un polo de orden menor que la otra y por la Propiedad 2 del índice de la función con polo de mayor orden será igual al índice de la suma de funciones, mas la suma de los índices de las funciones en los polos no comunes, pero el polo del índice de la función de orden mayor se lo agrega al intervalo (a,b) de la misma función obteniéndose así lo que se quería demostrar.

Propiedad 3:

$$(\forall R = \frac{P}{Q}, S = \frac{P'}{Q'} : D \cup (a,b) \rightarrow \mathbb{R}) (Q_1(x) \neq 0 \forall x \in (a,b)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ind}_a^b (R+S) = \text{Ind}_a^b R}$$

Demostración:

Como la función racional S no tiene polos, entonces por la Propiedad 2:

$$\text{Ind}_{x_0} (R+S) = \text{Ind}_{x_0} R$$

sumando estos índices en el intervalo (a,b) tendremos:

$$\sum_{a < x_0 < b} \text{Ind}_{x_0} (R+S) = \sum_{a < x_0 < b} \text{Ind}_{x_0} R$$

pero de nuevo por definición tendremos que:

$$\text{Ind}_a^b (R+S) = \text{Ind}_a^b R.$$

#### APENDICE 4.E

Propiedad 4:

$$(\forall R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, x \in (a,b)) (S(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, Q_1(x) \neq 0 \text{ y } P_1(x) \neq 0)$$

$$\rightarrow \text{Ind}_a^b (RS) = \begin{cases} \text{Ind}_a^b R, & \text{si } S(x) > 0, x \in (a,b) \\ -\text{Ind}_a^b R, & \text{si } S(x) < 0, x \in (a,b) \end{cases}$$

Demostración:

$$\text{Ind}_a^b (RS) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a < x_0 < b} \text{Ind}_{x_0} (RS)$$

$$\begin{cases} = \sum_{a < x_0 < b} \text{Ind}_{x_0} R = \boxed{\text{Ind}_a^b R}, & S(x) > 0, x \in (a,b)^* \\ = - \sum_{a < x_0 < b} \text{Ind}_{x_0} R = \boxed{-\text{Ind}_a^b R}, & S(x) < 0, x \in (a,b)^{**} \end{cases}$$

\* Porque el signo de S no cambia los tipos de polo de R por lo tanto no cambia su indice.

\*\* Porque el signo de S cambia los tipos de polos de R si son de tipo 1 a tipo 2 o viceversa y por lo tanto cambia el signo de su indice.

#### APENDICE 4.F

Propiedad 5.

$$(\forall R = \frac{P}{Q}) (R(x) = S(-x^2)) (S = \frac{P}{Q_1}) (S(0) = S_0 \neq 0)$$

$$(\forall x_0 < 0) (Q_1(x) = (x - x_0)^{n_0} Q_2(x)) (Q(x) = (x - (\sqrt{-x_0}))^{n_0} Q_3(x))$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{Ind}_{-\sqrt{-x_0}} R = \text{Ind}_{x_0} S \\ \text{Ind}_{\sqrt{-x_0}} R = -\text{Ind}_{x_0} S \end{cases}$$

Demostración:

Analizamos los cuatro casos posibles de x comparados con 0 y

$-\sqrt{-x_0}$ .

$$1) 0 < x < \sqrt{-x_0} \rightarrow 0 < x^2 < -x_0, x_0 < 0$$

$$R(\sqrt{-x_0}) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{-x_0}} R(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{-x_0}} S(-x^2) \stackrel{u = -x^2}{=} \lim_{u \rightarrow x_0} S(u) = S(x_0)$$

$u > x_0$ , ya que  $(\sqrt{-x_0})^2 = |x_0| = -x_0$ .

los demás casos se obtienen en forma similar

$$\text{ii) } x > \sqrt{-x_0} \Rightarrow x^2 > -x_0 \quad y \quad x_0 < 0$$

$$R(\sqrt{-x_0}^+) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{-x_0}^+} R(x) = \lim_{x^2 \rightarrow -(\sqrt{-x_0})^2} S(-x^2) = \lim_{u \rightarrow x_0} S(u) = S(x_0)$$

$$\text{iii) } x < -\sqrt{-x_0} \Rightarrow x^2 > -x_0 \quad y \quad x_0 < 0$$

$$R(-\sqrt{-x_0}^-) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{-x_0}^-} R(x) = \lim_{x^2 \rightarrow -(\sqrt{-x_0})^2} S(-x^2) = \lim_{u \rightarrow x_0} S(u) = S(x_0)$$

, ya que  $(-\sqrt{-x_0})^2 = |x_0| = -x_0$ .

$$\text{iv) } -\sqrt{-x_0} < x < 0 \Rightarrow (\sqrt{-x_0})^2 < (-x)^2 < 0 \Rightarrow -x_0 > x > 0$$

$$R(-\sqrt{-x_0}^+) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{-x_0}^+} R(x) = \lim_{x^2 \rightarrow -(\sqrt{-x_0})^2} S(-x^2) = \lim_{u \rightarrow x_0} S(u) = S(x_0)$$

por lo tanto de los 2 primeros casos se concluye que como los límites laterales en  $R$  primero por la izquierda y luego por la derecha, resultan ser iguales para  $S$ , pero primero por la derecha y luego por la izquierda por lo tanto si  $R$  en  $\sqrt{-x_0}$  es de tipo 1, entonces  $S$  en  $x_0$  será de tipo 2 y viceversa, luego si para  $R$  su índice en  $\sqrt{-x_0}$  es de signo contrario al índice de  $S$  en  $x_0$ :

$$\text{Ind}_{+\sqrt{-x_0}} R = -\text{Ind}_{x_0} S$$

y de los dos últimos casos se concluye que se conservan las tendencias de sus límites laterales, y por lo tanto tendremos:

$$\text{Ind}_{-\sqrt{-x_0}} R = \text{Ind}_{x_0} S$$

#### APENDICE 4.G

Proposición.

$$\langle V R = \frac{P}{Q} : D = (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \rangle \langle R(a) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \end{pmatrix} \rangle \langle R(b) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \end{pmatrix} \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ind}_a^b R + \text{Ind}_b^b 1/R = \frac{\text{sign } R(b) - \text{sign } R(a)}{2} \quad \dots(4G.1)$$

Demostración:

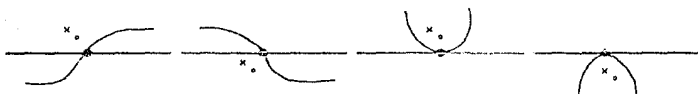
Lo que queremos demostrar (4G.1) es equivalente a

$$\text{Ind}_a^b R + \text{Ind}_a^b 1/R = \begin{cases} 1, & \text{si } R(a) < 0 \text{ } R(b) > 0 \\ -1, & \text{si } R(a) > 0 \text{ } R(b) < 0 \\ 0, & \text{si } R(a)R(b) > 0 \end{cases} \quad \dots(4G.2)$$

donde la parte derecha la hemos obtenido de evaluar (4G.1) en los valores de R en a y b indicados.

Para demostrar la ecuación (4G.2) consideremos un cero de R, (es decir un polo de 1/R).

La gráfica de la función racional R en una vecindad de su cero  $x_0$  solo puede ser de alguno de los cuatro Tipos siguientes:



Tipo 1

Al pasar por el cero  $x_0$  de R esta función cambia de signo de - a +.

Tipo 2

Al pasar por el cero  $x_0$  de R esta función cambia de signo de + a -.

Tipo 3

Al pasar por el cero  $x_0$  de R el signo de esta función permanece positivo.

Tipo 4

Al pasar por el cero  $x_0$  de R el signo de esta función permanece negativo.

Los Tipos 1 y 2 de la función racional R en el cero  $x_0$  de (a,b) son los únicos polos  $x_0$  de los Tipos 1 y 2 de la función inversión 1/R que contribuirán con valores distintos de cero al cálculo de su índice en el mismo intervalo (a,b) :  $\text{Ind}_a^b 1/R$ .

Tales contribuciones distintas de cero solo toman los valores de +1 y -1.

Basta con suponer que

p = "número total de ceros y polos de R en (a,b) del Tipo 1",  
y q = "número total de ceros y polos de 1/R en (a,b) del Tipo 2".  
para poder concluir que

$$\text{Ind}_a^b R + \text{Ind}_a^b 1/R = 1 \cdot p + (-1) \cdot q = p - q. \quad \dots(4G.3)$$

Calculemos de una manera distinta  $p-q$  para intentar demostrar la fórmula (40.2).

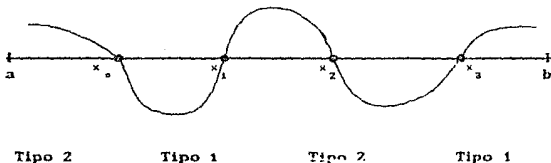
Observemos como se mueven los puntos de la gráfica  $(x, R(x))$  al variar  $x$  en  $(a, b)$ .

Los ceros o polos del Tipo 2 tienen la característica  $R(a) > 0$  y  $R(b) < 0$  en el intervalo  $(a, b)$ , luego la función racional comienza su gráfica en el semiplano positivo y al pasar por el cero o polo trasladan gráfica al semiplano inferior.

Si  $R(a) > 0$  y  $R(b) > 0$  lo que sucede es que la gráfica comienza en el semiplano positivo y al pasar por el polo o cero de la gráfica la función continua en el semiplano positivo, lo cual no contribuye en nada al cálculo del índice de la función en el intervalo  $(a, b)$ .

De manera contraria se observa el comportamiento de los ceros o polos del Tipo 1.

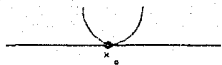
Esto significa que los ceros o polos de la función solo son de los Tipos 1 y 2 y se alternan en todo el intervalo  $(a, b)$  ya que la función no puede escaparse por lo que la función alterna su Tipo del Tipo 1 al 2 o del 2 al 1 en todo el intervalo, es decir



Por ejemplo en esta gráfica todos los  $x_i$  son ceros de la función  $R$ .

De esto mismo se desprende que si la función es de la forma  $R(a) > 0$  ( $< 0$ ) y  $R(b) > 0$  ( $< 0$ ) la función no cambia de semiplano por lo que tiene el comportamiento del Tipo 3 o 4 y tales Tipos no contribuyen al cálculo del índice, es decir  $p=q$ .





Si comenzamos con el caso  $R(a) > 0$  y  $R(b) < 0$  tendríamos el Tipo 2, donde si el número de ceros o polos es impar en todo el intervalo  $(a,b)$  obtendremos que  $p$  tendrá un número menor de ceros o polos que  $q$  por empezar la función  $R$  con los ceros o polos del Tipo 2, pero como se alternan, entonces  $p+1=q$ , o sea que  $p-q=-1$ . Los ceros o polos pares no contribuyen al cálculo del índice.

Si ahora  $R(a) < 0$  y  $R(b) > 0$  se estaría empezando con un polo o cero del Tipo 1, pero si suponemos que el número de polos o raíces es impar en todo el intervalo  $(a,b)$ , entonces obtendremos que  $p$  tendrá un cero o polo mas que  $q$ :  $p-1 = q$  o  $p-q=+1$ .

En cambio si  $R(a) > 0$  ( $< 0$ ) y  $R(b) > 0$  ( $< 0$ ), entonces el polo o el cero será del Tipo 3 ó 4 y por tanto se tendrá un número par de polos o ceros, por lo que de la definición de índice tendremos que  $p=q$   $\Rightarrow$   $p-q=0$ .

Resumiendo todos estos casos tendremos que

$$p-q = \begin{cases} 1, & \text{si } R(a) < 0 \text{ } R(b) > 0 \\ -1, & \text{si } R(a) > 0 \text{ } R(b) < 0 \\ 0, & \text{si } R(a)R(b) > 0 \end{cases} \quad \dots(4G.4)$$

igualando (4G.3) con (4G.4) obtendremos que

$$\text{Ind}_a^b R + \text{Ind}_a^b 1/R = \begin{cases} 1, & \text{si } R(a) < 0 \text{ } R(b) > 0 \\ -1, & \text{si } R(a) > 0 \text{ } R(b) < 0 \\ 0, & \text{si } R(a)R(b) > 0 \end{cases} \quad \dots(4G.2)$$

#### APENDICE 4.H

##### Teorema 1.

$$(\mathcal{P} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ estable}) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Ind}_{\frac{0}{u}}^{\frac{\infty}{v}} = \text{Ind} \frac{v}{-u} = -n, & \text{si } n \text{ es par} \\ \text{Ind} \frac{v}{v} = n, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Demostración:

→ Si el polinomio P de grado n es estable →

→ u y v son polinomios primos entre sí, es decir irreducibles

→ p es monótona creciente

→ la gráfica de  $\begin{cases} x = u(\omega) \\ y = v(\omega) \end{cases}$  interseca a los ejes coordenados

contrareloj.

Lema Auxiliar

vease Apen. 4I. para cada raíz  $\omega_0$  de u (de v)  $\text{Ind}_{\omega_0} \frac{v}{u} = -1$  ( $\text{Ind}_{\omega_0} \frac{u}{v} = 1$ )

→ como todas las raíces de u (de v) son reales y distintas, el grado de u es n para n par (y de v es n para n impar) →

$$\rightarrow \begin{cases} \text{Ind} \frac{v}{u} = -n, & \text{si } n \text{ es par} \\ \text{Ind} \frac{v}{u} = n, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{Si } \begin{cases} \text{Ind} \frac{v}{u} = -n, & \text{si } n \text{ es par} \\ \text{Ind} \frac{v}{u} = n, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \rightarrow$$

si n es par

→ la condición anterior significa :  $p - q = -n$ , con

$$\begin{cases} p = \text{"número de polos de } \frac{v}{u} \text{ que tengan índice 1"} \\ q = \text{"número de polos de } \frac{v}{u} \text{ que tengan índice -1"} \end{cases} \rightarrow$$

→ como el grado de u, es n, para n par, tendremos:  $p + q \leq n$  →

→  $p=0$  y  $q=n$  →

→ todas las raíces de u son reales, distintas y ninguna es raíz de v

→ u y v son polinomios irreducibles (primos entre sí)

Lema Auxiliar

→ la característica de amplitud de fases interseca al eje de las ordenadas en puntos y cada vez contrareloj

→ si  $\omega_i$  y  $\omega_{i+1}$  son 2 raíces sucesivas de u y como ya sabemos  $v(\omega_i) \neq 0$  (supongamos  $v(\omega_i) > 0$ )

→ bajo  $\omega = \omega_i$  la característica de amplitud de fases entra al semiplano izquierdo

→ bajo  $\omega = \omega_{i+1}$  la característica de amplitud de fase saldrá de dicho semiplano izquierdo, incluso por ser contrareloj el movimiento entra por el semiplano superior y sale por el semiplano inferior.

Fig.4H.1.

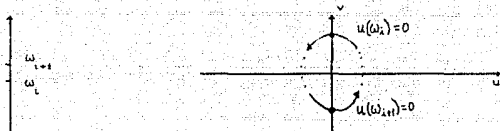


Fig. 4H.1.

→ al variar  $\omega$  de  $\omega_l$  a  $\omega_{l+1}$  la característica de amplitud de fases al menos una vez interseca al eje de las abscisas, o sea que en  $(\omega_l, \omega_{l+1})$  al menos habrá una raíz de  $v$ .

→ dado que hay  $(n-1)$  intervalos  $(\omega_l, \omega_{l+1})$ , entonces al menos habrá  $(n-1)$  raíces reales distintas de  $v$  intercaladas con las raíces de  $u$ .

→ como para  $n$  par sabemos que el grado de  $v$  es  $\leq n-1$ , luego las raíces encontradas entre cada  $(\omega_l, \omega_{l+1})$  agotan las posibles raíces de  $v$ .

→ esto demuestra que las raíces de los polinomios  $u$  y  $v$  se intercalan.

→ dado que se cuenta con valores del parámetro, por ejemplo las raíces de  $u$ , donde la función de fases  $\varphi$  es creciente.

→ el CRITERIO 3 (Hermite Biliero) asegura que  $P$  es estable. ■

si  $n$  es impar

→

la condición de partida significa :  $p - q = n$ , donde

ahora

$$\begin{cases} p = \text{"número de polos de } \frac{u}{v} \text{ que tengan índice 1"} \\ q = \text{"número de polos de } \frac{u}{v} \text{ que tengan índice -1"} \end{cases}$$

→ de nuevo :  $p + q \leq n$

→  $p = n, q = 0$

→ todas las raíces  $v$  son reales distintas y ninguna de ellas es raíz de  $u$ .

→ la característica de amplitud de fases interseca al eje de las abscisas en  $n$  puntos y cada vez contrareloj.

- el polinomio  $u$  tiene al menos  $(n-1)$  raíces reales, distintas y que intercalan con las raíces de  $v$ .
- como el polinomio  $u$  ya no puede tener otras raíces adicionales, su grado será  $\leq n-1$ .
- puesto que en las raíces de  $v$  la función de fases  $\varphi$  es creciente.
- para  $P$  se cumple de nuevo el CRITERIO 3 (Hermite Bilere).
- $P$  es estable.  $\square$

## APENDICE 4.1

### LEMA AUXILIAR.

$\left( \text{Ind} \frac{v}{u} = -1 \right) \Leftrightarrow$  (La característica de amplitud de fases en  $\omega = \omega_0$  intersecciona al eje de las ordenadas /abscisas/ a contrareloj, esto es en el semiplano superior /derecho/ de derecha a izquierda /de abajo hacia arriba / y en el semiplano inferior /izquierdo/ de izquierda a derecha /de arriba hacia abajo/).

$\left( \text{Ind} \frac{u}{v} = 1 \right)$

### Demostración:

- Si el  $\text{Ind}_{\omega_0} \frac{v}{u} = -1$  /  $\text{Ind}_{\omega_0} \frac{u}{v} = 1$
- el polo  $\omega_0$  es de Tipo 2 /Tipo 1/
- la característica de amplitud de fases en  $\omega = \omega_0$  intersecciona al eje de las ordenadas ( $u(\omega_0) = 0$  y  $v(\omega_0) \neq 0$ ) /eje de las abscisas/ a contrareloj, ya sea en el semiplano superior /semiplano derecho/ de derecha a izquierda /de abajo hacia arriba/, o bien en el semiplano inferior /semiplano izquierdo/ de izquierda a derecha /de arriba hacia abajo/.
- Si en  $\omega = \omega_0$  la característica de amplitud de fases intersecciona a contrareloj al eje de las ordenadas /eje de las abscisas/ en el semiplano superior /en el semiplano derecho/ de derecha a izquierda /de abajo hacia arriba/.
- $v(\omega) \Big|_{\omega=\omega_0} > 0$  ("semiplano superior") /  $u(\omega) \Big|_{\omega=\omega_0} > 0$  ("semiplano derecho")
- en todas las  $\omega$  suficientemente cercanas a  $\omega_0$ :  $v(\omega) > 0$

\* en todas las  $\omega$  suficientemente cercanas a  $\omega_0$ :  $v(\omega) > 0$   
 $/u(\omega) > 0/$

\* para esas mismas  $\omega$  :  $\begin{cases} u(\omega) > 0 \ (v(\omega) < 0), & \text{si } \omega < \omega_0 \\ u(\omega) < 0 \ (v(\omega) > 0), & \text{si } \omega > \omega_0 \end{cases}$  de derecha

a izquierda o sea que  $u(\omega_0) = 0$  y  $\frac{v}{u}$  va de  $+\infty$  a  $-\infty$  al pasar por  $\omega_0$  /va de  $-\infty$  a  $+\infty$  al pasar por  $\omega_0$  es decir que  $\omega_0$  es un polo de Tipo 2 /Tipo 1/

$$* \text{Ind}_{\omega_0} \frac{v}{u} = -1 \quad (\text{Ind}_{\omega_0} \frac{u}{v} = 1)_{\text{B}}$$

#### APENDICE 4.J

Teorema 1'

$$(P = a_0 z^n + \dots + a_n \text{ estable}) \Leftrightarrow (\text{Ind} \frac{\hat{v}}{u} = n)$$

Demostración:

En efecto recordando que :  $\begin{cases} u \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (-1)^m v, & \text{si } n=2m+1 \\ (-1)^m u, & \text{si } n=2m \end{cases} \\ v \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (-1)^m u, & \text{si } n=2m+1 \\ (-1)^{m-1} v, & \text{si } n=2m \end{cases} \end{cases}$

$$\boxed{\text{si } n=2m} \quad \frac{\hat{v}}{u} = \frac{(-1)^{m-1} v}{(-1)^m u} = - \frac{v}{u}$$

$$\text{Ind} \frac{v}{u} \stackrel{\text{prop. 4}}{=} - \text{Ind} \left( - \frac{v}{u} \right) = - \text{Ind} \frac{\hat{v}}{u} = -n$$

$$\therefore \left( \text{Ind} \frac{v}{u} = -n \right) \Leftrightarrow \left( \text{Ind} \frac{\hat{v}}{u} = n \right)$$

$$\boxed{\text{si } n=2m+1} \quad \frac{\hat{v}}{u} = \frac{(-1)^m u}{(-1)^m v} = \frac{u}{v}$$

$$\text{Ind} \frac{u}{v} = \text{Ind} \frac{\hat{u}}{v} = n$$

$$\therefore \left( \text{Ind} \frac{u}{v} = n \right) \Leftrightarrow \left( \text{Ind} \frac{\hat{v}}{u} = n \right)$$

$$P \text{ es estable} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Ind} \frac{v}{u} = -n, n \text{ par} \\ \text{Ind} \frac{u}{v} = n, n \text{ impar} \end{cases} \Leftrightarrow \text{Ind} \frac{v}{u} = n$$

#### APENDICE 4.K

$$(a_n \neq 0) (n = 2m) \left\{ \text{Ind} \frac{v}{u} = -n \right\} \Leftrightarrow \left\{ \text{Ind}_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{u} = m \right\}$$

Partamos del caso  $n = 2m$  suponiendo que

$$U(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \Big|_{x=0} = a_n \neq 0$$

$\Leftrightarrow$  el punto  $\omega=0$  no será polo de la función  $\frac{v}{u}$

$$\text{Prop. 1} \quad \Leftrightarrow \text{Ind} \frac{v}{u} = \text{Ind}_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{u} + \text{Ind}_{\infty}^{\infty} \frac{v}{u}$$

$$\text{Prop. 4} \quad \Leftrightarrow \text{Ind} \frac{v}{u} = -\text{Ind}_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{u} + \text{Ind}_{\infty}^{\infty} \frac{v}{u}$$

$$\text{Prop. 5} \quad \Leftrightarrow \text{Ind} \frac{v}{u} = -\text{Ind}_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{u} - \text{Ind}_{\infty}^{\infty} \frac{v}{u}$$

$$\Leftrightarrow \text{Ind} \frac{v}{u} = -2 \text{Ind}_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{u}$$

$$\Leftrightarrow -n = -2m$$

$$\Leftrightarrow -2 \text{Ind}_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{u} = -2m$$

$$\Leftrightarrow \text{Ind}_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{u} = m$$

$$(a_n \neq 0) (n = 2m) \left\{ \text{Ind} \frac{v}{u} = -n \right\} \Leftrightarrow \left\{ \text{Ind}_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{u} = m \right\}$$

que es la proposición (4.19) del texto.

$$(a_{n-1} a_n > 0) (n = 2m+1) \left\{ \text{Ind} \frac{u}{v} = n \right\} \Leftrightarrow \left\{ \text{Ind}_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{v} = -m \right\}$$

Ahora tomemos el caso  $n = 2m+1$  suponiendo que

$$V(z) = a_0 z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \dots + a_{n-1} \quad |_{z=0} = a_{n-1} \neq 0 \quad y$$

$$U(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m+1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad |_{z=0} = a_n \neq 0$$

⇒ el punto  $\omega=0$  será polo de orden 1 de la función  $\frac{u}{v}$ , ya que

$$\frac{u(\omega)}{v(\omega)} \Big|_{\omega=0} = \frac{U(-\omega^2)}{\omega V(-\omega^2)} \Big|_{\omega=0},$$

con coeficiente principal

$$R_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{U(-\omega^2)}{V(-\omega^2)} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow \text{si } \boxed{R_0 > 0} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 0 \Leftrightarrow \boxed{a_{n-1} a_n > 0} \Leftrightarrow$$

⇒  $\text{Ind}_0 \frac{u}{v} = 1$ , ya que  $R_0 > 0$  y  $n_0$  es impar

Prop. 1

$$\Leftrightarrow \text{Ind} \frac{u}{v} = \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{u}{v} + \text{Ind}_0^{+\infty} \frac{u}{v} + \text{Ind}_0 \frac{u}{v}$$

Lema Aux.

$$\Leftrightarrow \text{Ind} \frac{u}{v} = \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{u}{v} + \text{Ind}_0^{+\infty} \frac{u}{v} + 1$$

Prop. 4

$$\Leftrightarrow \text{Ind} \frac{u}{v} = -\text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{u}{v} + \text{Ind}_0^{+\infty} \frac{u}{v} + 1$$

Prop. 5

$$\Leftrightarrow \text{Ind} \frac{u}{v} = -\text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{u}{v} - \text{Ind}_0^{+\infty} \frac{u}{v} + 1$$

$$\Leftrightarrow \text{Ind} \frac{u}{v} = -2 \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{u}{v} + 1$$

$$\Leftrightarrow n = -2(-m) + 1$$

$$\Leftrightarrow \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{u}{v} = -m$$

$$\boxed{(a_{n-1} a_n > 0) \quad (n = 2m+1) \quad \left( \text{Ind} \frac{u}{v} = n \right) \Leftrightarrow \left( \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{u}{v} = -m \right)}$$

que es la proposición (4.18) de texto.

"REFERENCIAS "

- [ 1 ] KUROSCHEV A. G., CURSO DE ALGEBRA SUPERIOR. MIR, MOSCÚ 1968.
- [ 2 ] GANTMAJER F. R., TEORIYA MATRITZ. NAUKA, MOSCÚ 1967.
- [ 3 ] POSTNIKOV M. M., USTOYCHIVYE MNOGOCHLENY. NAUKA, MOSCÚ, 1981.
- [ 4 ] HENRICI P., APPLIED AND COMPUTATIONAL COMPLEX ANALYSIS, VOL. I. WILEY, 1974.
- [ 5 ] MARSDEN J., BASIC COMPLEX ANALYSIS, SAN FRANCISCO, CAL., 1973.
- [ 6 ] HERMITE CH., OUVRES DE CHARLES HERMITE (1822-1901). PARIS, GUTHIER-VILARS, 1905-17.
- [ 7 ] "DERIVE". A MATHEMATICAL ASSISTENT. SOFTWARE-HOUSE, HONOLULU, 1989.