



29  
29  
**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**REVISION EXPERIMENTAL DEL FLUJO DE POISEUILLE:  
PRIMERA INESTABILIDAD**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**F I S I C O**

**P R E S E N T A:**

**EDUARDO MORALES GAMBOA**

México, D. F.

1990,

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

4. El dispositivo experimental . . . . .	45
4.1 Elementos . . . . .	45
4.2 Descripción . . . . .	46
4.2 Visualización del flujo . . . . .	51
5. Resultados . . . . .	56
5.1 Funcionamiento del dispositivo . . . . .	56
5.2 Transición a la turbulencia . . . . .	62
5.3 Número de Reynolds crítico . . . . .	65
6. Conclusiones y perspectivas . . . . .	70
Bibliografía . . . . .	73

## Resumen

Se presenta la relación de Hagen-Poiseuille para el gasto a través de un tubo circular recto en términos de la diferencia de presión en los extremos, el diámetro del tubo y la viscosidad del fluido. Se describe el experimento realizado por Reynolds para establecer la transición a la turbulencia en este flujo; el establecimiento del flujo de Poiseuille a partir del perfil de velocidades del flujo al entrar al tubo; y la transición a la turbulencia.

Se presentan las ecuaciones de movimiento para un fluido viscoso derivadas a partir de los principios de conservación de masa, momento y energía; mostrando como una solución particular de estas ecuaciones el perfil de velocidades del flujo de Poiseuille. Se presentan los conceptos básicos de la teoría lineal de estabilidad hidrodinámica considerando las perturbaciones como una superposición de modos normales. Los resultados de esta teoría sugieren que el perfil parabólico del flujo de Poiseuille es estable respecto a perturbaciones infinitesimales, atribuyéndose la inestabilidad observada experimentalmente a perturbaciones de amplitudes finitas o a la inestabilidad de la capa límite que se forma en la región de entrada del tubo.

Se describe el dispositivo experimental utilizado para observar la transición a la turbulencia. La visualización del flujo se logra por medio de líneas de agua coloreada inyectadas en la entrada o diluyendo shampoo en el agua. En la entrada del tubo se observan pequeñas perturbaciones, las cuales se amortiguan aproximadamente a 20 diámetros del tubo para números de Reynolds menores que el valor crítico, aumentando esta distancia ligeramente con el número de Reynolds. La turbulencia comienza en la pared del tubo debido a la perturbación de la capa límite y crece hasta llegar al centro, formándose zonas turbulentas que crecen a medida que avanzan pues el flujo laminar que la limita se transforma en turbulento. El número de Reynolds crítico  $R_c$ , para el dispositivo experimental, es de 3540 ( $\pm 240$ ); el valor  $R_m$ , a partir del cual la turbulencia es continua, es de 4030 ( $\pm 335$ ) y el valor en la transición inversa turbulencia-laminar es de 3700 ( $\pm 150$ ).

## Introducción

Uno de los problemas centrales de la mecánica de fluidos es el de entender y describir el hecho de que en un flujo laminar se presente un cambio, transformándose en otro flujo laminar o incluso en uno desordenado con la aparición de turbulencia. Algunos de estos flujos comenzaron a estudiarse desde el siglo pasado con el propósito de conocer cuando y como ocurren estos cambios, y resolver algunos problemas surgidos en aplicaciones prácticas en ingeniería hidráulica, entre otras áreas. Los primeros estudios experimentales dieron como resultado las condiciones en las cuales un flujo es laminar o turbulento, en términos de algunas características del flujo. El más famoso de estos experimentos fue realizado por Osborne Reynolds en 1883 para determinar la transición a la turbulencia en el flujo a través de tuberías (flujo de Poiseuille). Esto es importante, pues del estado del flujo depende la presión que se necesita para transportar cierta cantidad de agua ( u otro líquido ) en un tiempo determinado. Reynolds encontró que el régimen turbulento depende de un número adimensional en el que se combinan el diámetro de la tubería, la viscosidad y la densidad del fluido, y la velocidad máxima del flujo; y además, que los flujos para dos fluidos diferentes, es decir, con distintas viscosidades y densidades, moviéndose con velocidades diferentes a través de tubos de distintos diámetros, tendrán un comportamiento análogo siempre que el número adimensional anterior — conocido ahora como el número de Reynolds — sea el mismo para ambos; este hecho se conoce como el principio de semejanza entre flujos. Reynolds concluyó que la transición a la turbulencia ocurre a un mismo valor crítico de ese número. A partir de este experimento comenzaron a estudiarse varios tipos de flujos para encontrar el valor crítico del número de Reynolds asociado a ellos. Así, también surgieron estudios con base en la teoría de la estabilidad hidrodinámica para predecir los valores del número crítico de Reynolds, estando de acuerdo aproximadamente con los datos experimentales para algunos flujos.

El inicio de este trabajo fue el de implementar métodos de visualización de flujos en el Laboratorio de Fluidos del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias. Para ello se necesitaba un flujo sencillo en el cual realizar las pruebas, y se eligió el flujo de Poiseuille porque ofrece muchas facilidades para utilizar varios métodos de visualización. El objetivo de la presente tesis es caracterizar experimentalmente el flujo de Poiseuille a partir del flujo

laminar, pasando por la fase intermitente, hasta llegar a la turbulencia completa. En el capítulo primero se describe el flujo de Poiseuille en un tubo recto de sección circular, el experimento clásico llevado a cabo por Osborne Reynolds para conocer no las causas, sino las condiciones del flujo que determinan si éste es laminar o si es turbulento, y la transición a la turbulencia. En el segundo capítulo se obtienen las ecuaciones de movimiento para un fluido a partir de los principios de conservación de la masa, del momento y de la energía, mostrándose posteriormente soluciones de estas ecuaciones para el flujo de Poiseuille. El capítulo tercero trata de la teoría lineal de la estabilidad hidrodinámica y de la estabilidad del flujo de Poiseuille respecto a esta teoría. En el capítulo cuarto se describe el dispositivo experimental utilizado para las observaciones y la manera como se logró la visualización del flujo. Los resultados obtenidos acerca del funcionamiento del dispositivo experimental, de la transición a la turbulencia y del número de Reynolds crítico constituyen el capítulo quinto. Finalmente, en el capítulo seis, están las conclusiones obtenidas y las perspectivas que se tienen para el dispositivo experimental y para el estudio del flujo de Poiseuille.

## Planteamiento del problema

## 1.1 El flujo de Poiseuille

El flujo estacionario en un tubo largo, recto, y de sección circular, originado por un gradiente de presión en los extremos lo estudió J. Poiseuille en 1840 realizando sus experimentos con tubos capilares<sup>1</sup> [7]. Para conocer las dimensiones de sus tubos Poiseuille utilizó dos métodos, uno de ellos consistió en introducir mercurio en los capilares midiendo la longitud de la columna obtenida, procedimiento que repitió un gran número de veces. A partir de la longitud total de las columnas y de su peso obtuvo finalmente el diámetro del tubo capilar, suponiendo que la sección transversal era circular (0.0376 mm). El otro método que utilizó fue observar los tubos a través de un microscopio, resultando eran que ligeramente elípticos. Al suponer una elipse perfecta obtuvo el diámetro del círculo (0.0377 mm). Como los resultados por ambos métodos no diferían mucho, Poiseuille consideró entonces que la sección transversal de los capilares eran circulares.

Como resultado de sus experimentos Poiseuille obtuvo una expresión para el gasto  $Q$  (el volumen de fluido que atraviesa la sección transversal del tubo por unidad de tiempo) en función del diámetro  $D$  y de la longitud  $L$  del tubo, de la diferencia de presión  $\Delta p = p_1 - p_2$  aplicada en los extremos y de la temperatura  $T$  del agua

$$Q = k(T) \frac{\Delta p}{L} D^4, \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup> Siendo Poiseuille médico sus intereses en este problema era entender el movimiento de la sangre a través de las venas, de ahí sus estudios en capilares



donde el coeficiente  $k(T)$  resultó una función cuadrática de la temperatura. Casi al mismo tiempo (1939), G. Hagen obtenía este mismo resultado también experimentalmente. Análíticamente la expresión (1.1) fue obtenida por Wiedermann (1856) [11] con un razonamiento parecido al siguiente [10]:

Si el flujo producido por un gradiente de presión constante en la dirección axial dentro de un tubo circular de radio  $R$  es estacionario e igual a través de todas las secciones del tubo, entonces, por razones de simetría, la velocidad sólo depende de la distancia  $r$  al eje del tubo y su dirección es axial. Por condición de flujo estacionario las fuerzas que actúan sobre un cilindro de radio  $r$  y longitud  $L$  (figura 1.1a), deben de equilibrarse. Tales fuerzas son: 1) la producida por el gradiente de presión que empuja al fluido contenido dentro de este cilindro,  $F_{\Delta p} = \pi r^2 \Delta p \hat{k}$ , donde  $\pi r^2$  es el área de la sección transversal del cilindro,  $\hat{k}$  es un vector unitario en la dirección axial  $z$  y  $\Delta p = p_1 - p_2$  la diferencia de presión entre las dos caras laterales (figura 1.1a); 2) el esfuerzo viscoso  $E$  que se opone al avance del cilindro y que actúa sobre la superficie lateral del mismo.

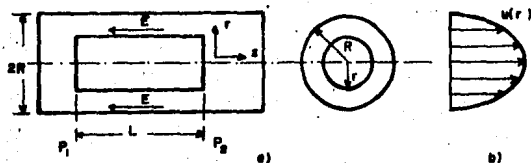


Figura 1.1 Flujo estacionario a través de un tubo cilíndrico de sección circular: a) cilindro de radio  $r$  y longitud  $L$  moviéndose bajo la acción de la diferencia de presión  $\Delta p = p_1 - p_2$  y del esfuerzo  $E$  debido a la viscosidad; b) perfil parabólico de velocidades en la sección transversal del tubo.

La ley de fricción de Newton indica que el esfuerzo viscoso por unidad de área es

$$E = -\eta \frac{du}{dr} \hat{k}, \quad (1.2)$$

donde  $\eta$  es la viscosidad del fluido,  $u$  la velocidad del flujo y el signo menos se debe a que  $du/dr$  es negativa [10]. Así pues, el esfuerzo total es  $E = -2\pi r L \eta (du/dr) \hat{k}$ , donde  $2\pi r L$  es el área lateral del cilindro. Igualando ambas fuerzas se obtiene

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta L} r.$$

Las condiciones de frontera piden que  $u(R) = 0$  (el fluido se adhiere a la pared del tubo por viscosidad) y que  $u(r)$  se mantenga finita para  $0 \leq r \leq R$ . Con estas condiciones, al integrar la ecuación anterior, se obtiene

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2), \quad (1.3)$$

es decir, el perfil de velocidades es parabólico (figura 1.1b). Este perfil no se establece desde el momento en que el fluido entra al tubo, sino después de cierta distancia a partir de la entrada en la que el fluido es frenado por viscosidad (sección 1.3).

El gasto a través del tubo está dado por  $Q = \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds$ , donde la integral se realiza en una sección transversal del tubo,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  es la componente de la velocidad perpendicular a dicha sección y  $ds$  un elemento de área de la misma. Como  $\mathbf{u}$  tiene sólo dirección axial y  $\mathbf{n}$  es un vector unitario perpendicular a la sección transversal y orientado en la dirección del flujo,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  es igual a la magnitud de la velocidad dada por la expresión (1.3). Realizando la integral y sustituyendo el radio por el diámetro  $D$  se obtiene

$$Q = \frac{\pi}{128\eta} \frac{\Delta p}{L} D^4. \quad (1.4)$$

Comparando esta expresión con la expresión (1.1) se observa que el coeficiente  $k(T)$  que considera Poiseuille es

$$k(T) = \frac{\pi}{128\eta}.$$

Siendo  $\eta$  función de la temperatura la relación anterior está de acuerdo con los resultados experimentales de Poiseuille. La expresión (1.4) se conoce como la ecuación de Hagen-Poiseuille

para el flujo laminar a través de una tubería. Introduciendo la velocidad media,  $\bar{u} = Q/\pi R^2$ , se obtiene que el gradiente de presión es proporcional a la misma, es decir,

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{8\eta}{R^2} \bar{u},$$

y de la ley de fricción de Newton (1.2) se obtiene que el esfuerzo  $E_0$  en la pared del tubo también es proporcional a la velocidad media,

$$E_0 = \frac{8\eta}{D} \bar{u}.$$

Este resultado contrasta con la creencia tradicional de que dicha resistencia sea proporcional al cuadrado de la velocidad media, opinión que Du Buat explicaba en sus *Principios de Hidráulica* [7]. ¿A que se debe entonces que Poiseuille encontró una proporcionalidad con la velocidad media y los resultados analíticos la daban la razón?. La pista la ofrece el hecho de que Poiseuille trabajó con tubos capilares, mientras que los hidráulicos lo hacían con tubos de dimensiones normales. Se sabe que la expresión de Hagen-Poiseuille también es válida para tubos un poco más grandes, hasta diámetros de algunos centímetros, *siempre y cuando la velocidad del flujo sea baja*. Esto lleva a pensar que la proporcionalidad entre resistencia y velocidad media está relacionada con la distribución parabólica de velocidades, y ésta se debe al hecho de que, al ser pequeña la velocidad del flujo, el efecto viscoso de adherencia del fluido a las paredes influye en toda la sección del conducto [7]. Para velocidades altas el flujo cambia completamente. En este caso el gradiente de presión y la resistencia en la pared se vuelven proporcionales (aproximadamente) al cuadrado de la velocidad media. La distribución de la velocidad en la sección transversal se vuelve más uniforme en la dirección axial, y el movimiento laminar es reemplazado por un flujo irregular, en donde fluctuaciones en la velocidad se superponen al flujo principal, presentándose un mezclado turbulento [10].

La pregunta por responder era entonces: ¿Qué diámetro de tubo y qué velocidad del agua serán los límites entre un comportamiento y otro? Y si en lugar de agua se tuviera otro fluido, ¿cambiarían estos límites?. Quien la contestó fue O. Reynolds en 1883, y lo hizo de una manera sencilla.

## 1.2 El experimento de Reynolds

La idea que Reynolds tenía sobre la posible causa de la aparición de turbulencia, según

menciona Enzo Levi, era la siguiente [7]: "Las circunstancias que determinan si el movimiento de una tropa es marcha o confusión se parecen mucho a aquellas que determinan si el movimiento del agua es directo o sinuoso<sup>2</sup>. Con las tropas es la disciplina y con el agua es su viscosidad. Cuanto mayor sea la disciplina, o bien, más viscoso sea el fluido, menos probable es que el movimiento regular se altere en alguna ocasión. Por otro lado velocidad y tamaño son favorables al desorden; tanto más grande es la tropa o más rápidas sus evoluciones tanto mayor oportunidad para el desorden; así también, cuanto más grande el tubo o más rápido el flujo tanto mayor oportunidad a la turbulencia." Para Reynolds la condición natural del flujo era el desorden y no el orden, y la viscosidad se encarga de destruir continuamente las perturbaciones. Este efecto puede disminuirse con velocidades grandes.

Con esta idea Reynolds introduce el principio de semejanza entre flujos estacionarios. Este principio se basa en un análisis dimensional de los parámetros físicos del problema [6]. Un tipo particular de flujo puede consistir en el movimiento de un cuerpo en un fluido o viceversa, el movimiento de un fluido alrededor de un obstáculo o en una región con fronteras determinadas. Una vez conocida la geometría del problema sólo es necesario especificar: 1) una longitud característica  $l_0$  (en este caso el diámetro del tubo) para conocer las dimensiones del mismo; 2) una velocidad característica  $u_0$  (la velocidad media en el flujo a través del tubo) y 3) un parámetro que caracterice al fluido. De todos los parámetros del fluido sólo dos, la densidad  $\rho$  y la viscosidad  $\eta$ , aparecen en las ecuaciones de movimiento. Dado que la viscosidad cinemática  $\nu = \eta/\rho$  combina a las dos anteriores, esta última es la que se especifica. Estos tres parámetros,  $l_0$ ,  $u_0$  y  $\nu$ , pueden combinarse en una cantidad adimensional  $\mathcal{R} = u_0 l_0 / \nu$ ; midiendo, además, longitudes en términos de  $l_0$  y velocidades en términos de  $u_0$  por medio de las cantidades adimensionales  $r/l_0$  y  $u/u_0$ , la distribución de velocidades tiene la forma

$$u = u_0 f\left(\frac{r}{l_0}, \mathcal{R}\right),$$

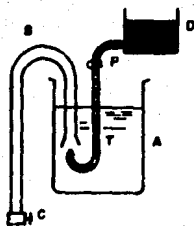
de acuerdo al teorema de Buckingham, que se basa en un análisis dimensional de los parámetros presentes en un problema para encontrar su solución en términos de combinaciones adimensionales de los mismos [11].

<sup>2</sup> Reynolds utilizaba las palabras directo y sinuoso respectivamente para referirse los flujos laminar y turbulento.

De esta manera, si para dos flujos del mismo tipo, por ejemplo el movimiento de dos fluidos de distintas viscosidades cinemáticas a través de dos tubos de diámetros diferentes, el parámetro  $\mathcal{R}$  es el mismo, el cociente  $u/u_0$  será la misma función del cociente  $r/l_0$ . Se dice entonces que dos flujos del mismo tipo son semejantes, es decir, su comportamiento es idéntico, si el parámetro  $\mathcal{R}$  es el mismo para ambos. Este parámetro se obtiene también al considerar el cociente entre los efectos inerciales y los efectos viscosos en un flujo bidimensional [10]. Puede pensarse entonces que del valor de  $\mathcal{R}$  depende que el flujo sea laminar o turbulento. Un valor pequeño del mismo indica que los efectos viscosos predominan y el flujo será probablemente laminar, mientras que un valor grande es señal de que predominan los efectos inerciales y el flujo será probablemente turbulento. Debe existir un valor intermedio que separe ambos regímenes, y este valor determinará no sólo la velocidad crítica cuando se conocen la viscosidad y la longitud característica (el diámetro del tubo en este caso), sino también la viscosidad o la longitud crítica cuando se conocen los otros dos parámetros.

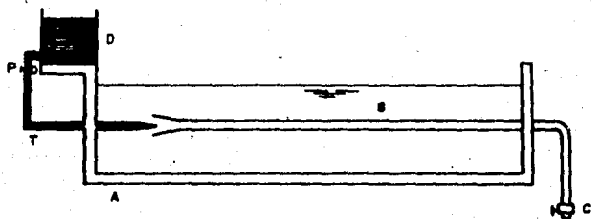
La primera manera que se le ocurrió a Reynolds para realizar el experimento fue visualizar con colorante [7]. Utilizó un sifón (S) de 6 mm de diámetro con entrada abocinada y una válvula de control (C) en el otro extremo (figura 1.2). La entrada del sifón la introdujo en un recipiente con agua (A). Por otro lado instaló un depósito (D) con agua coloreada, y ésta la inyectaba directamente en la entrada del sifón por medio de otro tubo (T) de 6 mm de diámetro terminado en una boquilla. El flujo del agua coloreada se controlaba con una pinza (P).

Reynolds dejó reposar todo el sistema durante varias horas para asegurarse de que cesara todo movimiento interno del agua. Después abrió la válvula de control y dejó que el líquido coloreado fluyera por la boquilla originando de esa forma un filamento que se extendía a lo largo del sifón. A la válvula de control le daba aberturas cada vez mayores para que el agua fluyera con mayor velocidad en el sifón, al mismo tiempo aumentaba el suministro del líquido coloreado para que se mantuviera visible. A pesar de ello el filamento de color se mantuvo nítido aun con la máxima abertura de la válvula. Reynolds prolongó el sifón hasta el piso sin que hubiera señal de perturbaciones en la corriente. Concluyó entonces que el diámetro escogido para el sifón era muy reducido para permitir la transición al flujo turbulento, aun



**Figura 1.2** Primer dispositivo experimental de Reynolds: (S) Sifón; (C) válvula de control; (A) Recipiente con agua; (D) Depósito con agua coloreada; (T) Tubo inyector y (P) Pinza.

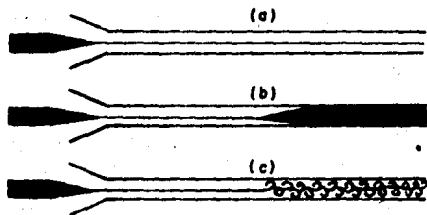
con la máxima abertura de la válvula. Decidió entonces emplear un tubo de una pulgada de diámetro. La figura 1.3 es un esquema del dispositivo utilizado por Reynolds.



**Figura 1.3** Segundo dispositivo experimental de Reynolds: (S) Sifón; (C) válvula de control; (A) Recipiente con agua; (D) Depósito con agua coloreada; (T) Tubo inyector y (P) Pinza.

El depósito de agua se levantó siete pies para permitir que el brazo vertical del tubo se alargara considerablemente. El primer ensayo se realizó dejando descansar el agua durante cuatro horas. Al comienzo el filamento se observó como en el primer intento (figura 1.4a);

de pronto, con un leve aumento en la abertura de la válvula, el filamento se extendió y comenzó a mezclarse con el agua llenando el resto del tubo con una nube de color (figura 1.4b). Iluminando el flujo con una chispa eléctrica la nube se observó formada de remolinos (figura 1.4c).



**Figura 1.4** Observaciones realizadas por Reynolds con el segundo dispositivo experimental. a) El líquido coloreado se observa como un filamento estable. b) Al abrir un poco más la válvula el filamento comienza a mezclarse con el agua. c) El mezclado se observa formado de remolinos al observar el flujo con una chispa eléctrica.

Al cerrar un poco la válvula el filamento se restableció nuevamente. Los resultados generales a los que llegó fueron los siguientes [4]:

- Cuando la velocidad del flujo es suficientemente baja el agua coloreada se observa como un filamento recto a lo largo del tubo.
- Si el agua en el tanque no había estado en reposo, a velocidades bajas el filamento se movía sin llegar a mezclarse con el resto del fluido.
- Al aumentar la velocidad llega el momento en que el colorante comienza a mezclarse a partir de cierta distancia de la entrada. Un aumento en la velocidad ocasiona que esa distancia se acorte, sin embargo la zona de mezclado no llega a la entrada.

El mismo resultado de pasar de flujo laminar a turbulento con sólo abrir y cerrar la válvula pudo conseguirlo cambiando la temperatura del agua. Calentándola hasta 21°C logró reducir

1.39 veces la viscosidad del agua, y con ello encontró un valor crítico de la velocidad 1.45 veces menor con la cual comenzaba a transformarse el movimiento laminar. También enfrió el agua hasta 4°C, comprobando que en todos los casos la velocidad crítica era proporcional directamente a  $\nu$ , la viscosidad cinemática del agua. Realizando el experimento con otros tubos encontró que la velocidad crítica es inversamente proporcional al diámetro. Concluyó entonces que el flujo laminar comienza a alterarse a partir de cierto valor crítico de un parámetro adimensional hoy conocido como el número de Reynolds:

$$\mathcal{R} = \frac{\bar{u}D}{\nu}$$

Los experimentos realizados por Reynolds dieron un valor crítico  $\mathcal{R}_c$  aproximado de 13 000 [11]. También concluyó que hay un valor crítico, menor que el anterior, para el cual, si el flujo al entrar al tubo está perturbado, las perturbaciones se amortiguan y el flujo sigue siendo laminar.

El valor  $\mathcal{R}_c$  para el flujo de Poiseuille no es único y depende de los detalles del dispositivo experimental, en particular de las perturbaciones existentes en entrada del tubo. Para entrada recta es aproximadamente igual a 2 300 [10]. Reynolds pensaba que el valor de  $\mathcal{R}_c$  aumenta cuando las perturbaciones en la entrada decrecen, hecho que fue confirmado experimentalmente<sup>3</sup> obteniéndose valores de  $\mathcal{R}_c$  del orden de 20 000 [10], e incluso se han obtenido valores mucho mayores [12]. No se conoce un límite superior para el valor crítico, que sólo está determinado por las condiciones experimentales; sin embargo existe un valor mínimo  $\mathcal{R}_{min}$  alrededor de 2 000, demostrado por medio de experimentos con tubos de paredes rugosas o con perturbaciones de entrada; para valores menores que  $\mathcal{R}_{min}$  el flujo se mantiene estable independientemente de las perturbaciones existentes, pues las mismas se amortiguan [10]. Cuando el número de Reynolds alcanza el valor crítico la turbulencia no es completa en todo el tubo, existiendo una región en el tubo donde el flujo es turbulento en algunas partes y laminar en otras (sección 1.4).

### 1.3 Flujo en la entrada

En condiciones de flujo laminar la relación de Hagen-Poiseuille es aplicable una vez que

<sup>3</sup> Entre otros, por H.T. Barnes y E.G. Coker (1906), y L. Schiller (1922) [10]



el flujo se ha desarrollado completamente a su perfil parabólico, lo que sucede a cierta distancia de la entrada donde la distribución inicial de velocidades se modifica por efecto viscoso. Dicha longitud se conoce como distancia inicial ( $l_i$ ) y depende del perfil de velocidades al entrar al tubo debido a la geometría de la entrada. Un caso particular es cuando dicho perfil es uniforme en toda la sección transversal, salvo muy cerca de la pared donde disminuye rápidamente. Debido a la condición de adherencia el fluido cerca de la pared es frenado mientras que cerca del centro se acelera, manteniendo de esta manera la velocidad media constante. Finalmente el frenado en las paredes influye en toda la sección transversal y se establece el perfil parabólico [12].

Considerando condición de equilibrio entre el momento, la caída de presión y la resistencia viscosa, L. Schiller (1922) [10] aproxima el perfil de velocidades por una constante cerca del eje del tubo combinada con una sección parabólica cerca de la pared, de manera que en la superficie del tubo la velocidad es cero. Al inicio la sección parabólica es casi nula; conforme se aleja de la entrada va creciendo hasta que el perfil parabólico abarca toda la sección transversal. Schiller determina un valor para la distancia inicial dado por

$$\frac{l_i \nu}{R^2 \bar{u}} = 0.115,$$

donde  $R$  es el radio del tubo,  $\bar{u}$  la velocidad media y  $\nu$  la viscosidad cinemática del fluido. En términos del diámetro y del número de Reynolds esta expresión es

$$\frac{l_i}{DR} = 0.028.$$

El desarrollo teórico de Schiller coincide con mediciones experimentales posteriores realizadas por J. Nikuradse [10] hasta un valor aproximado de

$$\frac{x\nu}{R^2 \bar{u}} \sim 0.04,$$

donde  $x$  es la distancia axial a partir de la entrada (figura 1.5). El valor encontrado por Nikuradse para la distancia inicial, obtenida de la figura 1.5, está dado por

$$\frac{l_i}{DR} = 0.062,$$

que es un poco más del doble de la de Schiller. Se han obtenido otros valores teóricos para la distancia inicial más acordes con mediciones experimentales. Uno de ellos, obtenido por H. Langhaar (1942) [11], es

$$\frac{l_i}{DR} = 0.058.$$

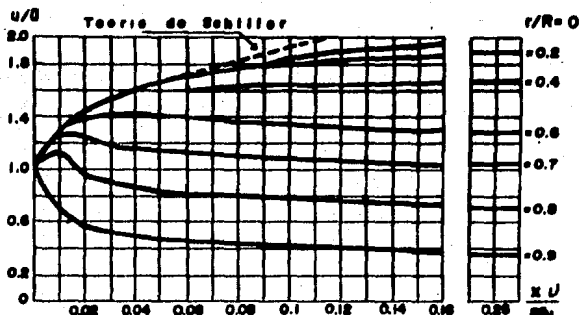


Figura 1.5 Distribución de la velocidad en la entrada de un tubo para flujo laminar, según mediciones realizadas por J. Nikuradse [10].  $x$  es la distancia axial a partir de la entrada.

#### 1.4 Transición al flujo turbulento

Cuando el número de Reynolds alcanza el valor crítico aparece una región turbulenta pequeña en el tubo, limitada en ambos extremos por flujo laminar. Esta región crece conforme se desplaza debido a que el flujo laminar que la limita se transforma en turbulento. Posteriormente se origina otra región turbulenta, de manera que entre las dos existe flujo laminar. Conforme van avanzando la región turbulenta posterior alcanza a la primera, formandose una región turbulenta mayor. Debido a esto un sensor colocado en una posición fija en el tubo registra de manera alternada flujo laminar y flujo turbulento. La fracción de tiempo  $\gamma$  durante el cual el flujo es turbulento — conocido como el factor de intermitencia — aumenta con la

distancia axial debido al crecimiento de las zonas turbulentas (figura 1.6), de manera que muy lejos de la entrada las regiones laminares desaparecen y el flujo es totalmente turbulento [12].

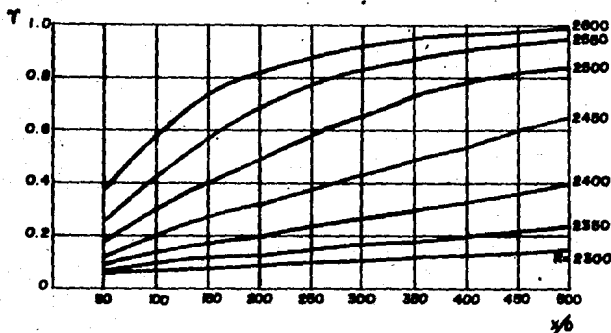


Figura 1.6 Factor de intermitencia para el flujo en un tubo en el intervalo de  $Re$  donde ocurre la transición a la turbulencia en términos de la distancia axial adimensional  $x/D$ . Mediciones realizadas por J. Rotta [10].  $\gamma = 1$  indica turbulencia continua  $\gamma = 0$  indica flujo laminar continuo.

Al medirse la distribución de velocidad en la dirección axial en la región de flujo intermitente se encuentra que cerca del centro la velocidad en los periodos de flujo laminar es mayor que la velocidad media en aquellos donde el flujo es turbulento, cerca de la pared sucede lo contrario, indicando que en la fase intermitente se presentan dos distribuciones de velocidades en dirección axial, una aproximadamente parabólica en las regiones de flujo laminar (debido a que dicho perfil aún no se establece), y otra más uniforme en las regiones de flujo turbulento.

La longitud del tubo donde se observa la intermitencia frecuentemente es muy larga y depende de la frecuencia con la que se producen las zonas turbulentas. Esta frecuencia depende a la vez del nivel de perturbaciones [12]. Al aumentar el número de Reynolds, las perturbaciones se amplifican más, por lo que la frecuencia de producción de zonas turbulentas aumenta; y así también el factor de intermitencia (figura 1.6).

Se ha mencionado que el flujo puede permanecer laminar a números de Reynolds muy grandes evitando en lo posible la existencia de perturbaciones en la entrada; en estos casos la estabilidad del flujo es muy delicada, pues cualquier perturbación relativamente grande que surja ocasiona la aparición de turbulencia. Para números de Reynolds muy grandes la inestabilidad de la capa límite existente en la pared antes de que el perfil de velocidades se aproxime al de Poiseuille es probablemente un factor importante de la transición [12], la turbulencia se inicia en pequeñas regiones cerca de la pared del tubo y rápidamente se extiende a toda la sección transversal. Para números de Reynolds menores la transición está determinada por la amplificación de las perturbaciones existentes en el flujo al entrar o de las producidas por la geometría de la entrada misma. En experimentos donde la entrada es recta puede existir una región de separación de flujo cerca de los bordes, originando perturbaciones que son amplificadas rápidamente [12]; sin embargo no es la única forma en que la transición puede iniciarse a números de Reynolds bajos; en algunos experimentos donde se evita la existencia de separación de flujo la transición se ha observado en forma similar a la descrita para números de Reynolds muy grandes [12]. Independientemente de los detalles, lo que define el límite inferior del número de Reynolds para el desarrollo del flujo turbulento es el crecimiento de las zonas de turbulencia, este desaparece cuando  $\mathcal{R}$  es aproximadamente 2300. Existe, además un intervalo pequeño del número de Reynolds en el cual al surgir la turbulencia, ésta no se extiende ni se amortigua. Finalmente está el valor mínimo alrededor de 2000 cuando el flujo permanece estable aun para perturbaciones muy grandes. A pesar de que el flujo de Poiseuille posee una configuración sencilla los detalles del proceso de la transición no están comprendidos del todo, y continua utilizandose para realizar estudios de estabilidad hidrodinámica y turbulencia.

## Ecuaciones de movimiento para un fluido

### 2.1 Descripción de un fluido

El objetivo de la descripción de un fluido es conocer el movimiento del mismo en cada instante de tiempo cuando existen distintas fuerzas actuando sobre él. Para ello se busca determinar cada una de las variables que caracterizan al flujo, la velocidad por ejemplo, para cada instante de tiempo y en todo el volumen ocupado por el fluido. Conocer la velocidad del fluido, desde el punto de vista microscópico, implicaría conocer la velocidad de cada una de las moléculas que lo constituyen, sin embargo el interés de la mecánica de fluidos es describir el comportamiento macroscópico de los fluidos, es decir, en una escala mucho mayor a las dimensiones de las moléculas o a la distancia libre media entre las mismas. Debido a esto en la mecánica de fluidos, se introduce la hipótesis de que el comportamiento del fluido es idéntico al de un medio continuo y que éste cumple los principios de conservación [1]. Con esta hipótesis las variables que caracterizan al fluido se consideran definidas puntualmente y continuas respecto a la posición; además la magnitud de las mismas para una posición particular  $\mathbf{r}_0$  se define como el promedio sobre todas las moléculas contenidas en un pequeño volumen  $\epsilon$  en torno a dicha posición [2], por ejemplo, la velocidad y la densidad están definidas por

$$\mathbf{u} = \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon} \left( \frac{\sum \mathbf{v}m}{\sum m} \right),$$

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon} \left( \frac{\sum m}{\Delta V} \right),$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad de cada una de las moléculas,  $\epsilon$  un pequeño volumen en torno a  $\mathbf{r}_0$ , y la suma se realiza sobre todas las moléculas contenidas en  $\Delta V$ . La definición anterior tiene como base el hecho de que cualquier instrumento usado para conocer dichas variables no da información de un sólo punto en el fluido, sino, mas bien, dicha información se refiere

al volumen en el cual el instrumento es sensible; un termómetro, por ejemplo, proporciona la temperatura en torno al bulbo de mercurio [1].

Con la hipótesis del continuo, el volumen  $\epsilon$  debe ser lo suficientemente grande para contener un gran número de moléculas, sin embargo, mucho menor que la longitud  $l_0$  más pequeña característica del flujo (por ejemplo, el diámetro de una pelota de beisbol, si se desea estudiar el movimiento de la misma en su viaje hacia el bateador; o en el caso del flujo de Poiseuille, el diámetro del tubo a través del cual fluye el agua) [2]. Si  $n$  es el número de moléculas por unidad de volumen, la distancia libre media entre las moléculas es del orden de  $n^{1/3}$ , por lo que la condición para  $\epsilon$  pide que  $n^{1/3} \ll \epsilon^{1/3} \ll l_0$ .

Existen dos sistemas para derivar las ecuaciones de movimiento: El lagrangiano y el euleriano. Ambos utilizan el concepto de un volumen de control (un volumen en el cual se realiza el análisis para obtener las ecuaciones de movimiento), la diferencia entre ellos se basa en la manera de describir el movimiento de un fluido, según se describe a continuación [2].

#### *Sistema lagrangiano*

En este sistema se sigue la evolución de un volumen  $V$  de fluido en el espacio conforme transcurre el tiempo. La idea es marcar el fluido contenido en ese volumen y observar como se deforma al moverse sin perder o ganar masa. La posición  $r$  para cada tiempo no es una variable independiente, pues según la posición inicial del volumen  $V$  estará determinada la posición  $r$  al tiempo  $t$ . Las variables independientes son entonces, la posición inicial  $r_0$  y el tiempo  $t$ .

#### *Sistema euleriano*

Aquí el volumen de control está fijo en el espacio y se observa al fluido que pasa por él al transcurrir el tiempo. De este manera, para un valor particular de  $t$ , se obtiene el movimiento en cada punto del espacio ocupado por el fluido, mientras que para valores particulares de las coordenadas  $x, y, z$  se obtiene el movimiento del fluido en ese punto conforme transcurre el tiempo. En este sistema las variables independientes son las coordenadas espaciales  $x, y, z$  y el tiempo  $t$ .

Si  $\alpha$  es cualquier variable que caracteriza al flujo, por ejemplo la densidad o cualquier componente de la velocidad, la evolución de la misma al transcurrir el tiempo se obtiene de la manera siguiente [5]: Al tiempo  $t + \delta t$  un elemento de volumen  $dV$  cambia su posición de  $(x, y, z)$  a  $(x + u\delta t, y + v\delta t, z + w\delta t)$ , donde  $u, v, w$  son las componentes de la velocidad en la dirección  $x, y, z$ , respectivamente. El valor de  $\alpha$  al tiempo  $t + \delta t$  es

$$\alpha + \delta\alpha = \alpha(x, y, z, t) + \frac{\partial\alpha}{\partial x}u\delta t + \frac{\partial\alpha}{\partial y}v\delta t + \frac{\partial\alpha}{\partial z}w\delta t + \frac{\partial\alpha}{\partial t}\delta t,$$

de donde se obtiene

$$\frac{\delta\alpha}{\delta t} = u \frac{\partial\alpha}{\partial x} + v \frac{\partial\alpha}{\partial y} + w \frac{\partial\alpha}{\partial z} + \frac{\partial\alpha}{\partial t}.$$

En el límite  $\delta t \rightarrow 0$  se obtiene la derivada temporal en el sistema lagrangiano, que se denota por  $\frac{D}{Dt}$ ; así pues

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\alpha.$$

El lado izquierdo, que se conoce como la "derivada material", representa la variación del parámetro  $\alpha$  visto en el sistema lagrangiano. El lado derecho representa la variación de  $\alpha$  desde el punto de vista euleriano, pues contiene sólo derivadas respecto a las variables independientes de ese sistema.

## 2.2 Principios de conservación

### 2.2.1 Conservación de la masa

El principio de conservación de la masa indica que al seguir la evolución de un volumen arbitrario de fluido, es decir, desde el punto de vista lagrangiano, la masa del mismo no cambia y sólo se observa un cambio en su forma [2]. Desde el punto de vista euleriano este principio indica que el cambio en la cantidad de fluido contenido en un volumen arbitrario fijo en el espacio es igual a la cantidad de fluido que atraviesa la superficie que rodea a dicho volumen [6]. Usando la derivada del sistema lagrangiano para la masa de fluido contenida en un volumen  $V$ , la conservación de ésta indica que

$$\frac{D}{Dt} \left( \int_V \rho dV \right) = 0, \quad (2.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido. Esta ecuación puede transformarse a una integral de volumen, en la que el integrando contiene sólo derivadas eulerianas, por medio del teorema de transporte de Reynolds que permite pasar de derivadas en el sistema lagrangiano a integrales de derivadas eulerianas [2]. Este teorema dice que, si  $\alpha$  es cualquier propiedad del fluido, la densidad por ejemplo, entonces

$$\frac{D}{Dt} \left( \int_V \alpha dV \right) = \int_V \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) \right] dV$$

Así pues la ecuación (2.1) se transforma en

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0.$$

Como el volumen  $V$  es arbitrario, la única forma de que se cumpla la ecuación anterior es que el integrando sea cero; entonces la ecuación anterior implica que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \tag{2.2}$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de continuidad o de conservación de la masa. Desarrollando el segundo término, la ecuación se reescribe como

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Para fluidos incompresibles ( $\rho$  constante), la ecuación de continuidad se simplifica a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{2.3}$$

### 2.2.2 Conservación del momento

Desde el punto de vista euleriano este principio indica que el cambio en el momento total del fluido contenido en un volumen arbitrario fijo en el espacio es igual al momento total que



atraviesa la superficie que contiene a dicho volumen [6]. En el sistema lagrangiano el principio de conservación del momento es una aplicación de la segunda ley del movimiento de Newton para un volumen  $V$  de fluido, es decir, el cambio del momento total del fluido contenido en  $V$  es igual a la fuerza neta que actúa sobre ese volumen [2]. Las fuerzas que actúan en un fluido pueden clasificarse en dos tipos [1], uno de ellos consiste de las fuerzas que varían lentamente con la distancia (de largo alcance), por ejemplo la fuerza gravitacional y la electromagnética. Estas fuerzas actúan sobre todo el volumen de un elemento de fluido, siendo proporcionales al tamaño del mismo, por lo que se les conoce como fuerzas volumétricas. Por otro lado están las fuerzas que varían bruscamente con la distancia, es decir, que tienen un radio de acción muy pequeño. Estas fuerzas tienen su origen en interacciones entre las moléculas cercanas a la frontera común entre dos elementos de fluido. A este tipo de fuerzas se les denomina superficiales y su magnitud es proporcional al área de la superficie que limita a un elemento de fluido.

Si  $f$  representa la fuerza volumétrica por unidad de masa, la fuerza total volumétrica sobre el volumen  $V$  de fluido es

$$\int_V \rho f dV.$$

Si  $t$  representa la fuerza neta superficial por unidad de área, la fuerza total que actúa sobre la superficie  $S$  que limita al volumen  $V$  de fluido es

$$\int_S t ds.$$

De esta forma la conservación del momento lleva a la ecuación

$$\frac{D}{Dt} \left( \int_V \rho u dV \right) = \int_V \rho f dV + \int_S t ds, \quad (2.4)$$

donde el lado izquierdo es la variación temporal del momento total del fluido contenido en  $V$  y el lado derecho es la fuerza neta externa que actúa sobre dicho volumen de fluido. Para transformar la última integral a una integral de volumen se relaciona la fuerza superficial por unidad de área  $t$  y el tensor de esfuerzos  $\tilde{E}$  de la manera siguiente:

### 2.2.3 Esfuerzo en un punto [8]

Considérese un elemento de superficie  $dS$ , entorno a un punto  $C$ , cuyo vector normal es  $\mathbf{n}$  (la magnitud de dicho vector es al área de la superficie), siendo sus componentes rectangulares  $n_x, n_y, n_z$ , las proyecciones del área en los planos  $yz, xz$  y  $xy$ , respectivamente (figura 2.1). Si  $\mathbf{t}(\mathbf{n})$  representa el esfuerzo por unidad de área relativo a una superficie con orientación  $\mathbf{n}$ , la fuerza que dicho esfuerzo ejerce sobre el elemento  $dS$  es  $\mathbf{t}(\mathbf{n})dS$ . De manera análoga la fuerza sobre cada una de las proyecciones rectangulares es

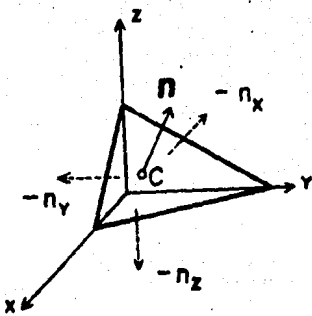


Figura 2.1 Elemento de superficie  $dS$  en torno a un punto  $C$ .

$$\mathbf{t}(i)dS_x = -n_x \mathbf{t}(i)dS, \quad \mathbf{t}(j)dS_y = -n_y \mathbf{t}(j)dS, \quad \mathbf{t}(k)dS_z = -n_z \mathbf{t}(k)dS;$$

el signo menos se debe a que las componentes de  $\mathbf{n}$  son negativas respecto a la orientación de las proyecciones del elemento  $dS$ . De esta manera la fuerza que actúa sobre el fluido contenido en el elemento de volumen  $dV$ , limitado por  $dS$  y sus componentes rectangulares, es

$$\rho \mathbf{a} dV = \rho f dV + \left[ \mathbf{t}(\mathbf{n}) - (n_x \mathbf{t}(i) + n_y \mathbf{t}(j) + n_z \mathbf{t}(k)) \right] dS,$$

donde  $\mathbf{a}$  es la aceleración neta del fluido contenido en  $dV$ . Como  $dV$  es proporcional a  $l^3$  y  $dS$  proporcional a  $l^2$ , donde  $l$  es la longitud de uno de los lados del elemento  $dS$ , dividiendo entre  $l^2$  y considerando el límite  $l \rightarrow 0$  se obtiene en el punto  $C$  la relación

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = n_x \mathbf{t}(i) + n_y \mathbf{t}(j) + n_z \mathbf{t}(k).$$

Considerando las componentes la relación anterior puede reescribirse como

$$t_i(\mathbf{n}) = n_x \tau_{ix} + n_y \tau_{iy} + n_z \tau_{iz}, \quad (2.5)$$

donde se consideró

$$t(e_i) = \tau_{xi}i + \tau_{yi}j + \tau_{zi}k,$$

con  $e_i = i, j$  o  $k$  y  $\tau_{ij}$  representa el esfuerzo en dirección  $i$  que actúa sobre una superficie con normal en dirección  $j$ . Introduciendo el tensor de esfuerzos

$$\tilde{E} = t(i)i + t(j)j + t(k)k,$$

la relación (2.5) se reescribe como

$$t(n) = \tilde{E} \cdot n. \quad (2.6)$$

Al considerar superficies con normales en cualesquiera de las direcciones rectangulares se encuentra que las componentes  $E_{ii}$  representan esfuerzos normales y las otras componentes representan esfuerzos tangenciales o cortantes. Además la conservación del momento angular implica que  $\tilde{E}$  es simétrico, es decir  $E_{ij} = E_{ji}$  [1]. Usando la ecuación (2.6) y el teorema de transporte de Reynolds la ecuación (2.4) se transforma en

$$\int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u u) - \rho f - \nabla \cdot \tilde{E} \right] dV = 0.$$

Desarrollando el integrando, usando la ecuación (2.2) para simplificar y debido a que el volumen es arbitrario obtenemos la ecuación de conservación del momento

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \right) u = \nabla \cdot \tilde{E} + \rho f. \quad (2.7)$$

El lado izquierdo representa el cambio del momento de un volumen unitario de fluido, el primer término es la variación temporal cuando el flujo no es estacionario y el segundo término representa variaciones locales debidas al movimiento del fluido (alrededor de algún obstáculo, por ejemplo) aun cuando el flujo sea estacionario. En el lado derecho están las fuerzas que originan dicho cambio en el momento, por un lado están las fuerzas volumétricas y por otro las originadas por los esfuerzos superficiales.

### 2.2.3 Conservación de la energía

El principio de conservación de la energía se basa en una aplicación de la primera ley de la termodinámica a un elemento de fluido conforme transcurre el tiempo. Dicha ley se aplica a un sistema originalmente en equilibrio que después de algún evento vuelve a estar en equilibrio y establece que el cambio en la energía del sistema es igual al trabajo total hecho sobre el sistema menos la cantidad de calor intercambiado por el sistema y sus alrededores [2]. Un fluido, visto como un sistema termodinámico, en realidad nunca está en equilibrio. Para poder emplear la primera ley de la termodinámica en un fluido se introduce la hipótesis de equilibrio local, con la cual se considera que si un elemento de fluido se aislara de pronto, éste quedaría en equilibrio. Se supone, además, que en un elemento de fluido pueden definirse las variables termodinámicas y que las mismas relaciones que satisfacen globalmente estas variables las satisfacen localmente [1].

Si  $\epsilon$  y  $\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$  son la energía interna y la energía cinética por unidad de masa, respectivamente, la variación temporal de la energía total del fluido en el volumen  $V$  es

$$\dot{E} = \frac{D}{Dt} \left( \int_V (\rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) dV \right).$$

La potencia desarrollada por las fuerzas superficiales y volumétricas es

$$\int_V \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{u} \cdot (\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n}) ds.$$

Si  $\mathbf{q}$  es el calor que fluye por unidad de área y unidad de tiempo a través del volumen  $V$ , el calor total que fluye por unidad de tiempo a través de  $S$  es

$$\int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds.$$

Con ello el principio de conservación de la energía lleva a la ecuación

$$\frac{D}{Dt} \left( \int_V (\rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) dV \right) = \int_V \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{u} \cdot (\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n}) ds - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds;$$

con el teorema de transporte de Reynolds y usando las ecuaciones (2.2) y (2.7) se obtiene finalmente la ecuación de conservación de la energía

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \epsilon = \tilde{\mathbf{E}} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (2.8)$$

donde  $\vec{E} : \nabla u = E_{ij} \partial u_j / \partial x_i$ . Esta ecuación expresa sólo el balance de energía interna, pues con la simplificación que se realiza al utilizar la ecuación (2.7) los términos de la energía mecánica se eliminan del balance total de la energía. El lado izquierdo de la ecuación (2.8) representa el cambio en la energía interna debido a la variación temporal y a variaciones locales debidas al movimiento del fluido. En el lado derecho están las causas de dicha variación; por un lado la transformación de energía mecánica en calor por la acción de los esfuerzos superficiales, por otra parte la variación debida al flujo de calor.

Por ahora se tienen cinco ecuaciones que deben cumplir los variables del fluido. A éstas se añaden dos ecuaciones de estado  $p = p(\rho, T)$  y  $\epsilon = \epsilon(\rho, T)$  para completar a siete ecuaciones; sin embargo se tienen dieciséis variables: la densidad  $\rho$ , la energía interna  $\epsilon$ , la presión  $p$ , la temperatura  $T$ , las tres componentes  $u_i$  de la velocidad, las tres componentes  $q_i$  del flujo de calor y las seis componentes  $E_{ij}$  del tensor de esfuerzos. Para obtener un conjunto cerrado de ecuaciones, el tensor de esfuerzos y el flujo de calor deben ser especificados por medio de ecuaciones constitutivas, las cuales relacionan a  $\vec{E}$  con el tensor de rapidez de deformación y a  $q$  con el gradiente de temperatura de la manera siguiente.

### 2.3 Ecuaciones constitutivas

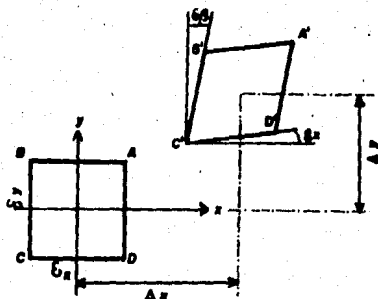
#### Rapidez de rotación y rapidez de corte [2]

La figura 2.2 muestra un elemento bidimensional rectangular de fluido (o la proyección de uno tridimensional en un plano) de dimensiones  $\delta x$ ,  $\delta y$  al tiempo  $t = 0$ , cuyo centro se localiza en el origen y sus vértices son  $ABCD$ . Después de un intervalo de tiempo  $\delta t$ , el centro se halla en

$$\Delta x = \int_0^{\delta t} u(x, y) dt, \quad \Delta y = \int_0^{\delta t} v(x, y) dt,$$

y sus vértices en  $A'B'C'D'$ . Como los valores para  $x$  y  $y$  están muy cercanos a cero por ser  $\delta t$  pequeño, las componentes de la velocidad pueden desarrollarse en series de Taylor en torno al origen; con lo que se obtiene

$$\Delta x = u(0, 0)\delta t + \dots, \quad \Delta y = v(0, 0)\delta t + \dots$$



**Figura 2.2** Un elemento bidimensional rectangular  $ABCD$  de fluido de dimensiones  $\delta x, \delta y$  al tiempo  $t = 0$ , y al tiempo  $t = \delta t$  (indicado por  $A'B'C'D'$ ).

Al mismo tiempo que se traslada, el elemento de fluido se distorsiona. La rotación del lado  $CD$  a su nueva posición  $C'D'$  se indica por el ángulo  $\delta\alpha$ , donde  $\alpha$  es positivo en sentido antihorario; de manera análoga la rotación del lado  $CB$  a su nueva posición  $C'B'$  se indica por el ángulo  $\delta\beta$ , donde  $\beta$  es positivo en sentido horario. De la geometría del elemento se obtiene que

$$\begin{aligned} \delta\alpha &= \arctan \left( \frac{\text{componente } y \text{ de } C'D'}{\text{componente } x \text{ de } C'D'} \right), \\ &= \arctan \left( \frac{[v(\frac{1}{2}\delta x, -\frac{1}{2}\delta y)\delta t + \dots] - [v(-\frac{1}{2}\delta x, -\frac{1}{2}\delta y)\delta t + \dots]}{\delta x + \dots} \right). \end{aligned}$$

Desarrollando en serie de Taylor en torno al origen y como el argumento es pequeño se obtiene

$$\frac{\delta\alpha}{\delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) + \dots,$$

que representa el cambio de  $\alpha$  por unidad de tiempo. En el límite cuando  $\delta x, \delta y, \delta t$  tienden a cero, la expresión anterior se convierte en

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial v}{\partial x}(0,0),$$

y de manera análoga

$$\dot{\beta} = \frac{\partial u}{\partial y}(0,0).$$

Con ello la rapidez de rotación en sentido horario, es decir, que tan rápido gira el elemento de fluido alrededor de su centro, está dada por

$$\frac{1}{2}(\dot{\beta} - \dot{\alpha}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

y la rapidez de corte, es decir, que tan rápido se acercan los lados  $CB$  y  $CD$  uno al otro, está dada por

$$\frac{1}{2}(\dot{\beta} + \dot{\alpha}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Al considerar las otras proyecciones se obtiene

$$\text{rapidez de rotación} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

$$\text{rapidez de corte} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right);$$

ambas se representan por tensores de segundo rango. Además el tensor para la rapidez de rotación es antisimétrico, y sólo tiene tres componentes independientes; el tensor para la rapidez de distorsión es simétrico y tiene seis componentes independientes. Estos dos constituyen la parte antisimétrica y simétrica, respectivamente, del tensor de rapidez de deformación, definido por

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Con el fin de especificar el tensor de esfuerzos  $\tilde{E}$ , se pide que éste cumpla cuatro condiciones [2]

1. Cuando un fluido está en reposo el esfuerzo es hidrostático y la presión del fluido es la presión termodinámica  $p$ .
2. El tensor de esfuerzos  $\tilde{E}$  está relacionado linealmente con el tensor de deformación  $\tilde{D}$  y depende sólo de éste.
3. Debido a que en un fluido que rota como un cuerpo sólido no hay deformación, no hay esfuerzo cortante en tal movimiento.

4. No hay direcciones privilegiadas en el fluido, de manera que las propiedades del fluido son funciones puntuales.

La condición 1 sugiere que el tensor de esfuerzos es de la forma  $E_{ij} = -p\delta_{ij} + S_{ij}$ , donde  $S_{ij}$  es un tensor que depende del gradiente de velocidad.

La condición 2 pide que la relación entre  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$ , y por lo tanto entre  $\vec{S}$  y  $\vec{D}$ , sea lineal. Esta es la característica que distingue a los fluidos *newtonianos*. En general  $\vec{S}$  puede depender de otra potencia del gradiente de velocidad y aun de la velocidad misma. Esta condición puede comprobarse experimentalmente en flujos simples, y los resultados predichos para flujos más complejos están de acuerdo a las observaciones físicas. Así pues cada componente de  $\vec{S}$  se relaciona con las nueve componentes de  $\vec{D}$  escribiéndose en notación tensorial

$$S_{ij} = \alpha_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l},$$

con la convención de que un índice repetido expresa la suma sobre todos los posibles valores de dicho índice.

De acuerdo con la condición 3, si el flujo es una rotación de cuerpo sólido no hay esfuerzo cortante en el fluido. Como la parte antisimétrica del tensor de deformación corresponde a la rapidez de rotación, la cual no es cero, los coeficientes correspondientes deben ser cero, con ello se obtiene

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \beta_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right).$$

La condición 4 pide independencia respecto a la orientación del sistema de coordenadas, lo que implica que  $\beta_{ijkl}$  debe ser isotrópico, ya que las componentes de este tipo de tensores no dependen del sistema de coordenadas. El tensor isotrópico más general de rango 4 es de la forma

$$\beta_{ijkl} = \hat{\zeta} \delta_{ij} \delta_{kl} + \hat{\eta} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \gamma (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}),$$

donde  $\hat{\zeta}$ ,  $\hat{\eta}$  y  $\gamma$  son coeficientes escalares [2]. La condición 3 pide que además  $\beta_{ijkl}$  sea simétrico, por lo que el coeficiente  $\gamma$  es cero; y así

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \hat{\zeta} \delta_{ij} \delta_{kl} + \hat{\eta} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right).$$



Al considerar todos los posibles valores para  $k$  y  $l$  se obtiene finalmente la expresión

$$E_{ij} = -p\delta_{ij} + \zeta\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right), \quad (2.9)$$

en términos de la presión termodinámica, del gradiente de la velocidad y de los parámetros  $\zeta$  y  $\eta$  que, no pudiendo ser determinados analíticamente, deben ser determinados por medio del experimento. El parámetro  $\eta$  resulta ser, al considerar ejemplos sencillos de flujos y la ley de fricción de Newton, el coeficiente de viscosidad cortante, y  $\zeta$  el segundo coeficiente de viscosidad conocido como el coeficiente de viscosidad volumétrica. Estos dos se relacionan con los escalares  $\hat{\zeta}$  y  $\hat{\eta}$  por

$$\hat{\eta} = \eta, \quad \zeta = \hat{\zeta} - \frac{2}{3}\hat{\eta}.$$

La segunda ecuación constitutiva relaciona al flujo de calor  $q_i$ , el cual se debe sólo a conducción, con el gradiente de temperatura por medio de la ley de conducción de calor de Fourier, que establece una relación lineal con el gradiente de temperatura, es decir

$$q_i = -\kappa\frac{\partial T}{\partial x_i},$$

donde  $\kappa$  es el coeficiente de conductividad térmica del fluido.

## 2.4 Ecuaciones de movimiento

Sustituyendo en las ecuaciones de conservación las expresiones obtenidas para  $\bar{E}$  y  $q$ , se obtienen las siete ecuaciones para los fluidos newtonianos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k) = 0, \quad (2.10)$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)u_j = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(p - \zeta\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\right] + \rho f_j, \quad (2.11)$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\epsilon = -p\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \Phi, \quad (2.12)$$

$$p = p(\rho, T), \quad (2.13)$$

$$\epsilon = \epsilon(\rho, T), \quad (2.14)$$

La primera de ellas es la ecuación de continuidad o conservación de masa, la segunda — que en realidad son tres — se conocen como las ecuaciones de Navier-Stokes. Para fluidos incompresibles y  $\eta$  constante estas ecuaciones se simplifican a

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}. \quad (2.15)$$

La tercera es la ecuación de conservación de la energía, donde

$$\Phi = \zeta \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

es la función de disipación, e indica que tan rápido se convierte la energía mecánica en calor. Para flujos incompresibles, por ejemplo,  $\Phi$  se convierte en

$$\Phi = \frac{1}{2} \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2,$$

que es siempre positiva, por lo que la energía mecánica se transforma de manera irreversible en calor. Las dos últimas son las ecuaciones de estado.

## 2.5 Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes son, desde el punto de vista matemático, un conjunto de tres ecuaciones diferenciales parciales parabólicas no lineales de segundo orden, por lo que las condiciones a la frontera apropiadas para este conjunto son las de Dirichlet o las de Neumann para una frontera cerrada. Desde el punto de vista físico se traduce a especificar la velocidad o las fuerzas en las fronteras. Debido a efectos viscosos el fluido se adhiere a las paredes de los sólidos; entonces, si  $\mathbf{U}$  representa la velocidad de una frontera sólida, la condición para la

velocidad del fluido pide que  $u = U$  en dicha frontera. Una de las condiciones más comunes cuando se considera un fluido en una región muy grande (la cual se puede considerar como infinita) es que  $u \rightarrow$  constante cuando  $r \rightarrow \infty$  [2].

### 2.5.1 El flujo de Poiseuille estacionario

El problema de encontrar soluciones exactas para las ecuaciones de Navier-Stokes posee, en general, muchas dificultades matemáticas, debido principalmente a que estas ecuaciones no son lineales. Sin embargo es posible encontrar soluciones exactas en algunos casos particulares, sobre todo cuando el término no lineal se anula en forma natural. Una de estas soluciones se obtiene al considerar el flujo incompresible a través de un tubo circular recto debido a una diferencia de presión aplicada en los extremos [6].

Debido a la simetría del problema resulta más conveniente el empleo de coordenadas cilíndricas  $r, \theta, z$ , con  $z$  paralelo al eje del tubo,  $r$  la distancia al eje y  $\theta$  el ángulo azimutal. Expresando las componentes de la velocidad en estas coordenadas por  $u_r, u_\theta, u_z$ , las ecuaciones (2.3) y (2.15) se transforman en

$$\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (2.16)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho f_r, \quad (2.17a)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left[ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] + \rho f_\theta, \quad (2.17b)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left[ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + \rho f_z. \quad (2.17c)$$

Suponiendo que la velocidad tiene sólo componente en la dirección  $z$ , la ecuación de continuidad (2.16) implica independencia respecto a  $z$ . Suponiendo, además, flujo estacionario,

simetría azimutal, i.e.  $u_r \equiv u_\theta \equiv 0$  y  $u_z = u(r)$ , y que no hay fuerzas externas ( $f \equiv 0$ ), las ecuaciones (2.17) se reducen a

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

y

$$\eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (2.18)$$

las dos primeras indican que la presión varía sólo a lo largo del tubo. Al considerar un gradiente de presión constante  $dp/dz = p_2 - p_1/L$ , donde  $L$  es la longitud del tubo, e integrando la tercera ecuación se obtiene

$$u = \frac{1}{4\eta} \frac{p_2 - p_1}{L} r^2 + C_1 \ln r + C_2,$$

donde  $C_1, C_2$  son constantes de integración. Las condiciones para  $u$  piden que ésta sea finita en  $0 \leq r \leq R$  y que, debido a la adherencia,  $u = 0$  en la pared del tubo. La primera condición determina  $C_1 \equiv 0$ , y la segunda implica que  $C_2 = -(p_2 - p_1)R^2/4\eta L$ , de manera que se obtiene el perfil parabólico del flujo de Poiseuille

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2), \quad (2.19)$$

donde  $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$ .

### 2.5.2 Flujo de Poiseuille a partir del reposo

Suponiendo que el fluido contenido en un tubo circular recto y longitud  $L$  está inicialmente en reposo. Al tiempo  $t = 0$  un gradiente de presión  $dp/dz$  constante se establece a lo largo del tubo; con ello el fluido comienza a moverse y el perfil de velocidades se aproxima en forma asintótica al perfil parabólico del flujo de Poiseuille [1].

Nuevamente se considera que la velocidad tiene sólo componente en la dirección  $z$ . En esta ocasión, además de pedir adherencia en las paredes y velocidad finita para  $0 \leq r \leq R$ , se pide que el perfil de velocidades se convierta en el perfil parabólico estacionario  $u_\infty$ , dado por

la ecuación (2.19), cuando  $t \rightarrow \infty$ . Suponiendo que  $u(r)$  es de la forma  $u(r) = v(r, t) + u_\infty(r)$ , al sustituir en la ecuación (2.17c), y como  $u_\infty$  satisface la ecuación (2.18) se obtiene para  $v(r, t)$  la ecuación siguiente

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{\nu} \frac{\partial v}{\partial t},$$

donde  $\nu = \eta/\rho$  es la viscosidad cinemática. Las condiciones para  $v$ , que se obtienen a partir de las de  $u$  y de las que cumple  $u_\infty$ , son:

$$v(r, 0) = -u_\infty, \quad (2.20a)$$

$$v(r, t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty, \quad (2.20b)$$

$$v(R, t) = 0 \quad \text{para todo } t > 0, \quad (2.20c)$$

$$v(r, t) \text{ finita en } 0 \leq r \leq R. \quad (2.20d)$$

Al proponer separación de variables  $v(r, t) = T(t)R(r)$  se obtienen dos ecuaciones cuyas soluciones, al imponer las condiciones (2.20b) y (2.20d), son

$$T(t) = e^{-\nu k t},$$

$$R(r) = J_0(\sqrt{k}r),$$

donde  $k$  es una constante positiva y  $J_0$  es la función de Bessel de primera especie y orden cero. La condición (2.20c) implica que  $J_0(\sqrt{k}R) = 0$ , por lo que  $\sqrt{k}R$  es una de las raíces  $\lambda_n$  de  $J_0$ ; con ello se obtiene la expresión

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{\lambda_n^2 \nu t}{R^2}} J_0\left(\lambda_n \frac{r}{R}\right).$$

Finalmente la condición (2.20a) implica que

$$\frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2) = \frac{\Delta p}{4\eta L} \sum_{n=1}^{\infty} A'_n J_0\left(\lambda_n \frac{r}{R}\right),$$

con ello se obtiene para los coeficientes la expresión siguiente

$$\begin{aligned} A'_n &= \frac{2R^2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 x(1-x^2) J_0(\lambda_n x) dx, \\ &= \frac{8R^2}{\lambda_n^2 J_1(\lambda_n)}. \end{aligned}$$

la ecuación (2.19), cuando  $t \rightarrow \infty$ . Suponiendo que  $u(r)$  es de la forma  $u(r) = v(r, t) + u_\infty(r)$ , al sustituir en la ecuación (2.17c), y como  $u_\infty$  satisface la ecuación (2.18) se obtiene para  $v(r, t)$  la ecuación siguiente

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{\nu} \frac{\partial v}{\partial t},$$

donde  $\nu = \eta/\rho$  es la viscosidad cinemática. Las condiciones para  $v$ , que se obtienen a partir de las de  $u$  y de las que cumple  $u_\infty$ , son:

$$v(r, 0) = -u_\infty, \quad (2.20a)$$

$$v(r, t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty, \quad (2.20b)$$

$$v(R, t) = 0 \quad \text{para todo } t > 0, \quad (2.20c)$$

$$v(r, t) \text{ finita en } 0 \leq r \leq R. \quad (2.20d)$$

Al proponer separación de variables  $v(r, t) = T(t)R(r)$  se obtienen dos ecuaciones cuyas soluciones, al imponer las condiciones (2.20b) y (2.20d), son

$$T(t) = e^{-\nu k^2 t},$$

$$R(r) = J_0(\sqrt{k}r),$$

donde  $k$  es una constante positiva y  $J_0$  es la función de Bessel de primera especie y orden cero. La condición (2.20c) implica que  $J_0(\sqrt{k}R) = 0$ , por lo que  $\sqrt{k}R$  es una de las raíces  $\lambda_n$  de  $J_0$ ; con ello se obtiene la expresión

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{\lambda_n^2}{R^2} \nu t} J_0(\lambda_n \frac{r}{R}).$$

Finalmente la condición (2.20a) implica que

$$\frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2) = \frac{\Delta p}{4\eta L} \sum_{n=1}^{\infty} A'_n J_0(\lambda_n \frac{r}{R}),$$

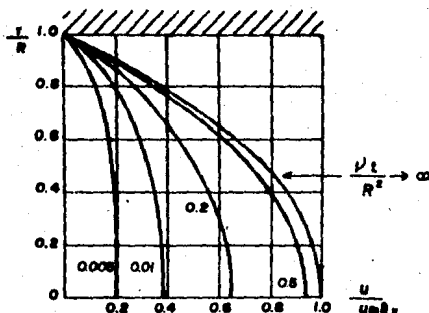
con ello se obtiene para los coeficientes la expresión siguiente

$$\begin{aligned} A'_n &= \frac{2R^2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 x(1-x^2) J_0(\lambda_n x) dx, \\ &= \frac{8R^2}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}. \end{aligned}$$

Por lo que la evolución del perfil de velocidades con el tiempo figura (2.3), está dada por

$$u(r, t) = \frac{\Delta p R^2}{4\eta L} \left[ 1 - x^2 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n x)}{\lambda_n^2 J_1(\lambda_n)} e^{-\frac{\lambda_n^2 \nu t}{R^2}} \right] \quad x = \frac{r}{R}$$

En los primeros instantes la velocidad cerca del eje es mas o menos constante y el efecto de adherencia por viscosidad influye de manera que, en una capa cerca de la pared, la velocidad disminuye hasta llegar a cero en la pared. Poco a poco el efecto viscoso llega al centro del tubo y la velocidad se aproxima al perfil estacionario.



**Figura 2.3** Evolución temporal del perfil de velocidades para el flujo de Poiseuille a partir del reposo,  $u_{max} = \Delta p R^2 / 4\eta L$ .

Aun cuando a partir de las ecuaciones de movimiento se obtiene como solución exacta el perfil parabólico del flujo de Poiseuille, esta solución no señala el hecho de que, a partir de cierto valor del número de Reynolds, el flujo laminar no se mantiene y se vuelve turbulento. Sin embargo estas ecuaciones son la base para estudiar la inestabilidad de distintos flujo al considerar una perturbación en la distribución de velocidades de un flujo laminar solución de las ecuaciones de movimiento. Cuando se considera que estas perturbaciones son de amplitud muy pequeña resulta un problema de ecuaciones lineales, cuyo análisis constituye la teoría de estabilidad lineal, (capítulo 3).

## Estabilidad hidrodinámica

### 3.1 Mecanismos de la estabilidad

En un flujo laminar existe un equilibrio entre las fuerzas externas, las fuerzas inerciales y los efectos viscosos. Al aparecer una perturbación este equilibrio se altera. Si no hay manera de restablecerlo, la perturbación crece y el flujo se transforma en otro flujo laminar o, incluso, puede volverse turbulento. Al cambio en el flujo que trae como consecuencia que el flujo se vuelva turbulento se le conoce como primera inestabilidad [12]. Uno de los mecanismos por el cual puede restablecerse este equilibrio se debe a efectos de amortiguamiento de las perturbaciones. Uno de estos efectos lo ejerce la tensión superficial que se opone a que el área de una superficie libre crezca contribuyendo a la estabilidad del flujo, especialmente para perturbaciones pequeñas. Otra forma en que dicho equilibrio se recupera se debe a efectos de disipación por viscosidad. La viscosidad de un fluido se encarga de disipar la energía de las perturbaciones, y con ello de estabilizar el flujo, sin embargo también está a cargo de la disipación del momento, originando con ello que algunos flujos sean inestables aun cuando el mismo flujo para un fluido invicido sea estable [4]. La tendencia de un fluido a moverse en dirección contraria al gradiente de presión se traduce en una tendencia por amplificar perturbaciones en ciertos flujos (un chorro de agua por ejemplo), originando inestabilidad. Las fronteras en un flujo tienen un efecto estabilizador en el mismo, pues limitan el desarrollo de las perturbaciones, y, generalmente, mientras más cerca se hallen entre si, más estable es el flujo [4].

### 3.2 Conceptos básicos

Considerese un flujo que, de acuerdo a las ecuaciones de movimiento, se encuentra en un estado estacionario; de manera que las variables que lo describen no dependen del tiempo



explícitamente. Llámese  $X_1, X_2, \dots, X_k$  al conjunto de parámetros que definen al flujo; éstos incluyen parámetros geométricos tales como las dimensiones de las fronteras que limitan al flujo, parámetros que caracterizan al fluido y aquellos que caracterizan el campo de velocidades.

Al analizar la estabilidad de dicho flujo se desea conocer su comportamiento cuando se presentan perturbaciones en el mismo. Al ser perturbado el flujo, estas perturbaciones pueden desaparecer, permanecer como perturbaciones del mismo orden o crecer en amplitud de tal manera que el flujo se vuelve un flujo laminar diferente o un flujo turbulento. Estos casos se conocen como *estabilidad asintótica*, *estabilidad neutral* e *inestabilidad*, respectivamente [4]. Se dice que un flujo es estable si para cualquier tipo de perturbación presenta estabilidad asintótica, por el contrario, un flujo es inestable si, al menos, para un tipo de perturbación presenta inestabilidad [3]. En el espacio de los parámetros  $X_1, X_2, \dots, X_k$  la región que separa los estados estables de los inestables define los estados de estabilidad neutral. Esta región está definida por una ecuación de la forma [3]

$$F(X_1, X_2, \dots, X_k) = 0.$$

Encontrar dicha región es uno de los principales objetivos de la investigación en estabilidad hidrodinámica.

Desde el punto de vista matemático se define que un flujo  $\{U(r, t), P(r, t), \text{etc.}\}$  es estable si para cualquier número  $\epsilon > 0$  existe algún número  $\delta > 0$  (que depende de  $\epsilon$ ) tal que, si

$$\|u(r, 0) - U(r, 0)\|, \quad \|p(r, 0) - P(r, 0)\|, \quad \text{etc.} < \delta,$$

entonces

$$\|u(r, t) - U(r, t)\|, \quad \|p(r, t) - P(r, t)\|, \quad \text{etc.} < \epsilon$$

para todo tiempo  $t$ , donde  $\{u(r, t), p(r, t), \text{etc.}\}$  es el flujo perturbado, el cual satisface a su vez las ecuaciones de movimiento y las condiciones de frontera [4]. La definición anterior quiere decir que un flujo es estable si las perturbaciones, que al tiempo  $t = 0$  eran pequeñas, siguen siendo pequeñas al transcurrir el tiempo. De manera analoga se define *estabilidad asintótica*<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Estas definiciones no son satisfactorias cuando el flujo básico crece o decrece con el tiempo o en el espacio; por lo tanto debe considerarse con mayor cuidado la norma para flujos no estacionarios

si

$$\|u(\mathbf{r}, t) - U(\mathbf{r}, t)\|, \text{ etc.} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

Al considerar que las perturbaciones  $u'(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, t) - u(\mathbf{r}, t)$ , etc. son pequeñas, usualmente pueden despreciarse términos de orden cuadrático en las perturbaciones, obteniéndose con ello un sistema de ecuaciones diferenciales parciales lineales con sus condiciones de frontera [4]. La teoría que se deriva de estas ecuaciones se conoce como teoría lineal, comparada con teorías no lineales que consideran perturbaciones de amplitudes finitas. Para estas ecuaciones se supone que las perturbaciones consisten en una superposición de perturbaciones básicas, examinándose entonces la estabilidad del flujo para estas últimas. Para ellas se sugiere que la dependencia temporal de las soluciones es exponencial ( $e^{ct}$ ), para algún número complejo  $c = c_r + ic_i$ . El resultado es un problema de valores propios (el parámetro  $c$ ) a los cuales corresponde una función propia (la dependencia espacial de las soluciones) [4]. Si resulta que  $c_r$  es positivo la perturbación crece con el tiempo y el flujo es inestable. Si  $c_r$  es negativo la perturbación decae con el tiempo y el flujo es estable asintóticamente, y si  $c_r$  es cero la perturbación sigue siendo del mismo orden de magnitud y la estabilidad del flujo es neutral [4]. Se dice que la perturbación está en el límite de estabilidad si  $c_r = 0$  para ciertos valores de los parámetros de los cuales depende  $c$ , y cambia de signo en una vecindad, en torno a estos valores críticos. De esta manera se obtiene la curva (o superficie) de estabilidad límite (aquella en la que  $c_r = 0$  pero hay un cambio de signo al pasar de un lado a otro). Algunos de los parámetros de los que depende  $c$  son, la viscosidad y la densidad del fluido, una longitud y una velocidad características del flujo, por tanto la dependencia de  $c$  con éstos se da a través del número de Reynolds  $\mathcal{R}$  asociado al flujo. Al conocer la curva de estabilidad límite, el valor mínimo de  $\mathcal{R}$  sobre ésta es el valor crítico  $\mathcal{R}_c$ , a partir del cual, para valores mayores, comienza la inestabilidad.

### 3.3 Teoría lineal para flujos paralelos

La idea principal es suponer que el flujo básico  $\{U(\mathbf{r}), P(\mathbf{r}), \text{ etc.}\}$  es modificado con perturbaciones pequeñas  $\{u'(\mathbf{r}, t), p'(\mathbf{r}, t), \text{ etc.}\}$ , es decir

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}', \quad p = P + p', \quad \text{etc.}, \quad (3.1)$$

donde, tanto el flujo básico como el perturbado, cumplen con las ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad) y las condiciones de frontera [10]. Para flujos paralelos el flujo básico es de la forma  $\mathbf{U} = U(z)\mathbf{i}$ , donde  $\mathbf{i}$  es un vector unitario en la dirección del flujo y  $z$  una distancia perpendicular a esa dirección. Sustituyendo las expresiones (3.1) en las ecuaciones de movimiento (2.3) y (2.15), despreciando términos cuadráticos en las perturbaciones y considerando cantidades adimensionales [4].

$$t = t^* \frac{u_0}{l_0}, \quad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}^*}{l_0}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^*}{u_0}, \quad p = \frac{p^*}{\rho u_0^2}, \quad (3.2)$$

donde el asterisco indica cantidades con dimensiones, se obtienen las ecuaciones

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{u}' + w' \frac{dU}{dz} \mathbf{i} = -\nabla p' + \frac{1}{\mathcal{R}} \nabla^2 \mathbf{u}' \quad (3.3a)$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0. \quad (3.3b)$$

Estas aceptan soluciones con dependencia en  $x, y$  y  $t$  exponencial

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t) &= \hat{\mathbf{u}}(z) \exp[i(\alpha x + \beta y - \alpha ct)], \\ p'(\mathbf{r}, t) &= \hat{p}(z) \exp[i(\alpha x + \beta y - \alpha ct)], \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (3.3) se obtiene

$$\begin{aligned} [D^2 - (\alpha^2 + \beta^2) - i\alpha\mathcal{R}(U - c)]\hat{\mathbf{u}} &= \mathcal{R}U'\hat{w} + i\alpha\mathcal{R}\hat{p}, \\ [D^2 - (\alpha^2 + \beta^2) - i\alpha\mathcal{R}(U - c)]\hat{v} &= i\beta\mathcal{R}\hat{p}, \\ [D^2 - (\alpha^2 + \beta^2) - i\alpha\mathcal{R}(U - c)]\hat{w} &= \mathcal{R}D\hat{p}, \\ \text{y } i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{v}) + D\hat{w} &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

con  $D = d/dz$  y las condiciones de frontera  $\hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = 0$  en  $z = z_1$  y  $z = z_2$  si el flujo está confinado, o  $\hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = 0$  en  $z = z_1$  y  $z \rightarrow \infty$  si no lo está [4]. Debido a que las soluciones

deben permanecer finitas cuando  $x, y \rightarrow \pm\infty$  los parámetros  $\alpha, \beta$  (números de onda) deben ser reales. La velocidad de propagación  $c$  en general puede ser compleja, i.e.  $c = c_r + ic_i$ , por lo que las expresiones (3.5) representan una onda propagándose en la dirección  $(\alpha, \beta, 0)$  con velocidad de fase  $\alpha c_r / (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$  y que crece o se desvanece con el tiempo por  $e^{\alpha c_i t}$ ; siendo estable si  $\alpha c_i \leq 0$  e inestable si  $\alpha c_i > 0$ .

El problema en tres dimensiones dado por las ecuaciones (3.5) puede reducirse a un problema bidimensional equivalente utilizando la transformación de H. B. Squire

$$\tilde{\alpha} = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}, \quad \tilde{\alpha}\tilde{u} = \alpha\tilde{u} + \beta\tilde{v},$$

$$\frac{\tilde{p}}{\tilde{\alpha}} = \frac{\tilde{p}}{\alpha}, \quad \tilde{w} = \tilde{w} \quad \text{y} \quad \tilde{c} = c,$$

escribiendo además  $\tilde{\alpha}\tilde{\mathcal{R}} = \alpha\mathcal{R}$  [4]. Con esta transformación se obtiene la equivalencia bidimensional

$$[D^2 - \tilde{\alpha}^2 - i\tilde{\alpha}\tilde{\mathcal{R}}(U - c)]\tilde{u} = \tilde{\mathcal{R}}U'\tilde{w} + i\tilde{\alpha}\tilde{\mathcal{R}}\tilde{p},$$

$$[D^2 - \tilde{\alpha}^2 - i\tilde{\alpha}\tilde{\mathcal{R}}(U - c)]\tilde{w} = \tilde{\mathcal{R}}D\tilde{p}$$

$$\text{y} \quad i\tilde{\alpha}\tilde{u} + D\tilde{w} = 0,$$

con las condiciones de frontera  $\tilde{u} = \tilde{w} = 0$  en  $z = z_1$  y  $z = z_2$  ó  $z \rightarrow \infty$ . Estas ecuaciones tienen la misma estructura que las ecuaciones (3.5) al considerar  $\beta = \hat{v} = 0$ . Además como  $\tilde{\alpha}$  es mayor o igual que  $\alpha$ , entonces  $\tilde{\mathcal{R}}$  es menor que  $\mathcal{R}$ , por lo que se tiene el teorema de Squire: *Para obtener el número crítico de Reynolds basta considerar solamente perturbaciones bidimensionales* [4]. Con el que se obtiene el valor crítico de  $\mathcal{R}$  en el flujo bidimensional, y de ahí el valor crítico para el flujo tridimensional ( $\mathcal{R} = \tilde{\alpha}\tilde{\mathcal{R}}/\alpha$ ). Con  $\beta = \hat{v} = 0$  es posible introducir una función de corriente  $\Psi(x, z, t)$  de tal forma que las dos componentes de la perturbación están dadas por

$$u' = \frac{\partial\Psi}{\partial z} \quad \text{y} \quad w' = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

Si además suponemos que  $\Psi$  es de la forma

$$\Psi(x, z, t) = \phi(z)e^{i\alpha(x-ct)},$$

entonces

$$u' = \phi'(z)e^{i\alpha(x-ct)} \quad \text{y} \quad w' = -i\alpha\phi(z)e^{i\alpha(x-ct)}$$

de manera que

$$\tilde{u} = \phi' \quad \text{y} \quad \tilde{w} = -i\alpha\phi.$$

Sustituyendo estas dos expresiones en las ecuaciones (3.5) y eliminando la presión se obtiene para  $\phi(z)$  la ecuación

$$(i\alpha\mathcal{R})^{-1}(D^2 - \alpha^2)^2\phi = (U - c)(D^2 - \alpha^2)\phi - U''\phi, \quad (3.6)$$

conocida como la ecuación de Orr-Sommerfeld [4], que es el punto de partida para la teoría de la estabilidad de flujos paralelos; siendo las condiciones en la frontera

$$\alpha\phi = \phi' = 0 \text{ en } z = z_1 \text{ y } z = z_2 \text{ ó } z \rightarrow \infty.$$

Al realizar el análisis de estabilidad se fijan dos de los tres parámetros en el problema (por lo general éstos son  $\alpha$  y  $\mathcal{R}$ ) y se estudia el valor del tercero. De esta manera el criterio de estabilidad (suponiendo  $\alpha$  positiva) se traduce a  $c_i \leq 0$  flujo estable,  $c_i > 0$  flujo inestable.

### 3.4 Estabilidad del flujo de Poiseuille

En este problema el flujo básico es de la forma  $\mathbf{U} = U(r)\mathbf{e}_z$  y  $P = P(z)$ , con  $z$  en la dirección axial, considerando por simplicidad que las perturbaciones tienen sólo componentes radial y axial<sup>2</sup>, es decir,  $u' = u'_r(r, z, t)\mathbf{e}_r + u'_z(r, z, t)\mathbf{e}_z$ . Expresando en coordenadas cilíndricas las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad, a partir de la segunda es posible introducir una función de corriente  $\Psi(r, z, t) = \phi(r)\exp[i\alpha(z - ct)]$ , de tal manera que las componentes de la perturbación son

$$u'_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad \text{y} \quad u'_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

<sup>2</sup> Aunque el análisis para linealizar las ecuaciones considerando perturbaciones en las tres direcciones no es difícil, las ecuaciones resultantes son complicadas y no pueden reducirse a un problema donde las perturbaciones sólo tienen componentes axial y radial, de ahí la necesidad de simplificar

es decir,

$$u_z = \phi'(r)e^{i\alpha(z-ct)} \quad \text{y} \quad u_r' = -i\alpha \frac{\phi(r)}{r} e^{i\alpha(z-ct)}. \quad (3.7)$$

Sustituyendo en las ecuaciones de Navier-Stokes adimensionalizadas por medio de las cantidades (3.2), linealizando posteriormente al ignorar términos cuadráticos en la perturbación y eliminando la presión se obtiene para  $\phi(r)$  una ecuación similar a la de Orr-Sommerfeld [4]

$$(i\alpha\mathcal{R})^{-1}(L - \alpha^2)\phi = (U - c)(L - \alpha^2)\phi - r \left(\frac{U'}{r}\right)' \phi, \quad (3.8)$$

donde

$$L = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr}.$$

Las condiciones de frontera piden que  $u_z'$  y  $u_r'$  permanezcan finitas cuando  $r = 0$  lo que indica que  $\phi/r$  y  $\phi'/r$  deben ser finitas en  $r = 0$ . Además, en la frontera rígida ( $r = R$ ) la velocidad es cero por adherencia, por tanto  $\phi = \phi' = 0$  en  $r = R$ . Siendo el flujo básico de Poiseuille  $U(r) = 1 - r^2$  entonces  $(U'/r)' \equiv 0$ , con ello la ecuación (3.8) implica que

$$(L - \alpha^2)f - i\alpha\mathcal{R}(1 - r^2 - c)f = 0, \quad (3.9a)$$

donde

$$(L - \alpha^2)\phi = f(r). \quad (3.9b)$$

Para este problema C.L. Pekeris (1948) mostró que la solución a la ecuación (3.9a) puede expresarse en términos de una función hipergeométrica [4]; se ha estudiado también el problema de estabilidad considerando perturbaciones asimutales (G.M. Corcos & J.A. Sellars (1959) [4] y H. Salwen & C.E. Grosch (1972) [4]). Los resultados obtenidos en ambos casos sugieren que el perfil parabólico del flujo de Poiseuille es estable para perturbaciones infinitesimales, atribuyéndose la inestabilidad observada experimentalmente a perturbaciones de amplitudes finitas o a la inestabilidad de la capa límite que se forma en la región de entrada del tubo [4]. Otros estudios sugieren que la inestabilidad observada experimentalmente puede deberse a una ligera rotación del flujo en la entrada.

El flujo de Poiseuille pierde su estabilidad de una manera peculiar. Para valores de  $\mathcal{R}$  un poco mayores que el valor crítico  $\mathcal{R}_c$  el intervalo de  $\alpha$ , donde  $c_i > 0$ , es pequeño. Cuando una perturbación aparece en alguna parte del flujo, sólo aquellas componentes que poseen  $c_i > 0$  son amplificadas al transcurrir el tiempo, formando un paquete que se desplaza en la dirección del flujo. Este desplazamiento es importante, pues, al considerar un punto determinado en el flujo, la perturbación en esa posición no se amplifica al transcurrir el tiempo; además, como en realidad los tubos tienen longitud finita, las perturbaciones pueden salir del flujo antes de que alcancen a modificarlo. Por esta razón, aún cuando  $\mathcal{R}$  sea mayor que  $\mathcal{R}_c$ , el flujo puede verse estable respecto a perturbaciones pequeñas [6]. El hecho de que las perturbaciones sean amplificadas respecto a la coordenada axial  $z$  y no respecto al tiempo en un punto fijo lleva a analizar la estabilidad de la manera siguiente [6]. Se supone que en una región del flujo se origina una perturbación de frecuencia  $c$ . Posteriormente se encuentra cual número de onda  $\alpha$  corresponde a dicha frecuencia. Si la parte imaginaria de  $\alpha$  es negativa, el factor  $e^{i\alpha z}$  crece con  $z$ , es decir la perturbación se amplifica conforme avanza el flujo. La curva en el plano  $c\mathcal{R}$ , dada por la ecuación  $\alpha_i(c, \mathcal{R}) = 0$ , define la región de estabilidad, y separa, para cada valor de  $\mathcal{R}$ , las frecuencias de las perturbaciones que se amplifican de las que se amortiguan conforme avanzan en el flujo.

Aunque el flujo de Poiseuille es relativamente sencillo ilustra las limitaciones de la teoría de estabilidad lineal, pues ésta parece indicar que el perfil parabólico es estable para perturbaciones infinitesimales, o en otros términos, que el valor crítico del número de Reynolds es infinito [12]. El estudio de la inestabilidad de flujos respecto a perturbaciones de amplitud finita originó el desarrollo de la teoría de estabilidad no lineal, cuyos fundamentos fueron expuestos por Landau [4].

## El dispositivo experimental

## 4.1 Elementos

En rasgos generales el dispositivo consta de los siguientes elementos: 1) Un tubo largo y transparente; 2) un depósito que contiene al agua que entra al tubo; 3) una válvula al final del tubo para controlar el gasto; 4) un sistema de recirculación para mantener el nivel de agua en el depósito constante y contribuir al control del gasto; 5) unas bases en las que descansa el tubo, con las cuales se niveló al mismo y 6) un colector en la salida del tubo para recoger el agua que fluye y enviarla nuevamente al depósito. La figura 4.1 muestra un esquema del dispositivo utilizado.

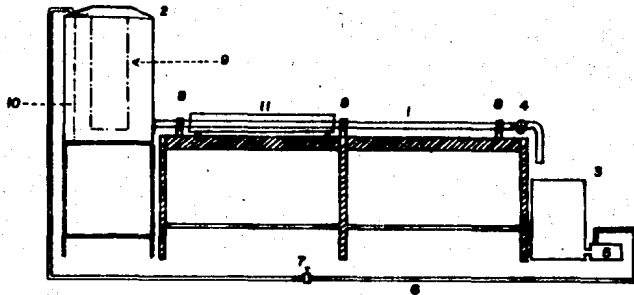


Figura 4.1 Dispositivo experimental. 1) Tubo de vidrio 2) Depósito de agua 3) Colector de agua 4) Control del flujo 5) Bomba de agua 6) Manguera de plástico 7) Llave de paso 8) Bases de madera para nivelar el tubo 9) Ventana de observación 10) Barrera contra perturbaciones 11) Caja de acrílico con agua para fotografía y video.



## 4.2 Descripción

### 4.2.1 El depósito de agua

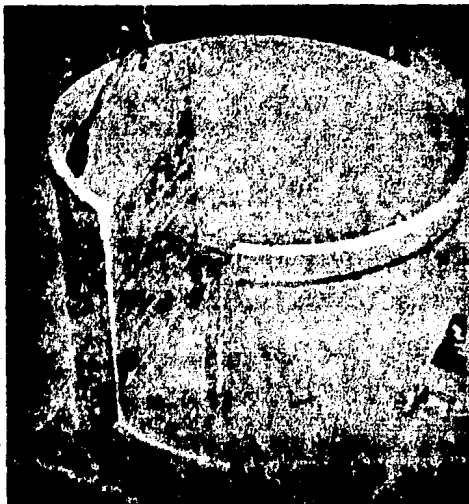
Contrario al dispositivo de Reynolds se eligió que la mayor parte del tubo estuviera fuera del depósito, ya que en la práctica esta disposición permite utilizar distintos métodos de visualización para los cuales se requiere que los instrumentos de medición o de captación de imágenes sean colocados muy cerca del tubo. Por otra parte, mientras más grande es el depósito, la variación de la temperatura del agua debido a cambios ambientales o a la recirculación es más lenta; además el nivel del agua no cambia muy rápido y el control del mismo no resulta tan complicado.

Para el depósito de agua se utilizó un tinaco con capacidad de 200 litros; realizándose las modificaciones siguientes (figura 4.2 en la página siguiente):

- Una ventana rectangular a lo largo del tinaco para observar el interior.
- Una barrera en el interior con el fin de reducir las perturbaciones producidas por la recirculación y mantener tranquila el agua cerca de la entrada del tubo. Inicialmente la barrera estaba formada por placas de vidrio colocadas verticalmente una sobre otra y separadas un centímetro, excepto a la altura de la entrada donde la separación era de medio centímetro. Posteriormente se bloqueó esta última y se pegaron tiras de esponja en las restantes para que el agua pase lentamente a través de ellas. La barrera divide al depósito en la sección de recirculación (donde el agua vuelve al tinaco) y la sección de entrada (donde el agua entra al tubo). En la sección 5.1.1 se menciona el funcionamiento de esta barrera.

### 4.2.2 El tubo

Uno de los factores que influyeron en la elección del diámetro ( $D$ ) del tubo fue el gasto proporcionado por una altura fija del nivel de agua en el depósito. Considerando flujo laminar el gasto es proporcional a  $D^4$  e inversamente proporcional a la longitud ( $L$ ), un tubo grueso



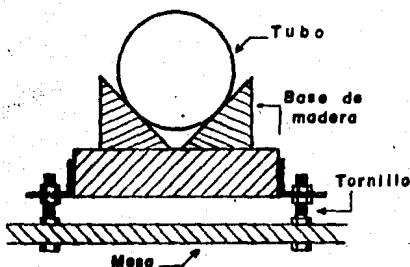
**Figura 4.2** Depósito de agua con capacidad de 200 litros con las modificaciones realizadas: Barrera para evitar que la recirculación perturbe el agua que entra al tubo y ventana de observación.

( $\sim 10$  cm) y una longitud regular ( $\sim 3$  metros) implica una altura pequeña del nivel de agua en el depósito para obtener un gasto pequeño, pudiendo ocasionar entre otros problemas la entrada del aire al tubo. La válvula al final del tubo puede permitir una altura mayor, pero tal vez el intervalo de abertura de la primera antes de la transición turbulenta quede muy reducido. Un diámetro muy pequeño requiere de una altura de agua grande para permitir la transición a la turbulencia (quizás mayor de la que proporciona el depósito).

El tubo del dispositivo tiene un diámetro interior de 3.06 centímetros. La longitud total (4 metros aproximadamente) quedó determinada al soldar los cuatro tramos disponibles en ese momento. Se procuró que las uniones fueran lo más suaves posible, éstas se localizan a 90, 200

y 310 centímetros a partir de la entrada. En la sección 5.1.5 se trata sobre el comportamiento del flujo en las uniones.

El tubo descansa sobre tres bases de madera atornilladas a dos mesas y separadas aproximadamente 2 metros una de otra (figura 4.3). El propósito de estas bases es nivelar el tubo tanto horizontal como verticalmente. La nivelación vertical del tubo se realizó llenando parcialmente con agua al tubo y alzando o bajando las bases hasta que el nivel del agua junto a las bases fue el mismo respecto a la parte inferior del tubo. La alineación horizontal quedó determinada casi en su totalidad por la rigidez del tubo al soldarse los cuatro tramos, existiendo una ligera libertad para doblarse. La alineación final se consiguió con las bases.



**Figura 4.3** Bases de madera sobre las que descansa el tubo. Los tornillos sirven para nivelar el tubo verticalmente.

Debido a la deformación existente al observar el interior de un cuerpo lleno de agua — ó a través de él — cuya superficie no es plana fue necesario, sobre todo para tomar fotografías e imágenes de video, encerrar los dos primeros metros del tubo en una caja de acrílico llena de agua a temperatura ambiente.

#### 4.2.3 El control del flujo

Uno de los problemas del dispositivo era la existencia de burbujas atrapadas cada vez que se llenaba el tubo, cuya solución consistió en dejar que el flujo sacara dichas burbujas. La

primer válvula que se utilizó como control de flujo no permitió lo anterior, problema que se resolvió con una válvula de compuerta. En este tipo de válvula el paso del agua es en forma de media luna comenzando de la parte inferior; completamente abierta la válvula tiene un diámetro aproximado al del tubo. Por cuestiones de peso ésta se conectó horizontalmente al tubo, de manera que el paso del agua es lateral. El comportamiento cerca de la válvula se menciona en la sección 5.1.5.

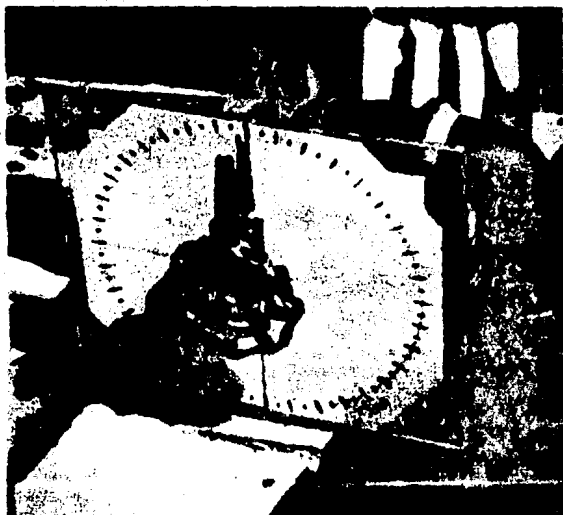
Como la finalidad de la válvula es controlar el flujo en el tubo, es necesario que la magnitud del gasto pueda elegirse libremente cuando la altura del nivel de agua en el depósito se mantiene constante. Por este motivo se colocó atrás de la llave de la válvula un círculo dividido en intervalos de cinco grados, de manera que la abertura de la válvula se mide en términos de vueltas de la llave (figura 4.4 en la página siguiente). Se busca establecer una relación entre el gasto y la abertura de la válvula, siempre y cuando el primero sea reproducible; es decir, que para determinada abertura el error en el gasto sea pequeño. En la sección 5.1.3 se mencionan los resultados obtenidos sobre la reproducibilidad del gasto y el error involucrado.

#### 4.2.4 El mecanismo de recirculación

El transporte del agua desde el colector se realiza por medio de una bomba conectada exteriormente a éste, enviándola al depósito a través de una manguera de plástico (figura 4.1). Un poco antes del depósito está conectada a la manguera una llave de paso para controlar el gasto de la bomba, dejando pasar el agua necesaria para compensar el gasto que fluye en el tubo y mantener la altura constante. Su eficiencia se menciona en la sección 5.1.2.

#### 4.2.5 Modificaciones en la entrada

Al realizar pruebas de visualización siguiendo el método de Reynolds se observó que el filamento de colorante en algunas ocasiones se desplazaba hacia la pared del tubo en los primeros centímetros de la entrada, indicando que el flujo no era suficientemente uniforme (paralelo al eje del tubo) aun a gastos pequeños. Con el propósito de evitar este comportamiento se introdujo en la entrada un mazo de popotes de 3 milímetros de diámetro y



**Figura 4.4** Válvula de compuerta utilizada para el control del flujo. El círculo dividido en grados se utiliza para establecer una relación entre la abertura de la válvula (medida en términos de la posición de la llave) y el gasto proporcionado al mantener el nivel del agua constante en el depósito.

7 centímetros de largo<sup>1</sup> (figura 4.5 en la página siguiente). Con ello se observó un ligero aumento del gasto para el cual el flujo permanece tranquilo (sección 5.1.4), sin embargo no se consiguió solucionar del todo el problema. La segunda parte de la solución fue instalar una boquilla en la entrada, (figura 4.5); con ésta se obtuvo otro ligero aumento en el gasto, (sección 5.1.4), lográndose además solucionar el problema en forma satisfactoria para el segundo método de visualización empleado, (sección 4.3). En la sección 5.1.6 se menciona un inconveniente del mazo de popotes para el uso de colorante en la visualización del flujo.

<sup>1</sup> Este tipo de estructuras, así como una contracción en la sección transversal, son de uso frecuente para obtener un flujo uniforme.

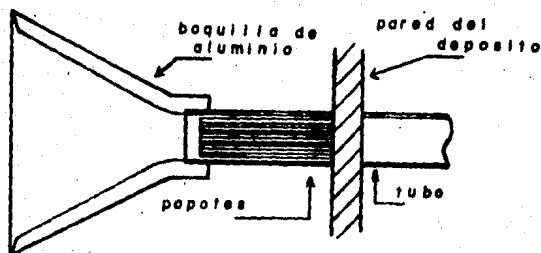


Figura 4.5 Boquilla de aluminio y mazo de popotes instalados en la entrada del tubo para lograr un flujo más uniforme

### 4.3 Visualización del flujo

#### 4.3.1 Breve introducción [9]

Los métodos más populares y sencillos para visualizar flujos consisten en introducir sustancias ajenas en el fluido y observar su movimiento en conjunto o individualmente. En el primer caso las componentes de las sustancias son mucho muy pequeñas para poder distinguirlas (el humo o algún colorante, por ejemplo); en consecuencia estas sustancias no se mezclan en todo el fluido, sino que se introducen la mayoría de las veces en forma de filamentos muy lejos de la región que se estudia, observándose posteriormente como se deforman debido a la presencia de un obstáculo en dicha región o al movimiento del fluido mismo. Para el segundo caso se utilizan partículas inmersas en todo el fluido, observando su movimiento por medio de la luz que dispersan. Las características que deben poseer estas sustancias para una buena visualización son: 1) tener prácticamente la misma densidad del fluido para que no modifiquen el flujo. En el caso de partículas se pide además que su tamaño no sea muy grande (desde 1 micra hasta 1 milímetro), y así también su concentración; 2) tener buena visibilidad; 3) en el caso del uso de humo o colorante se pide que éstos no se mezclen rápidamente con el fluido para que los filamentos se conserven nítidos al llegar a la región de estudio.

La finalidad de los métodos de visualización es obtener características del flujo tales como:

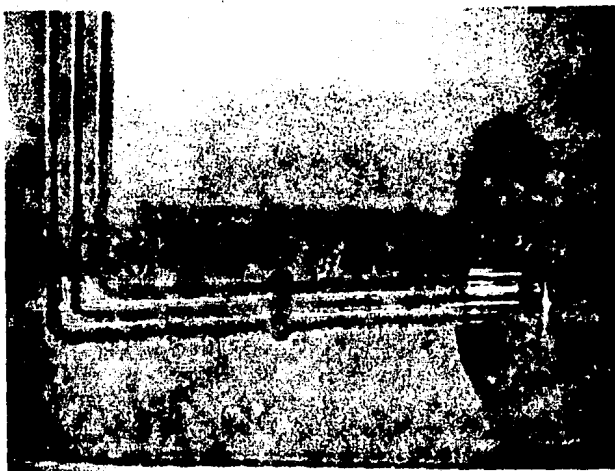
- Líneas de corriente, que se definen como las líneas tangentes a la velocidad del flujo.
- Líneas de emisión, las que están formadas por toda partícula del fluido que en algún instante de su movimiento estuvo, está o estará en una posición determinada del flujo.
- Líneas de trayectoria, las que consisten de todos los puntos del flujo en los cuales cierta partícula del fluido estuvo, está o estará al moverse. Con estos tres tipos de líneas se obtiene solamente la dirección del fluido.
- Distribución de los parámetros que caracterizan al flujo, entre ellos la velocidad y la densidad.
- Origen y desarrollo de turbulencia.

#### 4.3.2 Métodos empleados

El primer método fue introducir un colorante en la entrada del tubo por medio de tres tubos de vidrio (5.5 mm diámetro exterior) doblados en forma de "L" y agujas de jeringa en sus extremos cortos. Estos tubos se colocaron enfrente de la entrada del tubo de manera que las agujas quedaran justo en la entrada de los popotes (figura 4.6 en la página siguiente). El otro extremo de los tubos inyectores se conectó a un depósito de colorante colocado sobre la tapa del depósito de agua. El flujo de colorante se controló con una pinza en la manguera que une al depósito con los tubos. Es necesario controlar la velocidad con la que sale el colorante para que sea igual a la velocidad del flujo en la entrada y mantener filamentos bien definidos y visibles; una diferencia en estas velocidades ocasiona que el colorante se mezcle con el fluido desde el momento en que sale de las agujas.

Como colorantes se utilizaron permanganato de potasio y colorante artificial para alimentos disueltos en agua, y lápiz tinta<sup>2</sup>. Para que el colorante tuviera una precipitación muy lenta y a la vez buena visibilidad se hicieron algunas pruebas de disolución dejando caer gotas

<sup>2</sup> Se le llama de esa manera porque el grafito contiene una sustancia que al contacto con el agua se disuelve tiñéndola de un color morado.



**Figura 4.6** Mecanismo utilizado para inyectar el colorante en la entrada. Los tubos tienen un diámetro exterior de 5.5 mm. En el extremo corto están pegadas agujas de jeringa (no se muestran) de 0.75 mm de diámetro exterior. El extremo largo está conectado a un depósito de colorante sobre la tapa del depósito de agua.

del colorante en un poco de agua. Las cantidades aproximadas por cada litro de agua son: 4 ml. para el colorante y 1 gr. de permanganato de potasio. El lápiz tinta no se utilizó disuelto en agua, sino que se suspendieron trozos del mismo enfrente de la entrada por medio de un alambre delgado (figura 4.7 en la página siguiente). El motivo por el que se usó de esa manera se debe a una prueba realizada suspendiendo un trozo de lápiz tinta en un vaso con agua. Al inicio el colorante generado permaneció rodeando al trozo, posteriormente comenzó a precipitarse al aumentar su concentración; se considera entonces que, debido a la succión del tubo, el colorante que penetra en él tiene poca precipitación.

El segundo método se descubrió pensando en partículas inmersas en el fluido y que dis-





Figura 4.7 Trozo de lápiz tinta suspendido por medio de un alambre delgado frente a la entrada del tubo.

persen la luz preferentemente en una dirección. Al cambiar su orientación a medida que se desplazan dispersarán la luz en diferentes direcciones, distinguiéndose en el flujo regiones más brillantes que otras. Al realizar una prueba con shampoo para el cabello disuelto en agua se observó el efecto deseado. Posteriormente se realizaron pruebas para conocer la cantidad mínima necesaria para distinguir las regiones brillantes claramente. El resultado fue una concentración de 0.75 ml de shampoo por cada litro de agua. La cantidad equivalente de shampoo utilizado en el depósito es de 150 mililitros en 200 litros de agua, aproximadamente. Debido a la concentración de shampoo se considera que el cambio en la viscosidad del agua es pequeño y a lo más está dado por la relación de Einstein

$$\eta = \eta_0 \left( 1 + \frac{5}{2} \phi \right),$$

donde  $\eta$  es la viscosidad efectiva,  $\eta_0$  la viscosidad del fluido original (en este caso el agua) y  $\phi$  es el cociente entre el volumen total de las partículas inmersas y el volumen total de la suspensión [6]. Con la cantidad de shampoo que se utiliza el valor para  $\phi$  es de 0.00075 y la viscosidad efectiva es  $\eta = \eta_0(1.00187)$ , es decir una variación del 0.2%. La variación de la densidad está dada por

$$\frac{\delta\rho}{\rho_a} = 0.00075 \left( \frac{\rho_s}{\rho_a} - 1 \right),$$

donde  $\rho_s$  es la densidad del shampoo y  $\rho_a$  la densidad del agua. La densidad del shampoo es aproximadamente de  $(1.1 \pm 0.1) \text{ grs/cm}^3$ , por lo que se tiene una variación del 0.015%.

### Resultados

En la primera sección se menciona el comportamiento de los elementos que constituyen el dispositivo experimental y algunos inconvenientes de los métodos de visualización empleados. En la segunda sección se describe la transición a la turbulencia utilizando shampoo para la visualización del flujo, y en la tercera sección se reporta el número de Reynolds crítico para el dispositivo.

#### 5.1 Funcionamiento del dispositivo experimental

##### 5.1.1 Eficiencia de la barrera en el depósito

Para determinar el funcionamiento de la barrera mientras fluye agua a través del tubo se dejan caer en la sección de entrada del depósito trozos de permanganato de potasio, marcando su trayectoria con líneas de color morado. Frente a la entrada del tubo estas líneas se deforman rápidamente debido a la succión, mientras que en otras partes la deformación es más lenta; excepto muy cerca de las tiras de esponja. Lo anterior indica que el agua no está completamente tranquila, existiendo un leve flujo en la sección de entrada. Aunque parte del flujo se origina por el paso del agua a través de la barrera, la succión en la entrada contribuye a que éste sea mayor; enviando con la bomba agua coloreada estando la válvula cerrada, el color tarda en alcanzar la entrada del tubo, y al llegar allí se observa muy tranquilo. Lo conveniente es que el flujo debido a la recirculación y el provocado por la succión sean independientes, para lo cual se necesita que la entrada del tubo y la barrera estén más alejadas (la separación entre éstas es de 40 cm aproximadamente).

##### 5.1.2 Eficiencia de la recirculación

El motivo para utilizar recirculación es mantener el nivel del agua constante el mayor tiempo posible una vez fija la abertura de la válvula. Como esta última controla el gasto en

el tubo y la llave de paso el gasto de la bomba, se esperaría que a cada abertura de la válvula correspondiera una abertura de la llave de paso, sin embargo esto no es posible en la práctica, pues la llave de paso no permite diferenciar gastos de la bomba correspondiente a aberturas contiguas de la válvula; en consecuencia es necesario corregir cada cierto tiempo el gasto de la bomba. Sin esta corrección la altura del agua se mantiene constante ( $\pm 0.1$  cm.) máximo durante dos minutos aproximadamente. Un inconveniente del uso de la recirculación es que la temperatura del agua varía lentamente debido a la agitación producida por la bomba.

### 5.1.3 Reproducibilidad del control de flujo

La finalidad de buscar una relación entre la abertura de la válvula y el gasto proporcionado es no tener que medir directamente el gasto en cada ocasión y entonces conocer el número de Reynolds. Para determinar la reproducibilidad de la válvula se realizaron medidas del gasto al final del tubo a partir del tiempo que tarda en llenarse cierto volumen cuando el nivel del agua se mantiene constante. El volumen empleado fue de  $(1800 \pm 30)$  ml. medidos en un vaso de precipitado, la altura del agua en el depósito de  $(30 \pm 0.2)$  cm. y el tiempo se midió con un cronómetro analógico (0.2 segundos mínima escala). Para cada abertura de la válvula se realizaron 15 mediciones del gasto, considerando suficiente esa cantidad ya que, al realizar 50 la primera vez, el error que se obtuvo para el tiempo era parecido al error considerando las primeras 15 de esas 50.

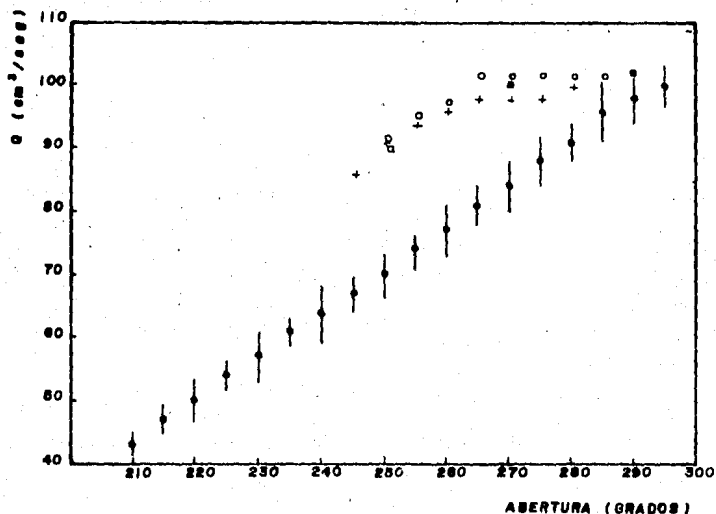
En la tabla 5.1 se muestran los gastos obtenidos para cada abertura de la válvula en términos de la posición de la llave ( $P$ ), y ésta se determinó por medio del círculo dividido en intervalos de 5 grados. El punto de referencia se eligió arbitrariamente en el intervalo donde la válvula permanece cerrada. Respecto a este punto el agua comienza a fluir para  $P \sim 160$  y la válvula está completamente abierta para  $P \sim 2160$  (equivalente a seis vueltas de la llave). La posición de la llave abarca desde flujo muy tranquilo hasta flujo completamente turbulento y se varió en intervalos de cinco grados. Debido al leve calentamiento producido por la recirculación, el intervalo total de temperatura en el que se realizaron las mediciones fue de  $19^{\circ}\text{C} - 23^{\circ}\text{C}$ , sin apreciarse una diferencia en el gasto para cada temperatura. El valor de  $Q$  en la tabla es el promedio aritmético de los gastos medidos y el error se obtiene a

partir de los errores de estos últimos. El número de Reynolds para cada gasto en la tabla 5.1 corresponde a una temperatura de 20°C considerando agua, pues se desea conocer el error involucrado al medir este parámetro con la abertura de la válvula conociendo de antemano la temperatura; además, al considerar la variación de  $\eta$  debido al shampoo (0.2%) en el cálculo de  $\mathcal{R}$ , los valores obtenidos están contenidos dentro del intervalo de error de los valores de  $\mathcal{R}$  en la tabla 5.1.

$P$	$Q$ (cm <sup>3</sup> /s)	$\mathcal{R}$	$P$	$Q$ (cm <sup>3</sup> /s)	$\mathcal{R}$
210	43 ± 2.5	1780 ± 105	255	74 ± 2.5	3070 ± 105
215	47 ± 2.5	1950 ± 105	260	77 ± 4.2	3190 ± 180
220	50 ± 3.5	2070 ± 150	265	81 ± 3.1	3360 ± 135
225	54 ± 2.1	2240 ± 95	270	84 ± 3.9	3480 ± 165
230	57 ± 3.9	2360 ± 165	275	88 ± 4.1	3650 ± 175
235	61 ± 1.8	2530 ± 80	280	91 ± 3.0	3770 ± 130
240	64 ± 4.8	2650 ± 205	285	96 ± 5.0	3980 ± 210
245	67 ± 2.7	2780 ± 115	290	98 ± 4.1	4060 ± 175
250	70 ± 3.6	2900 ± 155	295	100 ± 3.2	4140 ± 140

**Tabla 5.1** Gasto  $Q$  y número de Reynolds  $\mathcal{R}$  para cada abertura de la válvula. El intervalo de temperatura en el que se realizaron las mediciones del gasto fue de 19° - 23° centígrados.  $\mathcal{R}$  se considera para agua a 20°C. La incertidumbre de  $P$  es de ±0.5.

Aunque los errores obtenidos para el gasto y el número de Reynolds no son muy grandes (7.5% máximo), son suficientes para que los datos se intercalen. Como el error de  $\mathcal{R}$  lo determina el error del gasto, es conveniente medir este último por otros métodos donde se obtengan errores más chicos y así obtener la relación buscada. La gráfica 5.1 indica una dependencia lineal entre el gasto y la posición de la llave, y por tanto entre ésta y el número de Reynolds. La parte superior de la gráfica muestra el gasto que se midió al cerrar poco a poco la válvula a partir de flujo completamente turbulento hasta llegar a flujo laminar. Las veces que se realizó el proceso se midió un gasto ligeramente mayor al cerrar por primera vez un paso la válvula, disminuyendo posteriormente a medida que la válvula se cerraba. Este comportamiento podría explicarse por el juego de la válvula (un leve grado de libertad de la llave sin que la válvula se abra o cierre). No se realizó el mismo proceso de cerrar la válvula cuando el flujo aún no era turbulento.



Gráfica 5.1 Relación entre la posición de la llave y el gasto obtenido. Los puntos de la parte inferior corresponden al gasto medido al abrir poco a poco la válvula desde un flujo muy tranquilo hasta flujo completamente turbulento. Los puntos de la parte superior corresponden al gasto medido al cerrar poco a poco la válvula una vez que el flujo es totalmente turbulento. Las mediciones se realizaron en un intervalo total de temperatura entre 19° y 23° centígrados.

#### 5.1.4 Perturbaciones de entrada

En el capítulo 4 se menciona que con los popotes y la boquilla se notó un ligero aumento en el gasto para el cual el flujo aún es tranquilo, lo que indica que el flujo en la entrada cambió por la presencia de esas modificaciones, probablemente siendo más uniforme; sin embargo se observan pequeñas perturbaciones ondulatorias en los primeros centímetros después de los popotes. Podría pensarse que éstas se deben al flujo provocado por la recirculación en la sección de entrada (sección 5.1.1); sin embargo en pruebas realizadas dejando reposar el agua

algunas horas o de un día a otro también se observan dichas perturbaciones, por lo que su existencia se atribuye a los popotes. Lo anterior puede explicarse por el hecho de que el espacio entre los popotes es más reducido que su diámetro, en consecuencia el agua que pasa por esos espacios tiene una velocidad menor de la que fluye por el interior de los popotes; esta diferencia de velocidades en la salida de los popotes produce pequeñas perturbaciones que son amplificadas posteriormente<sup>1</sup>. Para números de Reynolds bajos las perturbaciones se amortiguan a una distancia aproximada de 20 diámetros (60 cm.) a partir de la entrada, y a medida que  $\mathcal{R}$  aumenta las perturbaciones crecen un poco más, amortiguándose un poco más lejos de la entrada.

### 5.1.5 Comportamiento en el extremo de salida y en las uniones

En la sección 4.1.3 se menciona que la válvula permite la salida del agua lateralmente. Fue necesario, además, utilizar dos tramos cortos de tubo para conectarla. Por este motivo el aire atrapado al llenar el tubo no sale completamente, quedando una burbuja de aire grande en la conexión. A pesar de su presencia, y del hecho de que la salida del agua es lateral, no se observa que el flujo se altere aún a 10 centímetros de la conexión.

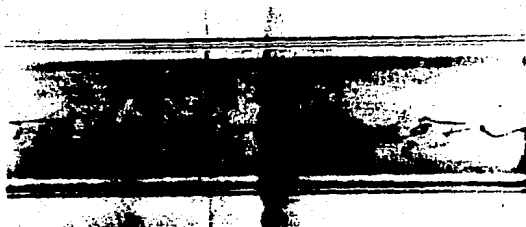
Al unir los tubos se recomendó que las uniones fueran lo más suaves posible, sin embargo presentan leves deformaciones. Para números de Reynolds bajos no se observa que las uniones alteren el flujo, es decir, que de ellas surjan pequeñas perturbaciones que se amortiguen posteriormente. Cuando  $\mathcal{R}$  alcanza el valor crítico las perturbaciones provenientes de la entrada están presentes cada vez que se inicia la turbulencia. En algunas ocasiones el nacimiento de la turbulencia ocurre un poco después de la primera unión o de la segunda; en otras ocasiones la turbulencia se inicia entre estas dos uniones sin que haya sido provocada por una perturbación proveniente de la primera. Por lo tanto, lo peor que puede pasar es que las uniones contribuyan un poco a que las perturbaciones de la entrada provoquen turbulencia.

---

<sup>1</sup> Este tipo de inestabilidad se conoce inestabilidad de flujo cortante, que se caracteriza porque la velocidad varía en dirección perpendicular a la dirección del flujo [12]

### 5.1.6 Eficiencia de la visualización

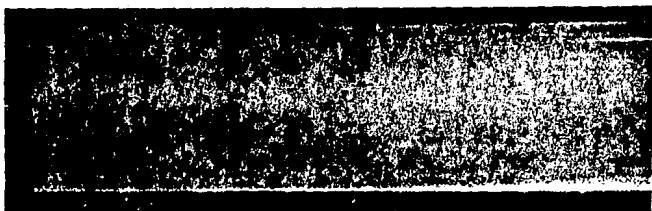
Como consecuencia de que el depósito de colorante se coloca por encima del nivel de agua es necesario controlar la velocidad con la que se inyecta el colorante (sección 4.2.2). Con la pinza que se utilizó, resultó muy difícil en la práctica el control cuando el flujo era muy lento, obteniéndose algunas veces filamentos un poco difusos. Cuando el flujo era más rápido la pinza ya no se utilizaba, pues la velocidad de salida del colorante era suficiente para obtener filamentos nítidos. Por otra parte la existencia de perturbaciones en la entrada no permite una buena visualización con líneas de colorante, pues éstas se desvanecen conforme avanzan debido a la distorsión provocada por las perturbaciones y por la distribución de velocidades en la sección transversal (figura 5.1).



**Figura 5.1** Líneas de lápiz tinta a 35 cm. de la entrada distorcionadas por las perturbaciones de entrada. El flujo es de izquierda a derecha y todavía estable ( $R \sim 3000$ ).

El uso de shampoo no tiene este inconveniente pues está completamente diluido en el agua, de manera que lejos de la entrada (1.5 metros aproximadamente) el flujo se observa homogéneo (figura 5.2 página siguiente). La ventaja que ofrece el shampoo es la visualización del flujo en todo el tubo, observándose perfectamente donde se origina la turbulencia. Las





**Figura 5.2** Fotografía de una región laminar en la fase intermitente a 190 cm. de la entrada ( $Re \sim 3600$ ). El flujo es de izquierda a derecha. Cuando el número de Reynolds es menor que el valor crítico el flujo se observa igual que como se muestra en la figura. Para esta fotografía y las siguientes la iluminación fue trasera cargada a la derecha, por lo que las imágenes son más claras en el lado derecho; además se colocó un fondo oscuro. Como se explicó en la sección 4.3.2 las partículas de shampoo dispersan la luz preferentemente en una dirección. Cuando el flujo es laminar las partículas se orientan en la dirección del flujo, de manera que éste se observa homogéneo. Cuando el flujo es turbulento la orientación de las partículas varía continuamente dispersando la luz en diferentes direcciones, de manera que se observan zonas un poco más brillantes que las zonas donde el flujo es laminar. El contraste entre estas zonas se mejoró por medio de digitalización oscureciendo las zonas menos brillantes.

burbujas ocasionadas por el uso de shampoo no es un problema serio pues su acumulación es muy lenta, sobre todo después de eliminar la espuma en el colector.

## 5.2 Transición a la turbulencia

Cuando el número de Reynolds alcanza el valor crítico aparecen algunas perturbaciones que siguen creciendo a medida que avanzan (figura 5.3 y figura 5.4 página siguiente). Cuando estas perturbaciones llegan a la pared el flujo cerca de la misma comienza a mezclarse repentinamente (figura 5.5 página 64). Este mezclado se extiende rápidamente hacia el centro originándose una región turbulenta en toda la sección del tubo limitada por regiones de flujo laminar.

Debido a la distribución de velocidades en el momento de formarse esta región, la parte delantera es un poco alargada en el centro; en realidad ésta no consiste de flujo turbulento,



**Figura 5.3** Fotografía de una perturbación a 150 cm. de la entrada que posteriormente originó turbulencia ( $\mathcal{R} \sim 3600$ ). El flujo es de izquierda a derecha.



**Figura 5.4** Fotografía de una perturbación a 190 cm. de la entrada un poco antes de que origine turbulencia ( $\mathcal{R} \sim 3600$ ). El flujo es de izquierda a derecha.

sino más bien de los residuos de la perturbación (por llamarlos de alguna manera), en los que aparentemente se observa una ligera tendencia por amortiguarse. Un poco después (donde la turbulencia prácticamente abarca toda la sección transversal) se observa que el mezclado es muy notable, lo que indica que el flujo se está transformando en turbulento; lo mismo sucede en la interfase trasera (figura 5.6 página siguiente), donde se observa que el mezclado se origina en las paredes. Esta interfase viaja con una velocidad menor a la velocidad media del flujo, por lo que la región turbulenta crece continuamente a medida que se aleja de la entrada. Para la interfase delantera resulta más difícil observar si la velocidad con la que viaja es mayor que la velocidad media, aunque se supone que debe ser así puesto que continuamente el flujo



**Figura 5.5** Fotografía de turbulencia en el momento en que se origina a 190 cm. de la entrada ( $\mathcal{R} \sim 3600$ ). El flujo es de izquierda a derecha.



**Figura 5.6** Fotografía de la interfase trasera de una zona turbulenta a 190 cm. de la entrada ( $\mathcal{R} \sim 3600$ ). El flujo es de izquierda a derecha.

laminar que la antecede se transforma en turbulento.

Posteriormente surge otra región turbulenta, existiendo entre ambas una zona de flujo laminar (figura 5.2 página siguiente). Dependiendo de la frecuencia con la que aparecen, esta zona puede alcanzar a la primera formándose una región mayor. Al aumentar el número de Reynolds las zonas turbulentas surgen con mayor frecuencia, hasta que llega el momento en que todas las perturbaciones originan flujo turbulento.

En la sección 5.1.4 se menciona que las perturbaciones se amortiguan a cierta distancia a partir de la entrada y que crecen un poco más a medida que el número de Reynolds au-

menta; sin embargo cuando  $\mathcal{R}$  alcanza el valor crítico no todas las perturbaciones originan turbulencia. Esto indica que, aunque aparentemente las perturbaciones se ven iguales, de vez en cuando aparecen unas que son amplificadas más que las otras, creciendo lo suficiente para originar turbulencia. Puede decirse que dichas perturbaciones poseen cierta característica (la frecuencia, por ejemplo) que permite la amplificación. La aparición de estas perturbaciones es más frecuente al aumentar el número de Reynolds, lo que puede explicarse porque el rango de las perturbaciones que pueden ser amplificadas aumenta. Para asegurar lo anterior deben realizarse observaciones con un método para producir perturbaciones con características determinadas.

La región del tubo donde se originan las zonas turbulentas está entre los 30 y 73 diámetros (90 y 200 cm.) a partir de la entrada, más allá es muy poco probable que surjan pues mientras más lejos las perturbaciones se amortiguan más; además, podría decirse que el perfil de velocidades se aproxima cada vez más al perfil de Poiseuille, el cual posee una estabilidad grande. Considerando como límites para el establecimiento del flujo de Poiseuille las expresiones de Schiller y de Nikuradse (sección 1.3), un valor del número de Reynolds de 3500 (valor crítico para este dispositivo experimental, sección 5.3) y el diámetro del tubo (3.06 cm.), la distancia a la cual puede suceder lo anterior se encuentra entre 3.0 metros y 6.60 metros, respectivamente. El punto donde comienza la turbulencia depende de la amplificación de las perturbaciones y del lugar donde alcanzan la pared, localizándose preferentemente en la región mencionada anteriormente. Cuando esto sucede surgen perturbaciones cerca de la pared que son amplificadas posteriormente, lo anterior se debe a que el flujo cerca de la pared (capa límite) es perturbado y pierde su estabilidad volviéndose turbulento. Este flujo turbulento comienza a expandirse hasta cubrir toda la sección transversal originando una zona turbulenta.

### 5.3 Número de Reynolds crítico

Durante las mediciones del gasto para evaluar la reproducibilidad de la válvula se buscó determinar el valor del número de Reynolds para el cual el flujo pierde su estabilidad, observándose el flujo durante 2 minutos aproximadamente entre cada medición del gasto para cada abertura de la válvula a partir de  $P = 210$  hasta llegar a turbulencia continua. Se

reportan dos valores:  $\mathcal{R}_c$  cuando se observa surgimiento de turbulencia y comienza la fase intermitente, y  $\mathcal{R}_m$  cuando el flujo es completamente turbulento. En la sección 5.1.3 se menciona que el intervalo total de temperatura en el que se midió el gasto fue de  $19^\circ$ – $23^\circ$  centígrados. En cuatro ocasiones el inicio de la fase intermitente se observó a  $20^\circ$  centígrados, y en una ocasión a  $22^\circ$  y  $23^\circ$  centígrados. Como el cambio de  $\eta$  (2%), al variar la temperatura un grado centígrado en el intervalo anterior, es del orden de magnitud del error en el gasto, se dan los valores de  $\mathcal{R}_c$  y  $\mathcal{R}_m$  para cada una de las temperaturas anteriores (tabla 5.2). Se considera la viscosidad del fluido ( $\eta$ ) y su densidad igual a la del agua para cada temperatura [13] y se incluye en el error de  $\mathcal{R}$  la variación de  $\eta$  debido al shampoo, dada por la relación de Einstein (sección 4.2.2); la variación de la densidad por el shampoo se desprecia por ser pequeña comparada con la variación de la viscosidad y aun más comparada con el error del gasto. En términos del gasto  $Q$  el número de Reynolds está dado por  $\mathcal{R} = 4\rho Q/\pi\eta D$ , donde  $D$  es el diámetro del tubo. El valor del gasto  $Q_c$  cuando el flujo deja de ser estable se considera como el promedio aritmético entre  $Q_1$  (cuando el flujo aún es estable) y  $Q_2$  (cuando se observa el nacimiento de turbulencia), y el error se obtiene del error de éstos. De manera análoga se considera el gasto  $Q_m$  cuando el flujo es completamente turbulento.

$T$ ( $^\circ\text{C}$ )	$Q_c$ ( $\text{cm}^3/\text{s}$ )	$\mathcal{R}_c$	$Q_m$ ( $\text{cm}^3/\text{s}$ )	$\mathcal{R}_m$
20	$85.5 \pm 3.3$	$3545 \pm 150$	$93.5 \pm 4.6$	$3875 \pm 200$
20	$86.0 \pm 3.8$	$3560 \pm 170$	$96.0 \pm 3.1$	$3980 \pm 140$ ●
20	$85.5 \pm 3.5$	$3545 \pm 155$	$94.0 \pm 4.1$	$3895 \pm 180$
20	$85.0 \pm 5.1$	$3520 \pm 220$	$99.0 \pm 4.2$	$4200 \pm 200$
22	$83.5 \pm 3.7$	$3630 \pm 170$	$95.0 \pm 3.2$	$4130 \pm 150$
23	$79.0 \pm 5.1$	$3520 \pm 240$	$92.5 \pm 4.5$	$4120 \pm 210$

**Tabla 5.2** Números de Reynolds:  $\mathcal{R}_c$  cuando el flujo deja de ser estable y  $\mathcal{R}_m$  cuando la turbulencia es continua. También se muestran los gastos asociados a cada uno de ellos.

Los valores de  $\mathcal{R}_c$  obtenidos a  $20^\circ\text{C}$  y  $23^\circ\text{C}$  son casi iguales, no así el correspondiente a  $22^\circ\text{C}$ , atribuyéndose esta ligera diferencia a la variación en la medición del gasto en esa ocasión, aunque con el error este valor es el mismo. La determinación del momento en que el flujo se convertía totalmente en turbulento no se pudo distinguir, en términos de abertura de

la válvula, tan bien como el inicio de la fase intermitente, por lo que los valores obtenidos para  $\mathcal{R}_m$  varían un poco más; considerando el error estos valores se intercalan. Se considera el valor de  $\mathcal{R}_c$  y de  $\mathcal{R}_m$  como el promedio aritmético de los valores obtenidos para 20°C anteriores, de manera que

$$\mathcal{R}_c = 3540 \pm 240 \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_m = 4010 \pm 335.$$

Estos también se intercalan debido al error que se obtiene al medir el gasto y la manera en que se considera  $Q_c$ .

El inicio de la fase intermitente no se observó siempre para una misma abertura de la válvula. Para el valor menor de  $P$  (es decir, de  $Q_2$ ) el surgimiento de turbulencia fue menos frecuente que en el valor mayor. El valor menor de  $P$  (265) corresponde a una temperatura de 23°C y el mayor (275) a temperatura de 20°C. Puede pensarse que para 20°C el surgimiento de turbulencia haya ocurrido a valores menores de  $P$  y no se haya observado por estar midiendo el gasto. En observaciones realizadas a 20°C sin medir el gasto el flujo permaneció estable para  $P = 270$  y se observó surgimiento de turbulencia para  $P = 275$ . A estos valores les corresponden gastos de  $Q_1 = (84 \pm 3.9) \text{cm}^3/\text{s}$  y  $Q_2 = (88 \pm 4.1) \text{cm}^3/\text{s}$  (tabla 5.1), de manera que  $Q_c = (86 \pm 6.1) \text{cm}^3/\text{s}$ . El valor de  $\mathcal{R}_c$  en este caso es de  $3560 \pm 260$ , que es análogo a los anteriores aunque con un error más grande debido a que el gasto se deduce a partir de la tabla 5.1 y no de una medición particular del gasto como en el caso de los valores de la tabla 5.2. Podría pensarse entonces que la diferencia entre los valores de  $P$  cuando se inicia la fase intermitente se debe a la diferencia de temperatura, aunque para asegurar lo anterior habría que trabajar en un intervalo más amplio.

En observaciones realizadas sin recirculación dejando reposar el agua unos 20 minutos el flujo se observó estable hasta una abertura correspondiente a  $P = 265$ , y se observó turbulencia para  $P = 270$ . Como el nivel de agua no era constante en esta ocasión, la válvula se abrió lentamente hasta llegar a una posición determinada, en ese momento el nivel variaba entre 30.5 cm. y 29.5 cm. El valor para  $Q_c$  es de  $(82.5 \pm 5.4) \text{cm}^3/\text{s}$ , al que corresponde un número de Reynolds  $\mathcal{R}_c = 3500 \pm 240$  a 21°C. Este valor es análogo a los de la tabla 5.2, y se debe al hecho de que en este caso también están presentes las perturbaciones en la entrada.

Una vez que el flujo fue totalmente turbulento en algunas ocasiones se cerró la válvula poco a poco hasta llegar a flujo estable. El gasto correspondiente en ese momento fue de  $(88.0 \pm 3.5) \text{ cm}^3/\text{s}$ , al que corresponde un número de Reynolds de  $3700 \pm 150$ . Considerando el error este valor está dentro del intervalo de error de  $\mathcal{R}_c$ , pero también dentro del error de  $\mathcal{R}_m$ , sin embargo estos valores son poco confiables debido al comportamiento de la válvula.

Finalmente, durante las primeras pruebas de visualización realizadas con líneas de colorante se intentó determinar el número de Reynolds cuando la entrada del tubo era recta. En esa ocasión todavía no se cambiaba el control del flujo, no había esponja en la barrera y el filamento se distorsionaba desde la entrada en la misma forma como lo hacen debido a las perturbaciones originadas por los popotes, indicando la presencia de perturbaciones en el flujo al entrar al tubo. El gasto se midió con un volumen menor (500 ml.), obteniéndose un valor de  $Q_c = (47 \pm 5.5) \text{ cm}^3/\text{s}$  para la transición a la turbulencia. Considerando un intervalo de temperatura ambiente entre  $20^\circ \text{C}$  y  $25^\circ \text{C}$ , ya que en esa ocasión no se registró la temperatura, el valor de  $\mathcal{R}_c$  es de  $2070 \pm 380$ . Excepto por el error, este valor es menor del que se reporta para entrada recta ( $\sim 2300$ ), lo que puede atribuirse a la presencia de las perturbaciones en la entrada; sin embargo no es confiable, pues el volumen utilizado fue más chico y la medición del gasto no fue muy meticulosa.

El valor obtenido para este dispositivo experimental es mayor en un 50% del valor establecido para entrada recta ( $\sim 2300$ ). Esta diferencia se atribuye a las modificaciones en la entrada, pues sin ellas, aunque no se midió el número de Reynolds, el flujo se observó estable hasta una abertura correspondiente a un valor de  $P = 245$ , al que corresponde un número de Reynolds de  $2780 \pm 115$  (tabla 5.1), el cual está más cercano al valor anterior.

Respecto al valor encontrado por Reynolds, el valor crítico en este dispositivo es mucho menor, atribuyéndose nuevamente esta diferencia a la existencia de las perturbaciones en la entrada, Reynolds procuró que las perturbaciones no existieran dejando reposar el agua, obteniendo un valor de  $\sim 13000$ . En otros experimentos se logra que el flujo permanezca estable a números de Reynolds más grandes al cuidar que no existan perturbaciones en la entrada. En este dispositivo  $\mathcal{R}_c$  es indiferente si se usa recirculación o si el agua permanece

en reposo, debido a que las perturbaciones provocadas por los popotes son la causa de la transición.

La determinación de  $\mathcal{R}_c$  se realizó en presencia de perturbaciones en la entrada, sin embargo es mayor, en un 75%, que el valor mínimo ( $\sim 2000$ ) experimental; puede decirse entonces que las perturbaciones presentes no son suficientemente grandes para originar turbulencia cuando  $\mathcal{R}$  es menor que 3280 (considerando el error de  $\mathcal{R}_c$ ). Otro valor de  $\mathcal{R}_c$  con perturbaciones en la entrada fue el que se midió durante las primeras pruebas de visualización siendo la entrada del tubo recta. Este valor incluye al valor mínimo dentro del intervalo de error, pero puede ser menor; sin embargo, volviendo a repetir, este valor no es confiable.



## Conclusiones y perspectivas

Se armó un dispositivo experimental con la finalidad inicial de utilizarlo para realizar pruebas con métodos de visualización.

- El funcionamiento de la barrera se considera aceptable puesto que el flujo provocado por la recirculación es muy lento.
- La manera en que el nivel de agua se mantiene constante no se considera aceptable pues es necesario estar regulando constantemente el gasto de la bomba.
- Aparentemente la reproducibilidad del control del flujo no es excelente ya que con los errores obtenidos en la medición del gasto los valores obtenidos para aberturas contiguas se intercalan y así también los números de Reynolds obtenidos a partir de los primeros; sin embargo los errores se atribuyen a la manera como se realizaron las mediciones del gasto.

El objetivo de la tesis fue caracterizar el flujo de Poiseuille en la transición a la turbulencia. Para visualizar el flujo se utilizaron dos métodos. Debido a las perturbaciones de entrada resulta difícil observar el surgimiento de turbulencia por medio de colorantes. El uso de shampoo ofrece la ventaja de visualizar el flujo en todo el tubo; sin embargo tiene la objeción de que la viscosidad del fluido puede ser alterada ligeramente. Es necesario, por lo tanto, determinar que tanto afecta el shampoo a la misma.

La transición a la turbulencia en el dispositivo experimental se debe principalmente a la amplificación de las perturbaciones provenientes de la entrada, aunque existe la posibilidad de que las uniones contribuyan a su desarrollo. El inicio de la turbulencia se debe a la perturbación de la capa límite cuando las perturbaciones provenientes de la entrada crecen hasta llegar a

la pared. La regiones turbulentas que se forman crecen a medida que avanzan debido a que el flujo laminar que la limita se transforma en turbulento. La aparición de estas zonas es más frecuente a medida que  $\mathcal{R}$  aumenta por lo que de manera cualitativa puede decirse que el factor de intermitencia aumenta con la distancia y con el número de Reynolds. La turbulencia surge preferentemente, en términos del diametro del tubo, entre 30 y 75 diámetros a partir de la entrada, antes de esa región las perturbaciones no han crecido lo suficiente, y después de la misma las perturbaciones ya se han amortiguado o no son suficientemente grandes para originar turbulencia.

El número de Reynolds crítico obtenido ( $\mathcal{R}_c = 3540 \pm 275$ ) difiere del valor encontrado por Reynolds debido a las perturbaciones causadas por los popotes y es mucho menor. Es mayor en un 50% que el valor establecido para entrada recta ( $\sim 2300$ ) debido a las modificaciones en la entrada. Se considera que las perturbaciones en la entrada no son suficientes para originar turbulencia a números de Reynolds menores que 3280 (valor mínimo de  $\mathcal{R}_c$  considerando el intervalo de error). Este valor es mayor en un 40% del valor mínimo  $\mathcal{R}_m \sim 2000$  para el cual el flujo permanece estable independientemente de las perturbaciones en la entrada.

Una de las perspectivas que se tienen para el dispositivo experimental es utilizarlo para calibrar un sistema de anemometría laser que muy pronto formará parte del equipo del Laboratorio de Fluidos. También se seguirá utilizando para realizar pruebas con métodos de visualización. Es conveniente, realizar algunas modificaciones para el funcionamiento óptimo del dispositivo, entre estas están:

#### 1) La barrera en el depósito

Para lograr que el agua cerca de la entrada esté completamente tranquila, sin cambiar el depósito de agua por uno más grande para que la entrada esté más lejos de la barrera, son necesarias algunas modificaciones en la sección de entrada. La más simple de ellas es bloquear completamente las separación entre las placas de vidrio y que el agua pase por la parte superior de la barrera. Para evitar perturbaciones provocadas por el escurrimiento el nivel de agua debe estar por encima de la barrera.

## 2) El mecanismo de recirculación

Es necesario modificarlo para tener mayor libertad de realizar observaciones prolongadas. La modificación más simple es mantener el gasto de la bomba constante y colocar un tubo en el depósito para sacar el agua excedente, aunque con ello no se elimina el problema del incremento en la temperatura provocada por la bomba; sin embargo, utilizar otro método donde la bomba se utilice solamente para enviar el agua que sale del tubo al drenaje limitaría considerablemente la visualización sólo al empleo de colorantes, lo que no es deseable.

## 3) El mazo de popotes

Aunque éstos funcionaron para el fin para el que fueron utilizados, quizás convenga más quitarlos definitivamente una vez realizadas las modificaciones en la barrera logrando que el agua en la sección de entrada esté completamente tranquila. Quizás sea más conveniente eliminar la pinza y colocar el depósito colorante de manera que el nivel del colorante sea un poco mayor que el de agua.

Conviene realizar, además, otras mediciones del gasto utilizando métodos en donde se obtengan errores más chicos. Uno de estos métodos es medir directamente velocidades en el flujo, para lo que se necesita que el nivel de agua permanezca constante por tiempos prolongados. Por el momento, debido a la relativa facilidad con la que puede medirse el gasto y al pequeño error que se obtiene en mediciones individuales, puede utilizarse este método para conocer el número de Reynolds. Si se desean realizar estudios más amplios sobre el flujo de Poiseuille, es conveniente que las uniones de los tubos sean mejores y aumentar la longitud del tubo para que el establecimiento del perfil parabólico pueda asegurarse.

## Bibliografía

- [1] Batchelor, G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press. (1974)
- [2] Currie, I.G. *Fundamental Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill. (1974)
- [3] Chandrasekhar, S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover Publications. (1981)
- [4] Drazin, P.G. & Reid, W.H. *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press. (1979)
- [5] Lamb, H. *Hydrodynamics*, Dover Publications. (1945)
- [6] Landau, L.D. & Lifschitz, E.M. *Fluid Mechanics*, Addison-Wesley. (1969)
- [7] Levi, E. *El agua según la ciencia*, volumen I. Serie D-24 Instituto de Ingeniería, UNAM. (1985)
- [8] Levi, E. *Mecánica de fluidos, Introducción teórica a la hidráulica moderna*, Facultad de Ingeniería, UNAM. (1965)
- [9] Merzkirch, W. *Flow Visualization*, Academic Press (1987)
- [10] Schlichting, H. *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill. (1968)
- [11] Streeter, N.L. & Wylie, E.B. *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill (1975)
- [12] Tritton, D.J. *Physical Fluid Dynamics*, Oxford University Press (1988)
- [13] *Handbook of Chemistry and Physics*, Edición 63 CRC Press Inc.