34
2 ej.

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Las ecuaciones de Serret-Frenet y sus soluciones con curvaturas constantes en la Relatividad Especial.

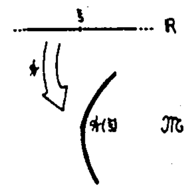
Tesis que presenta Alejandro Quevedo y Runne
como requisito necesario para obtener el título de físico.

México D.F. enero de 1990

Índice

Introducción

En la teoría de la Relatividad Especial suele enfatizarse la importancia de las descripciones invariantes, pero las fórmulas de Serret-Frénet rara vez se mencionan al desarrollar la mecánica de una partícula puntual. Se prescinde de ellas porque no son estrictamente equivalentes a la ecuación de movimiento, en un sentido que aclararemos luego. Sin embargo resultan útiles para calcular los movimientos acelerados más simples a modo de ejercicios de cinemática. Limitaremos nuestra atención al movimiento subluminal, además supondremos que las funciones son lo suficientemente bién comportadas como para derivarlas las veces que sea necesario. El apéndice sobre álgebras de Clifford es más un listado de resultados elementales que una exposición del tema. El propósito es aclarar la notación empleada y algunas ideas simples poco frecuentes en este contexto. Esto obedece al capricho de usar una descripción invariante al estilo del cálculo vectorial de J.W. Gibbs en el espacio-tiempo de Minkowski.

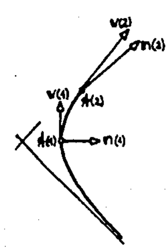


Las ecuaciones de Serret-Frenet

Llamaremos trayectorias a las curvas en el espacio-tiempo parametrizadas con la longitud y que posean tangentes siempre en direcciones temporaloides. Consideraremos sólo este tipo de curvas. Una trayectoria x es una función $x : \mathcal{J} \to \mathcal{M}$, $s \rightsquigarrow x(s)$, donde $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo de los números reales y $\mathcal{M}$ es el espacio-tiempo de Minkowski, cuyos elementos llamaremos eventos. Al derivar a x respecto a s (la longitud) obtenemos la velocidad de la trayectoria

$$v = \frac{dx}{ds}\,, \quad v : \mathcal{J} \to \mathcal{V} \tag{1}$$

donde $\mathcal{V}$ es el espacio vectorial tangente en $x(s)$. En adelante la derivada respecto a s la representaremos con un punto, así $v = \dot{x}$, etc. Aclarado lo anterior pasamos a las ecuaciones de Serret-Frenet,



$$\dot{v} = \kappa n \tag{2}$$
$$\dot{n} = \kappa v + \tau b \tag{3}$$
$$\dot{b} = -\tau n + \lambda t \tag{4}$$
$$\dot{t} = -\lambda b \tag{5}$$

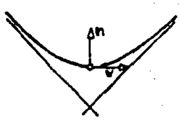
Las ecuaciones 2, 3 y 4 son las definiciones tanto de los vectores n, b y t como de las tres curvaturas κ, τ y λ, pues se estipula que los cuatro vectores v, n, b y t formen una base ortonormal. Por ello n, b y t son siempre vectores espacialoides, los llamaremos "normal", "binormal" y "trinormal" respectivamente. Las curvaturas son funciones positivas.

Es posible definir el último vector, t, basándose en una orientación de $\mathcal{V}$, así la tercera curvatura podría adquirir valores negativos (esto es lo usual en el caso euclideano tridimensional, donde el último vector $\vec{b}$ se construye mediante el producto vectorial $\vec{b} = \vec{v} \times \vec{n}$). No utilizaremos tal artificio aquí, pues introduce un elemento ajeno a la geometría de la curva, a saber: una orientación de $\mathcal{V}$.

$v^2 = n^2 = -1$

Si $\mathcal{A}$ no fuere una trayectoria v sería espacialoide y las ecuaciones de Serret-Frenet diferirían de 2 – 5 en los signos; para n también espacialoide tendríamos

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \qquad \kappa n \\ \dot{n} &= -\kappa v \qquad +\tau b \\ &\vdots \end{aligned}$$



$v^2 = -n^2 = -1$

y si n fuere temporaloide,

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \qquad \kappa n \\ \dot{n} &= \kappa v \qquad +\tau b \\ \dot{b} &= \qquad \tau n \qquad +\lambda t \\ &\vdots \end{aligned}$$

Si v fuere luminoide no habría una parametrización de $\mathcal{A}$ en términos de la longitud y además la primera ecuación del sistema podría tener una componente a lo largo de v, esto es, $\dot{v} = \alpha v + \kappa n$. En resumen, las ecuaciones 2 – 5 están asociadas a trayectorias.

El bivector de Darboux

El bivector de Darboux es

$$D = \kappa vn - \tau nb - \lambda bt \tag{6}$$

con él podemos escribir las ecuaciones 2 – 5 de la siguiente manera

$$\dot{v} = \tfrac{1}{2}(vD - Dv) = v \cdot D \qquad (7)$$
$$\dot{n} = \tfrac{1}{2}(nD - Dn) = n \cdot D \qquad (8)$$
$$\dot{b} = \tfrac{1}{2}(bD - Db) = b \cdot D \qquad (9)$$
$$\dot{t} = \tfrac{1}{2}(tD - Dt) = t \cdot D \qquad (10)$$

además la derivada de D es

$$\dot{D} = \dot{\kappa}\, vn - \dot{\tau}\, nb - \dot{\lambda}\, bt \qquad (11)$$

Aparentemente las ecuaciones $7-10$ son la versión desacoplada del sistema $2-5$, pero debemos ser cautos pues D está definido por la ecuación 6. Sin embargo cuando las curvaturas son funciones constantes el bivector D es constante también, entonces el sistema $7-10$ sí está desacoplado.

La formulación geométrica

Hemos partido de una trayectoria $\ast$ y definido los vectores v, n, b y t, y las curvaturas κ, τ y λ que satisfacen las ecuaciones $2-5$. Ahora invertiremos el planteamiento para dar la formulación geométrica. Consiste en lo siguiente:

Dadas tres funciones κ, τ y λ de $\mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$; un evento $p \in \mathcal{M}$; y una base ortonormal $\{v_0, n_0, b_0, t_0\}$ de $\mathcal{V}$, hallar la trayectoria $\ast : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{M}$ que cumple con,

1) las funciones κ, τ y λ son las curvaturas de $\ast$, es decir que los vectores v, n, b y t satisfacen las ecuaciones $2-5$, y

2) $\ast$ y los vectores v, n, b y t satisfacen las condiciones iniciales para $\xi_0 \in \mathcal{J}$

$$\begin{aligned} \ast(\xi_0) &= p \\ v(\xi_0) &= v_0 \\ n(\xi_0) &= n_0 \\ b(\xi_0) &= b_0 \\ t(\xi_0) &= t_0 \end{aligned}$$

La forma canónica local de una trayectoria.

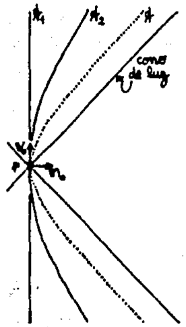
Por simplicidad haremos en adelante $\xi_0 = 0$ y por el momento no

sujetaremos a x a la condición de poseer curvaturas constantes.
Supongamos que la trayectoria x se puede desarrollar en serie de Taylor en la vecindad de $\xi = 0$

$$x(\xi) = x(0) + \xi\dot{x}(0) + \frac{\xi^2}{2!}\ddot{x}(0) + \frac{\xi^3}{3!}\dddot{x}(0) + \frac{\xi^4}{4!}\overset{iv}{x} + R \tag{12}$$

donde $\lim\limits_{\xi\to 0} R/\xi^4 = 0$

Las derivadas de x en términos de la base de Serret-Frenet son



$x_1 = p + v_0\xi$

$x_2 = p + v_0\xi + \frac{\kappa}{2}n_0\xi^2$

$$\dot{x} = v$$
$$\ddot{x} = \kappa n$$
$$\dddot{x} = \kappa^2 v + \dot{\kappa} n + \kappa\tau b$$
$$\overset{iv}{x} = (3\kappa\dot{\kappa})v + (\kappa^3 + \ddot{\kappa} - \kappa\tau^2)n + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})b + (\kappa\tau\lambda)t$$

al substituir lo anterior y las condiciones iniciales $x(0) = p$, $v(0) = v_0$, etc. en 18 obtenemos la forma canónica local de x en $\xi = 0$

$$x(\xi) = p + \left(\xi + \frac{\kappa^2\xi^3}{3!} + \frac{3\kappa\dot{\kappa}\xi^4}{4!}\right)v_0 + \left(\frac{\kappa\xi^2}{2!} + \frac{\dot{\kappa}\xi^3}{3!} + \frac{(\kappa^3 + \ddot{\kappa} - \kappa\tau^2)\xi^4}{4!}\right)n_0 + \left(\frac{\kappa\tau\xi^3}{3!} + \frac{(2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})\xi^4}{4!}\right)b_0 + \left(\frac{\kappa\tau\lambda\,\xi^4}{4!}\right)t_0 + R \tag{13}$$

las curvaturas κ, τ, λ y sus derivadas también se calculan en $\xi = 0$.

La ecuación de movimiento y su relación con las ecuaciones de Serret-Frenet

La ecuación de movimiento de una partícula con masa m sujeta a la acción de una fuerza F es

$$mc\ddot{x} = F \tag{14}$$

con la restricción de que la velocidad $v = \dot{x}$ satisfaga $v^2 = 1$. Esta restricción conduce a la ortogonalidad entre la aceleración $\ddot{x}$ y la velocidad $v \cdot \ddot{x} = 0$, que combinada con la ecuación de movimiento dá lugar a

$$v \cdot F = 0 \tag{15}$$

Consideraremos aquellas fuerzas expresables mediante un campo birectorial $\mathbf{M}$ con la fórmula

$$\mathbf{F} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{M} \tag{16}$$

el dominio de $\mathbf{M}$ es una región del espacio-tiempo. La estructura algebraica dada por 16 asegura que $\mathbf{F}$ cumpla con 15 pues $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{M}) = 0$ para todo vector $\mathbf{v}\in\mathcal{V}$ y todo birector $\mathbf{M}\in\mathcal{V}^2$ (cabe aclarar que cualquier fuerza $\mathbf{F}$ se puede expresar como $\mathbf{F} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{B}$, donde $\mathbf{B}$ es un birector, pues basta con tomar $\mathbf{B} = \mathbf{v}\wedge\mathbf{F} = \mathbf{v}\mathbf{F}$; pero no es posible asegurar que $\mathbf{B}$ sea independiente de la velocidad de la partícula) Recalcamos que se trata de un tipo particular de fuerzas, no es el caso más general, pero sí el más usual, la fuerza de Lorentz tiene la estructura 16.

La fuerza asociada a $\mathbf{M}$ vía 16 depende del movimiento de la partícula de dos maneras, explícitamente por la presencia de $\mathbf{v}$, e implícitamente al valuar el campo $\mathbf{M}$ sólo en los eventos constituyentes de la trayectoria. Esta última ha de determinarse, por ello representamos tal dependencia con $\mathbf{M}(\mathfrak{x})$. Reescribimos para estas fuerzas la ecuación de movimiento 14

$$mc\,\ddot{\mathfrak{x}} = \dot{\mathfrak{x}}\cdot\mathbf{M}(\mathfrak{x}) \tag{17}$$

Esta ecuación es de segundo orden y requiere de las condiciones iniciales de posición y velocidad para calcular la solución $\mathfrak{x}$. Ésta es la formulación dinámica y para compararla con la geométrica la enunciamos así:

Dados un campo birectorial $\mathbf{M}:\mathcal{R}\to\mathcal{V}^2$, con $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{M}$; un evento $p\in\mathcal{R}$; y un vector unitario temporaloide $\mathbf{v}_0\in\mathcal{V}$, hallar la trayectoria $\mathfrak{x}:\mathcal{I}\to\mathcal{R}$ que satisface 1) la ecuación 17 y 2) las condiciones iniciales $\mathfrak{x}(0) = p$ y $\dot{\mathfrak{x}}(0) = \mathbf{v}_0$.

Las formulaciones geométrica y dinámica para $\mathfrak{x}$ no son equivalentes en el sentido de que no es posible pasar del planteamiento geométrico al dinámico. Si suponemos calculada la trayectoria $\mathfrak{x}$ a lo sumo podríamos calcular parte del campo $\mathbf{M}$ y esto solamente en los eventos de $\mathfrak{x}$, no en una región $\mathcal{R}$ pues la igualdad

$$v(\xi)\cdot M(\ast(\xi)) = v(\xi)\cdot D(\xi) \tag{18}$$

no permite concluir que $M(\ast(\xi)) = D(\xi)$, ya que M puede tener una parte ortogonal a v diferente a la de D (que es $-\tau nb - \lambda bt$) De la formulación dinámica a la geométrica podemos pasar una vez calculada la trayectoria $\ast$, pues las curvaturas κ, τ y λ deben ser funciones de ξ.

Lo anterior aunado a la discrepancia en número de las condiciones iniciales en las formulaciones podría hacernos pensar que no toda trayectoria geométrica es dinámica, es decir, que dada $\ast$ quizá no siempre es posible construir un campo M con la propiedad de que $\ast$ sea solución de la formulación dinámica basada en M. Esta conjetura es falsa por lo siguiente, la formulación dinámica contiene igual número de condiciones iniciales que la geométrica, con la diferencia de que no están explícitas pero sí son calculables (v.g. $\kappa n_0 = v_0 \cdot M(p)$). Además, dada $\ast$ siempre es posible construir una familia de campos bivectoriales de los que $\ast$ es solución dinámica; la relación de equivalencia entre los campos de dicha familia es la ecuación 18.

Las trayectorias con curvaturas constantes

Usaremos las ecuaciones de Senet-Frenet para calcular los movimientos más sencillos, es decir aquellos con trayectorias con curvaturas constantes. Veremos luego que son soluciones de la ecuación de movimiento cuando el campo M es constante (i.e. una partícula eléctrica de prueba inmersa en un campo electromagnético constante tiene una trayectoria con curvaturas constantes).

Cuando las curvaturas son constantes, $\dot{\kappa} = \dot{\tau} = \dot{\lambda} = 0$, el bivector de Darboux lo es también, $\dot{D} = 0$, y podemos expresarlo en términos de las condiciones iniciales

$$D = \kappa v_0 n_0 - \tau n_0 b_0 - \lambda b_0 t_0 \tag{19}$$

con esto el sistema 7-10 queda desacoplado y la integración es inmediata

$$v(\xi) = e^{-(\xi-\xi_0)D/2}\, v_0\, e^{(\xi-\xi_0)D/2} \tag{20}$$

Para n, b y t se obtienen ecuaciones similares. Cabe recordar que la exponencial de $\pm(\xi-\xi_0)D/2$ debe entenderse como la siguiente serie

$$e^{\pm(\xi-\xi_0)D/2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\pm\frac{(\xi-\xi_0)D}{2}\right)^m \qquad (21)$$

La trayectoria x se obtiene con la integración de $v(\xi)$

$$x(\xi) = p + \int_{\xi_0}^{\xi} v(\xi)\,d\xi \qquad (22)$$

para calcularla es necesario considerar la orientación relativa de v_0 con D, tema éste de las siguientes páginas. Añadiremos que las trayectorias se clasificarán por sus curvaturas y el valor de D^2

$$D^2 = \kappa^2 - \tau^2 - \lambda^2 - 2\kappa\lambda\, vnbt \qquad (23)$$

donde $vnbt$ es el pseudoescalar asociado a la base $\{v, n, b, t\}$ de V.

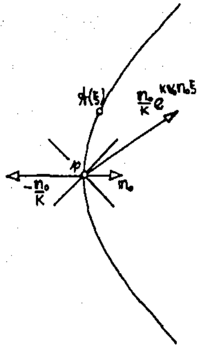
El caso más simple de trayectoria es la que posee las tres curvaturas nulas. Las ecuaciones de Serret-Frenet se reducen a $\dot{v}=0$, y la integración es inmediata, $x(\xi) = p + \xi v_0$; es una recta con dirección v_0 que pasa por el evento p.

A la recta le sigue en complejidad el pseudocírculo.

El pseudocírculo

Esta trayectoria se caracteriza por tener su primera curvatura κ constante y no nula, mientras que τ y λ valen cero. Es un movimiento plano y espacialmente unidimensional. Suele llamársele "hiperbólico" por la ecuación en coordenadas cartesianas que lo describe, prescindiremos de dicho nombre por motivos que serán claros en un momento. El pseudocírculo es la versión relativista del movimiento uniformemente acelerado.

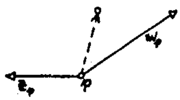
En este caso el director de Darboux es $D = \kappa vn$ y como $\dot{\kappa} = 0$ entonces $\dot{D} = 0$, de manera que $D = \kappa v_0 n_0$, donde $v_0 = v(0)$ y $n_0 = n(0)$. Al substituir en 20 obtenemos para la velocidad



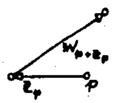
$$v(\xi) = v_0\, e^{\kappa v_0 n_0 \xi} \tag{24}$$

hemos tomado $\xi_0 = 0$; y al integrar nuevamente obtenemos

$$\alpha(\xi) = p + v_0 \int_0^{\xi} e^{\kappa v_0 n_0 \xi}\, d\xi = p - \frac{n_0}{\kappa} + \frac{n_0}{\kappa} e^{\kappa v_0 n_0 \xi} \tag{25}$$



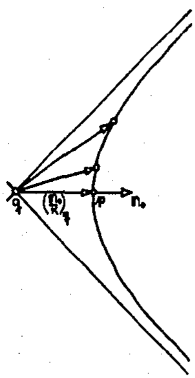
Los dos vectores que aparecen en 25 tienen como evento base a p, su suma es la suma vectorial en el espacio tangente T_p. El vector resultante se "suma" al evento p y esto representa la translación que lleva a p hasta $\alpha(\xi)$, todo esto para cada valor de $\xi \in J$ (en este caso $J = \mathbb{R}$). Podremos apreciar mejor el efecto de cada una de estas translaciones si las descomponemos en dos partes, basados en la regla siguiente



$$p + (z_p + w_p) = (p + z_p) + w_{p+z_p} \tag{26}$$

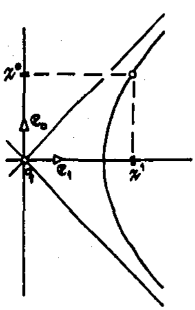
los subíndices p y $p+z_p$ denotan los eventos base del vector correspondiente. Definimos el evento $q = p - n_0/\kappa$ y con él escribimos

$$\alpha(\xi) = q + \left(\frac{n_0}{\kappa} e^{\kappa v_0 n_0 \xi}\right)_q \tag{27}$$



El factor exponencial rota al vector n_0/κ en el plano definido por las direcciones de v_0 y n_0, y conserva su magnitud $1/\kappa$. Esta rotación es espacio-temporal por ello el nombre de pseudocírculo para α, de radio $1/\kappa$ y centro en q.

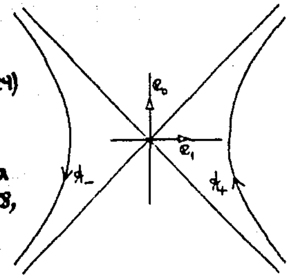
Pasemos a la forma "hiperbólica" de α, para ello introducimos coordenadas cartesianas en el plano que contiene a α. Elegimos a q como origen y a v_0 y n_0 como las direcciones de los ejes coordenados que denotamos con e_μ ($e_0 = (v_0)_q$ y $e_1 = (n_0)_q$) sus duales e^μ aplicados al vector de posición $\alpha(\xi) - q$ dan las coordenadas x^μ de $\alpha(\xi)$



$$x^\mu(\xi) = e^\mu(\alpha(\xi) - q) = \begin{cases} \frac{1}{\kappa}\,\mathrm{senh}(\kappa\xi) & \mu = 0 \\ \frac{1}{\kappa}\cosh(\kappa\xi) & \mu = 1 \end{cases} \tag{28}$$

la dependencia con ξ se puede suprimir con la ecuación $\cosh^2 - \mathrm{senh}^2 = 1$

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = \frac{1}{\kappa^2} \qquad (29)$$



Esta sería la ecuación de una hipérbola si el plano x^0-x^1 fuese euclideano (i.e. si la distancia entre q y $s(\xi)$ fuese $(x^0)^2+(x^1)^2$). La eliminación de ξ requirió elevar al cuadrado las ecuaciones 28, por ello la ecuación 29 describe dos trayectorias, corresponden a los dos pseudocírculos con igual centro y radio (q y $1/\kappa$).

$$s_\pm(\xi) = q + \left(\pm \frac{n_0}{\kappa}\, e^{\kappa v_0 n_0 \xi}\right)_q \qquad (30)$$

A continuación obtendremos las ecuaciones del pseudocírculo referidas al sistema inercial con velocidad v_0 y origen en q. La definición para la posición $\vec{r}$, y la relación entre el tiempo t del observador y ξ son

$$\vec{r} = (s(\xi) - q)\wedge v_0 = \frac{1}{\kappa}\cosh(\kappa\xi)\, n_0 v_0 \qquad (31)$$

$$t = (s(\xi) - q)\cdot \frac{v_0}{c} = \frac{1}{\kappa c}\sinh(\kappa\xi) \qquad (32)$$

al combinarlas obtenemos $\vec{r}$ en función del tiempo t

$$\vec{r}(t) = \frac{(1+(\kappa c t)^2)^{1/2}}{\kappa}\, n_0 v_0 \qquad (33)$$

Para la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración $\vec{a}$ usamos las definiciones usuales

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (1+(\kappa c t)^2)^{-1/2}\,\kappa c^2 t\, n_0 v_0 \qquad (34)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = c^2\kappa\,(1+(\kappa c t)^2)^{-3/2}\, n_0 v_0 \qquad (35)$$

ahora podemos expresar los invariantes D y κ en términos de $\vec{v}$ y $\vec{a}$

$$D = \kappa v_0 n_0 = -c\,(c^2 - \vec{v}^2)^{-3/2}\,\vec{a} \qquad (36)$$

$$\kappa = c\,(c^2 - \vec{v}^2)^{-3/2}\,|\vec{a}| \qquad (37)$$

La definición común del pseudocírculo es algo barroca pues recurre a la descripción que de ella hacen los observadores inerciales instantáneamente en reposo. Todos ellos le asocian la misma aceleración $\vec{a}$ cuando $\vec{v} = 0$

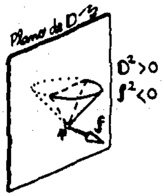
Las trayectorias con dos curvaturas

Consideraremos las trayectorias que poseen las dos primeras curvaturas constantes y diferentes de cero, y la tercera curvatura nula. Para estas trayectorias el bivector de Darboux es constante, $D = (\kappa v + \tau b)n = (\kappa v_0 + \tau b_0)n_0$. Además hay otra constante de movimiento representable mediante un vector. Ocurre que al tener sólo dos curvaturas estas trayectorias están necesariamente contenidas en un subespacio tridimensional, cuyo elemento de volumen podemos expresarlo con el trivector vnb que es, como era de esperarse, constante, $d\,vnb/d\xi = 0$. Con este trivector y con D construimos el vector $f = vnb\,D = \tau v + \kappa b$, que también es constante, $df/d\xi = 0$. Dependiendo del valor de D^2 el vector f puede ser temporaloide, espacialoide o luminoide, pues $f^2 = -D^2 = \tau^2 - \kappa^2$.

Para calcular p no usaremos 20 pues v_0 y D ni conmutan ni anticonmutan. Resulta más simple integrar primero la ecuación $\dot{n} = n \cdot D$ gracias a que n y D anticonmutan, tenemos pues

$$n(\xi) = n_0 e^{D\xi} \tag{38}$$

la siguiente integración es la de la ecuación $\dot{v} = \kappa n$

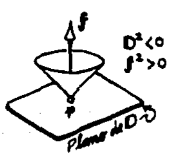


$$v(\xi) = v_0 + \int_0^{\xi} \kappa n(\xi)\, d\xi \tag{39}$$

Debemos considerar dos posibilidades para el factor exponencial, a saber $D^2 \neq 0$ y $D^2 = 0$. En el primer caso tenemos

$$v(\xi) = v_0 + \frac{\kappa n_0 D}{D^2}\left[e^{D\xi}\right]_0^{\xi} = \frac{\tau}{D^2} f + \frac{\kappa n_0 D}{D^2} e^{D\xi}, \quad (\text{para } D^2 \neq 0) \tag{40}$$

substituimos en 22 e integramos

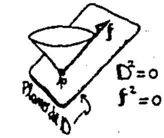


$$p(\xi) = p - \frac{\kappa n_0}{D^2} - \frac{\tau}{D^2} f \xi + \frac{\kappa n_0}{D^2} e^{D\xi}, \quad (\text{para } D^2 \neq 0) \tag{41}$$

Para simplificar lo anterior definimos el evento $q = p - \kappa n_0 / D^2$ y usamos la ecuación 26

$$x(\xi) = q + \left(-\frac{\tau}{D^2} f \xi + \frac{\kappa n_0}{D^2} e^{D\xi}\right)_q \quad , \text{(para } D^2 \neq 0\text{)} \qquad (42)$$

Si $D^2=0$, esto es, si las curvaturas tienen igual valor, $\kappa=\tau$, las ecuaciones 40-42 no son válidas. En este caso la exponencial en 38 se reduce a un polinomio de primer orden en D y ξ



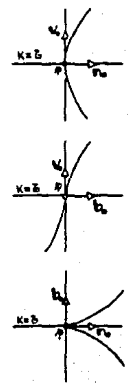
$$e^{\pm D\xi} = 1 \pm D\xi \quad , \text{(para } D^2=0\text{)} \qquad (43)$$

substituímos en 39 e integramos para obtener v y x

$$v(\xi) = v_0 + \kappa n_0\left(\xi + \frac{D}{2}\xi^2\right) \quad , \quad \text{(para } D^2=0\text{)} \qquad (44)$$

$$x(\xi) = p + \left(v_0 \xi + \frac{\kappa n_0}{2}\xi^2 + \frac{\kappa n_0 D}{6}\xi^3\right)_p =$$

$$= p + \left(\left(\xi + \frac{\kappa^2}{6}\xi^3\right)v_0 + \frac{\kappa}{2}\xi^2 n_0 + \frac{\kappa\tau}{6}\xi^3 b_0\right)_p \quad , \text{(para } D^2=0\text{)} \qquad (45)$$

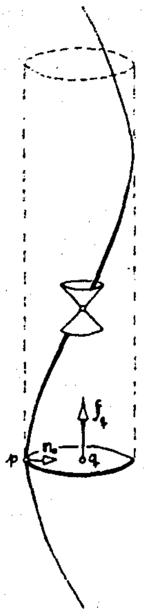


Nótese que la solución 45 coincide con la forma canónica local cuando esta última se sujeta a las condiciones $\dot\kappa=\dot\tau=\lambda=0$ y $\kappa=\tau$. Además en 45 no hay un evento q "peculiar" como en 41.

Ahora pasaremos a la representación de las trayectorias 42 y 45 como movimientos en el espacio tridimensional de un observador inercial, parametrizados con el tiempo t. Según sea la trayectoria escogeremos las coordenadas que permitan una descripción sencilla en lo posible. Esta vez deberemos distinguir tres casos, pues la trayectoria 42 abarca dos familias de curvas, distinguidas por el signo de D^2, es decir, por las relaciones $\kappa<\tau$ ó $\kappa>\tau$.

La hélice

Llamaremos hélices a las trayectorias representadas por la ecuación 42 cuando $D^2<0$, $(\kappa<\tau)$. Ocurre que la parte vectorial de 42 la componen dos términos, el primero $(-\tau f\xi/D^2)_q$ es una translación en la dirección temporaloide f, mientras que el segundo $((\kappa n_0/D^2)\exp(D\xi))_q$ es una rotación espacial del vector $(\kappa n_0/D^2)_q$ en el plano D ortogonal a f.



El sistema inercial idóneo para describir la hélice es el que tiene dirección temporal $l = f(\tau^2-\kappa^2)^{-1/2}$, con sus planos de simultaneidad paralelos a los generados por n_0 y $\kappa v_0+\tau b_0$, y con el origen de coordenadas espacio temporales en el evento q. Respecto a dicho sistema la hélice es un movimiento circular y uniforme. La posición $\vec{r}$ de la partícula, y el vínculo entre el tiempo t del sistema y el parámetro ξ son

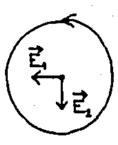
$$\vec{r}(\xi) = (x(\xi)-q)\wedge l = \left(-\frac{\kappa}{\tau^2-\kappa^2}\, n_0\, e^{D\xi}\right)_q \wedge l \qquad (46)$$

$$ct = (x(\xi)-q)\cdot l = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}}\,\xi \qquad (47)$$

Si expresamos $\vec{r}$ en función de t, introducimos la frecuencia angular $\omega = c(\tau^2-\kappa^2)/\tau$, desarrollamos la exponencial en términos de las funciones cos y sen, y usamos los bivectores unitarios constantes

$$\vec{E}_1 = (-n_0 l)_q$$

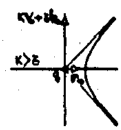
$$\vec{E}_2 = \left(-(\kappa v_0+\tau b_0)\, l\, (\tau^2-\kappa^2)^{-1/2}\right)_q$$



obtenemos una versión familiar para $\vec{r}$

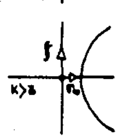
$$\vec{r}(t) = \frac{\kappa}{\tau^2-\kappa^2}\left(\vec{E}_1 \cos\omega t + \vec{E}_2 \operatorname{sen}\omega t\right) \qquad (48)$$

El radio del círculo es $|\vec{r}| = \kappa/(\tau^2-\kappa^2)$, y el período de giro $T = 2\pi\tau/c(\tau^2-\kappa^2)$.



La pseudohélice

Cuando $D^2>0$, ($\kappa>\tau$), el vector f es espacialoide y el factor $\exp(D\xi)$ en la ecuación 42 rota al vector $\kappa n_0/D^2$ en el plano espacio-temporal de D, como ocurre con el pseudocírculo. Llamaremos a estas trayectorias pseudohélice a falta de mejor nombre y por analogía. Un círculo "genera" una hélice si se efectúa una traslación ortogonal al plano de giro; así un pseudocírculo "genera" una pseudohélice si se efectúa la traslación espacialoide $-\tau f\xi/D^2$ ortogonal al plano del



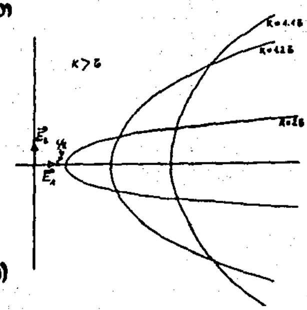
pseudocírculo.

Ahora veremos como la similitud formal expresada en 42 entre las dos familias de trayectorias, hélices y pseudohélices, se rompe al pasar a la descripción dada por un observador inercial. Escogemos un sistema de coordenadas con dirección temporal $\ell = (\kappa v_0 + \tau b_0)(\kappa^2-\tau^2)^{-1/2}$ y origen en q. El vínculo entre el tiempo t del sistema y ξ, y la posición $\vec{r}$ son

$$ct = (\star(\xi)-q)\cdot \ell = \frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2}\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,\xi\right) \qquad (49)$$

$$\vec{r}(\xi) = (\star(\xi)-q)\wedge \ell = \left(-\frac{\tau\xi}{\kappa^2-\tau^2}\,\mathfrak{f}\ell + \frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2}\cosh\left(\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,\xi\right) n_0\ell\right)_q \qquad (50)$$

Si reemplazamos ξ por t y usamos los birectores unitarios constantes



$$\vec{E}_1 = (n_0\ell)_q$$

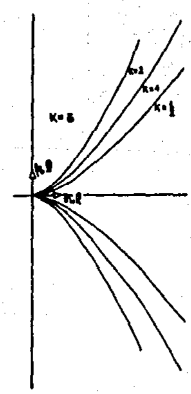
$$\vec{E}_2 = \left(-\mathfrak{f}\ell\,(\kappa^2-\tau^2)^{-1/2}\right)_q$$

obtenemos para $\vec{r}$

$$\vec{r}(t) = \vec{E}_1\,\frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2}\left(1+\left[\frac{(\kappa^2-\tau^2)ct}{\kappa}\right]^2\right)^{1/2} + \vec{E}_2\,\frac{\tau}{\kappa^2-\tau^2}\,\mathrm{arcsenh}\left(\frac{(\kappa^2-\tau^2)ct}{\kappa}\right) \qquad (51)$$

La forma canónica local, cuando $D^2=0$.

Cuando $D^2=0$, es decir $\kappa=\tau$, la trayectoria $\star$ es un polinomio de grado 3 en ξ (ecuación 45). En este caso el vector $\mathfrak{f}$ es luminoide y a diferencia de los casos anteriores yace en D pues $D=\mathfrak{f}n_0$. Elegimos entonces como dirección temporal para el sistema inercial la velocidad inicial $\ell=v_0$, y como origen de coordenadas el evento inicial p, tenemos entonces



$$ct = (\star(\xi)-p)\cdot \ell = \xi + \frac{\kappa^2}{6}\,\xi^3 \qquad (52)$$

$$\vec{r}(\xi) = (\star(\xi)-p)\wedge \ell = \frac{\kappa}{2}\,\xi^2 n_0\ell + \frac{\kappa\tau}{6}\,\xi^3 b_0\ell \quad, (\text{con } \kappa=\tau) \qquad (53)$$

Para despejar ξ en 52 recurrimos a la fórmula de

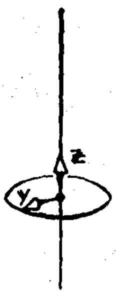
Cardan, pues 52 tiene la forma $y^3 + my + n = 0$ y satisface la condición $(m/3)^3 + (n/2)^2 \geq 0$ para todo valor de $t \in \mathbb{R}$. Las soluciones son tres pero sólo una es real, a saber,

$$\xi = \left[-\frac{3ct}{k^3} + \left\{ \left(\frac{3ct}{k^3}\right)^2 + \left(\frac{2}{k^2}\right)^3 \right\}^{1/2} \right]^{1/3} + \left[-\frac{3ct}{k^3} - \left\{ \left(\frac{3ct}{k^3}\right)^2 + \left(\frac{2}{k^2}\right)^3 \right\}^{1/2} \right]^{1/3} \qquad (54)$$

Las trayectorias con tres curvaturas

Es el caso más general que trataremos e interesante por su complejidad. Antes de comenzar a calcular $\mathbf{r}$ vale la pena tener alguna idea de qué tipo de trayectoria se trata, para ello recordemos lo visto en los casos de la hélice y la pseudohélice.

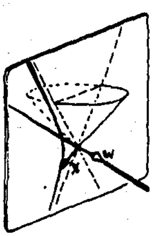
La hélice puede pensarse como generada por un círculo "sumado" a una recta temporaloide y ortogonal al plano del círculo. Para dejar claro esto veamos la ecuación 42 escrita de la siguiente manera,



$$\mathbf{r}(\xi) - q = \underbrace{z\,\xi}_{\substack{\text{recta}\\ \text{temporaloide}}} + \underbrace{y\,e^{B\xi}}_{\text{círculo}}$$

el vector z es temporaloide, mientras que y es un vector espacialoide sobre el plano del bivector espacialoide B, y al multiplicarlo la exponencial de $B\xi$ rota sobre dicho plano; además z y y son ortogonales, y z no tiene componente sobre el plano de B.

Para la pseudohélice la situación es similar



$$\mathbf{r}(\xi) - q = \underbrace{w\,\xi}_{\substack{\text{recta}\\ \text{espacialoide}}} + \underbrace{x\,e^{A\xi}}_{\text{pseudocírculo}}$$

con la diferencia de que w es espacialoide y A es un bivector temporaloide.

En estos términos la trayectoria con tres curvaturas constantes es la "suma" de un círculo y un pseudocírculo ortogonales entre sí, o sea que su ecuación tiene la forma

$$\mathbf{r}(\xi) - q = \underbrace{x\,e^{A\xi}}_{\text{pseudocírculo}} + \underbrace{y\,e^{B\xi}}_{\text{círculo}}$$

los bivectores A y B conmutan pero son linealmente independientes. Tal cosa es posible gracias a que el espacio-tiempo tiene 4 dimensiones.

Ahora pasamos al cálculo de $\star$. Primero es conveniente presentar los invariantes, a saber, las curvaturas κ, τ y λ; el bivector de Darboux D, y el pseudoescalar $i = v \wedge n \wedge b \wedge t$. Esta vez el bivector D no es simple, es decir no hay dos vectores, k y g digamos, con la propiedad $D = k \wedge g$; consecuencia de ello es que D^2 es un multivector con partes escalar y pseudoescalar (ecuación 23). Esto hace que la ecuación 20 para $v(\xi)$ no sea fácil de manejar.

Sin embargo siempre es posible hallar dos bivectores simples, A y B digamos, con las siguientes propiedades,

$$D = A + B \tag{55}$$

$$AB = BA \tag{56}$$

En adelante supondremos que $A^2 > 0$ y $B^2 < 0$ (i.e. A es temporaloide y B es espacialoide). Esta descomposición permitirá integrar la ecuación 22 fácilmente, por ello su importancia; debemos mencionar que A y B son también constantes. Gracias a 55 y 56 podemos factorizar $\exp(\pm D\xi/2)$

$$e^{\pm D\xi/2} = e^{\pm A\xi/2} e^{\pm B\xi/2} = e^{\pm B\xi/2} e^{\pm A\xi/2} \tag{57}$$

A continuación expresamos v_0 como la suma $v_0 = v_A + v_B$ con v_A en el plano de A y v_B en el de B, es decir $v_A \wedge A = 0$ y $v_B \wedge B = 0$. Los vectores v_A y v_B son ortogonales ($v_A \cdot v_B = 0$), además v_A es temporaloide y v_B es espacialoide. Esto permite escribir

$$v(\xi) = e^{-D\xi/2} v_0 e^{D\xi/2} = v_A e^{A\xi} + v_B e^{B\xi} \tag{58}$$

y así la integración es directa

$$\star(\xi) = p + \left[\frac{v_A A}{A^2} e^{A\xi} + \frac{v_B B}{B^2} e^{B\xi} \right]_0^{\xi} = q + \left(\frac{v_A A}{A^2} e^{A\xi} + \frac{v_B B}{B^2} e^{B\xi} \right)_q \tag{59}$$

el evento q es $q = p - \frac{v_A A}{A^2} - \frac{v_B B}{B^2}$

Para obtener la descripción que un observador inercial dá de $\star$ usaremos la siguiente base ortonormal de vectores con origen en q

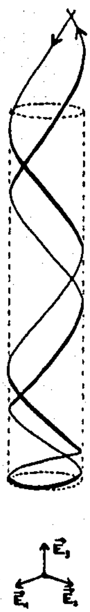
$$e_0 = \frac{v_A}{\sqrt{v_A^2}} \; , \; e_1 = -\frac{v_B B}{\sqrt{-v_B^2}\sqrt{-B^2}} \; , \; e_2 = \frac{v_B}{\sqrt{-v_B^2}} \; , \; e_3 = \frac{v_A A}{\sqrt{v_A^2}\sqrt{A^2}} \tag{60}$$

En términos de esta base los bivectores A y B , y los vectores $v_A A/A^2$ y $v_B B/B^2$ son,

$$A = \sqrt{A^2}\, e_{03} \; , \; B = \sqrt{-B^2}\, e_{21} \; ; \; \frac{v_A A}{A^2} = \frac{\sqrt{v_A^2}}{\sqrt{A^2}}\, e_3 \; , \; \frac{v_B B}{B^2} = \frac{\sqrt{-v_B^2}}{\sqrt{-B^2}}\, e_1 \tag{61}$$

con esto $\star(\xi)$ toma la forma

$$\star(\xi) = q + \left(\frac{\sqrt{v_A^2}}{\sqrt{A^2}}\left(e_3 \cosh\sqrt{A^2}\,\xi + e_0 \operatorname{senh}\sqrt{A^2}\,\xi\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{-v_B^2}}{\sqrt{-B^2}}\left(e_1 \cos\sqrt{-B^2}\,\xi + e_2 \operatorname{sen}\sqrt{-B^2}\,\xi\right)\right)_q \tag{62}$$



La relación entre ξ y el tiempo t del observador inercial con dirección temporal e_0 es

$$ct = (\star(\xi) - q)\cdot e_0 = \frac{\sqrt{v_A^2}}{\sqrt{A^2}} \operatorname{senh}\sqrt{A^2}\,\xi \tag{63}$$

Introducimos los vectores $\vec{E}_i = e_{i0}$ del espacio de tres dimensiones del observador y con ellos expresamos la posición $\vec r(t)$ de la partícula basados en las ecuaciones 62 y 63

$$\vec r(t) = (\star(\xi(t)) - q)\wedge e_0 = \left(\frac{v_A^2}{A^2} + (ct)^2\right)^{1/2} \vec E_3 \; +$$

$$+ \frac{\sqrt{-v_B^2}}{\sqrt{-B^2}} \cos\left(\frac{\sqrt{-B^2}}{\sqrt{A^2}} \operatorname{arcsenh}\left[\frac{\sqrt{A^2}}{\sqrt{v_A^2}}\, ct\right]\right) \vec E_1 \; +$$

$$+ \frac{\sqrt{-v_B^2}}{\sqrt{-B^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-B^2}}{\sqrt{A^2}} \operatorname{arcsenh}\left[\frac{\sqrt{A^2}}{\sqrt{v_A^2}}\, ct\right]\right) \vec E_2 \tag{64}$$

La curva $\vec r(t)$ es una hélice de paso no uniforme, que se desacelera en la dirección $-\vec E_3$ para luego acelerarse en la dirección $+\vec{E}_3$.

A continuación daremos los detalles de lo anterior, es decir, los bivectores A y B, y los vectores v_A, v_B, $v_A A$ y $v_B B$ en términos de los invariantes y de las condiciones iniciales. Empezaremos por relacionar A y B con las curvaturas, gracias a las ecuaciones 23, 55 y 56 tenemos

$$A^2 + B^2 = \kappa^2 - \tau^2 - \lambda^2 \tag{65}$$

$$AB = -\kappa\lambda \mathbf{I} \tag{66}$$

de 66 despejamos B

$$B = -\kappa\lambda \mathbf{I} \frac{A}{A^2} \tag{67}$$

con 67 escribimos D de la siguiente manera

$$D = \left(\sqrt{A^2} - \frac{\kappa\lambda \mathbf{I}}{\sqrt{A^2}}\right)\frac{A}{\sqrt{A^2}} \tag{68}$$

esta expresión para D tiene la forma

$$D = \rho\, e^{-\mathbf{I}\omega}\, Q \tag{69}$$

donde $Q = A/\sqrt{A^2}$, $\omega \in (0, \pi/2)$ y $\rho > 0$; resta determinar los valores de ρ y ω. De nuevo usamos la ecuación 23 y junto con $D^2 = \rho^2 \exp(-2\mathbf{I}\omega)$ obtenemos

$$\rho^2 \cos 2\omega = \kappa^2 - \tau^2 - \lambda^2 \tag{70}$$

$$\rho^2 \operatorname{sen} 2\omega = 2\kappa\lambda \tag{71}$$

de las ecuaciones anteriores despejamos ρ, $\cos\omega$ y $\operatorname{sen}\omega$

$$\rho = +\left[(\kappa^2 - \tau^2 - \lambda^2)^2 + (2\kappa\lambda)^2\right]^{1/4} \tag{72}$$

$$\cos\omega = +\frac{1}{\rho}\left(\frac{\rho^2 + \kappa^2 - \tau^2 - \lambda^2}{2}\right)^{1/2} \tag{73}$$

$$\operatorname{sen}\omega = +\frac{\kappa\lambda}{\rho}\left(\frac{2}{\rho^2 + \kappa^2 - \tau^2 - \lambda^2}\right)^{1/2} \tag{74}$$

Las expresiones finales para A y B son,

$$A = \cos\omega\, e^{\mathbf{i}\omega} D = \frac{1}{2}(1 + e^{2\mathbf{i}\omega})D = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\kappa^2-\tau^2-\lambda^2+2\kappa\lambda\mathbf{i}}{\rho^2}\right)D \qquad (75)$$

$$B = -\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\omega\, e^{\mathbf{i}\omega} D = \frac{1}{2}(1 - e^{2\mathbf{i}\omega})D = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\kappa^2-\tau^2-\lambda^2+2\kappa\lambda\mathbf{i}}{\rho^2}\right)D \qquad (76)$$

$$A^2 = \frac{1}{2}(\rho^2+\kappa^2-\tau^2-\lambda^2) \qquad (77)$$

$$B^2 = -\frac{(\kappa\lambda)^2}{A^2} \qquad (78)$$

en donde $\mathbf{i}D = \lambda v n + \tau v t + \kappa b t$. Y para las componentes v_A y v_B de la velocidad inicial y los vectores v_0A y v_0B tenemos,

$$v_A = \frac{1}{2}\left(v_0 - \frac{Dv_0D}{\rho^2}\right) = \frac{1}{2\rho^2}\left[(\rho^2+\kappa^2+\tau^2+\lambda^2)v_0 + 2\kappa\tau b_0\right] \qquad (79)$$

$$v_B = \frac{1}{2}\left(v_0 + \frac{Dv_0D}{\rho^2}\right) = \frac{1}{2\rho^2}\left[(\rho^2-\kappa^2-\tau^2-\lambda^2)v_0 - 2\kappa\tau b_0\right] \qquad (80)$$

$$v_0A = \frac{\kappa}{2\rho^2}(\rho^2+\kappa^2-\tau^2+\lambda^2)n_0 + \frac{\kappa\tau\lambda}{\rho^2}t_0 \qquad (81)$$

$$v_0B = \frac{\kappa}{2\rho^2}(\rho^2-\kappa^2+\tau^2-\lambda^2)n_0 - \frac{\kappa\tau\lambda}{\rho^2}t_0 \qquad (82)$$

Las trayectorias con curvaturas constantes como soluciones de la ecuación de movimiento

Para las trayectorias con curvaturas constantes la ecuación $\dot{v} = v\cdot D$ se parece a la ecuación de movimiento $mc\dot{v} = v\cdot M$ gracias a que el bivector de Darboux es constante, pero con la notable diferencia de que D sólo está definido en los eventos de la trayectoria $\mathcal{T}$. Sin embargo podemos definir un campo bivectorial M_0 constante a partir de D en toda una región que contenga a $\mathcal{T}$, y con la propiedad de que $\mathcal{T}$ sea solución de la ecuación $mc\dot{v} = v\cdot M_0$. Basta con hacer $M_0(p) = D$ para todo evento p .

Ahora veremos la situación inversa, es decir, que las soluciones de la ecuación $mc\dot{v} = v\cdot M$ con M constante son trayectorias con curvaturas constantes, y el tipo de trayectoria depende de qué clase de bivector es M y de la orientación de M respecto a la velocidad inicial v_0. Partimos de la ecuación

$$mc\dot{v} = v \cdot M \tag{83}$$

con las condiciones iniciales $v(0) = v_0$ y $x(0) = p$. La primera integración es sencilla pues M es constante

$$v(\xi) = e^{-M\xi/2mc}\, v_0\, e^{M\xi/2mc} \tag{84}$$

Para la siguiente integración consideraremos varios casos por separado.

1) Sea M un bivector simple y tal que $M^2 \neq 0$. Descomponemos v_0 en dos vectores, $v_0 = v_{0\parallel} + v_{0\perp}$, donde $v_{0\parallel}$ es la parte de v_0 sobre el plano de M, y $v_{0\perp}$ es la parte ortogonal a dicho plano

$$v_{0\parallel} = \tfrac{1}{2}\left(v_0 - \frac{M v_0 M}{M^2}\right) \tag{85}$$

$$v_{0\perp} = \tfrac{1}{2}\left(v_0 + \frac{M v_0 M}{M^2}\right) \tag{86}$$

por construcción M anticonmuta con $v_{0\parallel}$ y conmuta con $v_{0\perp}$. Con estos vectores obtenemos para $v(\xi)$

$$v(\xi) = v_{0\parallel}\, e^{M\xi/mc} + v_{0\perp} \tag{87}$$

la integración de $v(\xi)$ es ahora sencilla

$$x(\xi) = p - v_{0\parallel} M \frac{mc}{M^2} + v_{0\perp}\xi + v_{0\parallel} M \frac{mc}{M^2}\, e^{M\xi/mc} \tag{88}$$

1a) Si $M^2 > 0$ y $v_{0\perp} = 0$ entonces x es un pseudocírculo con curvatura $\kappa = \sqrt{M^2}/mc$ y centro en $q = p - v_{0\parallel} M mc/M^2$.

1b) Si $M^2 > 0$ y $v_{0\perp} \neq 0$ entonces x es una pseudohélice con eje en la dirección espacialoide de $v_{0\perp}$ y curvaturas

$$\kappa = \frac{1}{mc}\sqrt{M^2 v_{0\parallel}^2} \tag{89}$$

$$\tau = \frac{1}{mc}\sqrt{-M^2 v_{0\perp}^2} \tag{90}$$

Recordemos que en esta situación $v_{0\parallel}^2 > 0$, $v_{0\perp}^2 < 0$ y $v_{0\parallel}^2 > v_{0\perp}^2$, o sea $\kappa > \tau$. El evento q es $q = p - v_{0\parallel} M mc/M^2$.

1d) Si $M^2 < 0$ y $v_{\parallel} = 0$ entonces $\star$ es una recta con dirección $v_{0\perp} = v_0$.

1e) Si $M^2 < 0$ y $v_{0\parallel} \neq 0$ entonces $\star$ es una hélice con eje en la dirección temporaloide $v_{0\perp}$, y curvaturas κ y τ dadas por las ecuaciones 84 y 90. La diferencia con el caso 1b es que ahora $v_{0\parallel}^2 < 0$, $v_{0\perp}^2 > 0$ y $v_{0\parallel}^2 < v_{0\perp}^2$, o sea $\kappa < \tau$. El evento q es $q = p - v_{0\parallel} M mc/M^2$

2) Si M es un birector simple y $M^2 = 0$ entonces

$$e^{\pm M\xi/2mc} = 1 \pm \frac{M\xi}{2mc} \tag{91}$$

y la ecuación 84 es un polinomio de segundo grado en ξ

$$v(\xi) = v_0 + \frac{v_0 \cdot M}{mc}\xi - \frac{M v_0 M}{(2mc)^2}\xi^2 \tag{92}$$

El vector $v_0 \cdot M$ es espacialoide, mientras que $M v_0 M$ es luminoide y está sobre el cono opuesto a v_0. Con la integral de la ecuación 92 obtenemos $\star$

$$\star(\xi) = p + v_0\xi + \frac{v_0 \cdot M}{2mc}\xi^2 - \frac{M v_0 M}{3(2mc)^2}\xi^3 \tag{93}$$

Esta trayectoria es la forma canónica local, con curvaturas

$$\kappa = \tau = \frac{1}{mc}\sqrt{-(v_0 \cdot M)^2} \tag{94}$$

3) Cuando M no es un birector simple $M^2 = \alpha + i\beta$ es un multivector con parte escalar, α, y parte pseudoescalar $i\beta$. Al igual que para el birector de Darboux, es posible descomponer M en dos partes birectoriales simples que conmutan

$$M = K + L \quad , \quad (KL = LK) \tag{95}$$

supondremos que el birector K es temporaloide, $K^2 > 0$, y L espacialoide, $L^2 < 0$. El cálculo de K y L es similar al de A y B en el caso del birector D, por ello lo omitimos. El resultado es

$$K = \frac{1}{2\theta^2}(\theta^2 + \alpha - i\beta)M \tag{96}$$

$$\mathbb{L} = \frac{1}{2\theta^2}(\theta^2 - \alpha + \mathbb{I}\beta)\,\mathbb{M} \tag{97}$$

donde $\theta = (\alpha^2+\beta^2)^{1/4}$, además $\mathbb{K}^2 = (\theta^2+\alpha)/2$ y $\mathbb{L}^2 = -\beta^2/2(\theta^2+\alpha)$.
Descomponemos v_0 en $v_0 = v_K + v_L$, donde $v_K \wedge \mathbb{K} = 0$ y $v_L \wedge \mathbb{L} = 0$; por lo anterior v_K es temporaloide y ortogonal a v_L que es espacialoide. Esto nos permite escribir para v

$$v(\xi) = v_K e^{\mathbb{K}\xi/mc} + v_L e^{\mathbb{L}\xi/mc} \tag{98}$$

y para $\not{x}$

$$\not{x}(\xi) = q + \left(v_K \mathbb{K} \frac{mc}{\mathbb{K}^2} e^{\mathbb{K}\xi/mc} + v_L \mathbb{L} \frac{mc}{\mathbb{L}^2} e^{\mathbb{L}\xi/mc} \right)_q \tag{99}$$

donde q es el evento

$$q = p - v_K \mathbb{K} \frac{mc}{\mathbb{K}^2} - v_L \mathbb{L} \frac{mc}{\mathbb{L}^2} \tag{100}$$

3a) Si $v_L = 0$ entonces la trayectoria $\not{x}$ es un pseudocírculo con curvatura $\kappa = \sqrt{\mathbb{K}^2}/mc$ y centro en $q = p - v_0\mathbb{K}\,mc/\mathbb{K}^2$.
3b) Si $v_L \neq 0$ entonces la trayectoria $\not{x}$ tiene las tres curvaturas no nulas.

$$\kappa = \frac{\sqrt{v_K^2 \mathbb{K}^2 + v_L^2 \mathbb{L}^2}}{mc} \tag{101}$$

$$\tau = \frac{(\mathbb{K}^2 - \mathbb{L}^2)}{mc} \sqrt{-\frac{v_K^2\, v_L^2}{v_K^2 \mathbb{K}^2 + v^2 \mathbb{L}^2}} \tag{102}$$

$$\lambda = \frac{1}{mc} \sqrt{-\frac{\mathbb{K}^2 \mathbb{L}^2}{v_K^2 \mathbb{K}^2 + v_L^2 \mathbb{L}^2}} \tag{103}$$

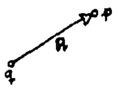
Los valores de las curvaturas dependen de la velocidad inicial, pero las cantidades $\kappa^2 - \tau^2 - \lambda^2$ y $\kappa\lambda$ no,

$$\kappa^2 - \tau^2 - \lambda^2 = \frac{\mathbb{K}^2 - \mathbb{L}^2}{(mc)^2} \tag{104}$$

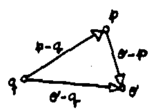
$$\kappa\lambda = \frac{\sqrt{-\mathbb{K}^2 \mathbb{L}^2}}{(mc)^2} \tag{105}$$

El evento q está dado por la ecuación 100.

Apéndice



El espacio-tiempo de Minkowski $\mathcal{M}$ es un espacio afín con espacio vectorial $\mathcal{V}$, esto quiere decir que los vectores son las translaciones de los puntos (llamados eventos) de $\mathcal{M}$. Por ejemplo la translación dada por el vector $a \in \mathcal{V}$, que lleva al evento q hasta el evento p, la escribimos como la suma $p = q + a$. Por ello también es usual representar el vector a como la "diferencia de eventos" $p - q = a$. Hay que notar que existen infinidad de parejas (q, p) para cada a, pero si fijamos el evento q la función $(q, p) \rightsquigarrow p - q$ es biyectiva. Por otra parte toda terna de eventos (q, p, σ) cumple con $\sigma - q = (p - q) + (\sigma - p)$. Estas son las principales propiedades de $\mathcal{M}$ como espacio afín. Cabe añadir que la dimensión de $\mathcal{V}$ sobre $\mathbb{R}$ es 4.



Además tenemos la métrica de Lorentz, es una forma bilineal simétrica no degenerada $G : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$. Referida a una base ortonormal de $\mathcal{V}$, $\{e_\mu\}$, la función G tiene las componentes siguientes $g_{\mu\nu} = G(e_\mu, e_\nu)$, donde $g_{00} = -g_{ii} = 1$ (para $i = 1, 2, 3$) y $g_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$. Para dos vectores cualesquiera $z = z^\mu e_\mu$ y $w = w^\mu e_\mu$ tenemos $G(z, w) = z^\mu w^\nu g_{\mu\nu} = z \cdot w$.

Damos el nombre de trayectorias a aquellas curvas en el espacio-tiempo $\tau : \mathcal{I} \to \mathcal{M}$ que están parametrizadas con su longitud ξ y cuya velocidad $v = d\tau / d\xi$ es un vector temporaloide (i.e. $G(v, v) = 1$). En consecuencia la transformación $v(0) \rightsquigarrow v(\xi)$ es una isometría. Como de una u otra manera aparecen este tipo de transformaciones, lo idóneo es introducir una estructura algebraica que facilite su manejo. Una posibilidad es el álgebra de Clifford de la forma G.

Dicho sea con toda vaguedad e imprecisión, el álgebra de Clifford es el álgebra de los tensores totalmente antisimétricos y se incluyen los vectores y los escalares.

Una de las definiciones más simples de exponer recurre al álgebra tensorial $T(\mathcal{V})$ sobre $\mathcal{V}$, y al ideal bilateral $\mathcal{B}$ generado por los elementos de la forma $v \otimes w + w \otimes v - 2G(v, w)$, el álgebra de Clifford $\mathcal{C}$ de la forma G es el álgebra cociente $\mathcal{C} = T(\mathcal{V}) / \mathcal{B}$.

Tal definición de $\mathcal{C}$ tiene la ventaja de que la asociatividad en $\mathcal{C}$ se sigue de la de $T(\mathcal{V})$, pero la gran desventaja de que $\mathcal{B}$, al igual que $T(\mathcal{V})$, es un espacio de dimensión infinita, y ello hace del cociente un hueso duro de roer.

Usaremos mejor una construcción formal basada en un producto asociativo entre vectores, llamado producto de Clifford; no emplearemos símbolo para representarlo, para el producto de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ escribiremos sencillamente $\mathbf{ab}$. La expresión fundamental es

$$\mathbf{ab} + \mathbf{ba} = 2\,G(\mathbf{a},\mathbf{b}) \qquad (A.1)$$

Analicemos un par de casos. Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos entonces $\mathbf{ab} = G(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales entonces $\mathbf{ab} = -\mathbf{ba}$, es decir los vectores anticonmutan y el elemento $\mathbf{ab} \in \mathcal{C}$ no es escalar ni vector, se trata de un nuevo objeto que llamaremos bivector y podemos pensarlo como un área orientada.

En general el producto de dos vectores $\mathbf{ab} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ tiene una parte escalar $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ y una bivectorial $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = (\mathbf{ab}-\mathbf{ba})/2$ (el producto cuña $\wedge$ es similar al del álgebra de Grassmann).

Con las combinaciones lineales sobre $\mathbb{R}$ de los bivectores $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ se forma un espacio vectorial de dimensión 6. El resto del álgebra $\mathcal{C}$ se construye con productos triples y cuádruples, esto es más claro si empleamos una base ortonormal de $\mathcal{V}$, $\{\mathbf{e}_\mu\}$. Los seis bivectores $\mathbf{e}_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\nu$, con $\mu<\nu$, forman una base del espacio de los bivectores $\mathcal{C}^2$, y los cuatro trivectores $\mathbf{e}_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\gamma$ $(\alpha<\beta<\gamma)$ forman una base del espacio de los trivectores $\mathcal{C}^3$. Por último el espacio de los pseudoescalares $\mathcal{C}^4$ es unidimensional y tiene por base a $\{\mathbf{e}_{0123}\}$. No hay pentavectores porque el producto $\mathbf{e}_{0123}\,\mathbf{e}_\nu$ se reduce a un trivector (v.g., $\nu=1$, $\mathbf{e}_{0123}\mathbf{e}_1 = (-1)^2\mathbf{e}_{01}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_{23} = \mathbf{e}_0(-1)\mathbf{e}_{23} = -\mathbf{e}_{023}$).

Un multivector o elemento de $\mathcal{C} = \mathbb{R}\oplus\mathcal{V}\oplus\mathcal{C}^2\oplus\mathcal{C}^3\oplus\mathcal{C}^4$ tiene la forma

$$M = m + m^\alpha \mathbf{e}_\alpha + m^{\alpha\beta}\mathbf{e}_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta\gamma}\mathbf{e}_{\alpha\beta\gamma} + m^{0123}\mathbf{e}_{0123} \qquad (A2)$$

por lo anterior la dimensión de $\mathcal{C}$ es 16.

Cualquier tensor totalmente antisimétrico se puede representar mediante un elemento de $\mathcal{C}$; por ejemplo, al tensor de Levi-Civita con componentes $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ respecto a la base $\{\mathbf{e}_\mu\}$ le corresponde el pseudoescalar $\mathbf{e}_{0123}$.

Veamos ahora la relación de $\mathcal{C}$ con las isometrías de $\mathcal{V}$. Para

toda isometría $\mathcal{L}$ (i.e. $v \rightsquigarrow \mathcal{L}(v)$ con $G(v,v) = G(\mathcal{L}(v), \mathcal{L}(v))$) hay un elemento invertible $S_{\mathcal{L}} \in \mathcal{G}$ con las propiedades siguientes
a) si $\mathcal{L}$ es una rotación entonces $S_{\mathcal{L}}$ es un multivector de orden par (i.e. $S_{\mathcal{L}} \in \mathcal{G}^{+} = R \oplus \mathcal{G}^{2} \oplus \mathcal{G}^{4}$) y

$$\mathcal{L}(v) = S_{\mathcal{L}}\, v\, S_{\mathcal{L}}^{-1} \tag{A3}$$

para todo vector $v \in \mathcal{V}$.
b) si $\mathcal{L}$ es una reflexión entonces $S_{\mathcal{L}}$ es un multivector de orden impar (i.e. $S_{\mathcal{L}} \in \mathcal{G}^{-} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{G}^{3}$) y

$$\mathcal{L}(v) = -S_{\mathcal{L}}\, v\, S_{\mathcal{L}}$$

para todo vector $v \in \mathcal{V}$

Cuando $\mathcal{L}$ es una rotación es posible expresar el multivector $S_{\mathcal{L}}$ en términos de un bivector $H \in \mathcal{G}^{2}$ con la siguiente ecuación

$$S_{\mathcal{L}} = e^{H/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{H}{2}\right)^{n} \tag{A4}$$

Consideremos las posibles estructuras del bivector H. Un bivector es simple si podemos expresarlo como el producto de dos vectores $H = ab$ (a y b necesariamente ortogonales). Si H es simple entonces $H^{2} = -a^{2}b^{2} \in R$, H^{2} puede ser positivo, negativo o nulo dependiendo de qué tipo de vectores son a y b, temporaloide uno y espacialoide el otro, o ambos espacialoides, o uno luminoide. Si hacemos $H = (H^{2})^{1/2}$ cuando $H^{2} > 0$, o $H = (-H^{2})^{1/2}$ si $H^{2} < 0$ entonces

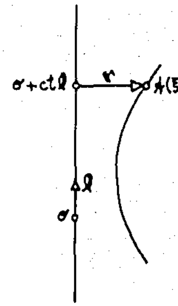
$$S_{\mathcal{L}} = \left\{ \begin{array}{ll} \cosh(H/2) + H \operatorname{senh}(H/2) & , H^{2} > 0 \\ \cos(H/2) + H \operatorname{sen}(H/2) & , H^{2} < 0 \\ 1 + H & , H^{2} = 0 \end{array} \right\} \text{ H simple} \tag{A5}$$

Puede darse el caso de que H no sea simple, por ejemplo $H = e_{01} + e_{23}$, esto ocurre cuando $H^{2} \notin R$. En tal situación la ecuación A5 no es válida, sin embargo es posible hallar dos bivectores simples A y B que conmutan ($AB = BA$) y que $H = A + B$, entonces

$$S_{\mathcal{L}} = e^{H/2} = e^{(A+B)/2} = e^{A/2}\, e^{B/2} = e^{B/2}\, e^{A/2} \tag{A6}$$

La subálgebra par $\mathcal{G}^+ = \mathbb{R} \oplus \mathcal{G}^2 \oplus \mathcal{G}^4$ es útil también en la descripción que de una trayectoria $\mathcal{A}$ hace un observador inercial en términos de su tiempo t y de un "vector de posición" $\vec{r}$ en su espacio de simultaneidad.

Caracterizan a un observador inercial su velocidad ℓ y el evento origen de sus coordenadas σ. La relación entre t y ξ se establece al exigir que el evento $\mathcal{A}(\xi)$ pertenezca al hiperplano de simultaneidad del evento $\sigma + ct\ell$, es decir $(\mathcal{A}(\xi) - (\sigma + ct\ell)) \cdot \ell = 0$. Esto nos permite escribir la ecuación



$$\mathcal{A}(\xi) = \sigma + ct\ell + \mathbf{r}$$

donde $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$ y es ortogonal a ℓ. Es aquí donde introducimos la proyección $\mathcal{V} \to \mathbb{R} \oplus \mathcal{G}^2$, $w \rightsquigarrow w\ell$, y la aplicamos al vector $\mathcal{A}(\xi) - \sigma$

$$(\mathcal{A}(\xi) - \sigma)\ell = ct + \mathbf{r}\ell \qquad \text{(A7)}$$

La parte escalar de A7 contiene el vínculo entre ξ y t, mientras que la parte bivectorial $\mathbf{r}\ell$ representa la "posición" $\vec{r}$ de $\mathcal{A}$ relativa al observador. Esto es barroco y obedece a la simplicidad de la geometría que usa el observador, v. g. el "vector de posición" $\vec{r}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$ son para el observador magnitudes físicas diferentes pero de igual naturaleza geométrica, mientras que en el contexto de las álgebras $T(\mathcal{V})$ y $\mathcal{G}$ se representan con objetos geométricos diferentes.

Bibliografía

1) B. O'Neill. Elementary Differential Geometry. Academic Press, 1966.
2) F. and R. Nevanlinna. Absolute Analysis. Springer, 1973.
3) W. Greub. Multilinear Algebra. Springer, 1978.
4) D. Hestenes. Space-Time Algebra. Gordon and Breach, 1966.
5) F. Rohrlich. Classical Charged Particles. Addison-Wesley, 1965.
6) W. Noll. Euclidean Geometry and Minkowskian Chronometry. (publicado en The Foundations of Mechanics and Thermodynamics. Selected Papers by W. Noll. Springer, 1974).
7) W. Thirring. A Course in Mathematical Physics. 1 Classical Dynamical Systems. Springer, 1978.
8) M. Riesz. Clifford Numbers and Spinors. Lecture series No. 38, The Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland, 1958.