# UNIVERSIDAD ANAHUAC DEL SUR

## ESCUELA DE ACTUARIA

Con estudios incorporados a la Universidad Nacional Autónoma de México

VINCE IN BONO MALUM

Universidad Anáhuac
del Sur

# SINTESIS DE LOS NUEVOS ENFOQUES PROBABILISTICOS DEL CALCULO ACTUARIAL Y ANALISIS DE SU APLICACION EN EL SEGURO DE VIDA



**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

**A C T U A R I O**

P R E S E N T A

**MARTIN ESPINOSA ZALDIVAR**

Director de Tesis: ACT. JORGE RENDON ELIZONDO

MEXICO, D. F. 1989

# INDICE.

## SINTESIS DE LOS NUEVOS ENFOQUES PROBABILISTICOS DEL CALCULO ACTUARIAL Y ANALISIS DE SU APLICACION EN EL SEGURO DE VIDA.

Capitulo III

Aplicaciones probabilisticas en el cálculo actuarial.



Capítulo IV

## Introducción.

En el proceso de la toma de decisiones es muy importante tener alguna forma de medir o anticipar los resultados que se pudieren obtener de alguna actividad en particular para saber si es o no conveniente realizar alguna acción; si ésta se lleva o no a cabo, no sólo depende del nivel de información que se tenga sino también de la aversión al riesgo que se manifieste en particular (existen personas que juegan a los dados sabiendo que la probabilidad de éxito es muy baja; hay quienes juegan sin saberlo; hay quienes la saben y no juegan, etc..), así como de los resultados del análisis que se realice.

Esto también es válido cuando la actividad que se desea realizar es la de asegurar, se pueden desarrollar modelos para poder cubrir las posibles pérdidas económicas provenientes de la manifestación de ciertos riesgos, basandose en la teoría de probabilidades.
De esta forma los sistemas de seguros se establecen para reducir el impacto financiero adverso de algunos tipos de eventos contingentes.

Todo plan de seguros es, en sus términos más simples, un método de diseminar entre un gran número de personas una posible pérdida financiera demasiado grave como para que pueda soportarla un solo individuo.

La característica esencial de todo plan de seguros es la cooperación de un grán número de personas, quienes, en efecto, convienen en participar proporcionalmente del riesgo contra el cual se desea la cobertura del seguro. Esto es para evitar fluctuaciones violentas año con año basándonos en la experiencia sobre pérdidas, y para que la parte de la pérdida en que se incurra sea relativamente pequeña para cada individuo.

Cuando alguien compra un seguro, transfiere el peso del riesgo a quien desea soportarlo que en este caso es una institución aseguradora a cambio de un precio determinado. Así se realiza lo que se llama un contrato de seguro en el cual están estipuladas las condiciones bajo las cuales una de las partes tiene que pagar la suma asegurada cuando suceda la eventualidad cubierta, a cambio de uno o una serie de pagos que se llaman primas, las cuales por sí solas no serían suficientes para cubrir la suma asegurada de un individuo en particular en un momento dado; lo que hace que el seguro funcione, es que son muchas las personas que se aseguran y de esta forma puede utilizarse la teoría de probabilidades en el cálulo de las reclamaciones esperadas y de la prima necesaria para cubrirla.

La prima que se cobra está calculada con un proceso técnico que involucra monto, tiempo, interés y mortalidad.

Para que la compañía pueda afrontar las reclamaciones que se presenten, se tiene que constituir lo que llamamos reserva, la cual se determina a través de sistemas que permitan a las compañías de seguros o mutualistas mantener un equilibrio técnico en relación a las obligaciónes contraídas y a las bases demográficas y financieras, para que exista congruencia entre los cobros y los pagos.

La reserva puede ser explicada desde otro punto de vista. Cuando una póliza es emitida, el valor actual o descontado de todas las primas netas debe ser igual al valor descontado del beneficio prometido en la póliza. En cualquier tiempo después de la fecha de emisión de la póliza, la diferencia entre el valor aumentado del seguro, y el valor disminuído de las primas netas futuras, debe ser suplida por los fondos en existencia; de otra manera, la compañía no podrá cubrir su obligación en un momento dado.

La teoría de riesgo se define como el estudio de las desviaciones de los resultados financieros esperados y de la forma de contrarrestar las consecuencias de dichas desviaciones.

Lo que nos interesa en el desarrollo de esta tésis, es una parte del estudio del ramo asegurador; particularmente nos centraremos en el seguro de vida.

Desarrollando modelos estadísticos o probabilísticos de la contingencia de la vida podemos entrar o aproximarnos a la teoría de riesgo y de esta forma prever el comportamiento futuro de una cartera de seguro de vida de tal suerte que podamos acercarnos de la mejor forma posible a la realidad. Pero como no podemos saber con exactitud el desarrollo de la cartera, no estamos exentos de desviaciones posibles en el transcurso del tiempo.

Las organizaciones adoptarán el modelo estocástico de cálculo que más les convenga o que mejor represente sus preferencias o necesidades, con la intención de poder aminorar el impacto financiero incierto del evento contingente que en este caso es la muerte dentro del tiempo.

Estos modelos se han desarrollado desde hace bastante tiempo con bases tradicionales de cálculo actuarial, las cuales son bases teóricas bien fundamentadas y vigentes.

El estudio que se realiza en este trabajo es la posible aplicación de conceptos probabilísticos de desviaciones esperadas con ciertos márgenes de seguridad dentro de las bases teóricas, con el fin de poder llegar a obtener primas que contengan tanto la parte que cubre el riesgo como la parte que soporta desviaciones normales, basándonos en la ley de los grandes números.
Para el desarrollo de éste estudio se utilizó el nuevo texto de Cálculo Actuarial que se menciona en la bibliografía.

Los modelos que veremos en este trabajo representan de una forma bastante aceptable los resultados esperados de la contingencia de vida, pero en la realidad no quiere decir que dicho resultado se presente con exactitud.

La presente tésis consta de cuatro capítulos, que son: el primer capítulo "Nociones Probabilísticas", hecho con el fín de introducir al lector en diversas definiciones que serán usadas en capítulos posteriores.

En el segundo capítulo llamado "Fundamentos básicos del cálculo actuarial", se exponen las bases teóricas del cálculo actuarial.

En el tercer capítulo "Aplicaciones probabilísticas en el cálculo actuarial", se propone la aplicación de la teoría de probabilidad en el cálculo de las desviaciones para la obtención de primas recargadas con ciertos márgenes de seguridad.

Para terminar la presente tésis se presenta en el cuarto capítulo las "Conclusiones".

# Capítulo I.

## Nociones probabilísticas.

Dentro de cualquier tema que se quiera tratar o del cual se quiera hacer referencia, se deben de tener las mismas bases o debe de hablarse el mismo idioma de forma tal que exista la comprensión o entendimiento entre el comunicador y el comunicado. Como también para poder profundizar en un tema debemos tener ciertos conocimientos precedentes para poder emitir un juicio acorde a lo que nos estamos refiriendo, (para entender lo que es multiplicar antes se tiene que saber sumar), en el presente capítulo se pretende conceptualizar algunas definiciones que usaremos de forma explícita o implícita en los capítulos posteriores a éste, con el propósito de homogeneizar los conceptos o bien introducir al lector en los mismos.

### 1.-Espacio Muestral.

Un conjunto A que consiste en todos los resultados de un evento aleatorio, se llama espacio muestral y cada uno de los resultados se denomina punto muestral. Con frecuencia habrá más de un espacio muestral que describe los resultados de un experimento, pero hay comunmente sólo uno que suministra la mayoría de la información. Obsérvese que A corresponde al conjunto universal.

Si un espacio muestral tiene un número finito de puntos, se denomina espacio muestral finito. Si tiene tantos puntos como números naturales se denomina espacio muestral infinito contable. Si tiene tantos puntos como hay en un intervalo en el eje x, tal como $0 \le x \le 1$ se denomina espacio muestral infinito no contable.
Un espacio muestral que es finito o infinito contable frecuentemente se denomina espacio muestral discreto, en tanto uno que es infinito no contable se llama espacio muestral continuo o no discreto.

Un suceso es un subconjunto B del espacio muestral A, es decir, es un conjunto de resultados posibles. Si el resultado de un experimento es un elemento de B se dice que el suceso B ha ocurrido. Un suceso, puede ser también de un solo elemento, y entonces se llama suceso elemental o simple.

### 2.-Probabilidad.

En cualquier experimento aleatorio siempre hay incertidumbre sobre si un suceso específico ocurrirá o no. Como medida de la oportunidad o probabilidad con la que podemos esperar que un suceso ocurra es conveniente asignar un número entre 0 y 1. Si la probabilidad de que un suceso ocurra es la certeza, el valor que tomará será de 1, y al contrario, si el evento no ocurrirá su valor asignado sera de 0.
La probabilidad de un suceso se obtiene de la siguiente manera: Si un suceso puede ocurrir de h maneras diferentes de un número total de n maneras, entonces la probabilidad (p) del suceso es h/n.
Ahora bien supóngase que el conjunto A está formado por los

sucesos A1, A2, ..., An, entonces:

$$P(A) = P(A1) + P(A2) + \ldots + P(An)$$

y como $P(A) = 1$ entonces $P(A1) + P(A2) + \ldots + P(An) = 1$

Sean C y B dos sucesos tales que $P(C)>0$. Denotamos $P(B/C)$ como B dado que C ha ocurrido. Puesto que se sabe que C ha ocurrido, se convierte en el nuevo espacio muestral, reemplazando el original A, y de aquí se llega a:

$$P(B/C) = P(C\cap B)/P(C).$$

Ejemplo: supóngase que se tiene una baraja y se saca una carta aleatoriamente y se quiere saber la probabilidad de que sea un 10.

$p = h/n$ $h$ = total de dieces
$n$ = total de cartas

$$p = 4/52 = 1/13$$

## 3.-Variables Aleatorias

Supóngase que a cada punto del espacio muestral le asignamos un número. Así definimos una función en el espacio muestral que llamaremos variable aleatoria (o variable estocástica) o más preciso función aleatoria (o estocástica). Comunmente se denota por una letra mayúscula como X o Y. En general una variable aleatoria tiene algún significado físico, geométrico u otro.

Una variable aleatoria de un espacio muestral discreto será una variable aleatoria discreta, y una variable aleatoria de un espacio muestral continuo sera una variable aleatoria continua.

## 4.-Distribuciones de Probabilidad discreta.

Sea X una variable aleatoria discreta y supóngase que los valores posibles que puede tomar están dados por x1, x2, x3,... , ordenados en orden creciente de magnitud. Supóngase también que los valores se asumen con probabilidades dadas por:

$$P(X=x_k) = f(x_k) \qquad k = 1,2,3\ldots$$

Es conveniente introducir la función de probabilidad, también conocida como la distribución de probabilidad, definida por:

$$P(X=x) = f(x)$$

En general $f(x)$ es una función de probabilidad si:

$$f(x) \geq 0 \quad y \quad \sum_{x=1}^{n} f(x) = 1$$

## 5.-Función de Distribución.

Ahora bien la función de distribución acumulada o simplemente la función de distribución, para una variable aleatoria discreta X se define por:

$$P(X \leq x) = F(x)$$

donde x es cualquier número real, es decir $-\infty < x < \infty$. La función de distribución puede obtenerse de la función de probabilidad notando que:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)$$

Recíprocamente la función de probabilidad puede obtenerse de la función de distribución.
Si X toma un número finito de valores x1, x2, ..., xn entonces la función de distribución esta dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x1 \\ f(x1) & x1 \leq x \leq x2 \\ f(x1)+f(x2) & x2 \leq x \leq x3 \\ \vdots & \vdots \\ f(x1)+f(x2)+\ldots f(xn) & xn \leq x \leq \infty \end{cases}$$

## 6.-Distribución de probabilidad continua.

Si X es una variable aleatoria continua, la probabilidad de que X tome un valor determinado generalmente es cero. Por tanto no se puede definir una función de probabilidad en la misma forma que para una variable aleatoria discreta. Para llegar a una distribución de probabilidad para una variable aleatoria continua notamos que la probabilidad de que X se encuentre entre dos valores diferentes tiene significado. Entonces existe una función $f(x)$ tal que:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

donde esta última es una proposición matemática del hecho que una variable aleatoria de valor real debe encontrarse ciertamente entre $-\infty$ e $\infty$. Entonces definimos la probabilidad de que X se encuentre entre a y b como:

$$P(a<X<b)= \int_a^b f(x)\ dx.$$

Una función $f(x)$ que satisface los requisitos anteriores se llama función de probabilidad o distribución de probabilidad para una variable aleatoria continua, pero con mayor frecuencia se denomina función de densidad de probabilidad o simplemente función de densidad.

### 7.-Función de distribución (caso continuo)

Se define la función de distribución $F(x)$ para una variable aleatoria continua por:

$$F(x) = P(X\leq x)=P(-\infty<X\leq x)= \int_{-\infty}^{x} f(u)\ du.$$

La probabilidad de que X se encuentre entre x y $x+\Delta x$ esta dada por:

$$P(x\leq X\leq x+\Delta x)= \int_{x}^{x+\Delta x} f(u)du$$

así que si x es pequeño tenemos aproximadamente

$$P(x\leq X\leq x+\Delta x)= f(x)\Delta x$$

También se observa que al diferenciar ambos lados

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

para todos los puntos donde $f(x)$ es continua. Es decir la derivada de la función de distribución es la función de densidad.

### 8.-Esperanza matemática.

Para una variable aleatoria discreta donde X puede tener los siguientes valores $x1, x2, \ldots, xn$ la esperanza matemática o valor esperado se define como:

$$E(X) = x1P(X=x1) + x2P(X=x2) + \ldots + xnP(X=xn) = \sum_{i=1}^{n} xiP(X=xi)$$

o igualmente si $P(X=xi) = f(xi)$

$$E(X)= \sum_{i=1}^{n} xi\ f(xi).$$

Para una variable aleatoria continua X que tiene función de densidad $f(x)$ la esperanza de X se define como:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

La media o esperanza de X da un valor típico o promedio de los valores de X, y por esta razón se le llama medida de centralización. Generalmente se denota por $\mu$.

Si queremos calcular la expectación de funciones tales como $X^2$, en general la probabilidad de $X^2 = x^2_k$ no es $f(x_k)$ sino $f(x_k) + f(-x_k)$. Y $E(X^2)$ es definida como la suma de $x^2_k\ (f(x_k) + f(-x_k))$, obviamente bajo todas circunstancias:

$$E(X^2) = \sum x^2_k\ f(x_k) \ldots\ldots\ldots 1$$

## 9.-Varianza

Junto con la esperanza matemática otra cantidad que goza de gran importancia en probabilidad y estadística es la varianza y se define por:

$$Var(X) = E((X-\mu)^2)$$

La varianza es un número no negativo que se denota por $\sigma^2$, la desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza y es $\sigma$.

Si X es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $f(x)$, entonces la varianza es:

$$E((X-\mu)^2) = \sum_{i=1}^{n} (xi-\mu)^2\ f(xi)$$

Para una variable aleatoria continua X que tiene una función de densidad $f(x)$, la varianza se define como:

$$E((X-\mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\ f(x)dx$$

La varianza y la desviación típica son unas medidas de dispersión o variación de los valores de la variable aleatoria alrededor de $\mu$. Si los valores tienden a concentrarse alrededor de la media, la varianza es pequeña, en tanto; que si los valores tienden a distribuirse lejos de la media, la varianza es grande.

Si desarrollamos el binomio $(X-\mu)^2$ tenemos que:

$$E((X-\mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2_j - 2\mu x_j + \mu^2)\, f(x_j) =$$

$$= E(x^2) - 2\mu E(x) + \mu^2 = E(x^2) - \mu^2 \quad \ldots\ldots\ldots.2$$

## 10.-Variables aleatorias normalizadas.

Sea X una variable aleatoria con media $\mu$ y desviación típica $\sigma$ $(\sigma>0)$. Entonces podemos definir una variable aleatoria normalizada como:

$$X' = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Una propiedad importante de X' es que tiene media cero y varianza 1. Además X' es adimensional, esto es, que no tiene dimensiones aunque X las tenga.

Los valores de una variable normalizada se denominan algunas veces referencias tipificadas y X se dice está expresada en unidades tipificadas (es decir, se toma como unidad al medir $(X-\mu)$. Las variables normalizadas son útiles para comparar diferentes distribuciones.

## 11.-Momentos.

El momento r de una variable aleatoria X alrededor de la media x, también conocido como el momento central r, se define como:

$$\mu_r = E(X-\mu)^r$$

donde r= 0,1,2,... Se deduce que $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \sigma^2$, es decir, el segundo momento central o segundo momento alrededor de la media es la varianza.

Tenemos que es igual a:

$$\mu_r = \sum_{i=1}^{n} (xi-\mu)^r\, f(xi) \text{ para variables discretas.}$$

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r\, f(x)dx \text{ para variables continuas.}$$

Sea X una variable aleatoria con función de distribución $f(x_j)$ y sea r>0 y entero, si la expectación de la variable aleatoria $X^r$ existe, entonces es llamada r-ésimo momento de X alrededor del origen........................3

$$\mu_r' = E(X^r) \qquad \text{donde } r=0,1,2,\ldots \text{ y } x=0.$$

## 12.-Función Generatríz de momentos.

La función generatríz de momentos se define como:

$$Mx(t) = E(e^{tx})$$

es decir $Mx(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} f(xi)$ (variables discretas).

$$Mx(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx \text{ (variables continuas).}$$

En general si la función generatríz de momentos existe, aplicando las derivadas para t = 0, tenemos:

$$M'(0) = E(X)$$
$$M''(0) = E(X^2)$$
$$M^r(0) = E(X^r)$$

donde $\mu = M'(0)$ y $\sigma^2 = M''(0) - (M'(0))^2$................4

## 13.-Distribución Normal.

Uno de los más importantes ejemplos de una distribución de probabilidad continua es la distribución normal, algunas veces denominada la distribución gaussiana. La función de densidad para la distribución esta dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

donde $\mu$ y $\sigma$ son la media y la desviación típica respectivamente. La función de distribución es:

$$F(x) = P(X<x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

En este caso decimos que la variable aleatoria X esta normalmente distribuida con media $\mu$ y varianza $\sigma^2$.

Si hacemos que Z sea la variable normalizada correspondiente a X, es decir si hacemos

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Entonces la media o valor esperado de Z es 0 y la varianza es 1. En este caso la función de densidad para Z puede obtenerse sustituyendo $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, resultando:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

Este resultado se conoce como la función o la distribución de densidad normal tipificada, y la función de distribución correspondiente esta dada por:

$$F(z) = P(Z \leq z) = f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2} du =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z} e^{-u^2/2} du$$

Al valor z de la variable tipificada se le llama el valor tipificado. La función F(z) esta relacionada con la función error, erf(z). Tenemos:

$$erf(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-u^2} du$$

$$y \; F(z) = \frac{1}{2} [ 1 + erf(\frac{z}{\sqrt{2}}) ]$$

## 14.- Notas y Referencias.

1.- Ver An Introduction to probability, Theory and its aplications, Wiliam Feler, Volume I, Willey International Edition, 1967, 3rd Edition, página 221.

2.- Ver An Introduction to probability, Theory and its aplications, Wiliam Feler, Volume I, Willey International Edition, 1967, 3rd Edition, página 228.

3.- Ver An Introduction to probability, Theory and its aplications, Wiliam Feler, Volume I, Willey International Edition, 1967, 3rd Edition, página 227.

4a.- Ver Probability and statistical Inference, Robert V. Hogg. Eliot A. tanis, Mcmilan Publishing Co., Inc. N.Y., 1977, página 62.

4b.- Ver Probabiidad y estadística, Murray R. Spiege, McGraw-Hill Book Co., 1975, página 98 problema 3.38.

# Cap II.

## Fundamentos Básicos del Cálculo Actuarial.

El patrón normal de mortalidad observado a través de la vida humana es conocido, de tal suerte que la eliminación de vida por muerte normalmente se comporta de la siguiente manera: eliminación importante por mortalidad infantil o por un gran número de muertes en la infancia que va disminuyendo en la niñez y que se incrementa durante la adolescencia y madurez acelerándose conforme el límite de la vida se acerca.

Para empezar el trabajo que se quiere realizar en la tesis, se tiene que hacer notar la importancia del estudio de estos efectos, empezando con la definición de una funcion fundamental de probabilidad.

### 1.-Función de sobrevivencia

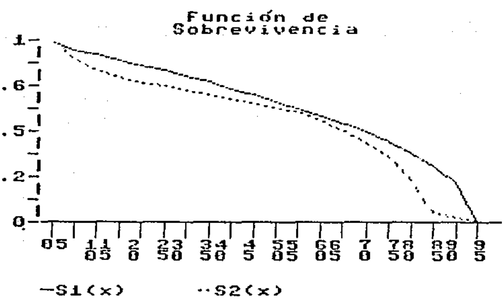
Sea x la variable que representa la edad en años de la vida humana, la cual tomará valores desde 0 hasta el límite superior de la vida humana.

Consideremos la probabilidad de que un recién nacido de edad 0 sobreviva una cierta edad x, $p(X>x)$. Esta probabilidad la representaremos como una función de x y le llamaremos función de sobrevivencia, S (x).

Esta función de sobrevivencia es decreciente mientras x crece; así la probabilidad de sobrevivencia a edad x es más grande que la probabilidad de sobrevivencia a edad x+t para t>0, S(x) es una función contínua de x; cuando x=0 S(x)=1, y cuando x toma el valor último de la vida s(x)=0. A este valor último al que nos referimos, lo llamaremos $\omega$.

En conclusión S(x) es una función continua de x definida en el intervalo:

$0 \le x \le \omega$ y $0 \le S(x) \le 1$



Definamos una función de probabilidad fundamental donde x representa la edad de vida y puede tomar valores desde 0 hasta el límite superior $w$.

Sea $F(x)$ la función de distribución de x donde $F(x) = pr(X \leq x)$ $x \geq 0$ en donde $F(0) = 0$ y por lo tanto $S(0) = 1$, usando estas definiciones podemos representar la probabilidad de muerte en términos de la función de sobrevivencia o en términos de la función de distribución. Así la probabilidad de que un recién nacido llegue con vida a una cierta edad x es $pr(X>x) = S(x)$.

La probabilidad de un recién nacido de morir entre la edad Y y Z $(y<z)$ es:

$$Pr(y<x\leq z) = F(z)-F(y) = S(y)-S(z)$$

La función de sobrevivencia puede ser representada (cumpliendo los requisitos) por una función lineal, por ejemplo:

Sea la función de sobrevivencia $1-x/100 = S(x)$, donde para una persona de edad 0 tenemos que $S(0) = 1$, y para el límite $w$, que en este caso es 100, $s(100)=0$.

Es decir, para calcular la probabilidad de que una persona muera entre edad x y z dado que sobrevivió hasta la edad x es:

$$p(x<X\leq z|X>x) = \frac{F(z) - F(x)}{1-F(x)} = \frac{S(x) - S(z)}{S(x)}$$

Supóngase que se quiere saber la probabilidad de que una persona de edad 20 muera entre los 20 y los 30 años de edad, entonces $s(20)=.8$ y $s(30)=.7$, y donde la probabilidad se obtiene de la siguiente forma:

$$p(20<X\leq 30|X>20) = \frac{.8 - .7}{.8} = .125$$

Ahora bien sea $T(x)$ una función de distribución que consiste en el número de años vividos por las personas de edad x hasta su completa existencia, a la cual se le llama cantidad de existencia, la cual representa X-x.

La función de distribución $t(x)$ que representa la probabilidad de que una persona edad x muera dentro de t años se denota por:

$${}_tq_x = pr(T(x)\leq t) \quad t\geq 0.$$

La probabilidad de que x llegue con vida a edad x+t se representa por tpx y es la función de probabilidad que mide la sobrevivencia de x.

$${}_tp_x = \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0} = \frac{S(x+t)}{S(x)}$$

$${}_tq_x = \frac{1-S(x+t)}{S(x)}$$

## 2.-Fuerza de mortalidad

Es evidente que la intensidad de la mortalidad varía a cada momento y es importante conocer esa variación instantánea que puede ser obtenida usando la densidad de probabilidad de muerte a edad x. Si partimos de la probabilidad de que x sobreviva a edad x+Δx dado que sobrevivió a edad x, tenemos:

$$Pr(x<X\leq x+\Delta x \mid X>x) = \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{1-F(x)} = \frac{f(x)\Delta x}{1-F(x)}$$

Sea $f(x) = F'(x)$ y $\mu x$ la definimos como la fuerza de la mortalidad, de donde:

$$\mu x = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{-S'(x)}{S(x)}$$

$$-\mu x dx = dLnS(x)$$

Integrando esta expresión de x a x+n, tenemos:

$$\int_x^{x+n} \mu y\ dy = Ln\ \frac{S(x+n)}{S(x)} = Ln\ {}_nP_x$$

y tomando exponenciales en ambos lados de la igualdad nos queda que:

$${}_nP_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu y\ dy}$$

o bien, sea $s = y-x$

$${}_nP_x = e^{-\int_0^{n} \mu x+s\ ds}$$

$$y\ {}_nq_x = 1 - {}_nP_x = 1 - e^{-\int_x^{x+n} \mu y\ dy}$$

Ahora bien como ${}_xP_0 = S(x) = e^{-\int_0^{x} \mu y\ dy}$

$$F(x) = 1 - S(x) = 1 - e^{-\int_0^{x} \mu s\ ds}$$

$$F'(x) = f(x) = e^{-\int_0^{x} \mu s\ ds}\ \mu_x = {}_xP_0\ \mu_x$$

Definamos G(x) como la función de distribucion de T(x), y g(x) como la distribución de probabilidad de T(x).

$$G(t) = {}_tq_x$$

$$g(x) = d\ {}_tq_x = \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{S(x+t)}{S(x)}\right) =$$

$$= \frac{S(x+t)}{S(x)} - \frac{S'(x+t)}{S(x+t)} = {}_tP_x\ \mu_{x+t}$$

Así tpx μx+t dt es la probabilidad de que una persona de edad x muera entre t y t+dt, si integramos de 0 a ∞ tenemos que:

$$\int_0^{\infty} {}_tP_x\ \mu_{x+t}\ dt = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

Esto quiere decir que la probabilidad de que una persona edad 0 muera en algún momento entre 0 e $\infty$ es la certeza.

## 3.-Tabla de mortalidad

Ahora bien, para facilitar el cálculo de las probabilidades vistas anteriormente, se utiliza lo que llamamos tabla de mortalidad, donde podemos ver cómo se comporta el efecto de la mortalidad en un grupo de recién nacidos.

Consideremos un grupo de 100 000 recién nacidos que denotaremos por lO, por lo tanto lO = 100 000. Para cada uno de los recién nacidos la edad de muerte tiene una distribución especificada por la función de sobrevivencia S(x). Denotaremos el número de sobrevivientes a edad x a partir de lo por Lx y su valor esperado será lx:

$$L(x) = \sum_{j=1}^{lo} Ij$$

donde Ij es un indicador de la sobrevivencia de la vida j;

$$Ij = \begin{cases} 1 \text{ si la vida } j \text{ sobrevive a edad } x \\ 0 \text{ si no sobrevive} \end{cases}$$

como E(Ij) = S(x) entonces

$$E(L(x)) = \sum_{j=0}^{lo} E(Ij) = lo\ S(x)$$

entonces lx = lO S(x)

De esta forma podemos encontrar el número de vivos a cualquier edad, y también el número de descesos entre la edad x y la edad x+n partiendo de los lO recién nacidos, los cuales se denotan por ndx.

$${}_nd_x = lO\ (S(x) - S(x+n)) = lx - lx+n$$

Sabiendo la relación que existe entre la función de sobrevivencia S(x) y el número esperado de vivos lx podemos representar las probabilidades vistas anteriormente por valores de lx sacándolos directamente de la tabla de mortalidad que representa un grupo determinístico de sobrevivencia, puesto que posee tasas de crecimiento negativo o decrementos y goza de las siguientes características:

a) El grupo inicial consiste de lO recién nacidos.

b) Los miembros del grupo están sujetos a cada edad de su vida a las tasas efectivas anuales especificadas por los valores de qx en la tabla de mortalidad.

c) El grupo es cerrado, es decir, a partir de los 10 recién nacidos no entra más gente al cálculo de la tabla.

Por lo tanto, para calcular el valor de lx se tiene:

$$l_x = l_{x-1}\,(1 - q_{x-1}) = l_{x-1} - d_{x-1} = l_0 - \sum_{y=0}^{x-1} dy$$

o bien

$$l_x = l_{x-1}\, p_{x-1} = l_0\,\left( \prod_{y=0}^{x-1} py \right) = l_0\; {}_xp_0$$

Usualmente una tabla de mortalidad en su tabulación edad por edad consiste de las funciones básicas qx, lx, dx y de éstas pueden derivarse otras.

Para calcular ${}_tq_x$ teníamos que:

$${}_tq_x = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)}$$

y conociendo la relación que existe entre la función de sobrevivencia S(x) y el valor esperado de vivos lx, multiplicamos y dividimos tqx por lo y tenemos:

$${}_tq_x = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)}\,\frac{l_0}{l_0} = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

y particularmente:

$$q_x = 1 - \frac{S(x+1)}{S(x)} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

la cual se calcula directamente de la tabla de mortalidad.

Ejemplo: Supóngase que se quiere calcular la probabilidad de que una persona de edad 20 llegue con vida a la edad de 30 años donde los valores en tablas son:

$l_{20}$=9909271
$l_{30}$=9705398

Como vimos anteriormente ${}_tp_x = \dfrac{lx+t}{lx}$

entonces ${}_{10}p_{20} = \dfrac{l_{20+10}}{l_{20}} = .979426$

Y si lo que queremos obtener es la probabilidad de una persona de edad 20 fallezca dentro del lapso de 10 años entonces aplicamos la fórmula siguiente:

${}_tq_x = 1 - {}_tp_x$ y nos queda ${}_{10}q_{20} = 1 - .979426 = .020574$

## 4.-Anualidades.

Sea p la probabilidad de que una persona reciba un cierto pago de cantidad k, el producto kp es su expectación o bien el valor esperado.

Si el pago se difiere por n unidades de tiempo, (generalmente años), el valor presente de la expectación será: kp $V^n$ donde $V^n$ es el descuento correspondiente a una cierta tasa de interés.

Ahora bien, sea una persona de edad x la que va a recibir el pago de una cantidad k al final de n años, con la condición de que al final de n años esté con vida. El valor presente del pago esperado será entonces K $_np_x$ $V^n$.

A este tipo de pago diferido se le llama una dotación pura de n años de k, y cuando se trata de la unidad utilizada (k=1) se le denota por nEx. Sustituyendo el valor de k tenemos que:

$$_nE_x = 1\ _np_x\ V^n = V^n \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Este valor puede ser calculado directamente de tablas de mortalidad e interés.

Estas dotaciones son pagos en caso de sobrevivencia o bien pagos contingentes por sobrevivencia.

El trabajo para el cálculo de estos valores puede ser reducido utilizando lo que se llama funciones conmutadas o valores conmutados.

Para determinarlos primero multiplicamos y dividimos el valor de nEx por $V^x$ y nos queda:

$$_nE_x = \frac{V^n\ l_{x+n}}{l_x} = \frac{V^x\ V^n\ l_{x+n}}{V^x\ l_x} = \frac{V^{x+n}\ l_{x+n}}{V^x\ l_x}$$

definimos Dx como $V^x$ $l_x$ entonces $_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$

La gran ventaja del uso de conmutados es la simplificación de cálculo de construcción y de manipulación, sobre todo en funciones más complejas que nEx.

A nEx se le conoce como la prima única neta de un dotal por una unidad a n años para una persona de edad x, es decir, es el valor que una persona edad x debe pagar ahora para que dentro de n años se le pague uno, si es que llega con vida.

Una anualidad contingente se conoce como la serie de pagos hechos continuamente o a intervalos iguales (años, semestres, trimestres, etc..) siempre y cuando la persona siga con vida.

Estos períodos de pagos pueden comenzar inmediatamente o después de un cierto período de tiempo, pueden ser por toda la vida o por un cierto período de tiempo, pueden ser vencidos o anticipados, siempre y cuando la persona continúe con vida.

Estas anualidades son utilizadas sobre todo en sistemas de pensiones para el cálculo de contribuciones, o del valor presente de la obligación, etc..

También juegan un papel importante en invalidez, seguros de compensación de trabajadores, etc...

Así pues, el valor presente del pago de una unidad anual a una persona de edad x comenzando al final del primer año y durante la vida de x, se conoce como una anualidad de por vida y se denota como $O_x$ y puede expresarse como la suma de una serie de dotaciones puras $tEx$:

$$O_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \dots =$$

$$= \sum_{t=1}^{\omega-x-1} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{\omega-x-1} V^t \, {}_tp_x$$

O bien expresada en valores conmutados, donde Nx es la suma de los valores de Dx desde x hasta $\omega$:

$$O_x = \sum_{t=1}^{\omega-x-1} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{1}{D_x} \sum_{t=1}^{\omega-x-1} D_{x+t} = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Para el caso de las anualidades temporales, el límite superior de la sumatoria cambia a n y la fórmula expresada en valores conmutados es:

$$O_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Ahora supongase que un grupo de personas de edad x realizan una aportación de la unidad a un fondo cada año mientras se encuentren con vida durante n años, y la cantidad que le correspondería a cada uno de los sobrevivientes se llamase monto de n años (o una anualidad acumulada) denotada por $S_{x:\overline{n}|}$ cuya fórmula puede derivarse de la suma de los montos individuales hechos año con año acumulados al final de n años actuarialmente. $Sx:\overline{n}|$ se calcularía entonces como:

$$S_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{{}_{n-1}E_{x+1}} + \frac{1}{{}_{n-2}E_{x+2}} + \frac{1}{{}_{n-3}E_{x+3}} + \dots + 1 =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}} = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_{x+t}}{D_{x+n}} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x+n}}$$

Como se ve $S_{x:\overline{n}|}$ es una anualidad temporal acumulada n años

$$S_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{{}_nE_x} \, Ox:\overline{n}|$$

**Nota:** valor presente (futuro) actuarial; la palabra actuarial implica que la expectación de vida u otro factor junto con el de interés, son utilizados para el cálculo.....2

Como se dijo anteriormente, la frecuencia del pago de la anualidad, bien puede ser anual, semestral, trimestral, etc.. .En el caso en que la frecuencia del pago sea instantáneo, la anualidad se convierte en una continua y se define como:

$$\bar{a}_x = \lim_{m \to \infty} a_x^{(m)}$$

donde m representa la frecuencia del pago, es decir el pago de una unidad anual se realiza momento a momento durante la vida de la persona de edad x mientras se encuentre con vida.

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} {}_tE_x \, dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{D_x} D_{x+t} \, dt = \int_0^{\infty} V^t \, {}_tp_x \, dt$$

El valor de esta anualidad usualmente se calcula con algún método de aproximación como el de Woolhause, donde:

$$\bar{a}_x \doteq a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} (\mu x + \delta) \text{ .........................3}$$

Los valores conmutados $\bar{D}x$ y $\bar{N}x$ correspondientes al cálculo de anualidades continuas se expresan de la siguiente forma:

$$\bar{D}_x = \int_0^{\infty} D_{x+t} \, dt$$

$$\bar{N}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \bar{D}_{x+t} \quad \text{o bien} \quad \bar{N}_x = \int_0^{\infty} D_{x+t} \, dt$$

entonces $\bar{a}_x$ se convierte en:

$$\bar{a}_x = \frac{\bar{N}_x}{D_x}$$

## 5.-Seguros de Vida.

Los beneficios por mortalidad son los pagos en el caso de fallecimiento, es decir, es el pago que se le da a un beneficiario por el evento de muerte de otra persona llamada asegurado, y como su nombre lo dice, a este tipo de contrato se le llama seguro de vida.

Al pago único, o a la prima única que debe pagar una persona de edad x para quedar asegurado por una unidad y durante n años se le denota por el símbolo $A\overset{1}{x}:\overline{n|}$ y se expresa como:

$$A\overset{1}{x}:\overline{n|} = V q_x + V^2 \, {}_1|q_x + \dots + V^n \, {}_{n-1}|q_x$$

Cada miembro de esta expresión representa la probabilidad de muerte de una persona edad x año con año, y traído a valor presente. Tomando sumatorias y factorizando, la expresión se reduce a:

$$A\dot{x}:\overline{n|} = \sum_{t=0}^{n-1} V^{t+1}\ {}_{t|}q_x = \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{n-1} V^{t+1}\ d_{x+t}$$

Cuando el período de aseguramiento *n* es por toda la vida, el seguro se llama ordinario de vida, y el límite superior n se convierte en w-x y la prima única se calcula así:

$$A\dot{x} = \sum_{t=0}^{w-x-1} V^{t+1}\ {}_{t|}q_x = \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{w-x-1} V^{t+1}\ d_{x+t}$$

Para simplificar tanto la escritura como el cálculo de dichos seguros se han desarrollado los valores conmutados que se determinan de la siguiente manera:

$$Cx = d_x\ V^{x+1}$$

$$y\ Mx = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$$

Con estas definiciones, multiplicamos y dividimos la fórmula de $A\dot{x}:\overline{n|}$ por $V^x$ y nos queda:

$$A\dot{x}:\overline{n|} = \sum_{t=0}^{n-1} V^{t+1}\ {}_{t|}q_x = \frac{1}{V^x l_x} \sum_{t=0}^{n-1} V^{x+t+1}\ d_{x+t}$$

Y aplicando las definiciones de los conmutados la fórmula se nos reduce de la siguiente forma:

$$A\dot{x}:\overline{n|} = \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Analogamente podemos encontrar la fórmula en valores conmutados con la que se obtiene el resultado del Ordinario de Vida

$$Ax = \frac{M_x}{D_x}$$

## 8.- Notas y Referencias.

1a.- Ver Society of Actuaries' Textbook on Life Contingencies, Chester Wallace Jordan Jr., Second Edition, Published by The Society of Actuaries, 1982

1b.- Ver Actuarial Mathematics, Newton I. Bowers jr., Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt, Society of Actuaries, 1984, Capítulo 3 página 10.

2.- Ver Actuarial Mathematics, Newton I. Bowers jr., Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt, Society of Actuaries, 1984, Capítulo 5 página 3.

3.- Ver Actuarial Mathematics, Newton I. Bowers jr., Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt, Society of Actuaries, 1984, Capítulo 5 página 31.

# Capítulo III.

**Aplicaciónes del enfoque probabilístico en el cálculo actuarial.**

En los modelos que se van a considerar aquí, el tamaño y tiempo del pago depende sólo del tiempo de muerte del asegurado.
Es decir, el modelo se construirá en términos de variables aleatorias, que están basadas a su vez en otra función que representa el tiempo futuro de vida de una persona a cierta edad, la cual se denomina como T en el caso de cantidades exactas, o bien en terminos continuos, o como K en el caso de años completos por vivir. Debemos hacer notar la importancia de esta variable en la construcción del modelo pues es la base del desarrollo de la teoria para llegar a los métodos de cálculo práctico que veremos en el presente capítulo.

## 1.-Seguros pagaderos al momento de la muerte.

Este modelo se desarrollará con una función que represente al beneficio bt que es el monto pagable, y con una función que represente al descuento vt, que es el factor de interés requerido por el período desde el pago al tiempo de aseguramiento; entonces, la función de valor presente será zt donde:

zt=bt vt

Así zt es el valor presente al momento de aseguramiento del pago del beneficio previsto por la compañía aseguradora cuando el momento de muerte es t.

Al momento de asegurarse, el tiempo entre esa fecha y el momento de muerte es T(x) donde t = T(x), que representa al tiempo futuro de vida de una persona de edad x.

Para el análisis del seguro de vida primero debemos definir vt y bt, seguido de determinar las características de la distribución de probabilidad de z que son consecuencias de una asumida distribución de T.

Un seguro temporal a n años, proveé el pago sólo si el asegurado muere dentro de los n años siguientes a partir de la fecha en la que se tomó el seguro. Supongamos que se trata del pago de una unidad al momento de la muerte de un asegurado de edad x entonces bt, vt y zt toman los siguientes valores;

$$bt = \begin{cases} 1 & t \le n \\ 0 & t > n \end{cases}$$

$$vt = V^{t} \quad t \ge 0$$

$$zt = \begin{cases} V^{T} & T \le n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

Así, $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$ es la prima neta única y corresponde a la esperanza del valor presente de la variable aleatoria z y es E(zt), y utilizando la función de distribución de probabilidad de T nos queda;

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = E(zt) = \int_0^n zt\ g(t)\ dt = \int_0^n V^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt$$

Donde g(t) es la función de densidad de probabilidad de T(x) la vida futura de x, como G(t)= tqx entonces

$$g(t) = \frac{d}{dt}\ {}_tq_x = \frac{d}{dt}\left(1-\frac{S(x+t)}{S(x)}\right) = \frac{S(x+t)}{S(x)}\left(-\frac{S'(x+t)}{S(x+t)}\right) = {}_tp_x\ \mu_{x+t}$$

donde ${}_tp_x\ \mu_{x+t}$ es la probabilidad de que x muera entre t y t+dt.

El j-ésimo momento de la distribución de z se puede encontrar por:

$$E(z_t{}^j) = \int_0^n (V^t)^j\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt = \int_0^n e^{-(\delta t)j}\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt$$

Esto muestra que el j-ésimo momento de z es igual a la prima de un seguro temporal a n años por una unidad pagadera al momento de la muerte de x, calculada con una fuerza de interés igual a j veces la fuerza de interés. Por lo que a continuación se cita el siguiente teorema.

Teorema: Para un seguro de vida a edad x, sea $\delta t$ la fuerza de interés al tiempo t, y bt y vt las funciones de beneficio y descuento respectivamente, si bjt=bt para toda t, entonces E(zj) calculada a $\delta t$ será igual a E(z) calculada a la fuerza de interés $j\delta t$ para j>0.

$$E(zj) = E((bt\ vt)^j) = E(b_t^j\ v_t^j) = E(b_t\ v_t^j)$$

En general $vt = e^{-\int_0^t \delta s\ ds}$

Donde t es el período desde x hasta la muerte de x entonces:

$$Vt = e^{-\int_0^t j\delta t\ s\ ds}$$

que es vt a la fueza de interés $j\delta t$, y si aplicamos la definición de varianza a zt tenemos:

$$Var(zt) = {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

donde ${}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|}$ es la prima neta calculada a una fuerza de interés $2\delta t$.

De esta forma, variando los límites de la integral, se obtienen diversos tipos de seguros, es decir, si hacemos que el limite n sea igual a w-x tenemos un seguro ordinario de vida que prevee el pago al momento de la muerte, cuando suceda esta después del momento de aseguramiento.

$$bt = 1 \quad t \geq 0$$

$$vt = V^t \quad t \geq 0$$

$$z = V^T \quad T \geq 0$$

y la prima neta es:

$$\bar{A}x = E(zt) = \int_0^{w-x} V^t \; {}_tp_x \; \mu_{x+t} \, dt$$

Un dotal puro durante n años provee un pago sólo si el asegurado llega con vida al final de los n años, a partir de la fecha que se tomó el seguro.
Supongamos que el pago que se efectuaré, o bien que la suma asegurada sea la unidad, entonces las funciónes bt, vt, y zt quedan:

$$bt = \begin{cases} 0 & t<n \\ 1 & t \geq n \end{cases}$$

$$vt = V^n \quad t \geq 0$$

$$z = \begin{cases} 0 & T<n \\ V^n & T \geq n \end{cases}$$

El elemento incierto en este seguro es sólo que la reclamación suceda o no, pues el tiempo de reclamación y el tamaño de la misma son conocidos, supongamos un indicador "y", que representa la sobrevivencia del asegurado a edad x+n, y tiene el valor de 1 o de 0 dependiendo el caso, entonces la función z nos queda:

$$z = V^n \, y$$

La prima única de este seguro se denota por $Ax{:}\overset{1}{\overline{n|}}$, y su valor junto con el de la varianza son:

$$Ax{:}\overset{1}{\overline{n|}} = E(z) = V^n \, E(y) = V^n \; {}_np_x$$

$$Var(z) = V^{2n} \, Var(y) = V^{2n} \; {}_np_x \; {}_nq_x = {}^2Ax{:}\overset{1}{\overline{n|}} - (Ax{:}\overset{1}{\overline{n|}})^2$$

El seguro dotal mixto prevee el pago de la suma asegurada si el asegurado muere dentro de los n años a partir de la fecha en la que se contrató el seguro, y también si es que llega con vida al final de los n años.

Supongamos que la suma asegurada sea de la unidad, entonces tenemos las siguientes funciones:

$$bt = 1 \qquad t \geq 0$$

$$vt = \begin{cases} V^{t} & t \leq n \\ V^{n} & t > n \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} V^{T} & T \leq n \\ V^{n} & T > n \end{cases}$$

Y la prima neta se denota por $\bar{A}x:\overline{n}|$

Ahora bien, este tipo de seguro se puede ver también como la combinación de un dotal puro con un temporal, donde;

$$z1 = \begin{cases} V^{T} & T < n \\ 0 & T \geq n \end{cases}$$

$$z2 = \begin{cases} 0 & T < n \\ V^{n} & T \geq n \end{cases}$$

$$z3 = \begin{cases} V^{T} & T < n \\ V^{n} & T \geq n \end{cases}$$

$$z3 = z1 + z2$$

Entonces tenemos que la prima única neta es:

$$\bar{A}x:\overline{n}| \rightarrow \bar{A}x:\overline{n}| + \bar{A}x:\overline{n}|$$

Y por el teorema visto previamente tenemos que la esperanza y varianza de la función z3 son:

$$E(z3)\, \sigma \quad = E(z3)\, j\sigma$$

$$Var(z3) = {}^{2}\bar{A}x:\overline{n}| - (\bar{A}x:\overline{n}|)^{2}$$

La varianza de la suma de dos variables aleatorias es la suma de la varianza de cada una, más (menos) dos veces la covarianza de las dos;

$$Var(z3) = Var(z1) + Var(z2) + 2Cov(z1,z2)$$

Y así mismo la covarianza del producto es:

$$Cov(x,y) = E((x-\mu x)(y-\mu y)) = E(xy) - \mu x E(Y) - \mu y E(x) + \mu x \mu y =$$
$$= E(xy) - \mu x \mu y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

Y si sabemos que

$z1 \times z2 = 0$ para toda T

El desarrollo de la covarianza nos queda de la siguiente forma:

$$Cov(z1,z2) = -E(z1)E(z2) = -\bar{A}\overset{1}{x}:\bar{n}|\ \bar{A}x:\overset{1}{\bar{n}|}$$

Entonces la varianza de z3 también se puede expresar de la siguiente forma:

$$Var(z3) = Var(z1) + Var(z2) - 2\ \bar{A}\overset{1}{x}:\bar{n}|\ Ax:\overset{1}{\bar{n}|}$$

Así pues, usando el mismo razonamiento visto anteriormente, tenemos para el seguro diferido las siguientes funciones:

$$bt = \begin{cases} 1 & t>m \\ 0 & t\leq m \end{cases}$$

$$vt = V^{t} \quad t>0$$

$$z = \begin{cases} V^{T} & T>m \\ 0 & T\leq m \end{cases}$$

y la prima neta para una unidad de suma asegurada es:

$$m|\bar{A}x = \int_{m}^{\infty} V^{t}\ {}_{t}P_{x}\ \mu_{x+t}\ dt$$

También se pueden obtener modelos que no sólo paguen la unidad sino que también el pago esté en función del tiempo, es decir que se incrementen o que se decrementen en el transcurso del tiempo en progresión aritmética en todo o en parte del lapso del seguro.

En el caso del seguro creciente de vida entera que prevé el pago de 1 si la muerte ocurriese en el primer año, de 2 si ocurriese en el segundo, y asi sucesivamente. Obtenemos entonces las siguientes funciónes:

$$bt = [t+1] \quad t\geq 0$$

$$vt = V^{t} \quad t\geq 0$$

$$z = [T+1]V^{T} \quad T\geq 0$$

donde [] es la función mayor entero, y la prima neta será:

$$(I\bar{A})x = E(z) = \int_{0}^{\infty} [t+1]\ V^{t}\ {}_{t}P_{x}\ \mu_{x+t}\ dt$$

También existe el caso del seguro decreciente el cual prevé un pago de n al primer año, de n-1 al segundo, etc.., cubriendo hasta el final del n-ésimo año. Con las siguientes funciones:

$$bt = \begin{cases} n-[t] & t \le n \\ 0 & t > n \end{cases}$$

$$vt = V^t \qquad t > 0$$

$$z = \begin{cases} V^T(n-[T]) & T \le n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

donde la prima única será:

$$(D\bar{A})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n V^t (n-[t]) \; {}_tp_x \; \mu_{x+t} \, dt$$

Debemos tomar en cuenta que en estos dos últimos seguros los momentos se calculan directamente de la def de E(zj).

## 2.-Seguros pagaderos al final del año

En la práctica, al ocurrir una reclamación y si ésta procede, se paga inmediatamente al demostrarse ampliamente la misma, y los modelos estan construidos o basados en T, que es el futuro tiempo de vida de las personas.
Pero en la práctica se dispone de información de la distribución de probabilidad de T en tablas hechas con datos discretos y no continuos. Es decir, estan basadas en términos de la variable estocástica K, que es el tiempo futuro de vida de una persona, en forma discreta.

Los modelos siguientes al igual que los anteriores están basados en varias funciones como lo son la función de beneficio bk y la función de descuento vk. El valor presente a la fecha de aseguramiento del beneficio será zk.
En el caso del seguro temporal por una unidad pagadera al final del año de fallecimiento, tenemos:

$$bk+1 = \begin{cases} 1 & k = 0,1,2,\ldots,n-1 \\ 0 & \text{de cualquier otra forma} \end{cases}$$

$$vk+1 = V^{k+1}$$

$$z = \begin{cases} V^{k+1} & k=0,1,2,..,n-1 \\ 0 & \text{de cualquier otra forma} \end{cases}$$

y la prima neta será:

$$A_{x:\overline{n}|} = E(z) = \sum_{k=0}^{n-1} V^{k+1} \; {}_kp_x \; q_{x+k}$$

Ahora bien, el teorema visto en la sección anterior también puede aplicarse en este caso, donde la varianza es:

$$VAR(z) = {}^{2}A\dot{x}:\bar{n} - (A\dot{x}:\bar{n})^{2}$$

y ${}^{2}A\dot{x}:\bar{n}$ sigue siendo la prima neta calculada con dos veces la fuerza de interés.

$${}^{2}A\dot{x}:\bar{n} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\delta(k+1)} {}_{k}p_{x}\, q_{x+k}$$

Para el seguro ordinario de vida, en lo único en que se diferencia del seguro temporal es el límite del seguro, el cual se supone que cubre hasta la última edad de vida, la cual se denominó anteriormente como ω, y la prima neta nos queda así:

$$Ax = \sum_{k=0}^{\omega-x} V^{k+1} {}_{k}p_{x}\, q_{x+k}$$

El seguro dotal puro que proveé de un pago de uno si el asegurado llega con vida al final del lapso del seguro tiene como prima neta la siguiente:

$$Ax:\overset{1}{n} = V^{n} {}_{n}p_{x}$$

Y la combinación de este con el seguro temporal tendría como funciones:

$$bk+1 = 1 \quad k=0,1,2,..,n-1$$

$$vk+1 = \begin{cases} V^{k+1} & k=0,1,2,...,n-1 \\ V^{n} & k=n,n+1,n+2,.. \end{cases}$$

y la prima neta será:

$$Ax:\bar{n} = \sum_{k=0}^{n-1} V^{k+1} {}_{k}p_{x}\, q_{x+k} + V^{n} {}_{n}p_{x}$$

El seguro creciente de por vida que proveé el pago de k+1 unidades al final del año de fallecimiento cuando este ocurre en el año k+1, tiene las siguientes funciones:

$$bk+1 = k+1 \qquad k=0,1,2,...$$

$$vk+1 = V^{k+1} \qquad k=0,1,2,...$$

$$z = (k+1)V^{k+1} \quad k=0,1,2,...$$

La prima neta será:

$$(I\dot{A})x = \sum_{k=0}^{\omega-x} (k+1)V^{k+1} {}_{k}p_{x}\, q_{x+k}$$

En el caso de que se quisiese el seguro temporal creciente, la prima neta varía sólo en el límite superior (w-x) para convertirse en n.

El seguro decreciente temporal proveé un pago de n-k unidades al final del año si la muerte ocurriese en el año k, y sus funciones son:

$$bk+1 = \begin{cases} n-k & k=0,1,2,\ldots,n-1 \\ 0 & k=n,n+1,\ldots \end{cases}$$

$$vk+1 = V^{k+1} \qquad k=0,1,2,\ldots,n-1$$

$$z = \begin{cases} (n-k)V^{k+1} & k=0,1,2,\ldots,n-1 \\ 0 & k=n,n+1,.. \end{cases}$$

y la prima neta es:

$$(DA)\dot{x}:\overline{n} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)V^{k+1}\ {}_kP_x\ q_{x+k}$$

que mediante pasos algebraicos se demuestra que es la suma de n-1 seguros temporales por una unidad cada uno:

$$(DA)\dot{x}:\overline{n} = \sum_{j=0}^{n-1} A\dot{x}:n-j$$

El cálculo de la varianza de estos dos últimos seguros no está contemplada en el teorema visto anteriormente.

## 2.1 -Cálculo de primas únicas y de varianza.

Supóngase que se quiere calcular la prima neta única de un seguro temporal a 10 años para una persona de edad 30.
Utilizando los datos de la tabla 1 y suponiendo una fuerza de interés del 4% tenemos que:

$$bk+1 = \begin{cases} 1 & k=0,1,2,\ldots,9 \\ 0 & k\geq 10 \end{cases}$$

$$vk+1 = V^{k+1}$$

$$Z = \begin{cases} V^{K+1} & K=0,1,2,\ldots,9 \\ 0 & K\geq 10 \end{cases}$$

Y la prima neta es:

$$A^{1}_{x:\overline{n|}} = E[Z] = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\delta(k+1)}\; {}_{k}p_{x}\; q_{x+k}$$

La cual nos queda:

$$A_{30:10} = E(Z) = \sum_{k=0}^{9} e^{-\delta(k+1)}\; {}_{k}p_{30}\; q_{30+k}$$

$$lx\; A_{30:10} = E(Z) = \sum_{k=0}^{9} e^{-\delta(k+1)}\; d_{x+k}$$

La varianza se calcula de la siguiente manera:

$$Var(Z) = {}^{2}A^{1}_{x:\overline{n|}} - (A^{1}_{x:\overline{n|}})^{2}$$

donde $${}^{2}A^{1}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\delta(k+1)}\; {}_{k}p_{x}\; q_{x+k}$$

Table 1

| x | t | lx | dx | $e^{-\delta t}$ | dx $e^{-\delta t}$ | $e^{-2\delta t}$ | dx $e^{-2\delta t}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 1 | 9847888 | 13295 | .96079 | 12773.7 | .92312 | 12272.8 |
| 31 | 2 | 9834593 | 13965 | .92312 | 12891.3 | .85214 | 11900.2 |
| 32 | 3 | 9820628 | 14731 | .88692 | 13065.2 | .78663 | 11587.8 |
| 33 | 4 | 9805897 | 15689 | .85214 | 13369.3 | .72615 | 11392.6 |
| 34 | 5 | 9790208 | 16643 | .81873 | 13626.1 | .67032 | 11156.1 |
| 35 | 6 | 9773565 | 17788 | .78663 | 13992.5 | .61878 | 11006.9 |
| 36 | 7 | 9755777 | 19121 | .75578 | 14451.3 | .57121 | 10922.1 |
| 37 | 8 | 9736656 | 20447 | .72615 | 14847.6 | .52729 | 10781.5 |
| 38 | 9 | 9716209 | 22056 | .69768 | 15387.9 | .48675 | 10735.8 |
| 39 | 10 | 9694153 | 23645 | .67032 | 15855.8 | .44933 | 10628.4 |
| | | | | | 140281 | | 112384 |

El valor de la prima neta es:

$$A_{30:10} = \frac{140281}{9847888} = .0142427$$

Y el valor de la varianza es:

$$Var(Z) = {}^{2}A^{1}_{x:\overline{n|}} - (A^{1}_{x:\overline{n|}})^{2} = .0114119 - (.0142427)^{2} = .0112091$$

Pero como vivimos en un medio donde manejamos tasas de interés y no fuerza de interés, nos vemos obligados a obtener resultados de la manera convencional para lo cual nos valemos de las relaciones existentes entre fuerza y tasa de interés.

Como $(1+i)^{n} = e^{\delta n}$

Entonces, si elevamos al cuadrado obtenemos la siguiente igualdad:

$$(1+i)^{mn} = e^{m\delta n}$$

$$(1+i')^{n} = e^{m\delta n}$$

Donde $i' = (1+i)^{m} - 1$

Entonces $^{m}A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-m\delta\,(k+1)}\ {}_{k}p_{x}\, q_{x+k}$

que es igual a $l_x\ {}^{m}A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-m\delta\,(k+1)}\, d_{x+k}$

Finalmente obtenemos $l_x\ {}^{m}A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (1+i')^{-(k+1)}\, d_{x+k}$

Lo cual nos permite el uso de valores conmutados a una tasa de interes i', con lo que los cálculos se nos facilitan enormemente. Enseguida calcularemos la prima y varianza del mismo seguro con valores conmutados obtenidos con las tasas de interés i e i', equivalentes a fuerzas de intereses de .04 y .08, como lo muestran los anexos 1 y 2.

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = \frac{599149.6713 - 556903.9283}{2966126.865} = 0.0142427$$

$$^{m}A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x' - M'_{x+n}}{D_x'} = \frac{51339.4891 - 41144.2141}{893380.244} = 0.0114121$$

Y Var(Z) = 0.011412 − 0.0002028 = 0.0112092

Como podemos observar, los resultados obtenidos son los mismos a los que calculamos anteriormente.

## 2.2.- Cálculo de primas únicas recargadas.

Supóngase que se administra un fondo obtenido de primas únicas de un seguro Ordinario de Vida para personas de edad 50 por la cantidad de 1000 unidades monetarias, donde la prima neta sería:

$$A_{50} = 1000\ \frac{M_{50}}{D_{50}} = \frac{374220.1648}{1029160.227} = 363.617$$

Nota: Los datos son obtenidos de la tabla experiencia mexicana básica al interés del 4.5% , contenidos en el anexo 3.

Tenemos 9298030 vivos a edad 50 lo que forma un fondo inicial de 3380194636 U.M. y el fondo se comportaría como lo muestra la tabla 3a.

## TABLA 3A

Proyección de un fondo de seguro Ordinario de vida por 1000 u.m. para personas de edad 50

| T | Lx' | dx | Indemnización | Fondo |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 9,296,030 | 57,449 | 57,449,000 | 3,474,854,394 |
| 2 | 9,238,581 | 62,545 | 62,545,000 | 3,568,677,842 |
| 3 | 9,176,036 | 68,178 | 68,178,000 | 3,661,090,345 |
| 4 | 9,107,858 | 74,411 | 74,411,000 | 3,751,428,410 |
| 5 | 9,033,447 | 81,120 | 81,120,000 | 3,839,122,689 |
| 6 | 8,952,327 | 88,449 | 88,449,000 | 3,923,434,210 |
| 7 | 8,863,878 | 96,528 | 96,528,000 | 4,003,460,749 |
| 8 | 8,767,350 | 105,208 | 105,208,000 | 4,078,408,483 |
| 9 | 8,662,142 | 114,687 | 114,687,000 | 4,147,249,865 |
| 10 | 8,547,455 | 124,878 | 124,878,000 | 4,208,998,109 |
| 11 | 8,422,577 | 135,940 | 135,940,000 | 4,262,463,024 |
| 12 | 8,286,637 | 149,740 | 149,740,000 | 4,304,533,860 |
| 13 | 8,136,897 | 161,680 | 161,680,000 | 4,336,557,883 |
| 14 | 7,975,217 | 174,418 | 174,418,000 | 4,357,284,988 |
| 15 | 7,800,799 | 187,765 | 187,765,000 | 4,365,597,813 |
| 16 | 7,613,034 | 201,822 | 201,822,000 | 4,360,227,714 |
| 17 | 7,411,212 | 216,482 | 216,482,000 | 4,339,955,961 |
| 18 | 7,194,730 | 231,598 | 231,598,000 | 4,303,655,980 |
| 19 | 6,963,132 | 247,122 | 247,122,000 | 4,250,198,499 |
| 20 | 6,716,010 | 262,797 | 262,797,000 | 4,178,660,431 |
| 21 | 6,453,213 | 278,456 | 278,456,000 | 4,088,244,151 |
| 22 | 6,174,757 | 293,795 | 293,795,000 | 3,978,420,137 |
| 23 | 5,880,962 | 308,574 | 308,574,000 | 3,848,875,043 |
| 24 | 5,572,388 | 322,474 | 322,474,000 | 3,699,600,420 |
| 25 | 5,249,914 | 334,997 | 334,997,000 | 3,531,085,439 |
| 26 | 4,914,917 | 345,715 | 345,715,000 | 3,344,269,284 |
| 27 | 4,569,202 | 354,250 | 354,250,000 | 3,140,511,402 |
| 28 | 4,214,952 | 360,083 | 360,083,000 | 2,921,751,415 |
| 29 | 3,854,869 | 362,743 | 362,743,000 | 2,690,487,229 |
| 30 | 3,492,126 | 361,819 | 361,819,000 | 2,449,740,154 |
| 31 | 3,130,307 | 356,918 | 356,918,000 | 2,203,060,461 |
| 32 | 2,773,389 | 347,755 | 347,755,000 | 1,954,443,182 |
| 33 | 2,425,634 | 334,277 | 334,277,000 | 1,708,116,125 |
| 34 | 2,091,357 | 316,527 | 316,527,000 | 1,468,454,350 |
| 35 | 1,774,830 | 294,746 | 294,746,000 | 1,239,788,796 |
| 36 | 1,480,084 | 269,434 | 269,434,000 | 1,026,145,292 |
| 37 | 1,210,650 | 241,331 | 241,331,000 | 830,990,830 |
| 38 | 969,319 | 211,331 | 211,331,000 | 657,054,418 |
| 39 | 757,988 | 180,492 | 180,492,000 | 506,129,866 |
| 40 | 577,496 | 149,976 | 149,976,000 | 378,929,710 |
| 41 | 427,520 | 120,890 | 120,890,000 | 275,091,547 |
| 42 | 306,630 | 108,381 | 108,381,000 | 179,089,667 |
| 43 | 198,249 | 76,013 | 76,013,000 | 111,135,702 |
| 44 | 122,236 | 50,733 | 50,733,000 | 65,403,808 |
| 45 | 71,503 | 32,048 | 32,048,000 | 36,298,980 |
| 46 | 39,455 | 19,050 | 19,050,000 | 18,882,434 |
| 47 | 20,405 | 10,583 | 10,583,000 | 9,149,144 |
| 48 | 9,822 | 5,457 | 5,457,000 | 4,103,855 |
| 49 | 4,365 | 2,589 | 2,589,000 | 1,699,528 |
| 50 | 1,776 | 1,776 | 1,776,000 | 7 |

Con lo cual podemos observar que los resultados obtenidos se apegan a los datos estadísticos y que efectivamente el fondo funciona bien de acuerdo a las expectativas de vida. Pero como los datos de la tabla se basaron en observaciones precedentes de la experiencia de varias compañías aseguradoras, y como la muerte es una variable impredecible, no podemos asegurar que en realidad el fondo tenga ese comportamiento, para lo cual se han desarrollado métodos estadísticos que tratan de aminorar las desviaciones que podrían existir en un momento dado.

Un método, el cual es objeto de este trabajo, es el de obtener una prima de recargo basada en los supuestos de que la mortalidad se comporta en una forma normal, de forma tal que la prima recargada contenga un margen de seguridad de un x% .

Es decir, necesitamos obtener un fondo inicial suficiente con un cierto margen de seguridad para evitar la descapitalización, pues conocemos el monto de la suma asegurada a pagar y sabemos que la reclamación va a ocurrir, pero no tenemos la certeza de cuando.

Ahora bien, la varianza del mismo seguro es, conforme a los datos del anexo 4, la siguiente:

$$^{2}A_{80} = \frac{M'_{80}}{D'_{80}} = \frac{18516.0226}{113937.969} = .1625096$$

$$Var(z) = (1000)^2\ .1625096 - (363.617)^2 = 30292.3$$

Llamemos $f$ al valor presente de todos los pagos futuros suponiendo que de alguna forma pudiesen ser ordenados dichos pagos y es:

$$f = \sum_{j=1}^{l'x} Z_j$$

donde $Z_j$ es el valor presente de todas las indemnizaciones hechas cada una a la muerte de la j-ésima vida. Y l'x es el número de los expuestos al riesgo, y que en este caso es igual a nuestra lx.

Habiendo utilizado la media y la varianza para cada una de las vidas en la suma de $f$, tenemos:

$$E(f) = lx\ (363.617) = 3380194540$$
$$Var(f) = lx\ (30292.3) = 281598130000$$

La fórmula para obtener el área bajo la curva normal es:

$$P(-a<Z<b) = \frac{1}{2}\int_{-a}^{b} e^{-u/2}\,du = k.$$ donde Z es la variable tipificada.

Si queremos obtener un fondo inicial con un 10% de margen de desviación o dicho de otra forma, con el 90% de certeza tenemos que:

$P(-1.645<Z<1.645) = .90$ donde $Z$ es la variable tipificada.

Nota: Los valores de a,b y k pueden corroborarse en el anexo 5.

Como la curva normal es simétrica entonces tenemos que obtener el valor de Z que satisfaga la siguiente igualdad:

$P(0<Z<1.645) = .45$

Donde $Z = \dfrac{f-E(f)}{ds(f)}$

Sustituyendo el valor de Z, y despejando $f$ notamos que los valores extremos o bien los valores con los que se cumple la ecuación son:

$(E[f], E[f]+1.645ds[f])$

Entonces el fondo inicial sobre $f$ que estamos buscando sera $E(f) + 1.645 \times ds(f)$.

Que dividido entre lx forma una prima neta recargada de 363.71 u. m. que es un .026 % mayor que la normal. El fondo entonces se comportaría como se puede observar en la tabla 3b.

Pero en la realidad el número de asegurados es mucho menor que el de lx que utilizamos anteriormente, por lo que a continuación utilizaremos un número más apegado a la realidad;

Tomemos el mismo caso de la sección anterior con la diferencia de que en vez de tener 9296030 asegurados, ahora tenemos 500 asegurados a edad 50. Con lo que la esperanza y la varianza de la variable z siguen siendo las mismas pues se considera también la misma suma asegurada.

$$E(z) = A_{50} = 1000\,\frac{M_{50}}{D_{50}} = \frac{374220.1648}{1029160.227} = 363.617$$

$$^{2}A_{50} = \frac{M'_{99}}{D'_{50}} = \frac{18516.0226}{113937.969} = .1625096$$

$$Var(z) = (1000)^{2}\ .1625096 - (363.617)^{2} = 30292.3$$

Con relación a la variable $f$, que fue designada como el fondo inicial esperado que será suficiente para cubrir los decesos sobre los $l'x$ que en este caso es igual a los 500 asegurados por tratarse de un o.v., tenemos que la esperanza y varianza son distintas por diferir en el número de asegurados, y son las siguientes:

$$E(f) = l'x\ (363.617) = 181808.5005$$

$$Var(f) = l'x\ (30292.28) = 15146140$$

TABLA 3B

Proyección de un fondo de seguro Ordinario de vida por 1000 u.m. para personas de edad 50

| T | Lx' | dx | Indemnización | Fondo | Fondo' |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9,296,030 | 57,449 | 57,449,000 | 3,474,854,394 | 3,475,766,610 |
| 2 | 9,238,581 | 62,545 | 62,545,000 | 3,568,677,842 | 3,569,631,107 |
| 3 | 9,176,036 | 68,178 | 68,178,000 | 3,661,090,345 | 3,662,086,507 |
| 4 | 9,107,858 | 74,411 | 74,411,000 | 3,751,428,410 | 3,752,469,400 |
| 5 | 9,033,447 | 81,120 | 81,120,000 | 3,839,122,689 | 3,840,210,523 |
| 6 | 8,952,327 | 88,449 | 88,449,000 | 3,923,434,210 | 3,924,570,996 |
| 7 | 8,863,878 | 96,528 | 96,528,000 | 4,003,460,749 | 4,004,648,691 |
| 8 | 8,767,350 | 105,208 | 105,208,000 | 4,078,408,483 | 4,079,649,882 |
| 9 | 8,662,142 | 114,687 | 114,687,000 | 4,147,249,865 | 4,148,547,127 |
| 10 | 8,547,455 | 124,878 | 124,878,000 | 4,208,998,109 | 4,210,353,748 |
| 11 | 8,422,577 | 135,940 | 135,940,000 | 4,262,463,024 | 4,263,879,666 |
| 12 | 8,286,637 | 149,740 | 149,740,000 | 4,304,533,860 | 4,306,014,251 |
| 13 | 8,136,897 | 161,680 | 161,680,000 | 4,336,557,883 | 4,338,104,893 |
| 14 | 7,975,217 | 174,418 | 174,418,000 | 4,357,284,988 | 4,358,901,613 |
| 15 | 7,800,799 | 187,765 | 187,765,000 | 4,365,597,813 | 4,367,287,185 |
| 16 | 7,613,034 | 201,822 | 201,822,000 | 4,360,227,714 | 4,361,993,109 |
| 17 | 7,411,212 | 216,482 | 216,482,000 | 4,339,955,961 | 4,341,800,799 |
| 18 | 7,194,730 | 231,598 | 231,598,000 | 4,303,655,980 | 4,305,583,835 |
| 19 | 6,963,132 | 247,122 | 247,122,000 | 4,250,198,499 | 4,252,213,107 |
| 20 | 6,716,010 | 262,797 | 262,797,000 | 4,178,660,431 | 4,180,765,697 |
| 21 | 6,453,213 | 278,456 | 278,456,000 | 4,088,244,151 | 4,090,444,153 |
| 22 | 6,174,757 | 293,795 | 293,795,000 | 3,978,420,137 | 3,980,719,140 |
| 23 | 5,880,962 | 308,574 | 308,574,000 | 3,848,875,043 | 3,851,277,501 |
| 24 | 5,572,388 | 322,474 | 322,474,000 | 3,699,600,420 | 3,702,110,989 |
| 25 | 5,249,914 | 334,997 | 334,997,000 | 3,531,085,439 | 3,533,708,984 |
| 26 | 4,914,917 | 345,715 | 345,715,000 | 3,344,269,284 | 3,347,010,888 |
| 27 | 4,569,202 | 354,250 | 354,250,000 | 3,140,511,402 | 3,143,376,378 |
| 28 | 4,214,952 | 360,083 | 360,083,000 | 2,921,751,415 | 2,924,745,315 |
| 29 | 3,854,869 | 362,743 | 362,743,000 | 2,690,487,229 | 2,693,615,854 |
| 30 | 3,492,126 | 361,819 | 361,819,000 | 2,449,740,154 | 2,453,009,567 |
| 31 | 3,130,307 | 356,918 | 356,918,000 | 2,203,060,461 | 2,206,476,998 |
| 32 | 2,773,389 | 347,755 | 347,755,000 | 1,954,443,182 | 1,958,013,463 |
| 33 | 2,425,634 | 334,277 | 334,277,000 | 1,708,116,125 | 1,711,847,069 |
| 34 | 2,091,357 | 316,527 | 316,527,000 | 1,468,454,350 | 1,472,353,187 |
| 35 | 1,774,830 | 294,746 | 294,746,000 | 1,239,788,796 | 1,243,863,080 |
| 36 | 1,480,084 | 269,434 | 269,434,000 | 1,026,145,292 | 1,030,402,919 |
| 37 | 1,210,650 | 241,331 | 241,331,000 | 830,990,830 | 835,440,050 |
| 38 | 969,319 | 211,331 | 211,331,000 | 657,054,418 | 661,703,852 |
| 39 | 757,988 | 180,492 | 180,492,000 | 506,129,866 | 510,988,526 |
| 40 | 577,496 | 149,976 | 149,976,000 | 378,929,710 | 384,007,009 |
| 41 | 427,520 | 120,890 | 120,890,000 | 275,091,547 | 280,397,325 |
| 42 | 306,630 | 108,381 | 108,381,000 | 179,089,667 | 184,634,204 |
| 43 | 198,249 | 76,013 | 76,013,000 | 111,135,702 | 116,929,744 |
| 44 | 122,236 | 50,733 | 50,733,000 | 65,403,808 | 71,458,582 |
| 45 | 71,503 | 32,048 | 32,048,000 | 36,298,980 | 42,626,218 |
| 46 | 39,455 | 19,050 | 19,050,000 | 18,882,434 | 25,494,398 |
| 47 | 20,405 | 10,583 | 10,583,000 | 9,149,144 | 16,058,646 |
| 48 | 9,822 | 5,457 | 5,457,000 | 4,103,855 | 11,324,285 |
| 49 | 4,365 | 2,589 | 2,589,000 | 1,699,528 | 9,244,878 |
| 50 | 1,776 | 1,776 | 1,776,000 | 7 | 7,884,897 |

Aplicando el mismo porcentaje de certeza del 90%, se obtiene una prima neta recargada de 376.42 u.m la cual es 3.5% mayor que la prima neta, con la que se obtiene un fondo inicial de 188210.53 u. m. el cual se comporta de la forma que se observa en la tabla 3c, donde también se muestra la relación con el fondo anterior.

## 3.- Anualidades

### 3.1.-Caso continuo. (Esperanza y varianza)

Para poder calcular los valores de las anualidades, al igual que en el cálculo de los seguros, utilizaremos la misma técnica que precede a este inciso, representando al tiempo futuro de vida, o el tiempo que le resta por vivir a una persona como T.

El valor presente de los pagos hechos por una persona de edad x hasta el momento de su muerte tomando una tasa de interés dada, es $Y = \bar{a}_{\overline{T}|}$. Y el valor presente actuarial se define como $\bar{a}_x = E(Y) = E(\bar{a}_{\overline{T}|})$.

Si consideramos que el valor presente actuarial del pago dt hecho en el tiempo t, como $V^t \, {}_tp_x \, dt$ e integramos todos esos pagos obtenemos la definición:

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty V^t \, {}_tp_x \, dt$$

Las relaciónes entre $\bar{A}_x$ y $\bar{a}_x$ se pueden obtener expresando a Y como:

$$Y = \bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{1-V^T}{\delta} = \frac{1-Z}{\delta}$$

Donde Z es el valor presente de la variable aleatoria de un seguro ordinario de vida como vimos en la sección anterior. Y si sacamos la esperanza entonces nos queda:

$$\bar{a}_x = E(\frac{1-Z}{\delta}) = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta}$$

Y la varianza respectiva es:

$$Var(\bar{a}_{\overline{T}|}) = var(\frac{1-V^T}{\delta}) = \frac{1}{\delta^2} var(V^T)$$

Ahora bien, el valor presente actuarial de una anualidad de una unidad pagadera por año continuamente y mientras x sobreviva durante los próximos n años se denota por:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n V^t \, {}_tp_x \, dt$$

Calculandola con la variable aleatoria Y, la cual toma los siguientes valores:

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{T} & 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{n} & T \geq n \end{cases}$$

entonces $\bar{a}_{x:n}$ es igual a E(Y).

Y si sustituimos $(1-V^{T})/\delta$ por $a_{T}$ y $(1-V^{n})/\delta$ por $a_{n}$ entonces Y es igual a $(1-z)/\delta$ donde z toma los siguientes valores:

$$Z = \begin{cases} V^{T} & 0 \leq T < n \\ V^{n} & T \geq n \end{cases}$$

entonces el valor presente será la esperanza de Y que se convierte en:

$$\bar{a}_{x:n} = E(Y) = \frac{1}{\delta}(1 - E(Z)) = \frac{1}{\delta}(1 - \bar{A}_{x:n})$$

Y cuya varianza es:

$$Var(Y) = \frac{1}{\delta^{2}} VAR(Z) = \frac{1}{\delta^{2}}({}^{2}\bar{A}_{x:n} - (\bar{A}_{x:n})^{2})$$

De esta forma podemos observar que existen relaciones entre las anualidades y los seguros de vida y podemos aprovecharlas para expresar las ecuaciones de una u otra forma según convenga.......3

## 3.2.- Caso Discreto. (Esperanza y Varianza)

En el caso de anualidades discretas existe la distinción (a diferencia de las continuas) entre los pagos, si estos son hechos al principio o al final del período de pago, es decir las anualidades son anticipadas o vencidas. El caso que nos interesa tratar en este trabajo es el de anualidades anticipadas por lo cual nos centraremos en éstas.

Utilizando la misma técnica anterior con una variable aleatoria "Y" que representa el valor presente de los pagos anuales que serán hechos, pero en este caso utilizamos la variable aleatoria "K" (al igual que en los seguros de vida pagaderos anualmente) que representa el tiempo que le resta por vivir a una persona en años completos, donde Y = $\ddot{a}_{K+1}$ y su esperanza se representa así:

$$\ddot{a}_{x} = E(Y) = E(\ddot{a}_{K+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} V^{k}\, {}_{k}p_{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

o bien $\ddot{a}_{x} = E(\frac{1-v^{K+1}}{d}) = \frac{1}{d}(1 - A_{x})$

y cuya varianza es:

$$Var(\ddot{a}_{K+1}) = Var(\frac{1-v^{K+1}}{d}) = \frac{1}{d^{2}}Var(v^{K+1})\ \frac{1}{d^{2}}({}^{2}A_{x} - A_{x}^{2})$$

Ahora bien el valor presente de una anualidad temporal n años de una unidad pagable al principio de cada año y durante n años mientras una persona de edad x esté con vida se denota por $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ y es la esperanza de la variable Y donde ésta toma los siguientes valores:

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & 0 \le K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & K \ge n \end{cases}$$

Pero como Y = (1-Z)/d haciendo este cambio de variabes donde Z toma los siguientes valores:

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & 0 \le K < n \\ v^{n} & K \ge n \end{cases}$$

El valor presente es:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{d}\,(1-E(Z)) = \frac{1}{d}\,(1 - A_{x:\overline{n}|})$$

Y la varianza es:

$$Var(Y) = \frac{1}{d^2}Var(Z) = \frac{1}{d^2}({}^{2}A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5$$

## 4.- Primas Netas Niveladas.

Anteriormente vimos lo que se llama seguros de vida a prima única, es decir se cubre con un pago único, en esta sección veremos lo que son las primas niveladas, es decir no se cubre con un sólo pago sino con una serie de pagos.

Para determinar éstas primas definamos primero una variable "L" que represente la pérdida del asegurador, que es la variable aleatoria del valor presente de los beneficios menos la variable aleatoria del valor presente de las primas que recibirá el asegurador.

Con este principio de equivalencia podemos encontrar las primas que buscamos, si se cumple que E(L) = 0, es decir estas primas serán tales que:

E(Valor presente de los beneficios - Valor presente de las primas netas) = 0

Lo que es equivalente a :

E(Valor presente de los beneficios) = E(Valor presente de las primas netas). Esto debe de ser al momento de la emisión de la póliza, y conforme pasa el tiempo esto no sucede más y la compañía debe de formar un fondo que sustituya la diferencia que existirá entre estos dos valores, a este fondo se le llama reserva y debe de constituirse para que se pueda hacer frente a las obligaciones de la compañía en el futuro, y se mantenga este principio.

En términos de las funciones que definimos anteriormente como las de beneficio, descuento y "Y", tenemos que:

$E(b_T \cdot v_T - PY) = 0$

Despejando la prima P nos queda que:

$$P = \frac{E(Z)}{E(Y)} = \frac{E(b_T\ v_T)}{E(Y)} = \frac{E(V^T)}{E(\bar{a}_{\overline{T}|})}$$

Para el caso discreto tenemos que:

$$P = \frac{E(Z)}{E(Y)} = \frac{E(b_{K+1}\ v_{K+1})}{E(Y)} = \frac{E(V^{K+1})}{E(\ddot{a}_{\overline{K+1}|})}$$

Para la obtención de la varianza de la pérdida tenemos que $E(L^2) = Var(L)$.

Donde $Var(L) = Var(Z - P \cdot Y)$

Haciendo el cambio de variable de Y a Z';

$$= Var(\ Z - P(1-Z')/d) =$$

$$= Var(\ Z - P/d - P/d\ Z'\ ) =$$

$$= Var(\ Z + P/d\ Z')$$

## 4.1.- Cálculo de primas y varianza.

Obtengamos la prima neta anual y la varianza de un seguro Ordinario de Vida que paga el término del año de muerte 1000 unidades monetarias, para una persona edad 45, utilizando la tabla Experiencia Mexicana Básica Graduada (EMBG) con una tasa de interés del 4.5%, sabemos que $E(\ Z - P\ Y\ ) = 0$, y donde las variables Z y Y toman los siguientes valores:

$$B_{k+1} = 1000 \qquad K = 0,1,2,\ldots.$$

$$V_{k+1} = V^{k+1}$$

$$Z = 1000\ V^{k+1}$$

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} \quad K = 0,1,2,\ldots..$$

Despejando de $E(\ Z - P \cdot Y\ ) = 0$, obtenemos que la prima es:

$$P = \frac{E(Z)}{E(Y)} = 1000\ \frac{M_x}{N_x} = 1000\ \frac{401234.3230}{21185139.64} = 18.9394$$

La varianza es, en términos de Z, $Var(Z - P/d\ Z')$.

Y Z' en este caso es igual a Z y la fórmula se reduce a

$Var(Z)(1+P/d)^2$ ..........................6

Entonces $Var(L) = ({}^2A_x - (A_x)^2)(1000 + P/d)^2 =$
$= (.01151 - .0003587)(1439.81)^2 = 23117.458$

En la siguiente tabla se muestran primas a millar, varianzas, y la relación entre primas y desviación estandard para diversos seguros y plazos:

Tabla 2

Plan Vida a prima única

| Edad | Prima Neta | Varianza | Prima N./D.S. |
|---|---|---|---|
| 30 | 175.06 | 16,122.32 | 1.3787 |
| 40 | 254.84 | 23,069.67 | 1.6778 |
| 50 | 162.51 | 30,292.38 | 2.0892 |

Plan Temporal a 20 años a prima única

| Edad | Prima Neta | Varianza | Prima N./D.S. |
|---|---|---|---|
| 30 | 32.74 | 19,322.31 | .2355 |
| 40 | 74.37 | 40,087.16 | .3714 |
| 50 | 177.23 | 77,776.44 | .6355 |

Plan Dotal a 20 años a prima única

| Edad | Prima Neta | Varianza | Prima N./D.S. |
|---|---|---|---|
| 30 | 424.15 | 2,788.98 | 8.0315 |
| 40 | 435.50 | 5,698.41 | 5.7692 |
| 50 | 465.07 | 12,246.62 | 4.2025 |

## 4.2.- Cálculo de primas niveladas recargadas.

Para la obtención de estas primas, sabemos de antemano que tenemos todo un sistema que ha sido desarrollado con el fin de predecir los posibles resultados que pudiesen presentarse, y así obtener primas suficientes para evitar una descapitalización, pero debemos de tomar en cuenta que también dichas predicciones no están exentas de tener alguna fluctuación o desviación que podría ser desfavorable para la compañía de seguros, lo cual hace que dicha compañía deba de tomar ciertas medidas para evitar futuras experiencias negativas que puedan llevar a algún tipo de pérdida dentro del manejo de una cartera. Entonces para obtener primas que contengan un cierto recargo para posibles desviaciones, nos basaremos en la variable aleatoria "L" que definimos anteriormente como la pérdida de una póliza, y en otra variable, S , que definiremos como la pérdida total del portafolio que se administre.

Es decir, dada una prima, P , la pérdida en una póliza es:

$L(P) = SA\ (Z) - P\ (Y)$

Donde SA representa la Suma Asegurada de aquí en adelante.

Y su esperanza y varianza son respectivamente $E(L(P))$, y $VAR(L(P))$.

Entonces si tenemos un portafolio de un número "X" de asegurados en ese plan, entonces para cada una de las "X" pólizas tenemos que la pérdida $L_i(P) = L(P)$, para $i = 1,2,3,\ldots,x$ y sea S la suma donde:

$$S = \sum_{i=1}^{100} L_i(P)$$

Entonces $E(S) = X\ E(L(P))$

Y usando el supuesto de pólizas independientes la varianza es:

$Var(S) = X\ Var(L(P))$

Como ya conocemos la esperanza y varianza de la pérdida total del asegurador, entonces ya podríamos aplicar la probabilidad para la obtención de una prima, es decir, queremos encontrar una prima tal que la probabilidad de una pérdida positiva en un total de "X" pólizas independientes sea un cierto % , basandonos en el supuesto de la aproximación normal.

Determinaremos una prima "P" tal que $Pr(S > 0) = r$ utilizando la aproximación normal;

$$\frac{0 - E(S)}{D.S.(S)} = F.N.$$

Donde F.N. representa el factor normal sujeto a la probabilidad r, y D.S. es la desviación standard.

$$\frac{-\ X\ E(L(P))}{\sqrt{X}\ [VAR(L(P))]^{.5}} = F.N.$$

$$-E(L(P)) = (F.N./\sqrt{X})\ [VAR(L(P))]^{.5}$$

$$-E(L(P))^2 = (F.N.^2)/X\ VAR(L(P))$$

Haciendo $f = (F.N.^2)/X$ y sustituyendo la esperanza y varianza nos queda:

$$(-E(SA\cdot Z - (1-Z')\cdot p/d)^2 = f\cdot VAR(SA\cdot Z - (1-Z')\cdot p/d)$$

Donde Z es la variable que representa la función de beneficio, y Z' representa la función con respecto a pago de primas.

Tomando a A como la E(Z) y a A' como la E(Z'). Sustituimos y desarrollamos la fórmula:

$\mathrm{VAR}(SA\cdot Z + Z'\cdot p/d) = SA^2\cdot({}^2A - A^2) + (p/d)^2\cdot({}^2A' - A'^2) + 2\cdot SA\cdot p/d\cdot(E(Z\cap Z') - A\cdot A')$, entonces si factorizamos nos queda la siguiente expresión:

$$(p/d)^2\cdot((1-A')^2 - f\cdot({}^2A' - A'^2) + p/d\cdot(2\cdot SA\cdot(A(A'(1+f)-1) - f\cdot E(Z\cap Z'))) + SA^2\,(A^2(1+f) - f\cdot({}^2A)) = 0$$

La cual es una ecuación de segundo grado con relación a $(p/d)^2$ por lo tanto podemos usar la fórmula siguiente para la obtención de este valor:

$$(p/d) = \frac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{.5}}{2a}$$

Donde "a" es la expresión con $(p/d)^2$, "b" es la expresión con $(p/d)$ y "c" es la expresión constante o independiente de p/d.

Entonces, ahora si podemos obtener una prima nivelada recargada con un % de certeza. Pensemos en un seguro O.V. prima única a edad 50 con 1000 unidades de suma asegurada para 500 asegurados, donde queremos tener sólo un 5% de probabilidad de una posible pérdida.

Para empezar, el factor del área bajo la curva normal es 1.645, la función Z representa a un O.V. y la función Z' con relación al pago de primas es un Dotal a un año, es decir el pago debe de ser uno al principio del seguro y su valor es la unidad. Despejando la ecuación de equilibrio para la esperanza de la pérdida tenemos:

$$E(SA\cdot Z - p((1-Z')/d)) = 0$$

$$p = \frac{SA\cdot Ax}{((1-Z')/d)} = \frac{SA\cdot Ax}{((1-A_{x:1})/d)}$$

Pero como $A_{x:1} = \dfrac{C_x + D_{x+1}}{D_x} = \dfrac{V^{x+1}\,l_{x+1}}{V^x\,l_x} = V$

Y como $(1-V)/d = 1$, entonces $p = SA\cdot Ax$ y por lo tanto como es equivalente podemos usar la fórmula que desarrollamos anteriormente, llegando a los siguientes valores de $f$, a, b, c, y p/d:

$f = .00541205$ a=.001854353 b=-31.31629668 c=132053.3794

$$\frac{p}{d} = \frac{31.31629668 + 1.102776813}{.003708706} = \frac{32.41907349}{.003708706} = 8741.343609$$

$$p = .043062201 \times 8741.343609 = 376.4215$$

La cual es exactamente la misma prima que se obtuvo en la sección 4 de este capítulo, con lo que podemos observar que este desarrollo está bien aplicado.

## 4.3.- Aplicación en una cartera.

En una compañía de seguros seguramente se manejan una diversidad más amplia de planes y con una distribución particular en las edades dentro de los planes y de sumas aseguradas, supongamos entonces que en una cartera tenemos los siguientes planes:

-Ordinario de vida

-Dotal a 5, 10, 15 y 20 años y a edad alcanzada 60 y 65 años, a prima única.

-Temporal 5, 10, 15 y 20 años y a edad alcanzada 60 y 65 años, a prima única.

-Dotal a 5, 10, 15 y 20 años y a edad alcanzada 60 y 65 años, a prima nivelada.

-Temporal a 5, 10, 15 y 20 años y a edad alcanzada 60 y 65 años, a prima nivelada.

-Vida pagos limitados a 1, 5, 10, 15 y 20 años, y a edad alcanzada 60 y 65 años .

Donde las primas netas al millar para cada plan y para las edades siguientes: 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55 y 60 años aparecen en la tabla 3.

Supongamos entonces que tenemos en la cartera un total de 100,000 asegurados, los cuales contratan diversos planes y tienen distintas edades, si tomamos mas o menos la misma distribución de asegurados en los diversos planes y edades que tendría una cartera en una compañía, como lo podría ser la distribución de asegurados en cada plan como lo muestra la tabla 4.

Ahora sí, teniendo ya una distribución teórica dada, podemos determinar una prima "p" , tal que la probabilidad de una posible y positiva pérdida sea del 5% en un número X que tenemos de pólizas independientes en cada plan y en cada edad, utilizando la distribución normal, obtendríamos los resultados que muestra la tabla 5.

Podemos observar en los resultados, que debido al bajo número de asegurados en un plan, plazo y edad como lo es el temporal a prima única a plazo 5 y edad 20, se obtiene una prima recargada muy alta, porque tenemos una sola póliza, si tuviesemos sólo un asegurado en la cartera y fuere éste, la probabilidad de que tengamos que pagar la Suma Asegurada es .12, pero el valor de una posible desviación representaría una pérdida cuyo monto se elevaría al 100 % dentro del universo que tenemos de un asegurado, es decir, no podemos aplicar este método y cobrarle esa cantidad en especial a sólo ese asegurado, pues la cartera la conforman 100,000 personas en este caso.

Entonces como suponemos que ninguno de los asegurados esta dentro de algún nivel de subnormalidad, podemos aplicar el número total de asegurados a cada plan y a cada edad de forma tal que el recargo se suavice, y así obtener un recargo más uniforme, pero sin que se pierda la importancia de la varianza para cada plan, y así el recargo tome su valor de acuerdo al plan. Para ejemplificar esto podemos ver los resutados de esta aplicación en la tabla 6 que represente a las primas netas recargadas tomando en cuenta el número total de asegurados.

TABLA 3

PRIMAS NETAS AL MILLAR CALCULADAS CON LA TABLA EXPERIENCIA MEXICANA BASICA GRADUADA CON UNA TASA DE INTERES DEL 4.5%

TEMPORAL PRIMA UNICA

PLAZO

| X | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 4.32 | 8.41 | 12.61 | 17.28 | 47.23 | 59.42 |
| 25 | 5.12 | 10.38 | 16.23 | 23.04 | 53.74 | 69.01 |
| 30 | 6.59 | 13.92 | 22.46 | 32.74 | 60.94 | 80.08 |
| 35 | 9.2 | 19.93 | 32.83 | 48.66 | 68.25 | 92.28 |
| 40 | 13.51 | 29.76 | 49.7 | 74.37 | 74.37 | 104.63 |
| 45 | 20.57 | 45.81 | 77.03 | 115.34 | 77.03 | 115.34 |
| 50 | 32.22 | 72.06 | 120.96 | 177.23 | 72.06 | 120.96 |
| 55 | 51.56 | 114.83 | 187.65 | 265.29 | 51.56 | 114.83 |
| 60 | 83.8 | 180.26 | 283.1 | 379.13 | 0 | 83.8 |

DOTAL PRIMA UNICA

PLAZO

| X | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 802.81 | 645.41 | 519.91 | 420.07 | 192.69 | 164.93 |
| 25 | 802.87 | 645.71 | 520.67 | 421.56 | 235.91 | 201.14 |
| 30 | 802.99 | 646.25 | 522.02 | 424.15 | 289.3 | 245.71 |
| 35 | 803.19 | 647.19 | 524.3 | 428.46 | 354.98 | 300.25 |
| 40 | 803.53 | 648.75 | 528.05 | 435.5 | 435.5 | 366.57 |
| 45 | 804.08 | 651.3 | 534.15 | 446.9 | 534.15 | 446.9 |
| 50 | 805 | 655.49 | 544.13 | 465.07 | 655.49 | 544.13 |
| 55 | 806.53 | 662.42 | 560.13 | 492.94 | 806.53 | 662.42 |
| 60 | 809.12 | 673.62 | 584.63 | 533.23 | 1000 | 809.12 |

TEMPORAL

PLAZO

| X | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | .94 | 1.02 | 1.13 | 1.28 | 2.52 | 3.06 |
| 25 | 1.12 | 1.26 | 1.46 | 1.72 | 3.03 | 3.72 |
| 30 | 1.44 | 1.69 | 2.02 | 2.45 | 3.69 | 4.57 |
| 35 | 2.01 | 2.43 | 2.97 | 3.67 | 4.56 | 5.68 |
| 40 | 2.96 | 3.65 | 4.53 | 5.67 | 5.67 | 7.11 |
| 45 | 4.52 | 5.66 | 7.12 | 8.98 | 7.12 | 8.98 |
| 50 | 7.11 | 9.01 | 11.43 | 14.27 | 9.01 | 11.43 |
| 55 | 11.48 | 14.65 | 18.37 | 22.53 | 11.48 | 14.65 |
| 60 | 18.91 | 23.78 | 29.35 | 34.98 | 0 | 18.91 |

TABLA 3

PRIMAS NETAS AL MILLAR CALCULADAS CON LA TABLA EXPERIENCIA MEXICANA BASICA GRADUADA CON UNA TASA DE INTERES DEL 4.5%

DOTAL

PLAZO

| X | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 175.32 | 78.38 | 46.63 | 31.19 | 10.28 | 8.5 |
| 25 | 175.39 | 78.48 | 46.78 | 31.38 | 13.3 | 10.84 |
| 30 | 175.51 | 78.67 | 47.03 | 31.72 | 17.53 | 14.03 |
| 35 | 175.74 | 78.99 | 47.46 | 32.28 | 23.7 | 18.48 |
| 40 | 176.12 | 79.54 | 48.18 | 33.22 | 33.22 | 24.92 |
| 45 | 176.74 | 80.43 | 49.38 | 34.79 | 49.38 | 34.79 |
| 50 | 177.77 | 81.93 | 51.4 | 37.44 | 81.93 | 51.4 |
| 55 | 179.52 | 84.5 | 54.83 | 41.86 | 179.52 | 84.5 |
| 60 | 182.54 | 88.88 | 60.61 | 49.19 | 1000 | 182.54 |

VIDA PAGOS LIMITADOS

PLAZO DEL PAGO DE PRIMAS

| X | 1 | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 | O.V. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 119.92 | 26.19 | 14.56 | 10.76 | 8.9 | 6.4 | 6.18 | 5.87 |
| 25 | 144.78 | 31.63 | 17.6 | 13.01 | 10.78 | 8.16 | 7.8 | 7.29 |
| 30 | 175.06 | 38.26 | 21.31 | 15.77 | 13.09 | 10.61 | 9.99 | 9.14 |
| 35 | 211.54 | 46.28 | 25.82 | 19.15 | 15.94 | 14.12 | 13.02 | 11.55 |
| 40 | 254.84 | 55.85 | 31.24 | 23.25 | 19.44 | 19.44 | 17.32 | 14.73 |
| 45 | 305.47 | 67.14 | 37.72 | 28.24 | 23.78 | 28.24 | 23.78 | 18.94 |
| 50 | 363.62 | 80.3 | 45.45 | 34.35 | 29.27 | 45.45 | 34.35 | 24.6 |
| 55 | 428.84 | 95.45 | 54.7 | 41.98 | 36.42 | 95.45 | 54.7 | 32.33 |
| 60 | 499.73 | 112.74 | 65.93 | 51.81 | 46.1 | 499.73 | 112.74 | 43.02 |

TABLA 4

NUMERO DE ASEGURADOS PARA CADA PLAN Y A CADA EDAD, SEGUN LA SIGUIENTE DISTRIBUCION PROPUESTA

TEMPORAL PRIMA UNICA

PLAZO

| X | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 1 | 1 | 1 | 12 | 0 | 1 |
| 25 | 1 | 1 | 2 | 20 | 0 | 1 |
| 30 | 1 | 1 | 2 | 29 | 0 | 1 |
| 35 | 2 | 2 | 3 | 39 | 1 | 2 |
| 40 | 2 | 2 | 3 | 43 | 1 | 2 |
| 45 | 1 | 1 | 2 | 29 | 0 | 1 |
| 50 | 1 | 1 | 1 | 12 | 0 | 1 |
| 55 | 0 | 0 | 1 | 8 | 0 | 0 |
| 60 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 |

NUMERO DE ASEGURADOS POR PLAN 240

DOTAL PRIMA UNICA

PLAZO

| X | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 25 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| 30 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 |
| 35 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 1 |
| 40 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 1 |
| 45 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 |
| 50 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 55 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 60 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

NUMERO DE ASEGURADOS POR PLAN 36

TEMPORAL

PLAZO

| X | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 9 | 31 | 22 | 1332 | 14 | 378 |
| 25 | 15 | 51 | 36 | 2220 | 24 | 630 |
| 30 | 23 | 77 | 54 | 3330 | 36 | 945 |
| 35 | 30 | 102 | 72 | 4440 | 48 | 1260 |
| 40 | 33 | 112 | 79 | 4884 | 53 | 1386 |
| 45 | 23 | 77 | 54 | 3330 | 36 | 945 |
| 50 | 9 | 31 | 22 | 1332 | 14 | 378 |
| 55 | 6 | 20 | 14 | 888 | 10 | 252 |
| 60 | 3 | 10 | 7 | 444 | 5 | 126 |

NUMERO DE ASEGURADOS POR PLAN 29762

TABLA 4

NUMERO DE ASEGURADOS PARA CADA PLAN Y A CADA EDAD, SEGUN LA SIGUIENTE DISTRIBUCION PROPUESTA

DOTAL

PLAZO

| X | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 5 | 10 | 5 | 185 | 2 | 31 |
| 25 | 8 | 16 | 8 | 308 | 4 | 52 |
| 30 | 12 | 24 | 12 | 462 | 6 | 78 |
| 35 | 16 | 32 | 16 | 616 | 8 | 104 |
| 40 | 18 | 35 | 18 | 678 | 9 | 114 |
| 45 | 12 | 24 | 12 | 462 | 6 | 78 |
| 50 | 5 | 10 | 5 | 185 | 2 | 31 |
| 55 | 3 | 6 | 3 | 123 | 2 | 21 |
| 60 | 2 | 3 | 2 | 62 | 1 | 10 |

NUMERO DE ASEGURADOS POR PLAN 3962

VIDA PAGOS LIMITADOS

PLAZO DEL PAGO DE PRIMAS

| X | 1 | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 | O.V. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 2 | 8 | 8 | 8 | 832 | 6 | 87 | 3010 |
| 25 | 3 | 13 | 13 | 13 | 1386 | 11 | 145 | 5016 |
| 30 | 4 | 20 | 20 | 20 | 2079 | 16 | 218 | 7524 |
| 35 | 5 | 26 | 26 | 26 | 2772 | 21 | 290 | 10032 |
| 40 | 6 | 29 | 29 | 29 | 3049 | 23 | 319 | 11035 |
| 45 | 4 | 20 | 20 | 20 | 2079 | 16 | 218 | 7524 |
| 50 | 2 | 8 | 8 | 8 | 832 | 6 | 87 | 3010 |
| 55 | 1 | 5 | 5 | 5 | 554 | 4 | 58 | 2006 |
| 60 | 1 | 3 | 3 | 3 | 277 | 2 | 29 | 1003 |

NUMERO DE ASEGURADOS POR PLAN 66000

NUMERO TOTAL DE ASEGURADOS 100000

TABLA 5

PRIMAS NETAS RECARGADAS CALCULADAS CON LA TABLA EMBG Y CON EL NUMERO DE ASEGURADOS CORRESPONDIENTE A CADA PLAN Y A CADA EDAD CONFORME A LA TABLA 4

TEMPORAL PRIMA UNICA

PLAZO

| X | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 105.46 | 142.16 | 167.75 | 66.78 | 0 | 274.46 |
| 25 | 115.14 | 158.37 | 139.52 | 66.64 | 0 | 310.15 |
| 30 | 131.21 | 184.39 | 166.08 | 75.2 | 0 | 353.2 |
| 35 | 113.07 | 163.33 | 173.01 | 92.47 | 364.65 | 311.77 |
| 40 | 139.03 | 203.66 | 219.59 | 124.59 | 403.72 | 353.16 |
| 45 | 238.63 | 347.41 | 330.18 | 188.47 | 0 | 509.18 |
| 50 | 303.23 | 443.4 | 553.3 | 309.66 | 0 | 553.3 |
| 55 | 0 | 0 | 695.79 | 444.99 | 0 | 0 |
| 60 | 0 | 0 | 0 | 638.25 | 0 | 0 |

NUMERO DE ASEGURADOS POR PLAN 240

DOTAL PRIMA UNICA

PLAZO

| X | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0 | 0 | 0 | 468.34 | 0 | 0 |
| 25 | 0 | 0 | 0 | 465.18 | 0 | 0 |
| 30 | 0 | 0 | 0 | 463 | 0 | 402.56 |
| 35 | 0 | 0 | 0 | 470.51 | 0 | 460.58 |
| 40 | 0 | 0 | 0 | 482.44 | 0 | 525.91 |
| 45 | 0 | 0 | 0 | 514.27 | 0 | 597.54 |
| 50 | 0 | 0 | 0 | 593.8 | 0 | 0 |
| 55 | 0 | 0 | 0 | 709 | 0 | 0 |
| 60 | 0 | 0 | 0 | 780.28 | 0 | 0 |

NUMERO DE ASEGURADOS POR PLAN 36

TEMPORAL

PLAZO

| X | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 8.43 | 3.99 | 4.18 | 1.64 | 5.77 | 3.67 |
| 25 | 7.42 | 3.82 | 4.14 | 2.03 | 5.93 | 4.27 |
| 30 | 7.2 | 4.1 | 4.58 | 2.75 | 6.55 | 5.11 |
| 35 | 7.97 | 4.93 | 5.65 | 3.99 | 7.61 | 6.25 |
| 40 | 9.86 | 6.57 | 7.7 | 6.05 | 9.37 | 7.8 |
| 45 | 14.8 | 10.08 | 11.95 | 9.55 | 13.07 | 10.06 |
| 50 | 28.16 | 17.96 | 21.27 | 15.41 | 22.57 | 13.7 |
| 55 | 44.99 | 29.2 | 34.62 | 24.29 | 37.06 | 18.58 |
| 60 | 83.32 | 51.51 | 61.04 | 38.11 | 0 | 27.89 |

NUMERO DE ASEGURADOS POR PLAN 29762

TABLA 5

PRIMAS NETAS RECARGADAS CALCULADAS CON LA TABLA EMBG Y CON EL NUMERO DE ASEGURADOS CORRESPONDIENTE A CADA PLAN Y A CADA EDAD CONFORME A LA TABLA 4

DOTAL

PLAZO

| X | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 180.69 | 81.6 | 50.9 | 31.84 | 17.39 | 10.19 |
| 25 | 179.94 | 81.24 | 50.46 | 31.94 | 18.77 | 12.3 |
| 30 | 179.69 | 81.22 | 50.48 | 32.25 | 22.64 | 15.4 |
| 35 | 179.97 | 81.61 | 51.03 | 32.83 | 28.94 | 19.89 |
| 40 | 180.95 | 82.59 | 52.33 | 33.87 | 39.26 | 26.56 |
| 45 | 184.12 | 85.08 | 55.9 | 35.79 | 58.88 | 37.27 |
| 50 | 192.58 | 91.39 | 65.27 | 39.5 | 105.26 | 56.52 |
| 55 | 205.01 | 101.08 | 80.67 | 45.26 | 211.57 | 92.86 |
| 60 | 225.92 | 123.47 | 110.12 | 55.84 | 0 | 200.08 |

NUMERO DE ASEGURADOS POR PLAN 3962

VIDA PAGOS LIMITADOS

PLAZO DEL PAGO DE PRIMAS

| X | 1 | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 | O.V. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 244.57 | 40.14 | 22.53 | 16.77 | 9.39 | 10.94 | 7.29 | 6.05 |
| 25 | 255.04 | 43.5 | 24.39 | 18.16 | 11.19 | 12 | 8.79 | 7.45 |
| 30 | 279.5 | 48.78 | 27.37 | 20.4 | 13.47 | 14.4 | 10.95 | 9.29 |
| 35 | 313.97 | 56.49 | 31.76 | 23.74 | 16.31 | 18.19 | 14.02 | 11.71 |
| 40 | 356.84 | 66.56 | 37.59 | 28.24 | 19.85 | 24.38 | 18.51 | 14.91 |
| 45 | 440.27 | 81.44 | 46.47 | 35.29 | 24.37 | 36.17 | 25.63 | 19.22 |
| 50 | 566.07 | 105.61 | 61.82 | 48.17 | 30.4 | 64.55 | 38.26 | 25.16 |
| 55 | 726.37 | 131.66 | 80.01 | 64.64 | 38.16 | 136.23 | 61.53 | 33.22 |
| 60 | 800.27 | 167.58 | 108.97 | 93.46 | 49.31 | 0 | 129.08 | 44.68 |

NUMERO DE ASEGURADOS POR PLAN 66000

NUMERO TOTAL DE ASEGURADOS 66000

TABLA 6

PRIMAS NETAS RECARGADAS CALCULADAS CON LA TABLA EMBG Y CON EL NUMERO TOTAL DE ASEGURADOS APLICADO A CADA PLAN Y A CADA EDAD

TEMPORAL PRIMA UNICA

PLAZO

| X | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 4.64 | 8.83 | 13.1 | 17.82 | 47.9 | 60.1 |
| 25 | 5.47 | 10.85 | 16.78 | 23.66 | 54.49 | 69.77 |
| 30 | 6.99 | 14.46 | 23.11 | 33.46 | 61.78 | 80.94 |
| 35 | 9.67 | 20.57 | 33.6 | 49.53 | 69.18 | 93.26 |
| 40 | 14.07 | 30.54 | 50.63 | 75.41 | 75.41 | 105.74 |
| 45 | 21.26 | 46.76 | 78.16 | 116.58 | 78.16 | 116.58 |
| 50 | 33.07 | 73.24 | 122.32 | 178.68 | 73.24 | 122.32 |
| 55 | 52.63 | 116.27 | 189.26 | 266.9 | 52.63 | 116.27 |
| 60 | 85.14 | 181.97 | 284.89 | 380.77 | 0 | 85.14 |

DOTAL PRIMA UNICA

PLAZO

| X | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 802.84 | 645.5 | 520.07 | 420.29 | 193.12 | 165.39 |
| 25 | 802.91 | 645.81 | 520.84 | 421.8 | 236.34 | 201.62 |
| 30 | 803.03 | 646.36 | 522.21 | 424.42 | 289.73 | 246.21 |
| 35 | 803.22 | 647.33 | 524.53 | 428.79 | 355.4 | 300.76 |
| 40 | 803.59 | 648.91 | 528.32 | 435.89 | 435.89 | 367.07 |
| 45 | 804.16 | 651.49 | 534.49 | 447.37 | 534.49 | 447.37 |
| 50 | 805.08 | 655.73 | 544.54 | 465.65 | 655.73 | 544.54 |
| 55 | 806.64 | 662.72 | 560.63 | 493.62 | 806.64 | 662.72 |
| 60 | 809.26 | 674 | 585.23 | 534.01 | 0 | 809.26 |

TEMPORAL

PLAZO

| X | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 1.01 | 1.07 | 1.18 | 1.32 | 2.56 | 3.1 |
| 25 | 1.2 | 1.32 | 1.51 | 1.76 | 3.07 | 3.76 |
| 30 | 1.53 | 1.76 | 2.08 | 2.5 | 3.75 | 4.62 |
| 35 | 2.12 | 2.51 | 3.04 | 3.73 | 4.62 | 5.74 |
| 40 | 3.09 | 3.75 | 4.62 | 5.76 | 5.76 | 7.19 |
| 45 | 4.67 | 5.78 | 7.23 | 9.08 | 7.23 | 9.08 |
| 50 | 7.31 | 9.16 | 11.56 | 14.4 | 9.16 | 11.56 |
| 55 | 11.72 | 14.84 | 18.55 | 22.69 | 11.72 | 14.84 |
| 60 | 19.22 | 24.03 | 29.57 | 35.18 | 0 | 19.22 |

TABLA 6

PRIMAS NETAS RECARGADAS CALCULADAS CON LA TABLA EMBG Y CON EL NUMERO TOTAL DE ASEGURADOS APLICADO A CADA PLAN Y A CADA EDAD

DOTAL

PLAZO

| X | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 175.36 | 78.41 | 46.66 | 31.22 | 10.31 | 8.53 |
| 25 | 175.43 | 78.52 | 46.81 | 31.41 | 13.33 | 10.87 |
| 30 | 175.56 | 78.71 | 47.07 | 31.75 | 17.57 | 14.07 |
| 35 | 175.79 | 79.04 | 47.51 | 32.33 | 23.74 | 18.52 |
| 40 | 176.18 | 79.59 | 48.23 | 33.27 | 33.27 | 24.97 |
| 45 | 176.81 | 80.5 | 49.44 | 34.86 | 49.44 | 34.86 |
| 50 | 177.87 | 82.02 | 51.48 | 37.53 | 82.02 | 51.48 |
| 55 | 179.64 | 84.61 | 54.95 | 41.98 | 179.64 | 84.61 |
| 60 | 182.7 | 89.03 | 60.76 | 49.35 | 0 | 182.7 |

VIDA PAGOS LIMITADOS

PLAZO DEL PAGO DE PRIMAS

| X | 1 | 5 | 10 | 15 | 20 | 60 | 65 | O.V. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 120.48 | 26.31 | 14.63 | 10.81 | 8.95 | 6.43 | 6.22 | 5.9 |
| 25 | 145.38 | 31.76 | 17.67 | 13.06 | 10.83 | 8.2 | 7.84 | 7.33 |
| 30 | 175.72 | 38.41 | 21.39 | 15.84 | 13.15 | 10.65 | 10.04 | 9.18 |
| 35 | 212.26 | 46.45 | 25.91 | 19.22 | 16 | 14.18 | 13.07 | 11.6 |
| 40 | 255.63 | 56.04 | 31.35 | 23.33 | 19.51 | 19.51 | 17.39 | 14.79 |
| 45 | 306.32 | 67.34 | 37.84 | 28.33 | 23.87 | 28.33 | 23.87 | 19.02 |
| 50 | 364.52 | 80.52 | 45.59 | 34.46 | 29.37 | 45.59 | 34.46 | 24.7 |
| 55 | 429.78 | 95.69 | 54.86 | 42.12 | 36.55 | 95.69 | 54.86 | 32.46 |
| 60 | 500.68 | 113.01 | 66.12 | 51.98 | 46.27 | 0 | 113.01 | 43.18 |

## 4.3.- Análisis de los resultados de la cartera.

Empezemos analizando las primas de algunos seguros, su varianza y la relación que existe entre las primas y la desviación estandard de éstas.

En la tabla 2 del capítulo III se muestran las primas y varianzas de los planes Ordinario de vida a prima única, Temporal a 20 años y Dotal a 20 años, a edades 30, 40 y 50, podemos ver que en relación a su prima, el seguro que tiene más riesgo y que es el más significativo en cuanto a desviación, es el temporal, dado que la relación que existe entre sus primas y la desviación estandard (D.S.) correspondiente es la más significativa siendo en estos casos particularmente la D.S. mayor a la prima.

El seguro que le sigue al Temporal es el Ordinario de Vida, donde la prima es un poco mayor a su D.S.

Por último, el seguro que tiene menos riesgo en relación a la prima es el Dotal donde las primas son bastante mayores a la D.S. Esto es porque el temporal es el seguro que mayor cantidad en riesgo posee. El ordinario de vida es el segundo en cuanto a importancia respecto a la cantidad en riesgo se refiere. Y el seguro dotal es el que genera menor cantidad en riesgo, además es en el que menos incertidumbre existe.

Los resultados obtenidos son lógicos y representan de una forma cuantitativa lo que de antemano se pudo haber concluido en relación a los diferentes tipos de seguros.

Por otra parte, en la tabla 3 se muestran las primas netas calculadas utilizando la tabla EMBG con una tasa de interés del 4.5% y expresadas al millar para los diferentes planes y edades que se consideraron en esta cartera.

Además suponemos que esos asegurados se distribuyen según el plan y edad de que se trate, como lo muestra la tabla 4.

En los resultados que arroja la tabla 5 se muestran las primas netas recargadas obtenidas mediante la aplicación de; la distribución normal, donde se aplicó un porcentaje de seguridad en la cartera, es decir, se supuso que se quería trabajar con sólo un 5% de probabilidad de que la posible pérdida de la compañía sea positiva; la tabla EMBG con unas tasas de interés de 4.5% y 9.2025%; utilizando el número de asegurados que supuestamente existen para cada plan y a cada edad, según lo expuesto en la tabla 4; y 1000 u.m. de Suma Asegurada.

En esta tabla podemos apreciar que en los planes que tienen un número muy bajo de asegurados las primas resultantes se salen de un contexto normal, debido a que la ocurrencia del evento prematuramente representaría una desviación muy grande, pero como se supone que todos los asegurados que se tienen son normales y se consideran dentro del mismo nivel de riesgo, en vez de aplicar el número de asegurados que se tiene en cada plan y edad, podemos aplicar el número total de asegurados en la cartera a cada edad y plan, suavizando y uniformando así el recargo en la cartera.

De esta forma se desarrolló la tabla 6, aplicando las siguientes características: la suma asegurada es de 1000 u.m. para cada persona; el nivel de confianza es de 95%; la tabla de mortalidad es EMBG calculada con tasas de interés del 4.5% y del 9.2025%; para el número de asegurados se considero que todos los 100,000 pertenecían a cada plan y a cada edad.

En los resultados de esta tabla se puede observar que el recargo obtenido en las primas (en comparación con las primas netas normales de la tabla 3) se suavizó sin perder la importancia que representa el pertenecer a algún plan y edad en particular. Por ejemplo, no es el mismo recargo el obtenido del plan Temporal 5 a prima única y a edad 20 (7.4%) al del Temporal 5 a edad 60 (1.84%).

5.- Notas y Referencias.

1.- Ver Actuarial Mathematics, Newton I. Bowers jr., Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt, Society of Actuaries, 1984, Capítulo 4 página 5, Teorema 4.1.

Y ver también nota 4 del Capítulo I de esta tesis.

2.- Ver an Introduction to probability, Theory and its apications, William Feler, Volume I, Willey International Edition, 1967, 3rd edition, página 229

3a.- Ver Society of Actuaries' Textbook on Life Contingencies, Chester Wallace Jordan Jr., Second Edition, Published by The Society of Actuaries, 1982

3b.- Ver Actuarial Mathematics, Newton I. Bowers jr., Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt, Society of Actuaries, 1984, Capítulo 5 página 28.

4.- Ver Society of Actuaries' Textbook on Life Contingencies, Chester Wallace Jordan Jr., Second Edition, Published by The Society of Actuaries, 1982

5.- Ver Actuarial Mathematics, Newton I. Bowers jr., Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt, Society of Actuaries, 1984, Capítulo 4 página 5.

6a.- Ver Actuarial Mathematics, Newton I. Bowers jr., Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt, Society of Actuaries, 1984, Capítulo 6 página 5 y página 15.

6b.- Ver Probabilidad y Estadística, Murray R. Spiegel, McGraw-Hill, traducción de la primera edición en Inges de Probability and Statistics, McGraw-Hill Book Co., 1975, página 79 Teorema 3.5

## Conclusiones

Dentro del cálculo de primas pueden incluirse recargos para cubrir desviaciones por distintos métodos. En el capítulo III vimos un método en que el recargo en las primas puede ser obtenido mediante la aplicación de varianzas para las distintas primas de seguros aplicadas a una cartera en particular y con un cierto margen de seguridad, lo cual nos permite utilizar la tabla básica y seguir el comportamiento esperado que tendrían los fondos, conociendo en cada año la desviación que se puede soportar. Uno de los métodos más utilizado actualmente consiste en obtener las primas mediante la aplicación de una tabla de mortalidad cuyos valores de qx ya contienen el recargo por variaciones en mortalidad asumiendo posibles desviaciones.

El objetivo que se busca en esta tésis, es el de estudiar si es o no factible el uso del procedimiento de recargo asumiendo la aplicación de varianzas, como lo vimos en el capítulo III, en una cartera de seguros de vida.

La tabla "Experiencia Mexicana Básica Graduada" (EMBG) se obtuvo como su nombre lo dice, de los resultados del mercado mexicano asegurador, lo cual implica que si el comportamiento del mercado se manifiesta de una forma regular, las primas calculadas con esta tabla deberían ser suficientes para cubrir las reclamaciones. Pero como esto no se puede predecir con exactitud para cada tipo de seguro y para cada cartera, se tiene que trabajar con ciertos márgenes de seguridad para poder cubrir en dado caso las desviaciones que pudieran presentarse en nuestra cartera.

El método que fué el tema de esta tésis y que se desarrolló en el Capítulo III, muestra los margenes obtenidos aplicando métodos que cuentan con unas bases estadísticas comprobadas y buenas, de esta forma representa lo que pudiese ser una forma de administración técnica de una cartera.

Después de haber analizado los resultados que se presentaron en el capítulo III donde se muestran los resultados del manejo de una cartera propuesta con 100,000 asegurados, podemos concluir que mientras el margen de seguridad con el que queramos trabajar sea mayor, la prima que se obtenga por consecuencia también es mayor, lo cual era de esperarse.

Asi mismo podemos concluir que el recargo no sólo depende del margen de seguridad con el que se quiera trabajar sino que también depende del número de asegurados con el que estamos trabajando. Mientras más grande sea dicho número, el recargo va siendo menor acercándose cada vez más al valor medio, puesto que la cartera tomaría cada vez más un comportamiento normal y las desviaciones que puedan existir tendrían un peso menor dentro del universo con el que trabajemos, lo cual es muy lógico pues es lo que nos dice la ley de los grandes números.

Así pues, utilizando éste método se podrían calcular las primas que se fueran a cobrar en base a la experiencia de la Compañía de seguros (si es que su carterafuera lo suficientemente grande), o bien utilizar una tabla sin recargos, basada en información reciente de la experiencia del mercado asegurador en México.

De esta forma, el recargo que se obtuviese de dichas primas dependería en cada compañía del plan que se maneje, del número de asegurados que se tenga para cada plan, de la distribución de sumas aseguradas, y del nivel de seguridad con el que se quisiera trabajar.

También es fácil observar que la aplicación de éste método traería como consecuencia lógica un manejo técnico más complicado no sólo para las compañías de seguros, sino también para algún organismo regulador , el cual debería de vigilar que las primas cumplan con los requisitos de cálculo y dentro de los parámetros que para el efecto dictare éste último.

BIBLIOGRAFIA.


-Murray R. Spiegel, Probabilidad y Estadistica, McGraw Hill book Co., 1975.

-Chester Wallace, C.W. Jordan jr., Society of Actuaries' textbook on Life Contingences, 2nd Edition, Published by the society of Actuaries, 1982

-L. Bowers, Hans Gerber, Donald A. Jones, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, 1984.

-Robert V. Hogg. Eliot A. Tanis, Probability and statistical Inference, Mcmilan Publishing Co., Inc. N.Y., 1977

-Wiliam Feler, An Introduction to probability, Theory and its aplications, Volume I, Willey International Edition, 1967, 3rd Edition

ANEXO 1

Experiencia Mexicana Básica Graduada

delta =0.04

| x | lx | dx | Dx | Cx | Nx | Mx |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 10000000 | 8800 | 5488116.361 | 4640.173 | 123145177.227 | 659524.8962 |
| 16 | 9991200 | 8892 | 5268284.067 | 4504.838 | 117657060.866 | 654884.7229 |
| 17 | 9982308 | 8984 | 5057206.856 | 4372.982 | 112388776.799 | 650379.8846 |
| 18 | 9973324 | 9076 | 4854537.956 | 4244.540 | 107331569.943 | 646006.9023 |
| 19 | 9964248 | 9267 | 4659944.260 | 4163.932 | 102477031.987 | 641762.3618 |
| 20 | 9954981 | 9358 | 4473061.301 | 4039.947 | 97817087.727 | 637598.4303 |
| 21 | 9945623 | 9548 | 4293630.111 | 3960.347 | 93344026.426 | 633558.4832 |
| 22 | 9936075 | 9837 | 4121314.119 | 3920.232 | 89050396.315 | 629598.1360 |
| 23 | 9926238 | 10026 | 3955794.849 | 3838.884 | 84929082.196 | 625677.9042 |
| 24 | 9916212 | 10313 | 3796847.031 | 3793.941 | 80973287.346 | 621839.0201 |
| 25 | 9905899 | 10698 | 3644176.588 | 3781.258 | 77176440.316 | 618043.0794 |
| 26 | 9895201 | 11083 | 3497505.122 | 3763.737 | 73532263.727 | 614263.8212 |
| 27 | 9884118 | 11564 | 3356602.248 | 3773.100 | 70034758.605 | 610500.0840 |
| 28 | 9872554 | 12045 | 3221214.892 | 3775.941 | 66678156.357 | 606726.9845 |
| 29 | 9860509 | 12621 | 3091133.308 | 3801.372 | 63456941.466 | 602951.0434 |
| 30 | 9847888 | 13295 | 2966126.865 | 3847.363 | 60365808.158 | 599149.6713 |
| 31 | 9834593 | 13965 | 2845976.004 | 3882.791 | 57399681.293 | 595302.3081 |
| 32 | 9820628 | 14731 | 2730500.898 | 3935.170 | 54553705.289 | 591419.5172 |
| 33 | 9805897 | 15689 | 2619501.256 | 4026.751 | 51823204.391 | 587484.3471 |
| 34 | 9790208 | 16643 | 2512762.392 | 4104.113 | 49203703.135 | 583457.5961 |
| 35 | 9773565 | 17788 | 2410131.456 | 4214.471 | 46690940.743 | 579353.4829 |
| 36 | 9755777 | 19121 | 2311414.379 | 4352.660 | 44280809.287 | 575139.0119 |
| 37 | 9736656 | 20447 | 2216429.864 | 4472.002 | 41969394.908 | 570786.3516 |
| 38 | 9716209 | 22056 | 2125050.404 | 4634.761 | 39752965.044 | 566314.3497 |
| 39 | 9694153 | 23654 | 2037091.225 | 4775.660 | 37627914.639 | 561679.5885 |
| 40 | 9670499 | 25530 | 1952440.075 | 4952.310 | 35590823.414 | 556903.9283 |
| 41 | 9644969 | 27585 | 1870931.495 | 5141.126 | 33638383.339 | 551951.6178 |
| 42 | 9617384 | 29718 | 1792430.095 | 5321.488 | 31767451.844 | 546810.4917 |
| 43 | 9587666 | 32215 | 1716826.419 | 5542.425 | 29975021.749 | 541489.0039 |
| 44 | 9555451 | 34782 | 1643966.266 | 5749.426 | 28258195.331 | 535946.5786 |
| 45 | 9520669 | 37892 | 1573756.001 | 6017.910 | 26614229.065 | 530197.1527 |
| 46 | 9492777 | 41060 | 1506030.235 | 6265.350 | 25040473.064 | 524179.2427 |
| 47 | 9441717 | 44565 | 1440712.596 | 6533.539 | 23534442.829 | 517913.8930 |
| 48 | 9397152 | 48395 | 1377687.907 | 6816.843 | 22093730.233 | 511380.3537 |
| 49 | 9348757 | 52727 | 1316851.149 | 7135.823 | 20716042.326 | 504563.5105 |
| 50 | 9296030 | 57449 | 1258080.853 | 7470.019 | 19399191.177 | 497427.6870 |
| 51 | 9238581 | 62545 | 1201280.778 | 7813.760 | 18141110.324 | 489957.6676 |
| 52 | 9176036 | 68178 | 1146364.125 | 8183.516 | 16939829.546 | 482143.9074 |
| 53 | 9107858 | 74411 | 1093231.028 | 8581.458 | 15793465.422 | 473960.3911 |
| 54 | 9033447 | 81120 | 1041783.369 | 8988.352 | 14700234.394 | 465378.9335 |
| 55 | 8952327 | 88449 | 991946.106 | 9416.148 | 13658451.025 | 456390.5813 |

Experiencia Mexicana Básica Graduada

ANEXO 1

delta =0.04

| x | lx | dx | Dx | Cx | Nx | Mx |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 56 | 8963878 | 96528 | 943635.195 | 9873.290 | 12666504.919 | 446974.4330 |
| 57 | 8767350 | 105208 | 896761.440 | 10339.167 | 11722869.724 | 437101.1431 |
| 58 | 8662142 | 114687 | 851259.753 | 10828.772 | 10826108.284 | 426761.9757 |
| 59 | 8547455 | 124878 | 807052.609 | 11328.677 | 9974848.531 | 415933.2036 |
| 60 | 8422577 | 135940 | 764078.947 | 11848.646 | 9167795.922 | 404604.5270 |
| 61 | 8286637 | 149740 | 722270.337 | 12539.711 | 8403716.975 | 392755.8809 |
| 62 | 8136897 | 161680 | 681410.001 | 13008.709 | 7681446.638 | 380216.1703 |
| 63 | 7975217 | 174418 | 641682.824 | 13483.336 | 7000036.637 | 367207.4611 |
| 64 | 7800799 | 187765 | 603038.742 | 13945.978 | 6358353.814 | 353724.1228 |
| 65 | 7613034 | 201822 | 565447.276 | 14402.274 | 5755315.072 | 339778.1444 |
| 66 | 7411212 | 216482 | 528873.497 | 14842.689 | 5189867.796 | 325375.8703 |
| 67 | 7194730 | 231598 | 493293.362 | 15256.461 | 4660994.298 | 310533.1815 |
| 68 | 6963132 | 247122 | 458694.611 | 15640.788 | 4167700.916 | 295276.7202 |
| 69 | 6716010 | 262797 | 425068.149 | 15980.702 | 3709006.306 | 279635.9318 |
| 70 | 6453213 | 278456 | 392420.287 | 16268.977 | 3283938.157 | 263655.2298 |
| 71 | 6174757 | 293795 | 360764.290 | 16492.113 | 2891517.870 | 247386.2525 |
| 72 | 5880962 | 308574 | 330126.407 | 16642.534 | 2530753.580 | 230894.1399 |
| 73 | 5572388 | 322474 | 300539.432 | 16710.253 | 2200627.173 | 214251.6062 |
| 74 | 5249914 | 334997 | 272044.859 | 16678.519 | 1900087.741 | 197541.3528 |
| 75 | 4914917 | 345715 | 244699.309 | 16537.239 | 1628042.882 | 180862.8342 |
| 76 | 4569202 | 354250 | 218567.273 | 16281.067 | 1383343.574 | 164325.5954 |
| 77 | 4214952 | 360083 | 193716.061 | 15900.246 | 1164776.301 | 148044.5287 |
| 78 | 3854869 | 362743 | 170220.100 | 15389.641 | 971060.240 | 132144.2830 |
| 79 | 3492126 | 361819 | 148156.033 | 14748.540 | 800840.140 | 116754.6424 |
| 80 | 3130307 | 356918 | 127598.212 | 13978.299 | 652684.107 | 102006.1026 |
| 81 | 2773389 | 347755 | 108616.716 | 13085.414 | 525085.894 | 88027.8035 |
| 82 | 2425634 | 334277 | 91272.379 | 12085.060 | 416469.179 | 74942.3890 |
| 83 | 2091357 | 316527 | 75608.478 | 10994.647 | 325196.799 | 62857.3289 |
| 84 | 1774830 | 294746 | 61649.180 | 9836.638 | 249588.322 | 51862.6816 |
| 85 | 1480084 | 269434 | 49395.243 | 8639.316 | 187939.142 | 42026.0437 |
| 86 | 1210650 | 241331 | 38819.111 | 7434.783 | 138543.899 | 33386.7273 |
| 87 | 969319 | 211331 | 29862.209 | 6255.278 | 99724.788 | 25951.9440 |
| 88 | 757988 | 180492 | 22436.017 | 5132.980 | 69862.579 | 19696.6658 |
| 89 | 577496 | 149976 | 16423.308 | 4097.903 | 47426.562 | 14563.6854 |
| 90 | 427520 | 120890 | 11681.438 | 3173.646 | 31003.255 | 10465.7828 |
| 91 | 306630 | 108381 | 8049.756 | 2733.691 | 19321.817 | 7292.1370 |
| 92 | 198249 | 76013 | 5000.430 | 1842.097 | 11272.061 | 4558.4457 |
| 93 | 122236 | 50733 | 2962.263 | 1181.254 | 6271.631 | 2716.3491 |
| 94 | 71503 | 32048 | 1664.857 | 716.938 | 3309.368 | 1535.0951 |
| 95 | 39455 | 19050 | 882.639 | 409.453 | 1644.511 | 818.1566 |
| 96 | 20405 | 10583 | 438.577 | 218.548 | 761.872 | 408.7035 |
| 97 | 9822 | 5457 | 202.832 | 108.273 | 323.295 | 190.1558 |
| 98 | 4365 | 2589 | 86.606 | 49.354 | 120.463 | 81.8830 |
| 99 | 1776 | 1776 | 33.856 | 32.529 | 33.856 | 32.5286 |

Experiencia Mexicana Básica Graduada

ANEXO 2

delta =0.08

| x | lx | dx | Dx | Cx | Nx | Mx |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 10000000 | 8800 | 3011942.119 | 2446.728 | 38186271.403 | 76042.0558 |
| 16 | 9991200 | 8892 | 2777926.276 | 2282.228 | 35174329.284 | 73595.3275 |
| 17 | 9982308 | 8984 | 2562066.927 | 2128.559 | 32396403.008 | 71313.0999 |
| 18 | 9973324 | 9076 | 2362957.302 | 1985.029 | 29834336.081 | 69184.5409 |
| 19 | 9964248 | 9267 | 2179299.482 | 1870.975 | 27471378.779 | 67199.5118 |
| 20 | 9954981 | 9358 | 2009876.001 | 1744.088 | 25292079.297 | 65328.5368 |
| 21 | 9945623 | 9548 | 1853605.303 | 1642.684 | 23282203.296 | 63584.4491 |
| 22 | 9936075 | 9837 | 1709450.670 | 1562.287 | 21428597.993 | 61941.7648 |
| 23 | 9926238 | 10026 | 1576459.570 | 1469.881 | 19719147.323 | 60379.4777 |
| 24 | 9916212 | 10313 | 1453785.717 | 1395.713 | 18142687.753 | 58909.5963 |
| 25 | 9905899 | 10698 | 1340617.647 | 1336.503 | 16688902.036 | 57513.8836 |
| 26 | 9895201 | 11083 | 1236209.561 | 1278.148 | 15348284.389 | 56177.3801 |
| 27 | 9884118 | 11564 | 1139887.105 | 1231.086 | 14112074.828 | 54899.2318 |
| 28 | 9872554 | 12045 | 1051017.333 | 1183.705 | 12972187.724 | 53668.1457 |
| 29 | 9860509 | 12621 | 969027.575 | 1144.951 | 11921170.390 | 52484.4403 |
| 30 | 9847888 | 13295 | 893380.244 | 1113.366 | 10952142.815 | 51339.4891 |
| 31 | 9834593 | 13965 | 823580.540 | 1079.561 | 10058762.572 | 50226.1229 |
| 32 | 9820628 | 14731 | 759181.099 | 1051.223 | 9235182.031 | 49146.5622 |
| 33 | 9805897 | 15689 | 699761.259 | 1033.509 | 8476000.933 | 48095.3393 |
| 34 | 9790208 | 16643 | 644927.548 | 1012.062 | 7776239.674 | 47061.8303 |
| 35 | 9773565 | 17788 | 594331.100 | 998.525 | 7131312.126 | 46049.7684 |
| 36 | 9755777 | 19121 | 547638.228 | 990.830 | 6536981.026 | 45051.2433 |
| 37 | 9736656 | 20447 | 504542.971 | 978.080 | 5989342.798 | 44060.4137 |
| 38 | 9716209 | 22056 | 464773.784 | 973.931 | 5484799.827 | 43082.3338 |
| 39 | 9694153 | 23654 | 428066.347 | 964.189 | 5020026.043 | 42108.4033 |
| 40 | 9670499 | 25530 | 394190.853 | 960.649 | 4591959.697 | 41144.2141 |
| 41 | 9644969 | 27585 | 362923.370 | 958.172 | 4197768.844 | 40183.5647 |
| 42 | 9617384 | 29718 | 334062.324 | 952.898 | 3834845.474 | 39225.3926 |
| 43 | 9587666 | 32215 | 307425.493 | 953.546 | 3500783.150 | 38272.4942 |
| 44 | 9555451 | 34782 | 282835.952 | 950.374 | 3193357.657 | 37318.9484 |
| 45 | 9520669 | 37892 | 260140.117 | 955.749 | 2910521.704 | 36368.5747 |
| 46 | 9482777 | 41060 | 239183.846 | 956.030 | 2650381.587 | 35412.8258 |
| 47 | 9441717 | 44565 | 219838.487 | 957.862 | 2411197.741 | 34456.7954 |
| 48 | 9397152 | 48395 | 201978.639 | 960.210 | 2191359.254 | 33498.9330 |
| 49 | 9348757 | 52727 | 185489.573 | 965.729 | 1989380.615 | 32538.7233 |
| 50 | 9296030 | 57449 | 170262.729 | 971.317 | 1803891.042 | 31572.9946 |
| 51 | 9238581 | 62545 | 156200.991 | 976.175 | 1633628.313 | 30601.6776 |
| 52 | 9176036 | 68178 | 143215.513 | 982.281 | 1477427.322 | 29625.5029 |
| 53 | 9107858 | 74411 | 131222.301 | 989.658 | 1334211.809 | 28643.2221 |
| 54 | 9033447 | 81120 | 120143.793 | 995.938 | 1202989.508 | 27653.5644 |
| 55 | 8952327 | 88449 | 109910.762 | 1002.429 | 1082845.715 | 26657.6266 |

Experiencia Mexicana Básica Graduada

delta =0.08

ANEXO 2

| x | lx | dx | Dx | Cx | Nx | Mx |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 56 | 8863878 | 96528 | 10045 .992 | 1009.882 | 972934.954 | 25655.1976 |
| 57 | 8767350 | 105208 | 91724.532 | 1016.067 | 872476.962 | 24645.3159 |
| 58 | 8662142 | 114687 | 83656.348 | 1022.455 | 780752.430 | 23629.2489 |
| 59 | 8547455 | 124878 | 76202.087 | 1027.714 | 697096.081 | 22606.7938 |
| 60 | 8422577 | 135940 | 69315.678 | 1032.738 | 620893.994 | 21579.0794 |
| 61 | 8286637 | 149740 | 62953.698 | 1050.116 | 551578.316 | 20546.3414 |
| 62 | 8136897 | 161680 | 57063.471 | 1046.676 | 488624.618 | 19496.2255 |
| 63 | 7975217 | 174418 | 51629.548 | 1042.326 | 431561.147 | 18449.5499 |
| 64 | 7800799 | 187765 | 46617.753 | 1035.818 | 379931.599 | 17407.2240 |
| 65 | 7613034 | 201822 | 41997.792 | 1027.765 | 333313.846 | 16371.4062 |
| 66 | 7411212 | 216482 | 37741.084 | 1017.662 | 291316.053 | 15343.6417 |
| 67 | 7194730 | 231598 | 33321.750 | 1005.016 | 253574.969 | 14325.9801 |
| 68 | 6963132 | 247122 | 30216.395 | 989.933 | 219753.219 | 13320.9645 |
| 69 | 6716010 | 262797 | 26903.315 | 971.787 | 189536.824 | 12331.0313 |
| 70 | 6453213 | 278456 | 23863.102 | 950.526 | 162633.509 | 11359.2438 |
| 71 | 6174757 | 293795 | 21077.894 | 925.781 | 138770.407 | 10408.7180 |
| 72 | 5880962 | 308574 | 18531.568 | 897.593 | 117692.513 | 9482.9372 |
| 73 | 5572388 | 322474 | 16209.200 | 865.907 | 99160.945 | 8585.3440 |
| 74 | 5249914 | 334997 | 14097.070 | 830.375 | 82951.746 | 7719.4367 |
| 75 | 4914917 | 345715 | 12182.861 | 791.057 | 68854.676 | 6889.0622 |
| 76 | 4569202 | 354250 | 10455.141 | 748.266 | 56671.815 | 6098.0052 |
| 77 | 4214952 | 360083 | 8903.046 | 702.110 | 46216.673 | 5349.7395 |
| 78 | 3854869 | 362743 | 7516.438 | 652.917 | 37313.627 | 4647.6296 |
| 79 | 3492126 | 361919 | 6285.630 | 601.183 | 29797.189 | 3994.7127 |
| 80 | 3130307 | 356918 | 5201.184 | 547.445 | 23511.560 | 3393.5297 |
| 81 | 2773389 | 347755 | 4253.854 | 492.381 | 18310.376 | 2846.0851 |
| 82 | 2425634 | 334277 | 3434.421 | 436.909 | 14056.522 | 2353.7038 |
| 83 | 2091357 | 316527 | 2733.461 | 381.902 | 10622.101 | 1916.7946 |
| 84 | 1774830 | 294746 | 2141.400 | 328.281 | 7888.641 | 1534.8927 |
| 85 | 1480084 | 269434 | 1648.481 | 277.017 | 5747.241 | 1206.6119 |
| 86 | 1210650 | 241331 | 1244.723 | 229.046 | 4098.760 | 929.5950 |
| 87 | 969319 | 211331 | 919.977 | 185.153 | 2854.037 | 700.5485 |
| 88 | 757988 | 180492 | 664.093 | 145.976 | 1934.060 | 515.3958 |
| 89 | 577496 | 149976 | 467.060 | 111.970 | 1269.966 | 369.4199 |
| 90 | 427520 | 120890 | 319.180 | 83.316 | 802.907 | 257.4500 |
| 91 | 306630 | 108381 | 211.325 | 68.952 | 483.727 | 174.1343 |
| 92 | 198249 | 76013 | 126.126 | 44.641 | 272.402 | 105.1825 |
| 93 | 122236 | 50733 | 71.787 | 27.504 | 146.276 | 60.5412 |
| 94 | 71503 | 32048 | 38.764 | 16.038 | 74.488 | 33.0372 |
| 95 | 39455 | 19050 | 19.745 | 8.801 | 35.724 | 16.9987 |
| 96 | 20405 | 10583 | 9.427 | 4.513 | 15.979 | 8.1981 |
| 97 | 9822 | 5457 | 4.189 | 2.148 | 6.552 | 3.6849 |
| 98 | 4365 | 2589 | 1.718 | 0.941 | 2.364 | 1.5366 |
| 99 | 1776 | 1776 | 0.645 | 0.596 | 0.645 | 0.5958 |

Experiencia Mexicana Básica Graduada
interés= 0.045

ANEXO 3

| x | lx | dx | Dx | Cx | Nx | Mx |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 10000000 | 8800 | 5167204.423 | 4351.330 | 108024786.569 | 515419.3556 |
| 16 | 9991200 | 8892 | 4940341.898 | 4207.484 | 102857582.146 | 511068.0256 |
| 17 | 9982308 | 8984 | 4723392.418 | 4067.959 | 97917240.248 | 506860.5411 |
| 18 | 9973324 | 9076 | 4515924.786 | 3932.647 | 93193847.830 | 502792.5826 |
| 19 | 9964248 | 9267 | 4317526.478 | 3842.495 | 88677923.044 | 498859.9356 |
| 20 | 9954981 | 9358 | 4127761.790 | 3713.137 | 84360396.566 | 495017.4402 |
| 21 | 9945623 | 9548 | 3946298.146 | 3625.384 | 80232634.776 | 491304.3035 |
| 22 | 9936075 | 9837 | 3772736.478 | 3574.275 | 76286336.630 | 487678.9194 |
| 23 | 9926238 | 10026 | 3606699.866 | 3486.075 | 72513600.153 | 484104.6442 |
| 24 | 9916212 | 10313 | 3447901.357 | 3431.451 | 68906900.287 | 480618.5692 |
| 25 | 9905899 | 10698 | 3295995.685 | 3406.270 | 65458998.930 | 477187.1185 |
| 26 | 9895201 | 11083 | 3150656.587 | 3376.894 | 62163003.245 | 473780.8488 |
| 27 | 9884118 | 11564 | 3011605.485 | 3371.723 | 59012346.658 | 470403.9543 |
| 28 | 9872554 | 12045 | 2878547.401 | 3360.736 | 56003741.173 | 467032.2308 |
| 29 | 9860509 | 12621 | 2751230.078 | 3369.807 | 53122193.773 | 463671.4949 |
| 30 | 9847888 | 13295 | 2629386.249 | 3396.905 | 50370963.694 | 460301.6877 |
| 31 | 9834593 | 13965 | 2512762.185 | 3414.441 | 47741577.445 | 456904.7832 |
| 32 | 9820628 | 14731 | 2401142.674 | 3446.630 | 45228815.260 | 453490.3420 |
| 33 | 9805897 | 15689 | 2294297.556 | 3512.703 | 42827672.587 | 450043.7121 |
| 34 | 9790208 | 16643 | 2191987.351 | 3565.837 | 40533375.031 | 446531.0095 |
| 35 | 9773565 | 17788 | 2094029.714 | 3647.041 | 38341387.680 | 442965.1728 |
| 36 | 9755777 | 19121 | 2000209.145 | 3751.525 | 36247357.966 | 439318.1316 |
| 37 | 9736656 | 20447 | 1910324.211 | 3838.933 | 34247148.822 | 435566.6065 |
| 38 | 9716209 | 22056 | 1824222.513 | 3962.702 | 32336824.611 | 431727.6733 |
| 39 | 9694153 | 23654 | 1741704.774 | 4066.801 | 30512602.098 | 427764.9712 |
| 40 | 9670499 | 25530 | 1662636.332 | 4200.325 | 28770897.323 | 423698.1697 |
| 41 | 9644969 | 27585 | 1586839.227 | 4342.990 | 27108260.991 | 419497.8446 |
| 42 | 9617384 | 29718 | 1514163.448 | 4477.330 | 25521421.764 | 415154.8550 |
| 43 | 9587666 | 32215 | 1444482.907 | 4644.526 | 24007258.317 | 410677.5252 |
| 44 | 9555451 | 34782 | 1377635.768 | 4798.677 | 22562775.409 | 406032.9996 |
| 45 | 9520669 | 37892 | 1313513.064 | 5002.628 | 21185139.641 | 401234.3230 |
| 46 | 9482777 | 41060 | 1251947.673 | 5187.442 | 19871626.577 | 396231.6955 |
| 47 | 9441717 | 44565 | 1192848.608 | 5387.806 | 18619678.905 | 391044.2530 |
| 48 | 9397152 | 48395 | 1136094.115 | 5598.894 | 17426830.297 | 385656.4468 |
| 49 | 9348757 | 52727 | 1081572.508 | 5837.368 | 16290736.182 | 380057.5526 |
| 50 | 9296030 | 57449 | 1029160.227 | 6086.276 | 15209163.674 | 374220.1648 |
| 51 | 9238581 | 62545 | 978756.047 | 6340.821 | 14180003.447 | 368133.8886 |
| 52 | 9176036 | 68178 | 930267.836 | 6614.254 | 13201247.400 | 361793.0676 |
| 53 | 9107858 | 74411 | 883594.202 | 6908.082 | 12270979.564 | 355178.8137 |
| 54 | 9033447 | 81120 | 838636.609 | 7206.626 | 11387385.363 | 348270.7321 |
| 55 | 8952327 | 88449 | 795316.445 | 7519.356 | 10548748.754 | 341064.1064 |

Experiencia Mexicana Básica Graduada
interés= 0.045

ANEXO 3

| x | lx | dx | Dx | Cx | Nx | Mx |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 56 | 8863878 | 96528 | 753549.012 | 7852.804 | 9753432.309 | 333544.7501 |
| 57 | 8767350 | 105208 | 713246.729 | 8190.377 | 8999883.296 | 325691.9462 |
| 58 | 8662142 | 114687 | 674342.378 | 8543.839 | 8286636.567 | 317501.5687 |
| 59 | 8547455 | 124878 | 636759.872 | 8902.429 | 7612294.189 | 308957.7297 |
| 60 | 8422577 | 135940 | 600437.161 | 9273.711 | 6975534.317 | 300055.3009 |
| 61 | 8286637 | 149740 | 565307.305 | 9775.249 | 6375097.156 | 290781.5901 |
| 62 | 8136897 | 161680 | 531188.679 | 10100.201 | 5809789.851 | 281006.3413 |
| 63 | 7975217 | 174418 | 498214.325 | 10426.744 | 5278601.172 | 270906.1406 |
| 64 | 7800799 | 187765 | 466333.376 | 10741.273 | 4780386.846 | 260479.3966 |
| 65 | 7613034 | 201822 | 435510.761 | 11048.246 | 4314053.471 | 249738.1234 |
| 66 | 7411212 | 216482 | 405708.463 | 11340.451 | 3878542.710 | 238689.8774 |
| 67 | 7194730 | 231598 | 376897.312 | 11609.862 | 3472834.247 | 227349.4262 |
| 68 | 6963132 | 247122 | 349057.423 | 11854.613 | 3095936.935 | 215739.5643 |
| 69 | 6716010 | 262797 | 322171.629 | 12063.687 | 2746879.512 | 203884.9516 |
| 70 | 6453213 | 278456 | 296234.522 | 12232.070 | 2424707.883 | 191821.2643 |
| 71 | 6174757 | 293795 | 271245.942 | 12350.129 | 2128473.360 | 179589.1943 |
| 72 | 5980962 | 308574 | 247215.366 | 12412.811 | 1857227.418 | 167239.0655 |
| 73 | 5572388 | 322474 | 224156.917 | 12413.356 | 1610012.053 | 154826.2549 |
| 74 | 5249914 | 334997 | 202090.871 | 12340.113 | 1385855.135 | 142412.8989 |
| 75 | 4914917 | 345715 | 181048.281 | 12186.532 | 1183764.264 | 130072.7859 |
| 76 | 4569202 | 354250 | 161063.411 | 11949.659 | 1002715.983 | 117886.2535 |
| 77 | 4214952 | 360083 | 142179.921 | 11623.367 | 841650.573 | 105936.5950 |
| 78 | 3854869 | 362743 | 124433.973 | 11205.006 | 699470.652 | 94313.2276 |
| 79 | 3492126 | 361819 | 107870.567 | 10695.181 | 575036.678 | 83108.2216 |
| 80 | 3130307 | 356918 | 92530.242 | 10095.990 | 467166.112 | 72413.0407 |
| 81 | 2773389 | 347755 | 78449.696 | 9413.206 | 374635.870 | 62317.0504 |
| 82 | 2425634 | 334277 | 65658.273 | 8658.734 | 296186.174 | 52903.8444 |
| 83 | 2091357 | 316527 | 54172.149 | 7845.893 | 230527.901 | 44245.1105 |
| 84 | 1774830 | 294746 | 43993.485 | 6991.385 | 176355.752 | 36399.2179 |
| 85 | 1480084 | 269434 | 35107.643 | 6115.774 | 132362.267 | 29407.8326 |
| 86 | 1210650 | 241331 | 27480.057 | 5241.986 | 97254.624 | 23292.0587 |
| 87 | 969319 | 211331 | 21054.719 | 4392.681 | 69774.567 | 18050.0729 |
| 88 | 757988 | 180492 | 15755.376 | 3590.113 | 48719.848 | 13657.3921 |
| 89 | 577496 | 149976 | 11486.802 | 2854.668 | 32964.472 | 10067.2792 |
| 90 | 427520 | 120890 | 8137.487 | 2201.953 | 21477.670 | 7212.6110 |
| 91 | 306630 | 108381 | 5585.116 | 1889.098 | 13340.183 | 5010.6585 |
| 92 | 198249 | 76013 | 3455.511 | 1267.865 | 7755.067 | 3121.5608 |
| 93 | 122236 | 50733 | 2038.845 | 809.765 | 4299.556 | 1853.6962 |
| 94 | 71503 | 32048 | 1141.282 | 489.501 | 2260.712 | 1043.9308 |
| 95 | 39455 | 19050 | 602.635 | 278.440 | 1119.430 | 554.4300 |
| 96 | 20405 | 10583 | 298.245 | 148.023 | 516.794 | 275.9904 |
| 97 | 9822 | 5457 | 137.379 | 73.039 | 218.550 | 127.9676 |
| 98 | 4365 | 2589 | 58.424 | 33.160 | 81.171 | 54.9281 |
| 99 | 1776 | 1776 | 22.747 | 21.768 | 22.747 | 21.7678 |

Experiencia Mexicana Básica Graduada
interés= 0.092025

ANEXO 4

| x | lx | dx | Dx | Cx | Nx | Mx |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 56 | 8863878 | 96528 | 64061.815 | 638.846 | 586161.985 | 14665.9161 |
| 57 | 8767350 | 105208 | 58024.477 | 637.616 | 522100.170 | 14027.0700 |
| 58 | 8662142 | 114687 | 52497.136 | 636.490 | 464075.693 | 13389.4542 |
| 59 | 8547455 | 124878 | 47436.709 | 634.645 | 411578.558 | 12752.9637 |
| 60 | 8422577 | 135940 | 42804.570 | 632.645 | 364141.849 | 12118.3184 |
| 61 | 8286637 | 149740 | 38564.782 | 638.143 | 321337.279 | 11485.6738 |
| 62 | 8136897 | 161680 | 34676.783 | 630.963 | 282772.497 | 10847.5311 |
| 63 | 7975217 | 174418 | 31123.606 | 623.313 | 248095.714 | 10216.5684 |
| 64 | 7800799 | 187765 | 27877.506 | 614.465 | 216972.108 | 9593.2554 |
| 65 | 7613034 | 201822 | 24913.802 | 604.809 | 189094.602 | 8978.7908 |
| 66 | 7411212 | 216482 | 22209.506 | 594.072 | 164180.800 | 8373.9819 |
| 67 | 7194730 | 231598 | 19743.838 | 581.995 | 141971.294 | 7779.9102 |
| 68 | 6963132 | 247122 | 17498.029 | 568.674 | 122227.456 | 7197.9151 |
| 69 | 6716010 | 262797 | 15454.795 | 553.783 | 104729.427 | 6629.2412 |
| 70 | 6453213 | 278456 | 13598.636 | 537.333 | 89274.632 | 6075.4581 |
| 71 | 6174757 | 293795 | 11915.345 | 519.157 | 75675.996 | 5538.1253 |
| 72 | 5880962 | 308574 | 10392.082 | 499.322 | 63760.651 | 5018.9684 |
| 73 | 5572388 | 322474 | 9017.018 | 477.841 | 53368.570 | 4519.6462 |
| 74 | 5249914 | 334997 | 7779.312 | 454.566 | 44351.551 | 4041.8048 |
| 75 | 4914917 | 345715 | 6669.183 | 429.578 | 36572.239 | 3587.2384 |
| 76 | 4569202 | 354250 | 5677.592 | 403.029 | 29903.056 | 3157.6604 |
| 77 | 4214952 | 360083 | 4796.052 | 375.199 | 24225.464 | 2754.5712 |
| 78 | 3854869 | 362743 | 4016.690 | 346.119 | 19429.412 | 2379.3725 |
| 79 | 3492126 | 361819 | 3332.085 | 316.144 | 15412.722 | 2033.2538 |
| 80 | 3130307 | 356918 | 2735.146 | 285.581 | 12080.637 | 1717.1098 |
| 81 | 2773389 | 347755 | 2219.074 | 254.801 | 9345.492 | 1431.5287 |
| 82 | 2425634 | 334277 | 1777.271 | 224.286 | 7126.418 | 1176.7274 |
| 83 | 2091357 | 316527 | 1403.214 | 194.480 | 5349.147 | 952.4413 |
| 84 | 1774830 | 294746 | 1090.486 | 165.836 | 3945.933 | 757.9617 |
| 85 | 1480084 | 269434 | 832.754 | 138.819 | 2855.447 | 592.1258 |
| 86 | 1210650 | 241331 | 623.759 | 113.862 | 2022.692 | 453.3064 |
| 87 | 969319 | 211331 | 457.333 | 91.305 | 1398.934 | 339.4444 |
| 88 | 757988 | 180492 | 327.488 | 71.410 | 941.601 | 248.1391 |
| 89 | 577496 | 149976 | 228.481 | 54.336 | 614.113 | 176.7292 |
| 90 | 427520 | 120890 | 154.890 | 40.107 | 385.633 | 122.3930 |
| 91 | 306630 | 108381 | 101.730 | 32.927 | 230.742 | 82.2855 |
| 92 | 198249 | 76013 | 60.230 | 21.147 | 129.012 | 49.3582 |
| 93 | 122236 | 50733 | 34.007 | 12.925 | 68.782 | 28.2108 |
| 94 | 71503 | 32048 | 18.216 | 7.477 | 34.775 | 15.2859 |
| 95 | 39455 | 19050 | 9.205 | 4.070 | 16.559 | 7.8092 |
| 96 | 20405 | 10583 | 4.359 | 2.070 | 7.354 | 3.7395 |
| 97 | 9822 | 5457 | 1.921 | 0.978 | 2.995 | 1.6691 |
| 98 | 4365 | 2589 | 0.782 | 0.425 | 1.073 | 0.6915 |
| 99 | 1776 | 1776 | 0.291 | 0.267 | 0.291 | 0.2668 |

Experiencia Mexicana Básica Graduada
interés= 0.092025

ANEXO 4

| x | lx | dx | Dx | Cx | Nx | Mx |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 10000000 | 8800 | 2670000.155 | 2151.599 | 31048377.897 | 53551.8356 |
| 16 | 9991200 | 8892 | 2442847.513 | 1990.882 | 28378377.742 | 51400.2364 |
| 17 | 9982308 | 8984 | 2234997.751 | 1841.973 | 25935530.230 | 49409.3542 |
| 18 | 9973324 | 9076 | 2044812.409 | 1704.023 | 23700532.479 | 47567.3810 |
| 19 | 9964248 | 9267 | 1870791.944 | 1593.263 | 21655720.070 | 45863.3581 |
| 20 | 9954981 | 9358 | 1711546.953 | 1473.326 | 19784928.125 | 44270.0948 |
| 21 | 9945623 | 9548 | 1565841.482 | 1376.562 | 18073381.173 | 42796.7688 |
| 22 | 9936075 | 9837 | 1432511.382 | 1298.713 | 16507539.691 | 41420.2073 |
| 23 | 9926238 | 10026 | 1310494.865 | 1212.120 | 15075028.309 | 40121.4939 |
| 24 | 9916212 | 10313 | 1198847.278 | 1141.749 | 13764533.445 | 38909.3735 |
| 25 | 9905899 | 10698 | 1096678.611 | 1084.565 | 12565686.167 | 37767.6249 |
| 26 | 9895201 | 11083 | 1003176.886 | 1028.911 | 11469007.556 | 36683.0601 |
| 27 | 9884118 | 11564 | 917610.210 | 983.096 | 10465830.670 | 35654.1495 |
| 28 | 9872554 | 12045 | 839300.057 | 937.696 | 9548220.459 | 34671.0538 |
| 29 | 9860509 | 12621 | 767634.505 | 899.739 | 8708920.402 | 33733.3580 |
| 30 | 9847888 | 13295 | 702046.169 | 867.917 | 7941285.897 | 32833.6194 |
| 31 | 9834593 | 13765 | 642016.787 | 834.831 | 7239239.728 | 31965.7021 |
| 32 | 9820628 | 14731 | 587079.170 | 806.412 | 6597222.941 | 31130.8716 |
| 33 | 9805897 | 15689 | 536799.568 | 786.480 | 6010143.770 | 30324.4594 |
| 34 | 9790208 | 16643 | 490776.963 | 763.996 | 5473344.202 | 29537.9797 |
| 35 | 9773565 | 17788 | 448655.168 | 747.746 | 4982567.240 | 28773.9834 |
| 36 | 9755777 | 19121 | 410099.229 | 736.046 | 4533912.072 | 28026.2372 |
| 37 | 9736656 | 20447 | 374804.100 | 720.761 | 4123812.843 | 27290.1909 |
| 38 | 9716209 | 22056 | 342498.579 | 711.961 | 3749008.743 | 26569.4295 |
| 39 | 9694153 | 23654 | 312924.246 | 699.200 | 3406510.164 | 25857.4687 |
| 40 | 9670499 | 25530 | 285854.905 | 691.059 | 3093585.918 | 25158.2688 |
| 41 | 9644969 | 27585 | 261074.839 | 683.761 | 2807731.013 | 24467.2100 |
| 42 | 9617384 | 29718 | 238390.288 | 674.557 | 2546656.173 | 23783.4486 |
| 43 | 9587666 | 32215 | 217626.570 | 669.614 | 2308265.985 | 23108.8917 |
| 44 | 9555451 | 34782 | 198617.555 | 662.046 | 2090639.315 | 22439.2776 |
| 45 | 9520669 | 37892 | 181217.997 | 660.463 | 1892021.760 | 21777.2312 |
| 46 | 9482777 | 41060 | 165286.284 | 655.372 | 1710803.763 | 21116.7677 |
| 47 | 9441717 | 44565 | 150702.229 | 651.373 | 1545517.479 | 20461.3961 |
| 48 | 9397152 | 48395 | 137351.172 | 647.745 | 1394815.249 | 19810.0227 |
| 49 | 9348757 | 52727 | 125128.837 | 646.255 | 1257464.077 | 19162.2777 |
| 50 | 9296030 | 57449 | 113937.969 | 644.794 | 1132335.241 | 18516.0226 |
| 51 | 9238581 | 62545 | 103691.617 | 642.833 | 1018397.272 | 17871.2288 |
| 52 | 9176036 | 68178 | 94310.686 | 641.678 | 914705.655 | 17228.3955 |
| 53 | 9107858 | 74411 | 85721.441 | 641.324 | 820394.970 | 16586.7170 |
| 54 | 9033447 | 81120 | 77856.367 | 640.230 | 734673.529 | 15945.3926 |
| 55 | 8952327 | 88449 | 70655.177 | 639.247 | 656817.162 | 15305.1626 |