UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESPACIOS MODULI

T E S I S
Que para obtener el título de
M A T E M A T I C O
presenta

HERBERT KANAREK BLANDO

México, D.F. 1989.

El concepto de espacio Moduli aparece en geometría algebraica en conexión a problemas de clasificación de objetos algebraico geometricos.

Dada una colección A de objetos en geometría algebraica un problema moduli consiste primero en encontrar una relación de equivalencia adecuada entre los objetos (de tal manera que no se trivialice ni se vuelva muy complicado el problema de estudiar las clases de equivalencia de objetos) y segundo en darle una estructura de variedad al conjunto $A/\sim$ de clases de equivalencia de objetos.

Se quiere que la estructura en $A/\sim$ refleje la estructura algebro-geometrica de los objetos. Para esto se parametrizan objetos de A por medio de variedades (u objetos geometricos de tipo mas general que pueden ser esquemas, etc.).

Para parametrizar los objetos tenemos que introducir una noción de familia de objetos parametrizada por una variedad. El concepto de familia varia con respecto a cada problema pero en todos los casos una familia X de objetos de A parametrizada por una variedad S consta de una colección $\{X_s\}_{s\in S}$ de objetos de A tomados uno por cada $s\in S$ de tal manera que varien de acuerdo a la estructura de S. Toda familia debe cumplir las propiedades siguientes:

i).- Una familia parametrizada por la variedad {pt} (un punto) es un objeto unico de A.

ii).- Existe una noción de relación de equivalencia entre familias parametrizadas por S la cual se reduce a la relación original si S={pt}.

iii).- Si X es una familia parametrizada por S y $\phi:S'\to S$ un morfismo entre variedades entonces existe una familia ϕ^*X parametrizada por S' donde

$$(\phi^{*}X)_{s'} \sim X_{\phi(s')}$$

para toda $s' \in S'$.

A la familia $\phi^{*}X$ se le llama familia inducida por X.

Esta operación satisface la propiedad funtorial es decir si ϕ y ϕ' son morfismos de variedades:

a).- $(\phi \circ \phi')^{*} = \phi'^{*} \circ \phi^{*}$ y

b).- $X \sim X' \Rightarrow \phi^{*}X \sim \phi^{*}X'$ con X y X' familias parametrizadas por alguna variedad.

Dada una colección de objetos A y una relación de equivalencia entre ellos supongamos que el conjunto $A/\sim$ de clases de equivalencia tienen estructura de variedad, la cual denotaremos por M, entonces dada una familia X parametrizada por una variedad S obtenemos el siguente mapeo definido por

$$\begin{aligned} \nu_{X} : S &\longrightarrow M \\ s &\longmapsto [X_s] \end{aligned}$$

$\forall s \in S$ y donde $[X_s]$ denota clase de equivalencia de X_s.

Si este mapeo es un morfismo entre variedades, entonces tenemos que la información de familias parametrizadas por una variedad S la podemos manejar en forma de información de morfismos de la variedad S en la variedad M. Mas aun, nos interesara que haya una biyección entre familias parametrizadas por S y morfismos de S en M.

Sea $\mathfrak{F}(\ )$ el funtor contravariante de la categoria de variedades en la categoria de conjuntos, donde denotamos por $\mathfrak{F}(S)$ al conjunto de clases de equivalencia de familias parametrizadas por S. Si $\phi : S' \to S$ es un morfismo de variedades obtenemos un morfismo

$$\mathfrak{F}(\phi) = \phi^{*} : \mathfrak{F}(S) \longrightarrow \mathfrak{F}(S')$$

definido por $\qquad [X] \longmapsto [\phi^{*}X]$

donde $X \in \mathfrak{F}(S)$ $[\phi^{*}X]$ denota la clase de equivalencia de la familia inducida (en lo que resta omitiremos los corchetes al hablar de la clase de una familia X).

OBSERVACION 1.A.-Dada una variedad $S=\{pt\}$ (conformada por un punto) tenemos una biyección $\psi_{pt}:\mathfrak{F}(pt)\longrightarrow A/\sim$ donde a cada familia parametrizada por pt le asociamos la clase de la fibra la misma familia. Sea $S'=\{pt'\}$ otra variedad (conformada por el punto pt'), entonces tenemos un isomorfismo $\alpha:pt'\longrightarrow pt$ que hace el siguiente triangulo conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(pt) \arrow[r, "\psi_{pt}"] \arrow[d, "\alpha^*"'] & A/\sim \\
\mathfrak{F}(pt') \arrow[ur, "\psi_{pt'}"'] &
\end{tikzcd}$$

esto nos dice que no importa realmente que punto tomemos como espacio base, y abusando del lenguaje tenemos que $\mathfrak{F}(pt\ )=A/\sim$, (aunque realmente son isomorfos). De forma muy semejante tenemos la biyección $e_{pt}:Hom(pt,M)\longrightarrow M$ donde para $f\in Hom(pt,M)$ tenemos que $e_{pt}(f)=f(pt)$ (morfismo evaluación) que tampoco depende de pt puesto que tenemos el siguente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom(pt,M) \arrow[r, "e_{pt}"] \arrow[d, "\beta"'] & M \\
Hom(pt',M) \arrow[ur, "e_{pt'}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\beta(f)=f\circ\alpha$ y que abusando de nuevo del lenguaje tenemos $Hom(pt,M)=M$, (aunque realmente son isomorfos).

DEFINICION 1.1.A.- Un espacio Moduli fino esta formado por una variedad M y una biyección $\lambda:A/\sim\longrightarrow M$ tal que

i) Dada una familia $\mathcal{X}$ parametrizada por la variedad S tenemos el mapeo

$$\nu_{\mathcal{X}}: S \longrightarrow A/\sim$$

definido por $\qquad s \longmapsto [\mathcal{X}_s]$

de tal forma que $\nu'_{\mathcal{X}} = \lambda \circ \nu_{\mathcal{X}}$ sea morfismo y donde $[\mathcal{X}_s]$ denota la clase de $\mathcal{X}_s$.

ii) Dada una variedad S la aplicacion

$$\Phi_S : \mathfrak{F}(S) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S,M)$$

definida por $\qquad \mathcal{X} \longmapsto \nu'_{\mathcal{X}}$

es una biyección.

Sea $\phi: S' \longrightarrow S$ un morfismo, tenemos que si $\mathcal{X} \in \mathfrak{F}(S)$ entonces $\Phi_{S'}(\phi^*\mathcal{X}) = \nu'_{\phi^*\mathcal{X}} = \nu'_{\mathcal{X}} \circ \phi$ y por lo tanto el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(S) \arrow[r, "\Phi_S"] \arrow[d, "\phi^*"'] & \mathrm{Hom}(S,M) \arrow[d, "\beta"] \\
\mathfrak{F}(S') \arrow[r, "\Phi_{S'}"'] & \mathrm{Hom}(S',M)
\end{tikzcd}$$

donde $\beta(f) = f \circ \phi$ para toda $f \in \mathrm{Hom}(S,M)$, obteniendo asi del inciso ii) un isomorfismo natural $\Phi: \mathfrak{F}(\ ) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\_,M)$, de donde tenemos la siguiente definición.

DEFINICION 1.1.-Un *espacio moduli fino* para un problema de moduli es una pareja (M,Φ) la cual representa al funtor $\mathfrak{F}(\ )$.

NOTA 1.2.- En la definición no hay la necesidad de aclarar de antemano que $M=A/\sim$ ya que para $S=\{pt\}$ tenemos la biyección $\Phi_{pt}: \mathfrak{F}(pt) \longrightarrow \mathrm{Hom}(pt,M)$, y tomando en cuenta la observacion 1.A tenemos que $M=A/\sim$. Ya que Φ es isomorfismo natural, el espacio moduli fino es unico (salvo isomorfismo).

Si $\mathfrak{F}()$ esta representado por (M,Φ), tenemos que $\Phi(M)$ es una biyección entre $\mathfrak{F}(M)$ y $\mathrm{Hom}(M,M)$, por lo que la identidad $1_M \in \mathrm{Hom}(M,M)$ induce una familia U parametrizada por M tal que $\Phi_M(U)=1_M$. A esta familia la llamaremos la familia universal.

Sea X una familia parametrizada por S, entonces el morfismo $\nu'_X : S \longrightarrow M$, induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(M) \arrow[r, "\Phi_M"] \arrow[d, "\nu_X^*"'] & \mathrm{Hom}(M,M) \arrow[d, "\beta"] \\
\mathfrak{F}(S) \arrow[r, "\Phi_S"'] & \mathrm{Hom}(S,M)
\end{tikzcd}$$

donde $\beta:\mathrm{Hom}(M,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S,M)$ esta definido por $\beta(f)=f\circ\nu'_X$ teniendo asi $\Phi_S \circ \nu_X^*(U)=\Phi_M(U)\circ\nu_X'^*=1_M\circ\nu_X'^*$ y por lo tanto

$$\nu_X'^*(U) \sim X$$

de donde obtenemos la siguente definición alternativa:

DEFINICION 1.3.- Dado un problema de moduli un espacio de moduli fino consiste en una variedad M y una familia U parametrizada por M, tal que para cualquier familia X parametrizada por una variedad S existe un único morfismo $\alpha : S \longrightarrow M$ de tal forma que la familia inducida es equivalente a X.

Resolver el problema moduli es por lo general muy complicado. Por eso se introducen invariantes (como sera el grado, rango, dimension, etc.). Esto permite ver al conjunto A como la union numerable de subconjuntos A_i. Por lo general es mas facil trabajar con estos subconjuntos, sin embargo esto no garantiza la existencia del espacio moduli fino para los subconjuntos A_i.

Para resolver un problema moduli se pueden pedir condiciones mas debiles en la definicion 1.2, es decir en vez de pedir una condición universal para familias lo haremos para Φ.

DEFINICION 1.4.A- Un espacio moduli "coarse" (o debil) consta de una variedad M y una biyección $\lambda : A/\sim \longrightarrow M$ de tal forma que:

i).-Dada una familia X parametrizada por una variedad S tenemos el mapeo

$$\nu_X : S \longrightarrow A/\sim$$

definido por

$$s \longmapsto [X_s]$$

de tal que $\nu'_X = \lambda \circ \nu_X$ sea morfismo y donde $[X_s]$ denota la clase de X_s.

ii).- Dada una variedad S tenemos una aplicación

$$\Phi_S : \mathfrak{F}(S) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S,M)$$

definida por

$$X \longmapsto \nu'_X$$

de donde obtenemos una transformación natural $\Phi : \mathfrak{F}(\ ) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\_,M)$.

iii).- Cada vez que exista una variedad N y una transformación natural $\Psi : \mathfrak{F}(\ ) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\_,N)$ entonces existe $\Theta : \mathrm{Hom}(\_,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\_,N)$ tal que $\Psi = \Theta \circ \Phi$.

De la definición tenemos que el conjunto de clases de equivalencia $A/\sim$ tienen estructura de variedad inducida por identificación de las clases de equivalencia con los puntos de M (a traves de λ). De el inciso ii) obtenemos una transformación natural $\Phi : \mathfrak{F}(\ ) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\_,M)$, esto lo podemos ver de la misma forma que el isomorfismo natural obtenido en la definición 1.1.A ii).

Notemos que considerando la observación 1.A tenemos que Φ_{pt} induce una biyección entre $A/\sim$ y M que coincide con λ de tal forma que tenemos la definición siguiente:

DEFINICION 1.4.- Un espacio moduli "coarse" (o debil) esta formado por una variedad M y una transformación natural Φ del funtor $\mathfrak{F}(\ )$ en el funtor $\mathrm{Hom}(\_,M)$, de tal forma que:

i).- Φ_{pt} es una biyección

ii).- Cada vez que exista una variedad N y una transformación natural $\Psi:\mathfrak{F}(\ )\longrightarrow \mathrm{Hom}(\_,N)$ entonces existe una transformación $\Theta:\mathrm{Hom}(\_,M)\longrightarrow \mathrm{Hom}(\_,N)$ de tal forma que $\Psi=\Phi\circ\Theta$.

Explicaremos lo anterior para obtener una definición mas geometrica.

Sea N una variedad para la cual exista una transformación natural $\Psi:\mathfrak{F}(\ )\longrightarrow \mathrm{Hom}(\_,N)$, consideremos la aplicación $\mu:M\longrightarrow N$ dada por la composición $\mu=\Psi_{pt}\circ\Phi^{-1}_{pt}$ (esta bien definida ya que Φ_{pt} es biyecci n), y por ii) tenemos que existe una transformación natural $\Theta:\mathrm{Hom}(\_,M)\longrightarrow \mathrm{Hom}(\_,N)$. Si consideramos el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(M,M) \arrow[rr, "\Theta(M)"] \arrow[d] & & \mathrm{Hom}(N,M) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(pt,M) \arrow[rr, "\Theta(pt)"'] & & \mathrm{Hom}(pt,M) \\
& \mathfrak{F}(pt)=A/ \arrow[ul, "\Phi(pt)"] \arrow[ur, "\Psi(pt)"'] &
\end{tikzcd}$$

tenemos $\mu=\Psi_{pt}\circ\Phi^{-1}{}_{pt}=\Theta_M(1_M)$ y por lo tanto μ es morfismo y coincide con Θ_{pt}.

Mas aun si tomamos una variedad S y $\alpha\in Hom(S,M)$ $\Theta(S)(\alpha)=\mu\circ\alpha$ esto se puede ver claramente en el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{tikzcd} Hom(S,M) \arrow[r, "\Theta_S"] \arrow[d, "\varphi_M"'] & Hom(S,N) \arrow[d, "\varphi_N"] \\ Hom(pt,M) \arrow[r, "\Theta_{pt}=\mu"'] & Hom(pt,N) \end{tikzcd}$$

donde φ_M y φ_N son las valuaciones de pt, es decir si $\alpha\in Hom(S,M)$ entonces $\varphi_M(\alpha)=\alpha(pt)$ obteniendo lo que queriamos.

Entonces cada vez que tengamos una transformación natural $\Psi:\mathfrak{F}(\ ) \longrightarrow Hom(\_,N)$ tenemos que $\mu:M \longrightarrow N$ es un morfismo y podemos definir $\Theta:Hom(\_,M) \longrightarrow Hom(\_,N)$ como $\Theta(S)(\alpha)=\mu\circ\alpha$ con $\alpha\in Hom(S,M)$ lo que nos permite reescribir la definición 1.4 como sigue..

Definicion1.5.- Un espacio de moduli "coarse" (o debil) para un problema moduli consiste en una variedad M y una biyección $\lambda:A/\sim \longrightarrow M$ tal que:

i).- Para cada familia X parametrizada por una variedad S tenemos que $\eta:S \longrightarrow M$ tal que $\nu'_X=\lambda\circ\nu_X$ es morfismo.

ii).- Dada una variedad N y unatransformación natural $\Psi:\mathfrak{F}(\ ) \longrightarrow Hom(\_,N)$, entonces existe un morfismo $\mu=\Psi(pt)\cdot\lambda^{-1}:M \longrightarrow N$.

El tener un espacio moduli debil es lo suficientemente bueno para resolver el problema. En este caso no tenemos la noción de una familia universal pero si tenemos una estructura de variedad para $A/\sim$. En cierta forma esta estructura en $A/\sim$ domina (por medio del morfismo μ) a las demas estructuras de variedad que se le puedan dar al conjunto de clases de equivalencia. Tenemos que dos espacios moduli debiles para un problema dado son isomorfos y tenemos la siguente proposición.

PROPSICION 1.6.- Sean (M_1,λ_1) y (M_2,λ_2) espacios de moduli debiles para un problema de moduli dado, entonces existe un isomorfismo $\mu:M_1 \longrightarrow M_2$ tal que $\lambda_2=\mu\circ\lambda_1$.

Demostracion.- Sea $\mu=\lambda_2\circ\lambda_1^{-1}$ entonces $\mu^{-1}=\lambda_1\circ\lambda_2^{-1}$ y por el inciso ii) de la definisión 1.4 tenemos que son morfismos y por lo tanto $\lambda_2=\mu\circ\lambda_1$ ∎

Para que un espacio de moduli debil sea fino este debe cumplir ciertas propiedades ligadas a la relación de equivalencia dada, y asi tenemos el siguente teorema.

TEOREMA 1.4.- Un espacio de moduli debil (M,Φ) es fino si y solo si cumple que:

i).- Existe una familia U parametrizada por M tal que $U_m\in\Phi^{-1}{}_{pt}(m)$ $\forall m\in M$.

ii).- Para cada par de familias X y X' parametrizadas por una variedad S tenemos que $X\sim X'$ si y solo si $\Phi'_X=\Phi'_{X'}$.

Demostracion.- Demostraremos que i) sucede si y solo si Φ es suprayectivo.

Supongamos que existe una familia U parametrizada por M tal que $U_m\in\Phi^{-1}{}_{pt}(m)$ $\forall m\in M$, sea $\alpha\in\mathrm{Hom}(S,M)$ entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(M) \arrow[r, "\Phi_M"] \arrow[d, "\alpha^*"'] & \mathrm{Hom}(M,M) \arrow[d, "\beta"] \\
\mathfrak{F}(S) \arrow[r, "\Phi_S"'] & \mathrm{Hom}(S,M)
\end{tikzcd}
$$

donde $\beta(f)=f\circ\alpha$ para toda $f\in \mathrm{Hom}(S,M)$. Entonces tenemos que $\Phi_S\alpha^*(U)=1_M\circ\alpha=\alpha$ y por lo tanto Φ es suprayectivo.

Para el inverso supongamos que Φ es suprayectiva, sea $1_M\in \mathrm{Hom}(M,M)$ entonces existe $U\in\mathfrak{F}(M)$ tal que $\Phi(M)(U)=1_M$ y por el siguente diagrama tenemos

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(M) \arrow[r, "\Phi_M"] \arrow[d, "\iota^*"'] & \mathrm{Hom}(M,M) \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathfrak{F}(pt) \arrow[r, "\Phi_{pt}"'] & \mathrm{Hom}(pt,M)
\end{tikzcd}
$$

donde ι^* es el morfismo inducido por la inclución y φ es es morfismo valuación, y por lo tanto $U_m\in\Phi^{-1}(pt)$.

El inciso $ii)$ es equivalente a demostrar que Φ es inyectiva y cuya demostración es trivial, pues es simplemente la definición de que Φ sea inyectivo.

CAPITULO DOS

En este capítulo estudiaremos un ejemplo de un problema moduli. Las variedades que consideraremos seran variedades algebraicas sobre $\mathbb{C}$, y los objetos que trabajaremos son endomorfismos de espacios vectoriales de dimensión finita bajo la relación de equivalencia de isomorfismo.

Primero demostraremos que en general no existe el espacio moduli para los endomorfismos. Despues restringiremos los objetos, para lo cual nos guiaremos por la Forma Canonica Racional de los endomorfismos, daremos espacio moduli debil para los endomorfismos diagonalizables (semisimples).

Mas adelante demostraremos la existencia del espacio moduli fino para los endomorfismos cíclicos, y describiremos al conjunto de endomorfismos como una unión de subconjuntos donde cada componente tiene un espacio moduli fino.

Consideremos parejas (V,T) donde V es un espacio vectorial complejo de dimensión n (finita) y T un endomorfismo de V, la relación de equivalencia es la de isomorfismo, es decir (V,T) es equivalente a (V',T'), lo cual denotamos por $(V,T) \sim (V',T')$, si existe un isomorfismo $h:V \longrightarrow V'$ tal que $T' \circ h = h \circ T$.

Ahora necesitamos dar una noción de familia parametrizada por una variedad S. Intuitivamente una familia de espacios vectoriales de dimensión n parametrizada por S es un haz vectorial de rango n sobre S, y un endomorfismo del haz es una familia de endomorfismos de las fibras, de donde obtenemos la siguiente definicion.

DEFINICION 2.1.- Una familia de endomorfismos de espacios vectoriales de dimension n parametrizados por una variedad S es una pareja (E,T), donde E es un haz vectorial de rango n sobre S y T un endomorfismo del haz E.

Diremos que dos familias (E,T) y (E',T') son equivalentes si existe un isomorfismo de haces $h:E \longrightarrow E'$ tal que $T' \circ h = h \circ T$. Si $\phi : S \longrightarrow S'$ entonces $\phi^{*}(E,T) = (\phi^{*}E, \phi^{*}T)$ es la familia inducida por (E,T).

Tenemos todo listo para un problema moduli, el cual denotaremos por $(\mathrm{End})_n$. El resolver el problema moduli significa encontrar el espacio moduli fino (o debil), sin embargo en este caso tenemos la siguiente proposición.

PROPOSICION 2.3.- No existe espacio de moduli fino para los endomorfismos de espacios vectoriales de dimensión n.

Demostracion.-Supongamos que $\mathfrak{F}(\ )$ esta representado por (M,Φ), sea S una variedad y E un haz no trivial de rango n sobre S, entonces $(I_n, 1_{I_n})$ y $(E, 1_E)$ son familias no equivalentes (donde I_n es el haz trivial). y sin embargo inducen el mismo morfismo en $\mathrm{Hom}(S,M)$.

Es bien conocido que para toda n existen S una variedad, y E un haz no trivial. ▫

Aunque es posible evitar este problema definiendo una nueva relación de equivalencia o restringiendonos a familias en las que el haz es trivial. Sin embargo en este caso aun tenemos el siguiente problema.

PROPOSICION 2.4.- No hay espacio moduli debil para $(\mathrm{End})_n$ si $n \geq 1$.

Demostracion.- Supongamos que existe una variedad M y una transformación natural de $\mathfrak{F}(\ )$ en $\mathrm{Hom}(\_,M)$.

Para $\lambda \in \mathbb{C}$, consideremos el morfismo siguiente:

$$\beta : \mathbb{C} \longrightarrow M_{n \times n}(\mathbb{C})$$

definido por $t \longmapsto B_t$ donde

$$B_t = \begin{pmatrix} \lambda & t & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & t & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 0 & \cdots & & & 0\lambda & t \\ 0 & \cdots & & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Entonces este morfismo nos representa una familia $F\in\mathfrak{F}(K)$. A su vez la familia F nos representa un morfismo $\nu_F\in \mathrm{Hom}(K,M)$. Si $t\neq 0$ tenemos que el polinomio caracteristico $\mathrm{char}(B_t)$ y el polinomio minimo coinciden, esto es, B_t define un endomorfismo cíclico. Si $t\neq 0$ entonces $\mathrm{char}(B_t)=\mathrm{char}(B_1)$ y por lo tanto tenemos que $B_t\simeq B_1$, es decir $\nu_F(t)=\nu_F(1)$ para toda $t=0$ y entonces tambien para $t=0$. Por continuidad de ν_F se tiene que $\nu_F(0)=\nu_F(1)$ lo cual nos dice que B_1 y B_0 estan representados por el mismo punto de M sin embargo no son equivalentes. Por lo tanto no puede existir el espacio moduli. ▫

NOTA 2.5.-La situación anterior es un ejemplo tipico del llamado fenomeno del salto. La existencia de este fenomeno es una de las razones principales para la no existencia de espacios moduli. Es posible tener una familia F parametrizada por una variedad irreducible S de dimensión mayor o igual a 1 y un punto $s_0\in S$ tal que:

i).- $F_s\sim F_{s'}$ $\quad \forall s,\ s'\in S-\{s_0\}$

ii).- $F_s\not\sim F_{s_0}$ $\quad s\neq s_0$

En vista de este fenomeno por lo general vamos a restringir mas los objetos para poder obtener un espacio moduli.

PROPOSICION 2.5.-Existe una transformación natural $\Phi: \mathfrak{F}(\ ) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\_,\mathbb{C}^n)$ tal que Φ_{pt} esta dada por

$$(V,T) \longmapsto (a_1,\ldots,a_n)$$

donde $\qquad \mathrm{char}(T)=X^n+a_1X^{n-1}+\ldots+a_n.$

Demostracion.- Dada una familia $(E,T)\in\mathfrak{F}(S)$ existe una cubierta

$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de S tal que $E|U_\alpha$ es trivial para toda $\alpha\in I$, entonces $T|U_\alpha$ esta representado por una matriz $A\in M_{n\times n}(A(U_\alpha))$ con entradas en las funciones regulares en S y por lo tanto podemos definir localmente su polinomio caracteristico como sigue:

$$\mathrm{char}(T|U_\alpha)=\det(X\cdot I-A)$$

que es un polinomio de grado n con ciefeficientes en las funciones regulares sobre u_α y son indepenoientes de la trivialización local dada, por lo que $\mathrm{char}(T|U_\alpha)$ y $\mathrm{char}(T|U_\beta)$ coinciden en $U_\alpha\cap U_\beta$ lo que permite unirlos y extender la definicion de polinomio caracteristico loca a una definición global obteniendo

$$\mathrm{char}(T)=X^n+a_1X^{n-1}+\ldots+a_n$$

con $a_i\in A(S)$ (las funciones regulares sobre S), y por lo tanto un morfismo

$$\gamma: S \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

definido como $\quad s \longmapsto (a_1(s),\ldots,a_n(s))$

de donde obtenemos la transformación natural requerida. □

Para encontrar un espacio moduli para los endomorfismos necesitamos restringir los objetos, para lo cual tenemos dos opciones naturales.

Sea $(V,T)\in(\mathrm{End})$ y considerese su Forma Canónica de Jordan.

$$\left(\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix}\lambda_1 & 0\ldots 0 \\ \varepsilon_1 & \lambda_1 \ddots \\ & \varepsilon_1 \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix} & 0 & 0 \\
\hline
0 & \begin{matrix}\lambda_2 & 0\ldots 0 \\ \varepsilon_2 & \lambda_2 \ddots \\ & \varepsilon_2 \ddots & \\ & & \lambda_2\end{matrix} & 0 \\
\hline
0 & 0 & \ddots
\end{array}\right)$$

donde $\varepsilon_i = 0$ o 1

Primero pediremos que $\varepsilon_i=0$ para toda i, esto nos determina a todos los endomorfismos diagonalizables, los que estudiaremos a continuación y que denotaremos por $(End_n)_d$.

Dada una variedad S definimos

$$\mathfrak{F}^d(S) = \{ (E,T)\in\mathfrak{F}(S) \ / \ T_s \text{ es diagonalizable } \forall s\in S\}$$

En este caso tenemos que dos endomorfismos son isomorfos si y solo si tienen el mismo polonomio caracteristico, lo cual evita el problema de la Proposicion 2.4 y de esta forma tenemos la biyección

$$\mathfrak{F}^d{}_{pt} \longrightarrow K^n$$

dada por el polinomio caracteristico.

PROPOSICION 2.7.- $\mathbb{C}^n$ es espacio moduli debil para $(End_n)_d$.

Demostracion.-Sea N una variedad y $\Phi:\mathfrak{F}(\ )\longrightarrow Hom(\_,N)$ una transformación natural, entonces tenemos el mapeo $\mu=\Phi_{pt}\circ\Phi_{pt}^{-1}:\mathbb{C}^n\longrightarrow N$ y queremos demostrar que es morfismo.

Consideremos el morfismo $\tau:\mathbb{C}^n\longrightarrow M_{nxn}(\mathbb{C})$ definido por

$$(a_1,\dots,a_n) \longmapsto diag(a_1,\dots,a_n)$$

donde $diag(a_1,\dots,a_n)$ denota la matriz diagonal con entradas $(a_1,\dots,a_n)$, sea D su familia asociada.

Definamos el morfismo $\phi:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ como sigue

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \longmapsto (t_1,\dots,t_n)$$

donde $\Pi^n_{i=1}(X-\lambda_i)=X^n+t_1X^{n-1}+\dots+t_n$ es decir las funciones simetricas de $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

Sea $\psi=\mu\circ\phi$, entonces $\psi(a_1,\dots,a_n)=\Phi_{pt}(\Phi^{-1}_{pt}\circ\phi)(a_1,\dots,a_n)$ y como $(V,T)=\Phi^{-1}_{pt}\circ\phi(a_1,\dots,a_n)$ es el endomorfismo diagonalizable con entradas $(a_1,\dots,a_n)$ podemos ver que $\psi=\Phi_{\mathbb{C}}n(D)$ y por lo tanto ψ es morfismo, mas aun puesto que las λ_i son enteras sobre $\mathbb{C}[t_1,\dots,t_n]$ (puesto que satisfacen el polinomio con coeficientes $t_1,\dots,t_n$), tenemos que ϕ es finito lo cual es suficiente para concluir que μ es morfismo [Newstead]. $\square$

Teorema 2.8.- No existe espacio moduli fino para los endomorfismos diagonalizables.

Demostración.- Demostraremos que si $n>1$, entonces no existe una familia $(E,T)\in\mathcal{F}_d(\mathbb{C}^n)$ tal que si $t=(t_1,\ldots,t_n)$ tengamos $\mathrm{char}(T_t)=X^n+t_1X^{n-1}+\ldots+t_n$, esto visto en forma categorica demuestra que la transformación natural Φ de la proposición 2.5 no es suprayectiva.

Supongamos lo contrario, sea (E,T) tal familia. Sea $g\in\mathbb{C}[t_1,\ldots t_n]$ tal que $g(0)\neq 0$ y que la restricción de E a $(\mathbb{C}^n)_g$, $E|(\mathbb{C}^n)_g$ sea trivial, esto siempre lo podemos obtener pues dado un haz E sobre $\mathbb{C}^n$ existe $U\subseteq\mathbb{C}^n$ vecindad del cero tal que $E|_U$ sea trivial, entonces tenemos que $U^-\setminus U$ es cerrado, y si tomamos a g en el ideal $I(U^-\setminus U)$ obtenemos lo que queríamos.

Tenemos entonces que la restricción de la familia (E,T) a $(\mathbb{C}^n)_g$ es isomorfa a $(\mathcal{I}_n,T')$ (con $\mathcal{I}_n$ el haz trivial), y donde a T' la podemos asociar con la matriz $\mathcal{B}$ de $n\times n$ con entradas en $A((\mathbb{C}^n)_g)=\mathbb{C}[t_1,\ldots,t_n]_g$, (las funciones regulares sobre $(\mathbb{C}^n)_g$), por lo que tenemos que existe $r>0$ tal que $g^r\mathcal{B}\in\mathbb{C}[t_1,\ldots,t_n]$ donde g^r es el común denominador de las entradas de $\mathcal{B}$.

Sea T'_0, entonces por la manera en que esta definida la familia tenemos que $\mathrm{char}(T'_0)=X^n$, y como T'_0 es diagonalizable concluimos que es el endomorfismo nulo, esto implica que todas la entradas de $g^r\mathcal{B}$ tienen termino constante cero.

Aplicando determinante obtenemos el polinomio

$$(-1)^n\det(g^r\mathcal{B}) = g^{rn}t_n$$

puesto que $\det(\mathcal{B})$ es igual a t_n por ser el producto de la diagonal de $\mathcal{B}$ (es decir, el producto de todos los valores propios, que el igual a la funcion simetrica elemental de grado n de las raices.), y por lo tanto concluimos que dicho polinomio no tiene terminos de grado menor que n lo cual es una contradiccion pues $g(0)\neq 0$ y por lo tanto tiene termino constante distinto de cero lo que implica que necesariamente $g^{rn}t_n$ tenga un termino de grado uno, lo que es una contradicción y por lo tanto no existe una familia universal. ◻

Hasta ahora hemos restringido nuestros objetos a aquellos que en su Forma Canónica de Jordan (FCJ) tuvieran unicamente ceros debajo de la diagonal. Tomemos ahora la segunda opcion, es decir tomemos unicamente aquellos endomorfismos cuya (FCJ) tenga unicamente unos debajo de la diagonal. Es facil ver que dichos endomorfismos son los endomorfismos ciclicos, pues su polinomio caracteristico coicide con el polinomio minimo.

A este problema lo denotaremos $(End_n)_c$. Tenemos que una familia de endomorfismos cíclicos es $(E,T)\in\mathfrak{F}(S)$ para la cual exista una seccion σ de E tal que $v, T(v),\ldots,T^{n-1}(v)$ forme una base para E_s para toda $s\in S$ y donde $v=\sigma(s)$, denotaremos al conjunto de estas familias por $\mathfrak{F}^c(S)$.

Consideremos la familia $(U,T)^c\in\mathfrak{F}^c(\mathbb{C}^n)$ asociada al morfismo $\phi:\mathbb{C}^n \longrightarrow M_{rxn}(\mathbb{C})$ definido por

$$(a_1,\ldots,a_n) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_n \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & -a_2 \\ & & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

entonces tenemos

TEOREMA 2.9.- $\mathbb{C}^n$ es espacio moduli fino para los endomorfismos ciclicos, donde $(U,T)^c$ es la familia universal.

Demostracion.- Sea $(E,T)\in\mathfrak{F}^c(S)$ entonces existe una sección σ de E tal que $v, T(v),\ldots,T^{n-1}(v)$ forma una base para E_s para cada $s\in S$, donde podemos obtener una representación de T en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & -a_n \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_2 \\ & & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

donde $a_i \in A(S)$ (las funciones regulares) y esta determinada por σ, T y la proposicion 2.5, de donde obtenemos el morfismo $\alpha: S \longrightarrow \mathbb{C}^n$ definido por

$$s \longmapsto (a_1(s), \ldots, a_n(s))$$

de donde concluimos que $\alpha^*(\mathcal{U},T) \quad (E,T)$ demostrando asi que $\mathbb{C}^n$ es espacio moduli fino para los endomorfismos cíclicos. ▪

Hemos encontrado que en cierta forma los endomorfismos ciclicos se portan mejor que los diagonalizables. Pero ahora nos preguntamos que pasa con el resto de los endomorfismos, para este problema daremos una solución parcial, puesto que ya vimos que no existe el espacio fino.

Consideremos el conjunto $\Omega = \{ \omega \in \mathbb{N}^r \mid \omega = (n_1, \ldots, n_r)$ tal que

$$i).- \ \sum n_i = n \quad \text{con } i=1,\ldots,r$$

$$ii).- \ n_i \geq n_{i+1} \quad \text{para } i=1,\ldots,r-1. \}.$$

Para cada $\omega \in \Omega$ denotamos por $(End_n)_\omega$ al subconjunto de (End_n) tal que $(V,T) \in (End_n)_\omega$ si y solo si la descomposición T-ciclica de V esta dada como

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$$

donde W_i es subespacio T-ciclico de dimensión n_i [Hoffman].

Tenemos que una familia de elementos de $(End_n)_\omega$ parametrizada por una variedad S, es una pareja $(E,T) \in \mathfrak{F}(S)$ para la cual existen r secciones $\sigma_1, \ldots \sigma_r$ de E tales que $\{v_i, T(v_i), \ldots, T^{n_i - 1}(v_i)\}$ sea una base para el subespacio ciclico correspondiente de E_s de dimension n_i, y donde $v_i = \sigma_i(s)$. Al conjunto de clases de equivalencia de familias parametrizadas por S las denotaremos por $\mathfrak{F}^\omega(S)$.

Sea $(E,T) \in \mathfrak{F}^\omega(S)$ y (U_α) una cubierta abierta para S tal que $E|U_\alpha$ sea trivial, $T|U_\alpha$ esta representado por una matriz $A \in M_{n \times n}(A(U_\alpha))$ y si aplicamos el algoritmo de Smith para calculo de factores invariantes [Hoffman] podemos definir estos localmente, y igual que en la Proposición 2.5 podemos extender esta definición a una global.

Sean $P_1(X)=X^{n_1}+a_1X^{n_1-1}+\dots+a_{n_1}$

$$P_2(X)=X^{n_2}+a_{n_1+1}X^{n_2-1}+\dots+a_{n_1+n_2}$$

$$\vdots$$

$$P_r(X)=X^{n_r}+a_{n_1+\dots+n_{r-1}+1}X^{n_r-1}+\dots+a_{n_1+\dots+n_r}$$

los factores invariantes asociados a la descomposición T-ciclica de E, como sabemos $P_{i+1}|P_i$ y podemos definir los polinomios

$$q_1(X)=P_1(X)/P_2(X)=X^{n_1-n_2}+b_1X^{n_1-n_2+1}+\dots+b_{n_1-n_2}$$

$$q_2(X)=P_2(X)/P_3(X)=X^{n_2-n_3}+b_{n_1-n_2+1}X^{n_2-n_3+1}+\dots+b_{n_1-n_3}$$

$$\vdots$$

$$q_{r-1}(X)=P_{r-1}(X)/P_r(X)=X^{n_{r-1}-n_r}+b_{n_1-n_{r-1}+1}X^{n_{r-1}-n_r-1}+\dots+b_{n_1-n_r}$$

$$q_r(X)=P_r(X)=X^{n_r}+a_{n_1+\dots+n_{r-1}+1}X^{n_r-1}+\dots+a_{n_1+\dots+n_r}.$$

renombrando los coeficientes de $q_r(X)$ como

$$q_r(X)=X^{n_r}+b_{n_1-n_r}X^{n_r-1}+\dots+b_{n_1}$$

tenemos que dada una familia $(E,T)\in\mathfrak{F}(S)$, esta determina una aplicación

$$(b_1,\dots,b_{n_1}):S\longrightarrow\mathbb{C}^{n_1}$$

la cual es morfismo puesto que las b_i son funciones regulares de S.

De esta forma obtenemos la siguiente proposición.

PROPOSICION 2.10.- Existe una transformación natural $\Phi:\mathfrak{F}(\ )\longrightarrow \mathrm{Hom}(\_,\mathbb{C}^{n_1})$, de tal forma que Φ_{pt} es biyección.

Demostracion.- Solamente falta demostrar que Φ_{pt} es biyección. Es inyectiva puesto que la Forma Canónica Racional es única, y por lo tanto tambien los factores invariantes y en concecuencia sus cocientes.

Para demostrar que se cumple la suprayectividad únicamente tenemos que fijarnos en que $P_i(X)=q_1\cdot\ldots\cdot q_r$, donde dada una n_1-ada $(b_1,\ldots,b_{n_1})$ tenemos que $q_i(X)$ es el polinomio de grado n_i-n_{i+1}, igual a $X^{n_i-n_{i+1}}+b_{n_1-n_i+1}X^{n_i-n_{i+1}-1}+\ldots+b_{n_1-n_{i+1}}$ si n_i-n_{i+1} es distinto de cero e igual a uno en caso contrario. □

Consideremos el morfismo $\gamma:\mathbb{C}^{n_1}\longrightarrow M_{nxn}(\mathbb{C})$ que le asocia a una n_1-ada la matriz en forma canónica racional asociada a los factores invariantes obtenidos como en la Proposición 2.10, y sea $(\mathcal{U},T)^{\omega}\in\mathfrak{F}^{\omega}(\mathbb{C}^{n_1})$ la familia asociada a este morfismo. Entonces tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 2.11.- $\mathbb{C}^{N_1}$ es espacio moduli fino para $(\mathrm{End}_n)^{\omega}$, donde $(\mathcal{U},T)^{\omega}$ es la familia universal.

Demostracion.- Sea $(E,T)\in\mathfrak{F}^{\omega}(S)$ tenemos que existen $\sigma_1,\ldots\sigma_r$ secciones de S con las cuales podemos definir los factores invariantes $P_1,\ldots,P_r$, y con estos los polinomios $q_1,\ldots,q_r$ obteniendo asi el morfismo

$$(b_1,\ldots,b_{n_1}):S\longrightarrow \mathbb{C}^{n_1}$$

donde las b_i son funciones regulares, y de tal forma que la familia inducida $(b_1,\ldots b_{n_1})^{*}(\mathcal{U},T)\ \ (E,T)$. □

NOTA 2.12.- Lo que hemos obtenido es una descomposicion del conjunto de endomorfismos como union disjunta, donde para cada una de estas componentes existe el espacio moduli fino.

REFERENCIAS

[Hrtshne] Robin Hartshorne, "Algebraic Geometry", GTM Springer-Verlag, (1977)

[Hoffman] Kenneth Hoffman, "Algebra Lineal", Prentice Hall International, (1982)

[Newstd] P. E. Newstead, "An introduction to Moduli Problems and orbit space"

[Oslo] David Mumford and Kelevi Souminen, "Algebraic Geometry, Oslo", (1970).

[shafrvch] I. R. Shafarevich, "Basic Algebraic Geometry", Springer-Verlag, (1972).