UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

Algunas consideraciones sobre la Teoría de Funciones Enteras y los teoremas de Phragmén-Lindelöf

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A:

ANA MEDA GUARDIOLA

MAYO 1989

INDICE

Notación, definiciones y observaciones generales.

Al campo de los números complejos se le denotará $\mathbb{C}$ y si z es un elemento de $\mathbb{C}$ se le denotará como $z = x + iy$ con x,y números reales o bien $z = re^{i\theta}$ donde r es un número real no negativo y $\theta\in[0,2\pi)$; según convenga en el momento. La descripción para el cero será 0. Es claro que si z no es cero $r=|z|$ y $\theta=\arg z$.

A lo largo de todo este trabajo se denotará por $\mathbb{C}[z]$ el anillo de los polinomios en z con coeficientes complejos, y en general $P(z)$ será un polinomio.

1. Topología.

Una región es un conjunto abierto contenido en $\mathbb{C}$ que es simplemente conexo.

Un conjunto V es vecindad de $\omega \in \mathbb{C}$ ($V \in N\omega$) si contiene a un abierto que a su vez contiene a ω.

U es vecindad de infinito ($U \in N\infty$) si contiene al complemento de un disco centrado en el origen (o, equivalentemente, si $\frac{1}{U}\cup\{0\}$ es vecindad de cero).

Al disco centrado en el origen y con radio R se le llama D_R (esto es, $D_R= \{z \in \mathbb{C}: \ |z| < R\}$). En caso que se use otro punto como centro la notación será la usual

$$B_R(z) = \{ \omega \in \mathbb{C}: \ |z-\omega|<R\}$$

y $\bar{D}_R$ y $\bar{B}_R(z)$ serán, también en la forma usual:

$$\bar{D}_R= \{ z \in \mathbb{C}: \ |z| \leq R\}$$

$$\bar{B}_R(z) = \{\omega \in \mathbb{C}: \ |z-\omega| \leq R\}$$

Las curvas casi siempre serán círculos o rayos, y se parametrizarán de forma canónica:

$$\Gamma : [0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\Gamma(\theta) = \omega + re^{i\theta} \quad \text{donde } \omega \in \mathbb{C} \text{ y } r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \text{ son fijos.}$$

$$\gamma : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\gamma(\theta) = \alpha + \theta e^{i\beta} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{C} \text{ y } \beta \in [0,2\pi) \text{ fijos.}$$

2. Análisis.

Respecto al comportamiento asintótico se dirá que $Q = Q(t)$ cumple la propiedad A asintóticamente si existe $T > 0$ tal que $Q(t)$ cumple A para cada $t \geq T$.

Si f y g son funciones reales de variable real, se denotará

$$f(t) = O(g(t)), \quad f(t) \sim g(t) \quad y \quad f(t) = o(g(t))$$

si existe $K>0$ tal que asintóticamente $f(t) \leq Kg(t)$; $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)}$ es uno ó cero, respectivamente. Si no hay confusión posible, se omitirá la variable t (esto es, se escribirá por ejemplo $f=O(g)$)

Si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se definen sus límites superior e inferior como

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, \varphi(r) = \lim_{r\to\infty} \sup \varphi(r) = \lim_{r\to\infty} \left(\sup_{t\geq r}\{\varphi(t)\}\right)$$

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\, \varphi(r) = \lim_{r\to\infty} \inf \varphi(r) = \lim_{r\to\infty} \left(\inf_{t\geq r}\{\varphi(t)\}\right)$$

y pueden tomar valores reales extendidos.

3. Variable Compleja.

Por $\mathcal{H}(A)$ se entiende al conjunto de todas las funciones $f: A \longrightarrow \mathbb{C}$ que son analíticas en el interior de A

$$(\mathrm{Int}A \subseteq A \subseteq \mathbb{C})$$

Una función f es <u>entera</u> si es analítica en cada punto $z \in \mathbb{C}$, esto es, si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ En particular, se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

(por el teorema de Taylor) y el radio de convergencia de esta serie es infinito. De hecho esto último puede entenderse como una definición alternativa de función entera.

Aunque las funciones constantes son enteras, en este trabajo cuando se diga ''función entera'' se debe entender función entera <u>no</u> constante a menos que se especifique lo contrario.

Los ceros de una función f son los números complejos

$$z_K = r_K e^{i\theta_K} \quad K \in \mathbb{N} \quad ó \quad K \in \{1,2,\ldots,n\}$$

tales que $f(z_K) = 0$, ó, equivalentemente, tales que

$$\frac{f(z)}{z - z_K}$$ sea analítica en z_K. Se ordenarán de forma creciente según el modulo y se contaran tantas veces como su multiplicidad.

Capítulo 1.

Funciones Enteras de Orden Finito.

1. Definición.

Si f es entera y $r \in \mathbb{R}^+$ se define como

$$M(f,r) = M(r) = \max_{|z|\le r} \{|f(z)|\}$$

al máximo módulo de f en el disco cerrado de radio r.

Si f es analítica en A hay una definición más general:

$$\mathcal{M}(f,r,A) = \mathcal{M}(r) = \max \{|f(z)| : |z|\le r \text{ y } z \in A\}$$

pero no se utilizará hasta capítulos posteriores.

2. Observaciones:

(i) $$M(r) = \max_{|z|=r} \{|f(z)|\}, \text{ pero en general}$$

$$\mathcal{M}(f,r,A) \ne \max_{\substack{|z|=r \\ z\in A}} \{|f(z)|\}$$

(ii) M es una función estrictamente creciente como función de r y no es acotada (esto es, $\lim_{r\to\infty} M(r) = \infty$)

(iii) Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es la expansión en serie de potencias de f entonces $|a_n| \le \dfrac{M(r)}{r^n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y para todo $r > 0$.

(Ver la desigualdad de Cauchy en el apéndice).

Demostración.

Los dos primeros incisos son consecuencia del principio del máximo y del teorema de Liouville. La prueba del tercero es así:

Del teorema de Taylor, si $n \in \mathbb{N}$ y r es positivo,

si $\Gamma(\theta) = re^{i\theta}$ y $\theta \in [0,2\pi)$,

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\Gamma \frac{f(\omega)}{\omega^{n+1}} d\omega \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|}{r^n} d\theta \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M(r)}{r^n}\right) \int_0^{2\pi} 1\, d\theta = \frac{M(r)}{r^n}$$

Los ceros se pueden ennumerar pues se considerarán funciones analíticas y se mencionará un teorema que en este caso lo garantiza y que está enunciado en el apéndice, pues los ceros de una función analítica son aislados.

Se llamará $n_f(r) = n(r)$ al número de ceros de f en D_r. Este es un parámetro asociado a cada función entera que ayudará a conocer propiedades de ésta. De hecho se definirán varios parámetros asociados a cada función entera que permitirán obtener más información sobre el comportamiento de estas funciones.

Se utiliza el principio del máximo sin prueba pero se hace un estudio un poco detallado con demostración en el tercer capítulo.

Los demás teoremas importantes que se utilizan sin más vienen expuestos en el apéndice, pág. 74 . La única excepción la constituyen los teoremas relativos a la teoría de potencial (en particular el teorema de Carleman Milloux) que se utilizan sin prueba y pueden verse en los libros [14],[3],[2].

Como pasa $\forall\, r>0$, $\varphi\equiv 0$, i.e. f es un polinomio de grado a lo más m. Con lo que se demuestra el siguiente:

3. **Teorema.** Si existe un número natural n tal que

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{M(r)}{r^n} < +\infty$$

entonces f es un polinomio de grado a lo más n.

Esto indica que cada función entera que no es polinomio cumple

$$\lim \frac{M(r)}{r^n} = +\infty$$

para todo $n\in\mathbb{N}$, con lo cual queda una idea de que toda función no polinomial crece «mucho». Parte de la teoría de funciones enteras se ocupa de encontrar criterios que enriquezcan la información sobre el crecimiento (en módulo, claro) de las funciones enteras. Se hablará ahora de ello.

4. **Def.** Se dice que una función f es de orden finito si existe una constante k no negativa tal que, asintóticamente,

$$M(r)<e^{r^k}$$

5. **Observación.** Si $P\in\mathbb{C}[z]$ el cociente

$$\frac{\ln M(r,P)}{\ln r} \text{ es acotado,}$$

de hecho

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,P)}{\ln r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln |bm|r^m}{\ln r} = \lim_{r\to\infty} \left(\frac{\ln|bm| + m\log r}{\ln r}\right) = m$$

Proposición. Sea f entera, no polinomio. Entonces

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = +\infty$$

Demostración. Se supone que

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,f)}{\ln r} = \mu < +\infty.$$

Esto es, que existe una sucesión creciente de reales (r_n) $n\in\mathbb{N}$ no acotada y tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln M(r_n,f)}{\ln_n} = \mu$$

Esta última sucesión $\left(\frac{\ln M(r_n,f)}{\ln r_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ puede tomarse creciente (pues $\{\varphi(t): t\geq r\} \subseteq \{\varphi(t): t\geq k\}$ siempre que $k \leq r$)

Así, $\ln M(r_n,f) \leq \mu \ln r_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$; esto es, $M(r_n,f)\leq r_n^{\mu}$

Si se elige un natural k mayor que μ se obtiene que el coeficiente de Taylor correspondiente a_k satisface:

Se empezará por distinguir a los polinomios de las demás funciones enteras.

Sea $f(z)$ tal que $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \frac{M(r)}{r^m} < +\infty$ para alguna $m \in \mathbb{N}$.

Entonces; si se define $\displaystyle\varphi(z) = \frac{1}{z^{m+1}} \left\{ f(z) - P_{m,f}(z) \right\}$

donde $\displaystyle f(z) = \sum_{n=0} a_n z^n$ y $\displaystyle P_{m,f}(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$

i.e. $\displaystyle\varphi(z) = \frac{1}{z^{m+1}} \sum_{m+1}^{\infty} a_n z^n$ (por lo que φ es analitica)

Pero, además, $|\varphi(z)|$ converge uniformemente a cero en discos

$\{|z| = r_n\}$ donde $\displaystyle\lim_{n\to} r_n = \infty.$

Dem.

Como $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \frac{M(r)}{r^m} < \infty$ existen $\begin{cases} \alpha > 0 \\ r_n \uparrow \infty \end{cases}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M(r_n)}{r_n^m} = \alpha < +\infty$$

los discos buscados son éstos, r_n.

Aquí, si $|z| = r_n$

$$|\varphi(z)| = \left| \frac{1}{z^{m+1}} f(z) - \frac{1}{z^{m+1}} {}_m P(z) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{r_n} \left(\frac{M(r_n)}{r_n^m} + \frac{|P_m(z)|}{r_n^m} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Como el primer sumando tiende a α y el segundo a $|a_m|$,

$$\text{se tiene que } \max_{|z|\leq R} |\varphi(z)| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

i.e. $\varphi(z) \equiv 0$

Porque:

Sea $r>0$ y sea r_n tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $M_\varphi(r_n) < \varepsilon$. Sea n_0 tal que $r_{n_0} > r$ como φ es entera, por el principio del máximo

$$\max_{|z|\leq r} |\varphi(z)| = \max_{|z|=r} |\varphi(z)| \leq M_\varphi(r_{n_0}) < \varepsilon$$

El orden de una función f se denotará como ρ; en general, y se define como

$$\rho = \inf\{k>0 \mid M(r)<e^{r^k} \text{ para toda } r \geq R_o = R_o(k,f)\}$$

Observaciones.

$$M(r)<e^{r^{\rho+\varepsilon}} \quad \text{para cada} \quad \varepsilon>0 \quad \text{si} \quad |z|>R_o$$

Además, es claro que $\{k>0 \mid M(r)<e^{r^K} \ \forall\ r\geq R_o = R_o(k,f)\}$ es un intervalo (ρ,∞) que puede ser abierto o cerrado.

9. Propiedades.

Sea $\varepsilon>0$. Entonces, de la definición se deduce que:

(i) Existe una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ con $r_n \uparrow \infty$ tal que

$$e^{r_n^{\rho-\varepsilon}} < M(r_n) \quad \text{para cada } n\in\mathbb{N}.$$

(ii) Si $r\geq R_o=R_o(\varepsilon)$,

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

(iii) $\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \dfrac{\ln \ln M(r)}{\ln r}$

Demostración.

(i) Si ε es un real positivo arbitrario, existe

$$K\in\{A>0:\ M(r)<e^{r^A} \text{ si } r\geq R_A\}$$

y tal que $\rho\leq K<\rho+\varepsilon$ (pues ρ es un infimo).

Esto indica que que existe $R_o>0$ tal que

$$M(r)<e^{r^K}<e^{r^{\rho+\varepsilon}} \quad \text{siempre que} \quad r\geq R_o. \qquad \|$$

(ii) Para cada $\varepsilon>0$ como $\rho-\varepsilon<\rho$ y ρ es un infimo:

Para todo $R\in\mathbb{R}$ existe $r_R\geq R$ tal que $M(r_R)\geq e^{r_R^{\rho-\varepsilon}}$

por ésto se puede elegir una sucesión de reales $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty \quad \text{y} \quad M(r_n)\geq e^{r_n^{\rho-\varepsilon}} \qquad \|$$

(iii) Sean $A=\{K\in\mathbb{R}:\ \exists\ R>0 \text{ tal que } M(r)<e^{r^K}\ \forall\ r\geq R\}$ y

$$\rho' = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}$$

$$|a_k| \leq \frac{M(r_n)}{r_n^k} \leq \frac{r_n^{\mu}}{r_n^k} = \frac{1}{r_n^{k-\mu}}$$

pero el lado derecho tiende a cero, esto es, $a_k = 0$.

Esto prueba que f es un polinomio de grado no mayor que μ.

6. Definición.

Una función $g:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ se dice que es algebráica si existen $n\in\mathbb{N}$ y polinomios $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{C}[z]$ tales que

$$\sum_{m=0}^{n} P_m(z)[f(z)]^m = 0$$

Si f es una función entera y no es algebráica entonces se llama trascendente.

7 . Proposición.

Las únicas funciones enteras algebráicas son los polinomios.

Claramente un polinomio P es algebráico, pues si se hace $P_0=P$; $P_1\equiv -1$, entonces $P_0 + P_1 P \equiv 0$; ahora bien, recíprocamente, si f es algebráica sean:

Para cada $k\in\mathbb{N}$, $z_k \in \overline{D}_k$ tal que $|f(z_k)| = M(k,f)$

$|f(z_k)|$ es distinto de cero, y $\lim |f(z_k)| = +\infty$

además $|z_k| = k$ y como

$$P_0(z_k) + P_1(z_k)f(z_k) + \ldots + P_n(z_k)[f(z_k)]^n = 0$$

$$\frac{P_0(z_k)}{(f(z_k))^n} + \frac{P_1(z_k)}{(f(z_k))^{n-1}} + \ldots + P_n(z_k) = 0$$

Por las proposiciones anteriores es claro que $\left|\dfrac{P_i(z_k)}{(f(z_k))^{n-i}}\right|$

tiende a cero si k tiende a ∞, esto es, que

$\lim\limits_{k\to\infty} P_n(z_k) = 0$. Esto es una contradicción, pues $P_n(z)$ crece con z.

8. Definición. En lo sucesivo, se considerarán funciones de orden finito y en este caso, se define un parámetro asociado a cada función: su orden.

lo cual también hace las veces de definición. En efecto,

si $\alpha > \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ln M(r)}{r^{\rho}}$, existe $R>0$ tal que, para toda $r \geq R$

$$\alpha > \frac{\ln M(r)}{r^{\rho}} \text{ ; y entonces } e^{\alpha r^{\rho}} > e^{\ln M(r)} = M(r) \text{ si } r \geq R$$

esto es, $\alpha \in \{ A>0\text{: tal que } M(r) < e^{Ar^{\rho}} \text{ asintóticamente} \}$

pero si $\alpha < \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ln M(r)}{r^{\rho}}$, existe una sucesión de reales $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que diverge a ∞ y tal que $\alpha < \dfrac{\ln M(r_n)}{r_n^{\rho}}$ para toda $n\in\mathbb{N}$.

En este caso, se observa que si $R>0$ basta tomar n tal que

$r_n > R$ para que $e^{\alpha r^{\rho}_{(n)}} < e^{\ln M(r_{(n)})} = M(r_n)$

y por lo tanto α es cota inferior del conjunto T. Esto prueba que en realidad ambas caracterizaciones son equivalentes.

12. Propiedades de tipo y orden de funciones enteras.

Sean f, g enteras. ρ_f, ρ_g sus órdenes y σ_f, σ_g sus tipos respectivamente.

(i) $(\text{orden})(f+g) \leq \text{máx}\{\rho_f, \rho_g\}$

(ii) Si $\rho_f \neq \rho_g$ se tiene que $(\text{orden})(f+g) = \text{máx}\{\rho_f, \rho_g\}$

(iii) Si $\rho_f = \rho_g = \rho_{f+g}$, se sigue que $\sigma_{f+g} \leq \text{máx}\{\sigma_f, \sigma_g\}$

(iv) Si $\rho_f = \rho_g = \rho_{f+g}$ y $\sigma_f \neq \sigma_g$ entonces $\sigma_{f+g} = \text{máx}\{\sigma_f, \sigma_g\}$.

Esto es, ρ y σ tienen propiedades de las normas no arquimedianas.

Demostración.

(i) Sea, sin pérdida de generalidad, $\rho_f = \text{máx}\{\rho_f, \rho_g\}$ y sea $\varepsilon>0$.

Se probará que $\rho_f + \varepsilon \in \{ K>0 \mid M_{f+g}(r) < e^{r^K} \ \forall\, r \geq R_o \}$

Es un hecho elemental que $2A^{r^{\alpha}} < A^{r^{\alpha+\varepsilon/2}}$ siempre que $A>0$ y $r \geq R(\varepsilon)$, Lo siguiente está basado en ello:

Sean R_f y R_g tales que
$$M_f(r) < e^{r^{\rho_{(f)}+\varepsilon/2}} \quad \text{si } r \geq R_f$$
$$M_g(r) < e^{r^{\rho_{(g)}+\varepsilon/2}} \quad \text{si } r \geq R_g$$

y sea $R = \text{máx}\{ R(\varepsilon), R_f, R_g \}$; donde $R(\varepsilon)$ es tal que si $r \geq R$

se ha afirmado que $\rho = \inf A = \rho'$.

Sea K un elemento de A, esto es, existe $R>0$ tal que

$$M(r)<e^{r^K} \quad \forall\ r\geq R$$

se tiene esto si y solo si existe $R>0$ tal que

$$\ln M(r)<r^K \quad \forall\ r\geq R$$

y de la misma manera, existe $R>0$ tal que $\ln \ln M(r)<K\ln r \ \forall r\geq R$

esto es, $$\frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} < K \qquad \forall r\geq R.$$

Así
$$\rho' = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} \leq K$$
por lo cual ρ' es cota inferior de A, es decir, $\rho'\leq \rho$.

Sea $\alpha>\rho'$, se probará que $\alpha\in A$.

$$\alpha > \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} = \lim_{r\to\infty} \Big(\sup_{t\geq r} \frac{\ln \ln M(t)}{\ln t} \Big)$$

i.e.: $\exists R$ tal que $\forall\ r\geq R$ $\quad \dfrac{\ln \ln M(r)}{\ln r} <\alpha$

entonces $\exists R$ tal que $\forall\ r\geq R$ $M(r) < e^{r^\alpha}$ y por lo tanto $\alpha\in A$. Lo que prueba que $\rho' = \inf A$.

10. Tipo de una función entera.

Sean: f una función de orden finito ρ, y $z\in D_R$.
Se sabe que, si $\varepsilon>0$

$$|f(z)| \leq M(r) < e^{R^{\rho+\varepsilon}} \qquad \text{si} \quad R \geq R_o.$$

Puede suceder inclusive que $|f(z)| \leq M(R) < e^{R^\rho}$ no fuera válida ni aún en círculos suficientemente grandes (por ejemplo,

$f(z) = e^{2z}$. Su orden es uno, pero $M(r) = e^{2r}\geq e^r$). Aunque sí es posible que, para algún $K>0$

$M(r) < e^{Kr^\rho}$ (y del ejemplo es trivial esta segunda opción, haciendo $K = 2$).

El otro parámetro de interés es el <u>tipo</u> de una función. Es otro parámetro que junto con el orden, da una caracterización más precisa del crecimiento de las funciones enteras.

11. El tipo σ de una función entera $f(z)$ de orden ρ finito se define como

$$\sigma = \inf \{A>0\colon \exists R>0 \text{ tal que } M(r)<e^{Ar^\rho}\ \forall\ r\geq R\} = \inf T$$

y se verá que $$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r^\rho} = \lim_{r\to\infty}\Big(\sup_{t\geq r}\Big\{ \frac{\ln M(t)}{t^\rho} \Big\}\Big)$$

(iii) Si $\rho = \rho_f = \rho_g = \rho_{f+g}$ entonces:

$$\sigma_{f+g} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_{f+g}(r)}{r^\rho} \le \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln 2\text{máx}\{M_f(r), M_g(r)\}}{r^\rho} =$$

$$= \overline{\lim_{r\to\infty}} \left(\frac{\ln 2}{r^\rho} + \frac{\ln \ \text{máx}\{M_f(r), M_g(r)\}}{r^\rho}\right) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\text{máx}\{\ln M_f(r), \ln M_g(r)\}}{r^\rho} =$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \max\left\{\frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}, \frac{\ln M_g(r)}{r^\rho}\right\} = \text{máx}\ \{\sigma_f, \sigma_g\} \qquad \|$$

(iv) Si además, $\sigma_f > \sigma_g$ y $\varepsilon > 0$; $|z| = r$

$$M_{f+g}(r) \ge |(f + g)(z)| \ge |f(z)| - |g(z)| \ge$$

$$\ge e^{(\sigma_{(f)}-\varepsilon)r^\rho} - e^{(\sigma_{(g)}+\varepsilon)r^\rho}$$

donde, por la definición de σ (en este caso para σ_f), la última desigualdad es válida en una sucesión de reales $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty .$$

Pero a su vez, si $\sigma_g < \sigma_f + \varepsilon < \sigma_f - \varepsilon < \sigma_f$

en particular $\sigma_g - \sigma_f + 2\varepsilon < 0$ y se tiene:

$$e^{(\sigma_{(f)}-\varepsilon)r^\rho} - e^{(\sigma_{(g)}+\varepsilon)r^\rho}$$

$$\ge e^{(\sigma_{(f)}-\varepsilon)r^\rho}\left(1 - e^{(\sigma_{(g)}+\varepsilon)r^\rho - (\sigma_{(f)}-\varepsilon)r^\rho}\right) =$$

$$= e^{(\sigma_{(f)}-\varepsilon)r^\rho}\left(1 - e^{r^\rho(\sigma_{(g)} - \sigma_{(f)}+2\varepsilon)}\right)$$

Así, $$\lim_{r\to\infty} \left(1 - e^{r^\rho(\sigma_{(g)}-\sigma_{(f)}+2\varepsilon)}\right) = 1$$

pues $$\lim r^\rho(\sigma_g - \sigma_f + 2\varepsilon) = -\infty \qquad \|$$

13. Ejemplos.

(i) El ejemplo más sencillo de una función entera de tipo σ y orden $\rho\in\mathbb{N}$ es
$e^{\sigma z^\rho}$ ($\rho\in\mathbb{N}$ para garantizar que es entera).

(ii) Las funciones $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, e^z tienen orden y tipo uno.

(iii) e^{e^z} es una función de orden infinito, mientras que todo polinomio tiene orden cero y tipo infinito.

$$2e^{r^{\rho_{(f)}+\varepsilon/2}} < e^{r^{\rho_{(f)}+\varepsilon}}$$

se tiene que, para cada z con $|z| \geq R$ (y $|z| = r$)

$$|(f+g)(z)| \leq |f(z)| + |g(z)| \leq M_f(r) + M_g(r) <$$

$$< 2e^{r^{\rho_{(f)}+\varepsilon/2}} < e^{r^{\rho_{(f)}+\varepsilon}}$$

i.e. $$M_{f+g}(r) < e^{r^{\rho_{(f)}+\varepsilon}}$$

(la desigualdad se conserva estricta porque el máximo se alcanza en algún punto ω de norma r).

(ii) Sea $\rho_f > \rho_g$. Entonces, si $|z| = r$ y $\varepsilon > 0$

$$M_{f+g}(r) \geq |(f+g)(z)| \geq |f(z)| - |g(z)|$$

$$\geq e^{r^{\rho_{(f)}-\varepsilon/2}} - e^{r^{\rho_{(g)}+\varepsilon/2}} \quad \ldots(1)$$

donde la última desigualdad se tiene en una sucesión de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por 1.8.

Si ahora se elige ε de tal modo que

$$\rho_g < \rho_g + \frac{\varepsilon}{2} < \rho_f - \frac{\varepsilon}{2} < \rho \quad \ldots(2)$$

se tiene que, por (1),

$$M_{f+g}(r) \geq e^{r^{\rho_{(f)}-\varepsilon/2}}\left(1 - e^{r^{\rho_{(g)}+\varepsilon/2}} \; {}^{-r^{\rho_{(f)}-\varepsilon/2}}\right) \quad \ldots(3)$$

y que, por (2)

$$\lim_{r\to\infty} \left(r^{\rho_{(g)}+\varepsilon/2} - r^{\rho_{(f)}-\varepsilon/2}\right) = \lim r^{\rho_{(g)}+\varepsilon/2}\left(1 - r^{\rho_{(f)}-\rho_{(g)}-\varepsilon}\right) = -\infty$$

esto es, que

$$\lim_{r\to\infty} \left(1 - e^{r^{\rho_{(g)}+\varepsilon/2} - r^{\rho_{(f)}-\varepsilon/2}}\right) = 1$$

Así, por (3) $M_{f+g}(r) \geq e^{r^{\rho_{(f)}-\varepsilon/2}}$

si r es un elemento de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Como $\lim r_n = \infty$, $\rho_f - \varepsilon$ es cota inferior de

$$\{ K > 0 : M_{f+g}(r) < e^{r^K} \text{ si } r \geq R_0 \}$$

y como pasa para cada $\varepsilon > 0$, ρ_f es menor ó igual al orden de $f + g$. Y por la propiedad anterior es exactamente igual. ‖

$$R\ln\left(\frac{1}{|a_n|}\right) \le n\ln n$$

donde $$R = \begin{cases} \mu - \varepsilon & \text{si} \quad \mu < \infty \\ \varepsilon & \text{si} \quad \mu = \infty \end{cases}$$

Así, existe $J\subseteq N$ infinito y tal que para cada $n\in J$

$$-\frac{n\ln n}{R} \le \ln |a_n|$$

por otra parte, (por 1.2) $\quad |a_n| \le \dfrac{M(r)}{r^n}$

y así $$\ln|a_n| + n\ln r \le \ln M(r)$$

y combinando estas dos desigualdades

$$n\left(\ln r - \frac{\ln n}{R}\right) \le n\ln r + \ln|a_n| \le \ln M(r)$$

Si en particular $r=(en)^{1/R}$, se tiene

$$n\left(\ln((en)^{1/R}) - \frac{\ln n}{R}\right) \le \ln M(r)$$

$$\frac{n}{R}\left(\ln e + \ln n - \ln n\right) \le \ln M(r)$$

$$\frac{n}{R} \le \ln M(r)$$

pero si se revisa con cuidado, $\dfrac{n}{R} = \dfrac{r^R}{eR}$ porque

$$\frac{r^R}{eR} = \frac{[(en)^{1/R}]^R}{eR}$$ se tiene que

$$\frac{r^R}{eR} \le \ln M(r)$$

si nuevamente se toman logaritmos a ambos lados

$$R\ln r - \ln eR \le \ln \ln M(r)$$

$$R - \frac{\ln eR}{\ln r} \le \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} \qquad \text{si } r>1,\ n\in J$$

como R es fijo, si se hace tender r a infinito

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln(eR)}{\ln r} = 0 \quad \text{esto es,} \quad \left.\begin{matrix} \mu - \varepsilon \\ \varepsilon \end{matrix}\right\} = R \le \overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}$$

y como esto pasa para toda $\varepsilon>0$

$\mu \le \rho$

o bien, si $\mu = \infty$ resulta que $\rho = \infty$.

Resta por demostrar que $\rho \le \mu$.

Si μ es infinito no hay nada que probar, por lo cual se supone que μ es finito.

Sea $\varepsilon>0$. Para n suficientemente grande por la definición de μ, nuevamente

Se demostrará que el orden de un polinomio es cero.

Sea $P(z) = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m$

$$0 \le \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} \le \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln (|a_0| + \dots + |a_n| r^n)}{\ln r} \le$$

$$\le \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln ((n+1)|a_n| r^n)}{\ln r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln(\ln(n+1) + \ln|a_n| + n\ln r)}{\ln r}$$

$$\le \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln(\ln(n+2)\ln r)}{\ln r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \left(\frac{\ln(n+2)}{\ln r} + \frac{\ln \ln r}{\ln r}\right) = 0$$

14. Observación.

En particular, de 1.12 y 1.13 se concluye que si a una función entera se le suma un polinomio el orden no se altera. Esto se utiliza con frecuencia más adelante.

15. Notación.

Se dice que g crece más que f si el orden de g es mayor que el de f o bien si sus órdenes son iguales y el tipo de g es mayor que el tipo de f. Al hacer referencia al crecimiento de una función f se dirá que es de crecimiento (α,β) si su orden es α y su tipo β.

16. Orden, tipo y coeficientes de Taylor.

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ el desarrollo en serie de Taylor de f.

Como la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ determina de manera única a la función f, es natural suponer que es posible recuperar cada propiedad de la función f examinando sus coeficientes de Taylor. Para el orden y el tipo esta relación es muy directa.

17. Teorema. Una función entera f es de orden finito si y sólo si μ, definido así

$$\mu = \overline{\lim_{n\to\infty}} \begin{cases} \dfrac{n \ln n}{\ln\left(\frac{1}{|a_n|}\right)} & \text{si } a_n \ne 0 \\ 0 & \text{si } a_n = 0 \end{cases}$$

es finito. Y en este caso el orden de f, ρ coincide con μ.

Demostración. En primer lugar se probará que $\mu \le \rho$.

Si $\mu=0$ como $\rho \ge 0$, trivialmente $\mu \le \rho$. Por esto es de interés considerar a $\mu \in (0,\infty]$.

Sea ε un número positivo y menor que μ. Por supuesto, pequeño si μ es finito, y muy grande si $\mu=\infty$.

Por la definición de μ, existe una infinidad de naturales $n\in\mathbb{N}$ tales que

$$\sum_{n>(2r)^{(\mu+\varepsilon)}} r^n n^{-n/(\mu+\varepsilon)} = \sum_{n>(2r)^{(\mu+\varepsilon)}} \left(\frac{r}{n^{1/(\mu+\varepsilon)}}\right)^n \leq \sum_{n>(2r)^{(\mu+\varepsilon)}} \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$$

Recopilando.

$$M(r) < e^{r^{(\mu+2\varepsilon)}} + 1 < e^{r^{(\mu+3\varepsilon)}}$$

lo que indica que $\rho \leq \mu+3\varepsilon$, esto es, $\rho \leq \mu$.

Como era de esperarse también existe una definición alternativa para el tipo:
Sea ρ un número real no negativo. Sea ν definido como

$$\nu = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n|a_n|^{\rho/n}$$

de aquí se tiene el siguiente teorema:

18. Teorema. Si ν es finito y positivo entonces la función entera

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es de crecimiento (ρ,τ) si y sólo si $\nu = e\tau\rho$.

Si ν es cero o infinito, f es de crecimiento $(\rho,0)$ o no menor que (ρ,∞), respectivamente. Esto es, si f crece como

(ρ,τ), se puede escribir $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n|a_n|^{\rho/n} = e\rho\tau$ ...(1)

19. Observación. Por la fórmula de Stirling

$$\left(n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n (2\pi n)^{1/2} e^{\delta/12n} \text{ con } \delta\in(0,1)\right)$$

basta probar que

$$\overline{\lim}\, \left(\frac{n}{e}\right)^{1-\rho} |f^{(n)}(0)|^{\rho/n} = \tau\rho \qquad ...(2)$$

porque:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n|a_n|^{\rho/n} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|^{\rho/n} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n(|f^{(n)}(0)|)^{\rho/n}}{\left[\left(\frac{n}{e}\right)^n (2\pi n)^{1/2} e^{\delta/12n}\right]^{\rho/n}} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n|f^{(n)}(0)|^{\rho/n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{\rho}} = e\, \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{n}{e}\right)^{1-\rho} |f^{(n)}(0)|^{\rho/n}$$

por lo que es quivalente probar (2).

20. Demostración. Si el orden de f es uno se tendrá la siguiente fórmula.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |f^{(n)}(0)|^{1/n} = \tau$$

que resulta de una forma alternativa para calcular el tipo de una función. (Y, por cierto, no parece simplificar mucho el cálculo).

$$0 \le \frac{n \ln n}{\ln(1/|a_n|)} \le \mu + \varepsilon \qquad \text{esto es,}$$

$$n \ln n \le -(\mu + \varepsilon) \ln |a_n|$$

$$\ln |a_n| \le -\frac{n \ln n}{\mu + \varepsilon} = \ln n^{-n/(\mu+\varepsilon)}$$

y como $\ln$ es estrictamente creciente

$$|a_n| \le n^{-n/(\mu+\varepsilon)}$$

Esta desigualdad en particular prueba que f es entera, lo que permite inclusive debilitar hipótesis pidiendo que

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sea una serie formal de potencias

$$\left(\text{porque } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n/(\mu+\varepsilon)}} < \infty\right).$$

Sin perder generalidad se puede suponer que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \le n^{-n/(\mu+\varepsilon)} \qquad \text{y que } |a_0| \le 1$$

porque si no es así se le puede sumar a f un polinomio adecuado sin alterar el orden (por 1.14), luego

$$M(r) \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \le \sum_{n=0}^{\infty} n^{-n/(\mu+\varepsilon)} r^n = \sum_{n \le (2r)^{(\mu+\varepsilon)}} n^{-n/(\mu+\varepsilon)} r^n + \sum_{n > (2r)^{(\mu+\varepsilon)}} n^{-n/(\mu+\varepsilon)} r^n$$

y la última descomposición se hace de este modo porque

$$g(n) = n^{-n/(\mu+\varepsilon)} r^n$$

tiene un máximo en $n = \dfrac{r^{(\mu+\varepsilon)}}{e}$ (se obtiene derivando directamente).

Ahora bien, analizando cada tramo de la serie,

$$\sum_{n \le (2r)^{(\mu+\varepsilon)}} r^n n^{-n/(\mu+\varepsilon)} \le r^{2r^{(\mu+\varepsilon)}} \sum_{n \le (2r)^{(\mu+\varepsilon)}} n^{-n/(\mu+\varepsilon)} = Kr^{2r^{(\mu+\varepsilon)}}$$

pues se trata de una suma finita, y $\sum_{n \le (2r)^{(\mu+\varepsilon)}} n^{-n/(\mu+\varepsilon)} = K$.

Pero, asintóticamente, por el argumento ya usado con anterioridad, (en 1.13)

$$Kr^{2r^{(\mu+\varepsilon)}} = Ke^{2r^{(\mu+\varepsilon)} \ln r} < e^{r^{(\mu+2\varepsilon)}}$$

para el otro tramo el argumento es más simple:

$$\frac{n\,\ln n}{\ln(1/|a_n|)} \geq \frac{\rho}{1-\frac{\ln(\nu+\varepsilon)}{\ln n}}$$

Y, de la misma forma, se concluye que (por el teorema anterior 1.17) el orden de f es, por lo menos, ρ.

Suponiendo que $0\leq\nu<\infty$, se probará que $\tau\leq \frac{\nu}{e\rho}$

Para $\varepsilon>0$, si n es suficientemente grande, entonces

$|a_n| \leq \{\frac{\nu+\varepsilon}{n}\}^{n/\rho}$ nuevamente, por la definición de ν.

Se le suma a f un polinomio adecuado (lo cual no altera el tipo) de tal modo que la desigualdad recién indicada sea válida para todo natural, y tal que $|a_o| \leq 1$. Entonces

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n \leq \sum_{n=0}^{\infty}\{r^{\rho}\frac{(\nu+\varepsilon)}{n}\}^{n/\rho} \qquad \ldots(4)$$

como ya es canónico, se examina el máximo de

$$f(t) = \{r^{\rho}\,\frac{(\nu+\varepsilon)}{t}\}^{t/\rho} = e^{t/\rho\ln\{r^{\rho}(\nu+\varepsilon)/t\}}$$

y se tiene que $f'(t) = 0$ si y sólo si $t_o = \frac{r^{\rho}(\nu+\varepsilon)}{e}$, y t_o

es un punto crítico correspondiente al máximo

$$f(\frac{r^{\rho}(\nu+\varepsilon)}{e}) = \exp\{\frac{r^{\rho}(\nu+\varepsilon)}{e\rho}\}$$

entonces (4) queda:

$$|f(z)| \leq \sum_{n<(\nu+2\varepsilon)r^{\rho}}\{\frac{r^{\rho}(\nu+\varepsilon)}{n}\}^{n/\rho} + \sum_{n\geq(\nu+2\varepsilon)r^{\rho}}\{\frac{r^{\rho}(\nu+\varepsilon)}{n}\}^{n/\rho}$$

Así:

$$\sum_{n<(\nu+2\varepsilon)r^{\rho}}\{\frac{r^{\rho}(\nu+\varepsilon)}{n}\}^{n/\rho} \leq \sum_{n<(\nu+2\varepsilon)r^{\rho}}\exp\{\frac{r^{\rho}(\nu+\varepsilon)}{e\rho}\}$$

$$\leq(\nu+2\varepsilon)r^{\rho}\,\exp\{\frac{r^{\rho}(\nu+\varepsilon)}{e\rho}\}$$

Por otra parte

$$\sum_{n\geq(\nu+2\varepsilon)r^{\rho}}\{\frac{r^{\rho}(\nu+\varepsilon)}{n}\}^{n/\rho} \leq \sum_{n\geq(\nu+2\varepsilon)r^{\rho}}\{\frac{n}{(\nu+2\varepsilon)}\quad\frac{(\nu+\varepsilon)}{n}\}^{n/\rho} =$$

$$= \sum_{n\geq(\nu+2\varepsilon)r^{\rho}}((\frac{\nu+\varepsilon}{\nu+2\varepsilon})^{\rho})^{n} < 1 \quad \text{si} \quad r \text{ es grande}$$

porque el hecho de que $n\geq(\nu+2\varepsilon)r^{\rho}$ implica que $r^{\rho} \leq \frac{n}{\nu+2\varepsilon}$,

y la última suma es parte de una serie geométrica convergente

Demostración. Por supuesto, se prueba la forma simplificada (2).

Se supone que ν es finito y sea $\varepsilon>0$.
Si n es suficientemente grande $n|a_n|^{\rho/n}\le\nu+\varepsilon$ (por la definición de ν). Entonces

$$\frac{n\ \ln n}{\ln(1/|a_n|)}\le\frac{\rho}{1-\frac{\ln(\nu+\varepsilon)}{\ln n}} \qquad \ldots(3)$$

la desigualdad se verifica porque:

$$n|a_n|^{\rho/n}\le\nu+\varepsilon$$

$$|a_n|^{\rho/n}\le\frac{\nu+\varepsilon}{n}$$

$$\frac{\rho}{n}\ln|a_n|\le\ln\left(\frac{\nu+\varepsilon}{n}\right)$$

$$\ln|a_n|\le\frac{n}{\rho}\ln\left(\frac{\nu+\varepsilon}{n}\right)$$

$$\ln(1/|a_n|)\ge\frac{n}{\rho}\ln\left(\frac{n}{\nu+\varepsilon}\right)$$

$$\frac{1}{\ln(1/|a_n|)}\le\frac{\rho}{n}\ \frac{1}{\ln(n/(\nu+\varepsilon))}$$

$$\frac{n}{\ln(1/|a_n|)}\le\frac{\rho}{\ln(n/(\nu+\varepsilon))}$$

esto es, $$\frac{n\ \ln n}{\ln(1/|a_n|)}\le\frac{\rho\ln n}{\ln n-\ln(\nu+\varepsilon)}=\frac{\rho}{1-\frac{\ln(\nu+\varepsilon)}{\ln n}}$$

que por el teorema anterior, prueba que el orden de la función es a lo más, ρ; (siempre que ν sea finito). Análogamente, si ν no es cero y $\varepsilon>0$, existe una sucesión n_k de n (a la que se le llamará n para simplificar notación) para la cual

$$n|a_n|^{\rho/n}\ge\nu-\varepsilon$$

y así mismo $$\frac{n\ \ln n}{\ln(1/|a_n|)}\ge\frac{\rho}{1-\frac{\ln(\nu-\varepsilon)}{\ln n}}$$

porque

$$|a_n|^{\rho/n}\ge\frac{\nu-\varepsilon}{n}$$

$$\frac{\rho}{n}\ln|a_n|\ge\ln\left(\frac{\nu-\varepsilon}{n}\right)$$

$$\ln(1/|a_n|)\le\frac{n}{\rho}\ln\left(\frac{n}{\nu-\varepsilon}\right)$$

$$\frac{n}{\ln(1/|a_n|)}\ge\frac{\rho}{\ln n-\ln(\nu-\varepsilon)}$$

mayor mientras mayor sea su grado; y éste nos dice exactamente cuántos ceros tiene.

Por otra parte la factorización de Weierstrass establece una analogía muy clara entre los polinomios y las funciones enteras. Considerando estos dos hechos resulta un poco más natural estudiar su relación. En el teorema de Jensen se tiene un ejemplo muy claro en este sentido.

23. Preliminares. Si f es una función entera de orden finito, sea m la multiplicidad de $z=0$ para f (i.e. $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ y $f(z)$ tiene un cero en cero de orden m) entonces

$$f(z) = z^m g(z)$$

con g entera y tal que $g(0) = \alpha \neq 0$;

de aquí, $f(z) = \dfrac{z^m}{\alpha}\, g_1(z)$ donde $g_1(z) = \dfrac{1}{\alpha} g(z)$ y es entera.

Lema. El orden de g_1 y el de f coinciden. Y en particular, g y g_1 tienen orden finito.

Demostración. Si f es un polinomio g_1 lo es y se habrá terminado. En caso contrario,

$$\frac{\ln \ln M(f,r)}{\ln r} = \frac{\ln \ln\big((r^m/|\alpha|)M(g_1,r)\big)}{\ln r}$$

$$= \frac{\ln\big(m\ln r + \ln M(g_1,r) - \ln|\alpha|\big)}{\ln r} \qquad \ldots(1)$$

por una parte, como asintóticamente $m\ln r - \ln|\alpha|>0$ (1) es mayor o igual que $\dfrac{\ln \ln M(g_1,r)}{\ln r}$

pero por otra, como también de modo asintótico, (1) es menor o igual que

$$\frac{\ln(3\ln M(g_1,r))}{\ln r} = \frac{\ln 3 + \ln \ln M(g_1,r)}{\ln r}$$

pues g_1 es una función entera y ya se tiene 1.5, se concluye que

$$\rho_{g_1} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln M(g_1,r)}{\ln r} \le \rho_f \le \overline{\lim_{r\to\infty}}\Big(\frac{\ln 3}{\ln r} + \frac{\ln \ln M(g_1,r)}{\ln r}\Big) = \rho_{g_1} \qquad \|$$

24. Lema. Sean f y g_1 como en 1.23.

Entonces el tipo de f y el tipo de g_1 son iguales.

Demostración. Sea $\rho = \rho_f = \rho_{g_1}$ (por 1.23).

$$\sigma_f = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(f,r)}{r^{\rho}}$$

pero, nuevamente

$$(\text{pues } (\frac{\nu+\varepsilon}{\nu+2\varepsilon})^{\rho}<1).$$

Resumiendo:

$$|f(z)| \le (\nu+2\varepsilon)r^{\rho}\exp\{\frac{r^{\rho}(\nu+\varepsilon)}{e\rho}\} + 1 \le \exp\{\frac{r^{\rho}(\nu+2\varepsilon)}{e\rho}\}$$

esto es, $M(r) \le \exp\{\frac{\nu+2\varepsilon}{e\rho}\, r^{\rho}\}$ donde ε es arbitrario, lo que indica que el tipo de f, τ es tal que:

$$\tau \le \frac{\nu}{e\rho} \qquad \text{si} \quad 0 \le \nu < \infty .$$

Por otra parte, si $\nu \in [0,\infty]$, para probar que $\tau \ge \frac{\nu}{e\rho}$ se observa que (i) $|a_n| \ge \{\frac{(\nu-\varepsilon)}{n}\}^{n/\rho}$ para una infinidad de $n \in \mathbb{N}$ y para cada ε positivo y menor que ν.

Si ν es ∞, ε se toma como un número arbitrariamente grande.

Sea r_n tal que $r_n^{\rho} = \frac{ne}{\nu-\varepsilon}$ (donde cada n es de las que cumplen (i), claro) y $n=\frac{(\nu-\varepsilon)r^{\rho}}{e}$ (despejando)

además si esas n son tomadas en orden creciente,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$ y se ve, por 1.2 y (i) que:

$$M(r_n) \ge |a_n| r_n^n \ge \{\frac{r_n^{\rho}(\nu-\varepsilon)}{n}\}^{n/\rho} = e^{n/\rho} = e^{(\nu-\varepsilon)r_n^{\rho}/e\rho}$$

y por lo tanto (por la definición de τ) $\tau \ge \nu/e\rho$ ‖

21. Observación. Cabe mencionar que Boas [1] en la demostración de este teorema, comete un error. Afirma que

$$\frac{n\ \ln n}{\ln(1/|a_n|)} \le \frac{\rho}{1-\ln((\nu+\varepsilon)/n)}$$

en lugar de (3). En caso de ser cierto, estaría afirmando que

$$0 \le \mu = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ \ln n}{\ln(1/|a_n|)} = 0$$

esto es, que cada función de orden finito tiene orden igual a cero.

22. Desigualdades importantes.

Teorema de Jensen.

Introducción.

La relación entre la distribución de los ceros de una función entera con su orden de crecimiento es un tema que ha sido estudiado por Borel, Hadamard, Lindelöf y Levin; entre otros.

Es claro que existe esta relación pues analizando a los polinomios se ve que su crecimiento (en módulo) hacia infinito es

Como $\Gamma \cup \nu$ es un contorno cerrado donde h es analítica,

y $\dfrac{h(z)}{z}$ también pues $h(0) = 0$,

$$\int_{\Gamma\cup\nu} \frac{h(z)}{z}\, dz = 0$$

Esto es $$\int_{\Gamma} \frac{\ell og(1 - z)}{z} dz = - \int_{\nu} \frac{h(z)}{z}\, dz$$

se probará que la parte real del lado izquierdo de la ecuación tiende a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ell n\,|1 - e^{i\theta}|\, d\theta$$

y que el lado derecho de la misma tiende a cero conforme delta tiende a cero.

$$\int_{\Gamma} \frac{\ell og(1-z)}{z} dz = \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{\ell og\left(1 - e^{i\theta}\right)}{2\pi i e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \ell og(\,|1-e^{i\theta}|\,) d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \arg|1-e^{i\theta}|\, d\theta$$ ||

Por otra parte se considerará a:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\nu}\left|\frac{h(z)}{z}\right| dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left|\frac{\ell og(1-1-re^{i\theta})}{1+re^{i\theta}} ire^{i\theta}\right| d\theta = \frac{r}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left|\frac{\ell og(-re^{i\theta})}{1+re^{i\theta}}\right| d\theta$$

Ahora bien, $|1+re^{i\theta}|$ se puede hacer estrictamente mayor que $1/2$ (si $\delta<\pi/6$, por ejemplo) de tal modo que el último término indicado sea menor o igual que

$$\frac{r}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}|\ell og(-re^{i\theta}) d\theta = \frac{r}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}|\ell n\ r + i(\theta+\pi)|\, d\theta$$

pues $\arg(-re^{i\theta}) = \theta + \pi$; y esto último es menor o igual que

$$\frac{r}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}|\ell n\ r|\, d\theta + \frac{r}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}|\theta + \pi|\, d\theta = \frac{2r}{\pi}|\ell n\ r|\alpha + \frac{2r}{\pi}\left(\frac{\alpha^2}{2} + \pi\alpha\right)$$

donde la segunda integral se obtiene mediante un cambio de variable o bien observando que el integrando es positivo pues $|\alpha|<\pi/2$

Pero lo interesante es que si δ tiende a cero α también tiende a cero (basta ver la figura), y entonces, recopilando, se llega a que:

$$M(f,r) = \frac{r^m}{|\alpha|} M(g_1,r)$$

por lo cual

$$\frac{\ln M(f,r)}{r^\rho} = \frac{m \ln r}{r^\rho} + \frac{\ln M(g_1,r)}{r^\rho} - \frac{\ln|\alpha|}{r^\rho}$$

esto es,

$$\sigma_f = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(f,r)}{r^\rho} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \left(\frac{m \ln r}{r^\rho} + \frac{\ln M(g_1,r)}{r^\rho} - \frac{\ln|\alpha|}{r^\rho}\right) =$$

$$= \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(g_1,r)}{r^\rho} = \sigma_{g_1}$$

porque el límite existe para los otros dos sumandos y es, en efecto, cero.

25. Ambos lemas prueban que al referirse al orden y al tipo de una función puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que $f(0)=1$ lo que,como se verá más adelante simplifica el teorema de Jensen.

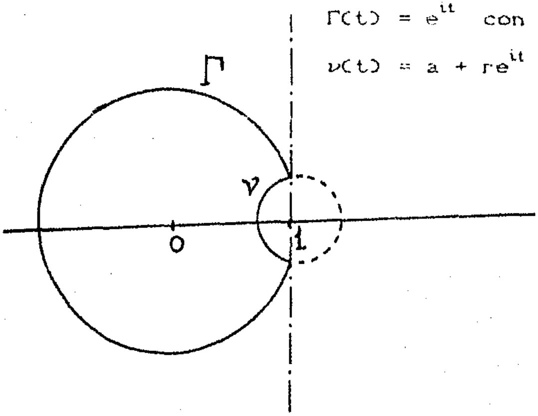
26. Lema.

$$\int_0^{2\pi} \ln|1-e^{i\theta}|d\theta = 0$$

Demostración.

Sean: $\Omega = \{z\in\mathbb{C}\text{: Re } z < 1\}$, que es simplemente conexo.
$f(z) = 1 - z$
f no tiene ceros en Ω, por lo cual
existe h analítica en Ω y tal que $f(z) = e^{h(z)}$.
h es única si además se elige de modo que $h(0)$ sea cero.
Así, en Ω, $\log f(z) = h(z) = \log(1 - z)$.

Ahora bien, se consideran dos contornos, si $\delta > 0$



$\Gamma(t) = e^{it}$ con $t\in(\delta, 2\pi-\delta)$

$\nu(t) = a + re^{it}$ donde a y r son tales que pasa exactamente lo que se ve en el dibujo: $r = r(\delta)$

$\nu: (-\alpha, \alpha)\to\mathbb{C}$

$\nu(-\alpha) = e^{-i\delta}$

$\nu(\alpha) = e^{i\delta}$

$a = 1$ (de hecho cada punto en $\mathbb{R}$ puede ser centro pero hacer $a=1$ simplifica notación).

(ii) Si $z=0$, $\left|\dfrac{z_{m+k}}{z_{m+k}-z}\right| = 1$ trivialmente.

(iii) g es analítica en todos aquellos puntos donde f lo es.

(iv) Existe una vecindad de cero de radio mayor que r de tal modo que g no se anula en ella; esto es, $\exists\varepsilon>0$ tal que $g(z)\neq 0$ para cada $z\in D_{r+\varepsilon}$.

Sin pedir una vecindad mayor que r, era trivial. (De lo contrario, f tendría más ceros).

(iv) es válido pues si $\delta(A,z)$ denota el ínfimo del conjunto $\{|z-a|: a\in A\}$, se tiene que, si ω es el cero z_{N+1},

$\delta(\bar{D}_r,\omega)>0$ porque $\bar{D}_r$ es compacto.

Basta considerar $\varepsilon=\dfrac{\delta(\bar{D}_r,\omega)}{2}$ para construir dicha vecindad.

(v) $\log|g|$ es armónica en $D_{r+\varepsilon}$ y por ello (por ser la parte real de h donde $g=e^h$ con h analítica)

$$\log|g(0)|= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|g(re^{it})|\delta t.$$

Resta probar que $|g(0)| = |f(0)|\prod_{n=1}^{N}\dfrac{r}{|z_n|}$ y que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log|g(re^{it})|dt = \int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{it})|dt$$

Como $g(0) = f(0)\dfrac{r}{z_1}\,\dfrac{r}{z_2}\cdots\dfrac{r}{z_m}\,\dfrac{r}{z_{m+1}}\cdots\dfrac{r}{z_N} = \prod_{n=1}^{N}\dfrac{r}{z_n}\,f(0)$,

lo primero es evidente, y para lo segundo se observa que

$$|g(re^{i\theta})| = |f(re^{i\theta})|\ 1\ldots 1\ \left|\frac{z_{m+1}}{z_{m+1}-re^{i\theta}}\right|\cdots\left|\frac{z_N}{z_N-re^{i\theta}}\right|$$

y si $z_k=re^{i\theta(k)}$ $k\in\{m+1,\ldots,N\}$

$$|f(re^{i\theta})|\prod_{k=m+1}^{N}\left|\frac{e^{i\theta(k)}}{e^{i\theta(k)}-e^{i\theta}}\right| = |f(re^{i\theta})|\prod_{k=m+1}^{N}|1-e^{i(\theta(k)-\theta)}|$$

Así,

$$\log|g(re^{i\theta})| = \log|f(re^{i\theta})| + \sum_{k=m+1}^{N}\log(1-e^{i(\theta(k)-\theta)})$$

que, al integrar, y por el lema recién probado,(1.26) se obtiene la igualdad buscada. ‖

$$\left|\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \log|1-e^{i\theta}|\,d\theta + i\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\arg(1-e^{i\theta})\,d\theta\right| = \left|\int_{\nu} \frac{h(z)}{z}\,dz\right| \le \int_{\nu} \left|\frac{h(z)}{z}\right| dz =$$

$$= \alpha\left\{\frac{2r}{\pi}\left(|\ln r| + \frac{\alpha}{2}+\pi\right)\right\}$$

y es claro que si δ tiende a cero el lado derecho tiende a cero, y por tanto

$$\lim_{\delta\to 0} \operatorname{Re} \int_{\nu(\delta)} \log(1-e^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta}|\,d\theta = 0$$

27. Primer teorema de Jensen.

Sea $f\in\mathcal{H}(D_R)$; $0<r<R$ y tal que f no se anula en cero. Se llamarán $z_1, z_2, \dots, z_N$ a los ceros de f en la cerradura del disco D_r aparecerán en la lista tantas veces como su multiplicidad y ordenados con módulo creciente.

Así, se supondrá que $\{z_1,\dots,z_m\}\subseteq D_r$ y $\{z_{m+1},\dots,z_N\}\subseteq\delta D_r$.

Entonces

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{N}\frac{r}{|z_n|} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{it})|\,dt\right)$$

28. Demostración. Se construye

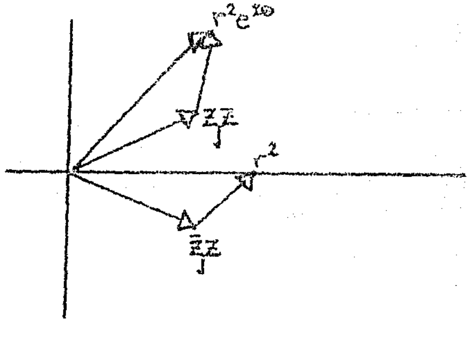
$$g(z) = f(z)\frac{r^2-\bar{z}_1 z}{r(z_1-z)}\,\frac{r^2-\bar{z}_2 z}{r(z_2-z)}\cdots\frac{r^2-\bar{z}_m z}{r(z_m-z)}\,\frac{z_{m+1}}{(z_{m+1}-z)}\cdots\frac{z_N}{(z_N-z)}$$

28.1 Observaciones:

(i) Si $|z|=r$, $z=re^{i\varphi}$ $\left|\frac{r^2-\bar{z}_j z}{(z_j-z)}\right| = 1$ pues ambos lados son $\left|\frac{r^2-\bar{z}_j z}{r(z_j-z)}\right| =$

$$= \left|\frac{r(r-r_j e^{i(\varphi-\varphi(j))})}{r(r_j e^{i\varphi(j)}-re^{i\varphi})}\right| = 1$$

y el denominador es una rotación del numerador.



Pues $$\sum_{m=1}^{N-1} \ln \left(\frac{r_{m+1}}{r_m}\right)^m + \ln \left(\left(\frac{r}{r_N}\right)^N\right) = \ln \prod_{m=1}^{N-1}\left(\frac{r_{m+1}}{r_m}\right)^m \frac{r^N}{r_N^N} =$$

$$= \ln \frac{r^N}{r_1 r_2 \dots r_N}$$

Por otra parte, $$\int_a^b \frac{dt}{t} = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$$

Así, para $r_o=0$ $$\int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt = \sum_{j=o}^{N-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{n(t)}{t}\, dt + \int_{r_N}^{r} \frac{n(t)}{t}\, dt$$

Y se hace esto pues precisamente, si $r_j \le t < r_{j+1}$; $n(t) = j$

$$j\int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{dt}{t} = \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{n(t)}{t} dt = j(\ln(r_{j+1}) - \ln(r_j)) \quad \dots(2)$$

De (1) y (2), se tiene precisamente lo buscado.

Ya con este teorema, se podrán probar más propiedades del orden y el tipo de una función.

31. Más sobre los teoremas de Jensen:

Se harán algunas observaciones:

Si $f(z)\neq 0$ en D_R entonces

$$\int_0^R \frac{n_f(t)}{t}\, dt = 0$$ y se recupera lo que es directo de la fórmula integral de Cauchy:

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(|f(re^{i\theta})|)d\theta$$

Si $f(z)$ sí tiene ceros, como $n_f(t)>0$ para algunos valores de t se concluye que, en particular,

$$\ln|f(0)| < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(|f(re^{i\theta})|)d\theta$$

Segundo teorema de Jensen ó Fórmula de Jensen.

29. Introducción.

Por el primer teorema de Jensen es claro que si f es entera y no es cero en D_R, entonces $\log|f|$ es una función armónica que satisface para $0<r<R$:

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta$$

Por otra parte, si $f(0) = 1$ y f tiene ceros (ordenados como siempre) en D_r $z_1,\ldots,z_N$, entonces

$$\prod_{k=1}^{N}\frac{r}{|z_k|} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{it})|dt\right\}$$

Sea (como siempre) $n_f(r)$ el número de ceros de f en D_r.

Entonces; por el primer teorema de Jensen,

$$M_f(2r) \geq \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(2re^{it})|dt\right) = \prod_{n=1}^{n_f(2r)}\frac{2r}{|z_n|} \geq \prod_{n=1}^{n_f(r)}\frac{2r}{|z_n|} \geq 2^{n_f(r)}$$

Porque la segunda expresión es $|f(0)|$ y $\frac{2r}{|z_k|} \geq 2$.

Así, el orden y la distribución de los ceros de una función analítica, están relacionados. Hay una forma más precisa que los relaciona y se conoce como fórmula de Jensen. Es la siguiente:

30. Fórmula de Jensen.

$$N(r) = \int_0^r\frac{n(t)}{t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta - \log|f(0)|$$

Donde la primera igualdad define a $N(r)$.

Demostración.

Por el primer teorema, resta sólo probar que

$$\ln\frac{r^N}{r_1r_2\ldots r_N} = \int_0^r\frac{n(t)}{t}dt$$

$$\ln\frac{r^N}{r_1r_2\ldots r_N} = N\ln r - \sum_{n=}^{N}\ln r_n =$$

$$= \sum_{m=1}^{N-1}\{m(\ln r_{m+1} - \ln r_m)\} + N(\ln r - \ln r_N) \qquad \ldots(1)$$

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt \le \ln M(r) \le (\tau+\varepsilon)r^{\rho} \qquad \ldots(1)$$

supongamos que $\exists T_0 \in R$ tal que: $n(t) \ge \sigma t^{\rho}$ (con $\sigma>0$ fijo) se cumple para cada $t \ge T_0$

En este caso si $t \ge T_0$ y $r>t$

$$\sigma\left(\frac{r^{\rho}}{\rho} - \frac{t^{\rho}}{\rho}\right) = \sigma\left(\int_t^r t^{\rho-1}dt\right) = \sigma\int_t^r \frac{t^{\rho}}{t}dt \le \int_t^r \frac{n(t)}{t}\,dt \qquad \ldots(2)$$

de (1) y (2) se concluye que, asintóticamente,

$$\frac{1}{r^{\rho}}\int_0^t \frac{n(t)}{t}dt + \frac{\sigma}{r^{\rho}}\left(\frac{r^{\rho}-t^{\rho}}{\rho}\right) \le \tau+\varepsilon$$

$$\frac{1}{r^{\rho}}\left[\int_0^t \frac{n(t)}{t}dt - \frac{\sigma t^{\rho}}{\rho}\right] + \frac{\sigma}{\rho} \le \tau + \varepsilon$$

casi finalmente, $\frac{\sigma}{\rho} \le \tau + \frac{\varepsilon}{2}$ si $r>$ Ro, pues la expresión entre paréntesis cuadrados es un real fijo.

Pero esta última desigualdad es independiente de r, con lo cual se concluye que $\frac{\sigma}{\rho} \le \tau$ $\qquad\ldots(3)$

Ahora se revisará qué se ha probado en realidad.

Si $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r^{\rho}} > \tau\rho$, se puede elegir $\lambda>0$ tal que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r^{\rho}} > \sigma > \tau\rho \qquad \ldots(4)$$

Esto es, que existe T_0 tal que $\frac{n(t)}{t^{\rho}} > \sigma$ siempre que $t>T_0$.

Precisamente se retoma la suposición hecha el párrafo anterior: que $n(t) \ge \sigma t^{\rho}$ (asintóticamente).

Así, por (3) y (4) $\tau\rho<\sigma \le \tau\rho$ lo cual es una contradicción, que viene de suponer que $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r^{\rho}} > \tau\rho$, y por ello se tiene (ii)

32. Relación entre orden, tipo y teorema de Jensen.

Lema. Si f es entera y de orden finito ρ, entonces

$$n(r) = O(r^{\rho+\varepsilon}) \quad \text{para cada} \quad \varepsilon>0.$$

Dem. Si $\varepsilon>0$ entonces asintóticamente

$$|f(re^{i\theta})| \le e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

Claramente $\ln|f(re^{i\theta})| \le r^{\rho+\varepsilon}$ para $r\ge R$.

Así, existe $K>0$ tal que

$$\ln|f(re^{i\theta})| \le Kr^{\rho+\varepsilon} \quad \text{para toda } r\in\mathbb{R}. \qquad \ldots(1)$$

(Basta tomar $K = \max\limits_{0\le r\le R}\{1, \ln|f(re^{i\theta})|\}$)

Esto prueba que $n(r) \le Kr^{\rho+\varepsilon}$

Se verá por qué:

Como $n(r)$ es una función monótona creciente en r

$$\int_r^{2r}\frac{n(t)}{t}dt \ge n(r)\int_r^{2r}\frac{dt}{t} = n(r)\ln 2 \qquad \ldots(2)$$

De (1), (2) y de la fórmula de Jensen, -se supondrá $f(0)=1$- (esto no cambia el orden, por 1.23)

$$n(r)\ln 2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta \le \frac{1}{2\pi}2\pi Kr^{\rho+\varepsilon}=Kr^{\rho+\varepsilon},$$

que es exactamente lo que se quería probar.

De hecho, se tiene más aún. Sea f una función entera, $f(0)=1$.

33. Teorema. Si f es de orden $\rho>0$ y su tipo es $\tau < \infty$; entonces:

(i) $$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{n(r)}{r^{\rho}} \le e\tau\rho$$

(ii) $$\underline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{n(r)}{r^{\rho}} \le \tau\rho$$

Demostración. Esta primera parte es común a ambos incisos.

Si $\varepsilon>0$, entonces, asintóticamente, $\ln M(r) \le (\tau+\varepsilon)r^{\rho}$

Por el teorema de Jensen

$$\int_0^{r}\frac{n(t)}{t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\, d\theta \le \ln M(r)$$

esto es, asintóticamente

entonces

(i) Si $n(r) = o\ (r^{\rho})$ entonces el tipo de f es cero.

(ii) Si $n(r) = O\ (r^{\rho})$ entonces el tipo de f es finito.

La prueba de este teorema se dará un poco más adelante, pues se necesita conocer la relación entre orden, tipo y los factores de la factorización de Weierstrass.

Para probar el inciso (i) basta analizar cuidadosamente las siguientes cuentas: Sea $\beta\in\mathbb{R}^{+}$

como $\displaystyle\int_r^{r\beta}\frac{dt}{t} = \ln\beta$, y $n(t)$ es una función no decreciente,

$$n(r)\ln\beta = n(r)\int_r^{r\beta}\frac{dt}{t} \leq \int_r^{r\beta}\frac{n(t)}{t}\,dt \leq \int_0^{r\beta}\frac{n(t)}{t}\,dt \leq (\tau+\varepsilon)(r\beta)^{\rho}$$

donde la última desigualdad se probó al principio de la demostración.

Resumiendo (y despejando)

$$\frac{n(r)}{r^{\rho}} \leq (\tau + \varepsilon)\,\frac{\beta^{\rho}}{\log\beta}$$

Como la función $f(t) = \dfrac{t^{\rho}}{\log t}$ $f\colon 1,\infty) \to \mathbb{R}$ alcanza su mínimo en

$$t=e^{1/\rho}$$

$$\frac{n(r)}{r^{\rho}} \leq (\tau+\varepsilon)\,\frac{(e^{1/\rho})^{\rho}}{\log(e^{1/\rho})} = \rho e(\tau+\varepsilon)$$

Esto es, $\displaystyle\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{n(r)}{r^{\rho}} \leq \tau\rho e$ $\|$

34. Corolario.

Si f es entera de orden ρ, entonces:

i) Si el tipo de f es cero, $n(r) = o(r^{\rho})$
ii) Si el tipo de f es finito, $n(r) = O(r^{\rho})$

Aplicando el teorema anterior

$$0 \leq \overline{\lim}\ \frac{n(r)}{r^{\rho}} \leq 0 \qquad\qquad \text{ó } \leq e\rho\tau \text{ para (ii)}$$

Esto es, $\lim \dfrac{n(r)}{r^{\rho}}$ existe y es cero $\qquad$ $\dfrac{n(r)}{r^{\rho}}$ permanece acotada si r es grande

$\therefore\ n(r) = o(r^{\rho})$ $\qquad\qquad$ $\therefore\ n(r) = O(r^{\rho})$

Más aún, de hecho existe otra forma (seguramente igual de impráctica) de caracterizar a las funciones de tipo finito:

35. Teorema. Si f es entera de orden ρ y ρ no es un número entero

en cada región acotada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)$$

es una serie que converge absolutamente porque

$$\left|\log E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| \leq \sum_{K=p+1}^{\infty} \left|\frac{z}{z_n}\right|^K$$

$$\text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty.$$

5. Definición. Si p es el mínimo número natural para el que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}} \quad \text{converge, entonces a}$$

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)$$

se le llama el producto canónico asociado a $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y p se llama el género del producto canónico.

Se probará, por ejemplo, que el teorema 2.4 se aplica a todas las funciones cuyo crecimiento no sea demasiado rápido; esto es, se darán relaciones explícitas entre género y orden de una función entera.

6. Teorema. Si $f(z)$ es una función entera de orden ρ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sus ceros distintos de cero ordenados como siempre y $t>\rho$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^t}$$

es una serie convergente.

Demostración.

Sea $t>\rho$ y $\beta\in(\rho,t)$.

Por el teorema 1.34 $n(r) = O(r^{\rho+\varepsilon})$ para cada $\varepsilon>0$ y, en particular, $n(r) \leq Ar^{\beta}$ para alguna $A\in\mathbb{R}$ y $\beta\in\mathbb{R}$.

Si ahora $r = |z_n|$, como los ceros de f están ordenados en módulo creciente, $n\leq n(r)$ (aunque sobre esta desigualdad Young [14] afirma igualdad estricta, no es cierta).

Así

$$n \leq A|z_n|^{\beta} \quad \text{para cada } n\in\mathbb{N}; \text{ esto es, que}$$

$$A^{-t/\beta}\frac{1}{|z_n|^t} \leq \frac{1}{n^{t/\beta}}$$

y por lo tanto, como $t/\beta>1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{t/\beta}}$ converge y se concluye lo deseado.

CAPITULO II

Factores de Weierstrass.

Notación.

A partir de este momento y solo por este capitulo al hacer referencia a las funciones (f, g, φ) se entenderá que son funciones enteras aunque llegue a omitirse. Si se trata de alguna función no entera se hará mención explícita de ello.

Se retomará la notacion utilizada para el teorema de Weierstrass: Sea f una función entera con ceros distintos de cero en z_1, z_2,... y con $m\in\mathbb{Z}$ como multiplicidad del cero.

Del teorema de Weierstrass (que está probado en el apéndice)

$$f(z) = z^m e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)e^{P_{(n)}(z)} \qquad \ldots(1)$$

con g entera y

$$P_n(z) = \sum_{K=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^K$$

Sin embargo el grado de P_n es n y esto hace que la factorización no sea muy manejable. Existe otra factorización alternativa que optima este aspecto, aunque no es válido para cualquier función.

2. Teorema. Si existe un número natural p tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^{p+1}} < \infty$$

entonces

$$f(z) = z^m e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)$$

donde los factores E son los polinomios primarios de Weierstrass

$$E(u, t) = (1-u)\exp\left(u + \frac{1}{2}u^2+\ldots+\frac{1}{t}u^t\right)$$

y en este caso se dice que f tiene género finito.

3. Observaciones. A la factorización dada en 2 se le conoce como factorización canónica. En ésta, el grado de los polinomios primarios es un natural fijo p y en muchos casos hace más manejable al producto infinito.

4. Demostración (de 2.2).

Como $\log E\left(\frac{z}{z_n}, p\right) = \log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + \frac{z}{z_n} + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{z_n}\right)^p =$

$$= -\sum_{K=p+1}^{\infty}\frac{1}{K}\left(\frac{z}{z_n}\right)^K$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^t}$. Por ejemplo, $\{n^{1/\lambda}\}$ y

$\{(n^2 \ell n^2 n)^{1/\lambda}\}$ tienen exponente de convergencia λ pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\lambda}}$

diverge para la primera sucesión y converge para la segunda.

(iv) Es inmediato de la definición de λ que para $t<\lambda$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^t}$ diverge; y converge si $\lambda<t$.

10. Observaciones.

La desigualdad de Hadamard, $\lambda\leq\rho$ es válida para cada función entera. Pero si ésta es un producto canónico entonces coinciden. Este resultado se debe a Borel y se enunciará del siguiente modo:

11. Teorema. El orden de un producto canónico es igual al exponente de convergencia de sus ceros.

Demostración.

Sea $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E(\frac{z}{z_n}, p)$ un producto canónico (de género p, claro). Si ρ es su orden y λ el exponente de convergencia de sus ceros; ya se sabe que $\lambda\leq\rho$, por lo que basta probar que $\rho\leq\lambda$.

Si z es un número complejo, $|z| = r$ y $r_n = |z_n|$ para cada $n\in\mathbb{N}$ se tiene que

$$\ell og|P(z)| = \sum_{r_n\leq 2r} \ell og\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| + \sum_{r_n>2r} \ell og\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right|$$

El segundo tramo de la serie está acotado por una serie geométrica y por ello (si $|u|\leq 1/2$)

$$\ell og|E(u,p)| \leq 2|u|^{p+1}$$

Así

$$\sum_{r_n>2r} \ell og\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| \leq 2\sum_{r_n>2r} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1} = 2r^{p+1}\sum_{r_n>2r} \frac{1}{r_n^{p+1}}$$

Caso 1. Si $\lambda = p+1$

$$2r^{p+1}\sum_{r_n>2r} \frac{1}{r_n^{p+1}} = O(r^{p+1}) = O(r^{\lambda}) .$$

Caso 2. Si $\lambda<p+1$, sea $\varepsilon>0$ tal que $\lambda+\varepsilon<p+1$ y en este caso

$$2r^{p+1}\sum_{r_n>2r} \frac{1}{r_n^{p+1}} = 2r^{p+1}\sum_{r_n>2r} \frac{r_n^{\lambda+\varepsilon}}{r_n^{p+1+\lambda+\varepsilon}} <$$

7. Corolario. Si $f(z)$ es una función entera de orden ρ, entonces tiene una factorización canónica y el género del producto canónico, p satisface que $p \le \rho$.

La demostración es elemental: basta elegir $q = [\rho]$ para que $q+1>\rho$ y se aplica el teorema anterior (2.5), para concluir que $p \le q \le \rho$.

Así, si f es entera de orden ρ con ceros distintos de cero $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entonces

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)$$

donde el producto es canónico de género p y $p \le \rho$.

8. Definición. Si $(z_n)_{n\in J}$ $J\subset\mathbb{N}$ es una sucesión en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, al ínfimo de los reales $\alpha>0$ para los que la serie

$$\sum_{n\in J} \frac{1}{|z_n|^{\alpha}} \quad \text{es convergente}$$

se le denomina el <u>exponente de convergencia</u> de la sucesión $(z_n)_{n\in J}$ y se denota λ.

Si para cada real positivo α se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\alpha}} = +\infty$$

entonces se conviene en que $\lambda=\infty$.

Si J es finito $\lambda=0$, por la misma definición de λ.

9. Observaciones y ejemplos.

Por ejemplo los exponentes de convergencia de las sucesiones

$\{e^n\}$, $\{n^{1/\lambda}\}$ y $\{\log n\}$ son 0, λ e ∞ respectivamente.

Se pueden observar las siguientes relaciones para los parámetros conocidos (referidos a una función fija, por supuesto):

(i) $\lambda \le \rho$ (por 2.6)

(ii) $p \le \lambda \le p+1$

Más aún: si $\lambda \notin \mathbb{Z}$, entonces $p = [\lambda]$; pero si λ es entero hay una ambiguedad:

$p=\lambda$ si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\lambda}}$ diverge mientras que

$p=\lambda-1$ si esta serie converge.

(iii) Si $t=\lambda$, no se puede afirmar nada sobre la convergancia o divergencia de

Una función entera es de <u>tipo exponencial</u> si existen constantes $A, B \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$|f(z)| \leq Ae^{B|z|}$$

Si $f(z)$ es de tipo exponencial entonces se define su <u>tipo exponencial</u> como K, donde

$$K = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r}$$

Si el orden de una función φ es uno entonces su tipo exponencial coincide con su tipo (por 1.11). Si una función entera tiene orden $\rho<1$ entonces es de tipo exponencial cero (aunque su <u>tipo</u> sea $\tau\neq 0$).

El siguiente resultado es un teorema de Young ([14]), prueba que el máximo módulo de $1/P(z)$ tiene el mismo orden de crecimiento que $P(z)$ y sirve como lema para el teorema de Hadamard.

14. Teorema. Si $P(z)$ es un producto canónico de orden ρ entonces para cada $\varepsilon>0$

$$|P(z)|>e^{-r^{\rho+\varepsilon}}$$

en una sucesión de círculos $|z|=r$ de radios arbitrariamente grandes.

Demostración. Sea $P(z)$ un producto canónico de género p y orden ρ formado con la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sea $h>\rho$ arbitrario y fijo.
Se define como U_n (para cada natural n)

$$U_n = \{z \in \mathbb{C}: |z-z_n| \leq \frac{1}{|z_n|^h}\}$$

al círculo con centro en z_n y radio $\dfrac{1}{|z_n|^h}$.

Se probará que $|P(z)|>\dfrac{1}{e^{r^{\rho+\varepsilon}}}$ para cada $\varepsilon>0$ si z no pertenece a ningún U_n y $|z| = r$ es suficientemente grande; esto es, si $r>r(\varepsilon, h)$.

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^h} < \infty$ es una suma convergente (por 2.11) la unión de los discos U_n no cubre $\mathbb{C}$, esto es, $\mathbb{C}-\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ no es vacío y contiene círculos $|z| = r$ de radios arbitrariamente grandes.

$$< 2r^{p+1}(2r)^{\lambda+\varepsilon-p-1}\sum_{r_n>2r}\frac{1}{r_n^{\lambda+\varepsilon}} = O(r^{\lambda+\varepsilon})$$

Para el primer tramo de la serie también se consideran dos casos:

Caso 1. Si $p>0$

como $\log|E(u,p)| \le \log|1-u| + |u| + \frac{|u|^2}{2} + \dots + \frac{|u|^p}{p}$

si $|u| \ge \frac{1}{2}$

$$|u|^K \le 2^{p-K}|u|^p \qquad \text{para} \quad K \in \{1,\dots,p\}$$

y así

$$\log|E(u,\ p)| \le \log|1-u| + 2^p|u|^p \le 2^{p+1}|u|^p$$

Si ahora ε es un número positivo

$$\sum_{r_n\le 2r}\log|E(u,\ p)| = O\Big(\sum_{r_n\le 2r}\big(\frac{r}{r_n}\big)^p\Big) = O\Big(r^p\sum_{r_n\le 2r}\frac{r_n^{\lambda+\varepsilon}}{r_n^{p+\lambda+\varepsilon}}\Big)=$$

$$= O\Big(r^p(2r)^{\lambda+\varepsilon-p}\sum_{r_n\le 2r}\frac{1}{r_n^{\lambda+\varepsilon}}\Big) = O(r^{\lambda+\varepsilon})$$

Caso 2. Si $p = 0$

$$\log|E(u,\ 0)| = O(|u|^{\varepsilon})$$

para cada $\varepsilon>0$.

Retomando el tramo recién analizado de la serie se tiene que

$$\log|P(z)| = O(r^{\lambda+\varepsilon})$$

y que esta desigualdad es válida para cada ε positiva y pequeña, y por lo tanto $\rho \le \lambda$ (por la definición de orden, 1.8).

12. Observaciones. Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{C}$ tal que $z_n \ne 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z_n|}$ es convergente (lo cual implica de paso que no tiene puntos de acumulación finitos) entonces el producto canónico de género cero

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z}{z_n}\Big)$$

es una función con orden a lo más uno (por el teorema de Borel, 2.11)

13. Comentarios. Algunos autores (Young, por ejemplo [14]) definen más parámetros aún para el crecimiento de las funciones enteras, como por ejemplo las siguientes:

$$\phi(0) = 0, \text{ y si } f(z) = u(z) + i\upsilon(z)$$

entonces la norma de ϕ es

$$|\phi(z)|^2 = \frac{u^2 + \upsilon^2}{(2A(R) - u)^2 + \upsilon^2} \leq 1$$

porque $\quad -2A(R) + u \leq u \leq 2A(R) - u \quad$ y por lo tanto

$$|\phi(z)| \leq \frac{r}{R} \qquad \text{con } r = |z|. \qquad \ldots(2)$$

Esta última desigualdad se debe al lema de Schwarz pero se probará para este caso particular.

Como $\phi(0) = 0$ y $|\phi(z)| \leq 1$ en D_R; si $\psi(z) = \dfrac{\phi(z)}{z}$ entonces ψ es analítica en D_R y $|\psi(z)| \leq \dfrac{1}{R}$ en $\{|z|=R\}$

y por lo tanto en todo D_R, esto es, que

$$\frac{|\phi(z)|}{|z|} = |\psi(z)| \leq \frac{1}{R}$$

si ahora $r = |z|$

$$|\phi(z)| \leq \frac{r}{R} \qquad \|$$

Despejando $f(z)$ de (1) y usando (2) se obtiene que

$$|f(z)| = \left|\frac{2A(R)\phi(z)}{1+\phi(z)}\right| \leq \frac{2A(R)r}{R-r}$$ y se prueba el teorema para este caso.

Si $f(0)$ no es cero se aplica el resultado anterior a $f(z) - f(0)$:

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|\leq R} \operatorname{Re}\left[f(z) - f(0)\right] \leq \frac{2r}{R-r}\{A(R) + |f(0)|\}$$

16. Observaciones. Este teorema es muy importante porque acotando la parte real de una función es posible encontrar una cota para toda la función.

Por otra parte utilizando exactamente los mismos argumentos para $-f$, y para $\pm if$ se obtienen resultados análogos donde $A(R)$ es reemplazado por

mín $\operatorname{Re}\{f(z)\}$, máx $\operatorname{Im}\{f(z)\}$ y mín $\operatorname{Im}\{f(z)\}$, respectivamente.

En cuanto al siguiente teorema, el de Hadamard, resulta ser un teorema de factorización fundamental para la teoría de funciones enteras así como para probar su teorema de los números primos, que fue célebre en su época.

Por otra parte, en el capítulo anterior los polinomios habían quedado hasta desprestigiados, y en este teorema "recobran" importancia.

Si $r_n=|z_n|$ entonces para $\varepsilon>0$

$$\log|P(z)| \geq \sum_{r_n\leq 2r}\log\left|1-\frac{z}{z_n}\right| - O\left(\sum_{r_n\leq 2r}\left(\frac{r}{r_n}\right)^p\right) - O\left(\sum_{r_n>2r}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1}\right)=$$

$$=\sum_{r_n\leq 2r}\log\left|1-\frac{z}{z_n}\right| - O(r^{\rho+\varepsilon})$$

por los argumentos usados para probar el teorema de Borel (2.11), pues $\rho=\lambda$.

Si $z\in\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n\right]^c$ y si $r_n\leq 2r$

$$\left|1-\frac{z}{z_n}\right| \geq \frac{1}{(r_n)^{(h+1)}} \geq \frac{1}{(2r)^{(h+1)}}$$

Por lo tanto si $\varepsilon>0$ y r es suficientemente grande,

$$\sum_{r_n\geq 2r}\log\left|1-\frac{z}{z_n}\right| \geq -(h+1)\log(2r)n(2r)\geq -(h+1)\log(2r)r^{\rho+\varepsilon}\geq$$
$$\geq -r^{\rho+2\varepsilon}$$

Con lo que, gracias a los teoremas anteriores, se concluye.

15. Lema. Este lema servirá para probar el teorema de Hadamard. Es una desigualdad importante conocida como la desigualdad de Borel - Carathéodory y permite encontrar una cota superior para el módulo de una función dado que su parte real (o la imaginaria) están acotadas.

Sea f una función analítica en D_R y sea

$$A(r) = \max_{|z|\leq r}|\operatorname{Re}(f(z))|$$

Si $0<r<R$, entonces

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r}A(R) + \frac{R+r}{R-r}|f(0)|$$

Demostración.

Caso 1. Si f es constante, $f(z) = \alpha\ \forall z$ y se obtiene que

$$|\alpha| \leq \frac{2r}{R-r}|\operatorname{Re}\alpha| + \frac{R+r}{R-r}|\alpha|$$

lo que es, por supuesto, cierto.

Caso 2. Si $f(0) = 0$ en este subcaso se tiene que $A(R)>A(0)=0$

Sea $$\phi(z) = \frac{f(z)}{2A(R) - f(z)}. \qquad \ldots(1)$$

ϕ es analítica porque la parte real del denominador no se anula en $|z| \leq R$.

Como ya se sabe, $\lambda \leq \rho$, esto es, $\max\{\lambda, \text{grado } g\} \leq \rho$.

Pero por otra parte el orden de un producto no excede el orden mayor de los factores, esto es, $\rho \leq \max\{\lambda, \text{grado } g\}$.

Así, si ρ no es un número entero entonces necesariamente coincide con λ y la forma del producto canónico queda determinada de forma única: el género del producto canónico es $[\rho]$.

Si ρ es entero sigue habiendo ambigüedad.

19. Corolario. Si f es entera de orden finito ρ y ρ no es un número entero entonces toma cada valor complejo una infinidad de veces.

La prueba es elemental, porque como f y $f - \alpha$ tienen el mismo orden para cada $\alpha \in \mathbb{C}$, basta probar que una función entera de orden no entero tiene una infinidad de ceros. Pero esto es evidente porque el exponente de convergencia es necesariamente positivo (de lo contrario el orden sería entero).

20. Corolario. Teorema de Picard Pequeño. Si f es de orden finito entonces toma todos los valores complejos excepto a lo más, un valor.

(Si el orden es un número $\rho \notin \mathbb{Z}$ por 2.19 f toma cada valor en $\mathbb{C}$ y además, una infinidad de veces).

Demostración. Si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ números complejos distintos tales que $f(z) \neq \alpha$ y $f(z) \neq \beta$ para cada $z \in \mathbb{C}$, entonces $f-\alpha$ es una función entera que no se anula.

Así, existe g entera y tal que

$$f(z) - \alpha = \exp[\, g(z)\,]$$

Como f es de orden finito $f-\alpha$ también lo es y por el teorema de Hadamard g es un polinomio.

Pero $\exp[\, g(z)\,]$ nunca toma el valor $\beta-\alpha$ y por eso $g(z)$ no toma el valor $\log(\beta-\alpha)$, lo cual es una contradicción al Teorema Fundamental del Algebra. (Pues en este caso el polinomio $g(z) - \log(\beta-\alpha)$ no tendría ceros).

grado a lo más ρ.

Demostración. Sea λ el exponente de convergencia de los ceros del producto canónico $P(z)$.

$P(z)$ es de orden λ (por el teorema de Borel 2.11) y $\lambda \le \rho$.

Si $\varepsilon > 0$, por hipótesis

$$\log|f(z)| < r^{\rho+\varepsilon} \qquad \text{si} \quad |z| = r \quad \text{y} \quad r \text{ es grande,}$$

mientras que, por el teorema 2.14

$$\log|P(z)| > -r^{\lambda+\varepsilon} > -r^{\rho+\varepsilon}$$

en círculos de radio r y r arbitrariamente grande. Combinando estas desigualdades

$$\log|f(z)| = m\log r + \log|e^{g(z)}| + \log|P(z)| =$$

$$= m\log r + \mathrm{Re}\{g(z)\} + \log|P(z)|$$

Esto es,

$$|\mathrm{Re}\{g(z)\}| = \log\left|\frac{f(z)}{z^m P(z)}\right| < 2r^{\rho+\varepsilon} - \log z^m < 2r^{\rho+\varepsilon}$$

es válida en una sucesión de círculos $|z| = r_n$ donde

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

Como $g(z)$ es una función entera, por la desigualdad de Borel-Carathéodory (2.16)

$$|g(z)| = O(r^{\rho+\varepsilon})$$

y esto pasa para la misma sucesión de círculos, esto es, que por el teorema del capítulo anterior (1.3) g es polinomio de grado a lo más $\rho+\varepsilon$. Y como es válido para cada ε positivo, es polinomio de grado a lo más ρ.

18. Comentarios. Con la misma notación de 2.17.

Es interesante observar que ρ es el máximo entre λ y el grado de g.

Como ya se sabe, $\lambda \le \rho$, esto es, $\max\{\lambda, \text{grado } g\} \le \rho$.

Pero por otra parte el orden de un producto no excede el orden mayor de los factores, esto es, $\rho \le \max\{\lambda, \text{grado } g\}$.

Así, si ρ no es un número entero entonces necesariamente coincide con λ y la forma del producto canónico queda determinada de forma única: el género del producto canónico es $[\rho]$.

Si ρ es entero sigue habiendo ambigüedad.

y que, por hipótesis

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\omega+re^{i\theta})|d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\omega)|d\theta = |f(\omega)|$$

esto es, que la integral

$$\int_0^{2\pi}\left(|f(\omega)| - |f(\omega + re^{i\theta})|\right) = 0$$

pero el integrando es una función continua no negativa y por ello es idénticamente cero.

Ahora se aplica a cada circulo de radio $t\in(0,r)$ y centro ω para obtener que $f(B_r(\omega))$ es un subconjunto del circulo

$$\{z\in\mathbb{C}: |z| = |f(\omega)|\}$$

El hecho que f es analitica y entonces conforme implica que f es constante en todo un disco, y por lo tanto es constante en G.

2. Teorema.

Principio del máximo (segunda versión).

Si $G\subset\mathbb{C}$ es acotado y f es una función analitica en G y continua en $\bar{G}$. Entonces

$$\text{máx }\{|f(z)|: z\in\bar{G}\} = \text{máx }\{|f(z)|: z\in\delta G\}$$

Demostración. Si f es constante no hay nada que probar. Si no, los máximos se toman de funciones continuas sobre compactos y por ello existen, trivialmente. Por este mismo razonamiento existe ω_0 en $\bar{G}$ tal que

$$|f(\omega_0)| = \underset{z\in\bar{G}}{\text{máx}}\ \{|f(z)|\}$$

Por el teorema anterior ω_0 no puede ser un punto interior. ‖

3. Observación. En esta versión no es necesario que G sea conexo.

4. Teorema. Principio del Máximo (tercera versión).

Sean: G una región contenida en $\mathbb{C}$; f analitica en G y y $M>0$ tal que

$$\overline{\lim_{z\to a}}\ |f(z)| \le M$$

para cada $a\in\delta G$. Entonces $|f(z)| \le M$ en G.

Observación: $\infty\in\delta G$ si G no es acotada.

Demostración. El caso interesante es si f no es constante.

Si $\delta>0$ es arbitrario y fijo, se define

$$H_\delta = \{z\in G: |f(z)| > M + \delta\} = G\cap\{z: |f(z)| > M + \delta\}$$

Capitulo III

Teoremas de Phragmèn – Lindelöf.

En primer lugar se analizará el principio del máximo con detalle porque los teoremas de Phragmèn – Lindelöf lo generalizan.

1. Teorema. (Principio del máximo, versión clásica).

Sea $f\colon G \to \mathbb{C}$ analítica. G es una región y si $\omega_o \in G$ es tal que

$$|f(\omega_o)| \geq |f(z)| \qquad \text{para cada} \quad z \in G.$$

Entonces f es constante.

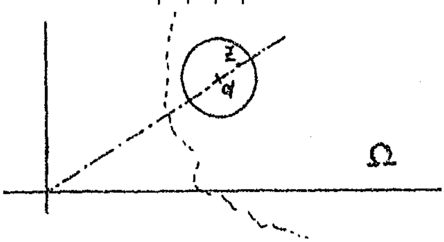
Demostración. Hay al menos dos pruebas interesantes de este teoma.

(i) Sean $\Omega = f(G)$ y $\alpha = f(\omega_o)$. Claramente $\alpha \in \Omega$.

Como $|\alpha| \geq |\xi|$ para todo $\xi \in \Omega$ α es necesariamente un punto frontera de Ω, esto es, $\alpha \in \delta\Omega \cap \Omega$.

Esta observación se obtiene de que si α es un punto interior de Ω, existe $\rho > 0$ tal que $B_\rho(\alpha) \subset \Omega$ y entonces existe

$z \in B_\rho(\alpha) \subset \Omega$ tal que $\qquad |\alpha| < |z|$



En particular $\Omega \cap \delta\Omega$ no es vacío y Ω no es abierto. Por el teorema de la función abierta (que dice que cada función analítica no constante es abierta) se tiene que f es constante.

(ii) De otro modo, si $r > 0$ es tal que $B_r(\omega) \subset G$ como

$$f(\omega) = \frac{1}{z}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\omega}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega + re^{i\theta})\,d\theta$$

(donde γ es el círculo de radio r y centro ω).

Se tiene que

$$|f(\omega)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\omega + re^{i\theta})|\,d\theta$$

Si se define $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ como sigue: $f(z) = e^{e^z} = \exp(e^z)$.

Como $\quad \partial\Omega = \{z = x+iy\in\mathbb{C}:\ y=\pm\frac{\pi}{2}\}$. Si $z\in\partial\Omega$

$$f(z) = \exp(e^z) = \exp(e^{x\pm i\pi/2}) = \exp(e^x e^{\pm i\pi/2}) = \exp(\pm ie^x)$$

que tiene módulo uno. Esto es, $\lim\limits_{\omega\longrightarrow z} |f(\omega)| = 1$ para cada $z\in\partial\Omega$.

Pero en el eje real, si $z = x$

$$f(x) = \exp(e^x) \quad y \quad \lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \infty$$

Esto es, f no es acotada en Ω.

La idea de extender el principio del máximo suponiendo restricciones al crecimiento para puntos cercanos a ∞ es, bastante natural.

Phragmèn y Lindelöf desarrollan un método en 1908 que generaliza el principio del máximo a ciertas regiones y a funciones holomorfas en ellas con condiciones de crecimiento en la frontera, que incluye al punto ∞. Suponen restricciones al crecimiento de una función cerca de sus puntos frontera y la conclusión, como para el principio del máximo, es que la función es acotada en toda la región.

Se trata en realidad de un método porque, aunque es un teorema, de él se desprenden multitud de teoremas de Phragmèn-Lindelöf aunque en realidad son corolarios del teorema principal.

Intuitivamente se pueden entender cada uno de dichos teoremas como una combinación del principio del máximo y el teorema de la función abierta de Riemann que prueba la equivalencia conforme entre cualesquiera dos regiones propias del plano complejo.

En 1980 Fuchs generaliza aún más el teorema a cualquier subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$ y prueba una conjetura de Newman. Con esto clasifica de manera completa y precisa el crecimiento de las funciones analíticas. De este teorema se ocupa el capítulo 4.

6. Teorema de Phragmèn-Lindelöf (original).

Sean G una región (simplemente conexa) y $f\in\mathcal{H}(G)$.
Si existen:

(i) $\varphi: G\longrightarrow\mathbb{C}\setminus\{0\}$ acotada y analítica (tiene sentido que sea acotada pues no es entera).
(ii) $M>0$ fijo.
(iii) A, B subconjuntos de ∂G. Incluyendo en ∂G al punto ∞ (si G no es acotada).

Tales que:

Y se probará que $H\delta$ es un conjunto vacío.

Observaciones:

(i) $H\delta$ es abierto.

(ii) Si a es un punto frontera de G entonces en una vecindad de A $|f|$ es menor que $M+\delta$, pues

$$\overline{\lim_{z\to a}}\ |f(z)| \le M.$$

Esto es, $\exists r>0$ tal que $\forall z\in B_r(a)\cap G$, $|f(z)|<M+\delta$.

(iii) Si ∂ es un punto frontera de H_δ, claramente no es un punto frontera de G (pues se tendría que

$$\overline{\lim_{z\to\partial}}\ |f(z)| \ge M+\delta \quad y \quad \overline{\lim_{z\to\partial}}\ |f(z)| \le M,$$

lo cual sería una contradicción).

Esto prueba que cada punto en ∂H_δ es un punto interior de G; y entonces $\overline{H}_\delta\subset G$.

(iv) La observación (iii) es cierta aún si G no es acotada y para $a=\infty\in\partial G$ (i.e. $\infty\notin\partial H_\delta$).

En particular se acaba de garantizar que H_δ es acotado y que, en consecuencia, $\overline{H}_\delta$ es compacto.

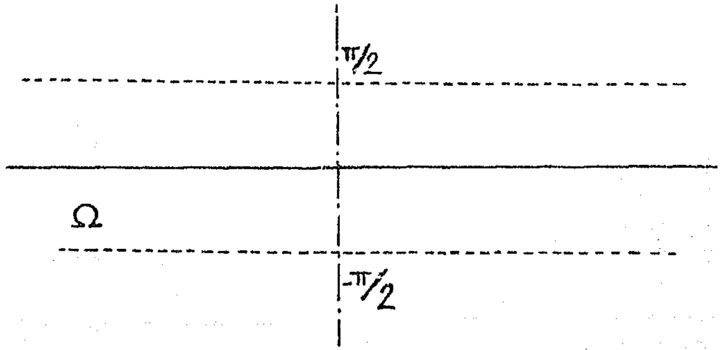
Aplicando el principio del máximo 3.2 a $\overline{H}_\delta$, en H_δ f es, en módulo, menor que $M+\delta$.

Por la definición de H_δ, H_δ es necesariamente vacío.

5. Comentarios. En cualquiera de sus versiones el principio del máximo pide que la región sea acotada o bien una condición sobre el comportamiento de la función en el punto al infinito. Si no se tiene una condición de este tipo, el principio no es válido.

Ejemplo.

Sean: $\Omega = \{z=x+iy\in\mathbb{C}:\ y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\}$ la banda no acotada



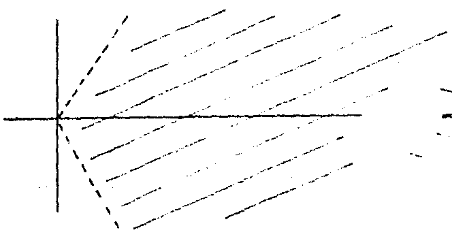
por lo cual

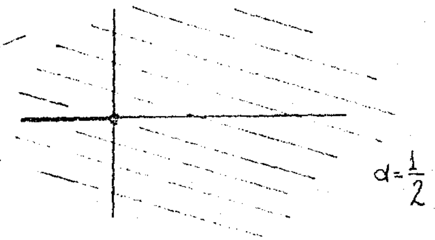
$$|f(z)| \leq \frac{M_o K^{\eta}}{|\varphi(z)|^{\eta}} = \frac{\max\{M, MK^{-\eta}\}}{|\varphi(z)|^{\eta}} K^{\eta}$$

Como esta desigualdad es válida para cada $\eta>0$ si se hace η tender a cero se obtiene que, si $z\in G$, $|f(z)| \leq M$.

Los teoremas de Phragmèn-Lindelöf que se mencionan ahora son corolarios del anterior y son los que usualmente se denominan teorema de Phragmèn-Lindelöf (Boas, Conway, Rudin, Titchmarsh, Marsden).

7. Teorema. Sean $\alpha \geq \frac{1}{2}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ y $G = \{z\in\mathbb{C}: |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}\}$





Si f es analítica en G y

(i) existe $M>0$ tal que

$$\overline{\lim_{z\to\omega}} |f(z)| \leq M$$

para cada $\omega\in\partial G\setminus\{\infty\}$

(ii) existen P y $b<\alpha$ tales que $|f(z)| \leq P\exp(|z|^b)$ asintóticamente en $|z|$.

Entonces $|f(z)| \leq M$ en G.

Demostración. Sean $c\in(b,\alpha)$ y $\varphi(z) = e^{-z^c} = \exp(-z^c)$ definida en $\mathbb{C}$ y en particular en G.

Como para cada $z\in G$ $|\arg z|<\frac{\pi}{2\alpha}$, se observa lo siguiente para $z = re^{i\theta}$:

(i) $\mathrm{Re}(z^c) = r^c\cos(c\theta)$ y para cada $z\in G$, $|\varphi(z)| = \exp(-r^c\cos c\theta)$
(ii) Como $c<\alpha$ existe $\beta>0$ fijo tal que $\cos c\theta\geq\beta>0$ siempre que $|\theta|\leq\pi/2\alpha$.
(iii) Por (i) y (ii), φ es acotada en G

$$|\varphi(z)| = \exp(-r^c\cos c\theta)\leq\exp(-\beta r^c)\leq 1$$

(iv) Si $\eta>0$, asintóticamente (por hipótesis) y por (ii)

(a) $\partial G = A \cup B$

(b) para toda $a \in A$ $\overline{\lim_{z\to a}} |f(z)| \leq M$

(c) para todo $b \in B$ y cada $\eta > 0$ $\overline{\lim_{z\to b}} |f(z)||\varphi(z)|^{\eta} \leq M$

entonces $|f(z)| \leq M$ en G.

No sólo por su contenido este teorema evoca el principio del máximo, sino que para su prueba se utilizará.

Demostración. Sea K una cota para φ (esto es, $|\varphi(z)| \leq K$ si $z \in G$). Se considera una rama analítica (cualquiera) de $\log\varphi(z)$ en G (que existe pues $\varphi: G \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$) para construir la función $g: G \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ definida como

$$g_{\eta}(z) = \exp(\eta \log\varphi(z)) = \varphi(z)^{\eta}$$

donde η es un real positivo arbitrario y fijo.

Se utiliza g_{η} para construir otra función auxiliar analítica en G:

$F: G \longrightarrow \mathbb{C}$ que se define como:

$$F(z) = f(z) g_{\eta}(z) K^{-\eta} = \frac{f(z) g_{\eta}(z)}{K^{\eta}}$$

F es en módulo menor que f pues $|\varphi(z)| \leq K$, y entonces

$$\left|\frac{\varphi(z)}{K}\right| \leq 1$$

Observaciones.

(i) Si $a \in A$ $\overline{\lim_{z\to a}} |F(z)| \leq \overline{\lim_{z\to a}} |f(z)| \leq M$

(ii) Si $b \in B$

$$\overline{\lim_{z\to b}} |F(z)| = \overline{\lim_{z\to b}} |f(z)||\exp(\eta\log\varphi(z)|K^{-\eta} =$$

$$= \overline{\lim_{z\to b}} |f(z)|\left(\frac{|\varphi(z)|}{K}\right)^{\eta} \leq MK^{-\eta}$$

Así, si $\omega \in \partial G$

$\overline{\lim_{z\to\omega}} |F(z)| \leq \max\{M, MK^{-\eta}\}$ que es una constante fija que se llamará M_o.

Ahora se tienen las hipótesis del principio del máximo 3.4, que se aplica para obtener que $|F(z)| \leq M_o$ en G, o bien

$$\frac{|f(z)||\varphi(z)|^{\eta}}{K^{\eta}} \leq M_o$$

$$|f(z)|\,|\varphi(z)|^{\eta} \le P\exp(|z|^{b})\,[\exp(-\beta r^{c})]^{\eta} =$$

$$= P\exp(r^{b} - \eta\beta r^{c})$$

Pero el lado derecho es una función de r que tiende a cero si r tiende a infinito, esto es, que si $A = \partial G \setminus \{\infty\}$

$$B = \{\infty\}$$

y φ es como se ha definido, si se aplica 3.6 se obtiene que

$$|f(z)| \le M \quad \text{en} \quad G.$$

8. Relaciones con el capítulo 1.

Como se ha tratado de hacer ver, las condiciones para el crecimiento de la función son delicadas. Por ejemplo, si G es como en 3.7 y

$$f(z) = \exp(z^{\alpha}) \quad \text{entonces}$$

$$|f(z)| = \exp(|z|^{\alpha}\cos\alpha\theta).$$

Si $\omega \in \partial G \setminus \{\infty\}$, $\theta = \arg\omega = \pm \dfrac{\pi}{2\alpha}$

Por lo tanto

$$|f(\omega)| = \exp(|\omega|^{\alpha}\cos\frac{\pi}{2}) = e^{0} = 1$$

Pero f no es acotada en G.

De aquí la necesidad de pedir que, en cierto modo, el orden de f sea estrictamente menor que α. Aclarando este "cierto modo" :

Si se conoce f entera de orden $\rho > 0$ basta considerar regiones donde $\alpha > \text{máx}\{1/2, \rho\}$ para que la condición (ii) de 3.7 se cumpla.

En este ejemplo $\rho = \alpha$ y por eso no es posible hallar b (de 3.7, nuevamente).

Esto relaciona al orden de la función con la región que se puede considerar para aplicar el teorema anterior.

Otro teorema que relaciona al orden y al tipo de una función con su posible región es el siguiente:

9. Teorema. Sea G como en 3.7, esto es,

$$\alpha \ge \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad G = \{z \in \mathbb{C} : \ |\arg z| \le \frac{\pi}{2\alpha}\}$$

Si se cumple:

(i) Para cada $\omega \in \partial G \setminus \{\infty\}$

$$\overline{\lim_{z \to \omega}}\, |f(z)| \le M$$

donde $M>0$ y es independiente de ω.

(ii) Para cada $\delta>0$ existe $P=P(\delta)>0$ tal que

$$|f(z)| \le P \exp(\delta|z|^{\alpha}) \text{ asintóticamente en } |z|.$$

Entonces $|f(z)| \le M$ en G.

Demostración.

Para cada $z=x\in\mathbb{R}$ en el eje real positivo $x>0$ y cada δ menor que ε $(0<\delta\le\varepsilon)$ existe $P>0$ tal que, si x es grande (por hipótesis)

$$|F(x)| \le P \exp\big((\delta - \varepsilon)x^{\alpha}\big)$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty} |F(x)| = 0$ ...(1)

Sea $M_1 = \sup\{|F(x)|: x\in\mathbb{R}^+\}$

M es finito por (1).

Sea M_2 el máximo entre M y M_1, y considérense H_+ y H_- las dos subregiones de G determinadas por el eje real, esto es:

$$H_+=\{z\in G:\ \arg z \in (0,\pi/2\alpha)\}$$

$$H_-=\{z\in G:\ \arg z \in (-\pi/2\alpha,0)\}$$

Y por las consideraciones previas, para cada punto frontera

$$\omega\in\partial H_+ \cup \partial H_-$$

$$\overline{\lim_{z\to\omega}} |f(z)| \le M_2$$

Se aplica 3.7 y se obtiene que $|F(z)| \le M_2$ en G.

A continuación se probará que $M_2 = M$.

Si $M_2 = M_1 > M$ como se tiene (1), existe $x_0\in\mathbb{R}$ tal que $|F(x_0)| = M_2$. Además, $x_0>0$ pues

$$\overline{\lim_{x\to 0}} |f(x)| = \overline{\lim_{x\to 0}} |F(x)| \le M<M_1, \text{ porque } 0\in\partial G.$$

Aplicando el principio del máximo, como $x_0\in G$ es un punto interior de G se obtiene que F es constante y por esto $M=M_1$. Por lo tanto $|F(z)|\le M$ en G, esto es,

$|f(z)| \le M\exp(\varepsilon \operatorname{Re} z^{\alpha})$ para cada $z\in G$. Como pasa $\forall\varepsilon>0$ y M es independiente de ε

$|f(z)| \le M$ en G, que es lo que se quería probar. ‖

10. Observación. Nuevamente si G es

$$G = \left\{z:\ z\neq 0 \text{ y } |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}\right\};$$

$$f(z) = \exp(z^{\alpha}) \quad \text{donde} \quad f: G \to \mathbb{C}$$

Entonces $|f(z)| = \exp(|z|^{\alpha}\cos\alpha\theta) = \exp(r^{\alpha}\cos\alpha\theta)$ (si $z=re^{i\theta}$).

Nuevamente, en ∂G

$$|f(z)| = \exp(r^{\alpha}\cos\pm\frac{\pi}{2}) = e^{0} = 1$$

pero en cualquier otro rayo dentro de G f no es acotada, lo que muestra que la condición (ii) era necesaria en el teorema 3.9.
Se analizarán más teoremas de Phragmèn-Lindelöf.

11. Teorema. Sea $G = \left\{z= x + iy\in\mathbb{C}:\ y\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$, sea $f\in\mathcal{H}(G)$ y supóngase que existen $A>0$ finito y $\alpha\in(0,1)$ tales que

$$|f(z)| < \exp\{A \exp|\alpha x|\} \quad \text{para cada } z = x + iy \text{ en } G$$

$$|f(z)| \le 1 \quad \text{en } \partial G$$

la conclusión es que f es acotada en G.

12. Observación. Si en 3.11 se hace $\alpha = 1$ se obtiene el ejemplo analizado en 3.5, donde 3.11 no es válido.

Demostración (de 3.11).

Sea $\beta\in(\alpha,1)$

Y para cada $\varepsilon>0$ sea $h_{\varepsilon}(z) = \exp\{-\varepsilon(e^{\beta z} + e^{-\beta z})\}$

Si $z\in\bar{G}$, $z = x + iy$

$$\mathrm{Re}\{e^{\beta z} + e^{-\beta z}\} = (e^{\beta x} + e^{-\beta x})\cos\beta y \ge \delta(e^{\beta x} + e^{-\beta x}) \quad \text{donde}$$

$$\delta = \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) > 0 \quad \text{pues} \quad |\beta| < 1.$$

así, $|h_{\varepsilon}(z)| \le \exp\{-\varepsilon\delta(e^{\beta x} + e^{-\beta x})\} < 1$

y $|fh_{\varepsilon}(z)| \le 1$, en ∂G.

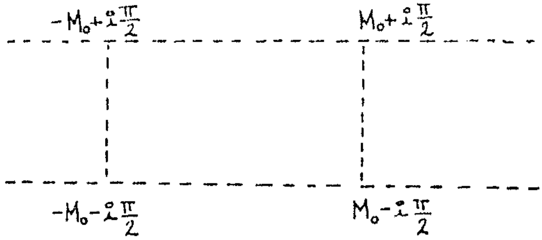
Además $|f(z)h_{\varepsilon}(z)| \le \exp\{Ae^{\alpha|x|} - \varepsilon\delta(e^{\beta x} + e^{-\beta x})\}$ en $\bar{G}$.

Para cada $\varepsilon>0$ fija, y $z = x + iy$

$$\lim_{\substack{x\to\pm\infty \\ x\in\mathbb{R}}} |f(x)h_\varepsilon(x)| = 0 \quad \text{por lo cual}$$

$$\exp\{Ae^{|x|} - \varepsilon\delta(e^{\rho x} + e^{-\rho x})\} < 1 \quad \text{asintóticamente} \quad \ldots(1)$$

aplicando el principio del máximo al interior del rectángulo $\pm M_0 \pm i\frac{\pi}{2}$ y (1), se obtiene que $\forall z\in G \quad |f(z)h_\varepsilon(z)| \le 1$



Haciendo ε tender a cero se tiene que $|f(z)| \le 1 \;\; \forall z\in G$ ‖

Como se puede observar, este teorema (que expone Rudin[10]) posee esencialmente las mismas hipótesis necesarias para el teorema principal:

G es una región simplemente conexa, $\varphi\colon G\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$\varphi(z) = \exp\{-A\exp(\alpha z)\}$ es analítica y acotada.

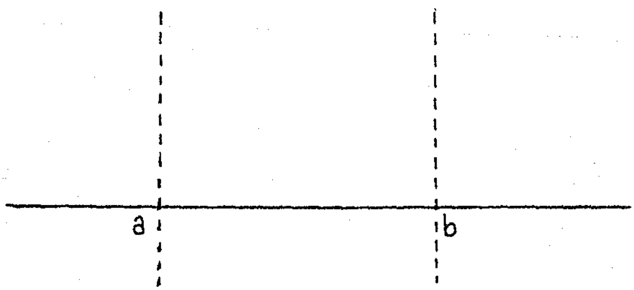
$\partial G = A\cup B$ con $A = \{x\pm i\frac{\pi}{2}\colon \; x\in\mathbb{R}\}$ $\qquad B = \{\infty\}$

En A $\quad |f(z)| \le 1$

y en B, $\lim_{z\to\infty} |f(z)|\,|\exp\{-A\exp(\alpha z)\}| \le 1.$

13. Rudin llama también a éste, Teorema de Phragmèn-Lindelöf

Sean $\quad \Omega = \{x + iy \in \mathbb{C}\colon \; a<x<b\}$



$f\in\mathcal{H}(\Omega)$ y continua en $\bar{\Omega}$; $|f(z)|<B \;\; \forall z\in\Omega$

Si $M_{x_0} = \sup\{|f(x_0 + iy)| : y\in\mathbb{R}\}$ es el supremo del módulo de f en la recta $x=x_0$ entonces

$$M_x^{b-a} \leq M_a^{b-x} M_b^{x-a} \quad \text{para cada} \quad a<x<b.$$

De aquí se concluye que $|f(z)| \leq \max\{M_a, M_b\}$ $\forall z\in\Omega$. i.e., f toma su máximo en la frontera de Ω.

[Ya que $M_x \leq M_a^{(b-x)/(b-a)} \, M_b^{(x-a)/(b-a)} \leq$

$$\leq \max\{M_a, M_b\}^{(b-x+x-a)/(b-a)} = \max\{M_a, M_b\}]$$

Y la prueba de este pseudo-principio del máximo es como sigue:

(es análogo al corolario del principio del máximo:

$$\sup_{z\in\bar{B}}\{|f(z)|\} = \sup_{z\in\partial B}\{|f(z)|\} \quad)$$

Caso 1. Si $M_a = M_b = 1$. Sea $\varepsilon>0$ y

sea $h_\varepsilon(z) = \dfrac{1}{1+\varepsilon(z-a)}$ $\qquad h_\varepsilon : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$

como $\mathrm{Re}\{1+\varepsilon(z-a)\} = 1 + \varepsilon(x-a) \geq 1$; $|h_\varepsilon(z)| \leq 1$ en $\bar{\Omega}$, y

$$|fh_\varepsilon(z)| \leq 1 \qquad \text{si} \quad z\in\partial\Omega.$$

Como $|1 + \varepsilon(z-a)| \geq \varepsilon|y|$; $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq \dfrac{B}{\varepsilon|y|}$ $\quad \forall z\in\bar{\Omega}$

Considerando el rectángulo R con vértices $a\pm i\dfrac{B}{\varepsilon}$; $b\pm i\dfrac{B}{\varepsilon}$

como $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq \dfrac{B}{\varepsilon|y|}$; $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$ en el exterior de R, $z\in\Omega$. Si ε tiende a cero $|f(z)| \leq 1$ $\quad \forall z\in\Omega$.

Caso 2. Sea $g(z) = M_a^{(b-z)/(b-a)} \, M_b^{(z-a)/(b-a)}$

Donde se define M^ω como $\exp(\omega \log M)$ si $M\geq 0$. Entonces g es entera, nunca es cero y

$$\left|\frac{1}{g(z)}\right| = \left|\frac{1}{M_a^{(b-z)/(b-a)} \, M_b^{(z-a)/(b-a)}}\right| \leq \frac{1}{\min\{M_a, M_b\}}$$ por lo que $\dfrac{1}{g}$ es una función acotada.

Como $|g(a + iy)| = M_a$ y $|g(b + iy)| = M_b$

Pues $|g(a + iy)| = |M_a^{(b-(a+iy))/(b-a)} \, M_b^{(a+iy-a)/(b-a)}| =$

$$= |(M_a M_b)^{iy/(b-a)} M_a| = |M_a|\,|e^{i(y/(b-a))\ln M_a M_b}| = M_a$$

y para el otro caso es análogo.

Por esto $\frac{f}{g}$ es como en el caso 1 y $\left|\frac{f}{g}\right|\leq 1$ esto es,

$$M_x^{b-a}\leq M_a^{b-x}\ M_b^{x-a}$$ ‖

5. Boas expone el siguiente teorema:

Sea f analítica en el semiplano $x>0$; continua en $x\geq 0$; supongamos que $|f(iy)|\leq M$ (condiciones en la frontera finita) y

$f(z) = O(e^{r^\beta})$ (condiciones en $+\infty$) donde $\beta<1$; $z = re^{i\theta}$ y la condición de crecimiento es uniforme en θ para una sucesión r_n de reales tales que

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty.$$

Entonces $|f(z)|\leq M$ en todo el semiplano.

La prueba es totalmente análoga: $\varphi(z)$ es $\frac{1}{e^{\beta z}}$ y la M, cota del teorema principal, es $\max\left\{M, K\sup\left|\frac{1}{e^{\beta z}}\right|\right\}$

$$|\varphi(z)| = \frac{1}{|e^{\beta z}|} = \frac{1}{e^{\beta r}} \quad \text{y} \quad \overline{\lim_{\substack{r\to\infty\\ |z|=r}}} \left|\frac{f(z)}{e^{\beta r}}\right| = K < \infty.$$

Sea $G=\{z\colon \operatorname{Re}z>0\}$.

Se considera $F_\varepsilon(z) = f(z)\exp(-\varepsilon z^\gamma)$. Con $\varepsilon>0$ fija; $\gamma\in(\beta,1)$ y $F_\varepsilon\colon \overline{G}\to\mathbb{C}$. Entonces para cada $z_n = r_n e^{i\theta}$

(i) $|F(z_n)| \leq |f(z_n)| \exp(-\varepsilon r_n^\gamma\cos(\frac{\pi\gamma}{2}))$

Si r_n es suficientemente grande, el lado derecho se hace tan pequeño como se quiera, pues $\gamma>\beta$ por lo que

$$|F(z_n)| \leq M \qquad \text{si} \quad |\theta| \leq \frac{1}{2}\pi$$

así, $|F(z)| \leq M$ en la región semicircular $\overline{G}\cap\overline{B}_{r_n}(0)$.

Como r_n es arbitrariamente grande, $|F(z)| \leq M$ $\forall z\in G$.

(ii) Concluyendo: $|f(z)| \leq M\exp(\varepsilon r^\gamma)$ y como se ha hecho hasta ahora, si ε tiende a cero se concluye: $|f(z)| \leq M$ en G. ‖

Capitulo IV

Un teorema de Fuchs y una conjetura de Newman: Generalización de Phragmèn-Lindelöf.

1. Observaciones generales.

(a) En este capitulo se trabaja con conjuntos abiertos conexos no acotados D tales que:

i) ∞ está en su frontera, esto es, D es no acotado y si $U\in N\infty$ $U\cap D\neq\emptyset$ y $U\cap D^c\neq\emptyset$.
ii) D tiene al menos un punto frontera finito, esto es, $D\neq\mathbb{C}$.

(b) Cada vez que se trabaje con $\mathcal{M}(r)$ será como en su definición más general: si $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ y $r>0$ se define

$$\mathcal{M}(r) = \max_{\substack{|z|\leq r\\ z\in D}} |f(z)|$$

$$\mathcal{M}(r) = 0 \quad \text{si} \quad D_r\cap D = \emptyset$$

y cabe observar que en general no es cierto que $\mathcal{M}(r)$ sea el máximo sobre $\{|z|=r\}\cap D$ porque no se tendrán funciones enteras, en general.

(c) Por último, para funciones de variable compleja se define su límite superior (abusando con la notación):

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}} f(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{|z-\zeta|<\varepsilon} |f(z)|\right)$$

o bien

$$\overline{\lim_{z\to\infty}} f(z) = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{|z|\geq r} |f(z)|\right) \quad \text{esto es,}$$

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}} f(z) = \overline{\lim_{z\to\zeta}} |f(z)|$$

El objetivo de este capitulo es analizar el siguiente teorema, que en cierto sentido resulta ser un teorema de Phragmèn-Lindelöf, y que fue probado por W. H. Fuchs en 1980 (y publica- en 1981).[5]

2. Teorema.(Fuchs) Sea D como en 4.1. Si f es holomorfa en D y existe $K>0$ tal que, para cada punto frontera $\zeta\in\partial D$ finito $(\zeta\neq\infty)$

$$\overline{\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D}}} |f(z)| \leq K$$

entonces sucede una y sólo una de las siguientes posibilidades:

(a) $|f(z)| \leq K$ para cada z en D.
(b) f tiene un polo en ∞.
(Lo que en particular indica que $f \in \mathcal{M}(U)$ con $U \in N(\infty)$.

(c) $$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln \mathcal{M}(r)}{\ln r} = \infty$$

(y, en particular, este último límite existe).

3. Corolario. (Conjetura de D. J. Newman).

Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior (4.2) si además

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{\mathcal{M}(r)}{r} = 0$$

entonces necesariamente sucede (a). Esto es, $|f(z)| \leq K$ para toda z en D.

Nota. Por conveniencia en lo sucesivo se hará $K = 1$. No representa pérdida de generalidad y sí simplificará la notación.

4. Observaciones.

(i) Se verá que pedir regiones distintas a $\mathbb{C}$ en 4.2 es precisamente lo interesante del teorema.

Si $D = \mathbb{C}$ en 4.2 se estará en el caso de las funciones enteras. En estas condiciones el teorema es inmediato del capítulo I. Dada $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ hay tres posibilidades:

(a') f es constante.
(b') f es polinomio.
(c') f es trascendente.

que corresponden exactamente a los incisos (a), (b), y (c) de 4.3.

Se recordará que $f(z)$ tiene un polo (singularidad esencial) en ∞ si y sólo si la composición $f(1/z)$ tiene un polo (singularidad esencial) en cero (respectivamente).

(a') claramente corresponde a (a) por el teorema de Liouville.

(b') le corresponde a (b) porque si $f(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$ entonces

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^m} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{m-n},$$

que tiene un polo en cero.

(c') corresponde a (c) por la proposición 1.5

Otra forma de decirlo sería;
(a'') f tiene singularidad removible en ∞.
(b'') f tiene polo en infinito.

(c'') f tiene singularidad esencial en ∞.

Y resta sólo justificar esta última. Pero si f es trascendente y

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

es su desarrollo en serie de Taylor, existe una sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de naturales tales que $a_{n_k} \neq 0$

Entonces
$$f(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

que claramente representa una singularidad esencial en cero.

(iii) Los incisos (a), (b) y (c) son mutuamente excluyentes.
(1) Si pasa (a) no puede cumplirse (b) ni (c):

Si f es acotada en D, entonces $\mathcal{M}(r)$ es acotada y por ello

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln \mathcal{M}(r)}{\ln r} = 0.$$

Por otra parte, si f es holomorfa en alguna vecindad U de ∞, $f(1/z)$ es acotada en $1/U$ y por ésto no hay polo en cero; esto es, $f(z)$ no tiene polo en ∞.

(2) Si (b) se verifica, entonces (a) no es cierta:

Supongamos que $f(z)$ tiene un polo en ∞. Se observa que

$$f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^m} g(z)$$

en alguna vecindad de cero, para algún $m\in\mathbb{N}$ y donde g es analítica en cero (y $g(0)$ no es cero). Esto implica que $f(1/z)$ no puede ser acotada en ninguna vecindad de cero y, consecuentemente, $f(z)$ no es acotada en D.

(3) Que pase (c) excluye la condición (a):

Casi por último, si $\lim_{r\to\infty} \frac{\ln \mathcal{M}(r)}{\ln r} = \infty$ en particular

$$\lim_{r\to\infty} \mathcal{M}(r) = \infty \quad \text{y} \quad f \text{ no es acotada.}$$

(4) Por todo lo anterior sólo resta probar que (b) y(c) son, en efecto, mutuamente excluyentes.

Supongamos que f tiene polo en ∞ y que $\lim_{r\to\infty} \frac{\ln \mathcal{M}(r)}{\ln r} = \infty$

Por (c), si $M>0$ es arbitrario, asintóticamente en r

$$\mathcal{M}(r) > r^M \qquad \ldots(1)$$

(pues $\dfrac{\ln \mathcal{M}(r)}{\ln r} > M$ si $r \geq R = R(M)$, por lo cual $\ln \mathcal{M}(r) > M \ln(r)$.)

Por (b), como hay polo, en particular f es analítica en alguna vecindad de ∞ y existe $R>0$ tal que en el anillo $0<|z|<R$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^K} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{y } a_0 \neq 0 \text{ (de lo contrario, } K \text{ sería menor).}$$

donde $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es analítica en el disco D_R.

Entonces si $|z| > \frac{1}{R}$; $f(z) = z^K \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{z^n}$

Ahora bien, se calculará $\mathcal{M}(r)$.
Sin pérdida de generalidad se supondrá que $r > \frac{1}{R}$

Entonces
$$\mathcal{M}(r) = \max_{\substack{|\omega| \leq r \\ \omega \in D}} |f(\omega)| = \max \left\{ \max_{\substack{0 \leq |\omega| \leq 1/R \\ \omega \in D}} |f(\omega)|, \max_{\substack{1/R < |\omega| \leq r \\ \omega \in D}} |f(\omega)| \right\}$$

Pero $\max\limits_{0 \leq |\omega| \leq 1/R} \{|f(\omega)|\} = \alpha \geq 0$ es un real fijo y constante.

$$\text{y si } |\omega| \in \left(\frac{1}{R}, r\right], \quad |f(\omega)| = \left|\omega^K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\omega^n}\right|$$

Y en este caso

$$\max_{1/R < |\omega| \leq r} |f(\omega)| = \max_{1/R < |\omega| \leq r} \left| \omega^K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\omega^n} \right| \leq r^K \max_{1/R < |\omega| \leq r} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\omega^n} \right| =$$

$$= r^K \max_{1/r \leq 1/|\omega| \leq R} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\omega^n} \right| = r^K \max_{1/r \leq |z| < R} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq$$

$$\leq r^K \max_{|z| < R} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| = r^K \max_{|z| < R} |g(z)| < \infty$$

Y es constante; sea $\beta = \max\limits_{|z|<R} |g(z)|$

$$\mathcal{M}(r) \leq \max\{\alpha, \beta r^K\} = \beta r^K \quad \text{si } r \text{ es grande} \ldots (2)$$

Pero de (1) y (2) se tiene la contradicción:

$r^M < \mathcal{M}(r) \leq \beta r^K$ para toda $M > 0$ (asintóticamente).
Basta elegir $M > K$ para llegar a una contradicción y probar lo que se quiere.

Relación con los teoremas de Phragmèn-Lindelöf.

5. Claramente el caso (a) cubre todos los casos referentes al ca -

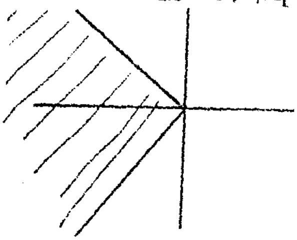
pítulo anterior.

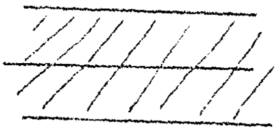
Este teorema es muy fuerte entre otras cosas porque no se pide absolutamente nada acerca de que D sea simplemente conexo, o un sector, o una banda como en los teoremas usuales de Phragmèn-Lindelöf. Ni siquiera que para cada $z\in\partial D\cup\{\omega\}$ exista una vecindad U de z tal que $U\cap D$ sea simplemente conexo.

Este debilitamiento de hipótesis, por otra parte introduce más casos posibles (b) ó (c) pero clasifica absolutamente el comportamiento de cualquier función. El corolario sí encaja perfectamente como un teorema de Phragmèn-Lindelöf generalizado.

Ejemplos. Las siguientes regiones sí eran factibles según los teoremas del capítulo anterior:

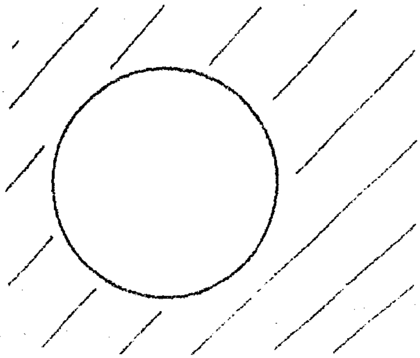
Si $\alpha,\ \beta\in[0,2\pi)$; $x,y\in\mathbb{R}$



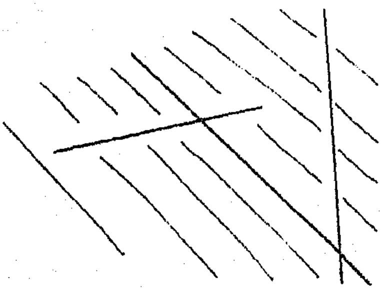


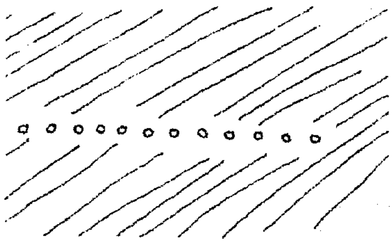
$\{z\in\mathbb{C};\ \alpha<\arg z<\beta\}$ $\{z\in\mathbb{C};\ x<\operatorname{Im} z<y\}$ Una región s.c. cualquiera

o incluso



Pero en este teorema son válidas





o cualquier región imaginable

6. Demostración de 4.3.

El corolario, que es una conjetura de D.J. Newman y que de hecho originó el trabajo de W. H. J. Fuchs, es inmediato del teorema, pues si

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathcal{M}(r)}{r} = 0 \qquad (1)$$

no suceden (b) ni (c):

Demostración.

Como se tiene (1), existe una sucesión de reales $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no acotada $\left(\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \infty\right)$ y tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{M}(R_n)}{R_n} = 0$$

Así, si $\varepsilon>0$, y $n\geq N=N(\varepsilon)$ $\quad \dfrac{\mathcal{M}(R_n)}{R_n} < \varepsilon$

o bien $\ln\mathcal{M}(R_n)<\ln\varepsilon + \ln R_n$

$$\frac{\ln\mathcal{M}(R_n)}{\ln R_n} < \frac{\ln\varepsilon}{\ln R_n} + 1$$

Esto es, que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln\mathcal{M}(R_n)}{\ln R_n} \leq 1$ lo cual excluye (c) pues en caso de existir el límite

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln\mathcal{M}(r)}{\ln r}\text{, sería menor que 1.}$$

Por otra parte, si f tiene polo en ∞ existe $R>0$ tal que si $|z|\geq R$ entonces

$$f(z) = zg(z) \qquad \ldots(2)$$

donde $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en $\{|z|\geq R\}$

Sin perder generalidad se supone que $r>R$. Entonces

$$\max_{\substack{|z|\leq R\\ z\in D}} |f(z)| = \alpha \geq 0,\text{fijo. Se toma } \alpha=0 \text{ si } D\cap D_R=\emptyset.$$

Si además se prueba que

$$\max_{R\leq|z|\leq r} |g(z)| = \max_{|z|=r} |g(z)| \qquad \ldots(3)$$

se habrá terminado, porque en este caso

$$\max_{R\leq|z|\leq r} |f(z)| = \max_{R\leq|z|\leq r} |zg(z)| = r \max_{|z|=r} |g(z)| \geq r \max_{|z|=R}|g(z)| = r\gamma$$

donde $\gamma>0$ y es fijo, pues R lo es, y así

$$\frac{\mathcal{M}(r)}{r} \geq \frac{\gamma r}{r} \geq \gamma > 0 \quad \text{asintóticamente,}$$

por lo que $\varliminf_{r\to\infty} \frac{\mathcal{M}(r)}{r} \geq \gamma > 0$ que excluye, de nueva cuenta, a (1).

Para probar (3) se utilizará la primera hipótesis del teorema:

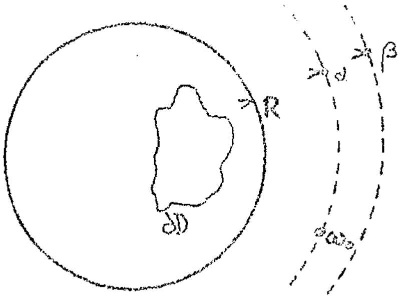
$$\varlimsup_{z\to\omega} |f(z)| \leq 1 \quad \text{para cada } \omega\in\partial D,\ \omega \text{ finito.}$$

Se supone que existen $R<\alpha<\beta$ tales que

$$\max_{\alpha\leq|z|\leq\beta} |f(z)| > \max_{|z|=\beta} |f(z)| \quad \text{esto es, que en } \{|\omega|=\alpha\},$$

$$|\omega_0| = \alpha;|f(\omega_0)| > |f(z)| \quad \forall\ |z| = \beta.$$

Como $\partial D\subset D_R$, esto quiere decir que en $D\cap D_\beta$, $|f|$ toma su valor máximo en un punto interior de esta región acotada, lo cual contradice al principio del máximo y prueba que necesariamente pasa (3) (asintóticamente).



7. Demostración del teorema de Fuchs (4.2).

Se verá que si (c) es falso entonces necesariamente se tienen (a) ó (b).

(c) es falso equivale a que

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln \mathcal{M}(r)}{\ln r} < p < \infty$$

pues el límite $\lim_{r\to\infty} \frac{\ln \mathcal{M}(r)}{\ln r}$ y es p, finito, o bien no existe.

Si, además (a) es falso, sea $\sup_{z\in D} |f(z)| = \mu \leq \infty$.

Se llamará $\mathcal{F}$ al conjunto de todos los reales $A\in(1,\mu)$ tales que en la curva de nivel $\{z\in D: |f(z)| = A\}$ hay un cero de f'

$$\mathcal{F} = \{A\in(1,\mu):\ \exists\ \omega \text{ con } |f(\omega)| = A \text{ tal que } f'(\omega)=0\}$$

7.1 Observaciones.

(i) Como $\inf_{z\in D} |f(z)| \leq 1$, $\sup_{z\in D} |f(z)| = \mu \leq \infty$

y el conjunto $|f(D)| = \{|f(z)|:\ z\in D\}\subset\overline{\mathbb{R}}$ es imagen bajo funciones continuas del conexo D, $|f(D)|$ es conexo en $\overline{\mathbb{R}}$, esto es, es un intervalo. (Donde $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$).

Por todo esto, para cada $A\in(1,\mu)$

$$C_A = \{z\in D:\ |f(z)| = A\} \text{ no es vacío.}$$

(ii) Como f' tiene a lo más una cantidad numerable de ceros, $\mathcal{F}$ es a lo más numerable.

Por todo lo anterior $(1,\mu) - \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Si $A\in(1,\mu)\setminus\mathcal{F}$ entonces $C_A = \{z\in D:\ |f(z)| = A\}$ es una curva ("de nivel"). Es simple y es cerrada o no acotada. Sea $A\in(1,\mu)\setminus\mathcal{F}$ y fija.

7.2 Se define el siguiente conjunto:

$$\mathbb{D}_A = \{z\in D:\ |f(z)| > A\}$$

7.3 Observaciones sobre $\mathbb{D}_A$.

(i) $\mathbb{D}_A \neq \emptyset$ porque $A<\mu$.

(ii) $\mathbb{D}_A$ es abierto pues $\mathbb{D}_A = D\cap|f|^{-1}((A,\infty))$, esto es, es intersección de abiertos.

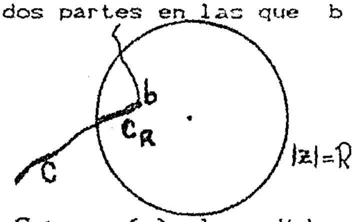
(iii) Cada componente conexa de $\mathbb{D}_A$ es no acotada por el principio del máximo. (Pues en $\partial\mathbb{D}_A$; $|f(z)| = A$ y si fuese acotada se aplicaría el principio del máximo para llegar a una contradicción).

Hay dos casos a considerar:

7.4 Caso 1. Si existe una curva de nivel no acotada.

En este caso, se probará que (a) se verifica.

Se elige un punto b en la curva de nivel no acotada que esté a la mínima distancia del origen. Se llamará C a una de las dos partes en las que b parte a la curva.



Si $R>|b|$ sea C_R la parte de C que está entre b y el primer punto de intersección de C con $|z| = R$.

Sea $\omega_R(z)$ la medida armónica de $\{|z| = R\}$ con respecto a la región $\nabla_R = D_R\setminus C_R$

Si $\varphi_R(z)$ es la medida armónica de $\{|z| = R\}$ con respecto a

$$D_R \setminus \{z = x + iy:\ y=0;\ |b| \le x < R\}$$

por el teorema de Carleman - Milloux (que se puede consultar en [13], p306).

$$\omega_R(z) \le \varphi_R(-|z|) \quad \text{para cada} \quad |z| \le R \qquad \ldots(1)$$

Si se fija $z \in D_R$, la misma referencia indica que

$$\varphi_R(-|z|) < \frac{K}{\sqrt{R}} \qquad \text{donde} \quad K = K(z) \quad \text{es un}$$

real fijo (para cada z).

Ahora bien, si se define

$$u(z) = \log|f(z)| - [\log \mathcal{M}(R)]\omega_R(z) - \log A \qquad \ldots(2)$$

se tiene que:

(i) $u(z)$ es armónica en $D_R \cap \mathbb{D}_A \subset V_R$

Pues como $z \in \mathbb{D}_A$, $f(z) \neq 0$; $\log f(z)$ tiene alguna rama analítica, y $\log|f(z)|$ es la parte real de una función analítica, y por lo tanto, es armónica.

$\log A$ y $\log \mathcal{M}(R)$ son constantes y la medida armónica es una función armónica.

(ii) En $\partial(D_R \cap \mathbb{D}_A)$; $u(z) \le 0$

Demostración.

Como $\quad \partial(D_R \cap \mathbb{D}_A) \subseteq \partial D_R \cap \partial \mathbb{D}_A$

basta analizar cada caso:

Si $z \in \partial D_R \qquad |z| = R \quad$ y $\quad \omega_R(z) = 1 \quad$ pues ω_R es la medida armónica de $\{|\omega| = R\}$ con respecto a V_R, (y precisamente ω_R es la solución al problema de Dirichlet generalizado que vale 1 en ∂D_R) en cuyo caso

$$u(z) = \log|f(z)| - \log \mathcal{M}(R) - \log A$$

pero $\qquad |f(z)| \le \mathcal{M}(R) \quad$ ya que $\quad |z| = R$

así, $u(z) < 0$ en ∂D_R. Si $z \in \partial \mathbb{D}_A \qquad |f(z)| = A$ y en este caso $\qquad u(z) = -\log \mathcal{M}(R)\omega_R(z) \le 0 \quad$ pues ω_R es medida positiva.

(iii) Pero por (i) y (ii) (como vale el principio del máximo para u), $u(z) \le 0$ en $D_R \cap \mathbb{D}_A \qquad \ldots(3)$

Si ahora se elige $z\in D_A$ fijo y se hace crecer a R haciéndolo tender a ∞ en una sucesión de $R_n\in\mathbb{R}$ tales que

$$\log M(R_n) < p\log R_n \quad \text{para cada} \quad n\in\mathbb{N} \qquad \ldots(4)$$

(lo que es posible ya que $\varliminf_{r\to\infty} \dfrac{\log M(r)}{\log r} < p$).

Usando (1), (3), (4) y sustituyendo en (2)

$$0 \geq \log|f(z)| - \frac{K}{\sqrt{R}}(\log R)p - \log A$$

Haciendo tender R a infinito el segundo término se anula:

$$0 \geq \log|f(z)| - \log A \quad \text{y} \quad \log|f(z)| \leq \log A \text{ o bien } \quad |f(z)| \leq A$$

lo que contradice el hecho de que $z\in D_A$.

Se ha probado que, en efecto, (a) se cumple.

7.5. Caso 2. Si todas las curvas de nivel son acotadas. Esto es, que cada componente de la curva de nivel $\{|f(z)| = A\}$ es acotada.

Observación. En general, para una función analítica en una región no acotada (7.5) no implica que toda la curva de nivel sea acotada.

Por ejemplo, si $f(z) = \text{sen}(z)$ y $A=0$ el conjunto

$$\{ \text{sen} z = 0 \} = \{ K\pi : K\in\mathbb{Z} \}$$

está formado por componentes acotadas (pues son puntos) pero el conjunto no es acotado.

Sin embargo gracias a la hipótesis

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} < p < \infty$$

se verá que la afirmación siguiente es válida:

7.6. Afirmación. Bajo las condiciones de (7.5), D_A es vecindad de ∞.

Así, en efecto, $\{|f(z)| = A\}$ es acotado.

La prueba original de este hecho es muy laboriosa pero interesante, y se verá con detalle.

7.6.1. En primer lugar se prueba que sólo una cantidad finita de componentes de $\{ |f(z)| = A\}$ cortan un círculo restringido a D (esto es, $\{ |z| = r \}\cap D$).

Sea $r>0$.

La intersección $\{|z| = r\}\cap D$ es unión de arcos de círculo $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ disjuntos y abiertos en $\{|z| = r\}$. (Es a lo más numerable porque se tiene una base numerable).

Si J es un subarco cerrado de algún $I\in[\{|z|=r\}\cap D]$ entonces existe una vecindad U_J de J contenida en D y tal que la función $g(z) = f(z)\overline{f(r^2/\bar{z})}$ es analítica en U_J.

La existencia de $U_J\subset D$ está garantizada porque J es un subarco cerrado de I, además, para verificar que g es analítica basta calcular las ecuaciones de Cauchy-Riemann para

$$\overline{f\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right)} = \overline{f\left(\frac{r^2}{z^2}\,z\right)} \quad \text{siempre que} \quad z \neq 0,$$

porque f es holomorfa en D.

En particular si $|z| = r$ un cálculo directo prueba que

$$g(z) = |f(z)|^2$$

Si hay una infinidad de puntos en $\{|f(z)|=r\}$ se puede extraer una colección numerable $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se probará que todos excepto un número finito de ellos están contenidos en una misma componente de $\{|f(z)| = A\}$; lo cual prueba exactamente 4.7.6.1, lo que se quería.

Como $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en el compacto $\{|z| = r\}$ tiene una subsucesión convergente, a la que se llamará $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (abusando con la notación).

Sea $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Como $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en D, $z_0\in D$ o bien $z_0\in\partial D$.

Se verá que la segunda opción no es posible:

Claramente $|z_0| = r$ y $g(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} g(z_n) = A^2 = |f(z_0)|^2$ (pues $z_n\in\{|f(z)| = A\}$ para cada $n\in\mathbb{N}$). Pero en cada punto frontera $\omega\in\partial D$ hay una vecindad $U_\omega\in N_\omega$ tal que en $U_\omega\cap D$

$$|f(z)| \le 1 < A \quad \left(\text{porque} \quad \lim_{\substack{z\to\omega \\ z\in D}} |f(z)| \le 1 \quad \omega\in\partial D\right)$$

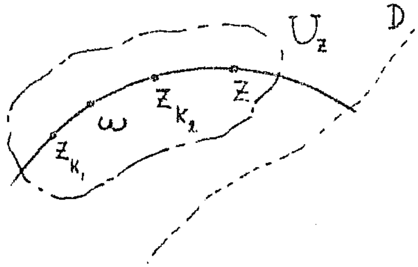
Por lo tanto, $z_0\in D$. Esto es, existe I_K tal que $z_0\in I_K$ y por lo mismo hay algún subarco cerrado de I_K tal que z_0 pertenece a él.

Sea U_{z_0} una vecindad de z_0 donde g es holomorfa.

Como $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in U_{z_0}$ si $n \geq N_0$.

Así, en U_z g es holomorfa y toma una infinidad de veces un mismo valor (A^2). Por el mismo razonamiento que prueba que los ceros de una función analítica son aislados, se ve que g es necesariamente constante en U_z.

Si hubiera naturales K_1 y K_2 mayores que N_0 y tales que z_{K_1} y z_{K_2} están en distintas componentes de $\{|f(z)| = A\}$, entre ellos habría



al menos un punto ω tal que $\omega \in U_z$, $|\omega| = r$ y $\omega \notin \{|f(z)| = A\}$.

Pero como $|\omega| = r$, $g(\omega) = |f(\omega)|^2$ y $g(\omega) \neq A$ lo cual no puede suceder porque g es constante en U_z. Por esto,

$\{ z_{N_0}, z_{N_0+1}, \ldots \}$ están en una misma componente de $\{|f(z)|=A\}$ lo que prueba que sólo un número a lo más finito de componentes de $\{|f(z)| = A\}$ pueden cortar $\{|z| = r\}$.

7.6.2. D_A es conectable por trayectorias:

Por 7.3 (iii) cada componente de D_A es no acotada, por ello basta mostrar que para dos puntos z_1, $z_2 \in D_A$ con norma igual, hay una trayectoria en D_A que los une.

Sean entonces z_1, $z_2 \in D_A$ tales que $|z_1| = |z_2| = r$.

Sea $C_r = \{|z| = r\}$ y tómense z_1, $z_2 \in C_r$.

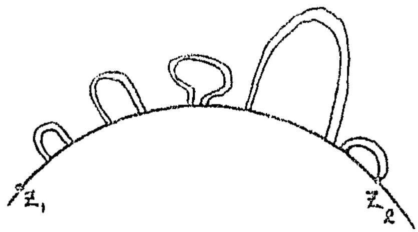
Si alguno de los dos arcos de C_r determinados por z_1 y z_2 está totalmente contenido en D_A ésa es la trayectoria buscada.

Si no es así, se sabe por 4.7.6.1 que hay solo un número finito de componentes de $C_r \cap D_A$. Se toma uno de los dos arcos definidos por z_1 y z_2 en C_r y se llama $C_r^{(1)}$

Se sabe que

$C_r^{(1)} \cap D_A \subset I_1 \cup I_2 \cup \dots I_p$.

Existe al menos una curva contenida en $I_1 \cup I_2 \cup \dots I_p \cup \{f(z)=A\}$ que conecta a z_1 con z_2. Como D_A es abierto se puede despla - zar ligeramente la parte de esta curva formada por $\{|f(z)|=A\}$ al interior de D_A para así obtener una curva completamente conte - nida en D_A que los conecta.



Por lo tanto $\mathbb{D}_A$ es un conjunto conectable por trayectorias.

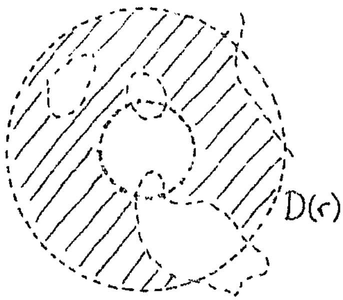
Como también es abierto, es conexo y entonces es una región como en (4.1).

7.6.3. Se llamará $\gamma(r)$ al número de componentes de $\{|f(z)|=A\}$ completamente contenidas en el disco de radio r y se probará que $\gamma(r)$ permanece acotado. Al terminar la prueba de esto últi mo se habrá probado que, efectivamente, $\mathbb{D}_A$ es vecindad de infini to.

Sea $c \geq 1$ fijo.

Sea $D(r) = \mathbb{D}_A \cap \{c < |z| < r\}$

Entonces $\partial D(r) = \mathbb{D}\ c\{z \in \mathbb{C}: \ |z| = c\} \cup \{z \in \mathbb{C}: \ |z| = r\} \cup \{z \in D: \ |f(z)| = A\}$



Se aplica el teorema de Gauss a la función armónica

$$\log|f(z)|$$

Nota. El teorema de Gauss dice que si u es armónica en G, una región acotada, entonces

$$\int_{\partial G} \frac{\partial}{\partial n} u \, ds = 0$$

En realidad es un caso particular al teorema de la divergencia:

Si G es como antes y $u, \upsilon \in C^2(G)$ entonces

$$\int_{\partial G} \left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial n} + \upsilon\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = \int_{G} (u\nabla\upsilon + \upsilon\nabla u)\, dxdy$$

Para $\upsilon=1$ y u armónica, $\nabla u=\nabla\upsilon=0$ y se recupera el teorema de Gauss.

Ahora bien, como $f(z)\neq 0$ en $\mathbb{D}_A$, $\log f(z)$ en $\mathbb{D}_A$ resulta ser una función holomorfa y por ello $\log|f(z)|$, su parte real, es armónica.
Así

$$\int_{\partial D(r)} \frac{\partial}{\partial n} \log|f(z)| \; |ds| = 0$$

n es el vector unitario normal a $\partial D(r)$ y que apunta hacia afuera de $D(r)$. ds es la medida dada por la longitud de arco y de hecho $\frac{\partial}{\partial s}$ corresponde a derivar en la dirección tangencial a la curva.

Observaciones:
(i) En $\{|f(z)| = A\}$ o bien en cada componente de $\{|f(z)|=A\}$, C:

$$\frac{\partial}{\partial n} \log|f(z)| \leq 0$$

pues dentro de $\mathbb{D}_A$ $|f(z)| > A$, y fuera de $\mathbb{D}_A$ $|f(z)|<A$.

(ii) En (i) la desigualdad es estricta.
Demostración.

Lema. Ecuaciones de Cauchy-Riemann generales.
Sea n un vector unitario en $\mathbb{C}$ y φ una función analítica en z.

Si $\varphi(z) = u(z) + i\upsilon(z)$ se tiene que

$$\varphi'(z) = \frac{1}{n} D_{in}\upsilon(z) + \frac{1}{in} D_{in}u(z)$$

La prueba del lema es como sigue:

Como $\varphi'(z)$ existe, existe la derivada en cualquier direc -

ción. En particular, para la dirección de n y para la de in.

Así:

$$\varphi'(z) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(z+tn) - \varphi(z)}{tn} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{u(z+tn) - u(z)}{tn} + i\lim_{t\to 0} \frac{\upsilon(z+tn) - \upsilon(z)}{tn} = \frac{1}{n}[D_n u + iD_n \upsilon]$$

$$\varphi'(z) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(z+itn) - \varphi(z)}{itn} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{u(z+itn) - u(z)}{tn} + i\lim_{t\to 0} \frac{\upsilon(z+itn) - \upsilon(z)}{itn} = \frac{1}{in}[D_{in} u + iD_{in} \upsilon] =$$

$$= \frac{1}{n}[D_{in}\upsilon - iD_{in} u]$$

Esto es, que

$$D_n u = D_{in}\upsilon$$

$$D_n \upsilon = - D_{in} u$$

se acaban de probar las ecuaciones de Cauchy- Riemann para un caso generalizado. $\|$

Aplicando estas ecuaciones a la función analítica en $\mathbb{D}$ $\log f(z)$ y a los vectores n y τ donde n es como en (i) $\hat{y}$ τ es el vector unitario tangente a la curva

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\partial}{\partial n} \log|f(z)| - i\frac{\partial}{\partial \tau} \log|f(z)|$$

que es válido salvo por un factor (-1) porque τ puede ser in o bien $-in$.

Esta identidad se convierte en:

$$|f'(z)| = \left\{\left|\frac{\partial}{\partial n} \log|f(z)| - i\frac{\partial}{\partial \tau} \log|f(z)|\right|\right\}|f(z)|$$

en este caso fue indiferente si $\tau = in$ ó $\tau = -in$. Se verá por qué.

Observaciones:

(1) Como $A \in (1,\mu)\setminus\mathcal{F}$, $|f'(z)| \neq 0$.
(2) f no se anula en C porque $A \neq 0$.
(3) En C,

$$\frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)| = 0.$$

porque $|f(z)|$ es constante a lo largo de C.
(4) Por (1), (2) y (3), si $z \in C$ y de la identidad anterior,

$$\frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)| \neq 0 \qquad \text{y por (1)}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)| < 0$$

(iii) Si C es una curva de $\{|f(z)|=A\}$ entonces

$$\int_C \frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,|ds| \leq -2\pi$$

Demostración. Aplicando el lema (las ecuaciones de Cauchy-Riemann de (ii)) se tiene que

$$\left|\frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\right| = \left|\frac{\partial}{\partial \tau}\arg f(z)\right|$$

Así,

$$0 > \int_C \frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,|ds| = \int_C \frac{\partial}{\partial \tau}(\arg f(z))\,|ds| \quad \ldots(1)$$

Como cada componente de $\{|f(z)| = A\}$ es acotada, sea r suficientemente grande como para que al menos una componente (que se llamará C) esté totalmente contenida en D_r.

Sobre C, la integral en (1) es un múltiplo entero de 2π. Pero además es negativo. Por lo tanto

$$\int_{D(r)\cap\{|f(z)|=A\}} \frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,|ds| \leq \int_C \frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,|ds| \leq -2\pi$$

Más aún: utilizando la función $\gamma:(c,\infty)\to\mathbb{N}$ definida en 4.7.6.3, se observa directamente que

$$0 = \int_{\partial D(r)} \frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,|ds| =$$

$$= \int_{\partial D(r)\cap\{|f(z)|=A\}} \frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,|ds| + \int_{C_r} \frac{\partial}{\partial n}|f(z)|\,|ds| + \int_{C_c} \frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,|ds|$$

(donde $C_r = [\,\partial D(r)\cap\{|z|=r\}]\setminus\{|f(z)|=A\}$

$C_c = [\,\partial D(r)\cap\{|z|=c\}]\setminus\{|f(z)|=A\}$)

Así,

$$0 \leq -2\pi\gamma(r) + \int_{C_r} \frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,|ds| + \int_{C_c} \frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,|ds| \quad \ldots(2)$$

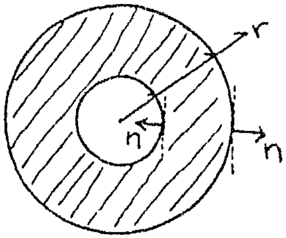
Si r denota la dirección radial (como hasta ahora) es claro que

$$\int_{\{re^{i\varphi}\in D_A\}} \frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,|ds| = \int_{\{\theta\in[0,2\pi)\}\cap\{re^{i\varphi}\in D_A\}} \frac{\partial}{\partial r}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\theta$$

mientras que

$$\int_{\{ce^{i\varphi}\in D_A\}} \frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,|ds| = -\int_{\{\theta\in[0,2\pi)\}\cap\{ce^{i\varphi}\in D_A\}} \left[\frac{\partial}{\partial r}\log|f(re^{i\varphi})|\right]_{r=c} d\theta$$

lo que es evidente de la figura.



ahora bien, como c es constante y $g(\theta) = \frac{\partial}{\partial r}\log|f(re^{i\varphi})|$ es una función continua, el conjunto

$$\left\{g(\theta)=\frac{\partial}{\partial r}\log|f(ce^{i\varphi})| :\ ce^{i\varphi}\in D_A\right\}$$

es acotado. Sea $K=K(c)$ una cota superior de este conjunto.

Así, la segunda integral considerada queda acotada y se tiene que (2) se convierte en:

$$0 \leq -2\pi\gamma(r) + K + \int_{\{\theta:\ re^{i\varphi}\in D_A\}} \frac{\partial}{\partial r}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\theta$$

A ambos lados de esta desigualdad se divide entre r y se integra de c a $\rho\in\mathbb{R}^+$, fijo, para obtener:

$$0 \leq -2\pi\int_c^{\rho}\frac{\gamma(r)}{r}dr + K(\log\rho - \log c) + \int_c^{\rho}\frac{1}{r}\int_{\{re^{i\varphi}\in D_A\}}\frac{\partial}{\partial r}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\theta dr \qquad \ldots(3)$$

Y aplicando el teorema de Fubini

$$\int_c^{\rho}\frac{1}{r}\int_{\{\theta:re^{i\varphi}\in D_A\}} \frac{\partial}{\partial r}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\theta dr = \int_0^{2\pi}\int_{\{r\in[c,\rho]:\ re^{i\varphi}\in D_A\}}\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\log|f(re^{i\varphi})|\,drd\theta \qquad \ldots(4)$$

(iv) La integral de (4) está acotada por $\log^{+}\left(\frac{|f(\rho e^{i\theta})|}{A}\right)$ (Esto es, por la función que toma el valor máximo entre

$$\log\left(\frac{|f(\rho e^{i\theta})|}{A}\right) \text{ y cero }).$$

Demostración.

Como $c\geq 1$, para cada $\theta\in[0,2\pi]$ dada,

$$\int_{\{r\in[c,\rho]:\, re^{i\theta}\in D_A\}} \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\log|f(re^{i\theta})|\,dr \leq \int_{\{r\in[c,\rho]:\, re^{i\theta}\in D_A\}} \frac{\partial}{\partial r}\log|f(re^{i\theta})|\,dr \qquad \ldots(5)$$

y con θ fija, el conjunto $\{r\in[c,\rho]: re^{i\theta}\in D_A\}$

está formado por subintervalos disjuntos de $[c,\rho]$.

Se analizará caso por caso. Si $\rho e^{i\theta}\in D_A$ se tiene que $\log|f(re^{i\theta})|$ toma el valor $\log|f(\rho e^{i\theta})|$ en el extremo de algún intervalo, así como toma el valor $\log|f(ce^{i\theta})|$ si $ce^{i\theta}\in D_A$.

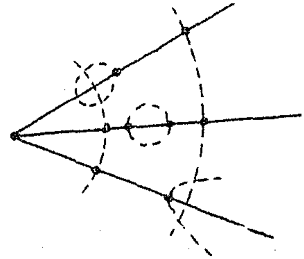
En cualquier otro punto extremo de dichos intervalos, $\log|f(re^{i\theta})| = \log A$ lo que implica que la integral (5) puede valer

$$\log|f(\rho e^{i\theta})| - \log|f(ce^{i\theta})| \leq \log|f(\rho e^{i\theta})| - \log A$$

$$\log|f(\rho e^{i\theta})| - \log A$$

$$\log A - \log|f(ce^{i\theta})| \leq \log|f(\rho e^{i\theta})| - \log A$$

o bien, cero.



Pero en cualquiera de estos cuatro casos, como $|f(\rho e^{i\theta})|>A$ y $|f(ce^{i\theta})| > A$ (si $\rho e^{i\theta}$ y $ce^{i\theta}$ están en D_A) se tiene que están, efectivamente, acotados por $\log^{+}\left(\frac{|f(\rho e^{i\theta})|}{A}\right)$

(v) En este momento se está en condiciones de afirmar lo siguiente:

$$0 \leq -2\pi\int_c^{\rho}\frac{\gamma(r)}{r}dr + (2\pi p + K)\log\rho + K_1 \qquad \ldots(6)$$

con K_1 constante.

Demostración. Por la observación anterior (v), la desigualdad (3) se convierte en la siguiente:

$$0 \leq -2\pi\int_c^\rho \frac{\gamma(r)}{r}dr + K\log\rho - K\log c + \int_0^{2\pi}\log\left(\frac{|f(\rho e^{i\varphi})|}{A}\right)d\theta \qquad \ldots(7)$$

Como
$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln \mathcal{M}(r)}{\ln r} < p < \infty$$

existe una sucesión de radios $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty$ y que satisfacen que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\ln\mathcal{M}(r_n) < p\ln r_n$

Si se elige a $\rho\in(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (y se observa que puede ser tan grande como se quiera) se tiene que

$$\log|f(\rho e^{i\varphi})| \leq \log\mathcal{M}(\rho) < p\log\rho$$

esto es, que (evaluando la última integral en (7))

$$\int_0^{2\pi}\log^+\left(\frac{|f(\rho e^{i\varphi})|}{A}\right)d\theta \leq \int_0^{2\pi}[\,p\log\rho - \log A\,]d\theta = 2\pi p\log\rho - 2\pi\log A$$

y así, basta hacer $K_1 = -2\pi\log A - K\log c$ para recuperar (6).

(vi) Conclusión. Se analizará (6), pues es claro de ahí que $\gamma(r)$ es acotada.

Sea $K_2 = (2\pi p + K)\log c + K_1$. En este caso

$$(2\pi p + K)\log\rho + K_1 = 2\pi\int_c^\rho \frac{p+(K/2\pi)}{r}dr + K_2$$

Es así que (de (6), claro)

$$0 \leq -2\pi\int_c^\rho \left[\frac{\gamma(r) - (p + K/2\pi)}{r}\right]dr + K_2$$

Considerando que $(p + K/2\pi)$ y K_2 son constantes, $\gamma(r)$ es necesariamente acotado. De hecho, una cota válida es $p + K/2\pi$, esto es, el número de componentes está acotado por $p+K/2\pi$.

Como cada componente es acotada, se puede encontrar $R>0$ tal que $\{z\in\mathbb{C}: R<|z|\}\subset\mathbb{D}_A$ esto es, que $\mathbb{D}_A\in N_\infty$.

Ahora bien, en $\{|z|>R\}$ $f(z)$ tiene una expansión en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$$

que es su serie de Laurent, donde, si $n\in\mathbb{Z}$

$$|C_n| = \left|\frac{1}{T^n 2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(Te^{i\theta})}{e^{in\theta}}d\theta\right| \quad \text{para cada } T\geq R.$$

Nuevamente como

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln \mathcal{M}(r)}{\ln r} < p < \infty$$

$$|C_n| < T^{p-n} \qquad \text{para cada} \quad T\geq R$$

y por lo tanto $C_n = 0$ para cada $n>p$.

Pues

$$|C_n|\leq\frac{1}{T^n}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(Te^{i\theta})|d\theta\leq\frac{1}{T^n}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{M}(T)d\theta = \frac{1}{T^n}\mathcal{M}(T)\leq\frac{1}{T^n}T^p=T^{p-n}$$

Pero si $|C_n|=0$ para cada $n\in\mathbb{Z}$ (excepto a lo más, un número finito de $n\in\mathbb{N}$) entonces f tiene un polo en ∞ o bien ∞ es un punto donde hay solamente singularidad removible y en este caso, por el principio del máximo, f es acotada, y el teorema se ha probado.

8. Comentario. La prueba que aquí se expuso del teorema de Fuchs es la que él publicó salvo por pequeñas modificaciones. Fuchs, por ejemplo, al tener, en 7.6.3 la desigualdad (2)

$$0 \leq -2\pi\gamma(r) + \int_{C_r}\frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,|ds| + \int_{C_c}\frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,|ds|$$

asume (sin probarlo) que $\gamma(r)$ es finito, y continúa con el argumento

$$2\pi\gamma(r) \leq \int_{C_r}\frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,|ds| + \int_{C_c}\frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,|ds|$$

hasta el fin. Claramente, despues de bastantes cuentas es claro que $\gamma(r)$ es acotado y por lo tanto finito, pero formalmente constituye una incorrección. (porque lo supone antes de probarlo).

La demostración resulta sorprendente por ingeniosa y diversa.

APENDICE

Teorema de Factorización de Weierstrass.

Introducción.

Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos distintos de cero y tales que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$. Es posible construir una función entera con exactamente ceros en $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La construcción natural o más directa podría ser

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

pero este producto sólo converge absolutamente en caso de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|}$$

converja y por lo tanto puede no representar una función entera.

Sin embargo existen polinomios $p_n(z)$ tales que el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{P_{(n)}(z)} \qquad \ldots(1)$$

converge uniformemente en cada región acotada de $\mathbb{C}$ y por lo tanto representa una función entera.

Más aún, si

$$P_n(z) = \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K}\left(\frac{z}{z_n}\right)^K \qquad \ldots(2)$$

(1) es una función entera.

Demostración. Sean $E(u, 0) = 1-u$; y si $p\in\mathbb{N}$

$$E(u, p) = (1-u)\exp\left(u+\frac{1}{2}u^2+\ldots+\frac{1}{p}u^p\right)$$

A estos polinomios se les llama factores primarios de Weierstrass.

Observación. Si $|u|<1$

$$\log E(u, p) = \log(1-u) + \sum_{K=1}^{p} \frac{u^K}{K} = -\sum_{K=p+1}^{\infty} \frac{u^K}{K}$$

y si $\varepsilon>0$ es tal que $|u| \le \varepsilon < 1$ se tiene que

$$|\log E(u, p)| \le \sum_{K=p+1}^{\infty} |u_K| \le \frac{|u|^{p+1}}{1-\varepsilon}$$

y por ello

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log E\left(\frac{z}{z_n}, n\right)$$

converge uniformemente en cada región que no contenga puntos de la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Así, si $P_n(z)$ se define como en (2) entonces el produc - to (1) converge uniformemente en cada región acotada del plano y por lo tanto representa una función entera con ceros en $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (únicamente, claro).

Todo este proceso es muy sencillo. Lo más interesante y muy útil es el recíproco.

Teorema de Weierstrass.

Cada función entera $f(z)$ tiene una representación en la forma

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)e^{P_{(n)}(z)}$$

donde:

(i) m es la multiplicidad del cero como cero de f.

(ii) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ son los demás ceros de f repetidos tantas veces como su multiplicidad.

(iii) $P_n(z)$ es como en (2).

(iv) $g(z)$ es una función entera.

Demostración.

Sean $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ los ceros de f distintos de cero y m la multiplicidad del cero $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$ porque los ceros son aislados.

Sea $\phi(z)$ el producto

$$\phi(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)e^{P_{(n)}(z)}$$

que representa a una función entera con los mismos ceros que f, por lo cual el cociente f/ϕ no tiene ceros y

$$\frac{f(z)}{\phi(z)} = e^{g(z)}$$

para alguna $g(z)$ entera. ‖

A pesar de la gran importancia del teorema precedente re - sulta incómodo porque el grado de los polinomios $P_n(z)$ es muy grande. Sin embargo hay forma de simplificar la factorización. Esto se estudia en el capítulo II.

Teoremas clásicos y básicos de variable compleja.

Las pruebas de estos teoremas están en [7], capítulo 2.

Teorema de Cauchy.

Sea f analítica en una región D. Sea ν una curva cerrada en D homotópica a cero.

Entonces $\int_{\nu} f\,dz = 0$

En particular si D es simplemente conexa y ν es una curva cerrada en D se tiene que

$$\int_{\nu} f\,dz = 0$$

Teorema. Existencia de antiderivadas.

Sea f analítica en una region (simplemente conexa) D.

Entonces existe una función $F\in\mathcal{H}(D)$ única salvo suma de constantes tal que $F' = f$.

Teorema. Existencia de logaritmo.

Sea D una región tal que $0\notin D$. Entonces existe una función analítica definida en D que se denota $\log z$ y tal que $e^{\log z} = z$ para cada $z\in D$. Además es única salvo por suma de múltiplos enteros de $2\pi i$.

Teorema. Fórmula integral de Cauchy.

Si $f\in\mathcal{H}(D)$ y ν es una curva cerrada en A, homotópica a un punto y $\omega\in D\setminus\nu$; entonces

$$f(\omega)I(\nu,\ \omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\nu}\frac{f(z)}{z-\omega}dz$$

donde $I(\nu,\ \omega)$ es el índice de ν con respecto a ω, esto es,

$$I(\nu,\ \omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\nu}\frac{1}{z-\omega}dz$$

Teorema. Si ν es una curva en $\mathbb{C}$ y g es una función continua definida en ν, y si G se define como

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\nu}\frac{g(\omega)}{\omega-z}d\omega$$

Entonces G es analítica en $\mathbb{C}\setminus\nu$. Además es de clase C^{∞} y su K-ésima derivada está dada por

$$G^{(K)}(z) = \frac{K!}{2\pi i}\int_{\nu}\frac{g(\omega)}{(\omega-z)^{K+1}}d\omega$$

Teorema. Fórmula integral de Cauchy para derivadas.

Si $f\in\mathcal{H}(D)$ y D es una región entonces existen todas las derivadas de f en D. Si $\omega\in D\setminus\nu$ y ν es una curva cerrada homotópica a un punto, entonces

$$f^{(K)}(\omega)I(\nu,\ \omega) = \frac{K!}{2\pi i}\int_{\nu}\frac{f(z)}{(z-\omega)^{K+1}}dz$$

Teorema. Desigualdad de Cauchy. Sea f analítica en la región D, Γ un circulo de radio R en D y con centro ω, tal que

$\{z\in\mathbb{C}:\ |z-\omega|\le R\}\subset D$. Si $|f(z)| \le M$ para cada $z\in\nu$; entonces

$$|f^{(K)}(\omega)| \le \frac{K!}{R^K}M$$

Teorema de Liouville. Si f es entera y acotada entonces es constante.

Teorema Fundamental del Algebra. Si p es un polinomio no constante, $p:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$; entonces existe $\omega\in\mathbb{C}$ tal que $p(\omega) = 0$.

Teorema. Propiedad del valor medio. Si f es analítica en un circulo de radio r y centro ω entonces

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega+re^{i\theta})d\theta$$

Los siguientes teoremas se encuentran en [4], capitulo 4.

Teorema. Sean D una región, $f\in\mathcal{H}(D)$ con ceros $z_1,\ldots,z_m$ y ν una curva cerrada (rectificable) en $D\setminus\{z_1,\ldots,z_m\}$. Si ν es homotópica a un punto entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\nu}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{K=1}^{m} I(\nu,\ z_K)$$

Teorema de la aplicación abierta. Sean G una región y $f\in\mathcal{H}(G)$ no constante. Si $U\subset G$ es abierto entonces $f(U)$ es abierto.

De [10] en el capitulo 10 se pueden encontrar:

Teorema. Si D es una región en $\mathbb{C}$ y $f\in\mathcal{H}(D)$ entonces es representable por serie de potencias.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad \text{con } a\in D \text{ fijo.}$$

y como a es fijo, la sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es única, y

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Teorema. Si $Z(f) = \{z\in D:\ f(z) = 0\}$; $f\in\mathcal{H}(D)$; entonces $Z(f)=D$ o $Z(f)$ no tiene puntos de acumulación en D.

Teorema. Si $f\in\mathcal{H}(D\setminus\{\omega\})$; $\omega\in D$ y D es región, entonces si f es acotada en $B_r(\omega)\setminus\{\omega\}$ para alguna $r>0$ tal que

$$\left[B_r(\omega) - \{\omega\} \right] \subset D$$

entonces f tiene una singularidad removible en ω.

Teorema. Si $\omega \in D$ y $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{\omega\})$ entonces sucede una de las tres siguientes opciones:

(a) f tiene singularidad removible en ω.
(b) f tiene polo en ω, esto es, existen $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ con $m \in \mathbb{N}$

tales que $c_K \neq 0$ para cada $K = 1, 2, \ldots, m$ y

$$f(z) - \sum_{K=1}^{m} \frac{c_K}{(z-\omega)^K}$$ tiene singularidad removible en ω.

(c) f tiene singularidad esencial en ω.

Bibliografia.

[1] BOAS, R.P.; Entire Functions; Academic Press Inc.; 1954

[2] BRELOT, M; Eléments de la Théorie Classique du Potentiel; Centre de Documentation Universitarie, la Sorbonne, Paris 4ª ed.; 1969.

[3] BRICIO, D.; CABALLERO, M.E.; Probabilidad y Potencial; Fascículo I, Comunicación Interna Nº6; Facultad de Ciencias UNAM; 1979.

[4] CONWAY, J.B.; Functions of One Complex Variable; Springer-Verlag; 2ª ed.; 1978.

[5] FUCHS, W.H.J.; A Phragmén-Lindelöf Theorem Conjectured by D.J. Newman. Transactions American Mathematical Society Volume 267, Number 1, September 1981.

[6] LEVIN, D.J.; Zeros of Entire Functions; Vol.5; Translations of Mathematical Monographs; American Mathematical Society; 1964.

[7] MARSDEN, J.E.; Basic Complex Analysis; W.H. Freeman and Company; 1975.

[8] PHRAGMEN, E. y LINDELOF, E.; Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propietés des functions monogénes dans le voisinage d'un point singulier. Acta Math 31; pp 381-406; 1908.

[9] PÓLYA, G.; SZEGÓ, G.; Problems and Theorems in Analysis II; Springer-Verlag; 4ª ed.; 1971.

[10] RUDIN, W.; Análisis Real y Complejo. Mac Graw-Hill; 3ªed.; 1988.

[11] TAYLOR,A.E.; MANN, W.R.; Advanced Calculus; Xerox College Publishing; 2ª ed.; 1972.

[12] TITCHMARSH, E.C.; Theory of Functions; Oxford University Press; 2ª ed.; 1939.

[13] TSUJI, M.; Potential Theory in Modern Function Theory; Chelsea Publishing Company; 2ª ed.; 1958.

[14] YOUNG, R., M.; An Introduction to Nonharmonic Fourier Series; Academic Press; 1980.