300613
1
29

UNIVERSIDAD LA

ESCUELA DE FILOSOFIA
INCORPORADA A LA U. N. A. M.

"REFLEXIONES EN TORNO AL METODO DEDUCTIVO EN LA LOGICA SIMBOLICA"

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
LICENCIADO EN FILOSOFIA
P R E S E N T A

Z. CARLOS SANDOVAL CUELLAR

MEXICO, D. F.   ENERO DE 1989

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCION

El educador no puede prescindir de la lógica que es un instrumento intelectual de carácter universal y apoyará su acción pedagógica sobre la base universal de la conciencia empírica y del conocimiento de todas sus formas.

El valor de la lógica es ir desarrollando el pensamiento deductivo-demostrativo de los educandos. Tiene su aplicación tanto del conocimiento científico, como del filosófico y metafísico.

La lógica tiene un lugar central (o al menos así debería de suceder) en los programas de educación media y superior, ya que fortalece los atributos del educando como: atención, orden, constancia y amor a la objetividad, en cuanto que están intrisecamente ligados a las características de la misma lógica.

Esta atención educativa no es enseñanza sólo formal; es propedéutica para la acción del conocimiento humano, y de las ciencias. El educando encontrará en la lógica las condiciones para el desarrollo de otras cualidades, como la capacidad de observar y comprobar sus hipótesis en la investigación del conocimiento empírico.

Esta disciplina forma los hábitos de rigor, de orden, de congruencia, de certidumbre, de la propiedad de la lengua y de la enunciación precisa del conocimiento.

Un pensamiento lógico tendría un efecto en la normalización de las relaciones humanas, si diera a los conceptos un significado preciso y firme. La lógica conduce a la posibilidad de un mejor entendimiento entre los que tienen el deseo de lograrlo. La lógica, al perfeccionar y agilizar los instrumentos del pensamiento, ella desarrolla el sentido crítico de los hombres y en consecuencia hace que se vean menos extraviados por pseudorazonamientos.

Los conceptos de la lógica penetran en el cuerpo integro de la matemática y las leyes lógicas se aplican en los razonamientos matemáticos.

Ante la dificultad en la comprensión y enseñanza de las matemáticas, tanto algunos alumnos como maestros se han inclinado por el aspecto de la memoria y la mecanización. Este trabajo no pretende minimizar los aspectos de memorización y mecanización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se pretende sustentar el método deductivo, para que una vez comprendidos los principios y fundamentos de la lógica matemática se refuercen con la memoria y la mecanización, funciones éstas importantes, pero que por sí mismas no satisfacen una completa -- comprensión de esta disciplina.

La lógica simbólica es una disciplina cuyo advenimiento a los primeros planos de la docencia es una necesidad de nuestro tiempo. Nuestro uso del lenguaje cotidiano es a menudo vago y nuestro nivel diario de pensamiento con frecuencia es confuso. Por lo que es necesario que en su educación media, el alumno se inicie en una forma de pensamiento que propicie el esmero y la precisión.

El papel principal de un curso de lógica simbólica, consiste en fomentar la disciplina intelectual del estudiante.

Este trabajo no pretende constituírse en un manual de virtudes intelectuales. Es introductorio, no sistemático del método deductivo en la enseñanza de las matemáticas con ayuda de los principios lógicos.

La lógica simbólica comprende una gran variedad de temas, los cuales serían cada uno, motivo suficiente para una invetigación profunda. Un objetivo de este trabajo es una relexión de los temas que comprende el método que propone dicha lógica, lo que implica tocarlos de una manera general.

La bibliografía utilizada de ninguna manera es de carácter especializada, antes al contrario, son libros de texto que son utilizados en algunas universidades.

Por lo dicho anteriormente, se pretende introducir al estudiante de lógica, mediante un lenguaje que a la vez es propio de la lógica y también sencillo en su comprensión. Los ejemplos mostrados son de acuerdo al nivel del trabajo, es decir, ejemplificativos de cada uno de los diferentes temas expuestos.

Capítulo I

LA CIENCIA DE LA LOGICA

1.1. Objeto de estudio de la lógica,

En un sentido restringido, es objeto de estudio de la lógica la teoría de los argumentos válidos o teoría de la inferencia deductiva.

En sentido amplio, incluye la teoría de la definición y la teoría de las clases o conjuntos.

La lógica se ocupa de un segmento determinado de la realidad; los razonamientos, es decir, el estudio sistemático del proceso del razonamiento preciso.

La lógica estudia la estructura de la ciencia y los métodos que emplea en el descubrimiento de la verdad. Determina las condiciones que hacen posible una perfecta clasificación, una hipótesis fecunda, una explicación causal o teleológica, una observación ceñida a la realidad del objeto, un experimento inquisitivo confirmatorio de una ley y la prueba de un acerto o de una inferencia que se acaba de relizar.(1)

(1) TARSKI, Alfred, _Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas_. Madrid, Espasa Calpe, 1977 p. 11

En otras palabras, es una búsqueda de la verdad mediante la exactitud de la combinación científica con la mayor inteligibilidad posible.

El método deductivo clarifica nuestros tipos de pensamiento, guía correctamente nuestros procesos de razonamientos y ayuda a evitar errores.

Una finalidad de la lógica simbólica o matemática es reducir procedimientos verbales complicados a simples dispositivos de letras y símbolos.

La lógica es el arte de hacer inferencias válidas, esto es, inferencias que garanticen la validez de las conclusiones cuando las premisas son verdaderas. Para algunas ciencias es el único medio de establecer verdades formales.

El valor de la lógica simbólica para la investigación es la aclaración de las proposiciones de la ciencia por medio del análisis lógico. Más específicamente, en la descomposición de las proposiciones en sus partes (conceptos), en la reducción paso a paso de los conceptos a conceptos más fundamentales y de las proposiciones a proposiciones más fundamentales.

Un razgo característico de esta lógica consiste en que este filosofar se realiza en estrecho contacto con la ciencia empírica.(1)

(1) CARNAP, Rudolf. La antigua y la nueva lógica. Artículo compilado por AYER, A.J. en El positivismo lógico. Ed. F.C.E. Primera edición, México, 1981. pp. 139,140

1.2 La lógica aristotélica y la lógica matemática

La lógica es una ciencia autónoma aún antes de la aritmética y la geometría. Aristóteles sistematizó su estudio en su obra Organón. Esta concepción de lógica tuvo un estancamiento casi absoluto. Se ha empezado a desarrollar intensivamente, transformándose, adoptando un carácter semejante a una disciplina matemática; da origen a una lógica matemática, simbólica o logística.

La nueva, echa raíces en la aristotélica, no la contradice, la recrea, la sobrepasa en la solidez de sus fundamentos, perfecciona los métodos empleados en su construcción y la enriquece en conceptos investigados y encuentra nuevos teoremas.

La lógica aristotélica en algunos casos incapaz de satisfacer los requisitos de riqueza de contenido, de rigor formal y de utilidad técnica que la nueva tarea le exigía.

En lo que respecta a la precisión en la elaboración de conceptos y a la minuciosidad del análisis, se encuentra la lógica aristotélica en un nivel primitivo.

La creación de un instrumento nuevo y eficaz en lugar del antiguo, requirió mucho tiempo. Junto con los lógicos, los matemáticos, en los últimos años, su origen estuvo determinado por las dificultades halladas en la matemática. Al principio no se pensó en una aplicación más general y filosóficamente más significativa. La nueva lógica permanece aún ignorada por un amplio sector de los filósofos y consecuentemente no se ha podido obtener, para esta disciplina ventajas apreciables. Es probable que el aparato formal, de apariencia matemática, los ahuyente.

Los razgos que diferencian la lógica matemática de la aristotélica y mediante los cuales la lógica nueva ha adquirido importancia especial para toda la ciencia son: la apariencia simbólica con la que suele presentarse la nueva lógica (se hará un desarrollo más completo en el apartado 2.1), el enriquecimiento de contenido, que consiste primordialmente en considerar relaciones en vez de limitarse a predicados, la solución de las "antinomias" por medio de la teoría de los "tipos" y el análisis de conceptos por medio del cual se llega a unificar a la ciencia.

1.3 Desarrollo histórico de la lógica matemática.

Los matemáticos durante dos mil años han estado haciendo inferencias correctas de índole matemático intrincadas, los lógicos y los filósofos han estado analizando la naturaleza de los argumentos válidos. Es de notar que, sólo en las últimas tres o cuatro décadas haya sido desarrollada una teoría formal de la inferencia.

Los lógicos de la antiguedad, los medievales y los postmedievales descubrieron mucho de importancia y significación sobre la lógica, pero el más importante defecto de esta tradición clásica, era su fracaso en relacionar la lógica como teoría clara de la inferencia con la clase de razonamientos deductivos que se usan contínuamente en ciencias y filosofía.

La lógica fue creada por Aristóteles, filósofo griego del IV antes de cristo (384-322), en su obra Organón.

La lógica matemática surgió en las últimas decadas del siglo pasado. Partiendo de ideas de Leibniz y haciendo uso de aportaciones anteriores (De Morgan, 1847; Bolle, 1854), Frege, Peano y Schroder realizaron los primeros intentos para una reconstrucción nueva amplia de la lógica. En base a estos trabajos previos, Whitehead y Russell crearon la gran obra fundamental de la la nueva lógica, los "Principia Mathematica" (1910-1913). Todos los trabajos anteriores a la lógica nueva se apoyan en esta obra, y se proponen a complentarla a reestructurarla. (Pueden mencionarse algunos nombres; la Escuela de Gotinga: Hilbert, Ackermann, Bernays, Behmann y otros; la Escuela Varsovia: Lukasiewicz, Lesniewski, Chwistek, Tarski y otros, Wittgenstein y, relacionado con él, Ramsey).

El estímulo más importante para el desarrollo de la nueva lógica residía en la necesidad de una revisión crítica de los fundamentos de la matemática. La matemática, en especial desde los tiempos de Leibniz y Newton, había hecho progresos enormes y adquirido un gran acopio de conocimientos nuevos. Pero el afianzamiento de los fundamentos no había avanzado a compás con el rápido crecimiento del edificio. Por consiguiente, hace un siglo comenzó a hacerse un esfuerzo mas vigorozo para aclarar los conceptos fundamentales. Este esfuerzo tuvo éxito en muchos casos. Los matemáticos lograron definir en forma rigurosa conceptos tan importantes como, por ejemplo, los de límite, derivada y número complejo. Durante mucho tiempo, esos conceptos habían sido fructuosamente aplicados; y no se debió precisamente a la claridad de dichos conceptos, sino al seguro instinto de los grandes matemáticos el que la insuficiencia de los conceptos elaborados no produjera daño en la matemática.

Los esfuerzos para profundizar los conceptos fundamentales siguieron adelante paso a paso. Los investigadores no se concentraron con retrotaer a los diferentes conceptos del análisis matemático al concepto fundamental de número; exigían que el concepto mismo de número fuese aclarado lógicamente.

Esta investigación de los fundamentos lógicos de la aritmética con un análisis lógico del número como meta, requería perentoriamente un sistema lógico que tuviese la amplitud y la precisión necesaria para realizar el trabajo que se exigía de él. Así, estas investigaciones dieron un impulso especialmente vigorozo al desarrollo de la nueva lógica. Por esta razón tuvieron que trabajar primordialmente en lógica, Peano, Frege, Whitehead, Russell y Hilbert.

La necesidad de una reconstrucción de la lógica se hizo aún más apremiante cuando se advirtieron en el campo de las matemáticas ciertas contradicciones ("antinomias"), las que pronto mostraton tener un carácter lógico más general. Esas contradicciones sólo pudieron resolverse mediante una reconstrucción a fondo de la lógica. (1)

El primer sistema de cálculo proposicional esta en la obra Begriffsschift (Halle, 1879) del lógico alemán G. Frege (1848-1925), quien ha sido el más grande lógico del síglo XIX.

En años recientes ha sido formulada una teoría completamente explícita sobre la inferencia adecuada para manejar todos los casos de razonamientos deductivos por; Kurt Gödel, J. Lukasiewicz, David Hilbert y Alfred Tarski:

(1) CARNAP,. *Op.Cit.* pp. 140,141

1.4 La lógica y las ciencias en general.

La lógica simbólica y las matemáticas, son las ciencias estructurales de la civilización moderna. Si afirmamos que esta lógica es el fundamento de las matemáticas, entonces la lógica es la ciencia básica de la civilización de nuestros días y la matriz de las formas del futuro.(1)

Se distingue la lógica aplicada, que comprende el análisis lógico de los conceptos y las proposiciones de las diferentes ramas de la ciencia, de la lógica pura con sus problemas. Aunque hasta ahora la mayor parte de los trabajos de la nueva lógica trataron sobre cuestiones formales, también en el campo de la lógica aplicada se han alcanzado resultados estimulantes.

Al analizar los conceptos de la ciencia, se ha demostrado que todos esos conceptos pertenecen, de acuerdo con la clasificación habitual, ya sea a las ciencias naturales, a la psicología o a las ciencias sociales, pueden ser referidas a una base común, puesto que pueden retrotraerse a conceptos radicales (básicos) que se refieren a "lo dado", es decir a los contenidos inmediatos de la vivencia. En primer lugar, todos los conceptos relativos a la experiencia subjetiva personal, es decir, los que se aplican a los acontecimientos psicológicos del sujeto cognoscente, pueden referirse a lo dado.

(1) SUPPES, Patrick, *Introducción a la lógica simbólica*. México. C.C.S.A., 1976, p.11.

Todos los conceptos físicos pueden reducirse a conceptos relativos a la propia experiencia subjetiva personal, porque todo acontecimiento físico es confirmable en principio a las experiencias subjetivas de otros, esto es, los que se aplican a los procesos psicológicos de sujetos distintos a nosotros mismos, se constituyen a partir de conceptos físicos.

Finalmente, los conceptos de las ciencias sociales se remontan a conceptos de clases. Resulta, así, un sistema de constitución de los conceptos en el que todo concepto de la ciencia debe, en principio, hallar su lugar de acuerdo con la manera como se ha derivado de otros conceptos y, en última instancia, de lo dado.

La teoría de la constitución, es decir, la teoría de la construcción de un sistema de todos los conceptos científicos sobre una base común, demuestra además que, de una manera correspondiente, toda proposición de la ciencia puede ser retraducida a una proposición acerca de lo dado.

Un segundo sistema de constitución, que incluye igualmente a todos los conceptos, tiene por base a los conceptos físicos, es decir, a conceptos que se aplican a procesos temporoespaciales. Los conceptos de la psicología y de las ciencias se reducen a conceptos de la física como corresponde al principio del conductismo.

Asī, como los medios de la nueva lógica, el análisis lógico conduce al intento de una "ciencia unificada". No hay ciencias diferentes con métodos fundamentalmente distintos ni diferentes fuentes de conocimiento, sino una sóla ciencia. Todos los conocimientos encuentran su lugar en esta ciencia y precísamente como conocimiento que pertenecen, fundamentalmente, a la misma clase; en realidad su aparente diversidad es sólo ilusoria y producto de la multiplicidad de lenguajes con los cuales se les acostumbra representar. (2)

La lógica simbólica en sus escasos cien años de vida ha llegado a los circuitos electrónicos; indicio de su influjo. Los principios de la inferencia lógica y su método deductivo son universalemente aplicados en todas las ramas del conocimiento. La teoría se aplica en tribunales, en análisis filosóficos de las verdades eternas y en general atañe a toda deliberación humana.

En cualquier rama de la ciencia o de las matemáticas, uno de los métodos más poderosos para eliminar la vaguedad conceptual es el de aislar un pequeño número de conceptos (lógicos) básicos para el sujeto de que se trate. El modelo lógico así establecido es traspolado a cualquier ciencia o conocimiento.

(2) *CARNAP, Rudolf., op. Cit., pp. 149,150.*

CAPITULO II

LA SIMBOLIZACION DE LA LOGICA

2.1 Simbolización de proposiciones.

Cuando se mira un tratado de lógica moderna, el primer rasgo externo que impresiona es la utilización de fórmulas simbólicas que parecen análogas a las de la matemática. Este simbolismo fue creado originalmente apoyándose en el de la matemática: pero después se desarrolló una forma más adecuada para los fines específicos de la lógica.

En matemáticas y en general en las ciencias es indiscutible la ventaja del método simbólico de representación sobre el lenguaje formal. Por ejemplo, considérese la proposición; "si se multiplica un número por un segundo número, el resultado es el mismo que el multiplicar el segundo por el primero". Resulta más nítido decir: Dados dos números cualquiera "x" e "y", es valido que $x \cdot y = y \cdot x$, o más breve y claro usando el signo lógisto de universalidad $(\forall x)\ (x \cdot y = y \cdot x)$.

Por el empleo del simbolismo en lógica, las inferencias adquieren un rigor que de otro modo no puede conseguirse. Las inferencias se hacen por medio de operaciones similares a las aritméticas, sobre fórmulas. Este método supuesto garantiza que en la deducción no se deslizarán supuestos inadvertidos, aspectos que es muy difícil evitar en un lenguaje de palabra.

Uno de los objetivos de la lógica es desarrollar un vocabulario que sea preciso y al mismo adecuado para el análisis de los problemas. Para ésto es necesario redactar un conjunto de reglas que sean perfectamente claras y definidas y que estén libres de las vaguedades que pueden hallarse en nuestro lenguaje corriente.

Consideraremos las proposiciones u oraciones que manejamos en nuestra lengua castellana. En lógica dividiremos a estas proposiciones en proposiciones atómicas y proposiciones moleculares.

Las proposiciones atómicas son las más simples (o más básicas) en las que afirmamos un sólo atributo de un sólo sujeto.

Las proposiciones moleculares son la unión de dos o más proposiciones atómicas unidas mediante uno o más términos de enlace, también llamados conectivos lógicos.

Ejemplos de proposiciones atómicas:

El número uno es un número entero.

$$2 + 1 = 3$$

Ejemplo de proposiciones moleculares;

El número uno es entero y es divisible por dos

$2 + 1 = 3$ o $4 - 1 = 3$

Estas proposiciones moleculares se han construído con dos proposiciones atómicas y un término de enlace diferente cada una; la primera el conectivo lógico "y" y la segunda proposición el conectivo "o".

Los símbolos que usaremos en lógica para representar proposiciones atómicas son letras mayúsculas, tales como "P", "Q", "R", "S",...

Las proposiciones matemáticas utilizan sus propios símbolos, es decir, no hay necesidad de simbolizar lo que ya ha sido simbolizado. Esto no implica que tanto la lógica como la matemática su lenguaje sea simbólico en sentido estricto.

2.2 Términos de enlace o conectivos lógicos.

Nos proponemos en este partado establecer reglas precisas y estrictas sobre el uso de ciertas palabras claves, como son: "no", "y", "o", "si...entonces...", "si, y sólo si". En adelante les llamaremos términos de enlace o conectivos lógicos. Estos conceptos junto con "todos" "hay" "idéntico" son los más importantes en la nueva lógica (que en parte son reductibles unos a otros).

NEGACION: su símbolo es " ¬ "

La regla que sigue este conectivo es: la negación de una proposición cierta es falsa, y la negación de una falsa es cierta.

P	¬P
V	F
F	V

CONJUNCION: Se usa la palabra "y" para conjuntar dos oraciones, a fin de hacer una sóla oración que se denominará conjunción.

Se utilizará como símbolo la letra inglesa "&".

La regla que sigue este conectivo es:

La conjunción de dos proposiciones es cierta si, y sólo si ambas proposiciones son ciertas.

P	Q	P & Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

DISYUNCION: Se usa la palabra "o" para efectuar la disyunción de dos proposiciones a fin de hacer una sola.

La regla que sigue este conectivo es:

La disyunción de dos proposiciones es verdadera si, y sólo si cuando al menos una de las proposiciones lo es:

Se aclara que se restringe el uso de la palabra disyunción, al sentido no exclusivo (inclusivo), es decir que una disyunción es verdadera cuando una proposición o la otra son verdaderas o inclusive ambas también lo son.

El uso del conectivo "o" en sentido exclusivo, al afirmar una de las proposiciones excluye a la otra y visceversa.

En el siguiente trabajo se utilizará el sentido de inclusivo.

P	Q	P v Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

El símbolo de la disyunción es "v".

IMPLICACION: Proposición condicional

Se usa la palabra "si...entonces..." para obtener de dos proposiciones atómicas una proposición condicional.

Su símbolo es " $\longrightarrow$ "

Una proposición condicional es falsa si, el antecedente es verdadero y el consecuente es falso: en cualquier otro caso es verdadero.

P	Q	$P \longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

EQUIVALENCIA: Proposiciones Bicondicionales.

Se usa la expresión "si, y sólo si" para obtener de dos proposiciones atómicas.

Su símbolo es " $\longleftrightarrow$ "

Es regla que sigue este conectivo es;

Una proposición bicondicional es verdadera si, y sólo si sus dos miembros son ambos verdaderos o ambos falsos.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Estas reglas que siguen los conectivos se han establecido para componentes atómicos, pero se aclara que también son válidos para componentes moleculares.

En la mayoría de los casos una proposición molecular consta de más de dos proposiciones atómicas. Es necesario establecer ciertas formas de agrupar dichas proposiciones. Para ello nos valderemos del uso de paréntesis. Los paréntesis definirán si se trata de una conjunción o de una disyunción.

"Si se adopta una convención natural con respecto a la denominación relativa de dichos conectivos se obtendrá una considerable reducción de los paréntesis usados en la práctica" (1)

La convención es: Los símbolos " $\longrightarrow$" y " $\longleftrightarrow$ " dominan a " & " y " v " .

Ejemplo:

$S \longrightarrow (H \& U)$ significa $S \longrightarrow H \& U$

$P \longleftrightarrow (Q \vee R)$ significa $P \longleftrightarrow Q \vee R$

(1) SUPPES, *Patrick*, *op. cit.*, p. 34

Por lo que el valor de certeza o falsedad de una proposición molecular está en función del valor de verdad de cada proposición atómica, así como del término de enlace que conecta dichas proposiciones atómicas.

2.3 Constantes y Variables.

Entre las expresiones y símbolos que intervienen en los teoremas y demostraciones matemáticas, distinguimos constantes y variables.

Constante es un término o parte de una proposición que tiene un significado fijo, que permanece inalterado en el curso de las consideraciones. Es el caso de "5^2", "t", "cero", "suma", "Jose Velázquez"...

Una variable es también un término o parte de una proposición que no posee significado propio.

Una variable puede ser sustituída por una expresión que nombre o designe un único objeto. Se utiliza ordinariamente las últimas letras del alfabeto latino; "u", "v", "w", "x", "y", "z",

> " Las variables desempeñan un papel fundamental en la formulación de teoremas matemáticos (...) a la introducción de las variables debemos el desarrollo de un método tan fructífero para la solución de problemas matemáticos, como es el método de las ecuaciones. La invención de las variables costituye un punto culminante en la historia de las matemáticas"
>
> TARSKI, op.cit. pp.36-37

2.4 Cuantificadores universales y Cuantificador existencial.

La palabra cuantificador indica cantidad. Existe la posibilidad en cuanto a la cantidad, de predicar sobre una cantidad determinada a todos los elementos del universo, a ningún elemento de ese universo o alguno(s) elemento(s) del mismo universo.

Resultan tres cuantificadores; todos, ninguno y alguno. Dos de ellos son positivos; todos y alguno. Uno negativo; ninguno.

Los cuantificadores todos y ninguno predican sobre la totalidad del universo, por lo tanto son cuantificadores universales. El cuantificador alguno, predica sobre la existencia de algún elemento que cumple tal o cual predicado. Por ello, este cuantificador recibe el nombre de cuantificador existencial.

El cuantificador universal " Todo ", se predica universalmente de todos los sujetos (términos).

Se simboliza por " $\forall$ "

($\forall x$) se lee; para toda x

Ejemplo:

($\forall x$) ($x=x$); para toda x, x es igual a sí misma.

El cuantificador universal negativo " Ninguno"

En el mismo título está comprendida su noción. Es cuantificador porque se refiere a la cantidad, es universal negativa ya que en el concepto <u>ninguno</u> está contenida la idea de una negación total.

Ejemplo:

(1) Ningún hombre es inmortal.

Si introducimos variables la proposición (1) quedará,

(1') Para toda x, si x es un hombre, entonces x <u>no</u> es inmortal.

Definimos cada proposición atómica.

$Hx \longleftrightarrow$ x es un hombre.

$Ix \longleftrightarrow$ x es inmortal.

Por lo tanto, el término NINGUNO contiene:

Un cuantificador universal más una negación; simbolizado queda,

NINGUNO = $(\forall x) + \neg$

Cuantificador Existencial. Para su comprensión se comenzará por un ejemplo:

(1) No todos los hombres son rectos.

En este ejemplo la negación antecede al cuantificador.

Es la negación de

(2) Todos los hombres son rectos.

Se introducen variables en la proposición (1).

(1') No ocurre que, para todo x, si x es un hombre, entonces x es recto.

Definimos cada proposición;

$Hx \leftrightarrow$ x es un hombre.

$Rx \leftrightarrow$ x es un recto.

Simbolizamos la premisa (1').

$\neg(\forall x)\ (Hx \rightarrow Rx)$

No todos, equivale a decir algunos o por lo menos uno. Al menos un elemento del universo cumple con la proposición.

La forma existencial se simboliza por "E"

(Ex) se lee; existe algún x, tal que cumpla con la proposición...

Ejemplo:

(Ex) (x=x); existe algún elemento x, tal que x sea igual a sí misma.

"Con la cuantificación se completa tanto la comprensión de una proposición como su representación simbólica. Con un cuantificador es más sencillo conocer la veracidad de una proposición "(1).

(1) FLORES MAYER, Fautsch, et.al., Temas selectos de Matemáticas, México, Progreso, 1981, p.49.

CAPITULO III

METODO DEDUCTIVO DE LA MATEMATICA

3.1 Primeros principios; axiomas y teoremas.

Los razonamientos se dividen tradicionalmente en dos tipos diferentes: deductivos e inductivos. Aunque todo razonamiento lleva implícita la afirmación que de sus premisas ofrecen algún fundamento para la verdad de su conclusión, solamente los razonamientos deductivos pretenden de sus premisas(*) que ofrezcan fundamentos concluyentes.

En el caso de los razonamientos deductivos, se usan los términos técnicos (convencionales) "válido" y no "válido". Un razonamiento deductivo es válido cuando sus premisas brindan un fundamento seguro para la conclusión, esto es cuando las premisas y la conclusión están relacionadas de tal manera que es absolutamente (lógicamente) imposible que las premisas sean verdaderas sin que la conclusión también lo sea. Todo razonamiento deductivo es válido o no válido, y la tarea de la lógica deductiva es aclarar la naturaleza de la relación existente entre las premisas y la conclusión en un razonamiento válido(1)

**Proposiciones lógicas verdaderas.*

(1) COPI, Irving M.. *Introducción a la lógica*. Ed. Eudeba. Buenos Aires, 1980. pag. 25

Existen principios que se aplican a la construcción del apartado deductivo de la lógica comunes a las de las matemáticas. Metodología de las ciencias deductivas o Metodología del análisis de la matemática es el nombre de la disciplina que se encarga del análisis y evaluación de dichos principios. La ciencia matemática, en cuanto sistematizada en un cuerpo o sistema, se hace coherente por la demostración. La demostración a su vez, en este sentido, es capaz de producir ciencia.

En absoluto sucede que una demostración no proceda de principios verdaderos (o supuestos verdaderos) y primeros o más inmediatos. De aquí la necesidad de conocer bien los primeros principios en los cuales se funda la demostración.

> "Si existe la ciencia, tal como lo hemos descrito, es necesario admitir también la ciencia demostrativa, la cual procede de los principios verdaderos, primeros, inmediatos, los más conocidos. Los anteriores a todos los demás, y que son causa de la conclusión"
>
> Aristóteles, Analíticos Segundos, L.I., Cap. 2

En matemáticas a estos principios se les conoce como Axiomas (también llamados Postulados). Estos Axiomas son conocidos por sí mismos. Son admitidos como verdaderos (convencionalmente) por que al comparar el sujeto con el predicado, vemos que éste le conviene. Un ejemplo de un axioma es "Por un punto exterior a una recta, sólo se traza una paralela". (*)

Siendo dichos axiomas inmediatos, no pueden ser objeto de demostración alguna, porque si dichos axiomas se apoyasen en alguna demostración, se apoyarían en los principios de la misma, y por lo tanto ya no serán axiomas inmediatos.

La certeza de la conclusión se apoya, en última instancia, en la certeza de los axiomas o primeros principios que en esa demostración en particular se han utilizado.

Por principio y por acuerdo, se hace necesario que en los axiomas no puede haber lugar a falsedad o engaño, no deben depender de alguna condición, son absolutos, deben ser conocidos por sí mismos y no por demostración.

"Este método de construcción se denomina Método Deductivo, y las disciplinas construídas de esta manera se llaman Teorías Deductivas. El método deductivo es el único ~~razgo~~ rasgo esencial que distingue a las disciplinas matemáticas de otras ciencias. Toda teoría matemática es una teoría deductiva" (1)

* *Quinto postulado de la geometría Euclidiana.*

(1) *TARSKI, op. cit., p. 152.*

3.2 Modelo e interpretación de una teoría deductiva.

La aplicación de los principios expuestos en el apartado 3.1 en relación a las teorías deductivas, cumplen con ciertas características que a continuación describimos, para lo cual nos valdremos de un ejemplo sencillo:

"x", "y", "z" designan segmentos.

"S" Se define como el conjunto de los segmentos.

" ≡ " se define como relación de congruencias. (1)

x ≡ y ; se lee, los segmentos "x" y "y" son congruentes.

Adoptaremos dos axiomas:

Axiomal. Para toda x del conjunto S, x ≡ y.

$(\forall x)\ (\ x \equiv y\ )$

Axioma 2. Para toda x, y, z, del conjunto S, si

x ≡ z & y ≡ z, entonces x ≡ y.

$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (\ x \equiv z\ \ \&\ \ Y \equiv z \longrightarrow x \equiv y\ )$

De acuerdo a estos axiomas se pueden deducir varios teoremas: (2)

Teorema 1. Para toda y,z, del conjunto S, si

y≡z, entonces z≡y

$(\forall y\ (\forall z)\ (\ y \equiv z \longrightarrow z \equiv y\ )$

Teorema 2. Para toda x, y, z, del conjunto S, si

x≡y & y≡z entonces x≡z

$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (\ x \equiv y\ \ \&\ \ y \equiv z \longrightarrow x \equiv z\ )$

(1) Congruencia:

(1) El teorema es una proposición matemática, que a diferencia de los axiomas, esos sí necesitan demostración.

La demostración deductiva de estos teoremas sera:

(1)	$(\forall x)\ (x \equiv x)$	Axioma
(2)	$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (x \equiv z\ \&\ y \equiv z \longrightarrow x \equiv y)$..	Axioma
(3)	$(\forall y)\ (\forall z)\ (z \equiv z\ \&\ y \equiv z \longrightarrow z \equiv y)$......	Sustitución de z en x en el axioma 2
(4)	$(\forall y)\ (\forall z)\ (y \equiv z \longrightarrow z \equiv y)$..........	Teorema 1. Se deduce de la premisa 3 y el axioma 1
(5)	$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (x \equiv y\ \&\ y \equiv z \longrightarrow x \equiv z)$	Teorema 2. Sustitución de y en z en el axioma 2

Obtuvimos los teoremas 1 (línea 4) y teorema 2 (línea 5) a partir de premisas que de antemano postulamos como ciertas.

Observaciones:

a) Esta teoría en miniatura, se basa en un sistema de axiomas y definiciones.

b) No se agota el conocimiento sobre segmentos sólo con estos dos teoremas.

c) Toda demostración puede ser en gran medida generalizada.

d) Podemos correlacionar con cualquier teorema de nuestra teoría una ley correspondiente a la lógica.

e) A ésto se le llama un modelo lógico-matemático.

f) Se obtiene a partir de las leyes lógicas universales.

g) Cualquier modelo del axioma sistemático satisface todos los teoremas deducidos de otros axiomas.

Por analogía y siguiendo el modelo lógico-matemático de segmentos y congruencia que se acaba de demostrar, se reemplazará las definiciones en todos los axiomas y teoremas por variables diferentes.

El símbolo "S" por la variable "K" que denota clases.

El símbolo "≡" por la variable "R" que denota relaciones.

Así:

Axioma I. $(\forall x)\ (x \equiv x)$

Axioma I' $(\forall x)\ (x\ R\ x)$ Propiedad relfexiva.

Para todo elemento x de la clase K, x tiene la relación R con x.

Axioma II $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (xRz\ \&\ yRz \longrightarrow xRy)$

Principio de transitividad

Para todo elemento x,y,z, de la clase K, si x tiene la relación R con z& y tiene la relación R con el elemento y.

Teorema I. $(\forall x)\ (\forall y)\ (y \equiv z \longrightarrow z \equiv y)$

Teorema I' $(\forall y)\ (\forall z)\ (yRz \longrightarrow zRy)$

Propiedad simétrica.

Teorema II $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (x \equiv y\ \&\ y \equiv z \longrightarrow x = z)$

Teorema II' $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall y)\ (xRy\ \&\ yRz \longrightarrow xRz)$

Propiedad transitiva.

Con estas dos demostraciones se quiso dar a entender el carácter de "modelo" que un razonamiento lógico tiene con respecto a cualquier área del conocimiento, especialmente con las matemáticas.

3.3 Carácter formal de las ciencias deductivas.

> "Todo teorema de una teoría deductiva dada es satisfecho por cualquier modelo del sistema de axiomas de esta teoría; y además de todo teorema corresponde un enunciado general que puede ser formulado y demostrado dentro de un marco de la lógica y que establece el hecho de que el teorema en cuestión es satisfecho por cualquier modelo de esa naturaleza" (1)

Seleccionar determinadas constantes o variables de otra teoría deductiva cualquiera, colocarlas en los axiomas en lugar de las definiciones y demostrar que las proposiciones obtenidas de esta manera son asersiones de esta otra teoría.

Todos los teoremas demostrados sobre la base de un sistema de axiomas dado siguen válidos para cualquier interpretación del sistema. J. Harharand.

A la lógica se le llama ciencia formal porque despreciamos el significado de los axiomas y tomamos en cuenta sólamente su forma.

(1) TARSKI., *op. cit.*, pag. 159-160

3.4 Reglas de inferencia y demostración.

Con lo visto en los apartados anteriores, tenemos elementos suficientes para comenzar el problema que nos ocupa este trabajo; un método eficaz, constante y seguro en la enseñanza de las matemáticas. Estamos hablando del método deductivo. Dicho método sigue relgas muy simples:

a) Se dan algunas proposiciones. Las aceptamos como verdaderas. Se les conoce como axiomas.

b) Se conoce ciertas reglas lógicas de inferencia.

c) A partir de los axiomas y del uso correcto de las reglas de inferencia, deducimos otras proposiciones verdaderas, llamadas en matemáticas, teoremas.

d) Con todos los teoremas y axiomas deducimos otras proposiciones, éstas a su vez dan origen a otras, y así sucesivamente llegamos a la conclusión deseada.

En general nos guiará el principio; "De premisas (proposiciones) verdaderas se obtienen sólo conclusiones verdaderas" (1)

Enunciaremos algunas, las más importantes reglas de inferencia con ejemplos matemáticos de aplicación:

3.41 Regla de Modus Ponendo Ponens.

Se abreviará por "PP".

Dada la premisa	$P \longrightarrow Q$
Si se cumple el antecedente	$\underline{P\qquad\qquad}$
Se concluye el consecuente	Q

(1) SUPPES, P., HILL, S., *Primer curso de lógica matemática.* México, Ed. Reverté, 1979, p. 44

Ejemplo:

Premisa	$x \neq 0 \longrightarrow x+y > 1$
Premisa	$x \neq 0$
Conclusión	$x+y > 1$

3.4.2 Regla de Modus Tollendo Tollens.

Se abreviará por "TT"

Premisa	$P \longrightarrow Q$	Proposición condicional
Premisa	$\neg Q$	No se cumple el consecuente
Conclusión	$\neg P$	No se cumple el antecedente

Ejemplo:

Premisa	$x=y \longrightarrow x=z$
Premisa	$x \neq z$
Conclusión	$x \neq y$

3.4.3 Regla de Doble Negación.

Se abreviará por "DN"

Premisa	P		Premisa	$\neg\neg P$
Conclusión	$\neg\neg P$	También	Conclusión	P

Ejemplo:

Premisa	$x = x$
Conclusión	$\neg(x \neq x)$

También

Premisa	$\neg(x \neq x)$
Conclusión	$x=x$

3.4.4 Ley de Simplificación.

Se abreviará por " S "

Premisa P & Q

Conclusión P

Conclusión Q

Ejemplo:

Premisa $2+1=3$ & $x^2 = x(x)$

Conclusión $2+1=3$

Conclusión $x^2=x(x)$

3.4.5 Ley de Adjunción.

Se abreviará por " A "

Premisa P

Premisa Q

Conclusión P & Q

Ejemplo:

Premisa $2+1=3$

Premisa $x^2=x(x)$

Conclusión $2+1=3$ & $x^2=(x)\ (x)$

3.4.6 Regla de Modus Tollendo Ponens.

Se abreviará por "TP "

Premisa	$P \vee Q$		Premisa	$P \vee Q$
Premisa	$\neg P$	También	Premisa	$\neg Q$
Conclusión	Q		Conclusión	P

Ejemplo:

Premisa	$x=y \vee x=z$
Premisa	$x \neq y$
Conclusión	$x=z$

3.4.7 Ley de Adición.

Se abreviará por " LA "

Premisa	P
Conclusión	$P \vee Q$

Ejemplo:

Premisa	$(2+2) + 2 = 6$
Conclusión	$(2+2) + 2 = 6 \vee 3x^2=1$

3.4.8 Ley del Silogismo Hipotético.

Se abreviará por "SH "

Premisa	$P \longrightarrow Q$
Premisa	$Q \longrightarrow R$
Conclusión	$P \longrightarrow R$

Ejemplo:

Premisa	$(2+2)+2=6 \longrightarrow 3(2)=6$
Premisa	$3(2)=6 \longrightarrow 3+3=6$
Conclusión	$(2+2)+=6 \longrightarrow 3+3=6$

3.4.9 Ley del Silogismo Disyuntivo.

Se abreviará por "SD"

Premisa	$P \vee Q$
Premisa	$P \longrightarrow R$
Premisa	$Q \longrightarrow S$
Conclusión	$R \vee S$

Ejemplo:

Premisa	$x+y=7 \vee y-x=2$
Premisa	$x+y=7 \longrightarrow x=2$
Premisa	$y-x=2 \longrightarrow x=3$
Conclusión	$x=2 \vee x=3$

3.4.10 Ley de Simplificación Disyuntiva

Se abreviará por " DP "

Premisa	$P \vee P$
Conclusión	P

Ejejmplo:

Premisa	$z=x \vee z=x$
Conclusión	$z=x$

3.4.11 Leyes Conmutativas.

Se abreviará por " LC "

Premisa	$\underline{P \& Q}$	Premisa	$\underline{P \vee Q}$
Conclusión	$Q \& P$	Premisa	$Q \vee P$

Ejemplo:

Premisa	$\underline{x=1 \;\&\; z=2}$
Conclusión	$z=2 \;\&\; x=1$

3.4.12 Leyes de Morgan.

Se abreviará por " LM "

Premisa	$\underline{P \& Q}$	Premisa	$\underline{P \vee Q}$
Conclusión	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	Conclusión	$\neg(\neg P \& \neg Q)$

Ejemplo:

Premisa	$\underline{2+1=3 \;\&\; 4+3=7}$
Conclusión	$\neg(2+1\neq 3 \vee 4+3\neq 7)$

3.4.13 Ley de las Proposiciones Bicondicionales.

Se simboliza por " LB "

Premisa	$\underline{P \longleftrightarrow Q}$
Conclusión	$P \longrightarrow Q$
Conclusión	$Q \longrightarrow P$

Ejemplo:

Premisa	$\underline{3(5)=15 \longleftrightarrow 5+5+5=15}$
Conclusión	$3(5)=15 \longrightarrow 5+5+5=15$
Conclusión	$5+5+5=15 \longrightarrow 3(5)=15$

3.5 Deducción Proposicional.

Hemos enunciado algunas reglas de inferencia que permiten pasar lógicamente de un conjunto de afirmaciones a otra afirmación.

La demostración es un conjunto de pasos que se deduce lógicamente de un conjunto de premisas verdaderas. Cada paso que se da es permitido por una regla. Se demuestra que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas dadas.

Con el manejo de las pocas reglas de inferencia comenzaremos el método de las deducciones formales.

Un razonamiento es símplemente un conjunto de proposiciones como premisas y una conclusión deducida de dichas premisas.

> "Si se comparan las reglas de la lógica a las de un juego; y se puede imaginar la deducción como la realización de un juego. La deducción o demostración es el juego y las reglas del juego son precísamente las reglas de inferencia. El objetivo del juego es la conclusión deseada"
>
> SUPPES, HILL, op.cit., p.71

Se ejemplifica sencillamente las reglas vistas hasta ahora. Se termina este capítulo aplicando las reglas de inferencia.

Demostrar: S

(1) $\neg T \vee R$ .... Premisa dada.

(2) T .... Premisa dada.

(3) $\neg S \longrightarrow \neg R$ .... Premisa dada.

(4) R .... Aplicación de la regla "TP". Premisas 2 & 1

(5) $\neg\neg S$ .... Aplicación de la regla "TT". Premisas 4 & 3

(6) S .... Aplicación de la regla "DN". Premisa 5.

L.Q.Q.D. (lo que queríamos demostrar)

Demostrar: $x=3$

(1) $x-2=1 \ \& \ 2-x\neq 1$ .... Premisa dada

(3) $x=1 \longrightarrow 2-x=1$ .... Premisa dada.

(3) $x=1 \vee x+2=5$ .... Premisa dada.

(4) $(x+2=5 \ \& \ x-2=1) \longrightarrow x=3$... Premisa dada.

(5) $2-x\neq 1$ .... Ley de simplificación. Premisa 1

(6) $x\neq 1$ .... Tollendo Tollens. Premisas 5 & 2

(7) $x+2=5$ .... Tollendo Ponens. Premisas 6 & 3

(8) $x-2=1$ .... Simplificación. Premisa 1

(9) $x+2=5 \ \& \ x-2=1$ .... Ley de Adjunción. Premisas 7 & 8

(10) $x=3$ .... Ponendo Ponens. Premisas 9 & 4

L.Q.Q.D

Demostrar: $\neg(y=2 \ \& \ x+2y\neq 7)$

(1) $5x=15 \longleftrightarrow x=3$ .... Premisa dada.

(2) $5x=15 \ \& \ 4x=12$ .... Premisa dada.

(3) $x=3 \longrightarrow x+2y=7$ .... Premisa dada.

(4) $5x=15 \longrightarrow x=3$ .... LB, 1

(5) $5x=15$ .... S, 2

(6) $x=3$ .... PP, 5,4

(7) $x+2y=7$ .... PP, 6,3

(8) $y\neq 2 \ v \ x+2y=7$ .... LA, 7

(9) $\neg(y=2 \ \& \ x+2y\neq 7)$ .... LM, 8

L.Q.Q.D.

Demostrar: $y=1 \ v \ y=9$

(1) $\neg (x=2 \ v \ x=8) \longrightarrow x=6$ ..... P

(2) $2x+3y=21 \ \& \ x\neq 6$ ..... P

(3) $x=2 \longrightarrow y=9$ ..... P

(4) $x=8 \longrightarrow y=1$ ..... P

(5) $x\neq 6$ ..... S, 2

(6) $\neg\neg(x=2 \ v \ x=8)$ ..... TT, 5,1

(7) $x=2 \ v \ x=8$ ..... DN, 6

(8) $y=9 \ v \ y=1$ ..... SD, 7,3,4

(9) $y=1 \ v \ y=9$ ..... LC, 8

L.Q.Q.D.

CAPITULO IV

METODOS DE CERTEZA Y VALIDEZ DE UNA DEMOSTRACION DEDUCTIVA.

4.1 Uso de las tablas de certeza.

Comenzaremos aclarando que el estudio que nos ocupa, está marcado dentro de una lógica llamada bivalente. Por lo que dicha lógica maneja sólamente dos valores de verdad: verdadero o falso. Es decir, una proposición cualquiera, referente a cualquier rama del conocimiento, es calificada únicamente como totalmente verdadera o totalmente falsa.

Si se conocen los valores de verdad de una proposición atómica, es posible entonces conocer los valores de verdad de una proposición molecular, añadiendo el tipo de conectivo lógico que une a dichas proposiciones atómicas.

Resumiendo, el valor de verdad de una proposición molecular está en función del valor de verdad de cada una de las proposiciones atómicas que la componen y del conectivo lógico que las une.

Tenemos por ejemplo la siguiente proposición:

1) París está en Inglaterra o en Francia.

Se analiza el valor de verdad de cada proposición atómica;

2) París está en Inglaterra.

El valor de verdad, de hecho, es falsa.

3) París está en Francia.

El valor de verdad, de hecho, es verdadera.

Debido a que el conectivo lógico que une a dicha proposición molecular es el conectivo " o ", la proposición 1) - es verdadera.

Tenemos la misma proposición 1) para el siguiente ejemplo, sólo que ahí se cambia el conectivo "o" por "y":

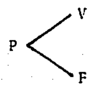
4) París está en Inglaterra y en Francia.

El valor de verdad de esta proposición molecular es ahora falso. A pesar de que los valores de verdad de sus proposiciones atómicas son los mismos a los valores de verdad de las proposiciones atómicas de 1).

Todo ésto debido a que ahora se utilizó el conectivo "y" que como se vió en el apartado 2.2, es condición necesaria que en una conjunción que todos sus miembros sean verdaderos para que ésta lo sea.

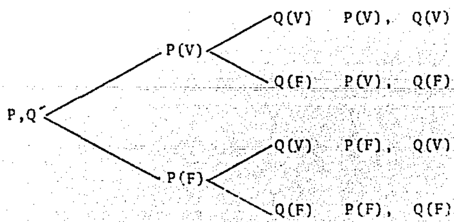
Se hace evidente que si a la proposición 1) se le asigna el conectivo "si, entonces" o el conectivo "si y sólo si",el valor de verdad que se obtenga será distinto a los dos ejemplos anteriores. Más en concreto, a pesar de poseer las mismas proposiciones atómicas, el hecho de llevar un nexo distinto hace que necesariamente el valor de verdad de una y otra proposición molecular, difiera.

Volviendo a nuestra primera aseveración, la proposición "P" es calificada como falsa "F" o como verdadera "V"



Si se combinan dos proposiciones atómicas P y Q, ambas con dos valores de certeza, dan origen a cuatro y sólo cuatro posibilidades de combinación.

Analizemos mediante un árbol de deciciones, cuáles y cuantas combinaciones resultan.



La primera combinación P y Q son ambas verdaderas.

La segunda combinación P es verdadera y Q es falsa.

La tercera combinación P es falsa y Q es verdadera.

Y la cuarta combinación P es falsa y Q es falsa.

Las combinaciones anteriores dan origen a la construcción de Tablas de Verdad o Matriz. Donde se atiende a todas las posibilidades de combinación de dos premísas, P y Q y sus correspondientes conectivos lógicos.

Siguiendo el sentido que a cada conectivo lógico se le dió en el apartado 2.2 de este trabajo, las "Tablas de certeza" quedan de las siguiente manera:

P	Q	P & Q	P v Q	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Y la tabla de verdad para la función P

P	¬P
V	F
F	V

Algunas proposiciones tienen sólo "V" en su tabla de certeza, es decir dicha proposición será siempre un enunciado verdadero sean cuales fueren los enunciados que traten, verdadero o falsos. Su validez se reconoce por medio de su forma.

Estas proposiciones se llaman tautologías.

La proposición " $P \vee \neg P$ " es una Tautología, cosa que se verifica al construír una tabla de verdad:

P	$\neg$P	P v $\neg$P
V	F	V
F	V	V

Si, en cambio, la última columna (3), de la siguiente tabla, contiene por lo menos un símblo F; la proposición será falsa, y particularmente será verdadera sólo para ciertas asignaciones de certeza. Un ejemplo de ésto es la proposición "P & $\neg$Q".

P	Q	P & $\neg$Q			
V	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F
F	V	F	F	F	V
F	F	F	F	V	F
Paso		1	3	2	1

La proposición "P & ˈQ ", es verdadera únicamente en el caso de que P sea Verdadera y Q sea Falsa; como lo atestigua la segunda linea de la tabla.

La otra y última posibilidad, se da en el caso que la última columna contenga sólamente símbolos F. En dicho caso caso dará origen a una contradicción, o sea que es falsa para cualesquiera enunciados. Por ejemplo, la proposición " P & →P" es una contradicción, lo cual se verifica por la tabla:

P	ˈP	P & ˈP
V	F	F
F	V	F

Con ayuda de las dos tablas descritas en la primera parte del capítulo, llamada Tablas de Verdad Fundamentales, podemos construír tablas de verdad Derivadas para cualquier proposición molecular.

El valor de verdad de la poposición molecular

$$(P \longrightarrow Q) \ \& \ (Q \longrightarrow R) \longrightarrow (P \longrightarrow R)$$

que a su vez es un principio fundamental del razonamiento lógico, " la ley del Principio Hipotético ".

P	Q	R	(P	—→	Q)	&	(Q	—→	R)	—→	(P	—→	R)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	F
V	F	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	V	F	V	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F
Paso			1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1

En esta tabla se necesitaron ocho líneas para abarcar todas las combinaciones de V y F para las tres variables o proposiciones atómicas P, Q y R.

Dicha tabla nos ha indicado la verdad universal de la proposición estudiada. La columna número 4, indica el símbolo V para cualquier asignación de certeza, de una proposición de la forma $(P \longrightarrow Q)$ & $(Q \longrightarrow R) \longrightarrow (P \longrightarrow R)$.

Pasando al análisis de las tablas en general, diremos que el número de combinaciones posibles de certeza o falsedad dependen el Número de Proposiciones Atómicas.

El número total de posibles combinaciones está dado por la función 2^n, donde n es el número de proposiciones atómicas que intervienen, siendo "2" los valores de certeza.

En el ejemplo anterior, teníamos tres proposiciones atómicas; entonces, $2^3=8$, lo que da ocho líneas.

Para el caso de cuatro proposiciones atómicas, es $2^4=16$ líneas. Una manera rápida, fácil y eficiente de combinar los valores de verdad de manera que sus combinaciones no se repitan ni falte alguna es el siguiente: sea el caso de combinar las proposiciones P,Q,R y S. Por la fórmula sabemos que se dan 16 combinaciones distintas. Primero, disponemos de 16 renglones o líneas. Segundo, formamos cuatro columnas, una para cada proposición. Tercero, a la columna formada por "S" le asignamos V a la primera línea, F a la segunda, V a la tercera F a la cuarta, y así sucesivamente hasta la columna 16. Cuatro, a la columna formada por "R" las dos primeras líneas son verdaderas, las otras dos falsas, y así sucesivamente. Quinto, la columna formada por "Q" las cuatro primeras líneas son verdaderas, las siguientes cuatro falsas, y así sucesivamente. Sexto, las primeras ocho columnas son verdaderas y las ocho siguientes falsas.

Ejemplificaremos lo dicho por la siguiente tabla de combinaciones:

P	Q	R	S
V	V	V	V
V	V	V	F
V	V	F	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	V	F
V	F	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	V	F
F	F	F	V
F	F	F	F
8/8	4/4	2/2	1/1

Como se puede observar ninguna de las 16 combinaciones se ha repetido y ninguna hace falta.

Otra manera de obtener dichas combinaciones es realizar un árbol de decisiones, como el realizado en la primera parte del capítulo para el caso de dos proposiciones atómicas.

4.2 La prueba de invalidez

En el capítulo I se dijo que la lógica es el arte de hacer inferencias válidas o la teoría de los argumentos válidos. Por lo que es necesario un método que permita comprobar si una inferencia es válida. Es válida si la conclusión es consecuencia lógica de las premisas de dicho argumento.

Las tablas de certeza proporcionan un método mecánico para comprobar la validez de una inferencia.

Partimos de la base que de proposiciones ciertas se obtienen conclusiones ciertas. Si una inferencia es váldia, entonces en cada posible asignación o interpretación de certeza, si las premisas son ciertas, la conclusión del razonamiento será también cierta.

El método de comprobar la validez de cualquier razonamiento es el siguiente:

1o. Se escriben todas las combinaciones posibles de certeza para las proposiciones atómicas incluídas en el ejemplo.

2o. Se determinan los valores de certeza para todas las premisas y de la conclusión del razonamiento.

3o. Se buscan las líneas que presentan todas las premisas como proposiciones ciertas.

4o. Si la conclusión es también cierta para cada una de estas líneas, entonces el razonamiento es válido.

5o. Si hay alguna línea para la que todos los valores sean ciertos y la conclusión falsa, entonces el razonamiento no es válido y la conclusión no es una conclusión lógica.

Ahora se analizará, a manera de ejemplo, el siguiente razonamiento matemático.

(1) Si $x=0$ y $y=z$, entonces $y > 1$

(2) $y > 1$

(3) por lo tanto, $y \neq z$

Se desea saber si este razonamiento es válido.

Aparecen en él tres proposiciones atómicas:

" $x=0$ "

" $y=z$ "

" $y>1$ "

Puesto que cada proposición atómica puede ser verdadera o flasa, hay $2^3=8$ combinaciones de certeza y, por tanto, ocho líneas en la tabla de certeza:

$x=0$	$y=z$	$y > 1$	$x=0$ & $y=z \longrightarrow y > 1$	$y > 1$	$y \neq z$
V	V	V	V	V	F
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

Como indican las líneas 4, 6, y 8 las dos premisas del razonamiento son ciertas. Unicamente que la línea de la conclusión 6 es falsa, por lo que el razonamiento es no válido.

Si se toma para x el valor de 1, y para y & z el valor de cero, se puede ver ésto fácilmente:

(1) $1=0$ & $0=0 \longrightarrow 0 > 1$

(2) $0 \not> 1$

(3) por tanto, $0 \neq 0$

4.3 Demostración condicional:

Si un hombre de ciencia, un filósofo o un teólogo desea introducir en su disciplina leyes generales relativas a su esfera de conocimeinto, normalmente parte de hipótesis. Dichas hipótesis son comparadas, puestas a prueba o vistas a través de la lente de aquellas leyes, axiomas o principios ya demostrados por sus respectivas disciplinas. La lógica tendrá cuidado de demostrar si dichas hipótesis son obtenidas o pueden ser demostradas por leyes aceptadas ya como verdaderas.

Los teoremas matemáticos, y en especial, los de carácter universal, tienden a la forma de implicaciones (condicionales). El antecedente es llamado hipótesis y el consecuente es llamado conclusión.

En palabras sencillas, en una demostración lógica algunas premisas se han establecido como verdaderas, si nos es posible introducir una nueva premisa a manera de hipótesis, entonces obtendríamos nuevas premisas en las que su verdad estaría condicionada a la demostración de dicha premisa (hipótesis).

Durante aproximadamente 20 siglos la geometría tuvo su base en algunos axiomas matemáticos introducidos por Euclides. Uno de ellos se explicaba así; por un punto exterior a una recta únicamente es posible trazar una paralela. Lobatchevsky propone una hipótesis diferente al 5º axioma de Euclides; "por un punto exterior a una recta pasan dos paralelas que separan las infinitas rectas no secantes de las infinitas secantes", a su vez Riemann presenta otra hipótesis diferente a las dos anteriores; "por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela".

Los nuevos teoremas (hipótesis), una vez demostrados y con base en los otros cuatro axiomas de Euclides dieron origen a las gemometrías no euclidianas.

Para efectos de una demostración formal (lógica), se suponen o se aceptan como verdaderas ciertas premisas. Una vez aceptadas éstas, se lanza una hipótesis a manera de nueva premisa, es decir se solicita una petición de principio.

La conclusión tendrá la forma de condicional. El antecedente es la hipótesis propuesta y el consecuente es la conclusión obtenida en base a las premisas inciales con la hipótesis aplicando las reglas de inferencia.

Veámoslo mediante el siguiente ejemplo:

(1) $x \neq 2 \longrightarrow x > y \vee y > x$ ....Premisa (verdadera)

(2) $y \neq 2 \vee x = 2$ ....Premisa (verdadera)

(3) $x > y \vee y > x \longrightarrow x \neq 2$ ....Premisa (verdadera)

(4) si $y = 2$ ....Hipótesis

(5) $x = 2$ ....Tollendo tollens 4.2

(6) $\neg(x > y \vee y > x)$ ....Tollendo Ponens 5.3

(7) $\neg(x \neq y)$ ....Tollendo Ponens 6.1

(8) $x = y)$ ....Doble negación 7.

(9) $y = 2 \longrightarrow x = 4$ ....Demostración Condicional 4.8

Las premisas 1,2 y 3 son premisas demostradas con anterioridad. Si se acepta como verdadera $y=2$ (premisa 4), entonces aplicando las reglas de inferencia conocidas concluímos que $x=y$ (premisa 8). Por lo que en la línea 9 se concluye: si $y=2$, entonces $x=y$.

4.4 Consistencia de un razonamiento.

Algunas veces no se está interesado en deducir una conclusión particular de un conjunto de premisas, sino en decidir si las premisas son inconsistentes. Esta es, a menudo, la meta principal de un abogado que interroga a un testigo en representación de la parte contraria. Si se puede demostrar que el testigo es inocente, es decir que el testimonio es inconsistente, habrá avanzado bastante en el propósito de demostrar la invalidez de la prueba presentada por ese testigo. La noción intuitiva de inconsitencia es que un conjunto de premisas es inconsistente si no pueden ser ciertas todas al mismo tiempo.

Un razonamiento con premisas inconsistentes no puede garantizar la verdad de ninguna conclusión, puesto que sus premisas son necesariamente falsas.

Por ejemplo, si un testigo declara que:

1) Blenker estaba en Washington, D.C., la noche del asesinato y Blenker asegura que:
2) El, Blenker, no estaba en Washington, D.C., la noche del asesinato,

entonces sabemos de inmediato que alguien está mintiendo, pues 1) y 2) no pueden ser simultáneamente verdaderas, esto es, las aseveraciones de Blenker y el testigo son inconsistentes.

Se dice que dos proposiciones son contradictorias si una es la negación de la otra. Una contradicción, entonces, es la conjunción de una proposición y su negación. La constradicción es conocida también como principio de contradicción.

Una proposición de la forma " $P \,\&\, \neg P$ " es una contradicción.

Cada dos proposiciones que no pueden ser ciertas a la vez se dice que son inconsistentes. Se dice que son un conjunto inconsistente de proposiciones y juntas implican una contradicción.

4.5 Demostración por contradicción o por reducción al absurdo.

Este es un método de demostración que combina la regla demostración condicional y la noción de contradicción. A la contradicción se le denomina también absurdo.

El método de demostración por contradicción consiste en introducir la negación de lo que se quiere demostrar. Si a partir de esta hipótesis deducimos una contradicción, entonces significa que la proposición original es verdadera.

En general este método puede ser usado las veces que se desee y para casi cualquier tipo de argumento. Basta tratar de demostrar lo contrario, es decir su negación, y si ésto nos lleva a una contradicción, entonces lo que se quería demostrar es verdadero.

Los pasos utilizados en una demostración por contradicción son:

1) Introducir la negación de la conclusión deseada como una nueva premisa.
2) De esa nueva premisa, junto con las premisas dadas, deducir una contradicción.
3) Establecer la conclusión deseada como una inferencia lógica deducida de las premisas originales (1)

(1) *SUPPES, P., HILL, S., Ob. cit., p. 150.*

El ejemplo que sigue ilustra el método por contradicción, la conclusión deseada es $x=0$.

1)	$\neg(y\neq 1 \vee z\neq -1)$	.....Premisa
2)	$(x<y \;\&\; x>z) \;\&\; z=-1 \longrightarrow x=0$	Premisa
3)	$\neg(y=1 \vee x=0) \vee (x<y \;\&\; x>z)$	Premisa
4)	$x\neq 0$	.....Hipótesis (petición de principio)
5)	$\neg[(x<y \;\&\; x>z) \;\&\; z=-1]$	.Tollendo Tollens 4,2
6)	$\neg(x<y \;\&\; x>z) \vee z\neq 1$	..Ley de morgan 5
7)	$y=1 \;\&\; z=-1$	.....Ley de morgan 1
8)	$z=-1$	.....Simplificación 7
9)	$\neg(x<y \;\&\; x>z)$	.....Tollendo Ponens 8,6
10)	$\neg(y=1 \vee x=0)$	.....Tollendo Ponens 9,3
11)	$y\neq 1 \;\&\; x\neq 0$	.....Ley de Morgan 10
12)	$y\neq 1$	.....Ley de simplificación 11
13)	$y=1$	.....Ley de simplificación 7
14)	$Y\neq 1 \;\&\; y=1$	.....Ley de adjunción 12,13
15)	$x=0$	Regla de reducción al absurdo. 4,14

4.6 Implicación Tautológica.

Otro método para demostrar la validez de una demostración es el llamado de implicación Tautológica. Una proposición P se dice que implica tautológicamente Q si, y sólo si la condicional $P \longrightarrow Q$ es una tuatología. Una inferencia puede expresarse como una implicación tautológica.

El método consiste en los siguientes pasos:

1. Construír una condicional cuyo antecedente es la conjunción de premisas y cuyo consecuente es la conclusión.

2. Mediante las tablas de certeza, verificar si dicha condicional es una tautología. Todas sus líneas son verdaderas.

3. Si dicha condicional es una tautología, entonces la conclusión es verdadera formalmente. Si no es una tautología, entonces la conclusión no fue obtenida a partir de las premisas iniciales y la inferencia es no válida.

Se dice, si la proposición 1 es verdadera y la proposición 2 es verdadera y la proposición 3 es verdadera.... entonces la conclusión también lo es. Es decir las premisas implican tautológicamente la conclusión.

En el ejemplo siguiente se desea comprobar si el siguiente argumento es válido.

1) $P \longrightarrow Q$

2) P

Por lo tanto, sucede Q

Mediante la tabla de certeza, se tratará de probar que las premisas implican tautológicamente la conclusión.

P	Q	(P	→	Q)	&	P	→	Q
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V	F
F	V	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F	V	F
Peso		1	2	1	3	1	4	1

En la columna 4 se observa que es una tautología. Por lo tanto la inferencia es válida.

Siguiendo el modelo anterior, se analizará el valor de verdad del razonamiento siguiente:

El terreno puede ser cultivado si y sólo si se provee de un sistema de riego. Si el terreno puede ser cultivado, entonces triplicará su valor actual. Por lo tanto, si se provee de un sistema de riego, entonces el terreno triplicará su valor actual.

Al simbolizar este razonamiento, queda de la siguiente manera:

(1) $P \longleftrightarrow Q$..... Premisa

(2) $P \longrightarrow R$..... Premisa

(3) $Q \longrightarrow R$..... Conclusión

Se constituye una proposición condicional donde las premisas son el antecedente y la conclusión es el consecuente.

$(P \longleftrightarrow Q)\ \&\ (P \longrightarrow R) \longrightarrow (Q \longrightarrow R)$

Mediante una tabla certeza, se señala si es una tautología, si lo es, entonces el razonamiento es válido.

P	Q	R	(P	⟷	Q)	&	(P	⟶	R)	⟶	(Q	⟶	R)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	F
V	F	V	V	F	F	F	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F
Paso			1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1

La línea 4 indica una tautología, por lo tanto, el razonamiento es válido.

En resumen, las tablas de certeza ofrecen otra posibilidad y otro método para encontrar la validez de un razonamiento. Tiene ventajas sobre la demostración mediante las reglas de inferencia, ya que ese método es posible aplicarlo a cualquier razonamiento.

CAPITULO V

LA TEORIA DE LA IDENTIDAD

5.1 Concepto de identidad.

El cálculo proposicional alque hemos dedicado los cuatro capítulos anteriores, constituye sólo una parte de la lógica. No constituye de por sí una base suficiente para la fundamentación de otras ciencias, ni, en particular de la matemática; en las definiciones, teoremas y demostraciones matemáticas aparecen contínuamente distintos conceptos de otras partes de la lógica.(1)

De los conceptos lógicos que hemos hablado, el de más importancia es, probáblemente, el concepto de identidad.

x es idéntico a y,

x es lo mismo que y,

x es igual a y

Abreviando

$x = y$

En lugar de escribir:

x no es idéntido a y

x es diferente de y; escribimos $x \neq y$

(1) TARSKI, *Ob. cit.*, p. 80.

Las leyes generales que gobiernan las expresiones anteriores constituyen una parte de la lógica que es llamada Teoría de la identidad.

5.2 Leyes básicas.

La ley más fundamental sobre la teoría de la identidad es:

I. x=y

"x" es igual a "y" si, y sólo si "x" tiene la propiedad que tiene "y", e "y" tiene la propiedad que tiene "x"

Esta ley suele ser llamada Ley de Leibniz.

Puede considerarse como la definición del símbolo "="

De esta ley se puede deducir una serie de otras leyes pertenecientes a la teoría de la identidad:

II. x=x

Todo objeto es igual a sí mismo

Demostración, Susituyendo en la Ley de Leibniz, "x" en lugar de "y", obtenemos: x=x si, y sólo si x tiene la propiedad que tiene x.

III. Si x=y, entonces y=x

Demostración. Sustituyendo "x" por "y" e "y" por "x" es la ley de Leibniz, obtenemos:

y = x si, y sólo si "y" tiene la propiedad que tiene "x" y "x" tiene la propiedad que tiene "y".

Afirmamos entonces dos equivalencias cuyos miembros derechos son conjunciones que difieren únicamente en el orden de sus miembros.

$$x = y \ \& \ y = x$$

IV. Si $x=y$ & $y=z$, entonces $x=z$

Demostración. Por hipótesis las dos fórmulas: (1)$x=y$ y (2) $y=z$ se asumen como válidas. De acuerdo a la Ley de Leibniz se sigue de la fórmula (2) que todo lo que puede decirse de "y" pudo también deicrse de "z". Por tanto, podemos reemplazar la variable "y" por "z" en la fórmula (1), y obtener la fórmula deseada: $x=z$

V. Si $x=z$ & $y=z$, entonces $x=y$

Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.

La ley II es llamada Ley de Reflexibilidad

La Ley III, Ley de Simetría

La Ley IV, de Transitividad.

5.3 Relación de la igualdad lógica con la igualdad en aritmética y en la geometría.

Se considera la igualdad aritmética entre números como un caso especial del concepto general de identidad lógica. Se acepta la regla general que permite, bajo la hipótesis de que una cierta ecuación es válida, reemplazar en cualquier expresión el miembro izquierdo de la ecuación por el miembro derecho. Estos reemplazos son imprescindibles en muchos razonamientos, se vuelve necesario dar demostraciones especiales de que el reemplazo es legítimo para cada caso particular.

Consideramos un sistema cualquiera de ecuaciones con dos variables: por ejemplo:

$$x=z$$
$$2x+3z=10$$

Al resolver este sistema de ecuaciones por el método de sustitución, se forma un nuevo sistema de ecuaciones, reemplazando todas las variables "x" en la segunda por "z". Quedando:

$$2z + 3z = 10$$

Por la aplicación de las leyes de la igualdad, se dice que el segundo sistema es equivalente al primero.

Si el símbolo "=" denota identidad lógica y aceptamos la Ley de Leibniz, los sistemas son equivalentes.

El concepto de identidad en geometría es distinto. Cuando se llama iguales o congruentes a dos figuras geométricas por ejemplo a dos segmentos, dos ángulos o dos polígonos, no se quiere afirmar en general, que dichas figuras sean idénticas: con ello se dice sólamente que estas figuras tienen el mismo tamaño y la misma forma. Así, un triángulo podrá tener dos o incluso tres lados iguales, pero no idénticos. Para evitar confusión en aquellos casos que no se trate de identidad lógica, se recomienda evitar el término igualdad, en su caso utilizar "congruente" y reemplazar el símbolo "=" por otro cualquiera.

CAPITULO VI

APLICACION DE LA LOGICA MATEMATICA A LA CONSTRUCCION DE TEORIAS MATEMATICAS SIMPLES

6.1 Términos primitivos; axiomas y teoremas fundamentales.

Con los conocimientos de lógica y metodología expuestos en los capítulos anteriores, se intentará la fundamentación de una teoría matemática elemental. Esta teoría presupone casi exclusivamente la lógica, en cuanto que formal.

Se toman como términos primitivos:

número real,

ser menor que,

ser mayor que,

suma.

En lugar de número real se empleará la expresión:

"Conjunto de todos los números"

$x \in N$: x es un número.

" es menor que " se reemplaza por " $<$ "

" es mayor que " se reemplaza por " $>$ "

" no es menor que " se reemplaza por " $\not<$ "

" no es mayor que " se reemplaza por " $\not>$ "

$x + z$: Suma de los números " x " y " z "
(operación binaria)

Se distingue dos tipos de axiomas: primero las relaciones fundamentales de los signos " > " y " < ". Segundo, se refieren a la adición.

Axioma I. $(\forall x)\ (\forall y)\ (x = y \vee x < y \vee x > y)$

Axioma II. $(\forall x)\ (\forall y)\ (x < y \longrightarrow y \not< x)$

Axioma III. $(\forall x)\ (\forall y)\ (x > y \longrightarrow y \not> x)$

Axioma IV. $(\forall x)\ (\forall y)\ (x < y \ \&\ y < z \longrightarrow x < z)$

Axioma V. $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (x > y \ \&\ y > z \longrightarrow x > z)$

El axioma I recibe el nombre de Ley Débil de Tricotomía.

Los axiomas II y III, Leyes de Asimetría.

Los axiomas IV y V, Leyes de Transitividad.

Las relaciones " < " y " > ", junto a la relación lógica identidad "=", serán referidas como Relaciones Fundamentales entre números.

Una vez admitidos estos axiomas se deducen una serie de teoremas.

Teorema 1. $(\forall x)\ (x \nless x)$ Demostración por el método de Reducción al Absurdo.

(1) $(P \longrightarrow \neg P)\quad \neg P$ ....Ley del Absurdo.

(2) $(\forall x)\ (\forall y)\ (\ x < y \longrightarrow \neg(y < x)$......Axioma II

(3) $[\ (x < x) \longrightarrow \neg(x < x)\ ] \rightarrow \neg(x < x)$...$(x < x)$ en lugar de P.

(4) $(\ x < x) \longrightarrow \neg(x < x)$ ....x en lugar de y, 2

(5) $(\ x \nless x)$ ....Ponendo Ponens 4,3

Esta demostración por reducción al absurdo, consiste en admitir priméramente que el teorema es falso, y se deducen de ello ciertas cosas o consecuencias que nos obligan a rechazar la suposición inicial.

El sistema de axiomas que se ha adoptado es simétrico respecto a los símbolos " < " y " > ". Por lo que todo teorema referente a la relación "menor que", se infiere otro referente a la relación "mayor que". Es decir se puede inferir:

Teorema 2. $(\forall x)\ (\ x \ngtr x)$

La relación de identidad "=", por lógica es reflexiva. Los teoremas 1 y 2, muestran que las relaciones fundamentales entre números, " < " y " > ", son irreflexivas; estos teoremas son llamados, Leyes de Irreflexibilidad.

Teorema 3. $x > y$ Si, y sólo si $y < x$

Demostración, Las fórmulas "$x > y$" y "$y < x$" son equivalentes, se deduce la primera de la segunda.

Según el axioma I, ocurre al menos uno de los tres casos; $x=y$ o $x < y$ o $x > y$. Ahora bien, si fuese $x=y$, según la Ley de Leibniz se sustituye "x" por "y" en "$y > x$", lo que contradice el teorema 1. Será, pues: $x \neq y$. Ahora bien, también es válido; $x \not< y$, pues según el Axioma 2, las fórmulas: "$x < y$" y "$y < x$" no pueden ser simultáneamente verdaderas. Por lo que se demuestra que se da el tercer caso: "$x > y$".

Análogamente se establece la implicación en sentido opuesto. El teorema 3 establece que las relaciones "$<$" y "$>$" son recíprocas.

Teorema 4. Si $x \neq y$, entonces $x < y$ o $y < x$.

Teorema 5. Si $x \neq y$, entonces $x > y$ o $y > x$.

Estos dos últimos teoremas se denominan Leyes de Conexión.

Teorema 6. Dos números cualesquiera "x" y "y" satisfacen, una sóla y sólo una de las tres fórmulas: $x=y$ o $x < y$ o $x > y$.

Este teorema es llamado Ley fuerte de Tricotomía.

Los teoremas o axiomas anteriores son fundamentales. Existen otras relaciones de no menos importancia:

Definición 1. Se dice que $x \leq y$ si, y sólo si $x=y$ o $x < y$. Se lee " x es menor o igual que y ". Esta definición da origen a dos teoremas:

Teorema 7. $x \leq y$ si, y sólo si $x \not> y$

Teorema 8. $x < y$ si,,y sólo si $x \leq y$ & $x \neq y$.

Por analogía se define el símbolo " $\geq$ ". Los teoremas relativos a esta relación, se obtienen análogamente a la relación " $\leq$ ", se obtienen análogamente a la relación " $\geq$ " si se sustituyen los símbolos " $\leq$ ", " $<$ ", y "$>$ " por " $\geq$ " y " $<$ ".

Las fórmulas $x=y$ se denominan ecuaciones. Igualdades.

Las fórmulas $x < y$ o $x > y$, se denominan desigualdades. (inecuaciones).

Las expresiones que aparezcan a la izquierda o a la derecha de estos símbolos reciben los nombres de miembros derechos o izquierdos de la ecuación odesigualdad.

6.2 Axiomas sobre la adición: concepto de grupo y grupo abeliano.

Como se dijo en el capítulo anterior. Se analizarán dos clases de axiomas. El segundo grupo consiste en seis axiomas.

Axioma 6. Si $y \in N$ & $z \in N$. entonces $y+z \in N$.
Axioma de cerradura.

Axioma 7. $x + y = y + x$
Axioma de conmutatividad.

Axioma 8. $x+(y+z) = (x+y)+z$
Axioma de Asociatividad.

Axioma 9. $(\forall x)$ $(\forall y)$ $(\exists z)$ $(x= y +z)$
Axioma de invertibilidad.

Un grupo es una operación binaria que cumple con los axiomas de cerradura, asociatividad e invertibilidad. Si además la operación cumple con la propiedad conmutativa, es un grupo abeliano.

El concepto de grupo y grupo abeliano, trata de una disciplina matemática especial, la llamada Teoría de Grupos. Estos cuatro axiomas reunidos establecen el conjunto de todos constituye un grupo abeliano con respecto a la adición.(1)

6.3 Conclusiones numéricas.

En base a lo expuesto hasta aquí sobre una metodología de la lógica matemática, las conclusiones son elementales y en ocasiones de uso cotidiano. Sin embargo muestran la metodología que se ha tratado de exponer a lo largo de todo este trabajo.

Sirvan los siguientes ejemplos como modelo a seguir para una fundamentación deductiva de la enseñanza de las matemáticas. Dichos axiomas utilizarán los axiomas y teoremas ya demostrados, más las definiciones de los números naturales:

Definiciones:

$1=1$
$2=1+1$
$3=2+1$
$4=3+1$
$5=4+1$

Según el axioma de Peano: cada número natural se obtiene añadiendo la unidad al número anterior.

(1) TARSKI., *op. cit.*, p. 209

Cada teorema demostrado será consecuencia lógica de los axiomas y definiciones aceptados previamente. Los axiomas y definiciones son la causa de los teoremas.

Teorema: $3=1+2$

(1) $(\forall x)\ (\forall y)\ (x+y=y+x)$ .... Axioma 7

(2) $3=2+1$ .... Definición de 3

(3) $2+1=1+2$ .... Sustitución de 2 en x.y 1 en y. en Axioma 7

(4) $3=1+2$ .... Ley de Identidad 3.2

Una vez demostrado un teorema se puede utilizar como una premisa junto con los axiomas y definiciones en futuras demostraciones. Cuando un teorema ya demostrado se utiliza, se justifica el paso, haciendo referencia al teorema correspondiente.

Sea la demostración siguiente, donde se hace necesario utilizar el teorema 1.

Por demostrar: $4=1+(1+2)$

(1) $(\forall x)\ (\forall y)\ (x+y = y+x)$ ....Axioma de la conmutatividad.

(2) $4=3+1$ .... Def. de 4

(3) $3+1=1+3$ .... $3/x$, $1/y$, Axioma conm.

(4) $4=1+3$ .... Identidad de Premisas 2 y 3

(5) $3=1+2$ .... Teorema 1

(6) $4=1+(1+2)$ .... Identidad de premisas 4.5

Teorema 2. $4=1+(1+2)$

Por demostrar: (1+1) + (1+2) = 2 + 3

(1) (∀x) (∀y)(x+y = y+x) .... Axioma de conmutatividad.

(2) (1+1) + (1+2) = (1+1) + (1+2).... Certeza lógica.

(3) 2=1+1 .... Definición de 2.

(4) (1+1) + (1+2) = 2+(1+2) .... Identidad premisas 2,3

(5) 1+2 = 2+1 .... 1/x, 2/y, premisa 1.

(6) 3 = 2+1 .... Definición de 3.

(7) 1+2 = 3 .... Identidad premisas 5,6

(8) (1+1) + (1+2) = 2+3 .... Identidad premisas 4,7

Teorema 3. (1+1) + (1+2) = 2 + 3

Por demostrar: 4 = 2+2

(1) (∀x) (∀y) (x + (y+z) + z) .... Axioma 8

(2) 4 = 3+1 .... Def. de 4

(3) 3=2+1 .... Def. de 3

(4) 4=(2+1)+1 .... Identidad 2,3

(5) (2+1) + 1 = 2 + (1+1) .... 2/x, 1/y, 1/z Premisa 1

(6) 4 = 2 + (1+1) .... Identidad 4.5

(7) 2 = 1+1 .... Def. de 2

(8) 4=2+2 ...Identidad de premisas 6, 7

Por demostrar: $(1+0)+0=1$

(1) $(\forall x)(x+0=x)$ .... Axioma del cero.

(2) $(1+0)+0=(1+0)+0$ .... Certeza lógica

(3) $1+0=1$ .... 1/x, Premisa 1

(4) $(1+0)+0=1+0$ .... Identidad 2,3

(5) $(1+0)+0=1$ .... Identidad 3,4

Por demostrar: $2=1+(0+1)$

(1) $(\forall x)(\forall y)(x+y=y+x)$ .... Axioma de conmutatividad

(2) $(\forall x)(x+0=x)$ .... Axioma del cero.

(3) $2=1+1$ .... Definición de 2

(4) $1+0=0+1$ .... 1/x, 0/y, premisa 1

(5) $1+0=1$ .... 1/x, premisa 2

(6) $0+1=1$ .... Identidad 4.5

(7) $2=1+(0+1)$ .... Identidad 3,6

En realidad la mayoría de verdades en aritmética se pueden deducir lógicamente de pocas premisas axiomáticas. Por otro lado, no todas las verdades de aritmética pueden ser probadas, tampoco pueden ser definidos todos los números o predicados. Se empieza por términos no definidos como "1" o "0".

Todo el conjunto de términos no definidos axiomas, definiciones, y teoremas se denomina una teoría.

Una última demostración numérica, se incluyen axiomas de los números negativos.

Por demostrar: $1 + [2 + (-1)] = 2$

(1) $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ [(x+y)+z] = x+(y+z)$ ....Ax. Asociativo

(2) $(\forall x)\ (\forall y)\ (x+y = y+x)$ ....Ax. Conmutatividad.

(3) $(\forall x)\ (x+0=x)$ ....Ax. del cero.

(4) $(\forall x)\ \ x + (-x) = 0$ ....Ax. de los negativos

(5) $(1 +2) + -1 = 1 + (2+ -1)$ ....1/x, 2/y, -1/z, Pre. 1

(6) $1+(2+ -1) = 1+(2+ -1)$ ....Certeza lógica.

(7) $1+(2+ -1) = (1+2)+ -1$ ....Identidad 5,6

(8) $1+2 = 2+1$ ....1/x, 2/y, Premisa 2

(9) $1+(2+ -1) = (2+1)+ -1$ ....Identidad Premisas 7,8

(10) $(2+1)+ -1 = 2+(1+ -1)$ ....2/x, 1/y, -1/z, Pre. 1

(11) $1+(2+ -1) = 2+(1+ -1)$ ....Identidad 9,10

(12) $1+ -1 =0$ ....1/x, Premisa 3

(13) $1+(2+ -1) = 2 + 0$ ....Identidad 11,12

(14) $2 + 0 = 2$ ....2/0 Premisa 3

(15) $1+(2+ -1) = 2$ ....Identidad 13, 14

CONCLUSIONES

Este trabajo pretendió introducir tanto al maestro de matemáticas de enseñanza media así como al alumno de ese mismo nivel en una nueva y diferente opción en la enseñanza y comprensión de las matemáticas.

La lógica, una disciplina del intelecto humano, propone a la matemática un método Deductivo-Demostrativo en la investigación de nuevos teoremas así como en la transmisión de los ya demostrados.

Se estableció una correspondencia entre el método deductivo de la lógica y su aplicación formal idéntica a la construcción de sistemas matemáticos.

Una vez sistematizado el método deductivo de la lógica se toma como modelo para la matemática.

El método deductivo-demostrativo parte de premisas evidentes llamadas axiomas (en las matemáticas) y primeros principios (en la lógica), así como de la definición de términos primitivos. Mediante leyes lógicas del pensar (reglas de inferencia) se deducen otras premisas llamadas teoremas. Estos teoremas, junto con los axiomas y deficiones primitivas dan origen a un sistema matemático.

BIBLIOGRAFIA

ARNAZ, José Antonio, Iniciación a la Lógica Simbólica.
Ed. Trillas, México, 1982.

AYES, A.J., El positivismo lógico.
Ed. Fondo de Cultura Económica, México, 1981
(Sección de Obras de Filosofía)

CARREÑO, Fernando, Enfoques y principios teóricos de la evaluación
Ed. ANUIES, México, 1977.

M. COPI, Irving, Introducción a la Lógica.
Ed. EUDEBA, Argentina, 1972.

MARQUEZ MURO, Daniel, LOGICA
Ed. ECLALSA, México, 1980.

MENDEZ, Luz del Carmen, LOGICA, (MODULO 1 y 2).
Ed. Trillas, México, 1981

NATIONAL OF COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, Lógica.
Ed. Trillas, México, 1981.

SALAZAR R., Javier, Introducción a la lógica deductiva y teoría de los conjuntos.
Ed. UNAM, ỹ, I-II, México, 1972.

SEYMOUR LIPPSCHTZ, PH. D., Teoría de conjuntos y temas afines.
Ed. Mc. Graw-Hill, México, 1983.

SUPPES, Patrick, Introducción a la lógica simbólica.
Ed. CECSA, México, 1976.

SUPPES, P. y HILL, Shirley, Primer curso de lógica matemática.
Ed. Reverté, México, 1979.

TARSKI, Alfred, Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas.
Ed. Espasa-Calpe, Madrid, 1977.

ZUBIETA, Gonzalo, Lógica elemental.
Ed. ANUIES, México, 1978.