2gj48

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN MODELO MATEMATICO EN EL SUBSECTOR CARRETERO

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

ALEJANDRO JOSE VERGARA PERRILLIAT

FALLA DE ORIGEN

México, D. F. 1989

INDICE

PROLOGO

En estas líneas quiero expresar mi profundo y sincero agradecimiento a quienes me ayudaron a realizar este trabajo.

Al Director de esta tesis:

Mat. Agustín Cano Garcés, por la orientación y paciencia al dirigir este trabajo y por su confianza y apoyo, los cuales han impulsado mi desarrollo en el campo de la docencia.

Al Jurado de esta tesis:

Dr. Rubén Hernández Cid
Act. Fernando Perrilliat Montoya
Act. Hugo Delgado Alonso
Act. Francisco Sánchez Villarreal

a quienes agradezco su disposición y tiempo para formar parte del Jurado, la agilidad con la que revisaron este trabajo y su consideración y ayuda.

Finalmente, agradezco el apoyo y la colaboración de todas aquellas personas que hicieron posible la elaboración de esta tesis.

INTRODUCCION

Los medios de transporte son elementos indispensables en nuestra sociedad moderna pero, a pesar de su importancia, nuestras necesidades de transporte son cubiertas en diversas ocasiones de manera ineficiente: con poca comodidad y seguridad para el usuario, con grandes pérdidas de tiempo en los desplazamientos y con altos costos de operación.

Las principales causas de los problemas anteriores son la saturación de la infraestructura de transporte y la carencia de una red adecuada para satisfacer la demanda de este servicio, situaciones que frenan el desarrollo de la región afectada.

La solución a esta problemática tiene su origen en la correcta planeación del desarrollo de los sistemas de transporte.

La fase central del proceso de planeación de un sistema de transporte es la construcción del modelo matemático que describa los movimientos de transporte del sistema.

La importancia del modelo radica en que es la herramienta que permite estimar la futura demanda de transporte. Una vez pronosticadas las futuras necesidades de transporte se pueden simular las condiciones de circulación en la red de transporte bajo dichas condiciones y conocer cuales son las modificaciones necesarias en la red para satisfacer eficientemente la futura demanda de este servicio.

El empleo de modelos matemáticos para describir los flujos de transporte no es algo novedoso en nuestro pais aunque el desarrollo y difusión de estos modelos es escaso, principalmente en lo que se refiere a los flujos de transporte a nivel nacional.

En el presente trabajo se pretende encontrar un modelo matemático que describa los movimientos de pasajeros y de carga en la red carretera del pais. El modelo propuesto busca relacionar las características poblacionales y económicas (tasa de motorización) del pais asi como la resistencia al desplazamiento (tiempo de recorrido) con los flujos de pasajeros y carga observados en las carreteras del territorio nacional.

La herramienta estadística empleada para determinar el modelo es el llamado método de mínimos cuadrados, que es una forma de resolver el problema de establecer relaciones entre variables.

Como información básica para la determinación del modelo de transporte se empleará una muestra de los movimientos en la red carretera ya que no se cuenta con información de toda la red de transporte.

A continuación se describirá en forma breve el contenido de cada uno de los capítulos del trabajo.

Capítulo I. Planeación de un sistema de transporte. El capítulo inicial comenta las funciones del transporte, la necesidad de planificar el crecimiento de los sistemas de transporte asi como una descripción del proceso que se debe llevar a cabo para su planeación.

Capítulo II. El marco de referencia del modelo. El análisis de la información sobre nuestro pais que es necesaria para el desarrollo del modelo se comenta en este capítulo. Asimismo se presenta el procesamiento de los estudios origen-destino, información básica para determinar la demanda de transporte carretero del pais, y algunos comentarios sobre los resultados obtenidos.

Capítulo III. Desarrollo del modelo matemático de transporte carretero. En este capítulo se describen los diferentes tipos de modelos de transporte y sus características principales; se presenta el modelo propuesto para describir los flujos de transporte y el desarrollo del método de mínimos cuadrados, herramienta utilizada para definir el modelo. Finalmente, se comentan los resultados obtenidos de aplicar el método de mínimos cuadrados a las matrices origen-destino.

CAPITULO I

PLANEACION DE UN SISTEMA DE TRANSPORTE

1. LOS SISTEMAS DE TRANSPORTE Y SU FUNCION

El transporte ha sido un factor esencial en la historia de la humanidad, tal como lo es en nuestra vida diaria. La preocupación más importante del hombre es proveerse de alimento, abrigo, vestimenta y comodidades. Inicialmente todo lo que necesitaba lo encontraba a su alrededor y su necesidad inicial de transporte era únicamente llevar estos satisfactores desde el bosque hasta su refugio.

Conforme el hombre se fue desarrollando, sus necesidades se fueron sofisticando e incrementando. En diversas ocasiones, le fue necesario desplazarse cada vez más lejos para satisfacerlas, ya sea porque los productos que requería para su vida diaria no existían a su alrededor o por extinción de los mismos.

Actualmente, el hombre está involucrado en diversas actividades, entre las que se encuentra trabajar, estudiar, ir de compras y divertirse, y para poder tomar parte en ellas frecuentemente necesita viajar alguna distancia. Además, algunas de estas actividades están asociadas con el transporte de materias primas y productos manufacturados de y hacia centros de producción o centros de consumo.

El transporte tiene una gran cantidad de funciones aunque unas cuantas engloban a la mayoría. En este sentido, los sistemas de transporte tienen dos funciones principales, independientemente de que estén ubicados dentro de un contexto urbano, regional o nacional. Estas funciones son las siguientes:

i) Mejorar las comunicaciones y los desplazamientos de personas y bienes. Esta primera función engloba mejorar el acceso a los centros económicos, recreativos y culturales así como incrementar los desplazamientos entre los centros de actividad tales como zonas industriales, zonas residenciales, centros comerciales y de servicios, etc.

En el aspecto económico, el transporte da dos tipos de utilidad a los bienes, utilidad de lugar y utilidad de tiempo. Esto quiere decir: "tener los bienes económicos en donde se necesitan y cuando se necesitan". Esta misma función se puede aplicar al movimiento de personas.

ii) Promover el desarrollo económico e industrial. Según diversos autores, un sistema de transporte adecuado es una condición necesaria, aunque no garantiza el desarrollo industrial, económico y cultural de una sociedad. El transporte tiene influencia en el establecimiento de la actividad económica ya que un sistema de transporte puede atraer y generar nuevos centros industriales o agrícolas en regiones donde los recursos humanos y materiales son subutilizados.

Asimismo, los sistemas de transporte crean nuevos mercados al transportar el exceso de producción hacia otras regiones donde no existe o sea escaso un producto determinado e incrementa la velocidad y la eficiencia en el movimiento de materia primas y productos manufacturados haciéndolos más competitivos.

El transporte tiene otras funciones dentro del orden social y cultural. Ha logrado abatir el aislamiento de diversos núcleos de población, borrando regionalismos, generalizando el idioma y promoviendo las modernas técnicas de salud y sanidad, lo cual ha contribuido a la integración nacional y ha permitido elevar el nivel de vida de los pueblos.

Los sistemas de transporte pueden crear redes sumamente complejas debido a la diversidad de medios de transporte y a la cantidad de rutas necesarias para cubrir la demanda de transporte. Esta misma complejidad y la gran cantidad de usuarios puede llegar a generar ineficiencia por saturación de los sistemas o por el establecimiento de infraestructuras inadecuadas debido a la falta de previsión. Esta situación obliga a llevar a cabo estudios de planeación para satisfacer las necesidades de transporte de personas y de carga de la manera más eficiente y segura.

El incremento en el uso del automóvil particular como medio de transporte es otro motivo para planear el desarrollo del transporte, principalmente en lo que se refiere a las grandes ciudades y a las carreteras. Otro factor importante que se debe considerar es el crecimiento de las zonas metropolitanas originado por el aumento de la población, lo que ha originado un mayor número de viajes inter e intra-urbanos.

Si no existe duda acerca de la necesidad de planeación del transporte, el éxito de este proceso no se tiene asegurado. Hay factores, concientes e inconcientes, que influyen en las decisiones de los viajeros y que no es posible representar matemáticamente por lo que no se puede desarrollar un modelo de transporte perfecto.

Lo ideal es que el modelo de transporte describa de manera razonable la demanda de transporte, tomando en cuenta los elementos más importantes del sistema estudiado. El nivel de detalle en la descripción de la red de transporte y la precisión del modelo deberán de ajustarse de acuerdo a la importancia que tienen las decisiones que se tomarán en base a esta información. El modelo de transporte más que una solución por si misma, es un elemento de ayuda en la toma de decisiones cuyos resultados deben ser interpretados por un experto en la materia.

2. EL PROCESO DE PLANEACION DE UN SISTEMA DE TRANSPORTE

La planeación del transporte puede ser considerada como un proceso de 4 etapas independientemente de que se trate de un sistema de transporte local, regional o nacional o el establecimiento de nuevas estructuras tales como aeropuertos, ferrocarriles, carreteras, etc.

Estas etapas son las siguientes:

- Definición e integración de los inventarios de información.
- Análisis y desarrollo del modelo de transporte.
- Pronósticos de la futura demanda de transporte y necesidades de infraestructura.
- Evaluación operativa y económica del sistema.

a) Definición e integración de los inventarios de información.

La primera fase del proceso de planeación consiste en la definición del área en donde se piensa llevar a cabo el estudio. Dado que sería imposible identificar el origen de cada uno de los viajes, el área de estudio se divide en zonas con el fín de agrupar los viajes y determinar los que se realizan entre cada pareja de ellas.

El tamaño de las zonas depende del detalle requerido y del presupuesto del proyecto ya que a menor tamaño de las zonas, mayor es la precisión potencial del modelo pero, por otro lado, el costo del proyecto se incrementa considerablemente conforme el número de zonas crece.

La planeación difícilmente tendrá éxito si no se tiene una idea clara de la infraestructura existente y del grado de utilización actual. Por lo tanto, el siguiente paso consiste en la integración de los inventarios de los movimientos de transporte, de la infraestructura y de los parámetros de planeación.

El inventario de los movimientos de transporte consiste en la identificación de los orígenes y destinos de los viajes. Este inventario se puede crear mediante encuestas en puntos estratégicos de la red de comunicaciones del área de estudio, contadores electrónicos de vehículos, etc.

La precisión del modelo radica en la calidad de la información sobre los movimientos internos y externos al área de estudio, ya que son los elementos principales para su construcción. Posteriormente son utilizados para checar y calibrar, de ser necesario, el modelo de transporte propuesto.

En el caso del transporte carretero, la información debe incluir origen y destino del viaje, volumen de tránsito (número de vehículos en circulación por unidad de tiempo), promedio de ocupación de los vehículos, proporción de automóviles, autobuses y vehículos comerciales y velocidad de circulación, entre otros.

Para las redes de transporte público la información suele ser más compleja y debe incluir otros parámetros tales como tarifas, tiempos de espera, frecuencia del servicio y tiempo utilizado en las estaciones de transbordo.

El inventario de la infraestructura debe abarcar el recuento de las unidades físicas que la integran y su descripción en cuanto a localización, capacidad de servicio, nivel de utilización y costos de mantenimiento.

Los parámetros socio-económicos que posiblemente permitan explicar los movimientos de transporte son identificados en esta etapa. Se deben de agrupar por zonas y por lo general son estadísticas sobre población, ingresos por habitante, número de vehículos, actividad económica de la zona y población económicamente activa así como políticas gubernamentales sobre desarrollo industrial y urbano o planes rectores sobre transporte relacionados con el área de estudio.

b) Análisis y desarrollo del modelo de transporte.

El análisis del conjunto de información obtenida sobre las características de los movimientos de transporte y del entorno socio-económico del área de estudio hace posible la comprensión de los patrones que siguen los desplazamientos interurbanos.

El profundo conocimiento del comportamiento que siguen estos movimientos permite sintetizar cuantitativamente la relación entre la demanda de transporte y el marco socio-económico de referencia, lo cual corresponde a la fase de desarrollo del modelo. Esta es precisamente una de las etapas más importantes dentro del proceso de planeación del transporte.

La importancia del modelo radica en que es la herramienta que permitirá pronosticar la futura demanda de transporte. Si el modelo está mal concebido, la demanda proyectada no reflejará los patrones de transporte correctamente, orillando a concepciones erróneas en la planeación y en la toma de decisiones.

La etapa de desarrollo del modelo se puede dividir en una fase de diseño y en una de aplicación. La fase de diseño está relacionada con la generación y la distribución de los viajes, en tanto que la de aplicación consiste en la utilización del modelo para determinar y asignar los movimientos en la red de transporte.

Estos tres conceptos, generación, distribución y asignación, son en ocasiones estudiados independientemente, siendo que en la realidad están interrelacionados y que los dos primeros son los elementos que determinan el modelo.

El primer paso, la generación de los movimientos de transporte, consiste en identificar y analizar el motivo de los viajes, su lugar de origen y destino y la posible relación entre el número de desplazamientos y los parámetros socio-económicos que puedan contribuir a la generación de los desplazamientos.

Los parámetros que se toman en cuenta en esta etapa son principalmente el nivel de ingresos, el número de empleos en el área, el número de vehículos (en caso de transporte carretero), la población y la distancia que se recorre.

En áreas urbanas, se debe considerar la repartición y el análisis de los movimientos según el propósito del viaje, ya que se ha visto que diferentes motivos están asociados con distintas tasas de generación, diferentes características de distribución y diversos tipos de transporte. El motivo de los desplazamientos puede ser de trabajo, de salud, de compras, de diversión, etc.

El siguiente paso, la distribución de los viajes, consiste en encontrar la relación que describa el número de viajes llevados a cabo entre las zonas del área de estudio. Esta relación deberá tomar en cuenta los resultados de la etapa de análisis sobre la generación así como la información sobre las estructuras de transporte existentes.

La utilidad de esta etapa consiste en la descripción de los movimientos de transporte entre todas y cada una de las áreas del estudio. Los movimientos entre las diferentes zonas se pueden describir fácilmente mediante matrices de intercambio o matrices origen-destino, en donde el elemento t_{ij} de la matriz representa el número de viajes de la zona i a la zona j.

Además, esta forma de presentar la información relacionada con t_{ij} permite conocer de manera inmediata el total de viajes cuyo origen se localiza en la zona i ya que corresponde a la suma de los elementos de la matriz que pertenecen al renglón i. La suma de la columna j indica el número total de viajes que tienen como destino la zona j.

La última etapa de desarrollo del modelo es la asignación de los viajes en la red de transporte. Este proceso permite identificar cuales son las rutas que optimizan el recorrido entre las diferentes zonas asi como los niveles de utilización teóricos de los tramos de la red. Por lo general, se utiliza como parámetro de asignación o de elección de la ruta óptima entre zonas, el tiempo de recorrido mínimo o el costo de operación mínimo. La asignación nos da información sobre el grado de saturación teórica de la red, el cual debe ser muy cercano al nivel real.

En todas y cada una de las etapas del desarrollo del modelo es necesario verificar los resultados teóricos contra los valores observados y de ser necesario calibrar el modelo haciendo los ajustes correspondientes.

c) Pronósticos de la futura demanda de transporte y necesidades de infraestructura.

Esta fase requiere de gran cantidad de estudio y de información relacionada con el análisis del modelo ya que los patrones de transporte pueden ser modificados por un desarrollo socio-económico no contemplado en la planeación del sistema de transporte.

En particular, los pronósticos sobre población, empleo y distribución del ingreso se deben llevar a cabo mediante modelos específicos. No solo se deben tomar en cuenta factores de crecimiento y distribución sino también elementos tales como planes sobre nuevos centros industriales o comerciales en el área, reordenación urbana, desarrollo regional o urbano, etc. Estas consideraciones son necesarias porque implican un crecimiento demográfico y económico irregular y, en consecuencia, necesidades de transporte diferentes a las actuales.

Una vez que se tienen las estimaciones sobre los elementos socio-económicos que intervienen en la fórmula de generación y distribución del movimiento de transporte se determina la demanda de transporte esperada. La asignación de esta demanda en la red de transporte permite conocer el nivel de saturación de la red actual bajo condiciones de operación esperadas.

Los aspectos más importantes en la definición de la nueva red de transporte son: la red de transporte actual, el nivel de utilización estimado, el nivel de saturación objetivo y el presupuesto proyectado para las inversiones.

El nivel de utilización estimado y objetivo determina las modificaciones necesarias en la red para satisfacer la futura demanda de transporte. De acuerdo a la problemática actual y al nivel de saturación se pueden manejar varias opciones: aumentar la capacidad acondicionando la estructura actual, crear una ruta paralela o hacer el enlace mediante una ruta nueva.

d) Evaluación operativa y económica del sistema.

Una vez terminado el proceso de pronóstico se deben evaluar los resultados. La primera evaluación es una evaluación numérica con el fin de tener la certeza de que el modelo es matemáticamente correcto y que predice de manera razonable los movimientos que el sistema de transporte ocasionará en el futuro.

La evaluación operativa consiste en verificar si la red propuesta satisface adecuadamente los patrones de transporte pronosticados. Esto rara vez sucede en la prueba inicial y se deben hacer modificaciones a la red o probar nuevas políticas, tales como restricciones de circulación en ciertas zonas o permitir niveles de saturación más elevados.

En términos económicos, la mejor red de transporte es aquella que para un presupuesto dado otorga el máximo beneficio a la comunidad minimizando los costos de transporte. La técnica generalmente utilizada es la de costo-beneficio, donde el costo incluye las inversiones para mejoras y nuevas estructuras así como los costos de mantenimiento. Los beneficios se miden por reducciones en los costos de operación, en tiempos de recorrido y en mayor seguridad.

CAPITULO II

EL MARCO DE REFERENCIA DEL MODELO

1. PRESENTACION

Nuestro país cuenta con una infraestructura de transporte que permite el movimiento tanto de personas como de carga en todo el territorio nacional. Dicha infraestructura está integrada por las vías de comunicación terrestres, aéreas, marítimas y fluviales y comprende cuatro sistemas de transporte; estos sistemas son el carretero, ferroviario, aéreo y marítimo.

La anterior clasificación es la que se maneja en los estudios de planeación de la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (S.C.T.), organismo encargado de regular y administrar el transporte nacional. En dicha Secretaría se utiliza el nombre de subsector para referirse a alguno de los sistemas de transporte anteriores y por lo tanto se utilizarán indistintamente.

El crecimiento del país tanto en términos demográficos como económicos, que se traduce en un número mayor de personas y de toneladas de carga transportadas, crea la necesidad de preveer y planificar el desarrollo de los diversos sistemas de transporte para poder atender los requerimientos del futuro. Por lo tanto, y situándonos en nuestro objeto de estudio, es necesario contar con programas de análisis, pronóstico y evaluación de la demanda de transporte carretero y de las inversiones globales que se requieren para atenderla.

El proceso de planeación del subsector carretero no es una tarea sencilla. La magnitud y complejidad de éste, las diversas variables externas al sistema que intervienen en este proceso (variables geográficas, demográficas y socioeconómicas), la interrelación con los demás modos de transporte y las limitaciones en cuanto a información estadística dificultan la elaboración de las políticas y programas que se deben llevar a cabo para satisfacer la futura demanda de transporte carretero.

La parte medular de este proceso es la construcción de un modelo que represente de manera adecuada los movimientos interurbanos de relevancia que se realizan en las carreteras del país.

La importancia del modelo radica en que es la herramienta que permitirá pronosticar la futura demanda de transporte en las carreteras nacionales. Una concepción errónea en el modelo o la falta de precisión de éste conllevaría a errores en la estimación de los futuros flujos de transporte y, por lo tanto, a toma de decisiones equivocadas.

A continuación y como marco de referencia para el modelo, se presentarán los principales resultados obtenidos sobre la definición del área de estudio y los inventarios de los movimientos de transporte y de la infraestructura carretera.

2. ZONIFICACION DEL TERRITORIO NACIONAL

El análisis de la repartición de la población en el territorio nacional, del panorama geográfico-económico y de los principales puntos de generación de tránsito llevó a una división del territorio en 104 zonas, denominadas zonas básicas.

La zonificación básica corresponde, concretamente, a la identificación de 104 polos urbanos y su zona de influencia, los cuales representan los principales centros de generación de transporte interurbano del país (ver anexo I).

Cada uno de los polos básicos es relevante para el sistema de transporte nacional y para la economía del país por ser alguno de los siguientes centros de generación de transporte:

- una de las ciudades más pobladas del país.
- una de las principales estaciones ferroviarias.
- uno de los puertos más importantes.
- uno de los aeropuertos principales.

La división del territorio nacional en las llamadas zonas básicas se definió a partir de los polos urbanos de importancia para el sistema de transporte nacional. Se identificó para cada polo, la zona de influencia o zona máxima asociada al mismo. Esto es, la zona máxima agrupa los municipios que están ligados a cada polo por razones económicas y de comunicación terrestre.

A partir de las zonas máximas se dedujo una nueva zonificación nacional, llamadas zonas mínimas, que permite determinar la concentración de la demanda de transporte de relevancia nacional.

La zona mínima asociada a cada polo está contenida dentro de la zona máxima del mismo y considera los municipios en los que se concentra la población, la actividad económica relacionada con el polo urbano y los movimientos de transporte.

El conjunto de zonas máximas cubre la totalidad del territorio nacional, en tanto que las zonas mínimas cubren el 40% del mismo pero representan más del 80% de los movimientos de transporte interurbano. Esto se debe a que las zonas mínimas presentan mayores niveles de motorización y, por lo tanto, mayor movilidad que las poblaciones de carácter rural situadas en la zona de influencia del polo pero en el exterior de la zona mínima.

Las zonas básicas máximas y mínimas están caracterizadas por indicadores socio-económicos que reflejan sus principales características. Estos indicadores son: población, producto interno bruto, población económicamente activa, tasa de motorización e ingreso promedio mensual per cápita.

3. OFERTA DE TRANSPORTE CARRETERO

La oferta de transporte para el subsector carretero engloba dos aspectos: la infraestructura y los sistemas operativos. La infraestructura comprende a la red de carreteras que cubren al país en tanto que los aspectos operativos abarcan las condiciones de operación o funcionamiento de la red.

El sistema carretero nacional asegura su función de comunicación a través de una extensa red de caminos cuya longitud aproximada es de 214,000 km. La red carretera agrupa vías troncales (federales), alimentadoras (vecinales), caminos rurales y brechas.

Esta red cuenta con vías que no tienen un papel significativo dentro de la demanda interurbana de transporte. El análisis de la demanda carretera de carácter nacional contempla únicamente las carreteras que permiten el enlace entre las principales ciudades del país. Bajo estos términos, se identificó la red carretera de relevancia nacional o red básica.

La red básica de carreteras se definió a partir de la zonificación del territorio en 104 zonas y comprende las carreteras que establecen itinerarios continuos entre cualesquiera de los polos de esta zonificación.

Esta red básica tiene una extensión de 39,200 km. y consta de 804 tramos. Cada tramo corresponde a un itinerario continuo entre dos nodos (cruces) de la red. Los tramos están identificados a partir de los nodos que unen; esto es, nodo origen (número menor)-nodo destino (número mayor). En el caso de que varios tramos unan los mismos nodos origen y destino, se hace la distinción entre ellos mediante un indicador de ruta: 0, 1, 2 ó 3, según sea el caso.

El análisis de la situación actual y los estudios de planeación sobre el sistema de transporte carretero requieren una descripción detallada de la red. El nivel de descripción debe ser suficiente para poder hacer estimaciones sobre niveles de capacidad y de saturación, montos de inversión y conservación de los tramos de la red.

Las características de un tramo de carretera pueden ir variando a lo largo del mismo, lo que justifica la descomposición de los tramos en sub-tramos y la descripción de los mismos. Los criterios que se tomaron en cuenta para hacer la división son los siguientes:

- cambio en la categoría de carretera.
- cambio en el tipo de terreno.
- cambio en el medio ambiente.

De esta forma, la descripción de la red básica contempla para cada sub-tramo las siguientes características:

- región: región en la cual se encuentra localizado el tramo. Corresponde a una división cartográfica del país en ocho regiones.
- número de tramo: número de los nodos origen y destino del tramo.
- ruta: indicador de número de ruta del tramo (0=única ruta posible; 1=primera ruta; 2=segunda ruta, etc).

- número de subtramo: número del subtramo cuando se recorre el tramo del origen al destino.
- longitud del subtramo: longitud en kilómetros.
- tipo de vía:
  1.- autopista 4 carriles
  2.- autopista 6 carriles
  3.- autopista 8 carriles
  4.- vía rápida 4 carriles
  5.- vía rápida 6 carriles
  6.- carretera 2 carriles
  7.- carretera 4 carriles
  8.- carretera 6 carriles
- tipo de terreno:
  1.- plano
  2.- lomerío
  3.- montañoso
- medio ambiente:
  1.- urbano: cuando las áreas a sus lados están pobladas.
  2.- suburbano: cuando está poblada sólo una de las áreas circundantes.
  3.- rural: cuando está fuera del medio urbano y suburbano.
- entidad: entidad federativa en la cual inicia el subtramo.
- carretera: indicador de la carretera correspondiente.

La descripción de los tramos y subtramos de la red carretera básica, de acuerdo al formato anterior, se encuentra en el documento "Presentación Cartográfica y Descripción Normativa de la Red Carretera Básica" (Mayo, 1986), de la Dirección General de Planeación de la S.C.T.

Las condiciones de operación de la red carretera se definen por la capacidad de vehículos por subtramo, por la velocidad de circulación en los subtramos y por el análisis de los costos de mantenimiento y de inversión. Además se toma en cuenta los costos de operación de los vehículos (gasolina, cuotas, desgaste, etc.)

La determinación de cada uno de estos aspectos operativos está fuera del alcance del presente estudio. Basta describir brevemente la metodología y los parámetros que los condicionan.

La capacidad diaria de cada subtramo se basa en la suposición de un valor óptimo de vehículos diarios por carril de circulación. Este valor óptimo se ve reducido por factores que toman en cuenta las características de los subtramos. Estas características son: el tipo de terreno, el nivel de utilización y el número de carriles.

La velocidad de circulación en los subtramos se calcula a partir de una velocidad de referencia, la cual depende del tipo de vía y el tipo de terreno, y se le aplica un factor de reducción que es función del nivel de saturación correspondiente.

El cálculo de los costos de operación de los vehículos se basa en una fórmula y parámetros establecidos para la situación particular del país. Esta expresión depende del tipo de terreno, de la velocidad promedio y del tipo de vehículo.

Por último, el análisis de las inversiones globales requeridas se basa en el costo de construcción para pasar a una carretera de mejores especificaciones, tomando en cuenta el tipo de terreno en el que se va a construir.

Se puede concluir que el nivel de información que se tiene sobre la red carretera básica es suficiente para tener un marco de referencia y llevar a cabo la evaluación de las condiciones de circulación actuales.

4. DEMANDA DE TRANSPORTE CARRETERO

Se considera que los movimientos de transporte carretero son los efectuados en automóvil, pick-up, autobús o camión de carga por representar la totalidad de los desplazamientos interurbanos.

En base a lo anterior, la demanda interurbana de transporte es el conjunto de movimientos carreteros entre zonas origen y zonas destino, tomando como base para la identificación de estas últimas, la división del país en 104 zonas generadoras y receptoras de flujo interurbano.

La demanda carretera interurbana se clasifica en transporte de personas y en transporte de carga.

El transporte carretero de pasajeros se realiza en automóvil o pick-up y en autobús. Esto permite cuantificarlo como sigue:

- viajes realizados en automóvil o pick-up.
- viajes realizados en autobús.

Para el transporte de carga, se agrupó en una misma categoría a aquellos productos que presentan características similares en cuanto al tipo de vehículo utilizado en su transporte y, en caso de ser posible, a la actividad económica a la que pertenecen.

Además, la clasificación tiene como objetivo facilitar los análisis de proyección de los productos y establecer las hipótesis de transferencia de la carga carretera hacia los otros modos de transporte en los estudios de planeación del Sistema de Transporte Nacional.

Las categorías en que se agruparon los productos transportados por carretera son las siguientes:

- categoría 1: productos agrícolas a granel (semillas, granos, etc.).

- categoría 2: minerales y arenas a granel.
- categoría 3: azúcar, cemento y fertilizantes.
- categoría 4: petróleo y derivados.
- categoría 5: productos agrícolas (envasados) y productos industriales.
- categoría 6: productos animales y forestales.

El transporte de carga se cuantifica en términos de toneladas transportadas por día.

Tal como se mencionó anteriormente, la demanda de transporte debe estimarse en términos de movimientos por origen y destino y por volumen vehicular (número de vehículos por tramo); es decir:

i) intercambios interurbanos para los movimientos de personas y de carga por pares de zonas.

ii) volumen de tránsito o flujo vehicular en los tramos de la red

Los intercambios origen-destino son la base del análisis de la demanda. La importancia de estos intercambios radica principalmente en su participación en el desarrollo del modelo de transporte y en la transformación de la demanda expresada en términos de viajes o toneladas transportadas en flujo vehicular.

Ambas son etapas relevantes en el estudio de planeación, ya que por una parte, el modelo permite estimar el valor de los futuros flujos origen-destino que posteriormente son transformados en volumen de tránsito en los tramos de la red. De acuerdo al nivel de saturación observado, que es la relación entre capacidad vehicular y flujo estimado, se determina el nivel de inversiones requerido para satisfacer la demanda de transporte.

La información estadística existente relacionada con la demanda de transporte carretero está agrupada en los datos viales publicados anualmente por la S.C.T. y en una serie de encuestas referentes a diversos estudios origen-destino que se realizaron en la red carretera del país.

Los datos viales son un conjunto de estadísticas sobre la red carretera, en donde se indica entre otras cosas, el número de vehículos promedio diario que circula en cada uno de los tramos de la red y los porcentajes correspondientes a la distribución en automóviles, autobuses y camiones de carga de dicho promedio.

Cabe mencionar que el promedio vehicular por tramo está integrado por vehículos cuyo desplazamiento es local y por aquellos que su movimiento es interurbano.

Los datos viales no son una herramienta útil para el análisis de la demanda interurbana ya que no permiten conocer los movimientos reales del flujo vehicular, es decir, el origen y el destino de los movimientos de transporte y, por lo tanto, tampoco el volumen de tránsito interurbano.

Los estudios origen-destino son un conjunto de encuestas realizadas en diversas carreteras del país y durante varios años con el fín de recabar información sobre el transporte carretero.

Estas observaciones de campo son el elemento de partida para la determinación de la demanda interurbana de transporte carretero. Su procesamiento permite constituir un muestreo representativo de los intercambios interurbanos.

5. RECONSTITUCION DE LA DEMANDA DE TRANSPORTE CARRETERO

La carencia de estadísticas completas sobre el volumen del movimiento de personas y de carga en la red carretera nacional y de su distribución geográfica obliga a integrar la demanda de transporte a partir de las observaciones de campo de los estudios origen-destino y de la información vial sobre los desplazamientos vehiculares en las carreteras del país.

La demanda de transporte interurbana se representa por medio de matrices origen-destino para lo cual se ha definido los orígenes y los destinos de los intercambios y los tipos de viajes que se van a considerar. Esto ha sido establecido en la parte referente a la zonificación básica del territorio y en la de demanda de transporte.

Cabe mencionar que tomando como base los 104 polos de la zonificación básica, las matrices origen-destino serán de 104 X 104 lo que corresponde a 10,816 celdas. Es decir, cada elemento t_{ij} de cada una de las matrices indica el número de viajes o toneladas transportadas, según sea el caso, entre el origen i y el destino j. Sin embargo, los elementos que corresponden a flujos del origen i al destino i, esto es, que pertenecen a la diagonal de la matriz, son nulos ya que no hay movimientos del polo i al polo i.

Por otra parte, se va a considerar que el número de viajes-persona o toneladas transportadas del origen i al destino j es el mismo que el que se desplaza del origen j al destino i. De esta forma, para cada una de las matrices de intercambio se tiene que $t_{ij} = t_{ji}$ y, por lo tanto, las matrices son simétricas. Esta característica de las matrices aunada a que los elementos de las diagonales son nulos origina que, en realidad, se busque estimar los 5,356 elementos que representan los movimientos interurbanos del país.

La hipótesis anterior es válida para los fines del presente estudio aunque en casos más específicos se deben considerar los movimientos en ambos sentidos por separado ya que no son necesariamente similares.

El supuesto anterior simplifica de manera importante la recolección de información, el procesamiento de la misma y el análisis de los resultados obtenidos.

La fase de integración de los desplazamientos interurbanos se puede resumir en un proceso de selección del conjunto de observaciones útiles y en su posterior procesamiento para constituir un muestreo representativo de la demanda de transporte carretero interurbano, lo cual se describe a continuación.

a) Selección de los estudios origen-destino.

Los estudios origen-destino corresponden a una serie de encuestas realizadas en varios puntos de la red carretera del país entre los años 1977 y 1985. Las encuestas se realizaron en base a un programa definido desde su inicio y están agrupadas en 53 estudios origen-destino.

Para cada vehículo se obtuvieron los datos siguientes:

- sentido de circulación del vehículo.
- año, mes, día y hora de la entrevista. Cabe señalar que todos los estudios origen-destino se realizaron únicamente los días viernes, sábado, domingo y lunes.
- tipo de vehículo: automóvil, pick-up, autobús o camión de carga.
- marca y modelo del vehículo.
- tipo de combustible.
- número de pasajeros. Se consideró en caso de ser automóvil o autobús.
- número de tripulantes. Se tomaron en cuenta para pick-up, autobús y camión de carga.
- toneladas transportadas. Sólo en caso de camión de carga.
- número de producto transportado. De acuerdo a la clasificación comentada anteriormente.

- origen y destino del viaje.
- clave del estudio.

Los estudios origen-destino se encuentran codificados en cintas magnéticas. El análisis de estas cintas trajo como consecuencia la identificación de algunos problemas de confiabilidad en algunos estudios:

- número de registros incompletos de acuerdo a lo señalado en la nota de identificación del estudio.
- imposibilidad de identificar con veracidad el estudio.
- organización errónea del archivo de acuerdo a la nota de identificación.
- errores de codificación sistemáticos en el estudio.

Esta problemática orilló a seleccionar aquellos estudios cuya estructura y características generales (número de registros, clave del estudio y organización de los datos) estuvieran de acuerdo a la síntesis publicada de cada uno de los estudios origen-destino.

Por lo tanto, el punto de partida de la constitución de las matrices de intercambio son únicamente 28 estudios. Cabe señalar que estos estudios se realizaron entre 1979 y 1985.

La información necesaria para determinar la demanda de transporte en la red carretera Nacional a partir de las encuestas de estos estudios es la siguiente:

- día de la semana de la encuesta.
- tipo de vehículo.
- número de pasajeros.
- número de tripulantes. Solo se aplica cuando el tipo de vehículo es pick-up y se considera como pasajeros.
- toneladas transportadas.
- número de producto.
- origen y destino del viaje.

b) Estimación de los flujos promedios de las rutas de transporte.

A partir de los 28 estudios origen-destino validados, se puede proceder a determinar cuales son los intercambios que son factibles de estimar y el método correspondiente. Necesariamente existen flujos que no va a ser posible conocer debido a la eliminación de buena parte de la información básica: los estudios origen-destino.

El número total de rutas a estimar corresponde precisamente al número de intercambios interurbanos que se desea conocer, 5,356. Es decir, la ruta i-j corresponde al enlace entre el polo i y el polo j y el cual se puede llevar a cabo por diversos itinerarios o recorridos.

Es importante señalar que únicamente se van a tomar en cuenta aquellos itinerarios realistas ya que teóricamente existe una gran diversidad de posibilidades para desplazarse en la red de un polo a otro. Se considera que un itinerario es realista si el desplazamiento de un polo a otro es lo más directo posible, cualquiera que sea el itinerario elegido.

Para cualquier ruta se presentan únicamente dos posibilidades:

i) En el conjunto de itinerarios que relacionan al polo i con el polo j existe un itinerario que no atraviesa un punto de encuesta origen-destino (figura 1).

La estimación del flujo i-j en este caso es imposible ya que se necesitan conocer todos los flujos parciales i-j por itinerario para obtener así la estimación completa. De otra forma, siempre se tendría un flujo subvaluado ya que de al menos un itinerario no se tendría información.

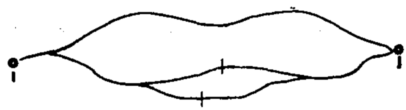


Figura 1

ii) Todos los itinerarios que unen el polo i con el polo j atraviesan por lo menos un punto de encuesta.

Dado que de todos los itinerarios que unen el polo i con el polo j se tiene por lo menos un punto de observación, se puede conocer el flujo promedio i-j para cada itinerario y sumando cada resultado parcial, obtener el volumen promedio del movimiento carretero entre el polo i y el polo j.

Tanto la identificación de las rutas susceptibles de ser estimadas como la determinación del procedimiento de estimación de los respectivos flujos son actividades que, en términos generales, se deben llevar a cabo para cada una de las rutas. En ocasiones, se podrá agrupar los polos con características similares en bloques facilitando el análisis de las rutas.

El método que permite estimar el flujo promedio de cada uno de los recorridos i-j es muy sencillo aunque se deben fijar parámetros particulares para cada una de las rutas.

El proceso consiste en identificar los estudios origen-destino que permiten conocer el flujo de transporte del polo i al polo j para cada pareja de polos (i,j); asignar un factor de ponderación a cada punto de encuesta, previo análisis de la ubicación y del número de estudios origen-destino realizados en cada uno de los itinerarios que unen i con j; y finalmente hacer un recuento de las encuestas asociadas a dicha ruta aplicándoles los factores correspondientes, dependiendo del punto de observación de que se trate.

Cabe mencionar que el análisis y el procedimiento llevado a cabo para el flujo i-J también es válido para el flujo inverso J-i y, en realidad, al llevarlo a cabo para cualquiera de los dos sentidos ya implica el efectuarlo para el sentido opuesto, con excepción del recuento de viajes, debido a que son los mismos itinerarios. Ambos flujos representan el movimiento carretero entre el polo i y el polo J, ya que como se mencionó no se hará distinción entre el desplazamiento de i a J y el de J a i.

A continuación se ejemplificará el análisis y la asignación de factores de ponderación en el proceso de obtención de los flujos promedio de transporte.

En el caso de la ruta Manzanillo (polo 47) - Puerto Vallarta (polo 73), tal como se observa en la figura 2, únicamente existe un itinerario por el cual se pueden comunicar estas ciudades y un solo estudio origen-destino entre las mismas. Esto quiere decir que la estimación del flujo vehicular se realizará mediante el punto de encuesta No. 52 y, por lo tanto, el factor de ponderación asignado a este estudio es 1.

Figura 2

Es decir, el tránsito vehicular estará determinado por las encuestas de este estudio que indiquen que su origen es cualquiera de estos dos polos y su destino el polo opuesto. Abusando de la notación, t47,73 = E52.

La figura 3 muestra una situación similar a la anterior. En este caso entre el Distrito Federal (29) y Pachuca (65). Los estudios origen-destino 35 y 36 se efectuaron en cada uno de los dos itinerarios posibles entre estos polos. Ambos estudios tienen un factor asignado de 1 ya que la suma de ambos da el total del volumen de tránsito entre la zona metropolitana y Pachuca; por lo tanto, t29,65 = E36+E35.

El factor de asignación será diferente de 1 cuando en un itinerario de una ruta cualquiera aparezcan más de un estudio origen-destino.

En estos casos muy probablemente el mismo vehículo es entrevistado varias veces a lo largo del recorrido y, por lo mismo, contado tantas veces como puntos de observación pasó. Para remediar esta situación se obtiene un flujo promedio, que es la suma de los flujos obtenidos en cada estudio y dividido entre el número de puntos de encuesta.

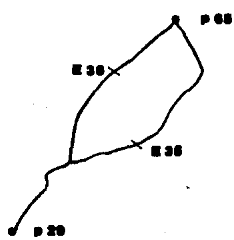


Figura 3

En la ruta Hermosillo (37)-Lagos de Moreno (43), figura 4, existen 3 puntos de observación; los estudios origen-destino 49, 50 y el par 15-16. Se tomará esta pareja de estudios como una sola observación ya que la suma de los flujos parciales, E15 y E16, da el flujo total en este punto.

Por lo tanto, el volumen de tránsito, t37,43, será igual al promedio obtenido de los tres puntos de observación, (E49+E50+(E16+E15))/3, correspondiendo una tasa de ponderación de 1/3 a cada estudio.

c) Actualización de la información de los estudios origen-destino

Una vez determinados los estudios origen-destino que son de utilidad para integrar la demanda de transporte nacional asi como las rutas que son factibles de estimar, resta considerar que la información proporcionada por las encuestas es de únicamente 4 días de la semana y de diferentes meses y años. Por lo tanto es necesario aplicar factores que permitan homogenizar la información y estimar el flujo vehicular en promedio diario anual referente al año 1985.

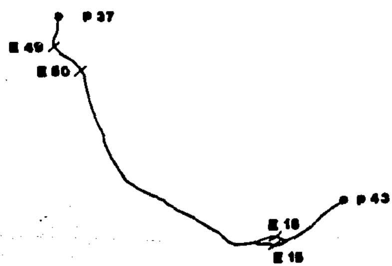


Figura 4

i) Un factor de ponderación promedio diario. Cada registro de las encuestas corresponde a uno de los siguientes días de la semana: viernes, sábado, domingo o lunes.

Dado que se desea conocer el flujo promedio diario y no se tienen observaciones de todos los días de la semana, es necesario aplicar un factor a cada uno de los registros para encontrar el promedio diario.

Supondremos que el patrón vehicular del día lunes es similar al que se observaría los días martes, miércoles y jueves, por corresponder a días hábiles, en tanto que los días viernes, sábado y domingo forman parte del fin de semana en el que la composición del movimiento vehicular es diferente.

Por lo tanto, los factores que se aplicarán al flujo vehicular expresado en viajes en auto, viajes en autobús o toneladas transportadas serán los siguientes:

- 4/7 si la observación corresponde al lunes.
- 1/7 si la observación corresponde a cualquier otro día.

De esta forma cualquier flujo observado se transforma en valor promedio diario relativo a la semana de encuesta. Ahora bien, para transformar este valor a un promedio diario anual, se aplican dos factores multiplicativos:

ii) Un factor de ajuste anual, relativo al mes de la encuesta origen-destino, para la determinación del promedio diario anual correspondiente al año de estudio.

Este valor se obtuvo de las estadísticas sobre el flujo vehicular mensual promedio y el respectivo flujo anual en las carreteras cercanas al punto de encuesta, obtenido de los datos viales publicados por la S.C.T.

iii) Un factor de actualización 1985/año de encuesta.

Este factor se determinó para cada estudio mediante el análisis del incremento en el volumen de tránsito registrado en los tramos de la red carretera cercanos al punto de encuesta.

Por otra parte, la determinación de los viajes en autobús no se puede obtener a partir de los orígenes y destinos de los autobuses y del número de pasajeros en dichos autobuses. En efecto, el origen y el destino de los viajeros no corresponde al de los autobuses ya que los pasajeros ascienden y descienden en diversos puntos a lo largo del recorrido de los autobuses.

Para solventar esta situación, se consideró que la estructura de los viajes en autobús es similar en terminos origen-destino a la estructura de los viajes en auto a nivel de cada estudio.

Para cada estudio se conocen los volúmenes totales de pasajeros en auto, VA, y de pasajeros en autobús, VB, los cuales se obtienen a partir del total de encuestas aplicadas en cada punto de entrevista. Por esta razón, se puede aplicar un factor VB/VA a cada flujo "viajes en auto" para obtener el correspondiente flujo "viajes en autobús".

6. RESULTADOS DE LA ESTIMACION DE LA DEMANDA DE TRANSPORTE CARRETERO

El procesamiento de los estudios origen-destino dió como resultado la constitución de un muestreo de observaciones de la demanda interurbana de transporte carretero. El muestreo está constituido por las matrices origen-destino por tipo de movimiento de transporte: viajes-persona en auto, viajes-persona en autobús y toneladas transportadas por seis categorías de productos.

Las matrices están incompletas ya que solamente una parte de los flujos interurbanos están cuantificados. Resulta obvio que realizar estudios origen-destino en todos los posibles itinerarios que unen los polos de la zonificación básica permitiría conocer todos y cada uno de los flujos interurbanos pero sería un proceso casi imposible y excesivamente costoso.

Las encuestas se han realizado principalmente cerca de los principales polos de la red carretera así como en puntos estratégicos de la misma, como puede ser en el paso obligado para ir de un conjunto de polos a otro.

Los estudios origen-destino rodean completamente las tres principales ciudades del país: Distrito Federal, Monterrey y Guadalajara, lo que corresponde al 43% de los 53 puntos de encuesta.

Sin embargo, hay regiones del territorio nacional que no cuentan con encuestas origen-destino tales como Sinaloa, el sur de Durango, Zacatecas, Aguascalientes y San Luis Potosí; Tlaxcala, Puebla, el centro de Veracruz y el norte de Oaxaca y Michoacán, Guerrero y el sur de Oaxaca. La falta de encuestas en estas regiones ocasiona que un número considerable de movimientos carreteros, en su mayoría viajes entre polos de una misma región, no pueda ser cuantificado.

Por otra parte, la eliminación de casi la mitad de los puntos de encuesta por razones de confiabilidad también significá una pérdida sustancial de información sobre los movimientos carreteros.

De esta forma, las matrices de pasajeros contienen los movimientos de transporte del 12% de las 5,356 rutas que contempla la zonificación básica del territorio, mientras que las matrices de carga representan según el tipo de carga entre el 2% y el 11% de dichas rutas.

Cabe señalar que buena parte de la información no registrada corresponde a rutas significativas ya que siete de los estudios eliminados corresponden al Distrito Federal, afectando principalmente los enlaces que van a Toluca, Cuernavaca y Cuautla y, por consecuencia, las rutas de dicho polo a los estados de Guerrero, Michoacán y Colima.

Asimismo, Guadalajara quedó desconectada de los estados de Nayarit, Sinaloa, Michoacán, San Luis Potosí, Zacatecas y Durango por cuatro estudios eliminados de las carreteras de su alrededor.

Otros estudios no contabilizados afectaron regionalmente como en el caso del Bajío y estados aledaños, zona de mucho tránsito vehicular inter-regional. Otro grupo de encuestas impidió obtener observaciones sobre el flujo carretero que circula en la región norte-centro del pais, entre los estados de Chihuahua, Sinaloa y Durango y Coahuila.

En relación con la confiabilidad de las matrices origen-destino es importante hacer algunos comentarios.

Debido a que solo se realizaron observaciones durante cuatro días de un año dado en cada punto de encuesta es posible que una gran cantidad de rutas factibles de ser medidas no hayan registrado suficiente movimiento vehicular en esos días para ser entrevistado o ser tomado en cuenta después de aplicado el factor de ponderación correspondiente a cada punto de encuesta. Esta situación afecta principalmente a aquellas rutas en las que sus polos se encuentran sumamente alejados y, por lo tanto, con poco movimiento carretero entre ellos.

Los factores de actualización aplicados a los desplazamientos observados para su transformación en información diaria, anual y para el año de análisis pueden introducir distorsiones significativas en los flujos interurbanos.

No hay manera de probar que tan exactos son dichos factores ya que el incremento en el tránsito vehicular alrededor de un punto de encuesta se puede originar tanto por movimientos internos del área cercana como por desplazamientos interurbanos. La información proporcionada por los datos viales no permite conocer el desglose anterior.

No obstante, las matrices origen-destino incompletas son la única fuente de información con que se cuenta para desarrollar el modelo de transporte y, por lo tanto, se deben tomar necesariamente como válidas, aunque con ciertas reservas a la hora de interpretar los resultados.

CAPITULO III

DESARROLLO DEL MODELO DE TRANSPORTE CARRETERO

1. MODELOS DE TRANSPORTE

Los modelos de transporte se pueden clasificar en dos grandes ramas: modelos de factores de crecimiento y modelos sintéticos.

Los primeros estudios sobre transporte se basaron en los métodos de factores de crecimiento. En estos modelos, las observaciones de los movimientos interzonales son utilizadas directamente para realizar pronósticos sobre los futuros flujos de transporte. Las estimaciones de estos flujos se obtienen simplemente aplicando un factor de crecimiento a las observaciones. Esto se puede representar de la siguiente manera:

$$t'_{i,j} = k \times t_{i,j}$$

donde k = factor de crecimiento
$t_{i,j}$ = flujo observado entre la zona i y la zona j
$t'_{i,j}$ = flujo futuro entre la zona i y la zona j

Los modelos de factores de crecimiento tienen la desventaja de que no se establece una relación funcional entre los parámetros socio-económicos del área de estudio y los flujos observados.

Esto se refleja en el tamaño de los estudios origen-destino que se tienen que llevar a cabo para poder pronosticar todos los movimientos interzonales, ya que no es posible estimar aquellos valores no observados.

Pero, el problema fundamental con este método es que implica que la resistencia al desplazamiento permanece constante en el tiempo; esto es, en el modelo no interviene una función que involucre la resistencia al desplazamiento.

La resistencia al desplazamiento es una actitud natural del hombre ya que no representa el mismo desgaste recorrer 10 km. que 100 km. o 1000 km., sobre todo si se hace en una sola jornada. Esta resistencia origina distintos patrones de conducta en el viajero de acuerdo al desplazamiento que ha de realizar. De la misma manera, se observan cambios en los patrones de transporte al modificarse el tiempo de recorrido sobre un mismo trayecto.

Por ejemplo, la construcción de una autopista cambia radicalmente los patrones de transporte ya que el tiempo de recorrido se reduce sensiblemente, pero desafortunadamente los métodos de factores de crecimiento no permiten incorporar este tipo de cambios conductuales, originados por modificaciones en la red de transporte.

Los modelos sintéticos son llamados así porque la información observada es analizada para establecer una relación funcional entre el número de viajes y los factores conductuales que se puedan asociar al área de estudio.

Esta relación se describe mediante un modelo matemático, el cual permite sintetizar los principales aspectos que describen la relación tales como los elementos de atracción y generación de viajes y la resistencia al desplazamiento.

La ventaja más importante de los modelos sintéticos es que no solamente son útiles para pronosticar los futuros viajes de transporte sino también para estimar flujos del año de referencia sin tener que hacer observaciones de todas y cada una de las celdas de la matriz origen-destino.

Este proceso de estimación se puede poner en práctica una vez que se ha logrado explicar un muestreo representativo de los flujos interzonales a través de un modelo de transporte sintético.

El modelo se puede aplicar consistentemente para determinar los movimientos no cuantificados en la etapa de observación. Por lo tanto, el costo asociado a la etapa de recolección de información es reducido considerablemente al requerir únicamente de una muestra de los movimientos interzonales para describir la demanda de transporte.

Dentro de los modelos sintéticos encontramos los modelos gravitacionales y los modelos de oportunidad.

Los modelos gravitacionales son en la actualidad ampliamente utilizados y tienen sus orígenes en estudios sociológicos. Estos modelos consideran que el flujo de transporte entre un par de zonas es relación directa de los aspectos generadores y atrayentes de viajes de dichas zonas así como de la resistencia al desplazamiento que originan. Se pueden representar de la siguiente manera:

$$t_{i,j} = k\ A_i\ A_j\ f(d_{ij})$$

donde $t_{i,j}$ = flujo de transporte entre la zona i y la zona j

k = constante

A_i, A_j = medidas del tamaño o generación de las zonas i y j

$f(d_{ij})$ = función asociada a la distancia, tiempo de recorrido o costo de transportación entre la zona i y la zona j.

Si consideramos que la función $f(d_{ij})$ es igual al inverso de la distancia al cuadrado, se comprenderá la razón de que se le conozca como modelo gravitacional.

La ley de la Gravitación Universal, concebida por Newton, dice que dos cuerpos cualesquiera se atraen con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas, m1 y m2, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, d, que los separa; esto es,

$$\frac{m1\ m2}{d^2} = F$$

donde k es la constante gravitacional; k = 6.67x10 m.

En los estudios urbanos, los componentes Ai y AJ, medidas de atracción y/o generación de las zonas, están relacionadas con aspectos tales como población, empleo, nivel de ingresos, número de automóviles, etc.

El elemento de mayor importancia dependerá del motivo del viaje, el cual se observa por el origen y destino del desplazamiento, y del tipo de transporte.

Por ejemplo, si el viaje comienza en el hogar, Ai es proporcional primordialmente a la población de la zona i; si el viaje es al trabajo, entonces AJ es proporcional al nivel de empleo en la zona J. Para viajes de compras está en función del empleo ocupado en los comercios de la zona.

Los estudios interurbanos no presentan por lo general análisis de motivos de viaje, pero los factores de atracción y/o generación también se obtienen a partir de los aspectos demográficos y económicos representativos de las zonas del estudio.

Al no realizarse análisis de motivos de viaje en los estudios interurbanos, el proceso de identificación y análisis de los parámetros que sirven como fuerza de generación y de atracción se simplifica.

El otro grupo de modelos sintéticos son los modelos de oportunidad, que no tienen aún amplia difusión debido a que no están plenamente desarrollados.

Estos modelos nacen debido a que los modelos gravitacionales no reflejan los patrones de conducta individuales en el proceso de selección de destino e itinerario antes de realizar un viaje. Los modelos oportunísticos utilizan la teoría de la probabilidad para tratar de introducir los patrones de conducta individuales en los movimientos de transporte.

Los modelos de oportunidad se pueden describir de la siguiente manera: si existen g_i puntos de origen de viaje en la zona i y $t_{i,j}$ viajes entre la zona i y la zona j, entonces cualquier viaje de la zona i tiene una probabilidad P(SJ) de terminar en la zona j. La distribución de los viajes será entonces $t_{ij} = g_i$ P(SJ).

2. UN MODELO DE GENERACION Y DISTRIBUCION DE TRANSPORTE CARRETERO

Un modelo es una representación simplificada de la realidad. Los modelos tratan de describir la realidad tomando los elementos más significativos que la integran, aquellos que por si solos son capaces de describir el sistema estudiado.

En el caso de un modelo matemático, el problema consiste en encontrar las variables adecuadas para explicar el sistema sin caer en peligrosas simplificaciones, las cuales podrían reflejar el sistema estudiado de manera diferente a la realidad.

En nuestro caso, un modelo de transporte carretero, se desea construir la relación funcional que describa 'adecuadamente' los movimientos carreteros interurbanos tomando como elementos descriptivos a los factores socio-económicos del país.

La descripción de la demanda interurbana de transporte carretero se piensa llevar a cabo mediante un modelo de transporte de tipo gravitacional.

Como ya se mencionó una de las principales características de dicho modelo es que no se requiere tener toda la matriz origen-destino para poder construirlo, sino únicamente una muestra de la demanda de transporte. Adicionalmente, se puede reconstruir toda la matriz origen-destino a partir del modelo y realizar posteriormente análisis y pronósticos sobre la futura demanda de transporte.

Tal como se comenta en la primera parte del texto, el volumen de tránsito emitido y recibido por una zona está asociado positivamente con el factor económico porque al existir una mayor actividad económica en la región, se incrementa el intercambio comercial y de personas con las demás zonas. Esto se origina en la necesidad de vender los excedentes de producción en zonas donde existan carencias y, por otro lado, en la de comprar las materias primas que no se obtengan en dicha región.

Como resultado de lo anterior existe una mayor movilización de personas y de carga hacia el interior y hacia el exterior de la región creciendo la generación y atracción de volumen de tránsito.

De la misma forma, el elemento poblacional actúa positivamente en la generación de flujos interurbanos: a medida que aumenta la población, mayores necesidades de desplazamiento interurbano son generadas. Las razones de este incremento se establecen en el mismo sentido del aspecto económico debido a la afinidad que existe entre ambos factores.

No sería tan aventurado considerar uno solo de estos aspectos o un indicador que tomara a ambos en cuenta; la relación que ambos guardan con la generación y atracción de tránsito es aparentemente similar y podría simplificarse el diseño del modelo y su procesamiento.

Pese a lo anterior, un indicador de tipo nivel económico por habitante no sería muy útil ya que no daría información de como influyen los aspectos demográfico y económico por separado a la demanda de transporte en términos generales y a las categorías en que se clasificó esta demanda.

Es razonable suponer que ambos aspectos afectan de manera distinta al número de personas que viajan en carretera y al número de toneladas de carga transportadas, así como no es de esperarse que intervenga cada uno con igual peso para el producto X que para el producto Y.

Por otra parte, el modelo que permita explicar los flujos origen-destino debe ser útil para predecir los futuros intercambios interurbanos. Es decir, es necesario describir el tránsito interurbano mediante variables a las que no solamente se les pueda asociar con la generación y distribución de flujos observados, sino que además, sea posible analizar su crecimiento histórico y pronosticar su valor futuro.

La precisión que se pueda tener en la representación de la actual demanda de transporte desaparecería para los distintos horizontes de planeación al no tener pronósticos confiables de los parámetros del modelo.

Por lo tanto, no solamente se necesita poder analizar una tendencia de crecimiento sino hacer proyecciones con un alto grado de confiabilidad de los elementos socio-económicos con los que se quiere describir los movimientos origen-destino.

Los pronósticos deben realizarse por zona ya que no necesariamente todas las zonas del país deben experimentar el mismo crecimiento en cada uno de los aspectos socio-económicos que las definen.

Diversos estudios (Valero, Lane, Departamento de Investigación Científica e Industrial de Inglaterra, entre otros) muestran que los elementos que mejor explican la generación de viajes son el número de automóviles, el ingreso y el número de habitantes por vivienda. En los estudios mencionados se ha observado que el número de automóviles y el nivel de ingresos son variables dependientes.

Adicionalmente, Valero menciona la población y la distancia como aspectos universalmente utilizados en los estudios de generación y distribución de viajes.

En el presente estudio se pretende describir la generación y distribución de tránsito carretero mediante la población y la tasa de motorización (número de vehículos por cada 100 habitantes) de las zonas mínimas en que se ha dividido el territorio nacional.

Como se mencionó, la población de las zonas mínimas presenta mayores tasas de motorización y, por lo tanto, mayores niveles de movilización interurbana. Esta situación origina que las zonas mínimas sean más representativas que las zonas máximas para describir los movimientos interurbanos de transporte carretero.

La población es la variable demográfica obvia para intervenir en el modelo. Se cuenta con amplia información estadística adecuada para el modelo, como son número de habitantes por municipio, tasas de crecimiento históricas y estimaciones sobre la futura población del país bajo diversos horizontes de planeación, con lo que se tiene las fuentes de información necesarias para las proyecciones de las matrices origen-destino.

La variable económica del modelo es la tasa de motorización. El mayor o menor grado de actividad económica en una región representa el nivel de riqueza de la misma. Este nivel se puede medir de diversas formas pero se ha elegido la tasa de motorización por la relación comentada entre el número de automóviles y el nivel de ingresos, medida de la riqueza de la población, y por la relación existente entre el número de vehículos de una zona y la generación de viajes por carretera de la misma.

Por otra parte, también existen estadísticas oficiales sobre el crecimiento económico que permiten hacer proyecciones sobre la tasa de motorización en base a los estudios existentes sobre esta relación.

Existe otra variable que interviene en todo modelo gravitacional: la resistencia al desplazamiento. La distancia, tiempo de recorrido o costo de transportación entre un origen y un destino va a frenar el desarrollo de los flujos interurbanos. Esto quiere decir que a mayor distancia entre un origen y un destino, menor es el intercambio tanto de personas como de carga.

En nuestro caso, se utilizará como medida de resistencia al desplazamiento el inverso del tiempo de recorrido de cada ruta.

El cálculo del tiempo necesario para ir de un polo a otro se efectúa en base a la distancia, al tipo de carretera y al tipo de terreno (plano, lomerío y montañoso) que se encuentra en el recorrido, por lo cual existe mayor precisión que al considerar únicamente la distancia asociada a la ruta.

El modelo que se propone para explicar el muestreo de flujos origen-destino es un modelo de generación-distribución de transporte carretero de tipo gravitacional:

$$Tij = \frac{k\ (Pi\ Pj)^{b}\ (Mi\ Mj)^{c}}{(Dij)^{d}}$$

donde Tij = Tránsito carretero entre la zona i y la zona j

Pi = Población de la zona i

Pj = Población de la zona j

M_i = Motorización de la zona i
M_j = Motorización de la zona j
D_{ij} = Tiempo de recorrido de la zona i a la zona j
k, b, c, d = parámetros de la demanda de transporte carretero.

Cabe mencionar que los parámetros k, b, c y d se deben determinar para cada tipo de matriz representativa de la demanda de transporte carretero interurbano (viajes-persona en auto, viajes-persona en autobús y las seis categorías de carga).

3. SOLUCION DEL MODELO DE TRANSPORTE CARRETERO

La información relacionada con las zonas mínimas del país: número de habitantes, tasa de motorización y tiempo de recorrido se agrupó considerando cada una de los posibles rutas o pares de zonas, tomando en cuenta que representa lo mismo el viaje (i,j) que el viaje (j,i).

Lo anterior permite agrupar la información por pares de zonas:

- Número de viajes entre la zona i y la zona j.
- Población de la zona i por la población de la zona j.
- Tasa de motorización de la zona i por la tasa de motorización de la zona j.
- Tiempo de recorrido entre la zona i y la zona j.

Una forma de representar el conjunto anterior para cada una de las observaciones T_{ij} de las matrices origen-destino es:

$$(T_{ij},\ P_iP_j,\ M_iM_j,\ D_{ij})$$

donde T_{ij} = Tránsito carretero entre la zona i y la zona j
P_iP_j = Población de la zona i por la población de la zona j

MiMj = Motorización de la zona i por la motorización de la zona j

Dij = Tiempo de recorrido entre la zona i y la zona j

Este conjunto de información se utilizará para encontrar los valores $\hat{k}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ y $\hat{d}$ tales que el modelo

$$T_{ij} = \frac{\hat{k}\,(P_i\,P_j)^{\hat{b}}\,(M_i\,M_j)^{\hat{c}}}{(D_{ij})^{\hat{d}}}$$

sea el que "mejor" describa la relación entre el valor observado Tij y las variables PiPj, MiMj y Dij.

La estimación de dichos valores se hará utilizando el análisis de regresión lineal. El análisis de regresión lineal es un conjunto de técnicas estadísticas cuyo objetivo es formular modelos matemáticos lineales para explicar relaciones entre variables y hacer predicciones. Al referirnos a modelos lineales, se está considerando funciones lineales en los parámetros desconocidos.

El caso más sencillo de regresión es cuando se tienen dos variables, una variable de respuesta y una variable explicativa, y se quieren relacionar por medio de una función lineal. En este caso estamos hablando de regresión lineal simple. Cuando tenemos una variable de respuesta y varias variables explicativas se habla de regresión lineal múltiple.

Se ha elegido utilizar un modelo lineal para estimar los valores $\hat{k}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, y $\hat{d}$ debido a que resultaría muy complicado aplicar directamente algún método estadístico de estimación al modelo gravitacional.

El modelo gravitacional no es un modelo lineal en sus parámetros y, por lo tanto, es necesario transformarlo vía logaritmos naturales en un modelo lineal.

De esta forma, el modelo gravitacional

$$T_{ij} = \frac{k\ (P_i\ P_j)^{b}\ (M_i\ M_j)^{c}}{(D_{ij})^{d}} \tag{3.1}$$

se transforma en

$$\ln T_{ij} = \ln k + b \ln (P_iP_j) + c \ln (M_iM_j) - d \ln (D_{ij})$$

Considerando,

$$Y' = \ln T_{ij}$$
$$X1 = \ln (P_iP_j)$$
$$X2 = \ln (M_iM_j)$$
$$X3 = \ln (D_{ij})$$
$$a = \ln k$$

se tiene

$$Y' = a + bX1 + cX2 + dX3 \tag{3.2}$$

que es una ecuación lineal, más sencilla de analizar y resolver que el modelo gravitacional.

La transformación anterior se debe aplicar a todo el conjunto de datos con el cual se va a trabajar, por lo que en lugar de tener para cada observación,

$$(T_{ij},\ P_iP_j,\ M_iM_j,\ D_{ij})$$

se tendrá

$$(\ln (T_{ij}),\ \ln (P_iP_j),\ \ln (M_iM_j),\ \ln (D_{ij}))$$

o bien considerando el cambio de variables anterior,

$$(Y',\ X1,\ X2,\ X3).$$

Ahora bien, se está suponiendo que el flujo de transporte carretero se rige por el modelo gravitacional (3.1) o bien, una vez hechas las transformaciones anteriores, por la expresión (3.2). Esto quiere decir que para ciertos valores fijos de X1, X2 y X3 se debería observar el mismo resultado Y\` para todas y cada una de las veces que se repita la observación pero, generalmente, se observará un valor diferente en cada ocasión.

La diferencia entre el valor esperado y el valor observado o 'error' se debe a que en todo fenómeno encontramos factores que afectan la relación que se estudia, ajenos a los que son de interés para la interpretación del mismo y que distorsionan los resultados. Esto motiva a tratar de fijar o controlar estos elementos distorsionadores para buscar que las fluctuaciones en los resultados sean mínimas.

Dado que no es posible fijar todos los factores que afectan un fenómeno o experimento, siempre habrá efectos que no se puedan controlar y que no permitan, más que muy rara vez, obtener la misma medición al repetir el experimento u observación bajo las mismas condiciones de estudio.

En nuestro caso, el valor esperado Y\` para X1, X2 y X3 valores fijos y conocidos y a, b, c, d parámetros fijos pero desconocidos es

$$Y` = a + bX1 + cX2 + dX3$$

pero en realidad se observa

$$Y = a + bX1 + cX2 + dX3 + \epsilon \qquad (3.3)$$

o si se define f(X1, X2, X3) como a + bX1 + cX2 + dX3, entonces

$$Y = f(X1, X2, x3) + \epsilon$$

donde ϵ es la magnitud de la función que mide la intervención de los factores no controlados o 'error'. De esta forma, se puede describir la relación entre Y y X1, X2, X3 en presencia de los factores que la afectan.

No es de interés conocer la estructura funcional de ϵ, sino más bien su magnitud. Es deseable que su valor sea muy pequeño en relación al valor de f(X1, X2, X3), ya que de esta forma, la función de error ϵ no tendrá valor explicativo al describir Y y, en este sentido, el mejor modelo será aquel en el que se minimice el valor de la función de error.

Cabe señalar que f(X1, X2, X3) es el componente determinístico del modelo ya que para X1, X2, X3 valores fijos siempre se tendrá la misma observación. En cambio, ϵ es el componente aleatorio ya que no es predecible su valor.

Por lo tanto, el objetivo es encontrar los valores $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ y $\hat{d}$ tales que el modelo lineal (3.3) sea el que mejor describa el tránsito carretero en el sentido de minimizar la magnitud de los errores.

Ahora bien, los supuestos del modelo (3.3) son:

1) X_{ji}, para $j=1,2,3$ e $i=1...n$ son valores fijos y conocidos.
2) a,b,c,d son parámetros fijos pero desconocidos.
3) ϵ es una variable aleatoria.

Además, se tiene n vectores de datos de la forma

$$(Y_i,\ X_{1i},\ X_{2i},\ X_{3i}) \text{ para } i=1,\ldots,n$$

que satisfacen $Y_i = a + bX_{1i} + cX_{2i} + dX_{3i} + \epsilon_i$, $i=1...n$ (3.4)

y se desea que los errores $\epsilon_1 \ldots \epsilon_n$ sean lo más pequeño posible.

El valor de cada uno de los errores se puede encontrar a partir de la expresión (3.4). Esto es factible ya que los parámetros del modelo son fijos y entonces para cada observación Yi tendremos un valor ei fijo. ei es igual a

$$ei = Yi - a - bX1i - cX2i - dX3i \quad \text{para } i=1...n$$

Una alternativa para resolver nuestro problema podría ser encontrar los valores $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ y $\hat{d}$ tales que hagan cero la suma de los errores, es decir,

$$\Sigma(Yi - \hat{a} - \hat{b}X1i - \hat{c}X2i - \hat{d}X3i) = 0 \qquad (3.5)$$

Sin embargo, este criterio no funciona adecuadamente debido a que no refleja las discrepancias entre los valores observados y los valores estimados ya que al sumar términos con signo contrario se anulan.

En el ejemplo de la figura 1, realizado para el caso de dos variables interrelacionadas con el fin de facilitar su representación geométrica, se cumple la condición (3.5) pero no se refleja el hecho de que existen diferencias entre los valores observados y los estimados como se puede apreciar en la misma gráfica.

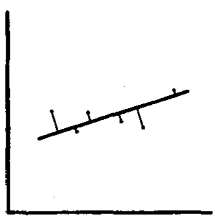


Figura 1

Para evitar este problema se podría considerar minimizar respecto a a, b, c y d cualquiera de las siguientes expresiones:

i) $\Sigma|Yi - a - bX1i - cX2i - dX3i|$

ii) $\Sigma(Yi - a - bX1i - cX2i - dX3i)^2$

o en general,

iii) $\Sigma(Yi - a - bX1i - cX2i - dX3i)^k$ donde k=2, 4, 6, ...

De estas alternativas, la más sencilla de desarrollar es ii).

Otro enfoque para resolver el mismo problema es considerar que el conjunto de errores forma un vector de n valores y tratar de encontrar $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ y $\hat{d}$ de tal forma que el tamaño o 'norma' del vector de errores sea mínimo.

Este problema se puede resolver por muchos caminos, dependiendo de como se mida el vector; es decir, de la norma elegida para medir el vector. La manera más sencilla de resolverlo y que coincide con el planteamiento anterior es elegir la norma 2.

Sea h(a,b,c,d) la función que mide la norma dos de un vector y

$h(a,b,c,d) = (\Sigma ei^2)^{1/2}$, o equivalentemente

$h(a,b,c,d) = \Sigma ei^2$ ya que la función cuadrática es monótona creciente.

Entonces, $\min h(a,b,c,d) = \min \Sigma ei^2$

$$= \min \Sigma(Yi-a-bX1i-cX2i-dX3i)^2 \qquad (3.6)$$

que coincide con minimizar la alternativa ii) del enfoque anterior. Minimizar la expresión (3.6) tiene sentido ya que está acotada inferiormente por cero.

El criterio de minimizar la suma de cuadrados de los errores se conoce como Método de Mínimos Cuadrados. Cabe señalar que adicionalmente este método proporciona excelentes resultados bajo ciertos supuestos que se comentarán más adelante.

4. EL METODO DE MINIMOS CUADRADOS

Una vez elegido como el método a utilizar para estimar los parámetros del modelo de tal forma que se minimice la magnitud de los errores, se desarrollará el método de mínimos cuadrados así como algunos resultados importantes relacionados con la evaluación del modelo.

El desarrollo se hará en forma general para poder emplear el método de mínimos cuadrados con cualquier número de variables. Se empleará notación matricial para facilitar la descripción del mismo.

Sean

$$\epsilon = \begin{vmatrix} \epsilon 1 \\ \epsilon 2 \\ . \\ . \\ \epsilon n \end{vmatrix} \quad \text{vector de errores (nx1)}$$

$$Y = \begin{vmatrix} Y1 \\ Y2 \\ . \\ . \\ Yn \end{vmatrix} \quad \text{vector de observaciones (nx1)}$$

$$\beta = \begin{vmatrix} \beta 0 \\ \beta 1 \\ . \\ . \\ \beta p-1 \end{vmatrix}$$ vector de parámetros desconocidos (px1)

$$X = \begin{vmatrix} 1 & X11 & X21 & . . . & Xp-11 \\ 1 & X12 & X22 & . . . & Xp-12 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & X1n & X2n & . . . & Xp-1n \end{vmatrix}$$ matriz de valores (nxp)

El modelo de regresión lineal múltiple es por consecuencia

$$Y = X\beta + \epsilon \tag{4.1}$$

Entonces, $\epsilon = (Y - X\beta)`$ y $\epsilon` = (Y - X\beta)$

$$\begin{aligned} y \min \ \Sigma\epsilon i^2 &= \min \epsilon`\epsilon \\ &= \min (Y - X\beta)`(Y - X\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sea} \quad g(\beta) &= (Y - X\beta)`(Y - X\beta) \\ &= Y`Y - 2Y`X\beta + \beta`X`X\beta \end{aligned}$$

Para encontrar el vector $\hat{\beta}$ tal que minimice la función $g(\beta)$, suma de cuadrados del error, se seguirá el procedimiento del cálculo diferencial: se diferenciará la función $g(\beta)$ con respecto a β y se igualará a cero para encontrar $\hat{\beta}$. Posteriormente se verificará el signo de la segunda derivada para checar que efectivamente el valor de $\hat{\beta}$ sea un mínimo de $g(\beta)$.

De este desarrollo tenemos que el vector $\hat{\beta}$ que minimiza $g(\beta)$ será aquel que satisfaga el llamado sistema de ecuaciones normales.

$$(X`X)\beta = X`Y \tag{4.2}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones se debe encontrar la matriz inversa de (X`X). La inversa de una matriz existe si la matriz es no singular, lo cual significa que el determinante de la matriz sea distinto de cero, o equivalentemente si es de rango completo; esto es, todas las columnas y los renglones de la matriz deben ser linealmente independientes.

Si (X`X) no fuera linealmente independiente se trataría de explicar a Y con p-1 variables cuando, en realidad, necesitamos menos variables para poder explicarla. En este caso, el modelo no sería correcto. Esta situación se reflejaría en el hecho de que tendríamos menor número de ecuaciones que de parámetros. (X`X) tampoco sería no singular si tuviésemos menor número de observaciones que de parámetros.

La solución del sistema de ecuaciones normales (4.2) dado que la matriz (X`X) es no singular está dada por:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \qquad (4.3)$$

y corresponde a la estimación por mínimos cuadrados de los parámetros del modelo de regresión lineal (4.1).

Observemos que los valores calculados $\hat{Y}$ son obtenidos al evaluar $\hat{Y} = X\hat{\beta}$ y $\hat{Y}$ corresponde a la mejor descripción de los datos en el sentido de minimizar la magnitud de los errores bajo el criterio de mínimos cuadrados.

Ahora bien, a continuación se harán algunos comentarios sobre los errores, los cuales son de importancia para el modelo.

En el modelo $Y = X\beta + \epsilon$, ϵ es el vector que mide la variación de los efectos no controlados. La variación que se puede encontrar al realizar el mismo experimento varias veces se debe únicamente al efecto de los factores no controlados, el cual puede tomar diversos valores, positivos o negativos, y además no se puede conocer de antemano su valor. Esto es, ϵ es una variable aleatoria ya que su comportamiento es variable y no es predecible.

i) Es razonable pedir que el error debido a los factores no controlados sea cero; esto equivale a suponer que el valor esperado del error es cero. Esto es, $E(\epsilon_i)=0$ para $i=1...n$.

ii) Si los factores no controlados influyen de igual manera para cada observación Y_i entonces la variabilidad de la magnitud de los errores debe ser igual para todos. Este supuesto quiere decir que la varianza de los errores es un valor constante, por ejemplo σ^2; entonces $var(\epsilon_i)= \sigma^2$, $i=1...n$

iii) El efecto de los factores no controlados es independiente para cada observación y, de esta forma, el error registrado al realizar una observación no afecta los errores subsecuentes ni, por consecuencia, las observaciones subsecuentes. La independencia entre los errores implica que $cov(\epsilon_i,\epsilon_j)=0$ para $i\neq j$.

La dependencia entre Y y ϵ, dada por $Y = X\beta + \epsilon$, implica que Y también sea una variable aleatoria ya que β y X son valores fijos y ϵ es el único elemento aleatorio del modelo.

Los supuestos anteriores sobre los errores,

i) $E(\epsilon_i)=0$ con $i=1...n$
ii) $var(\epsilon_i)=\sigma^2$ con $i=1...n$
iii) ϵ_i independientes

y la dependencia entre Y y ϵ implican que

i) $E(Y_i)=\beta_0+\beta_1X_{1i}+...+\beta_{p-1}X_{p-1i}$ con $i=1...n$
ii) $var(Y_i)=\sigma^2$ con $i=1...n$.
iii) Y_i independientes

Existe un resultado conocido como 'Teorema de Gauss-Markov' que establece la optimalidad de los estimadores de mínimos cuadrados en el sentido de varianza mínima y es muy importante ya que no requiere suposición alguna con respecto a la distribución de las observaciones. Este teorema se estableció para el caso de una variable de respuesta y una variable explicativa. La generalización de este teorema se menciona a continuación aunque no se demostrará.

Teorema: Considérese el modelo $Y = X\beta + \epsilon$, en donde X es una matriz de nxp de rango p de constantes conocidas; β es un vector de px1 parámetros constantes pero desconocidos y ϵ es un vector aleatorio tal que $E(\epsilon) = 0$, $cov(\epsilon) = \sigma^2 I$. El mejor estimador lineal insesgado en el sentido de varianza mínima de la combinación lineal $l`\beta$ ($l \epsilon R^p$ constantes) está dado por $l`\hat{\beta}$ donde $\hat{\beta} = (X`X)^{-1}X`Y$.

Hasta ahora se ha encontrado que los estimadores obtenidos mediante el método de mínimos cuadrados (4.3) son los mejores estimadores lineales insesgados en el sentido de varianza mínima.

Sin embargo, para el análisis estadístico no es suficiente esta propiedad ya que es deseable efectuar otras evaluaciones al modelo, como hacer pruebas de hipótesis con respecto a los parámetros.

Para poder realizar pruebas de hipótesis será necesario considerar una distribución para los errores, lo que dará por consecuencia una distribución para Y.

Se va a suponer que los errores están idénticamente distribuidos bajo una distribución normal con media cero y varianza σ^2; esto es, $\epsilon i \sim N(0,\sigma^2)$ para i=1...n. Entonces, como Yi es combinación lineal de ϵi, $Yi \sim N(\beta 0+\beta iX1i+ \ldots +\beta p-1Xp-1i,\sigma^2)$.

Expresando los supuestos anteriores en forma matricial tenemos que $\varepsilon \sim N_n(0,\sigma^2 I)$ y que $Y \sim N_n(X\beta,\sigma^2 I)$.

La suposición de normalidad también repercute en la posibilidad de obtener estimadores de β ya que se puede utilizar el método de máxima verosimilitud debido a que se tiene un modelo probabilístico conocido para la distribución de las observaciones.

El método de máxima verosimilitud consiste en obtener una muestra de la población real en estudio y escoger de entre todas las posibles poblaciones teóricas aquella que maximiza la probabilidad de haber obtenido dicha muestra.

La función de verosimilitud se obtiene evaluando la función de densidad conjunta de una muestra en los valores específicos de las observaciones muestrales. En notación matemática tenemos que $f(X_n;\theta) = \pi f(X_i;\theta) \equiv L(\theta)$.

El método de máxima verosimilitud (m.v.) consiste en estimar θ por un valor $\hat{\theta}(X_n)$ tal que $L(\hat{\theta}\ m.v.) = \sup_{\theta} L(\theta)$

En nuestro caso,

$$f(Y \mid X,\sigma^2,\beta) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} [\exp -(1/2\sigma^2)(Y - X\beta)`(Y - X\beta)]$$

es la función de densidad de probabilidad conjunta de la muestra.

El procedimiento empleado para maximizar $f(Y \mid X,\sigma^2,\beta)$ es el del cálculo diferencial ya empleado para encontrar el valor de $\hat{\beta}$. Se puede maximizar $f(Y \mid X,\sigma^2,\beta)$ o la composición $(r \circ f)(\sigma^2,\beta)$ donde r es una función monótona creciente. Tal es el caso de la función logaritmo natural, cuya composición con f facilita los cálculos.

Primeramente estimaremos σ^2. Sea la función de verosimilitud de σ^2 igual a $L(\sigma^2) = f(Y \mid X,\sigma^2,\beta)$ que solo depende de σ^2. Maximizando $\ln L(\sigma^2)$ tenemos que el estimador de σ^2 de máxima verosimilitud es $\hat{\sigma}^2 = 1/n\ (Y - X\beta)`(Y - X\beta)$

Ahora se necesita conocer $\hat{\beta}$ y se estimará por máxima verosimilitud. Sea la función de β, $L(\beta) = f(Y \mid X,\sigma^2,\beta)$, que solo depende de β. Maximizando $\ln L(\beta)$ tenemos que el estimador de máxima verosimilitud de β es $\hat{\beta} = (X`X)^{-1}X`Y$ (4.4)

Las siguientes consecuencias se desprenden de la suposición de normalidad de los errores:

i) Los estimadores de β por el método de mínimos cuadrados (4.3) y por el método de máxima verosimilitud (4.4) coinciden.

ii) Se obtiene el estimador máxima verosimilitud para σ^2.

Algunas propiedades importantes de los estimadores de máxima verosimilitud:

i) Eficientes y óptimos asintóticamente normales
ii) Consistentes

Pese a haber minimizado la suma de cuadrados de los errores, el modelo puede ser útil o no para describir los datos. Esto depende de si realmente existe una relación lineal entre la variable de respuesta Y y las variables explicativas β , ya que puede darse el caso de que se intenta describir una relación no lineal mediante un modelo lineal, como en la figura 1, o se quiera asociar una relación lineal a un conjunto de datos en los que definitivamente no exista relación alguna entre ellos (ver fig 2)

En ambos casos, pese a obtener la recta de mínimos cuadrados, el modelo no sirve para describir los datos ya que el supuesto de linealidad no es válido. La pendiente de la recta ajustada es casi cero. En la figura 1 se puede afirmar que la relación es cuadrática en lugar de lineal mientras que en la figura 2 no existe relación alguna entre los datos.

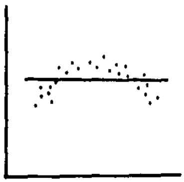


Figura 1

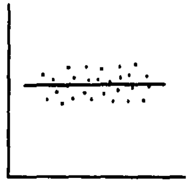


Figura 2

Las pruebas de hipótesis nos permiten verificar la validez de afirmaciones hechas acerca de la población bajo estudio, las cuales se expresan a menudo por medio de afirmaciones sobre los parámetros del modelo probabilístico (distribución) de la población.

El caso de mayor interés en las pruebas de hipótesis es verificar si el modelo de regresión lineal es válido para explicar los datos; es decir, comprobar si existe relación lineal entre Y y las variables explicativas β. En este caso la prueba de hipótesis que se lleva a cabo es:

$$H0: \beta 1 = \beta 2 = \ldots = \beta p-1 = 0 \quad vs \quad H1: \beta J \neq 0 \quad para\ j=1 \ldots p-1$$

Esta prueba se conoce como Prueba de Significancia Global.

Si se rechaza H0, la hipótesis nula, entonces al menos algún parámetro es distinto de cero y tiene importancia en el modelo.

Si no se rechaza H0, entonces $\beta 1 = \beta 2 = \ldots = \beta p-1 = 0$ y no son relevantes para el modelo. En este caso, el único parámetro de relevancia en el modelo es $\beta 0$ y, por lo tanto, el modelo de regresión sería $Y = \beta 0 + \epsilon$, que no depende de los valores que pueda tomar X.

Mediante la Hipótesis Lineal General se puede probar toda clase de combinaciones lineales de ß. Esta hipótesis es

$$H0:\ C\beta = \gamma \quad \text{vs} \quad H1:\ C\beta \neq \gamma$$

donde C es una matriz rxp ($r \leq p$) de rango completo y de constantes conocidas

γ es un vector rx1 de constantes conocidas

ß es un vector px1 de parámetros

En el caso de la prueba de significancia global,

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad y \quad \gamma = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{vmatrix}$$

Algunas definiciones importantes relacionadas con pruebas de hipótesis;

- la región crítica de la hipótesis es un subconjunto del espacio muestral que lleva a rechazar la hipótesis bajo consideración.

- el nivel de significancia de la prueba es la probabilidad de rechazar H0 cuando dicha hipótesis es verdadera, lo cual es un error. A este error se le conoce como error tipo I.

Se utilizará el método de cociente de verosimilitudes.

$$\text{Sea } \mathcal{C} = \left\{ Yn \mid \Lambda = \frac{\sup_{\omega} L(\beta,\sigma^2)}{\sup_{\Omega} L(\beta,\sigma^2)} < k' \right\} \text{ la región crítica} \qquad (4.5)$$

donde $\Omega = \{ (\beta,\sigma^2) \mid \beta \in R^p,\ \sigma^2 > 0 \}$
$\omega = \{ (\beta,\sigma^2) \mid C\beta = \gamma,\ \sigma^2 > 0 \}$

k` es una constante tal que $\sup_{\omega} P( \Lambda < k` \mid \beta,\sigma^2) = \alpha$

y permite ajustar el nivel de significancia o el tamaño de la región crítica.

Ya vimos que $\epsilon \sim N(0,\sigma^2)$ y $Y \sim N(X\beta,\sigma^2)$.

Además $f(Y \mid X,\beta,\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp[-(1/2\sigma^2)(Y-X\beta)`(Y-X\beta)]$

También se obtuvieron los estimadores de máxima verosimilitud de β y σ^2. Estos son $\hat{\beta} = (X`X)^{-1}X`Y$ y $\hat{\sigma}^2 = 1/n\ (Y - X\beta)`(Y - X\beta)$

Entonces, $\sup_{\Omega} L(\beta,\sigma^2) = L(\hat{\beta},\hat{\sigma}^2) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp(-n/2)$ (4.6)

Ahora, $\sup_{\omega} L(\beta,\sigma^2)$ equivale a maximizar $L(\beta,\sigma^2)$ sujeto a $C\beta = \gamma$ o equivalentemente a maximizar $l(\beta,\sigma^2)$ s.a. $-(1/\sigma^2)(C\beta - \gamma) = 0$, donde $l(\beta,\sigma^2) = \ln L(\beta,\sigma^2)$

Utilizando multiplicadores de Lagrange

$G(\beta,\sigma^2,\lambda) = l(\beta,\sigma^2) - (1/\sigma^2)\lambda`(C\beta - \gamma)$. Nuevamente empleando el cálculo diferencial encontramos los estimadores bajo la hipótesis nula.

$\hat{\beta}0 = (X`X)^{-1}(X`Y - C`\lambda)$
$C\hat{\beta}0 = \gamma$
$\hat{\sigma}0^2 = (1/n)(Y - X\hat{\beta}0)`(Y - X\hat{\beta}0)$

Sustituyendo los estimadores bajo la hipótesis nula tenemos que

$\sup_{\omega} L(\beta,\sigma^2) = (2\pi\hat{\sigma}0^2)^{-n/2} \exp(-n/2)$ (4.7)

Entonces sustituyendo (4.6) y (4.7) en Λ de (4.5) tenemos que

$\Lambda = (\hat{\sigma}0^2/\hat{\sigma}^2)$, pero $(\hat{\sigma}0^2/\hat{\sigma}^2) < k' \iff (\hat{\sigma}^2/\hat{\sigma}0^2) < k$

y la región crítica de la prueba es $\mathcal{C} = \{Yn \mid \Lambda = (\hat{\sigma}^2/\hat{\sigma}0^2) < k\}$,

donde k es tal que $P(\Lambda < k \mid H0 : C\beta = \gamma) \leq \alpha$ (4.8)

Analizaremos los errores del modelo de regresión para el caso especial de dos variables. Consideremos la siguiente igualdad:

$$Yi - \hat{Y}i = Yi - \overline{Y} - (\hat{Y}i - \overline{Y})$$

La ecuación anterior también se puede escribir

$$(Yi - \overline{Y}) = (\hat{Y}i - \overline{Y}) + (Yi - \hat{Y}i)$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad y sumando para i=1...n se tiene que

$$\Sigma(Yi - \overline{Y})^2 = \Sigma(\hat{Y}i - \overline{Y})^2 + \Sigma(Yi - \hat{Y}i)^2 \qquad (4.9)$$

ya que el doble producto $2\Sigma(\hat{Y}i - \overline{Y})(Yi - \hat{Y}i)$ se hace cero.

La cantidad $(\hat{Y}i - \overline{Y})$ es la desviación de la i-ésima observación respecto de la media general y entonces el lado izquierdo de la ecuación (4.9) es la suma de cuadrados de las desviaciones de las observaciones de la media. Si la hipótesis nula es correcta entonces el modelo de regresión es $Y = \beta0 + \epsilon$ y el modelo ajustado es $\hat{Y} = \overline{X}$. Por lo tanto, la suma de cuadrados anterior es debida al error del modelo reducido.

$(Yi - \hat{Y}i)$ es la desviación de la i-ésima observación de su valor estimado con el modelo y su correspondiente término en la ecuación (4.9) es la suma de cuadrados del error debido al modelo $Y = \beta0 + \beta1X1$, por lo cual se le conoce como suma de cuadrados del error debido al modelo completo. Esta suma de cuadrados coincide con Σei^2 que como se recordará es la función que se minimizó bajo el criterio de mínimos cuadrados.

El término $(\hat{Y}i - \overline{Y})$ es la desviación del valor predecido de la i-ésima observación de la media y su suma de cuadrados se le conoce como suma de cuadrados del error debido a la hipótesis nula.

La ecuación (4.9) se puede expresar como

Suma de cuadrados del error debido al modelo reducido	=	Suma de cuadrados del error debido a la hipótesis nula	+	Suma de cuadrados del error debido al modelo completo

que se conoce como la igualdad fundamental de suma de cuadrados, en este caso para probar significancia del modelo.

Para abreviar, se empleará la notación:

$$SCEmr = SCEho + SCEmc$$

donde el modelo completo es $Y = \beta 0 + \beta 1X$
el modelo reducido es $Y = \beta 0$

De los comentarios anteriores se deduce que SCEmr es lo que no llega a explicar el modelo de regresión reducido. La SCEmc es la parte que el modelo de regresión completo no alcanza a explicar. La SCEho es el incremento en el error al pasar del modelo completo (p parámetros) al reducido (1 parámetro).

Regresando a nuestro caso general. Aunque no se demostrará, la igualdad fundamental de suma de cuadrados del modelo de regresión lineal múltiple, que permite probar cualquier tipo de prueba, es válida para las siguientes expresiones:

SCEmc = $(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})$, que es precisamente la expresión que se minimizó bajo el método de mínimos cuadrados.

SCEmr = $(Y - X\hat{\beta}0)'(Y - X\hat{\beta}0)$, donde $\hat{\beta}0$ es estimador de β bajo la hipótesis nula.

SCEho = $(C\hat{\beta} - \gamma)'(C(X'X)^{-1}C')^{-1}(C\hat{\beta} - \gamma)$

Bajo los supuestos de normalidad,

$(1/\sigma^2)$SCEmc $\sim \chi^2(n-p)$; $(1/\sigma^2)$SCEmr $\sim \chi^2(n-p+r)$; $(1/\sigma^2)$SCEho $\sim \chi^2(r)$

Regresando a la expresión (4.8), analizaremos la desigualdad tomando en cuenta la igualdad de suma de cuadrados.

$$\Lambda' = \hat{\sigma}^2/\hat{\sigma}0^2 < k \iff \text{SCEmc/SCEmr} < k \iff \text{SCEmc/(SCEmc+SCEho)} < k$$
$$\iff \text{(SCEho/r)/(SCEmc/n-p)} > F$$
$$\iff \text{(CMEho/CMEmc)} > F$$

Por lo tanto, la región crítica es $\mathcal{C}$ = (Yn | CMEho/CMEmc > F)

en donde F es tal que $\sup_{\omega} P(\text{CMEho/CMEmc} > F \mid H0 : C\beta = \gamma) = \alpha$

Si Ho es cierta, CMEho/CMEmc $\sim F(r,n-p)$ y no depende de β por lo que $P(\text{CMEho/CMEmc} > F \mid H0 : C\beta = \gamma) = \alpha$

El desarrollo de la prueba de hipótesis se resume en la tabla siguiente:

Tabla de análisis de varianza para probar

HO: $C\beta = \gamma$ vs H1: $C\beta \neq \gamma$ en el modelo $Y = X\beta + \epsilon$

Fuente de variación	Grados libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	Fc
Ho: $C\beta = \gamma$	r	$(C\hat{\beta}-\gamma)`(C(X`X)^{-1}C`)^{-1}(C\hat{\beta}-\gamma)$	SCEho/r	$\frac{\text{CMEho}}{\text{CMEmc}}$
Modelo Completo	n-p	$(Y-X\hat{\beta})`(Y-X\hat{\beta})$	SCEmc/n-p	
Modelo reducido	n-p+r	$(Y-X\hat{\beta}0)`(Y-X\hat{\beta}0)$		

Cabe señalar que $s^2 =$ SCEmc/n-p es el estimador insesgado de la varianza del modelo.

Es deseable que α sea un valor muy chico pero no se pueda sustentar teóricamente que valor α es chico, por lo que es más interesante decir hasta que valor de α se rechaza o acepta HO.

$p = P(Z > Fc \mid Z \sim F(r,n-p))$ y p es el nivel de significancia descriptivo de la prueba y tiene la probabilidad de que si la prueba de hipótesis se efectúa con un valor α, entonces

i) $\alpha > p$ implica rechazar HO.
ii) $\alpha \leq p$ implica aceptar HO.

Por convención se utiliza generalmente,

i) $p < 0.01$ rechazar HO.
ii) $p > 0.05$ aceptar HO.
iii) $0.01 \leq p \leq 0.05$, no hay suficiente información para tomar la decisión.

En el caso de la prueba de significancia del modelo se simplifican los cálculos.

La suma de cuadrados del modelo completo es,

$$SCEmc = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) = Y'Y - Y'X\hat{\beta}$$

La suma de cuadrados del modelo reducido es,

$$SCEmr = \Sigma(Yi - \overline{Y})^2 = Y'Y - n\overline{Y}^2$$

$$\text{Entonces, } Fc = \frac{CMEho}{CMEmc} = \frac{(n-p)}{p-1}\frac{SCEmr - SCEmc}{SCEmc} = \frac{(n-p)}{p-1}\frac{Y'X\hat{\beta} - n\overline{Y}^2}{Y'Y - Y'X\hat{\beta}}$$

y no es necesario calcular toda la tabla de análisis de varianza para hacer la prueba de significancia del modelo.

No solamente es deseable saber si existe relación lineal entre los datos sino también medir que tan bueno es el modelo para describir los datos, es decir, cual es el grado de asociación entre Y y la combinación lineal $\beta 0 + \beta 1X1 + \ldots + \beta p{-}1Xp{-}1$. Como se desconoce $\beta 0, \beta 1, \ldots, \beta p{-}1$ se tomará la estimación del valor $\hat{Y} = \hat{\beta}0 + \hat{\beta}1X1 + \ldots + \hat{\beta}p{-}1Xp{-}1$ y se medirá la relación lineal entre Y y $\hat{Y}$.

Supongamos que tenemos n parejas de datos (X1,Y1),...,(Xn,Yn), los que se pueden arreglar como vectores X y Y. Si hay relación lineal entre X y Y entonces se cumple,

$$Yi = s + tXi, \text{ para toda } i=1\ldots n. \qquad (4.10)$$

La expresión anterior puede expresarse como $\overline{Y} = s + t\overline{X}$, de donde despejamos s y tenemos que $s = \overline{Y} - t\overline{X}$

Sustituyendo s en (4.10), se tiene que $Yi = \overline{Y} - t\overline{X} + tXi$, lo que puede reexpresarse como $(Yi - \overline{Y}) = t(Xi - \overline{X})$. Esto nos conduce a que verificar la relación lineal entre dos conjuntos de datos se reduce a comprobar la proporcionalidad entre las parejas de datos $(Xi - \overline{X})$ y $(Yi - \overline{Y})$, $i=1...n$. Esta prueba únicamente nos dice si la relación es lineal o no pero no indica casos intermedios, que son los mas frecuentes.

Desde el punto de vista geométrico, checar linealidad se reduce a verificar si existe colinealidad entre los vectores X y Y. La verificación se puede llevar a cabo midiendo el ángulo que estos vectores forman.

En nuestro caso, sean $Y^* = \begin{vmatrix} Y1 - \overline{Y} \\ . \\ . \\ Yn - \overline{Y} \end{vmatrix}$ y $\hat{Y}^* = \begin{vmatrix} \hat{Y}1 - \overline{\hat{Y}} \\ . \\ . \\ \hat{Y}n - \overline{\hat{Y}} \end{vmatrix}$

$$\text{Sea } r = \cos \theta = \frac{\langle Y^*, \hat{Y}^* \rangle}{|Y^*||\hat{Y}^*|}$$

En este caso, si θ = 0, 180 ó 360 grados entonces Y^* y $\hat{Y}^*$ son colineales y el coseno de θ es ± 1. Esto quiere decir que si r está cerca de 1 ó -1 entonces el grado de asociación lineal es casi perfecto, pero si $r \equiv 0$ entonces no hay asociación lineal ya que el ángulo entre los vectores mide cerca de 90 ó 270 grados:

$$r = \frac{\langle Y^*, \hat{Y}^* \rangle}{|Y^*||\hat{Y}^*|} = \frac{\Sigma(Yi - \overline{Y})(\hat{Y}i - \overline{\hat{Y}})}{(\Sigma(Yi - \overline{Y})^2)^{1/2}(\Sigma(\hat{Y}i - \overline{\hat{Y}})^2)^{1/2}}$$

r es llamado el coeficiente de correlación múltiple aunque también es frecuente encontrar el coeficiente de determinación, R, que es el cuadrado del coeficiente de correlación múltiple. R nos da el porcentaje de la variabilidad de Y explicada por el modelo de regresión lineal múltiple y $0 \leq R \leq 1$. En otras palabras, R da información del éxito del modelo para describir los valores observados al medir el grado de asociación entre la observación Y y el valor $\hat{Y}$.

5. RESULTADOS

Los resultados de la aplicación del método de mínimos cuadrados a cada una de las ocho matrices origen-destino se presentan a continuación.

Cabe señalar que se obtuvieron dos tipos de coeficiente de determinación. Uno correspondiente al modelo lineal, el cual mide el éxito de la ecuación de regresión para explicar los datos transformados, y otro correspondiente a las observaciones T_{ij} de las matrices origen-destino, el cual nos da una idea de la precisión del modelo gravitacional para describir el flujo carretero.

En otras palabras, el primer coeficiente mide el grado de asociación entre Y, el logaritmo del tránsito observado ($\ln T_{ij}$), y el valor calculado $\hat{Y} = \hat{a}X_1 + \hat{b}X_2 + \hat{c}X_3 + \hat{d}$, mientras que en el segundo caso se mide el grado de asociación entre el flujo observado T_{ij} y el valor $\hat{T}_{ij}$, calculado a partir del modelo gravitacional.

En realidad, para nosotros es más importante el segundo coeficiente ya que nos da información sobre la validez del modelo gravitacional para describir el muestreo de observaciones de la demanda interurbana de transporte carretero.

Adicionalmente, se obtuvieron cuatro coeficientes de determinación para las observaciones de los movimientos carreteros. Estos coeficientes corresponden a un intento de analizar el comportamiento del coeficiente de determinación asociado al modelo gravitacional bajo diferentes grados de resistencia al desplazamiento.

El análisis se efectuó estableciendo cuatro rangos para clasificar las observaciones de acuerdo al tiempo de recorrido de la ruta correspondiente y se calculó el grado de asociación entre T_{ij} y $\hat{T}_{ij}$ para cada rango.

Los rangos de tiempo de recorrido se definieron en base a lo que se puede considerar jornadas estándar de viaje y son los siguientes:

Rango	Minutos
1	0- 90
2	91-360
3	361-720
4	721- +

a) Matriz de viajes-persona en automóvil y pick-up

Ecuaciones normales

Matriz (X`X)				Términos (X`Y)
638.000	7516.040	2685.010	-4116.050	1373.591
7516.040	90077.446	31810.029	-48581.145	16999.109
2685.010	31810.029	11451.609	-17397.052	5936.779
-4116.050	-48581.145	-17397.052	26903.746	-8287.579

Parámetros del modelo

k = 39.4915
b = 0.4842
c = 1.4862
d = 2.0897

Prueba de significancia del modelo

H0: Y = a vs H1: Y = a + bX1 + cX2 + dX3

F calculada: 484.09
Número de observaciones (n): 638
Número de parámetros (p) : 4

Dado que F (3, 634, 0.9995): 5.91, el nivel de significancia descriptivo p es menor a 0.0005 por lo que existe evidencia de que se debe rechazar H0.

Coeficiente de determinación (regresión) : 70%

Coeficiente de determinación (observaciones): 75%

Coeficiente de determinación (observaciones): 81% (rango 1)
Coeficiente de determinación (observaciones): 57% (rango 2)
Coeficiente de determinación (observaciones): 78% (rango 3)
Coeficiente de determinación (observaciones): 71% (rango 4)

b) Matriz de viajes-persona en autobus

Ecuaciones normales

Matriz (X`X) — Términos (X`Y)

651.000	7626.430	2727.220	-4198.270	1399.263
7626.430	90932.751	32138.250	-49259.943	17269.911
2727.220	32138.250	11588.969	-17661.703	6019.651
-4198.270	-49259.943	-17661.703	27420.956	-8432.322

Parámetros del modelo

k = 75.5833
b = 0.4951
c = 1.3413
d = 2.1040

Prueba de significancia del modelo

HO: Y = a vs H1: Y = a + bX1 + cX2 + dX3

F calculada: 512.51
Número de observaciones (n): 651
Número de parámetros (p) : 4

Dado que F (3, 651, 0.9995): 5.91, el nivel de significancia descriptivo p es menor a 0.0005 por lo que existe evidencia de que se debe rechazar HO.

Coeficiente de determinación (regresión) : 70%

Coeficiente de determinación (observaciones): 70%

Coeficiente de determinación (observaciones): 80% (rango 1)
Coeficiente de determinación (observaciones): 52% (rango 2)
Coeficiente de determinación (observaciones): 74% (rango 3)
Coeficiente de determinación (observaciones): 81% (rango 4)

c) Matriz de toneladas transportadas carga 1

Ecuaciones normales

Matriz (X`X) | Términos (X`Y)

122.000	1520.500	526.570	-747.540	234.615
1520.500	19339.917	6613.452	-9341.678	3012.452
526.570	6613.452	2299.733	-3235.917	1021.220
-747.540	-9341.678	-3235.917	4687.227	-1318.300

Parámetros del modelo

k = 134.5325
b = 0.2753
c = 0.2200
d = 1.2010

Prueba de significancia del modelo

H0: Y = a vs H1: Y = a + bX1 + cX2 + dX3

F calculada: 27.55
Número de observaciones (n): 122
Número de parámetros (p) : 4

Dado que F (3, 118, 0.9995): 6.34, el nivel de significancia descriptivo p es menor a 0.0005 por lo que existe evidencia de que se debe rechazar H0.

Coeficiente de determinación (regresión) : 41%

Coeficiente de determinación (observaciones): 8%

Coeficiente de determinación (observaciones): 1% (rango 1)
Coeficiente de determinación (observaciones): 0% (rango 2)
Coeficiente de determinación (observaciones): 15% (rango 3)
Coeficiente de determinación (observaciones): 2% (rango 4)

d) Matriz de toneladas transportadas carga 2

Ecuaciones normales

Matriz (X`X)				Términos (X`Y)
91.000	1153.100	406.390	-536.880	167.487
1153.100	14917.279	5179.291	-6842.909	2166.681
406.390	5179.291	1831.605	-2410.131	747.275
-536.880	-6842.909	-2410.131	3252.102	-918.845

Parámetros del modelo

k = 28.1758
b = 0.2480
c = 0.2448
d = 0.9718

Prueba de significancia del modelo

H0: Y = a vs H1: Y = a + bX1 + cX2 + dX3

F calculada: 19.48
Número de observaciones (n): 91
Número de parámetros (p) : 4

Dado que F (3, 87, 0.9995): 6.58, el nivel de significancia descriptivo p es menor a 0.0005 por lo que existe evidencia de que se debe rechazar H0.

Coeficiente de determinación (regresión) : 40%

Coeficiente de determinación (observaciones): 62%

Coeficiente de determinación (observaciones): 60% (rango 1)
Coeficiente de determinación (observaciones): 59% (rango 2)
Coeficiente de determinación (observaciones): 41% (rango 3)
Coeficiente de determinación (observaciones): 34% (rango 4)

e) Matriz de toneladas transportadas carga 3

Ecuaciones normales

Matriz (X`X) Términos (X`Y)

97.000	1215.640	431.340	-571.940	235.348
1215.640	15558.931	5432.471	-7212.330	2936.332
431.340	5432.471	1937.781	-2558.855	1044.187
-571.940	-7212.330	-2558.855	3458.687	-1309.651

Parámetros del modelo

k = 167.5411
b = 0.0505
c = 0.6359
d = 1.0440

Prueba de significancia del modelo

H0: Y = a vs H1: Y = a + bX1 + cX2 + dX3

F calculada: 15.29
Número de observaciones (n): 97
Número de parámetros (p) : 4

Dado que F (3, 93, 0.9995): 6.58, el nivel de significancia descriptivo p es menor a 0.0005 por lo que existe evidencia de que se debe rechazar H0.

Coeficiente de determinación (regresión) : 33%

Coeficiente de determinación (observaciones): 7%

Coeficiente de determinación (observaciones): 0% (rango 1)
Coeficiente de determinación (observaciones): 1% (rango 2)
Coeficiente de determinación (observaciones): 8% (rango 3)
Coeficiente de determinación (observaciones): 0% (rango 4)

f) Matriz de toneladas transportadas carga 4

Ecuaciones normales

Matriz (X'X) Términos (X'Y)

195.000	2392.130	866.290	-1231.280	429.650
2392.130	29835.068	10673.616	-15140.054	5411.197
866.290	10673.616	3880.586	-5488.804	1928.911
-1231.280	-15140.053	-5488.804	7931.913	-2561.765

Parámetros del modelo

k = 6.9498
b = 0.2853
c = 0.8787
d = 1.1306

Prueba de significancia del modelo

H0: Y = a vs H1: Y = a + bX1 + cX2 + dX3

F calculada: 42.22
Número de observaciones (n): 195
Número de parámetros (p) : 4

Dado que F (3, 191, 0.9995): 5.91, el nivel de significancia descriptivo p es menor a 0.0005 por lo que existe evidencia de que se debe rechazar H0.

Coeficiente de determinación (regresión) : 40%

Coeficiente de determinación (observaciones): 21%

Coeficiente de determinación (observaciones): 1% (rango 1)
Coeficiente de determinación (observaciones): 18% (rango 2)
Coeficiente de determinación (observaciones): 29% (rango 3)
Coeficiente de determinación (observaciones): 27% (rango 4)

g) Matriz de toneladas transportadas carga 5

Ecuaciones normales

Matriz (X`X)				Términos (X`Y)
577.000	6726.640	2440.780	-3867.680	1405.190
6726.640	79551.816	28622.842	-45100.334	17110.104
2440.780	28622.842	10477.479	-16413.047	6108.357
-3867.680	-45100.334	-16413.047	26263.789	-9071.122

Parámetros del modelo

k = 1.6199
b = 0.5195
c = 0.9089
d = 1.1858

Prueba de significancia del modelo

H0: Y = a vs H1: Y = a + bX1 + cX2 + dX3

F calculada: 170.50
Número de observaciones (n): 577
Número de parámetros (p) : 4

Dado que F (3, 573, 0.9995): 5.91, el nivel de significancia descriptivo p es menor a 0.0005 por lo que existe evidencia de que se debe rechazar H0.

Coeficiente de determinación (regresión) : 47%

Coeficiente de determinación (observaciones): 46%

Coeficiente de determinación (observaciones): 71% (rango 1)
Coeficiente de determinación (observaciones): 39% (rango 2)
Coeficiente de determinación (observaciones): 63% (rango 3)
Coeficiente de determinación (observaciones): 77% (rango 4)

h) Matriz de toneladas transportadas carga 6

Ecuaciones normales

Matriz (X`X) Términos (X`Y)

259.000	3142.170	1136.890	-1674.930	505.058
3142.170	38774.949	13863.874	-20346.137	6383.917
1136.890	13863.874	5034.237	-7378.993	2256.301
-1674.930	-20346.137	-7378.993	11028.122	-3120.693

Parámetros del modelo

k = 0.8255
b = 0.3280
c = 0.9214
d = 0.9095

Prueba de significancia del modelo

HO: Y = a vs H1: Y = a + bX1 + cX2 + dX3

F calculada: 61.60
Número de observaciones (n): 259
Número de parámetros (p) : 4

Dado que F (3, 255, 0.9995): 5.91, el nivel de significancia descriptivo p es menor a 0.0005 por lo que existe evidencia de que se debe rechazar HO.

Coeficiente de determinación (regresión) : 42%

Coeficiente de determinación (observaciones): 36%

Coeficiente de determinación (observaciones): 50% (rango 1)
Coeficiente de determinación (observaciones): 23% (rango 2)
Coeficiente de determinación (observaciones): 13% (rango 3)
Coeficiente de determinación (observaciones): 67% (rango 4)

A manera de resumen, algunos comentarios sobre los resultados obtenidos y sugerencias para el modelo de transporte se presentan a continuación.

La prueba de significancia para el modelo Y = a + bX1 + cX2 + dX3 muestra que en todos los casos los parámetros b, c y d del modelo lineal son importantes para describir los flujos transformados y no basta el modelo Y = a para explicarlos.

Este resultado implica en el caso del modelo gravitacional que no es suficiente el parámetro k para describir la demanda de transporte carretero sino que son necesarios todos los parámetros del modelo. Esto quiere decir que el valor de

$$\frac{(Pi\ Pj)^{b}\ (Mi\ Mj)^{c}}{(Dij)^{d}}$$

no es despreciable en relación con el valor de k para explicar los flujos observados.

No obstante que el modelo gravitacional parece correcto en términos generales, el grado de descripción de los flujos carreteros observados no es igual para todos los casos.

El siguiente cuadro resume el coeficiente de determinación obtenido para las matrices origen-destino así como para los cuatro rangos de cada matriz. Hay que recordar que el coeficiente de determinación nos indica el grado de asociación lineal entre las observaciones y los valores estimados correspondientes.

Coeficiente de determinación R

Matriz	Global	Rango 1	Rango 2	Rango 3	Rango 4
Automóvil	0.75	0.81	0.57	0.78	0.71
Autobús	0.70	0.80	0.52	0.74	0.81
Carga 1	0.08	0.01	0.00	0.15	0.02
Carga 2	0.62	0.60	0.59	0.41	0.34
Carga 3	0.07	0.00	0.01	0.08	0.00
Carga 4	0.21	0.01	0.18	0.29	0.27
Carga 5	0.46	0.71	0.39	0.63	0.77
Carga 6	0.36	0.50	0.23	0.13	0.67

Como se observa, el modelo gravitacional que mejor describe los flujos carreteros es el correspondiente a los viajes-persona en automóvil y pick-up y, por consiguiente, a los viajes-persona en autobús. Cabe recordar que los viajes en autobús se obtuvieron a partir de los viajes en automóvil y muestran un comportamiento similar.

El comportamiento del coeficiente de determinación no es constante para todos los rangos de las matrices viajes-persona. El menor grado de asociación en el rango 2, principalmente, así como en el rango 4 nos sugiere el análisis de la función de resistencia al desplazamiento ya que parece ser que no afecta de igual manera a todos los rangos de distancia.

La situación es muy diferente para las matrices de carga. El porcentaje que explica el modelo es muy bajo y, por lo tanto, habrá que buscar una mejor manera de describir los flujos de carga transportada. Esta situación implica analizar las variables del modelo, principalmente la variable económica.

En el caso de las matrices de carga transportada también es recomendable desarrollar un estudio del comportamiento de la función de resistencia al desplazamiento ya que el coeficiente R tampoco tiene un comportamiento estable como se puede observar en las matrices de carga 2, 5, y 6, que son las matrices que presentan resultados más confiables.

No solamente hay que revisar el modelo sino también verificar la validez de los flujos observados, principalmente cuando haya resultados que no sean del todo lógicos. Hay que tener cuidado ya que posibles errores de registro, captura o actualización pueden distorsionar nuestros resultados.

Tal es el caso de la matriz de carga 4, en la que para los rangos 2, 3, y 4 se mantiene un coeficiente de determinacion con cierta estabilidad en tanto que para el rango 1 se desploma. Esta situación puede originarse por algún error, por ejemplo un valor excesivamente grande o pequeño, el cual afecta el coeficiente de determinación de los flujos que pertenecen a dicho rango.

CONCLUSIONES

- El desarrollo del pais exige contar con un sistema de información altamente confiable para poder efectuar estudios de planeación precisos y útiles, capaces de guiar el desarrollo de los sistemas de transporte.

- La planeación es un proceso continuo y por consiguiente la base de datos empleada en el desarrollo del modelo debe ser actualizada continuamente para poder anticiparse a los problemas de los sistemas de transporte y hacer las correcciones necesarias en la red.

- La calidad de la información es de vital importancia en los trabajos de desarrollo de modelos matemáticos. Se debe procurar que la información sea lo más homogénea posible para evitar transformaciones de datos que puedan ocasionar errores.

- Es necesario mantener un alto control de calidad a la hora de registrar y capturar la información recolectada ya que los errores en este proceso puede invalidar información importante. En algunos casos, realizar el proceso de observación e investigación nuevamente o depurar los errores toma una gran cantidad de tiempo con un costo muy elevado. Habrá ocasiones en que la pérdida de información sea irreparable.

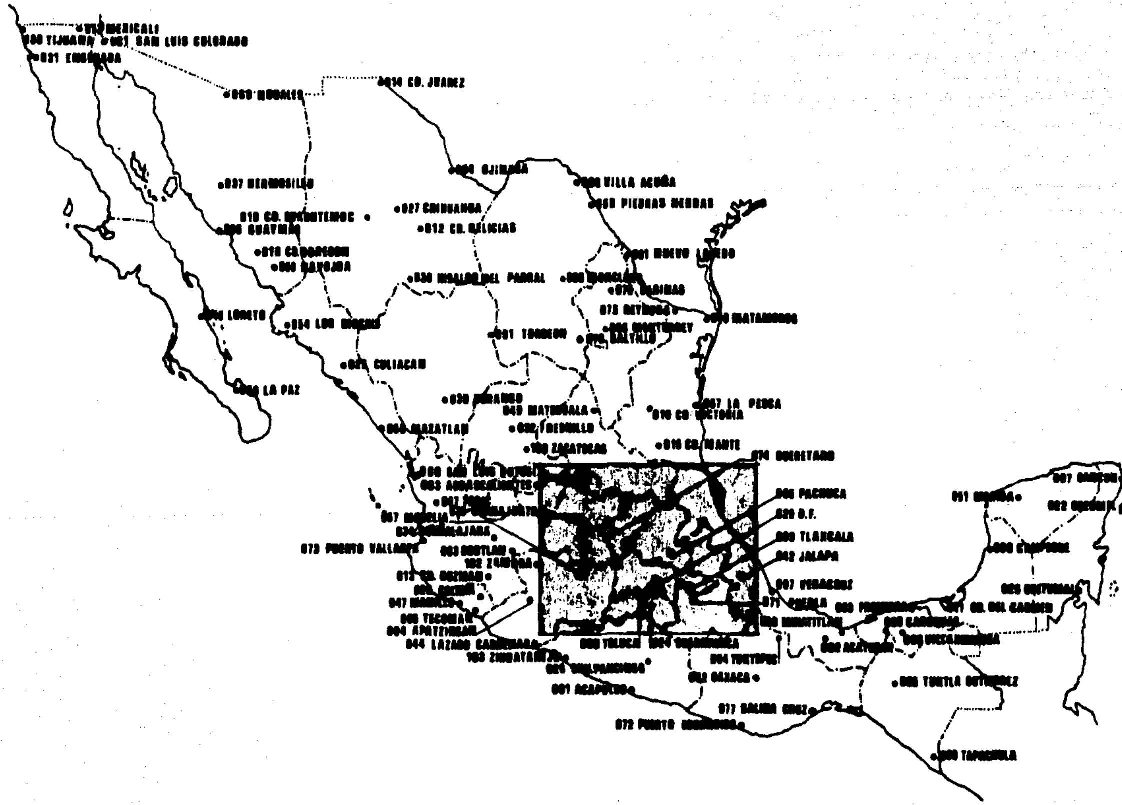
- El modelo gravitacional que utiliza como variables la población, la tasa de motorización y el tiempo de recorrido no es útil para describir los flujos carreteros asociados al transporte de carga. En cuanto a los viajes-persona, el nivel descriptivo es aceptable aunque no es suficiente para hacer predicciones con un alto grado de confiabilidad.

APENDICE

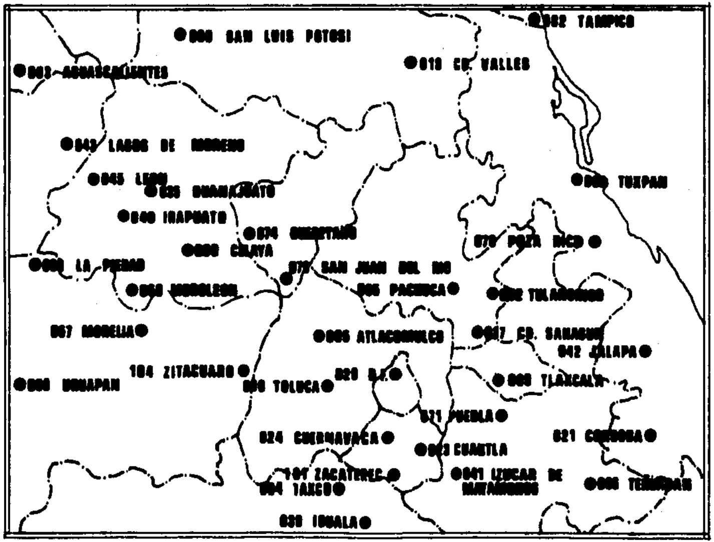
A N E X O I

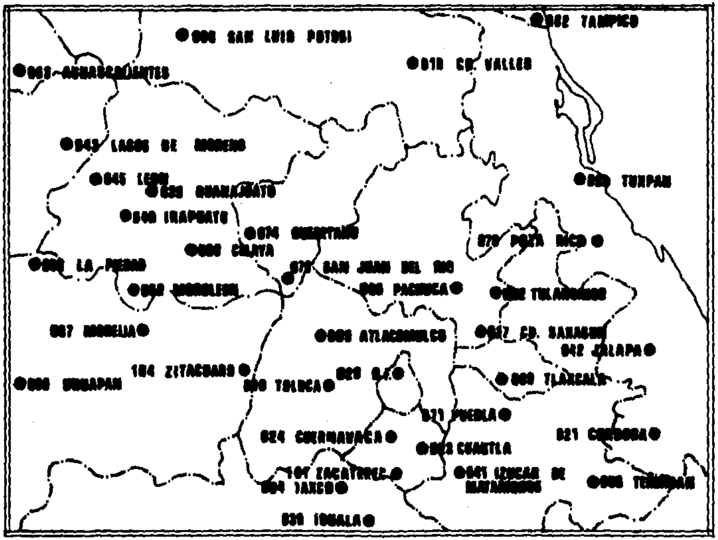
POLOS DE LA ZONIFICACION BASICA

001 ACAPULCO, Gro.
002 ACAYUCAN, Ver.
003 AGUASCALIENTES, Ags.
004 APATZINGAN, Mich.
005 ATLACOMULCO, Mex.
006 CAMPECHE, Camp.
007 CANCUN, Q.R.
008 CARDENAS, Tab.
009 CELAYA, Gto.
010 CD. CUAUHTEMOC, Chih.
011 CD. DEL CARMEN, Camp.
012 CD. DELICIAS, Chih.
013 CD. GUZMAN, Jal.
014 CD. JUAREZ, Chih.
015 CD. MANTE, Tamps.
016 CD. OBREGON, Son.
017 CD. SAHAGUN, Hgo.
018 CD. VALLES, S.L.P.
019 CD. VICTORIA, Tamps.
020 COLIMA, Col.
021 CORDOBA, Ver.
022 COZUMEL, Q.R.
023 CUAUTLA, Mor.
024 CUERNAVACA, Mor.
025 CULIACAN, Sin.
026 CHETUMAL, Q.R.
027 CHIHUAHUA, Chih.
028 CHILPANCINGO, Gro.
029 DISTRITO FEDERAL, D.F.
030 DURANGO, Dgo.
031 ENSENADA, B.C.N.
032 FRESNILLO, Zac.
033 FRONTERA, Tab.
034 GUADALAJARA, Jal.
035 GUANAJUATO, Gto.
036 GUAYMAS, Son.
037 HERMOSILLO, Son.
038 HIDALGO DEL PARRAL, Chih.
039 IGUALA, Gro.
040 IRAPUATO, Gto.
041 IZUCAR DE MATAMOROS, Pue.
042 JALAPA, Ver.
043 LAGOS DE MORENO, Jal.
044 LAZARO CARDENAS, Mich.
045 LEON, Gto.
046 LORETO, B.C.S.
047 MANZANILLO, Col.
048 MATAMOROS, Tamps.
049 MATEHUALA, S.L.P.
050 MAZATLAN, Sin.
051 MERIDA, Yuc.
052 MEXICALI, B.C.N.
053 MINATITLAN, Ver.
054 MOCHIS LOS, Sin.
055 MONCLOVA, Coah.
056 MONTERREY, N.L.
057 MORELIA, Mich.
058 MOROLEON, Gto.
059 NAVOJOA, Son.
060 NOGALES, Son.
061 NUEVO LAREDO, Tamps.
062 OAXACA, Oax.
063 OCOTLAN, Jal.
064 OJINAGA, Chih.
065 PACHUCA, Hgo.
066 PAZ LA, B.C.S.
067 PESCA LA, Tamps.
068 PIEDAD LA, Mich.
069 PIEDRAS NEGRAS, Coah.
070 POZA RICA, Ver.
071 PUEBLA, Pue.
072 PUERTO ESCONDIDO, Oax.
073 PUERTO VALLARTA, Jal.
074 QUERETARO, Qro.
075 REYNOSA, Tamps.
076 SABINAS, N.L.
077 SALINA CRUZ, Oax.
078 SALTILLO, Coah.
079 SAN JUAN DEL RIO, Qro.
080 SAN LUIS POTOSI, S.L.P.
081 SAN LUIS RIO COLORADO, Son.
082 TAMPICO, Tamps.
083 TAPACHULA, Chis.
084 TAXCO, Gro.
085 TECOMAN, Col.
086 TEHUACAN, Pue.
087 TEPIC, Nay.
088 TIJUANA, B.C.N.
089 TLAXCALA, Tlax.
090 TOLUCA, Mex.
091 TORREON, Coah.
092 TULANCINGO, Hgo.
093 TUXPAN, Ver.
094 TUXTEPEC, Oax.
095 TUXTLA GUTIERREZ, Chis.
096 URUAPAN, Mich.
097 VERACRUZ, Ver.
098 VILLA ACUNA, Coah.
099 VILLAHERMOSA, Tab.
100 ZACATECAS, Zac.
101 ZACATEPEC, Mor.
102 ZAMORA, Mich.
103 ZIHUATANEJO, Gro.
104 ZITACUARO, Mich.



TIJUANA
SAN LUIS COLORADO
014 CD. JUAREZ
OJINAGA
VILLA ACUÑA
PIEDRAS NEGRAS
037 HERMOSILLO
027 CHIHUAHUA
012 CD. DELICIAS
HIDALGO DEL PARRAL
NUEVO LAREDO
MATAMOROS
TORREON
CULIACAN
LA PAZ
LA PESCA
MAZATLAN
ZACATECAS
QUERETARO
PACHUCA
D.F.
TLAXCALA
JALAPA
VERACRUZ
PUEBLA
MINATITLAN
TOLUCA
TUXTEPEC
OAXACA
ACAPULCO
SALINA CRUZ
TUXTLA GUTIERREZ
TAPACHULA
PUERTO VALLARTA
TECOMAN
LAZARO CARDENAS
CD. DEL CARMEN


062 TAMPICO
SAN LUIS POTOSI
019 CD. VALLES
AGUASCALIENTES
LAGOS DE MORENO
LEON
GUANAJUATO
IRAPUATO
QUERETARO
CELAYA
LA PIEDAD
SAN JUAN DEL RIO
PACHUCA
MOROLEON
TULANCINGO
POZA RICO
TUXPAN
067 MORELIA
ATLACOMULCO
CD. SAHAGUN
042 JALAPA
104 ZITACUARO
URUAPAN
TOLUCA
D.F.
TLAXCALA
PUEBLA
024 CUERNAVACA
CUAUTLA
021 CORDOBA
ZACATEPEC
IZUCAR DE MATAMOROS
TEHUACAN
TAXCO
IGUALA


SAN LUIS POTOSI
CD. VALLES
TAMPICO
TUXPAN
IRAPUATO
SAN JUAN DEL RIO
PACHUCA
ATLACOMULCO
104 ZITACUARO
TOLUCA
CUERNAVACA
PUEBLA
CUAUTLA
TAXCO
IGUALA
JALAPA
TLAXCALA
TEHUACAN

BIBLIOGRAFIA

Department of Scientific and Industrial Research
Research On Road Traffic
Department of Scientific and Industrial Research, Londres, 1965

Draper Norman & Smith Harry
Applied Regression Analysis
John Wiley & Sons, Nueva York, 1981

Hogg Robert & Craig Allen
Introduction to Mathematical Statistics
Macmillan Publishing Co., Nueva York, 1978

Lane Robert
Analytical Transport Planning
John Wiley & Sons, Nueva York, 1971

Salter John
Highway Traffic Analysis and Design
Addison Wesley Publishing, Co. Massachusetts, 1974

Valencia G., Mendoza M. y Aranda F.
Introducción a la Inferencia Estadística
Comunicación Interna 42
Dep. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM
Mexico 1978

Valero Javier
Transportes Urbanos
Dossat, Madrid, 1970