



2929  
**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**IMPLEMENTACION DE PLANES PRIVADOS  
DE PENSIONES VARIABLES  
ACORDES CON LA INFLACION.  
ESTRUCTURA Y ANALISIS**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
**ACTUARIO**  
P R E S E N T A :  
**MARCELO DE JESUS KROEPFLY SAURY**

**MEXICO D. F.**

**1989.**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I C E

	Págs.
INTRODUCCION . . . . .	1
CAPITULO I. ANTECEDENTES HISTORICOS . . . . .	3
CAPITULO II. METODOS ACTUARIALES DE FINANCIAMIENTO . . . . .	23
2.1 Generalidades . . . . .	24
2.2 Clasificación de los Planes de Pensiones . . . . .	24
2.2.1 Planes de Beneficio Fijo y Costo Variable . . . . .	24
2.2.2 Planes de Beneficio Variable y Costo Fijo . . . . .	26
2.3 Clasificación de los Métodos de Financiamien to . . . . .	27
2.3.1 Métodos de Financiamiento de Benefi- cios Ya Acumulados . . . . .	27
2.3.2 Métodos de Financiamiento de Benefi- cios Proyectados . . . . .	28
2.4 Métodos de Financiamiento Racional . . . . .	30
2.5 Conceptos Generales . . . . .	31
2.5.1 Definiciones Básicas . . . . .	31
2.5.2 Notación . . . . .	36
2.6 Métodos Actuariales de Financiamiento . . . . .	37
2.6.1 Método de Crédito Unitario . . . . .	38
2.6.2 Método Individual de Costo Nivelado a Edad de Ingreso . . . . .	46

	Pág.	
2.6.3	Método Individual con Posiva Inicial Congelada a Edad de Ingreso . . . . .	52
2.6.4	Método Colectivo . . . . .	61
2.6.5	Caso Especial de los Métodos . . . . .	63
CAPITULO III.	INSTRUMENTOS DE FINANCIAMIENTO . . . . .	65
3.1	Generalidades . . . . .	66
3.2	Instrumentos de Financiamiento . . . . .	67
3.2.1	Contrato de Depósitos en Administración . . . . .	68
3.2.2	Contrato de Garantía de Participación Inmediata . . . . .	72
3.2.3	Contrato de Obligación Diferida . . . . .	77
3.2.4	Contrato de Obligación Diferida con Acumulación Garantizada . . . . .	82
3.3	El Análisis Financiero de las Obligaciones Generadas por un Plan de Pensiones . . . . .	86
CAPITULO IV.	PENSIONES VARIABLES . . . . .	90
4.1	Generalidades . . . . .	91
4.2	Pensiones Tradicionales Indexadas . . . . .	93
4.2.1	Anualidades Contingentes . . . . .	93
4.2.2	Pensiones Tradicionales Indexadas. . . . .	107
4.3	Pensiones Basadas en Anualidades Variables . . . . .	110
4.3.1	Anualidades Variables . . . . .	110

	Pág.
4.3.2 Pensiones Basadas en Anualidades	
Variables . . . . .	122
<b>CAPITULO V. EJEMPLOS . . . . .</b>	<b>126</b>
<b>CONCLUSIONES . . . . .</b>	<b>157</b>
<b>APENDICE TABLA DE MORTALIDAD UP - 1984 . .</b>	<b>163</b>
<b>BIBLIOGRAFIA . . . . .</b>	<b>166</b>

## I N T R O D U C C I O N

El análisis y desarrollo de un plan de pensiones, es un tema en el que el profesional de la carrera de Actuaría tiene una primera posición, razón por la cual dicho tema me interesa para realizar el presente estudio, profundizando en el problema que enfrentan las personas jubiladas en países como México, en los que la grave crisis económica ha afectado el poder adquisitivo de las pensiones, y en las posibles alternativas que se pueden adoptar para dar solución a este problema.

En el presente trabajo se analizan algunos tipos de planes de pensiones variables como posible solución al problema mencionado, es decir, planes acordes con la inflación.

El desarrollo de este estudio incluye antecedentes de los planes de pensiones variables, los elementos y herramientas técnicas necesarias tanto en el diseño como en el financiamiento de los planes de pensiones en general, así como el desarrollo de algunos tipos de pensiones variables con sus ejemplos prácticos correspondientes.

En el primer capítulo se mencionan los antecedentes históricos de los planes variables, en los que se describen en forma general los inicios de este tipo de planes y la evolución que han tenido hasta nuestros días.

En el segundo capítulo se describen la estructura, clasificación y conceptos básicos de los planes de pensiones en general, así como también se incluye el desarrollo de algunos de los métodos actuariales de financiamiento más utilizados en la actualidad, necesarios en el diseño de cualquier plan de pensiones.

El tercer capítulo menciona algunos de los instrumentos de inversión utilizados en el financiamiento de los planes, indispensables para el adecuado funcionamiento de los mismos, además del análisis financiero que toda empresa debe hacer para escoger dicho instrumento.

En el cuarto capítulo se desarrolla el tema central de este trabajo, que es precisamente el de las pensiones variables, en donde se hace una descripción detallada de las pensiones tradicionales así como de los tipos de pensiones variables que se pueden incluir en un plan determinado, con el fin de que éste ofrezca un beneficio que no pierda su poder adquisitivo con el paso del tiempo.

Los ejemplos de este tipo de pensiones se presentan en el quinto capítulo, en donde se hace un análisis comparativo de las pensiones tradicionales y las variables en cuanto a los costos y beneficios que originan y a partir de los resultados obtenidos se concluye acerca del plan de pensiones variables más conveniente de implementar.

Finalmente se presentan las conclusiones derivadas de este trabajo.

## CAPITULO I

### ANTECEDENTES HISTORICOS



## CAPITULO I

### ANTECEDENTES HISTORICOS

Por muchas décadas el concepto tradicional de Seguro por Jubilación reflejó el deseo de implementar un beneficio adecuado de pensión con respecto al salario percibido durante el período activo de una persona.

Aunque se dieron y se siguen dando algunas transiciones al concepto de "percepciones finales" en los planes de pensiones, los diseñadores aún no pueden ser acreditados realmente con el reconocimiento de un elemento inflacionario en la situación de jubilación.

Una de las razones por las cuales se ha enfatizado el factor inflación en años recientes, es la necesidad de concentrarse en la habilidad y buena voluntad de una empresa para establecer planes de beneficios una vez que el empleado haya alcanzado la edad de jubilación.

Los diseñadores de los planes de pensiones se concentran en tres factores: la solvencia de la empresa, la forma de cañoneo de los fondos y la provisión práctica para beneficios de jubilación.

En este orden de ideas, el concepto de anualidad variable, tuvo un notable pionero en E. U. A., George E. Johnson,

quien interpretó el Seguro de Jubilación como la combinación de:

- Acumular ahorros durante los años productivos.
- Convertir estos ahorros en un ingreso para cuando llegare el momento de jubilarse.
- Conseguir un ingreso seguro de por vida.

Mr. Johnson junto con otros colegas analizaron estas creencias a la luz de fenómenos histórico-económicos y encontraron que en los planes en términos de dólar-fijo, los niveles de ingreso podrían no ser muy adecuados. Indicaron que podría llegar a ser imposible diseñar un plan dirigido al seguro de jubilación sin el reconocimiento del elemento independiente que ha bloqueado los objetivos de los planes de pensiones: la inflación.

También llegaron a la conclusión de que entre más seguro es un plan en el sentido de dinero fijo, mayor será el potencial de erosión del poder de compra de la pensión.

Al respecto, Robert M. Duncan del Colegio de Estadísticas de Fondos de Jubilación, escribió en los años 50's, que: "La provisión adecuada para pensiones no se alcanza fácilmente si esto implica el objetivo de un ingreso estacionario en términos del poder de compra actual. El persistente pensamiento y la tendencia irregular hacia un valor más bajo que el dólar es frecuentemente pasado por alto".

En este contexto, un grupo de estudio de un Plan de Jubilación del Estado de Wisconsin dijo que el defecto más serio de la pensión tradicional de un plan, era que ésta pagaba al beneficiario sólo un número fijo de dinero por mes, sin tomar en cuenta los cambios en el poder de compra de la moneda.

Por otra parte, las nuevas economías y la sensibilidad hacia la ligera tendencia resacionaria indicaban que en el futuro continuaría la pérdida del poder adquisitivo del dinero, fenómeno que se sigue presentando en la actualidad.

Nuestro país no es la excepción en este sentido ya que la inflación en el último sexenio se ha disparado notablemente a niveles cada vez más difíciles de controlar y nuestra moneda se ha devaluado drásticamente respecto a otras divisas, además de que el poder adquisitivo de los salarios y por ende de las pensiones, se ha visto fuertemente afectado.

En otros estudios realizados en E. U. A., en 1944, William C. Greenough, Vicepresidente de la Asociación de Maestros en Seguros y Anualidades, observó que la dificultad principal estaba en que parecía no ser perfecta la protección que existía en contra de la inflación, no obstante que había una buena razón para pensar que la seguridad del retiro podría ser sustancialmente incrementada mediante la ampliación del campo y la diversificación de las inversio-

nes en fondos ahorrados durante los años de trabajo de una persona.

Ahora, en la lucha por combatir la pérdida del poder adquisitivo de las pensiones, habiendo dos riesgos de inflación que se debían reconocer. Desde el punto de vista del empleado, los beneficios basados en un salario promedio, no podrían dejar de crecer fácilmente cuando el costo de la vida creciera. Por otro lado, la empresa que estableciera un plan de beneficios con base en las percepciones finales, correría el riesgo de que los salarios pudieran llegar a niveles imprevistos, que elevarían los costos de pensión.

En respuesta a éstos y a otros problemas, surgen en E. U. A., los planes del Costo de la Vida y los Anualidades Variables, éstas últimas que sirven de base al concepto de Pensiones Variables, cuyo análisis es el objeto del presente trabajo.

Los planes anteriores se detallan a continuación, en la inteligencia de que surgieron en Estados Unidos de Norteamérica, donde se han desarrollado principalmente hasta nuestros días.

#### PLANES DEL COSTO DE LA VIDA.

Un instrumento obvio para proporcionar beneficios de pensión que incluyera un seguro poder de compra sería un

plan que estipulase que los pagos deberían ajustarse de acuerdo a las variaciones de un índice específico de precios. Bajo lo más simple de estos acuerdos, los beneficios de retiro podrían ser ajustados para reflejar cambios subsiguientes a la jubilación. Un contrato representativo podría proporcionar un ajuste en un año con tendencia ascendente cuando un determinado índice de precios excediera de un cierto nivel periódico base y tendría que bajar cuando dicho índice bajara.

Una modificación de este plan del Costo de la Vida es aplicable donde se acredite una porción del plan de beneficios a la pensión por cada día de servicio. Esto consiste en ajustes de beneficios acumulados con el fin de reflejar variaciones en el índice de precios, simulando el crédito de cada unidad de beneficio. Esto abarca un sólo ajuste, al momento de la jubilación, pero efectivamente provee un beneficio con componentes que se incrementan anualmente, modificados de acuerdo a los patrones de índices de precios seguidos de la compra.

Maurice Levita, un Actuario Consultor, observó que el medio de inversión ideal podría ser la compra con el "Índice de precios para el Consumidor de Bienes y Servicios" (CPI) en donde el interés y los principales pagos podrían estar ligados a este índice.

Como fué descrito por Mr. Levita, el término "índice" se refiere a una serie de números que expresan el cambio

relativo en la magnitud o tamaño de un grupo estadístico. Generalmente un año en particular se toma como el año base, siendo el valor de ese año 100. El valor del índice es la medida estadística en lo que se refiere al tiempo.

Algunos ejemplos son el índice Dow Jones, el índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores, el Producto Nacional Bruto, el índice de Precios para el Consumidor, etc.

El índice de Precios para el Consumidor es probablemente el que se consulta con mayor frecuencia para ajustar los valores de anualidad bajo estos Planes del Costo de la Vida. La anualidad de este tipo relaciona sus ajustes de beneficios a las fluctuaciones en aquél índice.

Las ventajas de la anualidad del Costo de la Vida incluyen la existencia de un patrón de costo más económico que algunos otros bajo otras tendencias, la disminución de riesgos para el jubilado, y el que los beneficios estén continuamente ajustándose después de la jubilación con el objeto de mantener el poder de compra al día. El Plan de Costo de la Vida es una de las alternativas más acertables en E. U. A. actualmente.

Sin embargo, las anualidades variables contienen un mayor potencial de inversión, más aún, el índice del Costo de Vida puede ser un indicador cuestionable de actividades en los jubilados. Además, estos planes no pueden reclamar el

hechizo de la inversión, ni la extensa publicidad que ha ro  
deado a la anualidad variable en los últimos decadas.

#### ANUALIDADES VARIABLES.

Las anualidades variables proveen para la inversión de contribuciones de un asegurado, una segregada cartera de se  
guridades equitativas. Así acumulan en un fondo principal, que se utiliza para comprar un beneficio de ingreso durante el tiempo de vida o una fecha de jubilación determinada.

Ambos procedimientos generados por las contribuciones y la compra de ingreso de jubilación con los reflejados en los ahorros invertidos, crecerán o caerán dependiendo del estado de los valores del mercado, con lo que la seguridad se incrementará o disminuirá.

La base fundamental del concepto de anualidad variable es la gran similitud entre el Costo de la Vida y las inversiones de carteras representativas en mercados comunes.

La anualidad variable es un plan a largo plazo, que se  
neralmente se emplea por muchas decadas de acumulación durante el tiempo de vida activo de un empleado, seguido de muchos años de jubilación.

Los riesgos en este campo de las anualidades variables frecuentemente comparan los hechos históricos de equidades a los patrones del Costo de la Vida para mantener sus afirmaciones acerca del mérito de la anualidad variable. Combi-

nando los períodos favorables y desfavorables de resultados de acciones comunes y períodos de incremento y decremento en el poder de compra, demostraron el valor de una cartera orientada en una alta escala de condiciones económicas.

El más amplio reporte fué preparado por la Asociación de Maestros en Seguros y Anualidades, como material de consulta para la investigación, que culminó en la adopción del Colegio de Fondos y Entidades de Jubilación, el cual llegó a las siguientes conclusiones, después de realizar un estudio sobre las anualidades variables en 1964, veinte años después de ser propuestas por Mr. Greenough:

- 1.- No es conveniente confiar todos los ahorros de jubilación a obligaciones fijas de dinero, puesto que éstas pueden ver disminuido su poder de compra y así reducirse seriamente el valor de un ingreso fijo anual. Los incrementos en el poder de compra, de otra forma, mejoran el status del propietario de una anualidad fija.
- 2.- No es favorable confiar todos los ahorros de jubilación en inversiones de equidad, puesto que las variaciones de los precios en acciones comunes se inclinan mucho más a permitir la alta confiabilidad de ellas por la necesidad de un ingreso estable durante la jubilación. Los cambios en el valor de acciones comunes y otras equidades no están correlacionadas perfectamente con los cambios del costo de la vida, pero si han previsto una mejor protección contra la inflación.



3.- Las contribuciones hacia un plan de jubilación que son invertidas parcialmente en obligaciones y parcialmente en acciones comunes a través de Fondos Equitativos que proveen unidades de anualidad para toda la vida, ofrecen la promesa de abastecer un ingreso de jubilación favorable que es a la vez razonable y libre de todas las fluctuaciones violentas en cantidades, y libre también de depreciaciones serias que vienen a través de los cambios en el nivel de precios.

La importancia de una anualidad variable se ha profundizado mucho más desde que sus iniciadores hicieron un avance en éste como un medio para la seguridad en la jubilación.

William C. Freund y John C. Antliff de la Compañía Prudential Insurance se dieron cuenta del deseo de participar en un estándar más grande para la nación, demostrando que el plan de anualidad variable podría tener bastante éxito manteniendo un estándar de vida para los jubilados. Ellos compararon los beneficios de la anualidad variable con beneficios hipotéticos ajustados por cambios en el Costo de la Vida y en el estándar de vida. La técnica es muy parecida a la utilizada por Mr. Greenough y son los índices que se usan para generar beneficios.

En general, la comparación mostró la superioridad de una anualidad balanceada sobre una fija y sobre una del Costo de la Vida.

Al analizar esta comparación se tienen cuenta que los ventajas de una anualidad variable son:

- 1) La protección efectiva en contra de la erosión inflacionaria de pensión en cuanto al poder de compra.
- 2) Un posible rendimiento que sobrepase a aquél ligada al índice de anualidad.

Por supuesto que en la desventaja de un riesgo de pérdida de capital, están tomadas en cuenta las ventajas antes mencionadas. Se piensa que los "pros" son mayores que los "contras", particularmente en los arreglos de participación de utilidades, donde la anualidad variable se incrementa de acuerdo a la oportunidad de la inversión.

La anualidad variable ofrece un poco de oportunidades para su aplicación, ya sea como una protección a la inflación, un plan de evasión de impuestos, o un vehículo de inversión. Estas oportunidades incluyen algunos planes de pensión pagados por el patrón, por el empleado y planes de reparto de utilidades, anualidades de ahorro de impuestos, suplementos individuales para provisiones del gobierno y corporativos, y situaciones de cambio inmediato a ahorros fijos o de equidad.

Como una introducción al desarrollo del tema, la siguiente es una simple definición de anualidad variable, dada por Mr. Fricke:

"Una Anualidad Variable, es un contrato que otorga a un rentista con ingresos en su vida, la cantidad que depende del valor en el mercado de un ahorro acumulado al momento de cada pago. El contrato permite que el rentista pueda hacer pagos periódicos durante un período de acumulación, el cual constará en muchos casos de una década o más. Los ahorros deberán ser invertidos por la empresa que los recibe, en acciones comunes u otras acciones de interés variable. Los dividendos recibidos sobre las acciones serán reinvertidos de una manera similar. Al final del período de acumulación el proceso se revertirá, esto es, la empresa que recibió los ahorros hará pagos periódicos al rentista. La cantidad, en efectivo, dependerá del valor de la cartera en ese momento".

#### SURGIMIENTO DE LA ANUALIDAD VARIABLE.

Como se ha mencionado hasta este punto, la anualidad variable inicialmente se desarrolló como un medio para combatir la erosión de la pensión en contra de la inflación. Después de algunos años de éxito en este sentido, los diseñadores de pensiones y los pioneros en el mercado reconocieron su valor, no sólo como un medio para intensificar la seguridad de la jubilación, sino como un instrumento de inversión con asistencia garantizada y ventajas en el impuesto. Sin embargo, la anualidad variable no era considerada aún como un posible producto en el ramo de seguros.

Por otra parte la aparente incompatibilidad del medio ambiente tradicional de los seguros y las moderadas inversiones en equidades por las compañías de seguros no fué referida como un problema real del mercado hasta hace algunos años.

Durante los años 20, los aseguradores norteamericanos comenzaron a emitir anualidades en grupo y unos pocos planes de pensiones de Depósitos en Administración surgieron en los 30's. Los fondos fiduciarios fueron observados cuidadosamente en los días anteriores a la Segunda Guerra Mundial y las garantías de los asegurados, con su respectiva supervisión por los comisionados de Estado, fueron altamente enfatizadas.

El crecimiento de los planes de pensiones de ahorros en dólares fué modesto hasta la Segunda Guerra Mundial, retardado por la Depresión, las leyes del Seguro Social y la falta de incentivos del Impuesto Federal sobre la Renta. Después de la estabilización de la guerra, altos ingresos y el establecimiento de un tratado favorable de contribuciones de pensiones estimularon para hacer un esfuerzo extraordinario en las compras de pensiones.

Durante la Segunda Guerra Mundial e inmediatamente después de ella, los planes de pensiones de los asegurados comenzaron a ser populares que antes, ya que ofrecieron una disposición favorable con un producto accesible, personal capacitado, en ventas y administración, y las partes

no volvieron a ser más altas que las féas. disponibles. Además, las fiduciarias no estaban agresivas por un mercado compartido y estuvo disponible una pequeña ayuda actuarial.

Por el año de 1950 los Bancos y Fiduciarias más grandes comenzaron a competir agresivamente por el ahorro en el campo de las pensiones, llegando a ser una influencia en potencia.

Durante los 50's las contribuciones a los planes de los no asegurados aumentaron siete veces más, mientras que los planes de los asegurados se cuadruplicaron.

Existieron muchas razones de esta inversión de énfasis:

1. Las fiduciarias desarrollaron personal entrenado y se incrementó su acceso a los consultes actuariales.
2. Comenzaron a distribuir relativamente altos porcentajes de sus recursos en acciones comunes, muchas en más del 35%.
3. Los departamentos de Estado de Seguros limitaron sus inversiones en equidades por los aseguradores a tan pequeños como el 5% de sus recursos. Esto nunca se imaginó.

4. Se les prohibió a las compañías de seguros la colocación de activos invertidos en acciones comunes. Un patrón que deseara una opción estimulada de ahorros de pensión invertidos en equidades, no podría usar un plan de seguros.
5. La cartera productiva del plan de seguros obtiene tasas en el mercado conseguidas a través de la confianza por causa del uso agregado de la cartera completa de la compañía de seguros, más que el reconocimiento de ganancia de la inversión por año de cada plan.
6. Los asegurados fueron forzados a cumplir con un impuesto sobre la Renta sobre un ingreso de inversión de reservas de pensiones, no impuesto por los fiduciarios, resultando en una amplitud de aproximadamente un cuarto de 1% en las tarifas.
7. Los planes fiduciarios presentaron una flexibilidad de los niveles de contribución y financiación de pensiones que no pudieron ser ofrecidos por el plan de seguro.

Como resultado de estos factores, la posición de la industria del seguro de vida en la economía del mercado se desolomó. La contribución de los aseguradores en la economía descendió de más de 30% en 1947 a escaseamente el 20% en 1961. Corporaciones y particulares abandonaron sus inversiones fijas a favor de acciones comunes y fondos mutuos,

lo cual generó un crecimiento en el valor del fondo o superior al que establecido por el continuo aumento en el costo de la vida.

Durante los años 60, los aseguradores trabajaron en esto para volver a obtener una primera posición en el mercado de ahorros.

Es importante mencionar que los desarrollos incluyeron:

1. Una legislación que excentra el Impuesto sobre la Renta y ciertas ganancias en fondos asociados con planes de pensiones calificadas.
2. El método de inversión anual de distribución de ingresos a fondos de pensiones; las carteras fueron eliminadas del mercado y los patrones de inversión en planes individuales se enfatizaron sobre esta técnica de "dinero nuevo".
3. Las colocaciones directas de inversiones fijas, lo cual generó campos muy atractivos.
4. La segregación de ciertos fondos de pensiones, seguida de legislaciones federales y estatales para inversión totalmente en entidades, con la colocación directa de resultados de inversiones para la participación de fondos. El resultado de las cuentas separadas ca-

caracterizaron menores restricciones y mayor flexibilidad.

El resultado de esta actividad consiguió un resurgimiento gradual por los aseguradores; sin embargo, en muchos aspectos han resultado garantías algo balanceadas por la simplicidad de las fiduciarias.

Es natural que con los aseguradores que logren llegar a ser fuertes competidores en una inversión, busquen un retorno mayor del mercado desarrollando la anualidad variable del asegurado. Este producto cambió las garantías de seguro tradicionales con la participación directa en inversiones de una cartera de equidad diversificada.

En la evolución de las anualidades variables, desempeñaron un papel muy importante las cuentas segregadas o separadas, de fondos; una que consiste en un fondo de inversión y otra en una anualidad tradicional de dinero fijo. A causa de las limitaciones en inversiones que se han puesto bajo una compañía de seguros de vida, la anualidad variable actual no hubiera podido ser, sin el desarrollo esencial del concepto de cuentas separadas.

La ley que permitió la expedición de las anualidades variables en muchos estados, pudo dar pauta para la adopción independiente de leyes permitidas en las cuentas separadas. Las compañías de seguros se han intrigado con la flexibilidad de la inversión de colocación directa de una cartera que resulte inherente en una cuenta separada de un



plan de pensiones en grupo. Sin embargo, han encontrado una oposición sustancial en las áreas legislativas para generalizar sugerencias para las cuentas separadas.

Fué después de darse cuenta que la mayor oposición era de los fondos mutuos interesados en ahorros individuales del mercado, que las compañías de seguros consideraran el significado político de limitar sus proposiciones a planes de pensiones en grupo y beneficios fijos. Se introdujo entonces una ley que autorizaba a las compañías de seguros a establecer cuentas separadas para las inversiones de pensiones en grupo. De esto, tenían que satisfacer cuatro pruebas:

1. Coberturas iniciales de por lo menos 25 vidas.
2. La segregación de contribuciones del patrón solamente.
3. Usarlas en conexión con un plan de pensiones calificado.
4. La provisión de beneficios de cantidades fijas solamente.

Fué cuestión de tiempo antes de que las barreras para las anualidades variables comenzaran a levantarse.

En 1964, las reglas de la Comisión de Seguridad e Intercambio (S.E.C.), exceptuaron ciertos planes de la regulación federal, que fueron enmendados para permitir que el pago fuera en sumas variables. Esto inició el camino para que la ley del Estado permitiera las expediciones de anualidades variables y a pesar de las limitaciones políticas ori

ginales con contratos en grupo, la extensión de este permiso para los planes individuales fué inevitable.

Por otro lado, los retrasos en el desarrollo de la anualidad variable no fueron del todo de origen externo. Dentro de la propia industria, la gran batalla filosófica luchó durante una década.

Una razón básica para la desprobación de las anualidades variables por los aseguradores fué que las compañías de seguros de vida deben plantear con precios estables y favorecer aquellos productos que puedan contar con tendencias inflacionarias.

También se insiste en que la anualidad variable es un producto de resonancia para la cartera de seguros, así como un valioso vehículo para dar extensión a sus productos, y se piensa que al ofrecer una anualidad variable, el asegurador podrá ayudar al comprador a eliminar las consecuencias de inflación y participar en el crecimiento de la economía.

Un interesante enfoque para esta filosofía fué una noticia del 13 de mayo de 1967 que publicó la revista "Business Week", acerca de que la Compañía de Seguros de Vida Metropolitan había anunciado su gran fuerza en contra de la anualidad variable para entrar a la competencia para el Sistema de Maestros para jubilación de la ciudad de Nueva York... un plan de anualidad variable.

Actualmente la anualidad variable está firmemente establecida tanto filosóficamente como prácticamente en E. U. A.. Más de una docena de compañías se han sometido a la regulación de la S.R.C., la cual les permitirá expedir Anualidades de Protección al impuesto, HR 10 Association Franchise Annuities y contratos individuales de anualidades variables. Los marcadores de las compañías están avanzando con respecto al desarrollo del producto o procedimientos de registro.

En México no se tiene antecedente alguno, ni se cuenta en la actualidad con planes de pensiones variables o del Costo de la Vida, sin embargo, uno de los objetivos de la presente investigación es precisamente analizar la posibilidad de introducirlos en nuestro país, como posible solución al problema de la pérdida del poder adquisitivo de las pensiones y por lo tanto de la baja en el nivel de vida de los jubilados.

Hasta aquí los antecedentes históricos de las anualidades variables, que como se mencionó anteriormente, sirven de base al presente estudio sobre pensiones variables acordadas con la inflación.

## CAPITULO II

### METODOS ACTUARIALES DE FINANCIAMIENTO

## CAPITULO II

### MÉTODOS ACTUARIALES DE FINANCIAMIENTO

#### 2.1 GENERALIDADES.

Los métodos actuariales de financiamiento son el conjunto de técnicas utilizadas para la valuación de obligaciones y costos de un plan de pensiones.

En el presente capítulo se analizan y desarrollan algunos de estos métodos actuariales, sin embargo, es importante conocer primero la estructura de los beneficios que ofrecen los planes de pensiones así como los costos que originan para lo cual se dará la clasificación de dichos planes.

#### 2.2 CLASIFICACION DE LOS PLANES DE PENSIONES.

Los planes de pensiones de acuerdo a los beneficios y costos que originan se pueden clasificar en dos grandes grupos:

- Planes de Beneficio Fijo y Costo Variable.
- Planes de Beneficio Variable y Costo Fijo.

##### 2.2.1 PLANES DE BENEFICIO FIJO Y COSTO VARIABLE.

Los planes de beneficio fijo son aquellos en los que se establecen de antemano las características del beneficio así como su monto.

En este tipo de planes la forma de calcular su costo es haciendo uso de los llamados métodos de financiamiento.

Estos planes a su vez, se pueden dividir de acuerdo al monto de su beneficio, en dos tipos:

A) Planes cuyo beneficio se establece en un número fijo de pesos, subdivididos en tres:

1.- Planes de Beneficio Unitario.- Son aquellos que acreditan una unidad de beneficio por períodos específicos de servicio prestados a una empresa.

Esta unidad de beneficio puede ser una cantidad fija de pesos o un porcentaje sobre el salario o ingreso promedio percibido por el participante durante un período determinado de tiempo.

Los planes de este tipo, instalados tiempo después de constituida una empresa, acreditan una unidad de beneficio por cada año de servicio prestado con anterioridad a la fecha de instalación del plan.

2.- Planes de Beneficio Igual en Número de Pesos.- Son aquellos que otorgan una pensión igual para todos los participantes, independientemente de los años de servicio prestados a la empresa y del monto de su salario o ingreso.

3.- Planes de Porcentaje Nivelado de Compensación.- Son aquellos en los cuales el monto del beneficio se basa direc-

tamente sobre un porcentaje del promedio de ingresos percibidos por el participante durante un período determinado de tiempo, sin tomar en cuenta los años de servicio prestados por el empleado.

B) Planes cuyo beneficio se establece en un número variable de veces, que se subdividen en dos:

1.- Planes en los que el beneficio está en relación al costo de la vida.- Son aquéllos que prevén incrementos en el monto de la pensión de acuerdo con el costo de los artículos de consumo.

2.- Planes de Anualidad Variable.- Son aquéllos en los que el beneficio a otorgar depende directamente del producto que se obtenga en los fondos de inversión, mediante los cuales se financian los planes, esto con el objeto de aprovechar las fluctuaciones en el mercado de valores para hacer frente al posible incremento en el nivel de costo de los productos de consumo.

#### 2.2.2 PLANES DE BENEFICIO VARIABLE Y COSTO FIJO.

El objetivo de estos planes es constituir un fondo mediante aportaciones periódicas, fijadas en base a un porcentaje del salario del empleado o a una cantidad fija determinada por la empresa, con el fin de otorgar un beneficio a la edad de retiro del participante, cuya cuantía dependerá tanto del monto del depósito y del número que se efectúen de

los mismos así como de los rendimientos obtenidos por la inversión de dichos depósitos.

Por otra parte, los planes de pensiones de acuerdo a la forma en que se cubre su costo, se clasifican en dos tipos:

- A) Planes Contributivos.- Son aquéllos en los que una parte del costo del plan es cubierta por el empleado.
- B) Planes No Contributivos.- Son aquéllos en los que el costo del plan es cubierto en su totalidad por la empresa.

## 2.3 CLASIFICACION DE LOS METODOS DE FINANCIAMIENTO.

Los métodos de financiamiento de acuerdo a la forma de calcular los beneficios que otorga un plan de pensiones, se pueden dividir en dos tipos:

- Métodos de Financiamiento de Beneficios Ya Acumulados.
- Métodos de Financiamiento de Beneficios Proyectados.

### 2.3.1 METODOS DE FINANCIAMIENTO DE BENEFICIOS YA ACUMULADOS.

La esencia de estos métodos radica en que el costo de una unidad de beneficio se asocia con el año durante el cual se acredita; esto supone que los beneficios de un plan de pensiones, pueden ser atribuibles en los años respectivos que se acrediten.



Los supuestos que generalmente se hacen son los siguientes:

- A) El participante permanecerá en el plan hasta su retiro o hasta antes de su fallecimiento.
- B) Se consideran las separaciones de los empleados sin beneficios cedidos (por lo regular son no contributivos).
- C) Si los beneficios del plan se basan en el promedio final se consideran anticipadamente los incrementos de salarios.
- D) Se tomarán en cuenta gastos anticipados.

El costo de todos los beneficios acreditados durante un año en particular se obtiene sumando los costos calculados de los participantes en forma individual y el resultado sería el costo normal del plan.

### 2.3.2 METODOS DE FINANCIAMIENTO DE BENEFICIOS PROYECTADOS.

Las características que distinguen a estos métodos son las siguientes:

- A) El costo anual acumulado está relacionado con el beneficio total prospectivo, esto es, con los beneficios futuros de los participantes, en vez de referirse al beneficio para un año en particular.

La aplicación de este concepto se refleja en la fórmula de beneficio prospectivo de un participante como un tanto por ciento de su compensación promedio para un período específico de tiempo.

Estas fórmulas no implican que alguna parte componente del total de los beneficios prospectivos se asigne a un período de servicios en particular, y en el caso de retiro anticipado o de separación de empleos con derechos cedidos, el total de beneficios generalmente se ajustará a los años efectivos de servicios.

B) Los costos del plan se calculan de tal manera que gradualmente acumulen cantidades uniformes por cada participante o un porcentaje uniforme de nómina si se cumple lo siguiente:

- Que la experiencia actual se ajustará a los supuestos actuariales.
- Que no hubiera cambios en la composición del grupo para quienes ya se han acumulado costos.
- Que la estructura de los beneficios del plan permanezca invariable.

Aunque en la práctica no es muy probable que se cumplan estas condiciones, el objetivo que se persigue con estos métodos, es el de lograr un costo nivelado año con año en relación a cada uno de los participantes del plan, por lo que se puede decir que estos métodos se caracterizan por ser de costos nivelados.

## 2.4 METODOS DE FINANCIAMIENTO RACIONAL.

La característica de los métodos de financiamiento que se analizarán en el presente trabajo es la de ser de tipo racional.

Métodos de Financiamiento Racional.- Son aquéllos en los cuales los activos; aportaciones más productos netos del fondo, deben desarrollarse en un cierto período de tiempo y hacerse crecer de tal forma que a la edad normal de retiro sean iguales a la reserva requerida para otorgar el beneficio previsto por el plan.

Por ejemplo, supóngase que una empresa decide formar un fondo con el objeto de otorgar un cierto beneficio a su personal en el momento de llegar a la edad de jubilación, esto dentro de los planes de beneficio fijo.

Supóngase también que este beneficio es en número fijo de pesos, cuyo monto estaría en función a los años de servicio prestados por el trabajador a la empresa, otorgado en forma vitalicia.

Es precisamente en la formación de este fondo donde intervienen los métodos de financiamiento, que con la aplicación de un conjunto de técnicas matemático-actuariales con determinadas consideraciones específicas que caracterizan a cada método en particular.

Esta aplicación práctica de los métodos de financiamiento es la que nos indica en forma aproximada las cantidades que se deberán aportar periódicamente durante un cierto intervalo de tiempo, de tal modo que a la edad de jubilación se tenga el fondo necesario para otorgar el beneficio en forma vitalicia.

Ahora, en el presente análisis de los métodos de financiamiento se consideran exclusivamente aquellos planes de beneficio fijo, ya que en la determinación del costo de los planes de beneficio variable no interviene la técnica actuarial.

## 2.5 CONCEPTOS GENERALES.

Antes de iniciar el desarrollo y análisis de los métodos actuariales de financiamiento es necesario conocer algunas definiciones básicas que se utilizarán frecuentemente, así como la notación sobre la cual se basarán las fórmulas de los mismos.

### 2.5.1 DEFINICIONES BASICAS.

4) Método o Sistema de Financiamiento.- Es el conjunto de técnicas utilizadas, aplicando las hipótesis actuariales, que permiten calcular el valor para medir el costo esperado de los beneficios de un plan de pensiones, así como para determinar la asignación actuarialmente equivalente entre estos valores y el tiempo, generalmente entre un costo normal

y un pasivo actuarial por servicios pasados.

Normalmente los sistemas de financiamiento se refieren a grupos cerrados a menos que se especifique lo contrario.

B) **Valuación Actuarial.**- El proceso mediante el cual se determina la cantidad que la empresa contribuirá a un fondo para financiar los beneficios de jubilación, se le conoce como valuación actuarial de un plan de pensiones.

La valuación se efectúa a una fecha específica llamada fecha de valuación.

C) **Valor Presente Actuarial.**- Es el valor a una fecha determinada de una o varias cantidades pagaderas en diferentes fechas, calculado mediante la aplicación de un conjunto particular de hipótesis actuariales.

D) **Valor Presente de las Obligaciones.**- Es el valor presente actuarial de los beneficios y gastos de un plan de pensiones.

E) **Costo Normal o Costo Normal Actuarial.**- Es la parte del valor presente actuarial de los beneficios y gastos del plan que de acuerdo a los resultados de la valuación actuarial corresponden a un año plan en particular.

Cualquier pago hecho para cubrir un pasivo por servicios pasados no financiados, no se considera como parte del

costo normal.

En el caso de los planes contributivos, el costo normal incluye las aportaciones de los trabajadores.

F) Pasivo Actuarial por Servicios Pasados.- Conocido también como pasivo actuarial o valor presente de las obligaciones por servicios pasados, es aquella parte del valor presente actuarial de las obligaciones que de acuerdo al método de financiamiento utilizado, no corresponde a los costos normales futuros.

G). Valor Actuarial de los Activos o Activos de la Valuación.- Es la cantidad de dinero a la fecha de valuación, que invertida a la tasa de interés que rendirá el fondo será suficiente para pagar los beneficios al retiro de los participantes del plan a la fecha de valuación.

Dentro de las hipótesis actuariales se debe especificar el procedimiento empleado para fijar este valor.

H) Pasivo por Servicios Pasados No Financiados.- Es la parte del valor presente de las obligaciones por servicios pasados que esté pendiente de financiar, es decir, es la diferencia entre el pasivo por servicios pasados y los activos de la valuación.

I) Pasivo por Servicios Pasados Congelado.- Es la parte del valor presente de las obligaciones que de acuerdo a ciertos

métodos de financiamiento, se separa y se congela a una determinada fecha.

Generalmente esta porción corresponde al pasivo actuarial por servicios pasados inicial no financiado o cualquier incremento o decremento en el pasivo actuarial por servicios pasados que ocurra como consecuencia de cambios en el beneficio que otorga el plan o en las hipótesis de cálculo.

J) Pasivo Actuarial Congelado no Financiado.- Es la parte del pasivo actuarial congelado que resulta después de sumarle el interés y deducirle las amortizaciones.

K) Ganancia o Pérdida Actuarial.- Es la diferencia existente entre el comportamiento real y el supuesto en las hipótesis actuariales de cálculo, entre una valuación y otra, de acuerdo al método de financiamiento utilizado.

El efecto causado en el pasivo actuarial por cambios en las hipótesis actuariales, en el método de valuación o en los beneficios del plan se debe explicar como tal y no como una ganancia o pérdida actuarial.

La forma en que la ganancia o pérdida actuarial afecta a los costos futuros y a la distribución del pasivo actuarial, depende del método de financiamiento utilizado en la valuación.

L) **Hipótesis Actuariales.**— Son las suposiciones que se hacen de los acontecimientos que sucederán durante un cierto período de tiempo, comprendido a partir de la instalación del plan hasta la jubilación de sus participantes.

Para la aplicación práctica de los métodos de financiamiento es necesaria la utilización de estos supuestos, dentro de los cuales figuran:

- 1.— Mortalidad.
- 2.— Rotación.
- 3.— Tasa de Rendimiento.
- 4.— Tasa de Incremento de Salarios.
- 5.— Invalidez.
- 6.— Gastos.

La adopción de las hipótesis actuariales así como la aplicación de éstas a los métodos matemático-actuariales tienen la finalidad de estimar técnicamente el costo de un plan de pensiones, sin embargo el costo real del mismo estará representado por las pensiones pagadas más los gastos efectuados.

No obstante lo anterior, tratándose de un fondo fideicomitido, al total de gastos se le tendrán que deducir los rendimientos y utilidades generados por el mismo.

En otras palabras, las hipótesis actuariales no determinan el costo exacto del plan. Las muertes, incapacidades



y la rotación de empleados sucederán independientemente a los supuestos adoptados; los incrementos de salarios seguirán los dictados económicos y no la escala hipotética tomada; tratándose de fondos fideicomitidos, los rendimientos y utilidades dependerán de la situación económica nacional y no de la tasa actuarial utilizada.

Por lo tanto es importante destacar que entre mejor sea la selección de las hipótesis actuariales, la aproximación del costo real del plan también será mejor.

M) Fondo Fideicomitado o Fondo en Fideicomiso.- Es un contrato en virtud del cual el contratante en su carácter de fideicomitente aportará bienes a la fiduciaria con el fin de formar un fondo que se invertirá para generar intereses que irá acumulando de acuerdo a un conjunto de reglas establecidas para este propósito. Este fondo servirá para el pago de beneficios de pensiones estimulados a favor de los trabajadores.

#### 2.5.2 NOTACION.

La notación utilizada en el presente desarrollo será la siguiente:

- Y = Edad de ingreso del empleado a la empresa.
- X = Edad actual del empleado a la fecha de valuación o de instalación del plan.
- Z = Edad de jubilación o edad normal de retiro del empleado.

- N = Años de servicios prestados por el empleado a la empresa con anterioridad a la fecha de valuación o de instalación del plan.  
( $N = X - Y$ )
- M = Años totales de servicios prestados por el empleado a la empresa a edad Z.  
( $M = Z - Y$ )
- W = Última edad considerada por la tabla de mortalidad utilizada en los cálculos.

En el desarrollo de los métodos de financiamiento de este capítulo, la edad actual del empleado (X) estará en el intervalo  $Y \leq X \leq Z$ , ya que para edades que estén en el intervalo  $Z < X < W$ , se considerará solamente el caso de una anualidad vitalicia y anticipada.

## 2.6 METODOS ACTUARIALES DE FINANCIAMIENTO.

Una vez mencionados cada uno de los puntos anteriores, ya se cuenta con las herramientas necesarias para iniciar el estudio de los métodos actuariales de financiamiento.

En esta parte se incluye el análisis y desarrollo de cuatro de los métodos más utilizados en la actualidad, tanto para cálculo individual como colectivo, además de un caso especial.

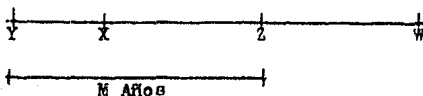
## 2.6.1 METODO DE CREDITO UNITARIO.

**Definición.**- Es el método bajo el cual los beneficios proyectados o no proyectados que se derivan del plan para cada individuo incluido en la valoración actuarial se asignan a cada año de valoración mediante una fórmula consistente.

**Construcción.**- Para diseñar este método, supóngase que una empresa desea saber el monto de las aportaciones que deberá efectuar periódicamente, durante un cierto período de tiempo, con el objeto de constituir un fondo para jubilaciones, condicionado a los siguientes puntos:

- Características del beneficio: Fijo y Unitario.
- Monto del beneficio  
a edad de retiro (Z) :  $1/M$  de peso por cada año de servicio prestado a la empresa.
- Fecha de valoración : A edad actual del empleado (X).
- Característica del método : Racional.

Considérese la siguiente línea de tiempo:

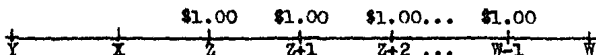


Dado que el beneficio es  $1/M$  de peso por cada año de servicio, entonces el beneficio anual total a edad ( $Z$ ) será:

$$\text{Beneficio Anual Total a edad (Z)} = \frac{1}{M} \cdot M = \$ 1.00$$

Esto quiere decir que se garantizará a partir de la edad ( $Z$ ), \$ 1.00 anual hasta el fallecimiento del jubilado.

De esta manera, si se desea determinar la reserva suficiente que tendría que tener la empresa a edad ( $Z$ ) para otorgar \$ 1.00 anual al jubilado en forma vitalicia, lo único que hay que hacer es obtener el valor presente de cada peso desde edad ( $Z$ ) hasta edad ( $W - 1$ ) puesto que a la edad ( $W$ ) la tabla de mortalidad considera que ya no hay vivos, como se muestra en la siguiente gráfica:



Por lo tanto, la suma de todas las unidades en valor presente, considerando los factores de mortalidad e interés, se puede representar en la forma siguiente:

$$(RVA)_Z = 1 + 1 \cdot E_Z + 1 \cdot E_Z + \dots + 1 \cdot E_Z$$

$$(RVA)_Z = 1 + \sum_{t=1}^{W-Z} E_Z$$

$$(RVA)_Z = 1 + a_Z$$

$$(RVA)_Z = \ddot{a}_Z$$

donde:

${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$ , es el Valor Presente de \$ 1.00 pagado al final de transcurridos (n) años, siempre y cuando la persona de edad (X) esté con vida.

$(RVA)_Z = \ddot{a}_Z$  es la reserva suficiente a edad (Z) que deberá tener la empresa para otorgar una pensión anual de \$ 1.00 desde edad (Z) hasta edad (W - 1).

Ahora, como el punto en el que se desea valorar la reserva es a edad (X), entonces se debe traer  $\ddot{a}_Z$  a valor presente hasta el punto de valuación (X), de la siguiente manera:

$$(RVA)_X = ({}_{z-x}E_x) \cdot (\ddot{a}_Z) = z-x / \ddot{a}_x \quad (2.1)$$

Esta expresión representa la cantidad suficiente que la empresa necesita reservar a edad (X) suponiendo una tasa de rendimiento  $j$  para que a edad (Z) se pueda otorgar el beneficio pactado.

El Costo de un año conocido como Costo Normal se puede determinar de la forma siguiente:

$$(CA)_x = \frac{1}{M} \cdot z-x / \ddot{a}_x \quad (2.2)$$

y tomando en cuenta que:

$$M = Z - Y$$

entonces (2.2) se puede reexpresar como:

$$(CA)_x = \frac{1}{Z-Y} \cdot x \cdot \ddot{a}_x \quad (2.3)$$

donde:

$$(CA)_x = \text{Costo Anual a edad (X)}$$

Por otro lado, entre la edad de ingreso a la empresa (Y) y la edad actual del empleado (X), puede existir un cierto número de años (X - Y) a los que se denominarán servicios pasados; esto se debe a que a la fecha de implementación del plan, hay un determinado número de personas cuyo año de ingreso a la empresa fué anterior a la fecha en que se está haciendo la valuación.

Si la cantidad expresada en la ecuación (2.3) se hubie se depositado desde edad (Y) hasta edad (X-1), a la fecha de valuación se contaría con una cierta cantidad más los rendimientos que ésta hubiese generado.

Esto significa que para poder determinar el monto de dicha cantidad por servicios pasados, se tendrán que acumular los costos del año correspondientes a cada uno de esos años de servicios pasados, a edad (X), como se muestra en la siguiente línea de tiempo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} (CA)_Y & (CA)_{Y+1} & (CA)_{Y+2} & (CA)_{Y+3} & \dots & X & \dots & Z & \dots & W \\ | & | & | & | & & | & & | & & | \end{array}$$

Actuarialmente se puede representar de la siguiente manera:

Edad	Costo a edad alcanzada por unidad de beneficio
-----	-----
Y	$(CA)_Y = \frac{1}{Z-Y} \cdot z-y / \ddot{a}_y \cdot \frac{1}{x-y E_y}$
Y+1	$(CA)_{Y+1} = \frac{1}{Z-Y} \cdot z-(Y+1) / \ddot{a}_{Y+1} \cdot \frac{1}{x-(Y+1) E_{Y+1}}$
Y+2	$(CA)_{Y+2} = \frac{1}{Z-Y} \cdot z-(Y+2) / \ddot{a}_{Y+2} \cdot \frac{1}{x-(Y+2) E_{Y+2}}$
.	.
.	.
.	.
X-1	$(CA)_{X-1} = \frac{1}{Z-Y} \cdot z-(X-1) / \ddot{a}_{X-1} \cdot \frac{1}{E_{X-1}}$

De este modo se observa que el monto del pasivo por servicios pasados sería la suma del costo por cada unidad de beneficio desde edad (Y) hasta edad (X - 1) acumulados cada uno de ellos a edad (X).

Representando el pasivo por servicios pasados a edad

(X) como (PSP)<sub>x</sub> y utilizando el cuadro anterior, se tiene que:

$$(PSP)_x = \frac{1}{z-y} \cdot \sum_{t=0}^{(x-y)-1} z^{-(y+t)} / \ddot{a}_{y+t} \cdot \frac{1}{x^{-(y+t)} E_{y+t}}$$

Ahora, de (2.1) se tiene que:

$$z^{-x} / \ddot{a}_x = (z^{-x} E_x) \cdot (\ddot{a}_z)$$

por tanto:

$$z^{-(y+t)} / \ddot{a}_{y+t} = (z^{-(y+t)} E_{y+t}) \cdot (\ddot{a}_z)$$

demás:

$$z^{-(y+t)} E_{y+t} = \frac{D_{y+t} + z^{-(y+t)}}{D_{y+t}}$$

$$z^{-(y+t)} E_{y+t} = \frac{D_{y+t} + z^{-y-t}}{D_{y+t}}$$

$$z^{-(y+t)} E_{y+t} = \frac{D_x}{D_{y+t}}$$



Así  $(PSP)_x$  se puede reescribir como:

$$(PSP)_x = \frac{1}{Z-Y} \cdot \sum_{t=0}^{(x-y)-1} E_{Y+t} \cdot \ddot{a}_z \cdot \frac{D_{Y+t}}{D_x}$$

$$(PSP)_x = \frac{1}{Z-Y} \cdot \sum_{t=0}^{(x-y)-1} \frac{D_z}{D_{Y+t}} \cdot \ddot{a}_z \cdot \frac{D_{Y+t}}{D_x}$$

$$(PSP)_x = \frac{1}{Z-Y} \cdot \sum_{t=0}^{(x-y)-1} \frac{D_z}{D_x} \cdot \ddot{a}_z$$

Como la expresión dentro de la sumatoria no depende del subíndice  $t$ , se tiene:

$$(PSP)_x = \frac{1}{Z-Y} \cdot \frac{D_z}{D_x} \cdot \ddot{a}_z \cdot \sum_{t=0}^{(x-y)-1} 1$$

y puesto que:

$$\sum_{t=0}^{(x-y)-1} 1 = X - Y$$

entonces:

$$(PSP)_x = \frac{X - Y}{Z - Y} \cdot \frac{D_z}{D_x} \cdot \ddot{a}_z$$

y dado que:

$$\frac{D_z}{D_x} \cdot \ddot{a}_z = z \cdot x / \ddot{a}_x$$

entonces se obtiene finalmente que el monto del pasivo por servicios pasados se determina con la siguiente expresión:

$$(PSP)_x = \frac{X - Y}{Z - Y} \cdot z^{-x} / \ddot{a}_x \quad (2.4)$$

En resumen, la característica principal de este método es dividir la pensión prevista a la fecha de retiro en tantas unidades como años de servicio acumule el participante, contados desde su fecha de ingreso a la empresa hasta su fecha de jubilación, financiando cada año el costo de la unidad devengada.

Finalmente, la aplicación de la fórmula (2.3), determina lo que se conoce como Costo Anual por Servicios Futuros:

$$(CA)_x = \frac{1}{Z - Y} \cdot z^{-x} / \ddot{a}_x$$

y utilizando esta fórmula, la expresión (2.4) se puede re-exresar de la siguiente manera:

$$(PSP)_x = (X - Y) \cdot (CA)_x$$

Esta expresión determina el Pasivo por Servicios Pasados.

## 2.6.2 METODO INDIVIDUAL DE COSTO NIVELADO A EDAD DE INGRESO.

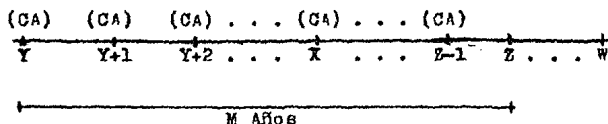
**Definición.-** Es el método bajo el cual el valor presente actuarial de los beneficios proyectados que otorga el plan para cada individuo incluido en la valuación actuarial se asigna en forma nivelada con base en los ingresos o el período de servicios de cada participante, comprendidos entre la edad de entrada al plan y la edad o edades hipotéticas de salida.

**Construcción.-** Supóngase que una empresa desea crear un fondo para jubilaciones, mediante aportaciones periódicas en el que el Costo Anual sea nivelado, o diferencia del método de crédito unitario, en el que el Costo Anual es creciente, por estar valuado a edad actual (X).

La constitución de este fondo estará condicionado a los siguientes puntos:

- Características del beneficio: Fijo y Total, es decir que se tomará el beneficio anual total que recibirá el empleado a edad de jubilación (Z).
- Monto del beneficio a edad de jubilación: \$ 1.00 anual.
- Fecha de valuación: A edad de ingreso a la empresa (Y).
- Características del método: Racional.

Considérese la siguiente línea de tiempo:



Inicialmente es necesario conocer cuánto vale (CA), es decir, la cantidad anual nivelada a depositar por la empresa. Para esto, se sabe que la suma de todos los costos anuales valuados cada uno a edad de ingreso (Y), debe ser igual a la reserva suficiente a edad (Z) para otorgar \$ 1.00 anual desde edad (Z) hasta edad (W - 1).

De acuerdo a lo anterior se tiene que:

$$(CA) + (CA) \cdot {}_1E_Y + (CA) \cdot {}_2E_Y + \dots + (CA) \cdot {}_{1-(W)}E_Y = z \cdot \ddot{a}_y$$

Desarrollando esta expresión se obtiene el Costo Anual:

$$(CA) \cdot \sum_{t=0}^{z-(Y)} {}_tE_Y = z \cdot \ddot{a}_y$$

$$(CA) \cdot \left( 1 + \sum_{t=1}^{z-(Y)} {}_tE_Y \right) = z \cdot \ddot{a}_y$$

$$(CA) \cdot \left( 1 + a_{y:\overline{z-(Y)}} \right) = z \cdot \ddot{a}_y$$

Como:  $1 + a_{y:\overline{z-(Y)}} = \ddot{a}_{y:\overline{z-(Y)}}$

Entonces:

$$(CA) = \frac{x-y}{\ddot{a}_{y:\overline{x-y}}} \quad (2.5)$$

Debido a que la mayor parte de los planes de pensiones se implantan en las empresas tiempo después de iniciar sus actividades, existen a la fecha de instalación (X) - (Y) años durante los cuales no se aportaron los costos anuales (CA) correspondientes, lo cual trae como consecuencia la existencia de un pasivo, cuyo monto se puede determinar acumulando a edad (X) cada uno de estos costos anuales (CA) de la siguiente manera:

Edad	Costo Anual Acumulado a Edad Actual (X)
Y	(CA) · $\frac{1}{x-y E_y}$
Y+1	(CA) · $\frac{1}{x-(y+1) E_{y+1}}$
Y+2	(CA) · $\frac{1}{x-(y+2) E_{y+2}}$
⋮	⋮

Edad	Costo Anual Acumulado
	a Edad Actual (X)
X-1	(CA) $\cdot \frac{1}{E_{X-1}}$

La suma de estos costos representa el monto del Pasivo, esto es:

$$(PSP)_X = (CA) \cdot \sum_{t=0}^{X-t-1} \frac{1}{X-(t+1) E_{Y+t}}$$

donde:

$$(PSP)_X = \text{Pasivo por Servicios Pasados} \\ \text{(Valuado a edad actual (X))}$$

Esta fórmula se puede desarrollar de modo que se obtenga una expresión más sencilla de manejar.

Dado que:  $N = X - Y$

$$(PSP)_X = (CA) \cdot \sum_{t=0}^{N-1} \frac{1}{N-t E_{Y+t}}$$

como:

$$N-t E_{Y+t} = \frac{D_{Y+t+N-t}}{D_{Y+t}}$$

$${}^{N-t} E_{Y+t} = \frac{D_{Y+N}}{D_{Y+t}}$$

entonces:

$$(\text{PSP})_x = (\text{CA}) \cdot \sum_{t=0}^{N-1} \frac{D_{Y+t}}{D_{Y+N}}$$

puesto que  $D_{Y+N}$  no depende de  $(t)$  y  $\sum_{t=0}^{N-1} D_{Y+t} = N_Y - N_{Y+N}$ :

$$(\text{PSP})_x = (\text{CA}) \cdot \frac{1}{D_{Y+N}} \cdot \sum_{t=0}^{N-1} D_{Y+t}$$

$$(\text{PSP})_x = (\text{CA}) \cdot \frac{1}{D_{Y+N}} \cdot (N_Y - N_{Y+N})$$

$$(\text{PSP})_x = (\text{CA}) \cdot \frac{N_Y - N_{Y+N}}{D_{Y+N}}$$

Sea:

$$\ddot{S}_{Y:\overline{N}|} = \frac{N_Y - N_{Y+N}}{D_{Y+N}}$$

Entonces:

$$(PSP)_x = (GA) \cdot \ddot{S}_{y:\overline{m}}$$

Finalmente:

$$(PSP)_x = (GA) \cdot \ddot{S}_{y:\overline{x-y}} \quad (2.6)$$

donde:

(GA) está dado por la expresión (2.5).

Las principales características de este método son las siguientes:

- a) El costo anual individual del plan es nivelado.
- b) El beneficio anual total proyectado a edad de jubilación (Z), se considera desde la edad de ingreso a la empresa (Y).

El costo se cubre mediante aportaciones anuales niveladas, las cuales se acumularán en el fondo de tal forma que a la edad de jubilación se tenga constituida la reserva necesaria para poder otorgar el beneficio pactado, esto por ser un método de financiamiento racional.

En conclusión, la aplicación de la fórmula (2.5), determina el costo anual nivelado conocido como Costo Normal y la expresión (2.6) calcula el Pasivo por Servicios Pasivos.



dos o Pasivo Acumulado.

### 2.6.3 METODO INDIVIDUAL CON PASIVO INICIAL CONGELADO A EDAD DE INGRESO.

**Definición.**- Es el método bajo el cual la diferencia entre el valor presente actuarial de los beneficios proyectados que ofrece el plan para el grupo incluido en la valuación actuarial y el valor actuarial de los activos más el pasivo acumulado actuarial congelado no financiado, se asigna en forma nivelada con base en los ingresos o el período de servicios de dicho grupo comprendido entre la fecha de valuación y la fecha sujeta de retiro.

**Construcción.**- Tomando como base el costo anual nivelado (CA) y el pasivo por servicios pasados (PSP)x obtenidos con el Método Individual de Costo Nivelado a Edad de Ingreso, se desarrollará este método, con algunas modificaciones y condicionado a las siguientes características:

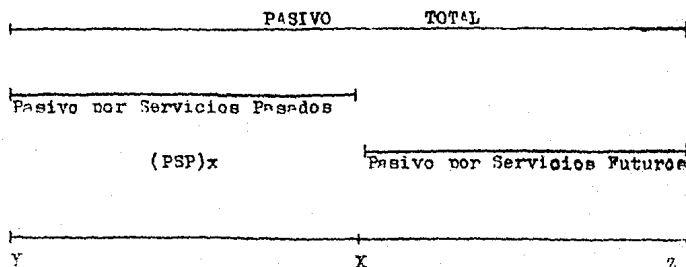
- a) Obtener un Costo Anual Nivelado en forma porcentual con respecto a la Nómina Total del grupo de empleados participantes de tal modo que al ser aplicado a dicha nómina nos determine la cantidad suficiente que se requiere reservar en forma colectiva para cada año de servicios futuros, esto es, en los años posteriores a la fecha de instalación del plan.
- b) El pasivo por servicios pasados a la fecha de instalación del plan deberá ser congelado y amortizado durante un cierto

período de tiempo hasta su liquidación. Es importante señalar que en los métodos desarrollados hasta ahora, el pasivo se ajusta anualmente, al analizar el comportamiento de las hipótesis actuariales durante el año, sin embargo en este método dicho ajuste no se realizará debido a que el pasivo quedará congelado; de esta forma las pérdidas o ganancias actuariales serán cargadas al Pasivo por los Servicios Futuros.

La razón de utilizar el Método Individual de Costo Nivelado a edad de ingreso como base, es por la necesidad de hacer que el costo anual sea nivelado, como es el caso del mencionado método.

Para el diseño del presente método, se partirá del caso individual, es decir, obteniendo el Costo Anual Nivelado en forma porcentual para un empleado en particular y posteriormente se desarrollará para una aplicación colectiva.

Obsérvese la siguiente línea de tiempo que muestra la división del Pasivo.



De esta gráfica se deduce la siguiente igualdad:

$$\begin{array}{rcccl} \text{PASIVO} & & \text{PASIVO POR} & & \text{PASIVO POR} & & \\ - & & = & & & & \\ \text{TOTAL} & & \text{SERVICIOS PASADOS} & & \text{SERVICIOS FUTUROS} & & (2.7) \end{array}$$

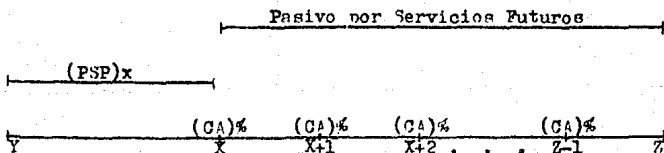
Esta expresión excluye del Pasivo Total el Pasivo por Servicios Pasados.

Ahora se debe encontrar la forma de valorar el Pasivo por Servicios Futuros, ya que tanto el Pasivo Total como el Pasivo por Servicios Pasados están determinados por las expresiones del método anterior como se convino inicialmente.

Se observa que un modo de valorar el Pasivo por Servicios Futuros sería sustituir los valores obtenidos en (2.5) y (2.6) en la ecuación (2.7), sin embargo este resultado no es en forma porcentual como lo requieren las condiciones señaladas para el diseño de este método.

Así, la única forma de valorarlo será obtenerlo directamente.

Considérese la siguiente línea de tiempo:



donde:

$(CA)\%$  = Costo Anual Nivelado en forma porcentual.

Como se mencionó anteriormente, el monto del costo anual se desea obtener aplicando directamente el Costo Anual Nivelado en forma porcentual  $(CA)\%$  al salario que devengue el empleado desde edad actual (X) hasta la edad de retiro (Z).

Para esto se va a partir del supuesto de que el salario en cada edad será como se explica a continuación:

Sea

$(SA)x$  = Salario Anual del empleado a edad actual (X).

<u>Edad</u>	<u>Salario Proyectado</u>
X	$(SA)x$
X+1	$(SA)x \cdot (1+i)^1$
X+2	$(SA)x \cdot (1+i)^2$
.	.
.	.
.	.
Z-1	$(SA)x \cdot (1+i)^{(Z-X)-1}$

Para obtener el monto del Costo Anual, se multiplica  $(CA)\%$  por cada salario, esto es:

Edad	Monto del Costo anual
X	$(SA)_X \cdot (C^1)_X$
X+1	$(SA)_X \cdot (1+i)^1 \cdot (C^1)_X$
X+2	$(SA)_X \cdot (1+i)^2 \cdot (C^1)_X$
.	.
.	.
.	.
Z-1	$(SA)_X \cdot (1+i)^{(Z-X)-1} \cdot (C^1)_X$

La suma de estos costos representa el Pasivo por Servicios Futuros, sin embargo, este pasivo se tendrá que valorar a edad actual (X), por lo tanto, si  $(VPPSF)_X$  es el Valor Presente del Pasivo por Servicios Futuros, se obtiene:

$$(VPPSF)_X = (SA)_X \cdot (C^1)_X + (SA)_X \cdot (1+i)^1 \cdot (C^1)_X \cdot E_X + \\ + (SA)_X \cdot (1+i)^2 \cdot (C^1)_X \cdot E_X + \dots + (SA)_X \cdot (1+i)^{(Z-X)-1} \cdot (C^1)_X \cdot E_X$$

Factorizando y agrupando se tiene que:

$$(VPPSF)_X = (SA)_X \cdot (C^1)_X \cdot \sum_{t=0}^{(Z-X)-1} (1+i)^t \cdot E_X \quad (2.8)$$

Ahora, del método anterior se sabe que el Pasivo por Servicios Pasados está representado por:

$$(PSP)_X = (CA) \cdot \ddot{S}_{\overline{X-Y}|i}$$

donde  $(C^1)$  está dado por:

$$(C^1) = \frac{z-y/\ddot{a}_y}{\ddot{a}_{y:\overline{z-y}|i}}$$

y el Pasivo Total es igual a:

$$z-x / \ddot{a}_x$$

por lo tanto sustituyendo estos valores en la ecuación (2.7) se obtiene:

$$z-x / \ddot{a}_x - (CA) \cdot \ddot{S}_{y:\overline{z-x}|} = (SA)x \cdot (CA)\% \cdot \sum_{t=0}^{(z-x)-1} (1+i)^t \cdot {}_tE_x$$

Finalmente se despeja  $(CA)\%$  que es el valor buscado:

$$(CA)\% = \frac{z-x / \ddot{a}_x - (CA) \cdot \ddot{S}_{y:\overline{z-x}|}}{(SA)x \cdot \sum_{t=0}^{(z-x)-1} (1+i)^t \cdot {}_tE_x} \quad (2.9)$$

Para expresar de otra manera esta ecuación se puede hacer lo siguiente:

$$\text{Si } (1+i)^t \cdot {}_tE_x = {}_tE_x^s$$

entonces el denominador de (2.9) quedaría así:

$$(SA)x \cdot \sum_{t=0}^{(z-x)-1} {}_tE_x^s$$

desarrollando la sumatoria se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{(z-x)-1} {}_tE_x^s &= 1 + \sum_{t=1}^{(z-x)-1} {}_tE_x^s \\ \sum_{t=0}^{(z-x)-1} {}_tE_x^s &= 1 + a_{x:(z-x)-1}^s \\ \sum_{t=0}^{(z-x)-1} {}_tE_x^s &= \ddot{a}_{x:(z-x)}^s \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación (2.9) se puede reexpresar como:

$$(CA)\% = \frac{x-x/\ddot{a}_x - (CA) \cdot \ddot{S}_{v:\overline{x-y}|}}{(SA)x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{x-y}|}} \quad (2.10)$$

Este modelo cumple con las características deseadas ya que en el numerador se excluye el Pasivo por Servicios Pagados del Pasivo Total y en el denominador se tiene el monto de los salarios en valor presente que un empleado percibirá desde edad ( $X$ ) hasta edad ( $Z$ ) suponiendo que éstos se incrementen anualmente a la tasa ( $i$ ), quedando representado el Costo Anual en forma porcentual al salario, que era lo que se buscaba.

Por último el Costo Anual ( $CA$ )% se aplica a la nómina total del grupo, debido a que este método se utiliza en forma colectiva, es decir, se obtiene la suma de los Pasivos Totales y de los Pasivos por Servicios Pagados generados por cada empleado así como la suma del valor presente de Salarios Futuros correspondiente a cada empleado, estos valores se sustituyen en la ecuación (2.10) y el resultado es el porcentaje ( $CA$ )% que se aplicará a la nómina total del grupo, obteniéndose así el monto total del costo del año, el cual claramente es menor que si se hubiese hecho en forma individual, es decir:

Si  $H$  = Número total de empleados participantes.

$X^t$  = Edad actual del empleado  $L$ .

entonces  ${}^H(CA)\%$  se puede expresar en forma colectiva:

$${}^H(CA)\% = \frac{\sum_{t=1}^H x^t / \ddot{a}_{x^t} - (CA)^t \cdot \ddot{S}_{y^t: \overline{x^t - y^t}}}{\sum_{t=1}^H (SA)x^t \cdot \ddot{a}_{x^t: \overline{z^t - x^t}}} \quad (2.11)$$

donde:

$${}^H(CA)\% \leq (CA)\%$$

Esto se demuestra utilizando el siguiente principio:

Si 
$$\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$$

entonces:

$$\frac{A}{B} \leq \frac{A + C}{B + D}$$

La expresión (2.11) muestra la forma de valor el Costo Anual Nivelado colectivamente en forma porcentual al momento de la instalación del plan, sin embargo hay que tomar en cuenta que un año después se contará con un capital o fondo que estará formado por la aportación anual: costo por servicios futuros más costo por servicios pasados, más los intereses que éste produjo, considerando que no hubiera jubilados, ya que de ser así se tendrían que descontar del fondo los beneficios pagados, es decir, las pensiones.



El aspecto de jubilados se verá más adelante al analizar a los empleados cuya edad esté en el intervalo  $Z < X < W$ .

De acuerdo a lo anterior, se tiene:

Sea  $F_T$  = Fondo en el año T.  
 $C_T$  = Aportación anual en el año T.  
 $j$  = Tasa de rendimiento.

Entonces:

$$F_T = (C_T + F_{T-1}) \cdot (1 + j)$$

La obligación total será disminuida por  $F_T$ , ya que en su última representa la cantidad de Pasivo ya financiada.

Así, el costo anual nivelado  ${}^H(CA)\%$  para años futuros a la instalación del plan se valorará de la siguiente manera:

$${}^H(CA)\% = \frac{\sum_{t=1}^H x^t \cdot x^t / \ddot{a}_{x^t} - (CA)^L \cdot \ddot{S}_{y^t; \overline{x^t-y^t}} - F_T}{\sum_{t=1}^H (SA)x^t \cdot \ddot{a}_{x^t; \overline{x^t-x^t}}} \quad (2.12)$$

En conclusión, la característica principal de este método es valorar a la fecha de instalación del plan, el Pasivo por Servicios Pasados, por el Método Individual de Costo Nivelado a edad de ingreso, y amortizarlo durante un cierto período de tiempo, tomando en cuenta que dicho Pasivo no será revaluado en lo futuro, por las posibles pérdidas actuariales que pudiera sufrir, sino que su monto se considerará

congelado hasta su amortización total.

También es necesario puntualizar que los ajustes en el Pasivo por Servicios Pasados a consecuencia de pérdidas o ganancias actuariales, los absorberá directamente el Pasivo por Servicios Futuros (Pasivo Total menos Pasivo por Servicios Pasados) y a la vez éste lo reflejará en aportaciones futuras.

#### 2.6.4 METODO COLECTIVO.

Definición.- Es el método bajo el cual la diferencia entre el valor presente actuarial de los beneficios que otorga el plan para el grupo participante y el valor actuarial de los activos se asigna en forma nivelada con base en los ingresos o el período de servicios de dicho grupo comprendidos entre la fecha de valuación y la fecha hipotética de jubilación. Tal asignación se lleve a cabo para el grupo en conjunto en vez de la suma de las asignaciones individuales.

Construcción.- Para diseñar este modelo, la idea es tomar el Pasivo Total, sin diferenciar el Pasivo por Servicios Futuros del Pasivo por Servicios Pasados por lo que está directamente relacionado con la ecuación (2.12) del Método Individual con Pasivo Inicial Congelado a edad de ingreso.

Según esta ecuación, se tiene:

$${}^H(CA)\% = \frac{\sum_{t=1}^H z^t \cdot x^t / \ddot{a}_t - (CA)^t \cdot \ddot{S}_{y^t; \overline{x^t-y^t}} - P_T}{\sum_{t=1}^H (SA)x^t \cdot \ddot{a}_{x^t; \overline{z^t-x^t}}}$$

Si se hace:

$$(CA)^t \cdot \ddot{S}_{y^t; \overline{x^t-y^t}} = 0$$

de modo que en el numerador quede únicamente el Pasivo Total, se obtiene:

$${}^H(CA)\% = \frac{\sum_{t=1}^H z^t \cdot x^t / \ddot{a}_{x^t} - P_T}{\sum_{t=1}^H (SA)x^t \cdot \ddot{a}_{x^t; \overline{z^t-x^t}}} \quad (2.13)$$

Así, en el numerador se tiene el Pasivo Total que se calculará a edad actual del emulando cada aniversario del plan, es decir, en cada valuación, con el fin de ser integradas las pérdidas o ganancias actuariales obtenidas en el año.

Este método considera que la amortización del Pasivo Total se hará en un tiempo infinito, ya que este pasivo es dinámico, resultado de las constantes pérdidas y ganancias actuariales registradas en cada año de valuación.

Finalmente, si se valúa la ecuación (2.13) bajo ciertas hipótesis actuariales y éstas se cumplen, entonces el Costo Anual  ${}^H(CA)\%$  sería nivelado.

Sin embargo, en la práctica estas hipótesis difícilmente se cumplen, lo que provoca variaciones tanto en el Pasivo Total como en el valor presente de los salarios futuros y por lo tanto "(G<sup>A</sup>)%" resulta ligeramente dinámico.

#### 2.6.5 CASO ESPECIAL DE LOS METODOS.

Existe un caso especial de los métodos de financiamiento que se presenta cuando la edad actual del empleado (X) se encuentra en el siguiente intervalo:

$$Z < X < W$$

Los métodos desarrollados anteriormente se cumplen sólo para edades comprendidas en el intervalo:

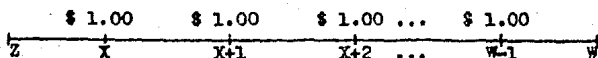
$$Y \leq X \leq Z$$

No obstante es de gran importancia analizar un modelo aplicable a edades en el intervalo:

$$Z < X < W$$

ya que en este último se encuentra el personal ya jubilado.

Con este objeto, si se denota como (X) a edades comprendidas dentro de este intervalo, entonces se tiene la siguiente gráfica:



El beneficio a otorgar desde edad (X) hasta edad (W-1) es de \$ 1.00, por lo tanto en cualquiera de los métodos analizados el monto total de los beneficios es el siguiente:

$$(PJ)_x = 1.00 + 1.00 {}_1E_x + 1.00 {}_2E_x + \dots + 1.00 {}_{(W-x)-1}E_x$$

$$(PJ)_x = 1.00 + \sum_{t=1}^{(W-x)-1} E_x$$

Por lo tanto:

$$(PJ)_x = \ddot{a}_x \quad (2.14)$$

donde:  $(PJ)_x$  = Pasivo del personal Jubilado.

Esto quiere decir que para edades (X) se aplicará una anualidad anticipada a edad actual del jubilado, independientemente del método que se esté utilizando.

Es importante destacar que en todos los métodos desarrollados anteriormente, las anualidades se deberán ajustar por las hipótesis actuariales.

### CAPITULO III

#### INSTRUMENTOS DE FINANCIAMIENTO

## CAPITULO III

### INSTRUMENTOS DE FINANCIAMIENTO

#### 3.1 GENERALIDADES.

Los Métodos Actuariales de Financiamiento nos indican las cantidades que se deberán aportar periódicamente durante un cierto período de tiempo con el objeto de constituir un fondo, el cual deberá ser suficiente para otorgar el beneficio previsto por un determinado plan de pensiones.

Como se mencionó en el capítulo anterior, en la fecha de instalación del plan y de acuerdo al método de financiamiento utilizado se hará una aportación que iniciará el fondo o reserva para el pago de las pensiones, el cual se incrementará año con año.

Ahora bien, es de vital importancia el saber cómo, cuándo y dónde invertir dicho fondo, ya que este conocimiento puede ocasionar recomensas substanciales, o por el contrario los resultados pueden ser desastrosos si se carece de este conocimiento.

Por lo tanto, resulta necesario el seleccionar un régimen o instrumento sobre el cual descansa el financiamiento de las pensiones por concepto de jubilación, que a su vez

permita establecer tasas de aportación al fondo que pueden sostenerse a un nivel productivo o al menos nivelado durante varios años, a fin de evitar variaciones importantes que afecten los resultados de una empresa.

### 3.2 INSTRUMENTOS DE FINANCIAMIENTO.

Los Instrumentos de Financiamiento son contratos realizados con determinadas Instituciones mediante los cuales se llevará a cabo la administración del fondo de las pensiones por jubilación.

Los Instrumentos de Financiamiento se clasifican dependiendo si representan contratos con Compañías de Seguros o con Instituciones Fiduciarias.

La diferencia principal de esta clasificación es la siguiente: si se asignan los aportaciones al fondo para la compra de seguros o anualidades para cada uno de los participantes, o si parte o la totalidad de dichas aportaciones son acumuladas en un fondo general, que será utilizado para afrontar el pago de los beneficios o para la compra de anualidades para los participantes en el momento del retiro o en caso de separación con derecho al beneficio.

Los arreglos contractuales a través de los cuales se asignan los fondos para compra de seguros y anualidades individuales, se conocen con el nombre de instrumentos de financiamiento con asignación de reservas, en tanto que en



aquellos en los que la asignación se difiere, se conocen como instrumentos de financiamiento sin asignación de reservas.

Ahora se desarrollarán algunos de los instrumentos de financiamiento que operan en la actualidad, tratando sus características principales.

### 3.2.1 CONTRATO DE DEPOSITOS EN ADMINISTRACION.

#### A) Descripción General.

El Contrato de Depósitos en Administración es un convenio de participación en el cual los depósitos del Contratante se mantienen en un fondo durante toda la vida activa de los empleados. Este fondo se adiciona cada año con los intereses que producen los depósitos y se afecta con las deducciones que se realicen por los gastos que origine dicho fondo. Cuando los empleados se jubilan, el costo de compra del beneficio de retiro se toma del fondo y la pensión vitalicia se le otorga al empleado retirado.

Los depósitos recibidos se retienen en el fondo de Depósitos en Administración en una forma no asociada con los empleados individualmente, lo que le permite al Contratante determinar el costo anual del plan y además le da la opción de elegir muchos tipos de fórmulas de beneficio en el diseño del plan.

Desde el punto de vista del Contratante, el monto disponible del Fondo de Depósitos en Administración, para el pago de beneficios, es igual en cualquier momento a la suma de:

- a) Todas las cantidades depositadas más los intereses producidos y adicionados al fondo, menos
- b) Cantidades deducidas previamente del fondo para la compra de beneficios y cargos realizados para gastos e impuestos.

Todos los depósitos del Contratante y los pagos hechos por los empleados, en el caso de planes contributivos, se adicionan al fondo en el momento de ser recibidos. El interés es acreditado al fondo a los tipos garantizados en el contrato.

Los retiros del fondo destinados a la compra de beneficios se hacen también a los tipos garantizados contractualmente.

La cantidad que se deduce del fondo por concepto de gastos se describe en el contrato en la forma de un ajuste anual o costo de contrato, y dicha cantidad generalmente de crecerá en una escala de deslizamiento si los depósitos anua les exceden de un monto estipulado.

Con objeto de mejorar el tipo de acumulación del fondo,

se establece un crédito para la compra de anualidades de jubilación.

Los créditos de interés no serán en total menores que los estipulados en el contrato. El interés en exceso de los anteriores se mantendrá en el fondo con objeto de tener una fuente de futuros pagos de dividendos.

En la medida en que los créditos de intereses adicionales se hagan corrientemente, estos reducirán el monto del depósito anual, o se pagarán en forma de dividendos futuros.

#### B) Garantías de Interés.

El Contrato de Depósitos en Administración garantiza los tipos de interés que serán acreditados al fondo, que provengan de los depósitos, generalmente durante un período de años estipulado. Como las futuras condiciones de inversión resultan con frecuencia difíciles de predecir, el interés se garantiza en un escala de declinamiento por duración del contrato con los tipos de interés más altos aplicables a los primeros años reduciéndose gradualmente hasta llegar a un interés que se mantendrá constante después de un cierto año de contrato.

Los tipos de interés garantizados para nuevos contratos emitidos a diferentes tiempos se cambian periódicamente con objeto de adaptarse a las cambiantes condiciones de inversión.

Existe la posibilidad de que los depósitos recibidos después de un año de contrato estipulado se contabilicen en forma separada.

También puede ser establecido un nuevo fondo y el contrato especificará un nuevo tipo de interés.

En el caso de dos o más fondos garantizados en vigencia en el contrato, todos los desembolsos se harán con cargo al primer fondo constituido.

#### C) Costos del Contrato.

Los costos de los Depósitos en Administración se cubren en dos formas. Primero se hace una deducción anual, igual a una cantidad fija menos un porcentaje sobre los depósitos recibidos en un año en exceso de un cierto monto establecido previamente.

Además, en todos los casos sin tomar en cuenta el volumen de depósito anual, cuando se compran las anualidades de jubilación se incluye un cargo de un cierto porcentaje, en los primeros años de contrato, sobre la prima bruta conseguida.

Por otra parte, en el caso de que se involucren impuestos sobre primas, éstos se deducirán del fondo en el momento en que se adquiriera la anualidad de jubilación.

### 3.2.2 CONTRATO DE GARANTIA DE PARTICIPACION INMEDIATA.

#### A) Descripción General.

El Contrato de Garantía de Participación Inmediata es un convenio que establece que las contribuciones hechas por el Contratante se acumularán en un fondo retenido por la Compañía Fiduciaria hasta el momento en que el dinero sea requerido para el pago de beneficios, gastos e impuestos.

Los intereses que la Fiduciaria acreditará al fondo serán iguales a la parte de interés neto ganado por el Grupo de Pensión, y la parte de ganancias del capital realizado distribuido proporcionalmente al Grupo, menos los cargos propios de distribución de riesgo. La Fiduciaria también deducirá del fondo la parte de pérdidas del capital realizado; no obstante, la cantidad máxima de pérdidas que se carga contra el fondo en cualquier año, no podrá exceder de la suma de los créditos acumulados por interés y las ganancias de capital realizado. Esto es, en efecto, una "garantía de capital". En caso de que en cualquier año, las pérdidas acumuladas sobrepasen los créditos acumulados por interés y las ganancias de capital realizado, el excedente se amortizará en la forma de un cargo para cada uno de los siguientes años.

La Fiduciaria también deduce del fondo cada año la parte correspondiente a gastos e impuestos distribuidos proporcionalmente al Grupo de Pensión.

Así el fondo participa inmediatamente en la experiencia de inversión, gastos e impuestos de la Fiduciaria.

Los beneficios de pensión pagaderos a los empleados jubilados se retiran del fondo cada mes. Una vez que el pago de la pensión ha comenzado para una persona, la Fiduciaria garantiza los pagos futuros, de acuerdo con los términos del contrato, mediante la estipulación de que el Contratante se comprometa a mantener un saldo mínimo en el fondo que sea suficiente para la compra, en todo momento, del beneficio de pensión completo para cada uno de los empleados jubilados. Este saldo mínimo se conoce como "Obligación del Fondo".

También se incluyen en el contrato las bases de la Obligación del Fondo que se garantizan inicialmente para todas las jubilaciones que ocurran en un cierto período de años. Estas bases se utilizan para determinar la Obligación del Fondo que el Contratante debe mantener por esta causa.

La Fiduciaria incrementará la Obligación del Fondo en cada fecha en la que un beneficio se establezca, por el monto requerido para proveer dicho beneficio.

Si en la fecha en la que cualquier beneficio llegue a ser establecido, la porción del saldo en el fondo en exceso de la Obligación del Fondo, determinada inmediatamente antes del establecimiento de ese beneficio y después de considerar los ajustes estimados acumulados, al cierre del ejercicio anterior, es menor que la suma de los montos a ser incluidos

en la Obligación del Fondo a causa de dicho beneficio, una contribución vencerá inmediatamente y deberá ser pagada por el Contratante. El monto de esa contribución será lo que incrementará el saldo del fondo, formado por la Obligación de dicho Fondo determinado después de establecer ese beneficio y los ajustes acumulados estimados en el cierre del ejercicio anterior.

Para proveer una asignación por las fluctuaciones de año a año en los niveles de experiencia de mortalidad, interés y gastos, se mantiene un margen mínimo de operación igual a un porcentaje de la Obligación del Fondo o uno menor en caso de que la contribución anual rebase una cierta cantidad establecida en el contrato. La suma de la Obligación del Fondo y el margen mínimo de operación se conoce como "Nivel Mínimo de Operación".

#### B) Garantías de Ingresos de Inversión.

En este contrato, además de establecer una garantía de capital, la Fiduciaria emite contratos con dos alternativas de Garantías de Ingresos de Inversión Mínimos. Una garantiza estos ingresos durante un período "Corto" y la otra, durante uno mayor, llamado período de garantía "Largo".

Además la Fiduciaria emite contratos de este tipo con una Garantía Opcional Especial de Ingresos de Inversión Mínimos sobre "Depósitos de Transferencia Inicial" de una cierta cantidad estipulada, durante un período inicial de

garantía.

Se pretende que cada una de estas garantías sean renovadas por un período de años establecido, subsecuente a la fecha de vencimiento, a los tipos de interés determinados en ese momento. Las demás renovaciones se espera que se realicen por períodos de años iguales al primero, sujetos a la póliza en vigencia al momento de la renovación.

Las garantías son acumulativas durante cada período, a fin de que las pérdidas sufridas en algunos años puedan ser compensadas por ganancias en otros años, de otro modo, las pérdidas de un período de garantía no serían compensadas por ganancias de otro período. La aplicación de las garantías de ingresos de inversión a estos contratos se describe en la continuación.

#### Fondo de Garantía de Participación Inmediata.

El contrato estipula que el fondo en cualquier momento será igual al mayor de los dos siguientes:

- a) Fondo Garantizado.- Este fondo se estima directamente con respecto a gastos administrativos, comisiones, impuestos sobre primas y pago de beneficios, pero se acreditará cada año con ingresos de inversión a los tipos de interés estipulados en el contrato. Este crédito de ingresos de inversión se hace en lugar de ajustes por interés real ganado, pérdidas o ganancias de capital realizado, impues



tos sobre rentas, gastos de inversión y cargo de distribución de riesgo para la garantía adicional.

b) Fondo de Experiencia.- Este fondo se mantiene de la misma forma que el Fondo de Garantía de Participación Inmediato Tradicional sin garantías de ingresos de inversión, a menos que un cargo más alto de distribución de riesgo, obligue la inclusión de la garantía de ingresos de inversión que se asignará a este fondo.

Cuando la Garantía de Ingresos de Inversión Especial sobre el Depósito de Transferencia Inicial se utiliza y la Garantía del período "Corto" o "Largo" no se aplica a depósitos subsiguientes, entonces se mantienen dos Fondos de Experiencia, uno para la transferencia inicial y el ingreso de inversión sobre ella y el otro para depósitos anuales y el ingreso de inversión sobre ellos. Un Fondo de Experiencia separado se mantiene también si la Garantía por el período "Corto" y la Especial de Ingresos de Inversión sobre el Depósito de Transferencia Inicial son emitidos juntos pero con diferentes fechas de vencimiento.

Por otra parte, las Garantías de Ingresos de Inversión Mínimas son renovadas automáticamente en la fecha de vencimiento, a menos que se le especifique lo contrario a la Fiduciaria.

c) Costos del Contrato.

Los costos de este tipo de contrato se determinan conforme a procedimientos establecidos por la Fiduciaria y serán deducidos directamente del Fondo de Garantía de Participación Inmediata.

### 3.2.3 CONTRATO DE OBLIGACION DIFERIDA.

#### A) Descripción General.

El Contrato de Obligación Diferida fué diseñado para el posible cliente de beneficios de pensión que está interesado principalmente en las capacidades de inversión de la Fiduciaria.

El contrato establece que las contribuciones hechas por el Contratante se acumularán en un fondo retenido por la Fiduciaria, esto es, en el Fondo de Obligación Diferida de Depósitos en Administración hasta el momento en que el dinero sea requerido para el pago o compra de beneficios, gastos e impuestos.

Al igual que en el contrato de Garantía de Participación Inmediata, los intereses que la Fiduciaria acreditará al fondo serán iguales a la parte de interés neto del fondo ganado por el Grupo de Pensión y la parte de ganancias del capital distribuido proporcionalmente al Grupo, menos los cargos propios de distribución de riesgo. La Fiduciaria también deducirá del fondo la parte de pérdidas del capital realizado; no obstante, el monto máximo de pérdidas que se

carga contra el fondo en cualquier año, no podrá exceder de la suma de los créditos acumulados por interés y ganancias de capital. Esto es, efectivamente, una "garantía de capital". En caso de que en cualquier año, las pérdidas acumuladas de capital realizado rebasen los créditos acumulados por interés y ganancias de capital, la cantidad en exceso se trasladará como un cargo en los siguientes años.

La Fiduciaria también deducirá del fondo cada año la parte de los gastos e impuestos distribuidos proporcionalmente al Grupo de Pensión.

Así, el fondo participa inmediatamente en la experiencia de inversión, gastos e impuestos de la Fiduciaria.

A discreción del Contratante los beneficios de jubilación no garantizados pueden pagarse directamente del fondo ó los beneficios garantizados pueden comprarse para empleados retirados, por separación del costo de estos beneficios del fondo.

Cuando los beneficios son acumulados en una reserva, separada del fondo, esto se debe establecer en el contrato. Esta reserva se llama "Reserva de Jubilación" y todos los beneficios para los jubilados se pagan con cargo a esta reserva.

La Reserva de Jubilación es diferente en cuanto a las bases utilizadas, del Fondo de Obligación Diferida, ya que está valuada con respecto a otra experiencia de mortalidad,

ingreso de inversión y gastos. Basándose en la experiencia de esta Reserva, pueden surgir dividendos y llegar a ser pagaderos.

Estos dividendos se acreditarán al Fondo de Obligación Diferida de acuerdo con los términos del contrato.

Generalmente se incluyen tablas de precios de compra que se garantizarán inicialmente para todos los retiros que ocurran en un cierto período de años estipulado en el contrato.

#### B) Garantías de Ingresos de Inversión.

En forma similar al contrato de Garantía de Participación Inmediata, en este contrato además de estimular una garantía de capital, la Fiduciaria emite contratos con dos alternativas de Garantías de Ingreso de Inversión Mínimos. Una garantiza estos ingresos durante un período "Corto" y la otra durante uno mayor, llamado período de garantía "Largo".

Además la Fiduciaria emite contratos de este tipo, con una Garantía Opcional Especial de Ingresos de Inversión Mínimos sobre "Depósitos de Transferencia Inicial" de una cierta cantidad estipulada durante un período inicial de garantía.

Se pretende que cada una de estas garantías sean renovadas por un período de años establecido, subsecuente a la

**ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

fecha de vencimiento, a los tipos determinados en ese momento. Las demás renovaciones se espera que se realicen por periodos de años iguales al primero, sujetos a la póliza vigente al momento de la renovación.

Las garantías son acumulativas durante cada período, de tal modo que las pérdidas sufridas en algunos años puedan ser compensadas por ganancias en otros años, de otra forma, las pérdidas de un período de garantía no serían compensadas por ganancias de otro período. La aplicación de las garantías de ingresos de inversión a estos contratos se describe a continuación.

#### Fondo de Obligación Diferida.

El contrato estipula que el fondo en cualquier momento será igual al mayor de los dos siguientes:

- a) Fondo Garantizado.- Este fondo se estima directamente con respecto a gastos administrativos, comisiones, impuestos sobre primas y pago de beneficios o retiros para compras de anualidades, pero se acreditará cada año con ingresos de inversión a los tipos de interés estipulados en el contrato. Este crédito de ingresos de inversión se hace en lugar de ajustes por interés real ganado, pérdidas o ganancias de capital realizado, impuestos sobre rentas, gastos de inversión y cargo de distribución de riesgo por la garantía adicional.

b) Fondo de Experiencia.- Este fondo se mantiene de la misma forma que el Fondo de Obligación Diferida tradicional sin garantías de ingresos de inversión, o menos que un cargo más alto de distribución de riesgo, obligue la inclusión de la garantía de ingresos de inversión que se asignará a este fondo.

Cuando la Garantía de Ingresos de Inversión Especial sobre el Depósito de Transferencia Inicial se utiliza y la Garantía del período "Corto" o "Largo" no se aplica a depósitos subsiguientes, entonces se mantienen dos Fondos de Experiencia, uno para la transferencia inicial y el ingreso de inversión sobre ella y el otro para depósitos anuales y el ingreso de inversión sobre ellos. Un Fondo de Experiencia separo se mantiene también si la Garantía por el período "Corto" y la Especial de Ingresos de Inversión sobre el Depósito de Transferencia Inicial son emitidos juntos pero con fechas de vencimiento diferentes.

Para este tipo de contratos una escala apropiada de gastos garantizada se utiliza para ambos Fondos, el Garantizado y el de Experiencia. Con respecto a las garantías de ingresos de inversión mínimos se hace un cargo adicional de distribución de riesgo, que se deduce directamente en la de terminación del ingreso de inversión del Fondo de Experiencia.

Además del cargo anterior, hay otro costo adicional para gastos administrativos, ambos se deducen tanto del Fondo Garantizado, como del de Experiencia.

Las garantías de Ingresos de Inversión Mínimas son renovadas automáticamente en la fecha de vencimiento, o menos que se le especifique lo contrario a la Fiduciaria.

### C) Costos del Contrato.

Los costos de este tipo de contrato se refieren a cargos básicos anuales fijos establecidos de antemano por la Fiduciaria.

### 3.2.4 CONTRATO DE OBLIGACION DIFERIDA CON ACUMULACION GARANTIZADA.

#### a) Descripción General.

El Contrato de Obligación Diferida con Acumulación Garantizada es un convenio de participación en el cual se realiza un fuerte depósito inicial en el primer año. Este depósito inicial y el interés acumulado a los tipos establecidos se otorgará al Contratante en una de las formas siguientes:

1) Período de Acumulación de 1 año - Período de Transferencia de 14 años.- Es la forma bajo la cual el depósito inicial se acumula por un período de un año al tipo de interés garantizado en el contrato, sin hacer pago alguno durante este período.

Este fondo acumulado más los subsecuentes créditos de

interés que a su vez se acumulan al tipo garantizado, se pagan al Contratante en una serie de quince pagos anuales iguales, el primero de los cuales se realizará al final del primer año de contrato y el último de ellos al finalizar el quinceavo año.

2) Período de Acumulación de 4 años - Período de Transferencia de 11 años.- En esta forma, el depósito inicial se acumula por un período de cuatro años al tipo de interés garantizado estipulado, sin hacer pago alguno durante este período.

Este fondo acumulado más los subsiguientes créditos de interés que también se acumulan al tipo garantizado, se pagan al Contratante en una serie de doce pagos anuales iguales, que se inician al finalizar el cuarto año de contrato y terminan al final del quinceavo año.

3) Período de Acumulación de 6 años - Período de Transferencia de 9 años.- Esta forma es aquella en la que el depósito inicial se acumula por un período de seis años al tipo de interés garantizado en el contrato, sin hacer pago alguno durante este período.

Este fondo acumulado más los subsiguientes créditos de interés que se acumulan también al tipo garantizado, se pagan al Contratante en una serie de diez pagos anuales iguales, que comienzan al fin del sexto año de contrato y terminan al final del quinceavo año.



4) Obligación Diferida con Acumulación Garantizada / 8-12.- Es la forma diseñada para permitir a los Contratantes elegir, dentro de ciertos límites, un plazo más corto en las garantías de interés que están disponibles bajo las otras formas de este tipo de contratos. Depende de la elección del Contratante al momento de emisión, la duración de las garantías de interés en esta forma de contrato 8-12, la cual puede ser como mínimo ocho o como máximo doce años.

Además el Contratante tiene la oportunidad de elegir Pe ríodos de Acumulación en un rango de cuatro a ocho años y Pe ríodos de Transferencia de tres a ocho años.

La duración total de esta forma de contrato, es decir, la suma de los Pe ríodos de Acumulación y Transferencia, no obstante, no puede ser menor a ocho ni mayor a doce años.

Al igual que en las otras formas de contratos de este tipo, el fondo acumulado más los subsecuentes créditos de interés se empiezan a pagar en el último día del Pe ríodo de Acumulación y el pago final se hace en el último día del Pe ríodo de Transferencia.

Cada una de las anteriores formas de contratos de Obligación Diferida con Acumulación Garantizada también incluyen una conveniente compra de anualidad que llega a ser efectiva solamente cuando el Contratante elige utilizarla. Aunque en este respecto el contrato se asemeja a uno de Obligación Diferida, se distingue en dos cosas:

a) El Interés se acredita únicamente a los tipos garantizados en el contrato. Además no existe estimulación para el crédito de interés o ganancias de capital en exceso de las garantizadas.

b) En lugar de una escala directa de gastos, se hace una estipulación para servicios administrativos definidos, deduciendo del fondo un cargo de Gastos Básicos garantizados. El monto de este cargo dependerá de la prima dividida dentro de la cual el contrato disminuye. Si se requieren otros servicios, se deducirá del fondo un cargo adicional y los subsecuentes pagos anuales iguales se reducirán apropiadamente, hasta que el fondo se agote.

#### B) Garantías de Interés.

El monto mensual de interés que se acredita en el último día de cada mes a los contratos, es igual al producto de la Tasa de Interés Garantizada Mensual Equivalente aplicable, por el saldo en el Fondo de Acumulación Garantizada al inicio del mes menos todos los retiros del Fondo durante el mes.

El Nivel de los Tipos de Interés Garantizados que se ofrecen en estos contratos depende de la retención del depósito inicial en el contrato. A causa de esto, todos los retiros del Fondo de Acumulación Garantizada para compras de anualidades de otro asegurador o compras bajo el contrato que excedan el porcentaje permitido, se harán al menor

valor, en Libros o de Mercado.

### C) Costos del Contrato.

El monto mensual de Gastos Básicos es igual al producto del Tipo de Costo Básico mensual aplicable por el saldo en el Fondo de Acumulación Garantizada al inicio del mes. El Tipo de Gasto Básico aplicable está garantizado por la duración del contrato.

### 3.3 EL ANALISIS FINANCIERO DE LAS OBLIGACIONES GENERADAS POR UN PLAN DE PENSIONES.

Para seleccionar adecuadamente un instrumento de inversión con el cual financiar un plan de pensiones por jubilación, es indispensable hacer un profundo y detallado análisis.

La obligación generada por un plan de pensiones, se refleja directamente en la Empresa que va a implementarlo, como un problema financiero, cuya solución debe buscarse con la metodología adecuada.

Todos los problemas financieros deben enfocarse principalmente en el aspecto de rentabilidad, que en el caso de las pensiones por jubilación, el análisis anterior a la toma de decisiones se debe efectuar considerando determinadas variables adicionales.

Para una Empresa que instale un plan de pensiones, existen dos alternativas para hacer frente a su obligación:

a) La creación de una Reserva, en cuyo caso, la Empresa no tendrá ningún beneficio fiscal, ya que manejará esta reserva de acuerdo a su conveniencia y la tendrá disponible para hacer uso de ella tanto para el pago de pensiones como para cualquier otro fin de su operación normal, con lo cual conservará su liquidez.

b) La creación de un Fondo, en Fideicomiso, con Instituciones de Crédito, o de Seguros, o en Cajas de Póliza, caso en el cual la Empresa aprovechará el ventaja fiscal, siempre y cuando cumpla las estipulaciones correspondientes de la Ley del Impuesto Sobre la Renta, con lo que tendrá liquidez para los pagos de pensiones, solidificándose financieramente, sin embargo, esto hará que disminuya su liquidez para su operación normal.

Es claro que no existe una única solución aplicable a toda Institución, sino que ésta debe plantearse considerando el marco de referencia que requiere cada problema, esto es, la situación financiera particular de cada Empresa.

Algunas de las variables más importantes que se deben tomar en cuenta en el análisis financiero de una Empresa son:

- 1.- Liquidez.
- 2.- Planes a corto y a mediano plazo.
- 3.- Tasa Interna de Rendimiento.
- 4.- Costo de Oportunidad.
- 5.- Grado de Madurez.
- 6.- Política de los Accionistas.
- 7.- Entorno Económico.

La variable liquidez es la más importante en la toma de decisiones, ya que aunque todas las demás variables indiquen que la mejor opción es la creación de un Fondo, si los proyectos en efectivo (flujo de efectivo) no permiten distraer fondos, no se puede elegir esta alternativa. Por lo tanto, es muy conveniente un análisis profundo de esta primera variable.

La liquidez se complementa con la segunda variable, es decir, con los planes a corto y a mediano plazo, pues el efectivo puede variar de acuerdo con éstos, por lo que es necesario enfocar el problema en base a la planeación de la Empresa.

En el análisis otro punto muy importante es el rendimiento de inversión que se puede obtener, es decir, que hay que cuestionar el rendimiento en el Fideicomiso contra la Tasa Interna de Rendimiento.

Este punto consiste en comparar la tasa otorgada por un Fideicomiso con Instituciones de Crédito o de Seguros, o por

Casas de Bolsa, contra el interés que internamente obtiene la Empresa sobre la inversión y de este análisis sacar conclusiones. Esto es, cuál es el Costo de Oportunidad de ambas opciones.

También es importante considerar en la toma de decisiones, el grado de madurez de la Empresa, ya que éste está directamente relacionado con la antigüedad del personal y por ende con la obligación.

Finalmente, hay que tomar en cuenta el entorno económico general, ya que un pronóstico de contracción de mercado, obsolescencia tecnológica o algún fenómeno semejante, puede ocasionar problemas en el financiamiento del plan. Esto significa que la decisión final va sujeta al logro de los objetivos empresariales y a la estrategia financiera a largo plazo.

## CAPITULO IV

### PENSIONES VARIABLES

## CAPITULO IV

### PENSIONES VARIABLES

#### 4.1 GENERALIDADES

En el presente capítulo, después de haber analizado los Métodos Actuariales de Financiamiento que se utilizan en el cálculo de las obligaciones de los planes de pensiones, así como algunos de los Instrumentos de Inversión con que se cuenta para financiar dichos planes, se desarrolla el tema central de este trabajo, las pensiones variables, las cuales se pretende implementar como una alternativa al grave problema que enfrentan las personas jubiladas respecto al descenso en el nivel de vida que llevaban en su período de actividad, por la pérdida del poder de compra de su pensión, ocasionado principalmente por la inflación.

Con este objeto, se plantean dos tipos de pensiones:

1. Pensión Tradicional Indexada.- Es aquella que provee incrementos en el monto del beneficio de acuerdo a un determinado índice, por ejemplo, el índice de aumento en el salario mínimo, el índice de precios al consumidor o uno que esté ligado al factor inflación.
2. Pensiones Basadas en Anualidades Variables.- Son aquellas que proveen incrementos en el monto del beneficio, en la forma de anualidades crecientes.



Sin embargo, antes de iniciar el desarrollo de este tipo de beneficios, es conveniente mencionar algunos aspectos importantes de las pensiones por jubilación, como son las partes de que se compone normalmente el cálculo de la Obligación Total de una Empresa que instale un plan de beneficios para el personal que alcance la edad de jubilación.

En general, la fórmula para calcular la Obligación Total de una Empresa, para cada uno de los empleados participantes en el plan, es la siguiente:

$$\text{Obligación Total} = (\text{Obligación de la Empresa} \times \text{Técnica Actuarial})$$

1. Obligación de la Empresa.- Es el monto del beneficio al que se hará acreedor el participante al alcanzar la edad de jubilación. Esta obligación va a depender directamente de lo que a este respecto se estipule en el Contrato Colectivo de Trabajo de cada Institución en particular. La cantidad de este beneficio puede considerarse, entre otros factores, años de servicios prestados por el trabajador, promedio de los salarios percibidos por el empleado durante un cierto período de tiempo, salario del último año de servicios u otros que se establezcan en dicho contrato.

2. Técnica Actuarial.- Es la parte que considera los aspectos matemático-actuariales de la pensión, como son: mortalidad, interés y el tipo de anualidad que son utilizados en el cálculo. En este punto es donde se buscará la conveniencia de implementar una anualidad fija ó tradicional indexada ó

una anualidad variable, que otorguen al jubilado pensiones más competitivas en contra de la inflación.

Es importante hacer notar que la Obligación Total de la Empresa es de tipo contingente, esto es, que para llegar a ser cierta depende de que el participante llegue con vida a la edad de jubilación.

#### 4.2 PENSIONES TRADICIONALES INDEXADAS

Para llegar al concepto de pensiones tradicionales indexadas es conveniente desarrollar las anualidades contingentes más importantes, necesarias en el desarrollo de este estudio, así como las fórmulas correspondientes, dado que las pensiones tienen su origen precisamente en este tipo de rentas.

##### 4.2.1 ANUALIDADES CONTINGENTES

A) Anualidad Contingente.- Es el valor presente de una renta pagadera a una persona de edad ( $X$ ), con pagos al principio ó al final de cada período, según sea el caso, siempre y cuando el rentista se encuentre con vida.

B) Anualidad Contingente Vitalicia Vencida.- Es el valor presente de una renta anual pagadera a una persona de edad ( $X$ ), con pagos al final de cada año, mientras el rentista esté con vida. El desarrollo matemático es el siguiente:

Sea

$a_x$  = Valor Presente de una Anualidad Contingente Vitalicia Vencida, pagadera a una persona de edad  $X$ .

$l_t$  = Número de personas vivas a edad  $t$ .

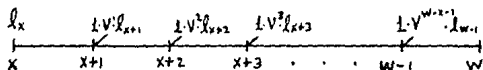
$v^n = (1 + i)^{-n}$  = Valor presente de la renta.

$i$  = tasa de interés de cálculo.

$n$  = número de periodos.

$W$  = última edad considerada por la tabla de Mortalidad.

Considérese la siguiente línea de tiempo:



Esto significa que el valor presente de una renta anual de \$ 1.00 pagadera a  $l_x$  en forma vitalicia es igual a la renta anual de \$ 1.00 pagadera a  $l_{x+1}$  a edad  $(X + 1)$  traída a valor presente a edad  $(X)$ , es decir, durante un periodo, más la renta anual de \$ 1.00 pagadera a  $l_{x+2}$  a edad  $(X + 2)$  traída a valor presente durante dos periodos, y así sucesivamente hasta la renta anual de \$ 1.00 pagadera a  $l_{W-1}$  a edad  $(W - 1)$  traída a valor presente durante  $(W - X - 1)$  periodos. Se considera que a edad  $(W)$  ya no hay vivos, por lo que  $l_w = 0$ .

La siguiente ecuación describe matemáticamente el párrafo anterior:

$$l_x \cdot a_x = 1 \cdot V^1 \cdot l_{x+1} + 1 \cdot V^2 \cdot l_{x+2} + 1 \cdot V^3 \cdot l_{x+3} + \dots + 1 \cdot V^{w-x} \cdot l_{w-1}$$

Para obtener el valor de  $a_x$  en forma individual:

$$a_x = \frac{1 \cdot V^1 \cdot l_{x+1} + 1 \cdot V^2 \cdot l_{x+2} + 1 \cdot V^3 \cdot l_{x+3} + \dots + 1 \cdot V^{w-x} \cdot l_{w-1}}{l_x}$$

Si se multiplica numerador y denominador por  $V^x$ , se obtiene:

$$a_x = \frac{1 \cdot V^{x+1} \cdot l_{x+1} + 1 \cdot V^{x+2} \cdot l_{x+2} + 1 \cdot V^{x+3} \cdot l_{x+3} + \dots + 1 \cdot V^{w-1} \cdot l_{w-1}}{V^x \cdot l_x}$$

Se define el valor comutado:  $D_{x+j} = V^{x+j} \cdot l_{x+j}$  ( $j = 1, 2, \dots, w-1$ )  
y así:

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots + D_{w-1}}{D_x} \quad (4.1)$$

Se definen los valores conmutados:

$$N_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} D_{x+t} \quad \text{y} \quad N_{x+1} = \sum_{t=1}^{w-x-1} D_{x+t}$$

Entonces:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \quad (4.2)$$

Además, de la ecuación (4.1) se obtiene la siguiente expresión:

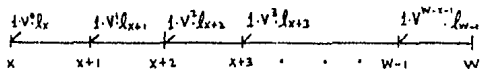
$$a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \dots + \frac{D_{w-1}}{D_x}$$

De donde  $a_x$  se puede reescribir como:

$$a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \dots + {}_{w-x-1}E_x$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{w-x-1} {}_tE_x \quad (4.3)$$

C) Anualidad Contingente Vitalicia Anticipada.- Es el valor presente de una renta anual pagadera a una persona de edad (X) con pagos al principio de cada año, siempre y cuando el rentista esté con vida. Para ilustrar esta anualidad, obsérvese la siguiente línea de tiempo:



De aquí, si  $\ddot{a}_x$  es una anualidad contingente vitalicia anticipada, entonces:

$$\ddot{a}_x = \frac{1 \cdot V^0 \cdot l_x + 1 \cdot V^1 \cdot l_{x+1} + 1 \cdot V^2 \cdot l_{x+2} + 1 \cdot V^3 \cdot l_{x+3} + \dots + 1 \cdot V^{w-x-1} \cdot l_{w-1}}{l_x}$$

Si se multiplica numerador y denominador por  $V^x$  y se utilizan los valores computados del punto anterior:

$$\ddot{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots + D_{w-1}}{D_x} \quad (4.4)$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \quad (4.5)$$

Otra expresión para  $\ddot{a}_x$ , se puede obtener desarrollando la ecuación (4.4):

$$\ddot{a}_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \dots + \frac{D_{w-1}}{D_x}$$

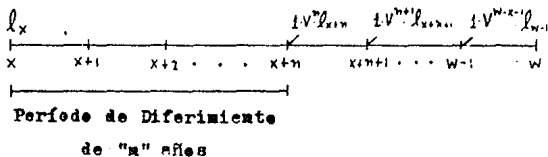
$$\ddot{a}_x = 1 + {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \dots + {}_{w-x-1}E_x$$

$$\ddot{a}_x = 1 + \sum_{t=1}^{w-x-1} {}_tE_x \quad (4.6)$$

Finalmente, la relación entre  $a_x$  y  $\ddot{a}_x$ , se deduce de las ecuaciones (4.3) y (4.6), que es la siguiente:

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x \quad (4.7)$$

D) Anualidad Contingente Vitalicia Diferida "n" años pagadera en forma anticipada.- Es el valor presente de una renta anual pagadera al principio de cada año a una persona de edad (X), a partir de la edad (X + n), siempre y cuando se encuentre con vida al final de los "n" años. Para ejemplificar lo anterior, considérese la siguiente línea de tiempo:



Ahora, si esta anualidad se denota por  $n/\ddot{a}_x$ , entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$n/\ddot{a}_x = \frac{1 \cdot V^n \cdot l_{x+n} + 1 \cdot V^{n+1} \cdot l_{x+n+1} + 1 \cdot V^{n+2} \cdot l_{x+n+2} + \dots + 1 \cdot V^{w-n} \cdot l_{w-1}}{l_x}$$

En forma similar a las anualidades anteriores, se multiplica y divide esta expresión por  $V^n$  y se agrupa utilizando los valores conmutados definidos anteriormente, y se obtiene:

$$n/\ddot{a}_x = \frac{D_{x+n} + D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \dots + D_{w-1}}{D_x} \quad (4.8)$$

$$n/\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x} \quad (4.9)$$

o también, de la ecuación (4.8), se tiene:

$$n/\ddot{a}_x = {}_nE_x + {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + \dots + {}_{w-x-1}E_x$$

$$n/\ddot{a}_x = \sum_{t=x}^{w-x-1} t E_x \quad (4.10)$$

Otra forma de expresar esta anualidad, es multiplicar y dividir la ecuación (4.9) por el factor  $D_{x+n}$ :

$$n/\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_{x+n}}$$

Si se reagrupa esta expresión se tiene lo siguiente:

$$n/\ddot{a}_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}}$$

Finalmente se puede reescribir como:

$$n/\ddot{a}_x = {}_nE_x \cdot \ddot{a}_{x+n} \quad (4.11)$$

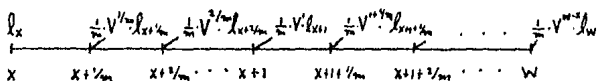
Por lo tanto, se observa que una anualidad diferida de este tipo se puede dividir en dos: un período de diferimiento de "n" años calculado con el término  ${}_nE_x$ , y otro de una anualidad vitalicia a partir de la edad  $(x+n)$ .

Se debe hacer notar, que esta anualidad tiene la forma de lo que sería una pensión anual, considerando el período de diferimiento "n", como el número de años a transcurrir entre la edad actual y la edad de jubilación del empleado, con pagos anticipados a partir de la edad de retiro  $(x+n)$ .



Sin embargo, las pensiones por jubilación generalmente se otorgan en forma mensual, por lo cual hay que desarrollar una anualidad de este tipo, pero pagadera doce veces al año, que para el caso general es de "m" veces al año.

E) Anualidad Contingente Vitalicia Vencida pagadera "m" veces al año.- Es el valor presente de una renta anual pagadera a una persona de edad (X), con pagos de  $\frac{1}{m}$  al final de cada m-ésimo de año durante la vida del rentista, siendo "m" un número entero. Con objeto de ilustrar esta anualidad, obsérvese la siguiente línea de tiempo:



De esta gráfica se deduce la siguiente ecuación:

$$l_x \cdot a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \cdot V^{1/m} \cdot l_{X+1/m} + \frac{1}{m} \cdot V^{2/m} \cdot l_{X+2/m} + \dots + \frac{1}{m} \cdot V^1 \cdot l_{X+1} \\ + \frac{1}{m} \cdot V^{1+1/m} \cdot l_{X+1+1/m} + \frac{1}{m} \cdot V^{1+2/m} \cdot l_{X+1+2/m} + \dots + \frac{1}{m} \cdot V^{m-1} \cdot l_W$$

de donde:

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \left[ \frac{V^{1/m} \cdot l_{X+1/m} + V^{2/m} \cdot l_{X+2/m} + \dots + V^1 \cdot l_{X+1} + V^{1+1/m} \cdot l_{X+1+1/m} + \dots + V^{m-1} \cdot l_W}{l_x} \right]$$

Se multiplica numerador y denominador por  $V^x$  :

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \left[ \frac{V^{x+1/m} \cdot l_{x+1/m} + V^{x+2/m} \cdot l_{x+2/m} + \dots + V^{x+1} \cdot l_{x+1} + V^{x+1+1/m} \cdot l_{x+1+1/m} + \dots + V^w \cdot l_w}{V^x \cdot l_x} \right]$$

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \left[ \frac{D_{x+1/m} + D_{x+2/m} + \dots + D_{x+1} + D_{x+1+1/m} + \dots + D_w}{D_x} \right]$$

Finalmente:

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{w-x} \frac{D_{x+t/m}}{D_x} \quad (4.12)$$

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{w-x} t/m E_x \quad (4.13)$$

$a_x^{(m)}$  nos indica cómo obtener el valor presente de una anualidad contingente vitalicia vencida con pagos "m" veces al año, sin embargo, para poder calcular esta cantidad, es necesario considerar una aproximación de la suma de  $D_{x+t/m}$ , debido a que los valores de  $D_x$  no están definidos en las tablas de Mortalidad para el caso en que  $x + t/m$  no es entero. Una de las formas de aproximar este valor es utilizando la fórmula de Woolhouse, que es la siguiente:

$$\frac{1}{m} \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_{x+t/m}}{D_x} = \frac{1}{D_x} \left[ \sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t} + \frac{m-1}{2m} \cdot D_x + \frac{m^2-1}{12m^2} \cdot \frac{d D_x}{dx} + \dots \right] \quad (4.14)$$

En la práctica, esta aproximación se utiliza considerando solamente los dos primeros términos, ya que los demás son cantidades poco significativas.

De este modo, el valor de esta anualidad es aproximadamente igual a:

$$\begin{aligned}
 a_x^{(m)} &\doteq \frac{1}{D_x} \left[ \sum_{t=1}^{w-x} D_{x+t} + \frac{m-1}{2m} \cdot D_x \right] \\
 a_x^{(m)} &\doteq \sum_{t=1}^{w-x} \frac{D_{x+t}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} \\
 a_x^{(m)} &\doteq \sum_{t=1}^{w-x} {}_tE_x + \frac{m-1}{2m} \\
 a_x^{(m)} &\doteq a_x + \frac{m-1}{2m} \qquad (4.15)
 \end{aligned}$$

F) Anualidad Contingente Vitalicia Anticipada pagadera "m" veces al año.- Es el valor presente de una renta anual pagadera a una persona de edad (X), con pagos de \$ 1/m al principio de cada m-ésimo de año durante la vida del rentista, siendo "m" un número entero. El desarrollo de esta anualidad es análogo al del caso de una anualidad vencida, por lo que las fórmulas de cálculo se pueden obtener a partir de este último caso.

Dado que la anualidad anticipada difiere de la vencida únicamente en un pago, como lo indica la ecuación (4.7), en entonces para el caso de anualidades pagaderas "m" veces al año, con pagos de 1/m, se tiene que:

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq a_x^{(m)} + \frac{1}{m}$$

ie donde:

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq a_x + \frac{m+1}{2m}$$

Por lo tanto, la fórmula para calcular aproximadamente el valor de una anualidad contingente vitalicia anticipada es:

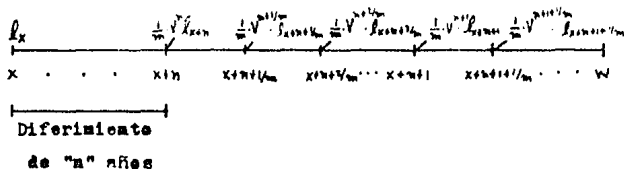
$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \ddot{a}_x - 1 + \frac{m+1}{2m}$$

Por lo tanto, la fórmula para calcular aproximadamente el valor de una anualidad contingente vitalicia anticipada es:

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \quad (4.16)$$

G) Anualidad Contingente Vitalicia Diferida "n" años pagadera "m" veces al año en forma anticipada.- Es el valor presente de una renta anual pagadera a una persona de edad (X), con pagos de \$ 1/m al principio de cada m-ésimo de año a partir de la edad (X + n), durante la vida del rentista, siendo "m" un número entero.

La siguiente línea de tiempo, ejemplifica esta anualidad:



Ahora, si  $n/\ddot{a}_x^{(m)}$  denote una anualidad de este tipo, entonces se puede deducir de esta gráfica la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} l_x \cdot n/\ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{1}{m} \cdot V^n \cdot l_{x+n} + \frac{1}{m} \cdot V^{n+1/m} \cdot l_{x+n+1/m} + \frac{1}{m} \cdot V^{n+2/m} \cdot l_{x+n+2/m} \\ &+ \dots + \frac{1}{m} \cdot V^{n+1} \cdot l_{x+n+1} + \frac{1}{m} \cdot V^{n+1+1/m} \cdot l_{x+n+1+1/m} + \dots + \frac{1}{m} \cdot V^{n+w} \cdot l_w \end{aligned}$$

Así, despejando  $n/\ddot{a}_x^{(m)}$  y multiplicando numerador y denominador por  $V^x$ , se tiene:

$$n/\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \left[ \frac{V^{x+n} \cdot l_{x+n} + V^{x+n+1/m} \cdot l_{x+n+1/m} + \dots + V^{x+n+1} \cdot l_{x+n+1} + V^{x+n+1+1/m} \cdot l_{x+n+1+1/m} + \dots}{V^x \cdot l_x} \right]$$

Utilizando valores conmutados:

$$n/\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \left[ \frac{D_{x+n} + D_{x+n+1/m} + \dots + D_{x+n+1} + D_{x+n+1+1/m} + \dots + D_w}{D_x} \right]$$

Por lo tanto:

$$n/\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{w-x} \frac{D_{x+t+t/m}}{D_x} \quad (4.17)$$

o bien:

$$n/\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{w-x} n+t/m E_x \quad (4.18)$$

Otra forma de expresar esta igualdad se puede obtener multiplicando numerador y denominador de (4.17) por el factor  $D_{x+n}$ :

$$n/\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{w-x} \frac{D_{x+t+t/m}}{D_x} \cdot \left[ \frac{D_{x+n}}{D_{x+n}} \right]$$

Si se reagrupa esta expresión, se tiene:

$$n/\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{w-x} \frac{D_{x+t+t/m}}{D_{x+n}}$$

Ahora, utilizando la aproximación de Woolhouse:

$$n/\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \left[ \sum_{t=0}^{w-x} \frac{D_{x+t+t/m}}{D_{x+n}} - \frac{m-1}{2m} \right]$$

la cual se puede reescribir como:

$$n/\ddot{a}_x^{(m)} = n E_x \cdot \ddot{a}_{x+n}^{(m)}$$

c) bien:

$$n/\ddot{a}_x^{(m)} \doteq n E_x \cdot \left[ \ddot{a}_{x:n} - \frac{m-1}{2m} \right] \quad (4.19)$$

Esta anualidad tiene la forma de lo que es un beneficio de jubilación, es decir, la de una pensión mensual vitalicia otorgada a partir de la edad en la que el empleado obtenga el derecho a jubilarse, sin embargo, se deben renombrar los parámetros de esta última ecuación, con objeto de representarla de acuerdo a la notación vista en el capítulo II. De este modo:

Sea:

$X$  = Edad actual del empleado.

$X + n = Z$  = Edad de jubilación del empleado.

$n = Z - X$  = Años de servicio por transcurrir entre la edad actual y la edad de jubilación del empleado.

$m = 12$  = Número de pagos en el año. Esto, dado que es una pensión mensual.

Entonces (4.19) queda de la siguiente manera:

$$z-x/\ddot{a}_x^{(12)} \doteq z-x E_x \cdot \left[ \ddot{a}_z - \frac{11}{24} \right] \quad (4.20)$$

O bien, en términos de valores actuariales:

$${}_{x-x} \ddot{a}_x^{(12)} = \frac{D_x}{D_x} \left[ \frac{N_x}{D_x} - \frac{H}{24} \right] \quad (4.21)$$

Las ecuaciones anteriores calculan el valor presente de una pensión mensual vitalicia a edad actual del empleado, también conocida como pensión tradicional. En estas expresiones el término  ${}_{x-x} E_x$  es el factor de mortalidad, ya que indica la probabilidad de que la persona llegue con vida a la edad de retiro y el otro factor  $\ddot{a}_x - \frac{H}{24}$ , es el de supervivencia que nos dice probabilísticamente cuánto morirá el participante, y por lo tanto el momento en que los pagos concluirán.

Por las razones anteriores, en la práctica normalmente se utiliza una tabla de Mortalidad para calcular el primer factor y una de Supervivencia para determinar el segundo factor, aunque puede utilizarse una sola tabla para calcular ambos factores.

#### 4.2.2 PENSIONES TRADICIONALES INDEXADAS.

En este momento ya se tienen los fundamentos principales para entender el concepto de pensión tradicional indexada.

Como se mencionó al inicio del capítulo, una pensión tradicional indexada es aquella que provee incrementos en el monto del beneficio en la misma proporción o a la misma



tasa a la que se incremente un determinado índice seleccionado, el cual, para los fines de esta investigación, debe estar relacionado estrechamente con el factor inflación, con objeto de obtener una pensión que no se vea deteriorada con el transcurso del tiempo en su poder de compra y que mantenga hasta cierto punto el nivel de vida de los jubilados.

Por esta razón, un índice adecuada para estos fines es el del salario mínimo, ya que éste generalmente está sujeto a revisiones periódicas por parte de una Comisión especial, que concede incrementos de acuerdo a la inflación registrada durante un cierto período de tiempo.

Otro factor que se podría utilizar para indexar las pensiones, es el Índice de Precios al Consumidor, ya que éste garantizaría el poder adquisitivo de estos beneficios por jubilación.

Se han mencionado dos índices, sin embargo se pueden utilizar cualesquiera otros, siempre y cuando estén íntimamente relacionados al elemento inflacionario.

El desarrollo de esta pensión está basado en las ecuaciones obtenidas en la sección anterior, pero considerando además alguno de los índices mencionados. De esta forma, se tiene lo siguiente:

Sea  $P_I$  = Pensión Tradicional Indexada.  
 $K$  = Índice o Tasa de Crecimiento Anual elegido.

Entonces:

$$P_I = z-x / \ddot{a}_x^{(12)} \cdot [1+K]^{z-x} \quad (4.22)$$

o bien:

$$P_I = z-x E_x \cdot \left[ \ddot{a}_z - \frac{11}{24} \right] \cdot (1+K)^{z-x} \quad (4.23)$$

Esta expresión nos indica el valor presente del beneficio a otorgar, consistente en una renta de \$ 1.00 pagadera a un empleado de edad actual ( $X$ ), con pagos de \$ 1/12 al principio de cada mes a partir de la edad de jubilación ( $Z$ ), durante la vida del pensionista, beneficio que se incrementará de acuerdo al crecimiento anual en el índice elegido.

Es claro que el índice  $K$ , será uno de los suuestos utilizados en el cálculo y deberá ajustarse cada año conforme a su comportamiento real.

De este modo, si el beneficio a otorgar por la empresa que instale un plan de pensiones de este tipo es igual a  $B$ , en lugar de \$ 1.00, entonces la Obligación Total,  $OT$ , se calcula de la siguiente manera:

$$OT = B \times P_I \quad (4.24)$$

donde OT nos indica la cantidad que debe reservar la empresa en este momento, es decir, a edad actual de cada empleado (X), para garantizar a cada uno de ellos, a partir de la edad de jubilación, un beneficio B, que se incrementará de acuerdo al crecimiento en el índice seleccionado. Este beneficio se conoce como Pensión Tradicional Indexada.

#### 4.3 PENSIONES BASADAS EN ANUALIDADES VARIABLES

Para iniciar el análisis de una pensión de este tipo, se deben desarrollar antes algunos tipos de anualidades variables y posteriormente elegir entre ellas la que provee el beneficio más conveniente para el fin que se persigue, es decir, el de una pensión acorde con la inflación.

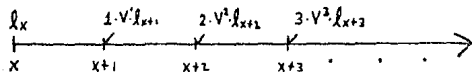
##### 4.3.1 ANUALIDADES VARIABLES

A) Anualidades Variables.- Son aquellas en las cuales los pagos no son constantes, por ejemplo de \$ 1.00 por año, sino que varían de tiempo en tiempo. Estas variaciones pueden ser incrementos, que es el caso que nos interesa, o decrementos.

Para desarrollar los diferentes tipos de anualidades variables, es conveniente hacerlo en función de las anualidades niveladas o tradicionales vistas en la primera parte de este capítulo.

B) Anualidad Contingente Vitalicia Creciente Vencida...

el valor presente de una renta anual perpetua en forma vendida a una persona de edad ( $X$ ), con pagos de \$ 1.00 a edad ( $X+1$ ), de \$ 2.00 a edad ( $X+2$ ), de \$ 3.00 a edad ( $X+3$ ), incrementándose en \$ 1.00 para cada año que el rentista sobrevive. Se denota por  $(IA)_x$ . Obsérvese la siguiente línea de tiempo:



De aquí se deduce la siguiente ecuación:

$$l_x \cdot (IA)_x = 1 \cdot V^1 \cdot l_{x+1} + 2 \cdot V^2 \cdot l_{x+2} + 3 \cdot V^3 \cdot l_{x+3} + \dots$$

Esta expresión, a su vez, se puede poner en función de una suma de anualidades vitalicias diferidas, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (IA)_x \cdot l_x &= 1 \cdot V^1 \cdot l_{x+1} + 1 \cdot V^1 \cdot l_{x+2} + 1 \cdot V^1 \cdot l_{x+3} + \dots = {}_0/a_x \\ &\quad 1 \cdot V^1 \cdot l_{x+1} + 1 \cdot V^2 \cdot l_{x+2} + \dots = {}_1/a_x \\ &\quad \quad 1 \cdot V^2 \cdot l_{x+2} + \dots = {}_2/a_x \\ &\quad \quad \quad \vdots \\ \hline (IA)_x \cdot l_x &= 1 \cdot V^1 \cdot l_{x+1} + 2 \cdot V^1 \cdot l_{x+2} + 3 \cdot V^1 \cdot l_{x+3} + \dots = \sum_{t=0}^{\infty} t/a_x \end{aligned}$$

Entonces:

$$(IA)_x = \sum_{t=0}^{\infty} t/a_x \quad (4.25)$$

En Valores conmutados:

$$(Ia)_x = \sum_{t=0}^{w-x} \frac{N_{x+t+1}}{D_x}$$

Ahora se define un valor conmutado que agrupe las  $N_x$ , sea:

$$S_x = \sum_{t=0}^{w-x} N_{x+t} \quad y \quad S_{x+1} = \sum_{t=0}^{w-x} N_{x+t+1}$$

Finalmente:

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x} \quad (4.26)$$

C) Anualidad Contingente Vitalicia Creciente Anticipada.-

Es el valor presente de una renta anual pagadera en forma anticipada a una persona de edad ( $x$ ), con pagos de \$ 1.00 a edad ( $x$ ), de \$ 2.00 a edad ( $x+1$ ), de \$ 3.00 a edad ( $x+2$ ), incrementándose en \$ 1.00 para cada año que el rentista sobrevive. Se denota por  $(I\ddot{a})_x$ . La ecuación que representa esta anualidad, es la siguiente:

$$(I\ddot{a})_x \cdot l_x = 1 \cdot v^0 \cdot l_x + 2 \cdot v^1 \cdot l_{x+1} + 3 \cdot v^2 \cdot l_{x+2} + 4 \cdot v^3 \cdot l_{x+3} + \dots$$

Esta expresión, como en el caso de una anualidad vencida de este tipo, se puede representar como una suma de anualidades vitalicias diferidas:

$$\begin{aligned} (I\ddot{a})_x \cdot l_x &= 1 \cdot v^0 \cdot l_x + 1 \cdot v^1 \cdot l_{x+1} + 1 \cdot v^2 \cdot l_{x+2} + \dots = 0/\ddot{a}_x \\ &\quad 1 \cdot v^1 \cdot l_{x+1} + 1 \cdot v^2 \cdot l_{x+2} + \dots = 1/\ddot{a}_x \\ &\quad 1 \cdot v^2 \cdot l_{x+2} + \dots = 2/\ddot{a}_x \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$$(I\ddot{a})_x \cdot l_x = 1 \cdot v^0 \cdot l_x + 2 \cdot v^1 \cdot l_{x+1} + 3 \cdot v^2 \cdot l_{x+2} + \dots = \sum_{t=0}^{w-x} t/\ddot{a}_x$$

Así:

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{t=0}^{w-x} t/\ddot{a}_x \quad (4.27)$$

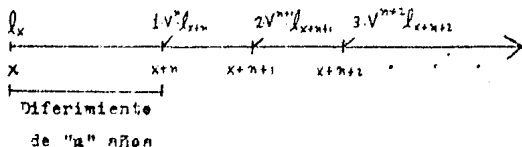
En valores commutados:

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{t=0}^{n-x} \frac{N_{x+t}}{D_x}$$

o bien:

$$(I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x} \quad (4.28)$$

D) Anualidad Contingente Vitalicia Creciente Diferida "n" años pagadera en forma anticipada.- Es el valor presente de una renta anual pagadera a una persona de edad (x), a partir de la edad (x+n), con pagos al principio de cada año, de \$ 1.00 a edad (x+n), de \$ 2.00 a edad (x+n+1), de \$ 3.00 a edad (x+n+2), incrementándose en \$ 1.00 por cada año que el rentista sobrevive. Se denota por  $n/(I\ddot{a})_x$ . Considérese la siguiente línea de tiempo:



De est. gráfico se deduce la siguiente expresión:

$$n/(I\ddot{a})_x \cdot l_x = 1 \cdot V^n l_{x+n} + 2 \cdot V^{n+1} l_{x+n+1} + 3 \cdot V^{n+2} l_{x+n+2} + \dots$$

que a su vez se puede escribir como una suma de anualidades vitalicias diferidas:

$$\begin{aligned} n/(I\ddot{a})_x \cdot l_x &= 1 \cdot V^n l_{x+n} + 1 \cdot V^{n+1} l_{x+n+1} + 1 \cdot V^{n+2} l_{x+n+2} + \dots = n/\ddot{a}_x \\ &\quad 1 \cdot V^{n+1} l_{x+n+1} + 1 \cdot V^{n+2} l_{x+n+2} + \dots = {}_{n+1}/\ddot{a}_x \\ &\quad 1 \cdot V^{n+2} l_{x+n+2} + \dots = {}_{n+2}/\ddot{a}_x \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

$$n/(I\ddot{a})_x \cdot l_x = 1 \cdot V^n l_{x+n} + 2 \cdot V^{n+1} l_{x+n+1} + 3 \cdot V^{n+2} l_{x+n+2} + \dots = \sum_{t=n}^{\infty} t/\ddot{a}_x$$

Así:

$$n/(I\ddot{a})_x = \sum_{t=n}^{w-x} t/\ddot{a}_x \quad (4.29)$$

En valores conmutados:

$$n/(I\ddot{a})_x = \sum_{t=0}^{w-x} \frac{N_{x+n+t}}{D_x}$$

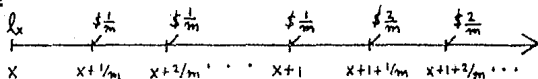
o bien:

$$n/(I\ddot{a})_x = \frac{S_{x+n}}{D_x} \quad (4.30)$$

Al igual que en el caso de las anualidades niveladas, se necesita desarrollar un tipo de anualidad creciente pero pagadera "m" veces al año y de ahí deducir una pensión mensual vitalicia creciente.

E) Anualidades Contingentes Vitalicias Crecientes pagaderas "m" veces al año.- Cuando las anualidades variables son pagaderas en fracciones de año, se pueden presentar dos casos:

a) La tasa de pago es constante durante el año y el pago anual total es hecho en "m" pagos iguales, ocurriendo los incrementos o decrementos al principio o el final del año. Para ejemplificar lo anterior, obsérvese la siguiente gráfica:



Una anualidad variable de este tipo denotada por  $(IA)_x^{(m)}$ , se puede representar por la siguiente ecuación:

$$(IA)_x^{(m)} \cdot l_x = \frac{1}{m} \cdot V^{1/m} \cdot l_{x+1/m} + \frac{1}{m} \cdot V^{2/m} \cdot l_{x+2/m} + \dots + \frac{1}{m} \cdot V^1 \cdot l_{x+1} \\ + \frac{2}{m} \cdot V^{1+1/m} \cdot l_{x+1+1/m} + \frac{2}{m} \cdot V^{1+2/m} \cdot l_{x+1+2/m} + \dots$$

Al igual que en el caso de las anualidades variables pagaderas una vez al año, la expresión anterior se puede representar por una suma de anualidades vitalicias diferidas, de la siguiente forma:

$$(IA)_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{w-x} t / a_x^{(m)} \quad (4.31)$$

Utilizando la aproximación de Woolhouse y valores conmutados:

$$(IA)_x^{(m)} \doteq \sum_{t=0}^{w-x} \frac{N_{x+t+1} + \frac{m-1}{2m} D_{x+t}}{D_x} \quad (4.32)$$

o bien:

$$(IA)_x^{(m)} \doteq \frac{S_{x+1} + \frac{m-1}{2m} N_x}{D_x} \quad (4.33)$$

Una anualidad de este tipo, pero pagadera en forma anticipada, está dada por la siguiente ecuación:

$$(I\ddot{a})_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{w-x} t / \ddot{a}_x^{(m)} \quad (4.34)$$



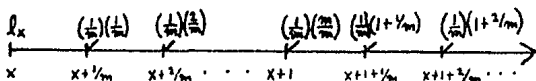
Utilizando la aproximación de Woolhouse y valores conmutados:

$$(I\ddot{a})_x^{(m)} \doteq \sum_{t=0}^{w-x} \frac{N_{x+t} - \frac{m-1}{2m} D_{x+t}}{D_x} \quad (4.35)$$

o bien:

$$(I\ddot{a})_x^{(m)} \doteq \frac{S_x - \frac{m-1}{2m} N_x}{D_x} \quad (4.36)$$

b) La tasa de pago crece o decrece "m" veces al año y el pago anual total es hecho en "m" pagos iguales, como en la siguiente línea de tiempo:



Esta anualidad creciente, es pagadera a una tasa de  $1/m$  por año al final de los primeros  $1/m$  años, de  $2/m$  por año al final de los segundos  $1/m$  años y así sucesivamente. Si esta anualidad es emitida a edad ( $X$ ), el primer pago vencido a edad  $(X + 1/m)$  será  $\$ 1/m^2$ , y como este pago cubre un período de  $1/m$  años y la tasa de pago durante este primer período es  $1/m$  por año, entonces el segundo pago a edad  $(X + 2/m)$  será  $\$ 2/m^2$  y así sucesivamente. Así, el valor presente de esta renta, se puede representar por:

$$(I^{(m)}a)_x^{(m)} = \sum_{t=1}^{w-x} \frac{\frac{t}{m} \cdot D_{x+t/m}}{D_x} \quad (4.37)$$

Si se desarrolla la sumatoria mediante la fórmula de Woolhouse, hasta el término que involucra la 1.ª derivada, se tiene:

$$(I^{(m)}a)_x^{(m)} = \frac{1}{D_x} \left\{ \sum_{t=0}^{w-x} t \cdot D_{x+t} + \frac{m-1}{2m} \left[ t \cdot D_{x+t} \right]_{t=0} + \frac{m^2-1}{12m^2} \left[ \frac{d}{dt} (t \cdot D_{x+t}) \right]_{t=0} - \dots \right\}$$

Como:

$$\frac{d}{dt} (t \cdot D_{x+t})_{t=0} = D_x$$

Entonces:

$$(I^{(m)}a)_x^{(m)} \doteq (Ia)_x + \frac{m^2-1}{12m^2} \quad (4.38)$$

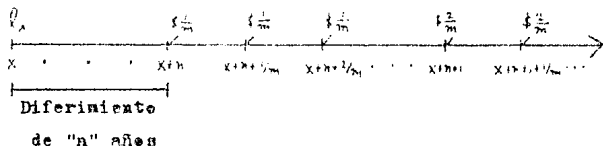
En el caso de una anualidad anticipada de este tipo, se llega a la siguiente ecuación:

$$(I^{(m)}\ddot{a})_x^{(m)} \doteq (I\ddot{a})_x - \frac{m^2-1}{12m^2} \quad (4.39)$$

F) Anualidad Contingente Vitalicia Creciente Diferida "n" años pagadera "m" veces al año.- Este tipo de renta, también presenta dos casos distintos, ya que es pagadera en fracciones de año, pero contemplando además un período de diferimiento de "n" años, antes de que los pagos se inicien. Estos casos son:

a) La tasa de pago es constante durante el año, y el pago

cuando todo es hecho en "m" pagos iguales, ocurriendo los incrementos o decrementos al principio o al final del año, considerando un diferimiente de "n" años, como en la siguiente línea de tiempo, para el caso anticipado:



Si se denota esta anualidad por  $n/(I\ddot{a})_x^{(m)}$ , entonces se puede deducir la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} n/(I\ddot{a})_x^{(m)} \cdot l_x &= \frac{1}{m} \cdot V^n \cdot l_{x+n} + \frac{1}{m} \cdot V^{n+1/m} \cdot l_{x+n+1/m} + \frac{1}{m} \cdot V^{n+2/m} \cdot l_{x+n+2/m} \\ &+ \dots + \frac{2}{m} \cdot V^{n+1} \cdot l_{x+n+1} + \frac{2}{m} \cdot V^{n+1+1/m} \cdot l_{x+n+1+1/m} \\ &+ \frac{2}{m} \cdot V^{n+1+1/m} \cdot l_{x+n+1+2/m} + \dots \end{aligned}$$

Si se desarrolla esta expresión, se puede escribir como una suma de anualidades vitalicias diferidas, como sigue:

$$n/(I\ddot{a})_x^{(m)} = n / \sum_{t=0}^{n-x} t/d_x^{(m)} \quad (4.40)$$

Si se utiliza la aproximación de Woolhouse y valores conmutados:

$$n/(I\ddot{a})_x^{(m)} \approx \sum_{t=0}^{n-x} \frac{N_{x+t} - \frac{m-1}{2m} D_{x+t}}{D_x} \quad (4.41)$$

o de otro modo:

$$n/(I\ddot{a})_x^{(m)} \doteq \frac{S_{x+n} - \frac{m-1}{2m} N_{x+n}}{D_x} \quad (4.42)$$

Otra forma de expresar esta fórmula es multiplicando y dividiendo por el factor  $D_{x+n}$ , y reescribiendo de la siguiente manera:

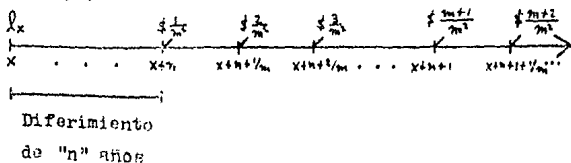
$$n/(I\ddot{a})_x^{(m)} \doteq \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{S_{x+n} - \frac{m-1}{2m} N_{x+n}}{D_{x+n}} \quad (4.43)$$

de donde:

$$n/(I\ddot{a})_x^{(m)} \doteq nE_x \cdot (I\ddot{a})_{x+n}^{(m)} \quad (4.44)$$

Esta ecuación calcula el valor presente de una anualidad vitalicia creciente diferida "n" años, con "m" pagos iguales de  $\$ 1/m$  durante el primer año, "m" pagos iguales de  $\$ 2/m$  durante el segundo año y así sucesivamente durante la vida del rentista.

b) La tasa de pago crece o decrece "m" veces al año y el pago anual total es hecho en "m" pagos iguales, considerando un período de diferimiento de "n" años, como en la siguiente gráfica, para el caso anticipado:



Como se puede observar, esta anualidad es creciente y pagadera a una tasa de  $1/m$  por año, al principio de los primeros  $1/m$  años, de  $2/m$  por año, al principio de los segundos  $1/m$  años, y así sucesivamente durante la vida del rentista, considerando anteriormente un período de diferimiento de "n" años. Si esta anualidad se emite a edad (X), el primer pago anticipado a edad  $(X+n)$  será  $\$ 1/m^2$ , y como este pago cubre un período de  $1/m$  años y la tasa de pago durante este primer período es  $1/m$  por año, entonces el segundo pago a edad  $(X+n+1/m)$  será  $\$ 2/m^2$  y así sucesivamente durante la vida del rentista. De este modo, el valor presente de esta renta, se puede representar por la siguiente ecuación:

$$n/(I^{(m)}\ddot{a})_X^{(m)} = \sum_{t=0}^{w-x} \frac{\frac{t}{m} + 1}{m^2} D_{X+n+t/m} \quad (4.45)$$

Si se desarrolla la sumatoria mediante la aproximación de Woolhouse, hasta el término que involucra la derivada, se obtiene:

$$n/(I^{(m)}\ddot{a})_X^{(m)} = \frac{1}{D_X} \left\{ \sum_{t=0}^{w-x} t \cdot D_{X+n+t} + \frac{m-1}{2m} \left[ t \cdot D_{X+n+t} \right]_{t=0} - \frac{m^2-1}{12m^2} \left[ \frac{d}{dt} (t \cdot D_{X+n+t}) \right]_{t=0} - \dots \right\} \quad (4.46)$$

Y finalmente:

$$n/(I^{(m)}\ddot{a})_X^{(m)} \approx n/(I\ddot{a})_X - \frac{m^2-1}{12m^2} \quad (4.47)$$

Otro modo de escribir esta ecuación, es multiplicar y dividir (4.46) por el factor  $D_{x+n}$  y reorganizar como sigue:

$$n/(I^{(m)}\ddot{a})_x^{(m)} \doteq \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \left[ \frac{S_{x+n}}{D_{x+n}} - \frac{m^2-1}{12m^2} \right] \quad (4.48)$$

de donde:

$$n/(I^{(m)}\ddot{a})_x^{(m)} \doteq n E_x \cdot \left[ (I\ddot{a})_{x+n} - \frac{m^2-1}{12m^2} \right] \quad (4.49)$$

o también:

$$n/(I^{(m)}\ddot{a})_x^{(m)} \doteq n E_x \cdot (I^{(m)}\ddot{a})_{x+n}^{(m)} \quad (4.50)$$

Esta ecuación obtiene el valor presente de una anualidad vitalicia creciente diferida "n" años, con pagos de \$  $1/m^2$  a edad  $(x+n)$ , de \$  $2/m^2$  a edad  $(x+n+1/m)$ , y así sucesivamente durante la vida del rentista.

Por otra parte, las ecuaciones (4.44) y (4.50), tienen la forma de pensiones mensuales vitalicias crecientes, que con objeto de ser consistentes con la notación utilizada, se renombrarán como sigue:

Sea:

$X$  = Edad actual del empleado.

$X+n = Z$  = Edad de jubilación del empleado.

$n = Z - X$  = Años de servicio por transcurrir entre la edad actual y la edad de jubilación del empleado.

$m = 12$  = Número de pagos en el año.

De este modo, (4.44) queda así:

$$z-x / (I\ddot{a})_x^{(12)} \doteq z-x E_x \cdot (I\ddot{a})_z^{(12)} \quad (4.51)$$

O bien, en valores conmutados:

$$z-x / (I\ddot{a})_x^{(12)} \doteq \frac{D_z}{D_x} \cdot \left[ \frac{S_z - \frac{11}{24} N_z}{D_z} \right] \quad (4.52)$$

Y la ecuación (4.50) queda como sigue:

$$z-x / (I^{(12)}\ddot{a})_x^{(12)} \doteq z-x E_x \cdot (I^{(12)}\ddot{a})_z^{(12)} \quad (4.53)$$

O bien, en valores conmutados:

$$z-x / (I^{(12)}\ddot{a})_x^{(12)} \doteq \frac{D_z}{D_x} \cdot \left[ \frac{S_z}{D_z} - \frac{143}{1728} \right] \quad (4.54)$$

#### 4.3.2 PENSIONES BASADAS EN ANUALIDADES VARIABLES

Una vez desarrolladas las anualidades variables anteriores, ya se está en posición de construir pensiones que consideren incrementos en el monto del beneficio en la forma de anualidades crecientes.

El desarrollo de las pensiones de este tipo, se basa en los dos casos que se presentan en una anualidad contingente vitalicia creciente diferida "n" años pagadera "m" veces al año, esto es, que para su cálculo se ocuparán las cuatro últimas fórmulas obtenidas en la sección anterior.

De este modo, se presentan dos casos:

a) La tasa de pago es constante durante el año y el pago anual total es hecho en 12 pagos iguales, ocurriendo los incrementos (que es el caso que interesa) al principio del año, considerando un diferimiento de "n" años. De este modo, sea:

PVA = Pensión basada en una anualidad variable de tipo creciente, caso B.

Entonces:

$$PVA = {}_{z-x}E_x \cdot (I\ddot{a})_z^{(12)} \quad (4.55)$$

o bien:

$$PVA = \frac{D_z}{D_x} \cdot \left[ \frac{S_z - \frac{11}{24} N_z}{D_z} \right] \quad (4.56)$$

Esta ecuación calcula el valor presente de una pensión mensual vitalicia creciente diferida "n" años, con 12 pagos iguales de \$ 1/12 durante el primer año, 12 pagos iguales de \$ 2/12 durante el segundo año y así sucesivamente durante la vida del jubilado.

b) La tasa de pago crece (caso que interesa), 12 veces al año y el pago anual total es hecho en 12 pagos iguales, considerando un período de diferimiento de "n" años. Así, sea:



PVb = Pensión basada en una anualidad variable de tipo creciente, caso b.

Entonces:

$$PVb = z - x E_x \cdot (1^{(12)}) \ddot{a}_z^{(12)} \quad (4.57)$$

o bien:

$$PVb = \frac{D_1}{D_x} \cdot \left[ \frac{S_2}{D_2} - \frac{143}{1728} \right] \quad (4.58)$$

Esta expresión obtiene el valor presente de una pensión mensual vitalicia creciente diferida "n" años, con pagos de \$  $1/(12)^2$  a edad (Z), de \$  $2/(12)^2$  a edad  $(Z + 1/12)$ , y así sucesivamente durante la vida del jubilado.

Cabe hacer notar que para poder utilizar cualquiera de los dos casos anteriores de pensiones crecientes, es indispensable la presencia de la inflación, ya que estas pensiones se incrementan como una progresión aritmética o geométrica independientemente de que exista este elemento, sin el cual las rentas aumentarían innecesariamente elevando los costos del plan de pensiones. Esta es la limitante de este tipo de pensiones.

Por otra parte, si el beneficio a otorgar por una determinada empresa que implemente un plan de pensiones de este

tipo, es igual a B, entonces la Obligación Total, OT, se calcula de la siguiente manera:

$$OT = B \times PVa \quad (4.59)$$

o bien:

$$OT = B \times PVb \quad (4.60)$$

Lo anterior, según sea el caso de la pensión elegida.

La cantidad OT obtenida, indica el monto que debe reservar la empresa en este momento, es decir, a edad actual de cada empleado (X), para garantizar a cada uno de ellos a partir de la edad de jubilación (Z), un beneficio que consiste en una pensión basada en anualidades variables.

CAPITULO V

EJEMPLOS

## CAPITULO V

### EJEMPLOS

En el presente capítulo se desarrollan los ejemplos de dos tipos de pensiones variables y con objeto de analizar la conveniencia de su implementación, se incluye el cálculo de una pensión tradicional, para de esta forma tener una base de comparación.

De este modo, las pensiones consideradas en los ejemplos son:

1.- Pensión Tradicional, en la cual el beneficio otorgado por la empresa a los empleados que alcancen la edad de jubilación es de \$ 1.00 anual constante pagadero en forma mensual mientras el rentista esté con vida.

2.- Pensión Tradicional Indexada, en la que el beneficio anual considerado es de \$ 1.00 el primer año pagadero mensual, incrementándose de acuerdo al índice de crecimiento anual en el Salario Mínimo.

3.- Pensión basada en una Anualidad Variable de tipo Creciente, con tasa de pago constante durante el año, en la cual el beneficio consiste en \$ 1.00 anual inicial pagadero mensual, y después creciente año con año, en forma de progresión aritmética, con razón igual a uno, esto es, \$ 2.00 el segundo año, \$ 3.00 el tercer año y así sucesivamente,

todos pagaderos mensualmente, durante la vida del jubilado.

Los ejemplos se manejan comparativamente dentro de un sólo problema, en el cual se calcula el monto de las obligaciones generadas por cada empleado, es decir, el valor presente de cada uno de los tres tipos de pensiones que conforman los planes, valuados anualmente a edad actual de cada persona, así como el Costo anual de los planes, conocido como Costo Normal, considerando un período de veinte años, todo esto con objeto de tener una base para poder tomar una decisión acerca del plan más conveniente de instalar.

#### PROBLEMA

Una empresa desea implementar un plan de pensiones por jubilación, como parte de las prestaciones otorgadas a sus empleados. Este plan debe proporcionar una pensión con la característica de que no pierda su poder adquisitivo con el paso del tiempo, es decir, que este beneficio mantenga en lo posible el nivel de vida de sus empleados después de la jubilación. La empresa desea también que el costo del plan esté de acuerdo con su capacidad económica y que el financiamiento del mismo se realice en un plazo de veinte años.

Con este motivo, consulta a un Actuario, diseñador de planes de pensiones, quien le ofrece las siguientes alternativas:

A) Plan de Pensión Tradicional Indexada al Salario Mínimo,

que proveerá incrementos en el monto del beneficio de acuerdo al crecimiento en el índice del Salario Mínimo.

B) Plan de Pensión basada en una Anualidad Variable de tipo Creciente, con tasa de pago constante durante el año, en el cual el monto de la pensión crecerá anualmente en la forma de una progresión aritmética.

C) Plan de Pensión Tradicional, en base a anualidades niveladas, que proveerá un beneficio fijo durante la vida del jubilado, en caso de que los costos de los dos planes anteriores resulten ser demasiado altos para la capacidad económica de la empresa.

Los datos de los empleados de la empresa, ordenados de acuerdo a su edad, de menor a mayor, son los siguientes:

NUMERO DE EMPLEADO	EDAD ACTUAL (X)	EDAD DE JUBILACION (Z)	AÑOS A LA JUBILACION (Z - X)
1	35	65	30
2	32	62	30
3	37	67	30
4	38	68	30
5	40	70	30
6	47	77	30
7	45	75	30
8	42	72	30
9	50	80	30
10	55	85	30

Para que pueda tomar una decisión, el Actuario presenta a la Institución los siguientes cuadros comparativos de los tres planes anteriores:

1.- Cuadros de valores presentes de cada empleado por edad, año y tipo de pensión.

2.- Cuadros de pagos de beneficios a los empleados que alcanzan la edad de jubilación en el plazo escogido para el financiamiento del plan, por edad, año y tipo de pensión. Se incluye también un cuadro que compara los beneficios de los tres planes.

3.- Cuadros de costos de cada uno de los planes por año y tipo de pensión, esto es, de Costos Normales, en los que se incluyen los elementos utilizados en su cálculo, como son: Valores presentes de las pensiones, Reserva o Fondo de Jubilación al inicio y al final del año, Rendimiento de dicha Reserva, Pagos a jubilados y Valor presente de la anualidad utilizada en el financiamiento del plan. Además se incluyen dos cuadros que comparan los costos de los tres planes.

Para la obtención de estos cuadros se utilizan tanto bases como hipótesis de cálculo, así como un Método Actuarial de Financiamiento, los cuales se mencionan a continuación.

#### BASES DE CALCULO.

En general, una valuación como la presentada en este cenitu



lo, se hace en base a los beneficios por jubilación que se establecen en las condiciones generales de trabajo de cada empresa en particular, sin embargo, para efectos de este problema, se utiliza el beneficio de \$ 1.00 otorgado como pensión anual vitalicia, pagadera mensualmente a los empleados que lleguen a los 65 años de edad, independientemente de la antigüedad que tengan en la empresa. Esta pensión variará de acuerdo con el plan utilizado.

#### HIPOTESIS DE CALCULO.

- a) Base Demográfica; Tabla de Mortalidad UP - 1984, tanto para empleados activos como para jubilados.
- b) Base Financiera; 8% anual compuesto, antes y después de la jubilación.
- c) Tasa de Rendimiento del Fondo; 8% anual compuesto.
- d) Índice de Incremento en el Salario Mínimo; 15% anual compuesto.

#### METODO ACTUARIAL DE FINANCIAMIENTO.

El sistema utilizado es el Método Individual, que consiste en valorar las obligaciones de cada empleado por año, sumarlas y así obtener el valor presente de obligaciones total, a partir del cual se determina el monto de la aportación anual o Costo Normal.

Este Costo Normal se obtiene de dividir el Valor presente de obligaciones total menos la reserva constituida al final del año, entre el valor presente de una anualidad anticipada contingente temporal a 20 años, que es el plazo elegido para financiar cada uno de los planes.

La reserva constituida al final del año ( $t$ ), es la reserva al inicio del año, o lo que es equivalente, al final del año ( $t-1$ ), más el rendimiento anual obtenido por su inversión a la tasa de interés de cálculo, menos los pagos hechos a jubilados en el año, cuando éste sea el caso.

El valor presente de la anualidad contingente anticipada temporal a 20 años se puede deducir de la fórmula (4.6) correspondiente a una anualidad vitalicia anticipada, ya que la diferencia entre ambas es sólo el plazo de los pagos, así:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{w-x} t E_x$$

y si  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$  denota el valor presente de una anualidad contingente anticipada temporal a "n" años, entonces:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} t E_x \quad (5.1)$$

de donde:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{D_{x+t}}{D_x}$$

y dado que;

$$N_x = \sum_{t=0}^{w-x} D_{x+t} \quad y \quad N_{x+n} = \sum_{t=n}^{w-x} D_{x+t}$$

entonces:

$$N_x - N_{x+n} = \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}$$

Por lo tanto;

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \quad (5.2)$$

Como el plazo en el que se desea financiar el plan es de 20 años, entonces la anualidad queda:

$$\ddot{a}_{x:\overline{20}|} = \frac{N_x - N_{x+20}}{D_x} \quad (5.3)$$

Por otra parte, para obtener la edad ( $X$ ) a partir de la cual se va a iniciar el financiamiento del plan, se utiliza una edad promedio determinada de la siguiente forma:

Edad más baja del grupo de empleados:  $X_1 = 35$

Edad más alta del grupo de empleados:  $X_{10} = 55$

Entonces:

$$X = \frac{X_1 + X_{10}}{2} = 45$$

y considerando que la edad de jubilación para todo el grupo es  $Z = 65$ , el valor presente de la anualidad queda así:

$$\ddot{a}_{x:\overline{Z-X}|} = \frac{N_x - N_{x+(Z-X)}}{D_x} \quad (5.4)$$

o bien:

$$\ddot{a}_{65:\overline{20}|} = \frac{N_{45} - N_{65}}{D_{45}} \quad (5.5)$$

donde la edad  $Z = 65$  va a quedar fija y la edad  $X$  va a ir variando año con año, es decir, el primer año se utiliza  $X = 45$ , el segundo  $X = 46$  y así sucesivamente hasta  $X = 64$ , edad en la que se cumule el plazo que se va a utilizar para financiar los tres planes considerados en los ejemplos.

Cabe mencionar que también se utiliza la hipótesis de que el grupo participante en los planes es cerrado, esto es, se supone que en el período de veinte años, no se registraron altas ni bajas de personal.

#### SOLUCION.

El primer grupo de cuadros, que como se mencionó muestra los valores presentes de cada empleado por edad, año y tipo de pensión, se presenta a continuación de acuerdo a la siguiente clave:

- (1) Número del empleado, de acuerdo al cuadro de datos.
- (2) Edad actual del empleado ( $X$ ).

- (3) Valor Presente Actuarial a edad actual del empleado (X), de una Pensión Tradicional, calculado en base a una anualidad nivelada, según la fórmula (4.21).
- (4) Valor Presente Actuarial a edad actual del empleado (X), de una Pensión Tradicional Indexada al Salario Mínimo, calculado con la ecuación (4.23), donde K es el índice de incremento en este salario, igual a 15% anual compuesto de acuerdo con las hipótesis de cálculo.
- (5) Valor Presente Actuarial a edad actual del empleado (X), de una Pensión basada en una Anualidad Variable, de Tipo Creciente, con tasa de pago constante durante el año, determinado con la expresión (4.52).
- (6) Número de veces que representa la pensión tradicional indexada en relación con la tradicional, esto es, este valor se obtiene de dividir la columna (4) entre la columna (3), renglón por renglón.
- (7) Número de veces que representa la pensión basada en una anualidad variable en relación con la tradicional, es decir, este valor se obtiene dividiendo la columna (5) entre la columna (3), renglón por renglón.

## CUADROS DE VALORES PRESENTES POR EDAD, AÑO Y TIPO DE PENSION

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
<b>1er. AÑO</b>						
1	35	0 6548	42 2525	4 7662	66 21	7 22
2	36	0 7091	40 7719	5 1547	57 59	7 22
3	37	0 7660	39 3492	5 5755	50 06	7 22
4	39	0 8295	36 0772	6 0315	43 54	7 22
5	40	0 9701	31 9247	7 0615	32 02	7 22
6	42	1 1355	28 2911	8 2723	24 29	7 22
7	45	1 4449	23 6225	10 5107	16 27	7 22
8	49	1 9909	19 7954	13 2921	10 76	7 22
9	50	2 1579	17 6227	15 7727	9 14	7 22
10	55	3 2961	13 2246	23 9920	8 05	7 22
<b>TOTAL</b>		<b>13 8111</b>	<b>293 1797</b>	<b>100 5222</b>	<b>21 23</b>	<b>7 22</b>
<b>2o AÑO</b>						
1	36	0 7091	40 7719	5 1547	57 59	7 22
2	37	0 7660	39 3492	5 5755	50 06	7 22
3	38	0 8296	36 0737	6 0315	43 54	7 22
4	39	0 8965	32 9382	6 5257	37 95	7 22
5	41	1 0499	29 0517	7 6427	29 52	7 22
6	43	1 2305	26 6370	8 2591	21 55	7 22
7	45	1 5647	22 2629	11 2924	14 22	7 22
8	49	1 9902	19 6799	14 5707	9 26	7 22
9	51	2 2535	16 6520	17 1319	7 52	7 22
10	56	3 5627	12 4271	26 1490	5 57	7 22
<b>TOTAL</b>		<b>14 9365</b>	<b>276 0622</b>	<b>109 6927</b>	<b>19 12</b>	<b>7 22</b>
<b>3er. AÑO</b>						
1	37	0 7660	39 3492	5 5755	50 06	7 22
2	38	0 8226	37 9722	6 0215	42 51	7 22
3	39	0 8965	35 9292	6 5257	37 26	7 22
4	40	0 9701	31 9246	7 0615	29 07	7 22
5	42	1 1356	28 2911	8 2723	24 29	7 22
6	44	1 2307	26 6370	9 2926	19 42	7 22
7	47	1 6924	22 9934	12 2432	12 29	7 22
8	50	2 1670	19 6227	15 7737	9 14	7 22
9	52	2 5577	15 7269	19 6178	7 15	7 22
10	57	3 9182	11 9867	29 5222	7 06	7 22
<b>TOTAL</b>		<b>16 2701</b>	<b>259 6210</b>	<b>119 4214</b>	<b>15 99</b>	<b>7 22</b>
<b>4o AÑO</b>						
1	38	0 8226	36 9722	6 0215	42 51	7 22
2	39	0 8965	33 9792	6 5257	37 26	7 22
3	40	0 9701	31 9246	7 0615	29 07	7 22
4	41	1 0499	29 0517	7 6427	29 52	7 22
5	43	1 2306	26 6370	8 2591	21 55	7 22
6	45	1 4410	23 6225	10 5107	16 27	7 22
7	48	1 9299	19 7994	13 2921	10 76	7 22
8	51	2 2621	16 6520	17 1319	7 52	7 22
9	53	2 7914	14 9806	20 2459	6 95	7 22
10	58	4 2701	11 9799	31 1490	5 65	7 22
<b>TOTAL</b>		<b>17 6725</b>	<b>244 9928</b>	<b>128 6409</b>	<b>14 86</b>	<b>7 22</b>

## CUADROS DE VALORES PRESENTES POR EDAD, AÑO Y TIPO DE PENSIÓN

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
<b>50. AÑO</b>						
1	39	0 8965	29 9222	6 5257	37 85	7 22
2	40	0 9701	31 9345	7 6615	29 60	7 22
3	41	1 0499	30 0547	7 6427	28 60	7 22
4	42	1 1266	28 2911	8 2722	24 80	7 22
5	44	1 2229	25 0233	9 2020	19 80	7 22
6	46	1 3648	22 2692	11 2004	11 20	7 22
7	49	1 5962	18 6792	14 5207	9 26	7 22
8	52	2 5577	15 7362	18 6172	6 15	7 22
9	54	3 0267	14 0814	22 9319	4 65	7 22
10	59	4 6758	10 3154	34 0258	2 21	7 22
TOTAL		19 2072	230 3893	139 9117	12 02	7 22
<b>60. AÑO</b>						
1	40	0 2701	31 9245	7 0615	22 20	7 22
2	41	1 0499	30 0547	7 6427	28 60	7 22
3	42	1 1266	28 2911	8 2722	24 80	7 22
4	43	1 2306	25 6370	9 9591	21 60	7 22
5	45	1 4440	22 5225	10 5107	16 27	7 22
6	47	1 6964	20 9934	12 2482	12 29	7 22
7	50	2 1672	17 6227	15 2227	9 14	7 22
8	53	2 7814	14 8698	20 1659	6 28	7 22
9	55	3 0881	13 3244	22 2020	4 65	7 22
10	60	5 1171	10 2922	37 2108	2 21	7 22
TOTAL		20 8292	217 6919	150 6496	16 12	7 22
<b>70. AÑO</b>						
1	41	1 0499	30 0547	7 6427	29 60	7 22
2	42	1 1266	28 2911	8 2722	24 80	7 22
3	43	1 2306	25 6370	9 9591	17 65	7 22
4	44	1 3729	22 0762	9 2020	10 62	7 22
5	46	1 5648	22 2692	11 2004	14 23	7 22
6	49	1 8399	19 2024	12 2021	10 26	7 22
7	51	2 2525	15 6720	17 1219	7 80	7 22
8	54	3 0267	14 0814	22 9319	4 65	7 22
9	56	3 5922	12 6721	26 1485	3 42	7 22
10	61	5 6047	9 4027	40 7977	1 70	7 22
TOTAL		72 7318	205 3116	165 4685	9 92	7 22
<b>80. AÑO</b>						
1	42	1 1266	28 2911	8 2722	21 29	7 22
2	43	1 2306	26 6370	9 9591	21 25	7 22
3	44	1 3729	25 0363	9 2020	18 60	7 22
4	45	1 4440	22 7325	9 2020	10 62	7 22
5	47	1 6964	20 9934	10 5107	16 27	7 22
6	49	1 9962	18 6792	12 2482	11 29	7 22
7	52	2 5577	15 7362	15 2227	9 15	7 22
8	55	3 2961	14 3349	18 4128	6 15	7 22
9	57	3 9183	11 8862	22 9319	4 65	7 22
10	62	6 1484	9 2111	34 2552	1 64	7 22
TOTAL		24 7572	192 7092	190 2117	7 60	7 22

## CUADROS DE VALORES PRESENTES POR EDAD, AÑO Y TIPO DE PENSIÓN

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
<b>9o. AÑO</b>						
1	43	1 2306	26 6270	9 3591	21 65	7 28
2	44	1 3329	25 0762	9 7020	18 92	7 28
3	45	1 4440	23 6225	10 5107	16 27	7 28
4	46	1 5649	22 2692	11 3921	13 23	7 28
5	48	1 7298	19 7984	12 3921	10 76	7 28
6	50	2 1670	17 6227	15 7727	9 14	7 28
7	53	2 7914	14 8809	20 2459	5 25	7 28
8	56	3 5922	12 6371	26 1486	3 52	7 28
9	52	4 2721	11 3792	31 1409	2 66	7 28
10	63	6 7552	9 9336	42 1724	1 22	7 28
TOTAL		26 3361	192 8801	106 1048	6 79	7 28
<b>10o. AÑO</b>						
1	44	1 2029	26 0267	9 7020	12 22	7 28
2	45	1 4440	22 5325	10 5107	16 27	7 28
3	46	1 5649	20 2699	11 3904	14 22	7 28
4	47	1 6954	20 9234	12 2482	12 22	7 28
5	49	1 9262	19 6700	14 5307	9 26	7 28
6	51	2 3575	16 6530	17 1318	7 09	7 28
7	54	3 0267	14 0914	22 0212	4 65	7 28
8	57	3 9121	11 9557	29 5222	3 66	7 28
9	52	4 6759	10 8154	36 0259	2 21	7 28
10	64	7 4246	9 5492	54 1172	1 15	7 28
TOTAL		29 4472	172 7477	214 2220	5 27	7 28
<b>11o. AÑO</b>						
1	45	1 4440	23 6225	10 5107	15 27	7 28
2	46	1 5549	22 2699	11 3907	14 22	7 28
3	47	1 6964	20 9234	12 2482	12 22	7 28
4	48	1 8298	19 7984	13 3921	10 76	7 28
5	50	2 1670	17 6227	15 7727	9 14	7 28
6	52	2 5777	15 7360	19 6179	6 15	7 28
7	55	3 2961	12 3246	27 8220	4 05	7 28
8	58	4 2781	11 3792	31 1409	2 66	7 28
9	60	5 1151	10 2903	37 2409	2 01	7 28
10	65	8 1975	9 1975	59 6707	1 00	7 28
TOTAL		32 1575	153 2660	234 0784	5 04	7 28
<b>12o. AÑO</b>						
1	46	1 5649	22 2699	11 3904	14 22	7 28
2	47	1 6964	20 9234	12 2482	12 22	7 28
3	48	1 8398	19 7984	13 3921	10 76	7 28
4	49	1 9962	18 6793	14 5297	9 26	7 28
5	51	2 3575	16 6530	17 1318	7 09	7 28
6	53	2 7914	14 3709	20 2459	5 25	7 28
7	56	3 5922	12 6371	26 1486	3 52	7 28
8	59	4 6759	10 8154	34 0259	2 21	7 28
9	61	5 6947	9 8227	40 7977	1 22	7 28
10	66	9 0093	8 0208	56 9741	1 00	7 28
TOTAL		34 1057	154 5314	246 0955	4 57	7 28



## CUADROS DE VALORES PRESENTES POR EDAD, AÑO Y TIPO DE PENSION

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
<b>13o. AÑO</b>						
1	47	1 6064	20 9224	12 3482	12 29	7 29
2	48	1 8398	19 7994	12 3021	10 76	7 29
3	49	1 9962	18 6793	14 5307	9 74	7 29
4	50	2 1670	17 6227	15 7727	9 14	7 29
5	52	2 5577	15 7269	13 6172	6 15	7 29
6	54	3 0257	14 0214	22 0318	4 45	7 29
7	57	3 9182	11 9862	20 5222	2 06	7 29
8	60	5 1161	10 2003	27 2202	2 01	7 29
9	62	6 1485	9 2511	44 7462	1 82	7 29
10	67	7 8922	7 8022	54 1285	1 00	6 42
<b>TOTAL</b>		<b>25 5525</b>	<b>146 2521</b>	<b>261 2416</b>	<b>4 94</b>	<b>7 21</b>

<b>14o. AÑO</b>						
1	48	1 8398	19 7924	12 2921	10 72	7 29
2	49	1 9962	18 6760	14 5327	9 16	7 29
3	50	2 1670	17 6227	15 7727	9 14	7 29
4	51	2 3535	16 6520	17 1318	7 02	7 29
5	53	2 7814	14 8909	20 2450	5 25	7 29
6	55	3 2961	13 3246	22 9920	4 25	7 29
7	58	4 2721	11 2709	21 1402	2 66	7 29
8	61	5 6047	9 8927	40 2972	1 25	7 29
9	63	6 7552	9 9228	49 1724	1 22	7 29
10	68	7 8922	7 8022	61 4225	1 00	6 42
<b>TOTAL</b>		<b>38 6752</b>	<b>130 6920</b>	<b>277 6107</b>	<b>3 69</b>	<b>7 12</b>

<b>15o. AÑO</b>						
1	49	1 9962	19 6793	14 5307	9 26	7 29
2	50	2 1670	17 6227	15 7727	9 14	7 29
3	51	2 3535	16 6520	17 1318	7 02	7 29
4	52	2 5577	15 7269	13 6172	6 15	7 29
5	54	3 0267	14 0214	22 0318	4 45	7 29
6	56	3 5922	12 6271	25 1163	2 52	7 29
7	59	4 6758	10 8154	34 0350	2 31	7 29
8	62	6 1485	9 2511	44 7557	1 52	7 29
9	64	7 4346	8 5497	54 1172	1 15	7 29
10	69	7 4011	7 4011	49 7812	1 00	6 42
<b>TOTAL</b>		<b>41 3534</b>	<b>131 5282</b>	<b>295 9244</b>	<b>3 18</b>	<b>7 16</b>

<b>16o. AÑO</b>						
1	50	2 1670	17 6227	15 7727	9 14	7 29
2	51	2 3535	16 6520	17 1318	7 02	7 29
3	52	2 5577	15 7269	13 6172	6 15	7 29
4	53	2 7814	14 8909	20 2450	5 25	7 29
5	55	3 2961	13 3246	22 9920	4 25	7 29
6	57	3 9182	11 9862	28 5222	2 06	7 29
7	60	5 1161	10 2003	37 2202	2 01	7 29
8	63	6 7552	9 9227	49 1724	1 22	7 29
9	65	8 1975	9 1975	59 6707	1 00	7 29
10	70	7 1952	7 1952	46 1711	1 00	6 42
<b>TOTAL</b>		<b>44 3721</b>	<b>124 9412</b>	<b>316 5295</b>	<b>2 02</b>	<b>7 14</b>

## CUADROS DE VALORES PRESENTES POR EDAD, AÑO Y TIPO DE PENSION

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
<b>17o. AÑO</b>						
1	51	2 3535	16 6520	17 1318	7 08	7 28
2	52	2 5577	15 7269	19 6178	6 15	7 23
3	53	2 7814	14 8909	20 2459	5 25	7 29
4	54	3 0267	14 0814	22 0318	4 65	7 28
5	56	3 5923	12 6371	26 1486	3 52	7 28
6	58	4 2791	11 3798	31 1409	2 68	7 29
7	61	5 6047	9 8027	40 7977	1 75	7 28
8	64	7 4346	8 5497	54 1173	1 15	7 29
9	66	8 0008	8 0008	56 8741	1 00	7 11
10	71	6 9862	6 9862	43 6088	1 00	6 24
TOTAL		46 6160	118 7085	330 7147	2 55	7 07
<b>18o. AÑO</b>						
1	52	2 5577	15 7269	19 6178	6 15	7 29
2	53	2 7814	14 8909	20 2459	5 25	7 29
3	54	3 0267	14 0814	22 0318	4 65	7 29
4	55	3 2961	13 3346	23 9930	4 05	7 29
5	57	3 9183	11 9863	28 5222	3 06	7 29
6	59	4 6758	10 8154	34 0358	2 31	7 29
7	62	6 1425	9 3511	44 7557	1 52	7 28
8	65	8 1275	8 1975	59 6707	1 00	7 29
9	67	7 8028	7 8028	54 1285	1 00	6 94
10	72	6 7742	6 7742	41 1068	1 00	6 67
TOTAL		49 1790	117 9611	347 1022	2 30	7 06
<b>19o. AÑO</b>						
1	53	2 7814	14 8909	20 2459	5 25	7 28
2	54	3 0267	14 0814	22 0318	4 65	7 28
3	55	3 2961	13 3346	23 9930	4 05	7 28
4	56	3 5923	12 6371	26 1486	3 52	7 28
5	58	4 2791	11 3798	31 1409	2 68	7 29
6	60	5 1161	10 2903	37 2409	2 01	7 28
7	63	6 7552	9 9338	49 1724	1 32	7 28
8	66	8 0008	9 0008	56 8741	1 00	7 11
9	68	7 6033	7 6033	51 4325	1 00	6 74
10	73	6 5597	6 5597	38 6527	1 00	5 99
TOTAL		51 0097	107 7017	355 9229	2 11	7 00
<b>20o. AÑO</b>						
1	54	3 0267	14 0814	22 0318	4 65	7 28
2	55	3 2961	13 3346	23 9930	4 05	7 28
3	56	3 5923	12 6371	26 1486	3 52	7 28
4	57	3 9183	11 9863	28 5222	3 06	7 28
5	59	4 6758	10 8154	34 0358	2 31	7 28
6	61	5 6047	9 8027	40 7977	1 75	7 28
7	64	7 4346	8 5497	54 1173	1 15	7 28
8	67	7 8028	7 8028	54 1285	1 00	6 94
9	69	7 4011	7 4011	48 7812	1 00	6 50
10	74	6 5439	6 5439	36 2750	1 00	5 72
TOTAL		53 0963	102 7550	368 8311	1 94	6 95

Como se puede observar, los valores presentes de una pensión tradicional van creciendo año con año, en forma nivelada conforme va creciendo la edad, empezando el primer año con un valor presente total de 13.8111 y finalizando con un valor de 53.0963 el último año, lo que representa un aumento total del 284.45%.

Por otra parte, los valores presentes de una pensión tradicional indexada, inician con valores relativamente altos que van decreciendo conforme los empleados se acercan a la edad de jubilación. El valor presente total del primer año es de 293.1707 y el último valor de 102.7550, lo que representa un decremento del 64.95%.

Los valores presentes de una pensión basada en una anualidad variable, al igual que los de una tradicional, van creciendo conforme la edad crece, iniciando con un valor presente total de 100.5322 el primer año y finalizando con un valor de 368.8311, lo que indica un incremento del 266.88%.

De lo anterior, se desprende que el plan más conveniente desde el punto de vista de la empresa, es el de una pensión tradicional indexada, sin embargo, hay que tomar en cuenta que los valores presentes de esta pensión en los primeros años son muy elevados, así, el valor presente total del primer año representa 21.23 veces el valor de una pensión tradicional, disminuyendo año con año hasta ser sólo 1.94 veces mayor, mientras que el valor presente total de

una pensión con anualidad variable se mantiene en 7.28 veces el valor de una tradicional, desde el primero hasta el 10.º año, en que empieza a disminuir ligeramente hasta llegar a ser 6.95 veces el valor de una tradicional.

Por otro lado el valor presente total de una pensión con anualidad variable crece hasta un valor de 368.8311 en el último año, en tanto que el de una pensión tradicional indexada tiene un valor máximo de 293.1707, esto es, no llega a ser tan alto como aquélla.

En conclusión, considerando los valores presentes, el plan más conveniente es el de una pensión tradicional indexada, tanto para la empresa, puesto que al ser menores los valores presentes que los de la pensión con anualidad variable, los costos resultarán menores, como para el empleado, ya que una pensión indexada le garantizará aumentos periódicos en el monto del beneficio de jubilación, tal como los recibiría en su sueldo, de seguir activo, lo cual no deja de ser atractivo.

En relación con una pensión tradicional, los valores presentes de una tradicional indexada son mucho mayores en los primeros años, sin embargo, como ya se mencionó, estos valores disminuirán año con año, en aproximadamente tres veces, esto significa que a cambio de fuertes desembolsos en los primeros años pero que irán disminuyendo paulatinamente, la empresa podrá ofrecer a sus empleados un plan de retiro muy atractivo que redundará en el beneficio de ambos.

Por otra parte, de acuerdo con los cuadros anteriores, en el lapso de veinte años alcanzan la edad de jubilación, 65 años, tres empleados:

- 1) El empleado No. 10 en el 11o. año.
- 2) El empleado No. 9 en el 16o. año.
- 3) El empleado No. 8 en el 18o. año.

En base a esto, el siguiente grupo de cuadros que muestra los pagos de beneficios que recibirán estos empleados por edad, año y tipo de pensión, así como un cuadro comparativo de pagos, inician en el 11o. año, por ser éste el año a partir del cual la empresa tiene su primer jubilado y por lo tanto en el que debe hacer el primer pago.

Por lo que se refiere al cuadro comparativo de pagos en total, éste se presenta por año y tipo de pensión, de acuerdo a la siguiente clave:

- (1) Pensión Tradicional.
- (2) Pensión Tradicional Indexada.
- (3) Pensión en base a una anualidad variable.
- (4) Número de veces que representa la pensión tradicional indexada respecto a la tradicional.
- (5) Número de veces que representa la pensión en base a una anualidad variable respecto a la tradicional.

## CUADROS DE PAGOS A JUBILADOS POR EDAD, AÑO Y TIPO DE PENSION

## PENSION TRADICIONAL

Año	Empleado No. 10		Empleado No. 9		Empleado No. 8		TOTAL PAGOS
	Edad	Pago	Edad	Pago	Edad	Pago	
11	65	1.00	--	--	--	--	1.00
12	66	1.00	--	--	--	--	1.00
13	67	1.00	--	--	--	--	1.00
14	68	1.00	--	--	--	--	1.00
15	69	1.00	--	--	--	--	1.00
16	70	1.00	65	1.00	--	--	2.00
17	71	1.00	66	1.00	--	--	2.00
18	72	1.00	67	1.00	65	1.00	3.00
19	73	1.00	68	1.00	66	1.00	3.00
20	74	1.00	69	1.00	67	1.00	3.00
TOTAL		10.00		6.00		3.00	19.00

## PENSION TRADICIONAL INDEXADA

Año	Empleado No. 10		Empleado No. 9		Empleado No. 8		TOTAL PAGOS
	Edad	Pago	Edad	Pago	Edad	Pago	
11	65	1.00	--	--	--	--	1.00
12	66	1.15	--	--	--	--	1.15
13	67	1.32	--	--	--	--	1.32
14	68	1.52	--	--	--	--	1.52
15	69	1.75	--	--	--	--	1.75
16	70	2.01	65	1.00	--	--	3.01
17	71	2.21	66	1.15	--	--	3.36
18	72	2.66	67	1.32	65	1.00	4.98
19	73	3.01	68	1.52	66	1.15	5.68
20	74	3.52	69	1.75	67	1.32	6.59
TOTAL		20.39		6.74		3.47	30.60

## PENSION EN BASE A UNA ANUALIDAD VARIABLE

Año	Empleado No. 10		Empleado No. 9		Empleado No. 8		TOTAL PAGOS
	Edad	Pago	Edad	Pago	Edad	Pago	
11	65	1.00	--	--	--	--	1.00
12	66	2.00	--	--	--	--	2.00
13	67	3.00	--	--	--	--	3.00
14	68	4.00	--	--	--	--	4.00
15	69	5.00	--	--	--	--	5.00
16	70	6.00	65	1.00	--	--	7.00
17	71	7.00	66	2.00	--	--	9.00
18	72	8.00	67	3.00	65	1.00	12.00
19	73	9.00	68	4.00	66	2.00	15.00
20	74	10.00	69	5.00	67	3.00	18.00
TOTAL		55.00		15.00		6.00	76.00

## CUADRO COMPARATIVO DE PAGOS POR AÑO Y TIPO DE PENSION

AÑO	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
11	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
12	1.00	1.15	2.00	1.15	2.00
13	1.00	1.22	2.00	1.22	2.00
14	1.00	1.52	4.00	1.52	4.00
15	1.00	1.75	5.00	1.75	5.00
16	2.00	3.01	7.00	1.51	2.50
17	2.00	3.46	9.00	1.73	4.50
18	3.00	4.98	12.00	1.66	4.00
19	3.00	5.72	15.00	1.91	5.00
20	3.00	6.59	18.00	2.20	6.00
TOTAL	18.00	30.52	78.00	1.70	4.22

En los tres primeros cuadros, se puede observar que el beneficio de una pensión tradicional es muy susceptible de ser atacado por la inflación, pues si bien inicialmente es igual al de los otros dos tipos de pensiones, a partir del segundo pago, el beneficio se vería devaluado por mínima que resultara la inflación año con año, con la cual el nivel de vida del jubilado decrecería irremediabilmente de no tener otra fuente de ingresos, caso muy común en nuestro país.

El beneficio de pensión tradicional indexada, como es claro, se incrementa en el mismo porcentaje que el salario mínimo, lo cual aunque la inflación resulte ligeramente mayor, situación que también se da en la actualidad, por lo menos garantiza al jubilado el mínimo de aumentos de los que recibía en su período de actividad.

Finalmente, la pensión con anualidad variable resulta muy favorable en los primeros años, incrementando incluso el nivel de vida de los jubilados en relación con su período activo, sin embargo este aumento, en porcentaje, cada vez va siendo menor, y así por ejemplo, el incremento del primero al segundo pago es 100%, del segundo al tercero es 50%, del tercero al cuarto es 33%, y así hasta que el aumento del noveno al décimo pago es de sólo el 11.11%, no obstante que el monto de este último pago es \$ 10.00 contra \$ 3.52 que ofrece la pensión indexada. Por lo tanto, la pensión con anualidad variable ofrece una gran protección al jubilado contra la inflación, pero a un alto costo



como se observa más adelante en el siguiente grupo de cuadros.

Por otra parte, el cuadro comparativo de pagos muestra que en total, el monto de los pagos de pensión tradicional indexada respecto al de la tradicional resulta ser sólo 1.70 veces aquél. Esto significa que en lo que se refiere a pagos es relativamente poca la diferencia entre estos dos tipos de pensiones y, sin embargo, mientras que una, la tradicional, no ofrece garantías contra la inflación, la otra, sí las ofrece.

En relación con la pensión tradicional, el monto de pagos en total de la pensión con anualidad variable es de 4.22 veces aquélla, es decir, la diferencia entre ambas es mucho mayor que la anterior, sin embargo, ésta ofrece mayores garantías que la pensión indexada en contra de la inflación.

Ahora, y como última parte de este análisis, se presentan los cuadros de Costos de cada plan, conocidos como Costos Normales, por año y tipo de pensión, de acuerdo a la siguiente clave:

- (1) Edad (X) a partir de la cual se va a financiar el plan.
- (2) Valor Presente Actuarial total por año, de los diez empleados de la empresa.
- (3) Reserva o Fondo de Jubilación al inicio del año (t), antes de deducir los pagos hechos a jubilados en el año

y de adicionarle el rendimiento anual obtenido por el fondo a la tasa de interés de cálculo y la aportación anual o costo normal.

- (4) Rendimiento de la reserva al inicio del año (t) o lo que es igual, de la reserva al final del año anterior (t-1), igual al 8% anual de acuerdo con las hipótesis de cálculo, es decir, esta columna es el producto de la columna (3) por 0.08.
- (5) Monto de los pagos a jubilados en el año, que se obtienen de los cuadros de pagos mostrados anteriormente.
- (6) Valor presente de una anualidad contingente anticipada temporal a 20 años a edad (X), con la cual se va a financiar cada plan, calculado con la fórmula (5.3).
- (7) Costo Normal o aportación anual, que de acuerdo al método de financiamiento utilizado, se calcula con las siguientes columnas:

$$(7) = \frac{(2) - [(3) + (4) - (5)]}{(6)} \quad (5.6)$$

- (8) Reserva o Fondo de Jubilación al final del año (t), que es igual a la Reserva al inicio del año, más el rendimiento anual obtenido por su inversión a la tasa de interés de cálculo, menos los pagos hechos a jubilados y más el costo normal, este es:

$$(8) = (3) + (4) - (5) + (7) \quad (5.7)$$

## CUADROS DE COSTOS NORMALES POR AÑO Y TIPO DE PENSION

## PENSION TRADICIONAL

AÑO	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	45	13 8111	0 00	0 00	0 00	10 1504	1 26	1 26
2	46	14 9565	1 36	0 11	0 00	9 0271	1 26	2 52
3	47	16 2701	2 82	0 23	0 00	8 5777	1 27	3 79
4	48	17 6725	4 42	0 25	0 00	8 4113	1 27	5 06
5	49	19 2072	6 15	0 49	0 00	8 1264	1 28	6 34
6	50	20 8882	8 01	0 64	0 00	8 0216	1 29	7 63
7	51	22 7219	10 04	0 80	0 00	8 4350	1 40	8 94
8	52	24 7573	12 25	0 92	0 00	8 1451	1 42	10 26
9	53	26 9861	14 64	1 17	0 00	7 7700	1 44	11 58
10	54	29 4432	17 25	1 50	0 00	7 3671	1 47	12 90
11	55	32 1575	20 10	1 61	1 00	6 9329	1 55	14 22
12	56	34 1057	22 26	1 70	1 00	6 4670	1 60	15 54
13	57	36 2695	24 94	1 89	1 00	6 0422	1 75	16 86
14	58	38 6750	27 58	2 21	1 00	5 4190	1 82	18 18
15	59	41 3531	30 61	2 45	1 00	4 8298	1 90	19 50
16	60	44 3291	32 99	2 72	2 00	4 1904	2 00	20 82
17	61	46 5160	37 00	3 06	2 00	3 4951	2 19	22 14
18	62	49 1700	40 44	3 24	2 00	3 7372	2 11	23 46
19	63	51 0027	42 78	3 50	3 00	1 8086	3 50	24 78
20	64	53 0963	47 91	3 92	3 00	1 0000	1 40	26 10
TOTAL		623 5040	405 44	22 44	18 00	121 8460	22 46	466 64

## PENSION TRADICIONAL INDEXADA

AÑO	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	45	293 1707	0 00	0 00	0 00	10 1604	28 85	28 85
2	46	276 0630	28 85	2 31	0 00	9 0271	24 67	44 82
3	47	260 0210	55 82	4 47	0 00	8 5777	20 21	65 03
4	48	244 9824	80 94	6 47	0 00	8 4113	16 74	81 27
5	49	230 8883	104 15	8 33	0 00	8 1264	12 97	94 30
6	50	217 6518	125 46	10 04	0 00	8 0216	9 32	103 62
7	51	205 3116	144 81	11 53	0 00	8 4950	5 76	109 38
8	52	193 7299	162 16	12 97	0 00	8 1451	3 28	112 66
9	53	182 8884	177 41	14 19	0 00	7 7700	-1 12	109 48
10	54	172 7477	192 49	15 24	0 00	7 3671	-4 49	105 25
11	55	163 2660	201 25	16 10	1 00	6 9329	-7 65	100 60
12	56	154 5314	208 69	16 70	1 15	6 4670	-10 78	90 42
13	57	146 3531	213 46	17 04	1 32	5 9623	-13 90	76 52
14	58	138 6990	215 32	17 23	1 32	5 4190	-17 04	61 48
15	59	131 5382	213 99	17 12	1 77	4 8298	-20 25	41 23
16	60	124 8413	209 10	16 72	3 01	4 1904	-23 38	17 85
17	61	118 7085	199 44	15 96	3 46	3 4951	-26 67	1 18
18	62	112 9611	185 26	14 82	4 98	2 7372	-20 01	16 00
19	63	107 7017	165 09	13 21	5 72	1 8086	-33 99	12 50
20	64	102 7550	138 59	11 09	6 59	1 0000	-40 32	10 75
TOTAL		3578 8222	3028 28	241 62	20 51	131 8460	-102 26	2122 24

## CUADROS DE COSTOS NORMALES POR AÑO Y TIPO DE PENSION

## PENSION EN BASE A UNA ANUALIDAD VARIABLE

AÑO	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	45	100 5322	0 00	0 00	0 00	10 1604	2 89	9 00
2	46	109 0897	0 89	0 79	0 00	9 9271	1 81	20 60
3	47	118 4314	20 60	1 65	0 00	9 6777	0 94	31 19
4	48	128 6409	32 19	2 57	0 00	9 4113	0 09	44 74
5	49	139 8117	44 74	3 50	0 00	9 1364	10 07	59 81
6	50	152 0480	58 24	4 67	0 00	8 8530	10 09	75 10
7	51	165 4695	73 10	5 95	0 00	8 4950	10 18	91 10
8	52	180 2117	89 13	7 13	0 00	8 1451	10 31	108 57
9	53	196 4245	106 77	8 53	0 00	7 7790	10 47	128 84
10	54	214 3209	125 56	10 04	0 00	7 3571	10 65	151 10
11	55	234 0794	146 20	11 70	1 00	6 8933	10 84	175 84
12	56	246 8850	168 11	13 55	2 00	6 4030	11 04	202 84
13	57	261 3316	192 07	15 21	3 00	5 8653	11 25	232 00
14	58	277 6107	218 00	16 97	4 00	5 3100	11 47	263 84
15	59	295 3244	244 76	18 72	5 00	4 7299	11 70	298 84
16	60	316 5395	269 25	20 67	6 00	4 1100	11 94	336 84
17	61	340 7147	292 64	22 61	8 00	3 4351	12 19	378 84
18	62	347 1032	307 11	24 49	10 00	2 7372	12 41	425 84
19	63	356 9323	329 02	26 32	15 00	1 9026	12 70	478 84
20	64	368 9311	349 03	27 92	18 00	1 0000	13 08	538 84
TOTAL		4540 9605	3036 52	242 92	76 00	131 8460	201 01	2405 28

## PENSION TRADICIONAL INDEXADA (SEGUNDO CUADRO)

AÑO	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	45	293 1707	0 00	0 00	0 00	10 1604	20 04	20 00
2	46	276 0630	20 05	2 01	0 00	9 9271	24 67	28 00
3	47	260 0210	35 83	4 17	0 00	9 6777	30 54	36 00
4	48	244 9824	52 94	6 47	0 00	9 4113	36 74	44 16
5	49	230 8882	101 15	9 33	0 00	9 1244	42 97	52 46
6	50	217 6819	125 46	10 04	0 00	8 8216	49 32	61 01
7	51	205 3116	144 81	11 59	0 00	8 4950	55 76	70 16
8	52	193 7290	162 16	12 87	0 00	8 1451	62 29	79 41
9	53	182 8984	177 41	14 10	0 00	7 7790	69 09	89 41
10	54	172 7477	191 61	15 32	0 00	7 3571	76 00	100 00
11	55	163 2660	206 93	16 55	1 00	6 9337	83 00	112 00
12	56	154 5314	222 49	17 80	1 15	6 4670	90 00	124 13
13	57	146 3531	239 14	19 13	1 32	5 9530	97 00	136 36
14	58	138 6900	256 25	20 56	1 52	5 4100	104 00	148 76
15	59	131 5382	275 99	22 08	1 75	4 8299	111 00	161 31
16	60	124 8412	296 21	23 71	2 01	4 2104	118 00	174 01
17	61	119 7085	317 01	25 26	2 46	3 4951	125 00	186 81
18	62	114 9611	338 51	27 11	4 09	2 7372	132 00	201 01
19	63	107 7017	361 04	28 89	5 73	1 9026	139 00	216 10
20	64	102 7550	384 19	30 74	8 59	1 0000	146 00	232 74
TOTAL		3578 8902	2970 18	317 61	30 51	131 8460	121 24	4378 52

Respecto al primer cuadro relativo a los costos normales de la pensión tradicional, se tienen aportaciones casi fijas en los primeros 10 años y posteriormente se elevan ligeramente a partir de que los pagos de jubilación dan inicio. Estas aportaciones varían en un intervalo de \$ 1.36 que es la más baja a \$ 4.46, la más alta, sumando en total \$ 38.66, que es un costo relativamente bajo en términos generales.

En cuanto al plan de pensión tradicional indexado, la aportación anual del primer año es de \$ 28.83, y de ahí empieza a disminuir hasta llegar a \$ 2.28 en el octavo año y a partir del noveno año, dado que los valores presentes van decreciendo, resultan aportaciones negativas, es decir, que para ese año la reserva constituida ya es suficiente para hacer frente a las obligaciones generadas por el plan por lo que a partir de este momento ya no es necesario hacer aportaciones al fondo, como se muestra en el segundo cuadro de Pensión Tradicional Indexada. Esto es una gran ventaja, ya que al tener totalmente financiado el plan antes de terminar el plazo elegido, se pueden seguir haciendo aportaciones anuales al fondo, acordes por ejemplo con la capacidad económica de la empresa, lo que originaría un sobre financiamiento del fondo, esto es, una cantidad excedente que podría invertirse y finalmente dicha cantidad más los rendimientos que produzca, distribuirse uniformemente entre el personal jubilado. Esto lógicamente aumentaría el monto del beneficio que sería igual, en este problema en particular, al incremento del 15% anual más la cantidad excedente

mencionada, lo cual beneficiaría notablemente a los pensionistas. Las aportaciones en total, sin considerar las aportaciones negativas ascienden a \$ 121.24.

Los costos normales de la pensión en base a una anualidad variable, resultan prácticamente nivelados, ya que varían de \$ 8.70, valor más bajo a \$ 11.12, valor más alto, esto es, un rango de \$ 2.42. Las aportaciones en total ascienden a \$ 201.91, el cual es un costo muy elevado comparado con los anteriores, aunque desde el punto de vista del empleado, este es el plan que ofrece la pensión más atractiva.

Finalmente, los siguientes cuadros, que comparan los costos normales por año y tipo de pensión de los tres planes, se presentan de acuerdo a la siguiente clave:

- (1) Costo Normal de un plan de pensión tradicional.
- (2) Costo Normal de un plan de pensión tradicional indexada.
- (3) Costo Normal de un plan de pensión en base a una anualidad variable.
- (4) Número de veces que representa el Costo normal de la columna (2) respecto al de la columna (1).
- (5) Número de veces que representa el Costo normal de la columna (3) respecto al de la columna (1).

PRIMER CUADRO COMPARATIVO DE COSTOS NORMALES POR AÑO  
TIPO DE PENSION

AÑO	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	1.26	29.25	9.99	21.25	7.27
2	1.26	24.67	9.91	19.12	5.55
3	1.37	20.64	9.94	15.11	4.99
4	1.37	16.74	9.99	12.22	4.27
5	1.39	12.97	10.03	9.42	3.46
6	1.39	9.32	10.09	6.72	2.64
7	1.40	5.76	10.18	4.12	1.82
8	1.42	2.28	10.31	1.61	0.99
9	1.44	-1.12	10.47	-0.99	0.17
10	1.47	-4.09	10.69	-3.05	-0.64
11	1.65	-7.66	11.12	-5.11	-1.32
12	1.69	-10.73	11.41	-7.22	-2.00
13	1.75	-12.99	11.67	-9.44	-2.69
14	1.82	-17.04	12.00	-13.77	-3.95
15	1.92	-20.25	12.31	-18.11	-5.20
16	2.20	-27.38	12.62	-22.44	-6.45
17	2.49	-26.97	12.95	-26.77	-7.70
18	3.11	-30.01	13.41	-31.10	-8.95
19	3.52	-33.99	13.79	-35.44	-10.20
20	4.45	-40.22	14.58	-39.77	-11.45
TOTAL	38.66	-108.26	201.91	-21.86	6.22

SEGUNDO CUADRO COMPARATIVO DE COSTOS NORMALES POR AÑO Y  
TIPO DE PENSION

AÑO	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	1.26	29.85	9.99	21.25	7.27
2	1.26	24.67	9.91	19.12	5.55
3	1.37	20.64	9.94	15.11	4.99
4	1.37	16.74	9.99	12.22	4.27
5	1.38	12.97	10.03	9.42	3.46
6	1.39	9.32	10.09	6.72	2.64
7	1.40	5.76	10.18	4.12	1.82
8	1.42	2.28	10.31	1.61	0.99
9	1.44	0.00	10.47	-0.99	0.17
10	1.47	0.00	10.69	-3.05	-0.64
11	1.65	0.00	11.12	-5.11	-1.32
12	1.69	0.00	11.41	-7.22	-2.00
13	1.75	0.00	11.67	-9.44	-2.69
14	1.82	0.00	12.00	-13.77	-3.95
15	1.92	0.00	12.31	-18.11	-5.20
16	2.20	0.00	12.62	-22.44	-6.45
17	2.49	0.00	12.95	-26.77	-7.70
18	3.11	0.00	13.41	-31.10	-8.95
19	3.52	0.00	13.79	-35.44	-10.20
20	4.45	0.00	14.58	-39.77	-11.45
TOTAL	38.66	121.24	221.91	-21.86	6.22

En este primer cuadro comparativo, se puede observar que el costo normal del plan de pensión tradicional indexada resulta mucho mayor en los primeros cuatro años que el de los otros dos planes, sin embargo, al octavo año casi se empareja con el costo del plan de pensión tradicional y, a partir del noveno año en el que las aportaciones empiezan a ser negativas, lo que significa que ya no hay que incrementar el fondo, el plan ya está financiado, lo que no ocurre con el plan de pensión con anualidad variable que empieza siendo su costo más de siete veces el de la pensión tradicional y se mantiene así hasta el décimo año, momento en el que empieza a descender respecto al costo de cuál hasta llegar a 2.21 veces solamente.

En total, y sin considerar las aportaciones negativas mostradas en el cuadro, el costo del plan de pensión tradicional indexada representa sólo 3.14 veces el costo del plan de pensión tradicional, como se observa en el segundo cuadro comparativo. En tanto que el costo del plan de pensión en base a una anualidad variable es algo mayor, 5.22 veces el de pensión tradicional, lo que provoca costos más altos.

La conclusión, en base al análisis anterior, es que el plan más conveniente de implementar en la empresa, considerando los factores costo-beneficio, y las bases e hipótesis de cálculo, así como el método de financiamiento, utilizados en el presente estudio, es el de Pensión Tradicional Indexada, ya que además de ofrecer beneficios variables



acordes con la inflación a los jubilados, originan costos aunque ligeramente elevados en los primeros años, éstos van decreciendo hasta llegar a ser en total sólo un poco mayores que los de un plan de pensión tradicional, el cual no ofrece garantías en contra de la inflación. Por lo que respecta a la comparación del plan de pensión tradicional indexada con el de pensión basada en una anualidad variable, aunque aquél no ofrece beneficios tan atractivos como el de éste último, sus costos no son tan elevados, factor que puede ser determinante en la decisión de una empresa en cuanto a implementar un plan de pensiones.

## CONCLUSIONES

## CONCLUSIONES

La decisión de implementar planes privados de pensiones variables depende en gran parte de las condiciones económicas de cada país y de cada empresa.

Dado que el objetivo principal de las pensiones con beneficios variables es el de contar con un elemento inflacionario que ayude a mantener el poder adquisitivo de la pensión, entonces la instalación de este tipo de planes en países donde la inflación no exista o no tenga un gran impacto no tendrá sentido.

En países donde el factor inflación alcance grandes proporciones, como el caso de México, es necesario que las empresas instalen este tipo de planes con objeto de conceder a sus jubilados un beneficio que realmente los ayude a conservar el nivel socio-económico de vida que tenían en su período activo, situación que servirá como un estímulo más a su personal, sobre todo para los elementos más calificados, que al ver que la empresa les ofrece una verdadera seguridad a la jubilación pensarán seriamente en la posibilidad de permanecer en ella hasta esa fecha.

Por otra parte, la empresa que implete un plan de pensiones, cualquiera que sea el beneficio que éste ofrezca, ayuda al país con las personas que ya no producen, que son los jubilados, ya que la pensión de estas personas estará formada por la correspondiente al Instituto Mexicano del Se

guro Social y la de la empresa.

Ahora, la elección del plan de pensiones variables más adecuado para cada empresa en particular, depende de su situación económica, ya que este tipo de planes al otorgar incrementos periódicos en el monto de la pensión lógicamente origina que sean más costosos que un plan tradicional.

En este trabajo se analizan varias alternativas de planes con beneficios variables, todos muy atractivos desde el punto de vista de los empleados, sin embargo, con costos diferentes.

El análisis realizado en esta tesis, da como resultado que el plan más conveniente de implementar, tanto para la empresa como para el jubilado, tomando en cuenta de manera conjunta los factores costo-beneficio, es el plan de pensión tradicional indexada ya que éste si bien no ofrece beneficios tan atractivos como el plan de pensión basada en una anualidad variable, si concede a los jubilados un elemento inflacionario que ayuda a mantener el poder adquisitivo de la pensión, además de ofrecer para la empresa costos menos elevados que el de anualidad variable.

Cabe aclarar que el índice al que esté ligada esta pensión debe ser uno que esté relacionado directamente con la inflación, como pueden ser por ejemplo el índice de crecimiento en el salario mínimo, el cual garantizaría el aumento de la pensión cada vez que este salario se modificara,

ó también el índice de precios al consumidor, el cual garantizaría el poder de compra de la pensión.

En caso de que el plan de pensión tradicional indexada resulte incosteable para la empresa, existe la opción de instalar un plan contributivo, en el que al hacer aportaciones los empleados, el costo del mismo para la empresa se reduzca en una parte, situación que lejos de perjudicar al personal, lo beneficia ya que en su período activo estaría ayudándose para tener una fuente de ingresos acorde con la inflación en su período de jubilación.

Respecto al plan de pensión basado en una anualidad variable, se concluye que es muy atractivo en cuanto a los beneficios crecientes que ofrece, sin embargo, no es muy elástico en el sentido de que necesita de la presencia de la inflación, ya que en este tipo de plan, el monto de la pensión crece en la forma de una progresión aritmética anualmente independiente del factor inflacionario y en caso de que la situación económica de un país se estabilizara y la inflación se detuviera, este crecimiento del beneficio ya no tendría objeto.

En el caso de la pensión tradicional indexada, el problema anterior no ocurre ya que al estar ligada al salario mínimo, por ejemplo, en caso de que la inflación se detuviera, de la misma forma lo haría el salario, por ser dos variables íntimamente relacionadas, lo que hace al plan indexado más flexible en este sentido.

Por otro lado, una vez tomada la decisión de implementar un plan de pensiones determinado, es indispensable elegir un método de financiamiento adecuado a las características del plan y de la empresa, para lo cual es necesario tener una ayuda técnica, esto es, una ayuda actuarial, ya que el profesional capacitado para proporcionar este soporte técnico, es precisamente el Actuario.

Así mismo, la selección del instrumento de financiamiento del plan, es muy importante para el adecuado funcionamiento del mismo, ya que la obtención de altos rendimientos e ingresos de inversión ayudará adicionalmente a ofrecer mejores y más altos beneficios a los jubilados.

Finalmente la elección del plan de pensiones variables más adecuado para cada empresa dependerá, como se mencionó, de su situación económica particular y de cuánto está dispuesta a gastar a cambio de ofrecer, como una prestación más a sus empleados, un plan de retiro que les asegure un nivel de vida acorde con el que llevaban en su período activo.

En resumen, en el presente trabajo se ha tratado de analizar el problema inflacionario que enfrentan los empleados que obtienen el derecho a jubilarse, de proporcionar los elementos técnicos necesarios en el desarrollo de un plan de pensiones y de dar varias alternativas de pensiones variables, que otorguen a estas personas una real protección contra la inflación, factor que en nuestro país

ha atacado fuertemente a la población en general y mucho más a las personas retiradas que por su avanzada edad ya no tienen posibilidades de conseguir otro trabajo con objeto de tener un ingreso adicional al de su pensión por jubilación.

El Actuario tiene un papel muy importante que desempeñar dentro de esta problemática, razón por la cual debe estar capacitado en este ramo de la carrera.

**A P E N D I C E**



## TABLA DE MORTALIDAD M R 1984

## TASA DE INTERES 0.07

EDAD	1000q <sub>x</sub>	1 <sub>x</sub>	4 <sub>x</sub>	6 <sub>x</sub>	9 <sub>x</sub>	12 <sub>x</sub>	15 <sub>x</sub>
15	1.453	100,000	145	21521	1205	41404	4771
16	1.437	99,956	143	20148	1228	422510	2666
17	1.414	99,912	141	19076	1246	427272	5120
18	1.385	99,871	139	24942	1210	326296	4634
19	1.351	99,833	134	23622	1069	301152	2354
20	1.311	99,797	130	21325	877	278200	9315
21	1.267	99,762	126	19220	754	257055	6742
22	1.219	99,729	121	17256	612	237244	4567
23	1.167	99,697	114	15554	491	219109	2827
24	1.149	99,666	114	15587	410	202742	2021
25	1.128	99,792	112	14425	302	184545	1521
26	1.107	99,699	109	13241	210	163220	4715
27	1.083	99,571	107	12220	180	150877	7415
28	1.058	99,464	104	11412	138	146529	9716
29	1.033	99,360	107	10555	107	135123	6420
30	1.111	99,253	109	9764	121	124568	9982
31	1.141	99,144	112	9020	92	114804	7972
32	1.173	99,032	115	8322	63	105772	6727
33	1.200	97,917	116	7641	54	97421	6727
34	1.227	97,799	127	7112	74	89620	6727
35	1.259	97,672	127	6604	92	82552	7060
36	1.513	97,522	143	6123	108	77247	7060
37	1.643	97,327	160	5747	152	69930	1100
38	1.792	97,227	174	5320	164	64192	1430
39	1.949	97,053	189	4924	174	59071	1920
40	2.125	96,864	205	4458	140	54147	1620
41	2.327	96,659	225	4119	69	49537	4226
42	2.556	96,423	246	3805	64	45568	7407
43	2.818	96,187	271	3514	75	41753	2991
44	3.095	95,916	297	3245	225	38248	3445
45	3.410	95,610	326	2995	545	35002	1120
46	3.769	95,293	359	2764	102	32007	5714
47	4.190	94,934	397	2547	295	29243	3702
48	4.635	94,527	433	2351	648	26622	2941
49	5.105	94,099	480	2165	1108	24342	2520
50	5.616	93,619	526	1995	1721	22175	7250
51	6.164	93,092	577	1837	2307	20179	6220
52	6.853	92,516	624	1691	3476	18341	9222
53	7.543	91,892	697	1555	5458	16650	6745
54	8.278	91,199	755	1420	8002	15095	5274
55	9.033	90,434	817	1312	11270	13666	4274
56	9.875	89,617	895	1204	15822	12254	3614
57	10.814	88,732	960	1102	21910	11150	2922
58	11.867	87,772	1041	1011	29620	10034	2127
59	12.952	86,731	1122	925	39261	9025	1442
60	14.162	85,620	1212	845	51221	8110	924
61	15.509	84,395	1309	771	67121	7264	5920
62	17.010	83,092	1412	703	89227	6442	5100

## TABLA DE MORTALIDAD UR 1994

TASA DE INTERES 8.00

EDAD	1000* $q_x$	$l_x$	$d_x$	$D_x$	$P_x$	$S_x$
63	19 685	81 674	1526	640 3055	5789 7501	4451 711
64	20 517	80 148	1544	581 7927	4149 6525	3937 7645
65	22 562	78 504	1771	527 6521	4557 2577	3559 7662
66	24 847	76 732	1907	477 5370	4029 6034	3081 4462
67	27 232	74 826	2038	431 1873	3562 0582	2487 2316
68	29 634	72 788	2157	388 2680	3130 2761	2140 7226
69	32 073	70 491	2265	345 0441	2742 6677	1822 6654
70	34 743	68 226	2275	303 7376	2393 6222	1422 4302
71	37 667	65 981	2284	263 5105	2090 6272	1314 6126
72	40 874	63 505	2296	224 0562	1801 2167	1104 6162
73	44 504	60 909	2211	221 1907	1552 2607	822 6124
74	48 504	58 192	2222	196 6917	1321 2227	559 4124
75	52 013	55 375	2220	172 3370	1125 2220	321 6124
76	55 775	52 405	2222	151 2542	953 2221	224 6122
77	63 142	49 462	2123	132 0209	811 674	127 6122
78	68 628	46 339	2180	114 5273	679 6524	246 1822
79	74 648	43 152	2221	98 7621	565 1202	228 522
80	81 256	39 977	2245	84 6204	466 2672	222 1022
81	89 518	36 692	2242	71 3950	381 7122	172 1022
82	98 212	33 414	2242	60 7624	300 761	122 1022
83	108 212	30 226	2142	50 2122	240 6222	82 1022
84	118 212	27 042	2254	40 1222	182 6222	212 6122
85	128 079	24 017	2222	31 6122	152 6222	112 1222
86	138 174	21 027	2287	22 1121	121 2222	21 2222
87	148 179	18 000	2220	13 6222	92 2122	212 2222
88	158 147	15 629	2422	17 0222	70 5822	246 6222
89	169 208	13 247	2222	14 0412	52 6222	172 2222
90	182 461	11 019	2011	10 8144	38 5221	122 6222
91	199 030	9 008	1784	9 1852	27 2222	22 6222
92	215 035	7 224	1552	5 0284	19 2247	22 2222
93	232 993	5 671	1321	4 4193	13 5162	22 6222
94	252 545	4 350	1089	2 1250	9 6222	24 6222
95	273 878	2 251	990	2 1715	5 0500	15 6222
96	297 152	2 261	702	1 4607	3 2895	0 6222
97	322 553	1 659	535	0 9500	2 2222	5 2110
98	349 505	1 121	292	0 5960	1 2222	2 0227
99	378 065	731	277	0 3889	0 7222	1 6222
100	410 875	454	187	0 2051	0 4221	0 6222
101	445 768	267	119	0 1124	0 2170	0 2222
102	483 830	149	72	0 6577	0 1046	0 1222
103	524 201	75	40	0 0274	0 0460	0 0222
104	569 355	36	20	0 0120	0 0107	0 0222
105	616 382	16	10	0 0050	0 0074	0 0110
106	668 696	6	4	0 0017	0 0025	0 0015
107	725 745	2	1	0 0005	0 0009	0 0005
108	796 495	1	1	0 0002	0 0002	0 0002
109	852 650	0	0	0 0000	0 0000	0 0000
110	924 666	0	0	0 0000	0 0000	0 0000

## BIBLIOGRAFIA

## B I B L I O G R A F I A

1. "LA ANUALIDAD VARIABLE. Su Desarrollo, Su Medio Ambiente y su Futuro".  
Paul A. Campbell.  
Connecticut General Life Insurance Company.  
E. U. A. - 1970.
2. "PENSION MATHEMATICS with Numerical Illustrations".  
Howard E. Winklevoss, Ph. D.  
Pension Research Council.  
University of Pennsylvania.  
E. U. A. - 1977.
3. "LIFE CONTINGENCIES".  
Charles Wallace Jordan.  
Williamstown, Massachusetts.  
E. U. A. - 1967.
4. TESIS; "BASES Y APLICACION DE LA TECNICA ACTUARIAL Y TEORIA DE LA INVERSION EN UN PLAN PRIVADO DE PENSIONES".  
Roberto Pacheco Outiño.  
México - 1984.
5. "LOS METODOS DE FINANCIAMIENTO".  
Boletín D - 10. Asociación Mexicana de Actuarios.  
México - 1987.

6. "MANUAL DE POLIZAS DE PENSIONES DE GRUPO".

John Hancock.

E. U. A. - 1980.

7. "AFUNTES DE CALCULO AGTUARIAL".

Marcelo de Jesús Kroepfly Saury.

México - 1985.