UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS

MAESTRIA EN PEDAGOGIA

LAS ESTRATEGIAS DE CALCULO ARITMETICO DE LOS ADULTOS NO ALFABETIZADOS

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE MAESTRA EN PEDAGOGIA PRESENTA:

ALICIA AVILA STORER

FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS
ESTUDIOS SUPERIORES

Director de tesis: Dr. Gabriel Cámara

México, D. F., primavera de 1988

I N D I C E

INTRODUCCION

En las siguientes páginas se reportan los resultados de una investigación dedicada a detectar y caracterizar las estrategias de cálculo aritmético que utilizan los adultos no alfabetizados para resolver los problemas que su cotidianeidad les presenta. Los datos recabados en el estudio permitieron construír una explicación sobre el pensamiento matemático del analfabeto ; dicha explicación se ofrece como tesis del trabajo.

Los resultados de la investigación evidencian la existencia de una estructura única en el pensamiento matemático de los analfabetos.Los datos muestran además que esa estructura única atraviesa por un proceso de desarrollo en el que se observan tres *niveles*. Los sujetos que han alcanzado el *tercer nivel* resuelven con notable agilidad y precisión hasta los cálculos más complejos y tienen, además, la capacidad de aplicar sus estrategias de cálculo a contextos y datos distintos de los que se han manejado en la experiencia de vida. La investigación descubre también que la lógica de las estrategias de cálculo deriva del manejo del dinero y que su grado de desarrollo proviene de la frecuencia, la diversidad y la exigencia de exactitud en los cálculos.

El reporte se ha subdividido en cuatro partes. En la primera de ellas se señalan los motivos, alcances y estrategia de la investigación. En la segunda se analizan los datos relativos a las estrategias de cálculo con las cuatro operaciones aritméticas que fueron detectadas en el estudio. La tercera parte se dedica a dos problemas relevantes para comprender de manera amplia el pensamiento matemático de los analfabetos : las ataduras a la experiencia particular y el conocimiento de los símbolos numéricos. En la cuarta y última parte del escrito se presentan las conclusiones del trabajo y sus implicaciones pedagógicas, así como una serie de interrogantes que surgen a partir de los resultados obtenidos.

PRIMERA PARTE. DELIMITACION DEL ESTUDIO

I. MOTIVOS , ALCANCES Y ESTRATEGIA DE LA INVESTIGACION

EL PROBLEMA

De entre los problemas que actualmente enfrenta la educación destaca la escasez de investigaciones sobre el aprendizaje de los adultos (Schmelkes). La mayoría de los estudios existentes se han centrado principalmente en el análisis de sus aspectos sociales, políticos y organizacionales (Ochoa y Huidobro). No obstante, se cuenta con algunos acercamientos parciales entre los que destaca significativamente la perspectiva de análisis de Paulo Freire. Durante las dos últimas décadas, su método sicosocial ha influído decisivamente tanto en las formas como se analiza el proceso de aprendizaje de los adultos, como en las tendencias que han asumido muchos programas de alfabetización.

Sin embargo, la perspectiva sicosocial de Freire ha dejado de lado un aspecto central de la alfabetización : el aprendizaje del cálculo elemental. De manera que mientras la concepción del aprendizaje de la lecto-escritura ha significado preocupación para amplios grupos y ha tenido una verdadera revolución, las ideas sobre las formas como el adulto aprende el cálculo elemental son apenas preocupación de escasos y reducidos equipos de trabajo.

Con todo, la escasez de investigaciones sobre el aprendizaje del cálculo, sólo adquiere su verdadero sentido si se relaciona con la comprobación de que históricamente la lecto-escritura ha estado en el centro de las campañas y movimientos de alfabetización. No obstante que se ha reconocido el cálculo como un componente esencial de la alfabetización - muestra de ello son los materiales distribuídos entre los usuarios del servicio - en la práctica se ha relegado a un lugar secundario y auxiliar.

El énfasis dado a los aspectos sociopolíticos de la alfabetización explica-que la teoría sobre el aprendizaje matemático de los adultos esté en una etapa incipiente de elaboración. Los conocimientos que reducidos grupos de investigadores han generado al respecto pueden ordenarse en los siguientes rubros : algoritmos construídos por los analfabetos, contextos de construcción y uso de los algoritmos y conocimiento de los símbolos numéricos.

Algoritmos construídos por los analfabetos

Se ha reportado que los adultos analfabetos resuelven problemas aritméticos elementales (Avila et.al.,Carraher et.al.,Acioly y Días Schielman,Dimensión Educativa, Ferreiro). La complejidad de tales cálculos ha sido señalada por Ferreiro con base en el cuestionamiento a unos cuantos sujetos : los cálculos , en ocasiones , llegan a ser complicados ; cálculos que sobrepasan la centena , en algunos casos , se resuelven sólo por aproximación (cf. Ferreiro, p. 23 y ss).Parece haber coincidencia en la idea de que los adultos tienen su propio estilo de resolución : se prefiere sumar y restar de izquierda a derecha , multiplicar por sumas reiteradas y dividir por restas reiteradas (Acioly y Días Schielman , Carraher et. al., Dimensión Educativa). Se ha indicado también que analfabetos corredores de apuestas frecuentemente utilizan procedimientos escritos como soporte de la realización de cálculos cuando éstos son difícieles de realizar mentalmente (Acioly y Días Schielman).

Estos hallazgos son de especial significación porque indican que los sujetos construyen procedimientos de cálculo distintos de los escolarizados. Sin embargo, no conocemos si estos procedimientos ocurren de manera diferenciada o si son comunes a todos los analfabetos. La explicación no profundiza respecto a las estrategias globales de resolución, a la lógica que las sustenta o a los diversos casos aritméticos en que éstas pueden ser aplicadas. Es decir, no conocemos los principios en que se basan los mecanismos. Tampoco se conoce la génesis que sustenta tales procesos, o el origen de la lógica de los mismos.

Los contextos de construcción y uso de los algoritmos

Las operaciones aritméticas que realizan los analfabetos - indican algunos investigadores - se relacionan con su trabajo, con los intercambios comerciales y con el dinero (Avila et. al., Ferreiro, Luria). También se ha afirmado que el pensamiento matemático de los analfabetos está irremediablemente ligado a la experiencia particular, lo cual no permite resolver problemas más allá de los datos proporcionados por el ámbito de la propia experiencia (Luria). Nos parece demasiado contundente esta última afirmación pues implica que , de manera definitoria, los analfabetos pueden ver y pensar el mundo sólo desde determinados datos y que son incapaces de realizar síntesis y establecer generalizaciones.

Conocimiento de los símbolos numéricos

Se ha indicado que los adultos identifican algunos símbolos numéricos (Avila et. al., Ferreiro). Esta capacidad de identificación es diversa : algunos adultos sólo identifican los dígitos, otros, en cambio, son capaces de reconocer números hasta de cuatro cifras. Estos conocimientos - también se ha señalado - derivan de las experiencias cotidianas de los adultos. El conocimiento proviene de la necesidad de utilizarlos al identificar caminos, rutas de camión, domicilios y monedas (Avila et. al.). De entre las distintas necesidades destacan el manejo de precios y el dinero (Ferreiro).

Queda por responder si el conocimiento de los símbolos está relacionado con la habilidad en el cálculo y si es que, como afirman Acioly y Días Schielman , el manejo de números grandes obliga a los sujetos a usar el lápiz y el papel o, en un sentido inverso, cierta complejidad en el cálculo constituye el límite en el mismo precisamente por no contarse con un sistema de escritura.

Como podrá verse, existe un conjunto de conocimientos acerca del cálculo que realizan los analfabetos. Paralelamente, existe un conjunto de problemas por resolver que hace urgente proseguir la indagación en torno al asunto. Esto es especialmente importante para la andragogía ya que si no se conocen la forma como enfrentan y resuelven los problemas de su vida cotidiana y la naturaleza de las estrategias para hacerlo , difícilmente se podrá establecer una enseñanza que parta de la experiencia de los adultos y seguiremos condenados a las pedagogías derivadas, por analogía, de un supuesto conocimiento de los niños.

LA INVESTIGACION

En esta investigación nos propusimos indagar en torno a las siguientes interrogantes :

a) ¿ resuelven los adultos no alfabetizados los problemas con las cuatro operaciones aritméticas básicas que su cotidianeidad les presenta sin recurrir a la ayuda de otras personas ?

De ser así :

b) ¿ cuáles son las estrategias de resolución de cada una de las cuatro operaciones aritméticas que siguen ?
c) las estrategias de cálculo ¿ se dan indiferenciadamente en todos los analfabetos ?
d) ¿ cuáles son los puntos problemáticos - si es que existen - en las estrategias , y cuáles son los límites en el cálculo ?
e) los límites en el cálculo ¿ son los mismos para todos los sujetos ?
f) ¿ cuál es la lógica que sustenta a las estrategias de cálculo analfabetas y de dónde proviene dicha lógica ?
g) ¿ cuáles son las posibilidades y limitaciones de aplicación de una estrategia de cálculo en distintos contextos (de intercambio comercial, laboral o ajeno al adulto) y con distintos números ?
h) ¿ qué recursos materiales o gráficos se utilizan para apoyar las estrategias de cálculo ?
i) ¿ hay alguna relación entre el manejo del cálculo mental y la capacidad de simbolización del mismo ?
j) ¿ qué tanto y en qué difieren las estrategias de cálculo analfabetas de las estrategias de cálculo formal ?

Para lograr respuestas a tales interrogantes nos propusimos realizar un estudio de casos. Realizar un estudio sobre los procesos cognitivos del analfabeto implica, obviamente, estar en contacto directo con los sujetos pues no exis te el recurso de apelar a la prueba escrita, recurso que, por otra parte, permitiría acceder a poblaciones más amplias. El contacto personal, la interrogación y las situaciones de experimentación fueron entonces, la estrategia obligada en nuestra investigación.

En la tarea de rescatar el razonamiento adulto nos topábamos de entrada con un obstáculo a vencer : ¿ cómo aflorar un razonamiento que es una operación mental y que, por lo tanto, no se evidencia naturalmente a la manera de una conducta observable ?

Seguramente si hubiésemos observado a los sujetos actuar naturalmente en su medio ambiente nos hubiésemos percatado de qué cálculos realizan y en qué situaciones les son necesarios éstos, pero no asegurábamos evidenciar el razonamiento subyacente, ni los límites o los errores en los cálculos. Decidimos entonces, como antes señalábamos, plantear una situación "experimental"* en la -- cual, por una parte, nosotros planteáramos los cálculos con las condiciones y dificultades que nos interesaba analizar y, por otra, nos fuera dado observar nítidamente el razonamiento que lleva a la solución del problema planteado. Con esta lógica, finalmente diseñamos una lista de 24 problemas aritméticos en los que se incorporaron distintas dificultades algorítmicas y distintos contextos**. Así solucionamos el problema de los cálculos precisos que nos interesaba analizar. El problema de la evidencia del razonamiento lo solucionamos incorporando objetos (frijoles, hatos de 5, 10, 50 y 100 palitos y monedas de $1,$5,$10 y $100) con los cuales, una vez resuelto mentalmente el problema, le pedíamos al sujeto lo resolviera de nuevo. El desarrollo de la investigación nos mostró la eficacia de este procedimiento pues - y esto se reporta con detalle en el cuerpo del trabajo - no todos los sujetos tenían una conciencia tal de sus estrategias de cálculo que les permitiera --

* En nuestra investigación el término experimental significa plantear una situación que permita evidenciar un razonamiento.
**Veáse anexo 1. Problemas aritméticos planteados en las entrevistas.

verbalizarlas. El recurso de los objetos nos dió la posibilidad de observar - el razonamiento, al constatar la serie de acciones que de él derivaban.

Asimismo, solicitamos a los sujetos identificaran 32 números naturales entre 1 y 1000, desligados de todo contexto. Esta parte del interrogatorio se basó en la presentación de trajetas con números representados en forma manuscrita.*

Con los instrumentos que acabamos de describir, trabajamos hasta 6 horas - diferidas en 2, 3, ó 4 sesiones, según se hizo necesario - con cada uno de nuestros sujetos. Las entrevistas las realizamos, de manera individual, en el local del Círculo de Alfabetización, en la fábrica o el taller, en los puestos callejeros, en la casa de los entrevistados.

Conformar la población con la que habríamos de trabajar, fue una tarea llena de dificultades. Destaca, por ejemplo, el hecho de que la mayoría de los analfabetos que encontrábamos eran mujeres dedicadas a los quehaceres domésticos (tanto los propios como los que se realizan por un pago) lo cual hizo lento y difícil el proceso de integrar la población con las características que deseábamos, es decir, en que se incorporaran personas de ambos sexos y la gama de ocupaciones fuera amplia ya que, suponíamos, la actividad laboral es la que desarrolla habilidades en el individuo no escolarizado.

Inicialmente, y con el apoyo de la Dirección de Alfabetización del Instituto Nacional para la Educación de los Adultos, acudimos a un Círculo de Alfabetización. Ahí trabajamos con tres mujeres pero proseguir el trabajo se dificultó por varias razones : los asistentes eran casi exclusivamente amas de casa y, muchas de ellas, no analfabeta s "puras" sino analfabetas funcionales , con escolaridad previa . Por otra parte, la asistencia al Círculo era irregular y se estaban trabajando ya algunos temas de matemáticas.

Decidimos entonces abordar a los sujetos en " la calle " (las plazas, los mercados, los dispensarios) hasta encontrar aquéllos que accedieran a colaborar en

* Véase anexo 2. Símbolos numéricos que se solicitó identificar a los entrevistados.

el estudio; también recurrimos a las relaciones personales y fuimos a buscarlos a su casa o a su lugar de trabajo. Muchas personas se resistieron a respondernuestras preguntas, en especial las de sexo masculino. Otras personas, inicia - ron la entrevista pero ya no acudieron a la siguiente cita.

Finalmente, nuestra población quedó integrada por 12 sujetos - 7 mujeres y 5 hombres - todos de origen rural y, a excepción de uno de ellos, todos avecindados - en zonas urbanas por lapsos de entre uno y cuarenta años. Trabajamos entonces - con:

- un mozo
- un artesano
- un jardinero que recientemente había migrado del campo a la ciudad
- un obrero de una fábrica de zapatos
- un velador
- una ama de casa
- cuatro empleadas domésticas
- una hilandera-empleada doméstica
- una vendedora de raspados.*

Como ya mencionamos, la diversidad de ocupaciones nos interesaba con base en el supuesto de que la actividad laboral es factor fundamental de desarrollo de habilidades y de construcción de conocimientos matemáticos en muchos casos.

Hipotetizábamos, por ejemplo, que un comerciante desarrolla más ciertas habilidades (sumar, restar, multiplicar y dividir con rapidez) por el continuo manejo de las cuentas; que un albañil desarrollla habilidades de medición y de cálculo de proporciones y, en general , habilidades espaciales , por la misma naturaleza de su trabajo. Suponíamos que, en cambio , las amas de casa o el personal de limpieza, si bien tienen que hacer cuentas, éstas no son tan frecuentes ni tan exigentes en cuanto a exactitud y rapidez como por ejemplo las del comerciante.

A continuación sintetizamos las características más relevantes de cada uno de los sujetos que forman nuestra población.

<u>José</u>. Tiene 61 años, nació en una ranchería, está casado y tiene 8 hijos, todos terminaron la primaria. Su esposa, al igual que José, nunca asistió a la escuela

*La mayoría de nuestros sujetos habían realizado labores del campo por tiempo prolongado y el mozo y el artesano fueron albañiles por aproximadamente 10 años.

y tampoco sabe leer y escribir.

José trabajó en el campo hasta aproximadamente los 30 años, después trabajó co mo albañil y, en los últimos 20 años ha sido mozo de una familia. Durante todo este tiempo -y diariamente- se ha encargado de comprar el "mandado" que se con sume en la casa donde trabaja. Esta actividad obligó a José, según relata él mismo, a hacer cuentas mentalmente y a desarrollar estrategias para memorizarlas, con el fin de entregar con exactitud los cambios a su patrona.

José mostró a lo largo de las entrevistas una extraordinaria capacidad de realizar cálculos con las cuatro operaciones, cálculos que no sabe escribir, pues no conoce los símbolos numéricos sino del 1 al 10 , el 100 y el 1000. José nos dice:"en la cabeza es donde hace uno las cuentas, y se apoya uno con los dedos o con el palabreo" (se refiere a pensar en voz alta cuando está realizando un cálculo). José fue ubicado en el <u>nivel</u> más alto de desarrollo de las estrate - gias de cálculo.*

<u>Silvino</u>. Tiene 37 años, nació en un pueblo ,está casado y tiene un hijo de seis meses. La lengua materna de Silvino es el náhuatl, la utiliza para comunicarse con su esposa y sus paisanos; el español lo aprendió "ya grandecito", pero lo - habla con extraordinaria fluidez. Silvino, al igual que la mayoría de sus paisa nos y su esposa, nunca fué a la escuela.

Silvino trabajó en el campo algunos años y después trabajó como albañil; hace aproximadamente 10 años entró a formar parte de una cooperativa de artesanos - que comercia sus productos en el Distrito Federal . Así, el trabajo de Silvino consiste en la creación de máscaras en la cooperativa de su pueblo y, luego, en la venta de las mismas en el Distrito Federal.

El trabajo de albañilería introdujo a Silvino en el manejo del cálculo aritmético y en la lectura se símbolos numéricos ; después, la cooperativa de artesa-- nos y la comercialización de los productos le exigió el manejo de cálculos bastante complicados.

Silvino mostró enorme capacidad de realizar cálculos y una extraordinaria agili dad en los mismos.A pesar de esta habilidad notoria, Silvino no sabe anotar las operaciones aritméticas que realiza,-aunque sí identifica los números por lo me nos hasta el 1000 - nos dice :"las cuentas las hago acá en la cabeza".

* A lo largo de la investigación detectamos tres <u>niveles</u> de desarrollo en las es trategias de cálculo.Aquí las anotamos para caracterizar a nuestros sujetos.Tal diferenciación es uno de los temas centrales del cuerpo del trabajo.

Silvino, junto con José, fue ubicado en el tercer nivel de desarrollo de las estrategias de cálculo.

Jorge. Tiene 66 años, nació en una ranchería, ahí fué a la escuela pero no -- aprendió a leer ni a escribir. De ese entonces, sólo recuerda algunas letras y los números. Jorge fue campesino hasta los 43 años , momento en que emigró a la ciudad debido a las repetidas sequías que hacían la vida casi imposible en el campo. En la ciudad, Jorge es obrero en una fábrica de zapatos ; ahí, - tiene que contar los cortes de piel que llegan por miles a la fábrica. Además, Jorge hace perforaciones de acuerdo con los números marcados en los trozos de piel , los cuales indican distintos estilos de calzado.

Jorge tiene esposa (también analfabeta) y tres hijos que asistieron a la escuela hasta terminar la primaria.

Las necesidades de manejo aritmético que tiene Jorge en el trabajo, se centran en el conteo y la identificación de símbolos numéricos. Jorge mostró, a lo largo de las entrevistas, un desarrollo tal en sus estrategias de cálculo que lo ubica en el nivel intermedio.

Guadalupe. Tiene 39 años, es originaria de un ejido y vive en un conglomerado urbano de aproximadamente 3000 habitantes desde hace 25 años. Guadalupe fue - instruída por su madrina quien le enseñó las primeras letras y los primeros números. A pesar de estas enseñanzas, Guadalupe no aprendió a leer ni a escribir o a hacer operaciones aritméticas, sólo recuerda los números hasta 1000. Guadalupe tiene esposo (también analfabeta) e hijos que van a primaria y secundaria . Guadalupe no ha tenido experiencia laboral , su manejo aritmético ha derivado de las compras que realiza diariamente y , en general, de llevar el gasto de la casa.

Guadalupe no sabe escribir números ni cuentas a pesar de que sí identifica - los símbolos hasta 1000. El desarrollo en las estrategias de cálculo que mostró Guadalupe, permitieron ubicarla en el nivel intermedio.

Carmen. Tiene 49 años, nació en una ranchería y tiene 25 años de vivir en la ciudad. Carmen es viuda, sus 6 hijos estudiaron primaria y secundaria, uno de ellos cursa la carrera de medicina con el apoyo de un familiar que goza de - cierta holgura económica. Carmen vive con una hija casada y ha adquirido algunos conocimientos escolares con sus nietos que van a primero y tercer grado - de primaria, respectivamente. Además , Carmen asiste a un Círculo de Alfabetización desde hace dos meses. Ahí ha aprendido algunas sumas sencillas , - empieza a estudiar la resta y aún "no sabe pegar las letras".

Carmen se ha dedicado, desde que llegó a la ciudad, a lavar y a planchar. El trabajo generalmente lo cobra por docena.

Carmen identificó los símbolos numéricos hasta 100 y corresponde al grupo - de sujetos clasificados en el nivel intermedio.

María. Tiene 50 años, nació en una ranchería y trabaja en la ciudad realizando quehaceres domésticos desde hace aproximadamente 20 años. María fue hilandera por alrededor de 25 años y actualmente todavía hace ese trabajo - cada vez que va al rancho, cosa que ocurre con frecuencia. María tiene cuatro hijos, todos terminaron la primaria, ella no fué a la escuela porque su padre no se lo permitió. El argumento para tal impedimento era el siguiente : " Si van a la escuela tú y tu hermana , van a aprender a escribir y luego se van a andar carteando con los novios"...

La experiencia aritmética de María está ligada con las cuentas que le son necesarias para cobrar el hilado de la lana que realiza y con los cálculos que tiene que hacer en las compras en el mercado y , en general, para llevar el gasto de la casa.

María identificó los símbolos numéricos sólo hasta el 10 y está clasificada en el nivel intermedio de desarrollo del cálculo aritmético.

Vicenta. Tiene 67 años y nació en una ranchería. Siendo joven y recién casada se fué a la ciudad, luego regresó al campo y hace aproximadamente 12 años que vive nuevamente en la ciudad. Vicenta es viuda y tiene tres hijos , dos de ellos estudian secundaria. La experiencia laboral de Vicenta se reduce a hacer aseos y a lavar y planchar ropa. De estas actividades y de las compras y cuentas que hace al llevar la casa, deriva el manejo del cálculo aritmético de Vicenta.

Vicenta ingresó al primer grado de primaria cuando era niña , pero " apenas empezaba con las letras" cuando la sacaron de la escuela; señala que a veces sí conoce las letras pero lo que no sabe es juntarlas.

Vicenta identificó, aunque con algunas dificultades, los símbolos numéricos hasta 1000 y, de acuerdo con los resultados de la entrevista, fue clasificada en el nivel intermedio de desarrollo del las estrategias de cálculo aritmético.

Josefina. Tiene 38 años, nació en una ranchería, está casada con un obrero y tiene cuatro hijos (todos han ido a la escuela y uno de ellos estudia en el CONALEP). Josefina no fué nunca a la escuela, sólo iban los hermanos varones. Las mujeres se quedaban a tortear y a acarrear agua.

Hace 11 años que Josefina vive en la ciudad y se dedica a hacer aseos. En el campo Josefina no hacía cuentas, y en la ciudad hace cuentas en el mercado. Nos dice que lleva a su niña a las compras para " que le salgan mejor" los cálculos. Cuando su hija era pequeña, igualmente iba al mercado pero no le salían muy bien los cálculos. Esta hija que ayuda a Josefina a hacer cuentas en el mercado, empieza a enseñarle a leer en un libro del Instituto Nacional de la Educación para los Adultos.
Josefina identificó sólo el número 5 y se encuentra en el primer nivel de desarrollo de las estrategias de cálculo aritmético.

Margarita. Tiene 41 años, nació en un rancho, está casada con un obrero que cursó hasta sexto grado de primaria y tiene cuatro hijos que van a diversos grados de la educación elemental. Margarita tiene 18 años de vivir en la ciudad y trabaja haciendo aseos. Su experiencia con los números se inició al llegar a la ciudad, al identificar los de las casas. El cálculo aritmético que realiza Margarita se relaciona con las compras y con el gasto familiar en general.

Margarita tiene un mes de haber ingresado a un Círculo de Alfabetización, donde ha aprendido las vocales y algunos números; identificó los números hasta 100 y se encuentra en el nivel inicial de desarrollo de cálculo aritmético.

Delfina. Dice tener 60 años, pero se ve muy joven, seguramente no sabe su edad. Nació en una ranchería y llegó a la ciudad hace aproximadamente 15 años porque en el campo la vida era muy difícil, Su esposo es analfabeta, ayudante de albañil y, al igual que Delfina, nunca fué a la escuela o a Círculos de Alfabetización. Los siete hijos de Delfina fueron a la escuela pero no terminaron la primaria. Delfina vende raspados y elotes desde que llegó a la ciudad, actualmente los vende a $50 y $100 ; según nos dice, siempre les ha puesto precios de forma que se le faciliten las cuentas.

Delfina sólo identificó los números de 1 a 10 y se encuentra en el nivel inicial de desarrollo en el cálculo aritmético.

Hilario. Tiene 47 años, nació en un rancho , está casado (su esposa tampoco sabe leer ni escribir) y tiene dos hijos que fueron a la escuela aunque no terminaron la primaria. Hilario trabajó en el campo hasta hace unos cuantos meses y hoy vive en la ciudad haciendo jardinería en una unidad habitacio - nal.

Hilario señala que en el campo no tenía que hacer cuentas y en la ciudad . só lo para comprar; se traslada de su casa al trabajo sin dificultad porque su hija le enseñó a identificar los letreros de los camiones y peseros de las - rutas que debe abordar.
Hilario no fué nunca a la escuela porque lo pusieron a trabajar desde muy pe queño. El trabajo no ha exigido a Hilario el desarrollo de estrategias de - cálculo ; se encuentra en el nivel inicial de desarrollo del cálculo aritmé- tico y sólo identificó los dígitos, el 10 y el 25.

Ramón. Tiene 70 años, nació en un rancho y desde niño emigró a la ciudad con su familia. Ramón es viudo desde hace muchos años y vive con su hija que es costurera . Ramón no fué nunca a la escuela "porque en aquel tiempo los pa - pás no acostumbraban a mandar a los hijos a estudiar".

El trabajo que Ramón ha desempeñado toda su vida ha sido velar una fábrica - por las noches. Este trabajo no ha obligado a Ramón a desarrollar estrategias de cálculo aritmético , su manejo matemático deriva sólo de las compras, aun que a este respecto nos señala que su hija es quien las realiza consuetudina- riamente porque la misma naturaleza de su trabajo lo obliga a permanecer dor mido buena parte del día.

Ramón identificó los números sólo hasta 10 y fue clasificado , de acuerdo con los resultados de las entrevistas, en el nivel inicial de desarrollo de las - estrategias de cálculo.

Todos los sujetos que conformaron nuestra población , y que acabamos de carac terizar brevemente, son sujetos económicamente activos. En los siguientes capí tulos presentamos los resultados de las entrevistas con ellos.

SEGUNDA PARTE. LAS ESTRATEGIAS DE CALCULC

Este apartado del trabajo se dedica a analizar los datos relativos a las estrategias de cálculo que utilizan los analfabetos en su vida cotidiana. En él se abordan las cuatro operaciones aritméticas básicas.

A lo largo de la labor investigativa descubrimos que los sujetos poseen una misma lógica y unas mismas estrategias para resolver los problemas aritméticos que su cotidianeidad les presenta. Descubrimos también que esas estrategias de cálculo no han alcanzado en todos los sujetos igual grado de desarrollo. Así, encontramos sujetos que apenas esbozan sus estrategias junto con otros que las tienen nítidamente perfiladas y las utilizan y complementan con extraordinaria agilidad. El análisis de los datos nos mostró que las estrategias atraviesan por tres *niveles* de desarrollo. A tales *niveles* los hemos llamado *inicial, intermedio* y *final*. Los indicadores que nos permitieron definir dichos *niveles*, y que emergieron del análisis de los datos, son los siguientes:

a) eficacia , entendida como la capacidad de obtener los resultados correctos

b) eficiencia , es decir , el número de tanteos necesarios para lograr los resultados exactos

c) posibilidad de rebasar dificultades derivadas de la naturaleza de los números involucrados en los cálculos : reagrupación en la suma , desagrupación en la resta, registro de las duplicaciones en la multiplicación y residuo en la división.

d) necesidad de utilizar objetos físicos (además de movimiento imperceptible de dedos) y conteo para apoyar los cálculos

e) capacidad de generalización de las estrategias, entendida como la posibilidad de manejar datos y contextos distintos de aquéllos que se manejan en la experiencia de vida

f) capacidad de verbalizar los procesos de cálculo, es decir, la capacidad de explicar los mecanismos por los cuales se resuelvan los problemas planteados

g) agilidad, entendida como la rapidez con que los cálculos son realizados

h) capacidad de modificar o complementar estrategias básicas cuando la dificultad del cálculo así lo requiere, es decir, la capacidad de incorporar elementos (tales como el redondeo o la memorización de ciertos pro ductos) para facilitar los cálculos y asegurar la obtención del resultado.

Pasamos en seguida a analizar este desarrollo progresivo de las estrategias de cálculo construídas por los analfabetos.

I. LA ADICION COMO ADICION

1. GENERALIDADES

La adición es la operación en la que, en ultima instancia, los sujetos transforman cualquier operación para llegar a la solución de un problema, no obstante éte involucre una resta, una multiplicación o una división. La adición, así, se convierte en el fundamento y método para resolver cualquier cálculo :

- la resta se traduce en una adición que permite calcular un faltante
- la multiplicación , en su estrategia más general , es una adición que duplica reiteradamente un valor
- la división es la adición repetida de un cociente supuesto y, por supuesto,
- la adición es también , y simplemente , una adición.

Empezamos entonces por la adición , pero como dijimos antes, la adición como adición, es decir, relacionada con problemas de agregar o de juntar , problemas que pueden representarse con la expresión a + b = c .

Los 12 sujetos entrevistados resolvieron problemas de adición , con un procedimiento sustancialmente diferente al algoritmo formal*. Se observaron ciertas diferencias, de sujeto a sujeto, en cuanto a la agilidad, precisión y tamaño de los números que son capaces de manejar, así como en la capacidad de no mezclar los datos de la experiencia personal con los datos del sistema lógico que constituye el problema. Sin embargo, y como dijimos an--

* Cuando hablamos de algoritmos formales nos referimos a los que aparecen en los materiales del INEA, algoritmos que a su vez son iguales a los que aparecen en los textos de niños.

tes, un hallazgo fundamental e inesperado en el análisis de los datos, es que las estrategias descubiertas muestran distintos niveles de desarrollo de un mismo proceso que tiende a consolidarse en una estrategia única, agil, precisa y compacta que se expresa con toda claridad en el *estadio final* y que, reiteramos, es diferente del algoritmo escolarizado.

La estrategia para realizar adiciones la hemos llamado procedimiento indoarábigo por basarse en principios de cálculo registrados en ese sistema hacia el año 1000 D.C.(Smith;en NCTM,p. 133 - 134); consiste en realizar la suma a partir de los agrupamientos de mayor orden y tiene las siguientes componentes :

a) descomposición de los sumandos en...centenas, decenas y unidades, en ese orden

b) suma a partir de los agrupamientos de mayor orden, es decir,...centenas, decenas y unidades

c) suma de las sumas parciales para obtener la suma total, a partir de los agrupamientos de mayor orden (...centenas,decenas, unidades).

Esta estrategia general, basada en el principio de "contar primero lo más grande" , deriva su lógica del manejo del dinero.Es decir, el orden entre los agrupamientos que corresponden al sistema decimal de numeración está relacionado con el valor que los billetes representan : los miliares corresponden a los billetes de $1000, las centenas a los de $100, las decenas a $10 y las unidades a $1. Y los sujetos muestran con nitidez el origen de su lógica :

> " Cuando uno cuenta el dinero, cuenta primero los billetes, hasta después los quintos, si no, uno estaría al revés".

De acuerdo con la naturaleza de los números involucrados y el *nivel* de desarrollo en el cálculo en que se encuentren los sujetos , esta estrategia, por un lado , es apoyada con conteos y redondeo y, por otra parte, tiende a compactarse. En seguida describimos la estrategia tal como aparece en los tres *niveles* de desarrollo de las estrategias del cálculo que detectamos.

2. NIVEL INICIAL

2.1. CARACTERISTICAS GENERALES

Este *nivel* representa el grado más bajo de desarrollo en las estrategias de cálculo y en el caso de la adición se caracteriza por la inseguridad al obtener los resultados, la falta de precisión en éstos, la incapacidad de manejar la reagrupación, la necesidad del conteo y el apoyo de objetos físicos para resolver los cálculos. En este *nivel* clasificamos a cinco de nuestros sujetos : Delfina, Josefina, Margarita, Hilario y Ramón*. Las características de este *primer nivel* podemos puntualizarlas así :

1. Se emplea la estrategia general de cálculo que hemos llamado <u>procedimiento indoarábigo</u>, <u>sumando a partir de los agrupamientos mayores</u>.Es decir, se descomponen los sumandos en ...centenas, decenas y unidades, en ese orden.

2. Se utiliza el redondeo a 5 ó a 10, para facilitar la suma de las unidades.

3. Las estrategias no son precisas, generalmente se necesitan varios tanteos para obtener el resultado.

4. No se obtienen todos los resultados solicitados, pues se cometen errores de conteo, y en el manejo del redondeo. La reagrupación marca el límite en la capacidad de cálculo.

5. Se necesita, en ocasiones, recurrir al conteo de 1 en 1, de 5 en 5, ó de 10 en 10 para obtener los resultados.

---

* Los sujetos ubicados en el <u>primer nivel</u> en la adición se encuentran ubicados en este mismo <u>nivel</u> en las otras tres operaciones. Lo mismo ocurre con los sujetos clasificados en los otros dos <u>niveles</u>.

6. Se necesita manejar objetos para realizar los cálculos, excepto en adiciones como 250 + 310 ó 200 + 300.

7. No se verbalizan las estrategias completas, sólo fragmentos de ellas.

8. Hay poca agilidad en los cálculos.

9. Se mezclan los datos de la experiencia personal con los datos del problema planteado.

2.2. ESTRATEGIAS

2.2.1. Procedimiento indoarábigo (Suma a partir de los agrupamientos mayores)

Esta estrategia, que se basa en el principio de sumar primero lo más grande, se evidenció en todos los casos de adición a que fueron enfrentados los sujetos (con unidades y decenas, con unidades, decenas y centenas, sin reagrupación y con reagrupación). Presentamos en seguida cada uno de estos casos.

Caso 1. Suma de números compuestos por centenas y decenas, sin reagrupación (250 + 310).

El procedimiento indoarábigo, suma a partir de los agrupamientos mayores, en este caso, puede esquematizarse así:

a) descomposición de los sumandos en centenas y decenas: 250---> 200 + 50 , 310---> 300 + 10.

b) suma de las centenas y obtención de la primera suma parcial: 200 + 300 = 500

c) suma de las decenas y obtención de la segunda suma parcial: 50 + 10 = 60.

d) suma de las centenas y las decenas (en ese orden) es decir, integración de la suma total a partir de las sumas parciales: 500 + 60 = 560*

En la resolución de esta operación no se observó manejo de objetos ni conteo directo, probablemente porque ya descompuestos en centenas y decenas, los números resultaron de fácil manejo. Explicamos: la distancia entre 200 y 500 (200 + 300= 500) ó 50 y 60 (50 + 10 = 60) es lo suficientemente pequeña como para manejarse mentalmente. Válganos para ilustrar el uso de la estrategia en el *primer nivel*, los siguientes diálogos:

E. (plantea un problema con la suma 450 + 310)
D. 300...310 de azúcar ... ¿y cuánto de frijol?
E. 450
D. (piensa)... 700 (en voz baja)... 700 (en voz baja)... 700 (en voz baja)... ¿Del azúcar cuánto?
E. Eran 310 y 450, ya sacó la cuenta de 700
D. De 700, ahora de ... 50 y 10 ... entonces son 700, 750 .... más 10 .... 760.

. . .

E. (plantea un problema con la suma 250 + 310)
R. (piensa un rato, mueve los labios)...
E. Si quiere hágalo con las monedas...
R. No, no, no, le estoy pensando...tengo que pagar... 500 ...(en voz baja)... 500, 60...
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
R. Con la... (señala su cabeza)

Caso 2. <u>Suma de números compuestos por decenas y unidades, sin reagrupación</u> (35 + 22).

En la resolución de la suma 35 + 22 reapareció el <u>procedimiento indoarábigo</u>. Pero si bien la estrategia utilizada es la descrita en el inciso anterior,

---

* Terezinha Nunes Carraher, (1986) detectó en 16 niños de Brazil - todos de zonas marginadas y con escolaridad - la utilización frecuente de este procedimiento.
La cartilla de matemáticas para adultos <u>Cuentas claras</u>, se basa en la idea de que los adultos prefieren sumar de izquierda a derecha, es decir, con un procedimiento igual al que aquí describimos.

llegar al resultado en esta ocasión fue más difícil para los sujetos. En el momento de resolver el problema planteado, los sujetos mostraron inseguridad, necesitaron de las monedas para apoyar el cálculo y sólo uno de ellos obtuvo un resultado preciso (en el segundo intento de resolución que tardó algunos minutos en elaborar).

El procedimiento indoarábigo, en este caso, es apoyado con conteo de 10 en 10 para obtener la suma de las decenas. Así, por ejemplo, un sujeto obtuvo el resultado de la siguiente manera:

J. ...(piensa en voz alta:)..."30, 40, 50, 55...52 "

Esta estrategia muestra, por una parte, un conteo de 10 en 10 equivalente a 20 + 30 y, por otra parte, la suma 5 + 2 en donde se omite uno de los sumandos (5). Esta misma estrategia se observó claramente en otro sujeto:

H. (también pensando en voz alta:)..."40, 50, 55...52 "

El 52 es, para estos dos sujetos, el resultado obtenido mediante la suma (30 + 20) + (5 + 2), donde se olvida integrar el 5 a la suma final.

Por su parte, otro de los sujetos cuenta así:

M."30, 35, 40, 50...56"(error de conteo)

Posteriormente, el sujeto prefiere invertir la estrategia:

(5 + 2) + (30 + 20) *

Con esta última estrategia —que sigue el orden del algoritmo escrito, y que se exhibe en esta única ocasión—el sujeto obtuvo el resultado correcto.

En síntesis, se observan los siguientes pasos en la estrategia de resolución de la suma 35 + 22:

*Tanto Margarita como Josefina utilizan en algún momento este orden. Interpretamos el hecho como la "no consolidación" de la estrategia básica.

a) descomposición de los sumandos en decenas y unidades:
35---> 30 + 5 , 22---> 20 + 2

b) suma de las decenas, con apoyo del conteo de 10 en 10:
30 + 20 ---> 30, 40, 50

c) suma de las unidades (5 + 2) con error de omisión o de conteo: 5 + 2 -----> 2 , 5 + 2 ------> 6

d) integración de la suma global a partir de las dos sumas parciales, iniciando por los agrupamientos mayores, donde se conserva el error de omisión en las unidades:
50 + 5 + 2 ------> 52

Caso 3. Suma de números compuestos por unidades y decenas con reagrupación (45 + 28).

En esta adición reapareció nuevamente el procedimiento indoarábigo, sin embargo por la reagrupación implicada, esta adición resultó ser la más difícil para los sujetos del *primer nivel*. De hecho, solamente uno de nuestros sujetos logró obtener un resultado preciso.

La estrategia observada en todos los sujetos entrevistados (aunque fallida en cuatro casos) puede esquematizarse así:

a) descomposición de los números en decenas y unidades:
45 ---> 40 + 5 , 28 ---> 20 + 8

b) suma de las decenas por conteo de 5 en 5 ó 10 en 10:
40 + 20 ---> 40, 50, 60

c) suma de las unidades, integrándolas por conteo de 5 en 5 a las decenas: (40 + 20) + (5 + 5) + 3

Esta estrategia no es utilizada eficientemente pues no lleva al resultado exacto, se cometen errores de omisión o de doble conteo de un sumando**

** Las estrategias seguidas en este caso, por ser fallidas, se describen en el apartado errores con más detalle.

Un sujeto utilizó monedas, desde el primer momento para resolver el problema, consciente de no poder resolverlo mentalmente:

> "¡Ay, creo que no me sale ... la voy a hacer con las monedas si no no me sale! "

Sin embargo, el sujeto no logra obtener el resultado correcto porque comete errores de conteo en las unidades, es decir, en los pesos sueltos, ya que el cálculo lo realizó con monedas.

2.3. LIMITES Y ERRORES EN EL CALCULO

Los sujetos que se encuentran en la *primera etapa*, cometen tres tipos de errores al realizar los cálculos que involucran adición:

a) errores de conteo

b) errores derivados del proceso de descomposición de los números en unidades y decenas

- omisión de uno de los sumandos al sumar las unidades
- doble conteo de uno de los sumandos al sumar las unidades

c) errores de redondeo

- suma de la diferencia entre el sumando dado y 5 ó 10, en vez de dicho sumando.

2.3.1. <u>Errores de conteo</u>.

Un error característico del *primer nivel* es el derivado del proceso de contar, ya que los sujetos clasificados en esta *etapa* utilizan frecuentemente tal apoyo para obtener los resultados. El error de conteo —observado tanto en el conteo mental como en el conteo con objetos— conduce a un resultado inexacto y los sujetos no se percatan de ello.

Un sujeto, por ejemplo, suma (40 + 5) + (20 + 7) en vez de (45 + 28) porque cuenta mal las monedas; no se percata del error.

Otro sujeto obtiene 56 en vez de 57 al sumar 35 + 22 también -- por error de conteo; tampoco percibe el error.

Otro de los sujetos comete muchos errores de conteo, tanto mentalmente como con las monedas, tiene que realizar varias veces los conteos para obtener los resultados correctos. En el caso de la adición 45 + 28, este sujeto obtiene mentalmente un resultado correcto (73); con monedas, en cambio, obtiene 71 y no se percata de la inconsistencia.

2.3.2. Errores derivados del proceso de descomposición en unidades y decenas.

2.3.2.1. Omisión de un sumando en las unidades.

La estrategia de suma, hemos visto, lleva a los sujetos a descomponer los números, y a sumar a partir de los agrupamientos mayores. En este proceso, se comete el error de omitir uno de los sumandos en el momento de sumar las unidades y obtener la suma final. Este error, lo ilustramos con el siguiente esquema:

$$35 + 22 \dashrightarrow (30 + 20) + (5 + 2)$$

que se traduce en:

$$(30 + 20) + 2 = 50 + 2 = 52$$

Puede observarse en el esquema anterior cómo se eliminó el 5 en la segunda suma parcial; tal error de omisión lo presentaron 3 de los sujetos clasificados en la *primera etapa* (recuérdese el inciso 2 de este apartado).

2.3.2.2. Doble conteo de un sumando en las unidades.

Un sujeto nos muestra este tipo de error en su estrategia. Para él , 45 + 28 ------> 78 porque sumó de la siguiente manera:

$$(40 + 20) + (5 + 5) + 8 = 78$$

Obsérvese que el sujeto había sumado ya 20 + 5 (25) del 28, cuando obtuvo el resultado parcial 70 y que sólo le faltaba sumar 3 para sumar el 28 completo, pero olvida la resta (8-5) y suma nuevamente el 8 completo. Escuchamos a Delfina:

> D. Uno de 45 y otro de 28 ... 45 ... y otro de 28.... 60 ... 45 ... 60, 70... ¿78? ... 70 ... 78 ¡ya! ¿cómo ve?
> E. ¿Los 70 de dónde los juntó?
> D. Porque son 25...
> E. ¿No eran 45 y 28?
> D. Por eso...
> E. Sacó 78...
> D. Porque dijo que eran 45 y 28, 20 ... por eso, 40 ... 40, 45 y 20 ... 25 ... ahí van 60, 65 ... 65 ... (piensa).... 65 ... 70, 75 ... 77, 78 ....¿ o no?

Es decir, las agregaciones y desagregaciones que se realizan para lograr redondeos a 5, llevan en ocasiones al error de sumar dos veces el mismo 5.

2.3.3. <u>Errores de redondeo</u>

2.3.3.1. <u>Suma de la diferencia entre el sumando y 5 ó 10, en vez de suma del sumando dado.</u>

La estrategia de redondear a 5 ó a 10, lleva a los sujetos a cometer otros errores, como el de sumar la diferencia entre el sumando dado y 5 ó 10 en vez de dicho sumando, por ejemplo, se observó sumar 3 en vez de 2 (porque 2 + <u>3</u> = 5) ó 7 en vez de 13 (porque 13 + <u>7</u> = 20). Para aclarar lo anterior, observemos la siguiente estrategia:

> M. (Refiriéndose a 45 + 28) son 45 más 20, entonces ya los junté y dije que eran 50 pero no, son 60, más 8 y 5, entonces serían 10 ... son 60 y 13.
> E. ¿Y cuánto es eso?
> M. ...son 60 ... y 7 ...(se ríe)
> E. Dice que son 60 y 13 ... ahorita como que lo tiene (el dinero) en dos montones, uno de 60 y uno de 13, ¿y ahora?
> M. Entonces lo uno todo y ya son 67, ¿no?
> E. ¿Por qué 67?
> M. Porque junto los 60 y los 7

E. ¿Cuáles 7? eran de cambio, ¿no?
M. Los que sobran de cambio, ¿no?
E. ¿Por qué no lo hace ahora con monedas?
M. Pongo ya los 60, los 20 y son 60; los $ 5 los pongo a los 8 y serían 10...13 y ya son 67.

El sujeto cambió el sumando 13 por el sumando 7 . ¿ De dónde obtuvo este 7? Lo obtuvo al redondear el 13 a 20 (20 - 13 = 7) pues el redondeo distrajo la atención del número que se tenía que sumar hacia aquél necesario para lograr el redondeo.

Este error, que acabamos de ilustrar, fue observado en tres de los sujetos clasificados en el *primer nivel*.

2.4. LA NECESIDAD DE OBJETOS FISICOS PARA RESOLVER LOS CALCULOS.

Otra de las características del cálculo en el *primer nivel*, es la incapacidad de resolver todas las situaciones mentalmente.

Los alcances y límites del cálculo mental, en esta *etapa*, son los siguientes: Todos los sujetos resolvieron con cierta agilidad la suma 200 + 300 excepto uno que, por traer a la mente los datos de la experiencia personal obtiene la solución sólo apoyada con las monedas y hasta el tercer intento. Asimismo, se resuelve mentalmente la adición 7 + 6, aunque ya no con agilidad, sino mediante conteo con los dedos; se observa también redondeo a 5 ó a 10. Es decir, las estrategias para obtener la suma 7 + 6 fueron:

a) 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13 (conteo)

b) (5 + 5) + 3 = 10 + 3 = 13

c) 7 + 3 = 10 + 3 = 13*.

* La estrategia seguida para resolver estas sumas no se describe en el trabajo, ya que la naturaleza de los números no permitió que se desplegara con claridad. Los sujetos se limitaron a responder "le conté" o "le junté"

Con respecto al cálculo 250 + 310, que también fue resuelto mentalmente, todos nuestros sujetos lograron obtener el resultado correcto sin dificultad, con la estrategia general (procedimiento indoarábigo).

En síntesis, en esta *primera etapa*, sólo se resolvieron mentalmente por lo que a la suma se refiere, los cálculos 200 + 300, 250 + 310 y 7 + 6. En los otros casos, en que las sumas implicaban procesos de redondeo más complejos, se hizo necesario el manejo de objetos.

3. NIVEL INTERMEDIO

3.1. CARACTERISTICAS GENERALES

Fueron cinco los sujetos ubicados en el *nivel intermedio*: Carmen, Guadalupe, María, Vicenta y Jorge. En este *nivel*, por lo que a la adición se refiere, persiste el principio de sumar primero lo más grande, disminuyen los tanteos y los errores, y se han tendido los límites entre la experiencia particular y el problema matemático planteado. Las características generales de este *nivel*, pueden puntualizarse así:

1. La estrategia general para resolver adiciones es nuevamente el procedimiento indoarábigo (suma a partir de los agrupamientos de mayor orden).

2. Se utiliza el redondeo a 5 ó a 10 para facilitar el manejo y suma de las unidades.

3. Las estrategias de cálculo son precisas, excepto cuando hay reagrupación, caso que lleva a dos o tres intentos y a errores iniciales, para obtener finalmente un resultado satisfactorio.

4. Se obtienen resultados satisfactorios en todos los cálculos solicitados; la reagrupación deja de ser obstáculo insalvable para el cálculo.

5. El conteo como apoyo para realizar los cálculos se hace necesario solo en los casos en que hay reagrupación.

6. No se necesita el apoyo de objetos físicos para realizar los cálculos.

7. La agilidad en el manejo del cálculo ha aumentado en relación con el *primer nivel*.

8. Se verbalizan partes mucho más amplias del proceso de cálculo que en la *primera etapa.*, en especial las que se refieren al manejo de la descomposición de números y al redondeo.

9. Los probelmas son entendidos como un sistema lógico cerrado, los datos no se contaminan con los de la experiencia personal.

3.2. ESTRATEGIAS DE CALCULO

3.2.1. Procedimiento indoarábigo.

Esta estrategia apareció nuevamente en todos los casos de adición a que fueron enfrentados los sujetos. En seguida describimos el uso de la estrategia que, en cada uno de dichos casos, hacen los sujetos ubicados en el *nivel intermedio*.

Caso 1. Suma de números compuestos por centenas, decenas, sin reagrupación (250 + 310).

En este caso, los componentes de la estrategia son los siguientes:

a) descomposición de los sumandos en centenas y decenas:

250 -----> 200 + 50 , 310 -----> 300 + 10

b) suma de las centenas y obtención de la primera suma parcial: 200 + 300 = 500

c) suma de las decenas y obtención de la segunda suma parcial: 50 + 10 = 60

d) suma de las centenas y decenas, es decir, integración de la suma total a partir de las sumas parciales: 500 + 60 = 560

Si bien en componentes esta estrategia es idéntica a la utilizada en el *nivel* antecedente, hay diferencias en lo que a agilidad, precisión y eficacia respecta. En este *nivel*, los sujetos no cometen errores, no necesitan del apoyo de objetos y disminuyen los tanteos para obtener el resultado. Veamos a dos de los sujetos clasificados en este *nivel*:

E. (plantea un problema con la adición 250 + 310).
M. ...(piensa)... 200, 500, (en voz baja) 560.
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
M. Pensándole acá, en la cabeza.
E. ¿Qué contó primero?
M. Los 250.
E. Hágalo con las monedas.
M. (toma 2 monedas de $ 100, 5 de $ 10 y luego 3 de $ 100 y una de $ 10; en seguida junta las de $ 100 y las cuenta, luego las de $ 10 y las cuenta). Estaba bien, son 560.

. . . . .

C. 550 (se refiere al resultado de 250 + 310).
E. Piénsele otra vez a la cuenta, le dije 250 y 310.
C. 550 ... 560 ... lo voy a hacer con monedas. (Toma 2 monedas de $ 100 y 5 de $ 10, luego 3 de $ 100 y una de $ 10; en seguida junta las de $ 100 y las cuenta, luego las de $ 10). Son 560.

Caso 2. <u>Suma de números compuestos por decenas y unidades, sin reagrupación</u> (35 + 22)

En este caso, en que también se utiliza el <u>procedimiento indoarábigo</u>, hay una diferencia sustancial en la eficiencia y la eficacia de la estrategia en relación con el *nivel* antecedente y es que en esta *etapa* no se cometen errores. Esquematizando, la estrategia tiene los siguientes componentes:

a) descomposición de los sumandos en decenas y unidades
35 ------> 30 + 5 , 22 ------> 20 + 2

b) suma de las decenas y obtención de la primera suma parcial:

$$30 + 20 = 50$$

c) suma de las unidades y obtención de la segunda suma parcial:

$$5 + 2 = 7$$

d) suma de las decenas y unidades, es decir, integración de la suma total a partir de las sumas parciales:

$$50 + 7 = 57$$

En este *nivel intermedio*, no se cometen errores de cálculo, la estrategia es única y los resultados se obtienen mentalmente, al utilizarse la estrategia recién descrita. Veámos el siguiente caso:

G. 35 y 22 ... (piensa)... 57
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
G. También conté con los dedos (imperceptible)
E. ¿Qué contó primero?
G. Primero los 25, entonces los 32
E. ¿La hace ahora con las monedas?
G. (Toma 3 monedas de 10 y una de \$5, luego toma 2 de \$ 10 y 2 de \$ 1; cuenta todas las de \$10 y luego las de \$ 5 y \$ 1, va diciendo:)
10,20,30,40,50 ... 55,56,57.

Caso 3. <u>Suma de números compuestos por decenas y unidades con reagrupación (45 + 28)</u>.*

El <u>procedimiento indoarábigo</u>, seguido por todos los sujetos gana mucho en claridad y eficacia en relación con la etapa anterior, los componentes son los siguientes:

a) descomposición de los números en decenas y unidades:

45 ---> 40 + 5 , 28 ---->20 + 8 .

b) suma de las decenas y obtención de la segunda suma parcial: 40 + 20 = 60

* Al hablar de reagrupación nos referimos a que la suma de dos o más números es igual o mayor que 10.

c) suma de las unidades y obtención de la segunda suma parcial: 8 + 5 = 13

d) obtención de la suma total integrando las dos sumas parciales: 60 + 13 = 73

Los sujetos llegan a esta estrategia después de ensayar otras erróneas o deficicentes, que pueden esquematizarse así:

(40 + 20) + 8 = 68 (omisión del 5)

(40 + 20) + (10 + 5) = 75 (redondeo del 8 a 10 y olvido de restar el 2 agregado para obtener el redondeo)

En este *nivel*, a diferencia de lo que ocurre en el *nivel inicial*, los sujetos —a excepción de uno de ellos— llegan al resultado correcto.

3.3. LIMITES Y ERRORES EN EL CALCULO

En *este nivel*, los errores se cometen sólo cuando el cálculo implica reagrupación, tales errores son:

a) errores derivados del proceso de descomposición de los números en unidades y decenas

. omisión de uno de los dos sumandos en las unidades

b) errores de redondeo

. suma de 5 ó 10 en vez del sumando dado que es menor que 5 ó que 10. (Este error no apareció en los sujetos del *primer nivel*).

. suma de la diferencia entre el sumando dado y el 5 ó 10 en vez de dicho sumando.

Desaparecen los errores de conteo típicos del *primer nivel*.

a) <u>errores derivados del proceso de descomposición del número en unidades y decenas.</u>

. <u>omisión de uno de los sumandos en las unidades.</u>

Un sujeto muestra con claridad la lógica que lleva a cometer este error:

Al sumar 45 + 28, en realidad suma 40 + 28 y, al omitir el 5 obtiene 68. Nos dice:

M. ...(piensa)... pues tendría yo que pagar ... hora verá, ... 40,50,60 ... ¿68?
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
M. <u>Agarro</u> 5 para completar
E. ¿Para completar qué?
M. Con el 8...
E. ¿Y luego?
M. Y luego ya saqué la cuenta...

En realidad, el sujeto no "agarra" el 5 y al 60 obtenido sólo le suma 8 y no 5 + 8, según indicaban los números del problema. Finalmente, se percata del error y lo corrige.

Otro de nuestros sujetos (Carmen) comete también esta omisión indicándonos que el resultado de 45 + 28 es 68; en un segundo intento corrige y obtiene 73, al respecto nos explica :

"Le conté bien, a los 45 le pongo los 20 y son 65, luego le pongo los 8 y son ... 5, 70 y 3 son 73"

Seguramente, Carmen, en el primer intento, sumó 20 + 40 y olvidó agregar el 5 al 8, como lo hizo María.

Un error similar a éste se comete en el *primer nivel* pero en el caso en que no hay reagrupación (veáse el inciso referente a la suma 35 + 22).

b) <u>errores de redondeo.</u>

. <u>suma de 5 ó 10, en vez del sumando dado, que es menor que 5 ó 10.</u>

La tendencia en todos los sujetos, lo hemos venido reiterando, es manejar cincos o dieces en las unidades para facilitar los cálculos y después —una vez realizado el cálculo con cincos o dieces— restar las unidades que se agregaron o sumar las que se restaron para obtener el 5 ó 10. En algunos casos, los sujetos olvidan restar las unidades agregadas para facilitar el cálculo, obteniendo así un número 1,2,3 ó 4 unidades mayores que el que sería el resultado correcto. Veámos la estrategia al sumar 45 + 28:

J. Son ... 45 y 28, son 60... y 8... y...(piensa) ...25... son 60... 70...85
E. ¿A qué le pensó primero para sacar la cuenta?
J. Pues primero a los 40, y luego los 20, y luego los 28 (seguramente se refiere a 8) y los 5, y ya los juntan... los centavos
E. ¿Y cómo los juntó?
J. A los 8 se le agregan los 5, y ya hace uno la cuenta .

A pesar de que la lógica subyacente en la estrategia del sujeto es correcta y repite varias veces esta explicación, no logra percatarse de que no coincide con el resultado que obtuvo y mantiene el error.

- <u>suma de la diferencia entre el sumando dado y 5 ó 10 en vez de dicho sumando.</u>

Este error, es similar al de algunos sujetos del *nivel inicial*, consiste en confundir el sumando dado con la diferencia entre éste y 5 ó 10. Observemos cómo es que se incurre en este error:

E. Si usted comprara una estampilla de $ 45 y otra de $ 28 para enviar una carta, ¿cuánto gastaría en las estampillas de esa carta?
G. Uno 45 y otro 28...45...¿45 y otro 28?...60... 60...60...72
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
G. Me quedé pensando, pero primero junté los 40 y después los 20, y luego ya junté los 8 y luego ya conté los 5
E. ¿Y a cuánto le salió?
G. 72

Al hacer la cuenta con monedas, nuestro sujeto se da cuenta que el resultado es 73.

> E. ¿En dónde se había equivocado?
> G. En los 5, porque conté los 8: 8,9,10, conté los 8 y de los otros 5 tenía que agarrar 2, para que se completaran los 70, tenían que sobrar 3, en ese de a 5

El sujeto se confunde y en vez de sobrar 3 sobraron 2, que eran con los que completaba 70, porque desvió la atención hacia ellos y olvidó el 3.

3.4. EL DESPRENDIMIENTO DE LOS OBJETOS

Una de las características del *nivel intermedio*, y que lo diferencia del anterior, es el hecho de que los cálculos se pueden realizar mentalmente, sin el apoyo de objetos. Así, exceptuando el caso en que era necesaria la reagrupación de unidades en decenas, caso en que se observó la necesidad de algunos tanteos, los sujetos resolvieron con precisión todos los cálculos sin necesidad de objetos.

4. NIVEL FINAL

4.1. CARACTERISTICAS GENERALES

El *nivel* más desarrollado en el manejo de la adición, se define por la claridad, unicidad, economía y agilidad en las estrategias de cálculo, así como por el desprendimiento de los objetos físicos y del conteo. En *este nivel*, cuyos rasgos definitorios expresamos a continuación, clasificamos a dos de los sujetos entrevistados (José y Silvino). Los rasgos del *nivel final* son los siguientes:

1. La estrategia general de cálculo, al igual que en los *niveles* ancedentes, es el <u>procedimiento indoarábigo</u>. Se observa, sin

embargo, una tendencia a no descomponer los números, sino a trabajar con las unidades y decenas en un solo bloque cuando éstos terminan en 5.

2. Se utiliza el redondeo a 5 ó a 10, para facilitar el manejo de las unidades.

3. Las estrategias son precisas y ágiles, aún en los casos en que hay reagrupación, y más económicas que en los estadios anteriores.

4. Se obtienen resultados satisfactorios con gran agilidad, en todos los cálculos solicitados.

5. No se necesita el apoyo de objetos para realizar los cálculos, todos se realizan mentalmente.

6. El conteo desaparece por completo como apoyo para realizar los cálculos.

7. Se verbalizan, paso a paso, las estrategias completas.

8. Los problemas son entendidos como un sistema lógico cerrado, los datos no se contaminan con la experiencia particular del sujeto.

4.2. ESTRATEGIAS DE CALCULO

4.2.1. Procedimiento indoarábigo.

La estrategia básica de cálculo, procedimiento indoarábigo, se presenta en algunos casos de manera idéntica a como se presenta en los *niveles* antecedentes. En el caso en que uno de los sumandos termina en 5 la estrategia se compacta y solo se descompone el sumando no terminado en 5. Aún en este caso, el principio de sumar primero lo más grande se mantiene. En seguida presentamos los casos a que fueron enfrentados los sujetos.

Caso 1. Suma de números compuestos por decenas y centenas sin reagrupación (250 + 310).

Este es uno de los casos en que la estrategia contiene idénticas componentes que en los *niveles* antecedentes:

a) descomposición de los dos sumandos en centenas y decenas

b) suma de las centenas y obtención de la primera suma parcial

c) suma de las decenas y obtención de la segunda suma parcial

d) suma de las centenas y decenas (en ese orden) para obtener la suma total.

Si bien como dijimos antes, en este caso la estrategia es idéntica en componentes a la seguida en los *niveles antecedentes*, lo que la diferencia es la gran agilidad con que es utilizada:

> E. Plantea un problema con la suma 250 + 310
> J. Tengo que pagar... 200, 500...$560 (muy rápido)
>
> . . . . .
>
> S. Pues ... 250 y 310 ... resulta ... 560 (muy rápido)
> E. ¿Cómo hizo la cuenta, cómo lo fue pensando?
> S. Pues es que como son 310 de pepitas y 250 de dulces uno le piensa que 300 y 200 son 500 y 50 y 10, 60; son 560.

Caso 2. Suma de números compuestos por decenas y unidades, sin reagrupación (35 + 22).

En este caso, la estrategia básica se ha compactado y, en vez de cuatro sumandos se manejan sólo tres pues ya no se hace necesario descomponer el 35 en 30 + 5 debido a la agilidad que los sujetos han logrado en el cálculo.

Los pasos de la estrategia pueden esquematizarse así:

a) descomposición en decenas y unidades del sumando que no termina en 5; conservación del sumando terminado en 5, sin descomposición:

35 ----> 35 , 22 ----> 20 + 2

b) suma de las decenas del sumando desagregado, con el sumando que se conservó sin descomposición:

35 + 20 = 55

c) suma de las unidades desagragadas al segundo sumando, a la suma parcial obtenida:

55 + 2 = 57

En este *tercer nivel*, la estrategia se verbaliza así:

S. 35 y los otros 22 serían ... 55 y 2, serían 57
E. Esta cuenta cómo la hizo?
S. Es que como son 35 y 22 yo le pienso que son 35 y 20, son 55, pero como sobran otros 2, ya son 57.

Esta estrategia, que es manejada con gran agilidad en el *tercer nivel*, difiere de la utilizada en los *niveles* anteriores en cuanto a la síntesis que supone: la omisión de una descomposición (35 ----> 30 + 5) y, por lo tanto, de una suma; es más económica.

De los sujetos clasificados en los *niveles antecedentes*, sólo uno (Carmen) exhibe en una ocasión esta estrategia.

Caso 3. <u>Suma de números compuestos por unidades y decenas con reagrupación (45 + 28).</u>

La estrategia que utilizan Silvino y José para resolver esta adición es nuevamente el <u>procedimiento indoarábigo</u>, empero, se perciben entre ambos algunas diferencias en cuanto a la síntesis que logran de los pasos implicados. Silvino se apoya en una estrategia que puede expresarse así:

45 + 28 ---------> (40 + 20) + 13 = 73

José, por su parte, maneja los siguientes pasos:

$$45 + 28 \text{ -------> } (40 + 20) + (5 + 5 + 3) = 73$$

Es decir, Silvino abrevia la suma 10 + 3, que José sí utiliza explícitamente. Ambos nos explican cómo resolvieron la cuenta:

> S. "Junté los puntos chicos para unir los veintes, quité 5 y 8, así quedó 40 y 20 y 13 ... resulta 73"
>
> . . .
>
> J. ¿45 y 28? ... 40 ... 60 ... 70 ... Sí, porque en un lado eran 5, en otro otros 5, pero eran $ 3 más, entonces se los junté hasta al último.
> E. Explíqueme otra vez eso.
> J. Eran 40 y 5 y 20y 5 y los 3 que quedaron bailando.

La estrategia, en este *nivel*, en comparación con el *nivel* antecedente, ha ganado en precisión, agilidad, eficiencia y economía. En el *segundo nivel*, si bien los sujetos (a excepción de Jorge) logran un resultado exacto, lo hacen después de dos intentos.

4.3. ERRORES Y LIMITES EN EL CALCULO

Una característica que diferencia ampliamente al *nivel final* de los otros *niveles* es la ausencia de errores en el cálculo. Los sujetos obtienen siempre resultados correctos en la primera aproximación. Asimismo, en los problemas planteados —que involucraban adiciones con números hasta de tres cifras— no encontramos obstáculos para el cálculo.

Es importante destacar en esta misma dirección, el valor relativo que los sujetos del *tercer nivel* son capaces de otorgar a los dedos de las manos: igual pueden representar .1 , 1 , 10 , — 100 , ó 1000 . Veamos :

> J. El que no sabe, cuenta con las manos... o sea también para contar de a 10 empieza de aquí para acá (del meñique al pulgar) ... 10,20,30, 40, 50... o sea $50 se cuentan aquí (en la mano)

> ... o sean 50 centavos ... o lo mismo si fuera a contar sumas grandes igualmente puede usted contar con las manos. O sea aquí (en la mano abierta) determina $ 50 000

Siguiendo esta lógica, y suponiendo resuelto el problema de la memorización (registro) de las sumas parciales, podríamos afirmar que los sujetos que se encuentran en niveles avanzados de cálculo son capaces de resolver cualquier adición que se les presente.

4.4. CALCULO EXCLUSIVAMENTE MENTAL

Los sujetos que se encuentran en el *nivel final* no mostraron nunca la necesidad de recurrir a los objetos para apoyar sus estrategias de cálculo. Sin embargo, de la explicación inser tada unos renglones arriba, y de la aclaración de que el palabreo ayuda a hacer cuentas a quien no sabe escribir, podemos derivar lo siguiente:

Los dedos de las manos, y el "pensar en voz alta" son dos instrumentos poderosos que apoyan el cálculo mental. Y el manejo de ambos instrumentos, en ocasiones, llega a estar a tal grado interiorizado que resulta imperceptible hasta al observador más atento.

5. A MANERA DE SINTESIS: EL ESQUEMA DE LA ADICION.

Estrategia única: procedimiento indoarábigo

Principio rector: sumar primero lo más grande.

Casos en que es utilizada: todos los casos aritméticos (sin reagrupación y con reagrupación)

Componentes de la estrategia:

- descomposicion de los números involucrados en ... centenas, decenas, unidades.
- suma de las ... centenas
- suma de las decenas
- suma de las unidades
- suma de las sumas parciales ... centenas, decenas y unidades, en ese orden.

Desarrollo progresivo de la estrategia

Primer Nivel

- Algunos sujetos no han sistematizado el principio de sumar primero lo más grande.
- La estrategia es ineficiente: se necesitan tanteos repetidos para obtener los resultados.
- Se hace necesario el apoyo de objetos para realizar los cálculos, excepto en los más elementales.
- La reagrupación constituye un obstáculo insalvable en el cálculo, los casos que la implican no se resuelven.
- Hay escasa agilidad en el cálculo.

Segundo Nivel

. Se ha consolidado el principio de <u>sumar primero lo más grande</u>.

. La estrategia es eficiente (disminuyen los tanteos observados en el *primer nivel*) excepto en los casos que implican reagrupación.

. La reagrupación deja de ser obstáculo insalvable en el cálculo, se resuelven los casos que la implican, aunque después de algunos tanteos

. Aumenta la agilidad en el cálculo

Tercer Nivel

. Permanece el principio de <u>sumar primero lo más grande</u>

. Se observa una tendencia a no descomponer los números cuando - éstos terminan en 5 ó 50

. La estrategia es altamente eficiente, no se necesitan tanteos - ni aun en los casos en que la reagrupación está implicada.

. El cálculo es exclusivamente mental

. No hay obstáculos para el cálculo, la reagrupación se maneja con soltura

. La agilidad en el cálculo es notable

II. LA SUSTRACCION : UNA SUMA PARA CALCULAR UN FALTANTE

1. GENERALIDADES

Los 12 sujetos entrevistados resolvieron problemas que involucran sustracción, con estrategias diferentes a las que implica el algoritmo escolarizado. Las estrategias detectadas fueron - dos y las hemos llamado procedimiento indoarábigo y sustracción por complemento aditivo.

El procedimiento indoarábigo - al que hemos dado igual nombre que a la estrategia de adición por basarse en idénticos principios y por haber sido registrado en el manuscrito árabe llamado Cálculo hindú - aparece en todos los sujetos cuando el cálculo no implica desagrupación. La estrategia consiste en descomponer los números involucrados y contar primero los agrupamientos mayores.

La sustracción por complemento aditivo aparece cuando está implicada la desagrupación, es decir, cuando las "columnas" no pueden restarse de manera independiente, sin haber realizado las desagrupaciones previamente. Esta estrategia consiste en transformar la resta en una suma y realizar ésta última operación sin descomponer los números.

La desagrupación constituye el obstáculo fundamental en la sustracción. Se observa que en el *primer nivel* los sujetos apenas si han perfilado estrategias para enfrentar esta dificultad no logrando nunca resultados satisfactorios ni acercamientos sistemáticos. En el *segundo nivel*, los sujetos necesitan tanteos y conteos para lograr, en ocasiones, resultados correctos. Es hasta el *ni-*

vel final donde, al incorporarse el redondeo como mecanismo de apoyo, la estrategia del complemento aditivo se torna eficiente y eficaz.

Se hace necesario señalar también que hay dos ideas que pueden ser asociadas a la resta: a) la idea de resto, ligada a la acción de quitar; b) la idea de complemento, ligada a la acción de completar(que finalmente se traduce en agregar). La idea de resto aparece predominantemente en el *primer nivel*, asociada a la acción particular de gastar dinero. Esta ligazón nos permite interpretarla como la idea más primitiva asociada a la resta.

La idea de resto va perdiendo terreno hasta que, en el *nivel final*, desaparece por completo para dar paso franco a la idea de complemento, idea en la que los sujetos basan todos sus cálculos. En las siguientes páginas analizamos el desarrollo progresivo de las estrategias de sustracción.

2. NIVEL INICIAL

2.1. CARACTERISTICAS GENERALES

Se observaron en la resolución de problemas con sustracción mayores dificultades que las detectadas en la adición. Aumentan los tanteos y los errores, así como la necesidad de objetos físicos para realizar los cálculos. Las estrategias detectadas son: el procedimiento indoarábigo en los casos en que no hay desagrupación y el complemento aditivo cuando la desagrupación aparece, aunque esta última dificultad marca los límites en la capacidad de resolución. Los rasgos que definen el cálculo que involucra a la resta, en este *nivel*, son los siguientes:

1. Se utilizan dos estrategias de cálculo:

   a) el procedimiento indoarábigo, basado en el principio de " contar primero lo más grande" y que se observa en restas que no im -

plican desagrupación.

b) La sustracción por complemento aditivo, que consiste en transformar la resta en una suma y realizar la operación sin descomponer los números.

2. Se ensayan estrategias abreviadas de cálculo (no por conteo) que fallan y entonces aparece la necesidad de recurrir al conteo de objetos para obtener la solución.

3. Ningún resultado se obtiene en el primer intento, se observan rodeos y tanteos que no siempre llevan al resultado correcto.

4. Las estrategias no están aún bien definidas y en el caso de la resta con desagrupación la estrategia es apenas perfilada.

5. Se asocia predominantemente la idea de complemento a la resta. Cuando la operación se asocia con la idea de resto se asocia también a la idea de gastar dinero y el resto se obtiene contando monedas.

6. Hay escasa agilidad en los cálculos.

7. Las estrategias se verbalizan muy fragmentadamente. Se observan mayores dificultades para verbalizar el proceso de resta que el de suma.

8. Se mezclan los datos de la experiencia personal con los datos del problema matemático planteado.

2.2. ESTRATEGIAS

Procedimiento indoarábigo

Esta estrategia, seguida por los cinco sujetos clasificados en este nivel, fue utilizada en los casos en que la desagrupación no estaba involucrada, es decir, en los casos en que las restas parciales se podían realizar independientemente. Esto quedará más claro si observamos los diversos casos a que nos estamos refiriendo.

Caso 1. Resta con centenas y decenas, sin reagrupación (450- 230)

En el caso de este cálculo, la estrategia puede esquematizarse de la siguiente manera:

a) descomposición de los números en centenas y decenas:

450 - - - → 400+ 50 , 230 - - - → 200 + 30

b) resta de las centenas, con base en la idea de

resto:	ó	complemento:
400-200=<u>200</u>	- - - - →	200+<u>200</u>=400

c) resta de las decenas, con base en la idea de

resto:	ó	complemento:
50 - 30= <u>20</u>	- - - - →	30 + <u>20</u>= 50

d) suma de las restas parciales, a partir de los agrupamientos de mayor orden, para integrar la resta final:

200 + 20 = 20

Los sujetos utilizaron esta estrategia desde el primer intento pero llegan al resultado correcto hasta el segundo, o utilizando monedas.

El esquema que acabamos de presentar nos muestra que, si bien la estrategia general tiene los mismos componentes, existen dos posibilidades en la realización de cada resta parcial: asociar la idea de resto (quitar) o la idea de complemento (encontrar el faltante). Cuatro de nuestros sujetos escogieron el segundo camino y sólo a uno de ellos observamos asociar con toda claridad la idea de quitar, idea que conforme a la modalidad que toma (asociación a la idea de gastar dinero) aparece como más primitiva, es decir, ligada aún a la acción concreta y particular que la generó:*

E. Si usted trae $450 en su bolsa y saca $230, ¿cuánto dinero le queda?
J. Me quedarían... 225... no, me quedaban $220.
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
J. Primero hice la cuenta de los 400 y los 200 y luego la de 50 y 30
E. Hágala ahora con monedas
J. (toma 4 monedas de $100 y 4 de $10; luego toma 10 monedas de $1 y las coloca en dos alteros de 5 monedas cada uno)
E. ¿Por qué no puso puras monedas de $10?
J. Porque si me gastaba de $5, tendría que cambiar
(aparte 2 monedas de $100 y luego 3 de $10)
Son los 230 que gasto ... quedan 220.

Obsérvese la claridad con que es asociada la idea de encontrar el resto - (retirar las monedas que representan el sustraendo) con la idea de gastar. Esta estrategia - representar con un conjunto de monedas el minuendo y retirar las monedas que representan el sustraendo - que deriva de asociar a la resta la idea de encontrar el resto, el sujeto la reitera consistentemente a lo largo de las entrevistas, aún cuando los problemas no estuvieran relacionados explícitamente con la acción de gastar.

Otros sujetos, en cambio, nos muestran que la idea de la cual derivan sus acciones es la de complemento:

E. Si usted trae $450 y gasta $230 en unos cigarros, ¿cuánto dinero le queda?
H. (toma dos monedas de $100 y una de $10)
Ahí está lo de los cigarros*
E. Los cigarros eran de $230
H. Por eso, ahí está, son 210
E. Y usted traía $450
H. Me quedaron $240
(toma otras dos monedas de $100 y cuatro de $10) ...

---

* El anclaje de la lógica aritmética en las acciones particulares, así como en los datos de la experiencia particular, se analiza en el inciso I de la tercera parte del escrito.

.....

E.(plantea un problema con la resta 450 - 230)
M.Le quedan...son 300...quedó 220..
E.¿Cómo hizo la cuenta?
M.Quité primero los 230...quedó 220..traía 350 (se equivocó)
le quité 230 y me quedé con 220.
E.Haga la cuenta con las monedas
M.(toma 2 monedas de $100 y forma un altero; luego toma otras 2 monedas de $100 y forma otro altero; finalmente toma 3 monedas de $10 y 2 de $10, las coloca para formar un montón de $230 y otro de $220)
Esto ($230) es lo que pagué, y me quedan éstos ($220)
E.¿Y los 450 que traía ?
M.(piensa)...de ahí agarré estos 230, y esto es lo que me quedó: 220.

Lo que esta estrategia nos muestra es en realidad una suma (230 + 220) y , si bien se observa en el último diálogo un cierto ir y venir entre la idea de complemento y el uso de la palabra quitar, la firmeza de la idea aditiva nos la muestra el sujeto posteriormente:

E.Si usted lleva $600 y gasta $300 en un pasaje, ¿ cuánto dinero le queda?
M.Llevo 600 y me gasto 300, me quedan 3...300
E.Haga la cuenta con las monedas
M.(toma 3 monedas de $100, luego toma otras 3)
3 que pago y 3 que me quedan.

En este razonamiento se observa otra vez la idea de complemento: 600 - 300 se transformó en 300 + 300 = 600.

En síntesis, en el caso del cálculo 450 - 230, cuatro de los cinco sujetos ubicados en el primer nivel, transformaron la resta en una adición. Dicha transformación puede expresarse así:

$$a - b = x \dashrightarrow b + x = a$$

Y el esquema anterior muestra el razonamiento de cuatro de nuestros sujetos a pesar de que el problema planteado expresaba explícitamente la idea de resto y no la de complemento. El caso del quinto sujeto - que difiere de los anteriores - desde nuestro punto de vista , muestra el origen de la estrategia de resta: "el gastar dinero", origen que, en este caso específico, no ha sido trascendido.

Caso 2. Resta con decenas y unidades sin reagrupación (75 - 62)

La estrategia para resolver esta sustracción no fue única en cada sujeto, en todos hubo intentos varios - siempre fallidos en el cálculo mental - que concluyeron en la permanencia del error o en el conteo de monedas para obtener el resultado exacto. En seguida mostramos los intentos y la solución definitiva que dieron los sujetos. En tales intentos subyace , aún desdibujado, el procedimiento indoarábigo .

E.En una bodega había 75 costales de frijol y sacaron 62, ¿cuántos costales quedaron en la bodega?
M.75...¿y se vendieron 62?...son 65...¿quedaron qué?,¿3?
E.Dígame cómo hizo la cuenta
M.Porque son 60 y...son 70, ¿verdad?, 75 y se vendieron 62 ...quedarían...6

al tercer intento:

M....(piensa, habla en voz baja, como contando)...son 65, quedarían ¿qué?,¿7?
E.¿Por qué 7 ?
M.Porque son 75, y se vende 63...no, 62...(piensa)...pues no la puedo sacar
E.Hágala con las monedas
M.Son 20, 40, 60, 70 y 5
(toma 2, 4, 6, 7 monedas de $10 y una de $5, se queda pensando)
E.Estos son los costales que tiene, ¿ y luego ?, se vendieron 62
M.62...se cambia éste ($5, lo cambia por monedas de $1) ...quedaron...10, 11, 12, 13 (contando las monedas)
E.Hágala otra vez pensando, a ver si le sale
M.75...(piensa)...pues no me sale, maestra
E.Fíjese qué fue lo que pasó, teníamos 75 (mostrando el equivalente en monedas)
M.De aquí quitamos 62
E.¿Y cómo lo quitamos, qué quitó primero?
M.Los 60. Quité los 60 primero y luego le iba a poner...es lo que no podía sacar, cuántos me quedaron, son los 13 ¿ verdad?
E.No, primero eran 15 (los que quedaron) porque le quitó 60
M.Me quedaban 15
E.¿ Qué más tenía que hacer?
M.Tenía que pasar 2 más...quedaban ya nomás 13.

El interrogatorio y el manejo de las monedas nos muestran que se posee, mas no bien estructurada, la estrategia que hemos llamado procedimiento indoarábigo , y que en este caso puede sintetizarse así:

$$(70 - 60) + (5 - 2)^*$$

El conteo de monedas - única alternativa de solución en otros sujetos - nos deja ver reiteradamente la utilización de la estrategia a que nos venimos refi -

*Obsérvese que, finalmente, el sujeto cambió la idea de completar por la de quitar.

riendo:

> J.20, 40, 50, 60, 70...y 5 (tomando 7 monedas de \$10 , de dos en dos y 5 monedas de \$ 1)
> Ahora aquí van los que gasté: 20, 40, 60...(tomando 6 monedas de \$10, de dos en dos, lo cual corresponde a la resta 70 - 60)...y 2 (tomando 2 monedas de \$1, lo cual puede traducirse como 5 - 2)
> Quedaron 13 (dice después de contar las monedas que quedaron sobre la mesa)

Otros sujetos, en cambio, no llegan a ninguna solución , ni aun utilizando el conteo. A guisa de ejemplo, el siguiente diálogo :

> H.20...(dudoso)
> 15...(dudoso)
> ¿64?...(dudoso)
> No, quedaron 12
> E.Explíqueme cómo hizo la cuenta para que le saliera a 12
> H.Porque mire, vendimos 62, eran 75, le quitamos 2, son 12
> (sin que se le indique toma monedas de \$10 y dice:)
> Que sean de a 50 y de a 20 (son de \$10), para acabar pronto (pone dos monedas de \$10 y una de \$5)
> E.¿Y luego, entonces a cómo le salió ?
> H.No, pues así nomás.

Las estrateagias que este sujeto intenta son contradictorias. Inicialmente parece que pretende encontrar el complemento buscando un número que no conoce, pero la estrategia falla precisamente porque desconoce el número. Posteriormente, parece que intenta descomponer los números en decenas y unidades..." eran 75,le quitamos 2 "...pero como no logra resolver recurre al conteo con monedas. Tampoco por este medio resuelve la resta.

En síntesis, la resta 75 - 62 mueve a los sujetos clasificados en el primer nivel a lo siguiente:

1. Buscar mentalmente el complemento entre 75 y 62:

   $75 - 62 \dashrightarrow 62 + x = 75$

   (esta estrategia es fallida)
2. Contar objetos para obtener el resto (no el complemento) con base en el procedimiento indoarábigo :

   a) $75 \dashrightarrow 70 + 5$, $62 \dashrightarrow 60 + 2$

   b) $(70 - 60) + (5 - 2)$

Esta última estrategia (procedimiento indoarábigo) que es utilizada cuando la estrategia de sustracción por complemento aditivo falla, no está aún bien estructurada en este primer nivel, ni aún en los casos en que la resta no implica desagrupación.

Sustracción por complemento aditivo

La estrategia de sustracción por complemento aditivo apareció en los casos en que la resta implicaba desagrupación y por lo tanto las ...centenas, decenas y unidades no podían restarse de forma independiente , sino hasta haber realizado la desagrupación necesaria. En seguida presentamos los casos a que fueron enfrentados los sujetos.

Caso 1.Resta de números de dos cifras y sustraendo terminado en cero (80-65)

La sustracción, hemos dicho, fue la operación en la que los sujetos mostraron estrategias menos claras. Percibimos, sin embargo , en la resta 80 - 65 la atención centrada en el faltante (complemento) y no en el minuendo (el todo) , así como conteo a partir de 65 (el sustraendo). Estos elementos nos permiten suponer nuevamente la asociación de la idea de complemento, y , por tanto , la utilización de la estrategia de sustracción por complemento aditivo. Es decir, la resta 80 - 65 es transformada en una suma :

$$80 - 65 \dashrightarrow 65 + x = 80$$

El trabajo con esta estrategia es el siguiente:

> E.Si un paletero vendiera una paleta a \$65 y le pagaran con \$80, ¿ cuánto tendría que dar de cambio?
> D....(piensa)...65 (en voz baja)...¿ 15 ?
> E.¿Me puede explicar cómo hizo la cuenta ?
> D.Le pensé que eran 60, ¿ o qué ?, 65...dije 60 y 5 , faltan 15 para los 80
>
> .....
>
> M.Costaba 65 la paleta, le doy 80...(piensa)...¿ me sobran 15 ?
> E.Sí.¿Cómo hizo la cuenta?
> M.Pongolos...le doy 80 y me da 15
> E.¿Y cómo supo que le daba 15 ?
> M.Pues porque, supongamos que me da de a 5 , me da 3 monedas de a 5, ó una de a 10 y \$5
> E.Haga ahora la cuenta con las monedas

M.(toma tres monedas de \$5)...

.....

H.15
E.Haga la cuenta con las monedas
H.(toma una moneda de \$10 y otra de \$5 ,las coloca una junto a la otra)
Fueron 60 de la paleta (pero no representa el 60, sólo el 15)
E.¿Y los que tenía al principio. dónde están?
H....(piensa un rato , finalmente pone 4 monedas de \$10)
20 y 20 y 20 y 20 , aquí están los \$80
E.Ahí está lo que tenía al principio, ¿ y cómo vemos que gastó 65 en la paleta ?
H.(quita las cuatro monedas y luego pone 6 monedas de \$10 y una de \$5)
E.¿Entonces cuánto le quedó de cambio ?
H.15

Observamos en cuatro sujetos esta estrategia de sustracción por complemento aditivo : (80 - 65 - - - → 65 + x = 80) , donde el valor de x se encuentra por conteo de 5 en 5 (65, 70 , 75, 80). Y en este caso la estrategia - resulta efectiva, seguramente por dos razones :

a) no hay " sobrantes " , es decir, no hay en los números involucrados terminaciones distintas de 5 ó 0. Tal situación - hemos visto anteriormente - resulta cómoda para los sujetos.

a) la diferencia entre 65 y 80 no es muy grande , se puede obtener por conteo de 5 en 5 el número desconocido.

Solamente un sujeto evidenció en este caso tanto un manejo de la sustracción por complemento aditivo como un retorno al conteo de monedas para obtener el resto :

E.(plantea el problema del paletero arriba citado)
J....Tiene que dar \$5...no¿ verdad?...¿25?,¿no?...(piensa) si la hubiera dado a 60...le sobrarían 20...pero de los 20 agarraría 5 ... le sobrarían 15.
E.Hágala con las monedas
J.(toma de 2 en 2 , 8 monedas de \$10)
Aquí están 20, 40, 60, 80...tiene que dar 15...cambiamos 10 por éstos (retira una moneda de \$10 y pone en su lugar dos alteros de 5 monedas de \$1)
Ahora sí,...¿cómo le vamos a dar el cambio? (toma un altero de cinco monedas de \$1 y una de \$10)
Aquí saco los 15 y quedan 65.

Este retorno a la obtención del resto lo interpretamos como un regreso a la idea más primitiva ligada a la sustracción : gastar dinero.

Caso 2. Sustracción de números compuestos por unidades y decenas, con reagrupación (92 - 55)

En este caso, sólo contamos con información sobre las estrategias de dos sujetos, pues los restantes se negaron a resolver el cálculo argumentando su dificultad. Con base en esta negativa y las respuestas logradas podemos afirmar que: los sujetos ubicados en el primer nivel no han construído estrategias para resolver sustracciones cuando está implicada la desagrupación. No obstante lo anterior, existen elementos para sostener que las estrategias presentes en niveles subsecuentes empiezan a configurarse :

> E.(plantea un problema con la resta 92 - 55)
> J.¿92 y gastó 55?...(piensa)...le quitamos a los 100 los $5 y los $2 que sobraron, $7...(obsérvese aquí el redondeo a 100 por una parte y, por otra parte, la atención puesta en las unidades, lo cual implica descomposición del número involucrado)
> (sin que se le indique, Josefina empieza a hacer la cuenta con monedas y no logra representar el 92, se hace necesario entonces cambiar los datos; se repite el problema con la resta 62 - 35)
> J....(piensa)...No, maestra, no me sale, es que yo casi traigo puro 100
> (sin esperar respuesta, toma monedas: 6 de $10 y 2 de $1; luego quita 3 monedas de $10, otra más de $10 y la cambia por monedas de $1, pone 2 alteros de 5 monedas de $1 cada uno)
> Ahora sacamos 35 (toma las monedas respectivas)...y quedan 27.

En este caso, se prueba inicialmente una estrategia que no funciona - porque esta estrategia es eficaz en los casos en que no hay desagrupación - se recurre entonces al conteo con monedas para resolver el problema , es decir , se retorna a la acción primitiva de gastar dinero (conducta típica de este sujeto).

En otro sujeto la estrategia inicial - también fallida - está basada en el complemento aditivo. El entrevistado intenta encontrar el faltante entre 55 y 92, al no lograrlo , recurre al conteo - aunque basado también en la idea de complemento - observemos el diálogo:con este sujeto:

> H.(empieza a tomar monedas de $5 y $10, sin que se

le indique)
E.Haga la cuenta primero nomás pensando, sin las monedas
H....(piensa)...55, pa' 92...25...porque si fueran 100 quedaban $41, porque si fueran 100, pero son 52, que - dan...22
E.Ahora sí, haga la cuenta con las monedas
H.(cuenta de una en una monedas de $1, hasta 55)
Aquí está lo de la paleta (sigue contando monedas, de una en una , se detiene y dice:)
38 (error de conteo)

Reiteramos entonces que en el primer nivel de desarrollo de las estrategias de cálculo, no se cuenta con una que permita resolver sustracciones cuando la desagrupación está implicada. El segundo nivel , entre otro de sus progresos, construirá una estrategia - aunque basada en el conteo - para resolver este tipo de cálculos.

2.3. ERRORES Y LIMITES EN EL CALCULO

La sustracción - lo hemos dicho - fue la operación que más dificultades presentó a los sujetos. Los límites del cálculo se reducen notablemente en relación con la adición. Así, la necesidad de tanteos y de conteo con objetos es generalizada. Pero el obstáculo insalvable en el cálculo lo constituye la desagrupación, elemento que, cuando aparece, cancela la posibilidad de resolución.

2.4. LA NECESIDAD DE UTILIZAR OBJETOS FISICOS PARA REALIZAR LOS CALCULOS

Se acentuó en los cálculos que involucran resta la necesidad de manejar objetos físicos. Y en este caso , los objetos se utilizan no sólo para apoyar una estrategia sino, en ocasiones, para sustituirla. Si bien en las restas - 600 - 300, 450 - 230 y 80 - 65 no se evidenció la necesidad de manejar objetos , los tanteos observados fueron varios. En la resta 75 - 62 el apoyo de los objetos fue indispensable y en el cálculo 92 - 55 ni aun con tal - apoyo se lograron resultados satisfactorios.

3. NIVEL INTERMEDIO

3.1. CARACTERISTICAS GENERALES

En el nivel intermedio los progresos fundamentales relacionados con la sustracción son dos: las estrategias se han perfilado con claridad y, en ocasiones, se logra obtener resultados satisfactorios cuando la desagrupación está involucrada. Los rasgos que definen este cálculo son los siguientes:

1. Las estrategias de cálculo son nuevamente dos:
   a) el procedimiento indoarábigo (que se utiliza cuando no está implicada la desagrupación)
   b) la sustracción por complemento aditivo (utilizada para enfrentar cálculos que implican desagrupación)
2. El manejo de objetos físicos no se hace necesario para resolver los cálculos, aunque se observan tanteos y rodeos en la resta 75 - 62. Estos tanteos aumentan en el cálculo 92 - 55 , cálculo en el que no todos los sujetos obtienen un resultado satisfactorio.
3. Se utiliza el conteo de uno en uno para apoyar la estrategia de sustracción por complemento aditivo en los casos en que los números involucrados no terminan en 5 ó 0. Pero la idea de complemento - a diferencia de lo que ocurre en el primer nivel - no se cambia por la idea de resto a su vez asociada con la acción de gastar dinero.
4. La idea predominante asociada a la resta es la idea de complemento. La idea de resto ha perdido terreno y es exclusivamente un sujeto el que la utiliza.
5. La agilidad en el cálculo ha aumentado en relación con el nivel inicial , aunque ha disminuído si se le compara con la alcanzada en este mismo nivel en la adición.
6. Las estrategias se verbalizan parcialmente. La verbalización pierde claridad en relación con la adición, aunque la gana respecto al nivel inicial.
7. No se mezclan los datos de la experiencia personal con los datos del problema matemático palnteado.

3.2. ESTRATEGIAS

Procedimiento indoarábigo

Esta estrategia, al igual que en el nivel inicial, se detectó en los casos en que no se hizo necesaria la desagrupación. Tales casos son 450 - 230 y -- 75 - 62.

Caso 1. Resta de números compuestos por centenas y decenas, sin desagrupación (450 - 230)

En este caso, la estrategia muestra los siguientes pasos:

a) descomposición , en centenas y decenas, de los números involucrados:

450 - - - -> 400 + 50 , 230 - - - -> 200 + 30

b) resta de las centenas con base en la idea de

resto:	ó	complemento:
400 - 200 = 200	- - - ->	200 + 200 = 400

c) resta de las decenas con base en la idea de

resto:	ó	complemento:
50 - 30 = 20	- - - ->	30 + 20 = 50

d) suma de las restas parciales para integrar la resta final, a partir de los agrupamientos de mayor orden :

200 + 20 = 220

Los componentes de esta estrategia son similares a los del nivel inicial, sin embargo , hay elementos que diferencian su uso en este nivel:

- los sujetos no muestran tanteos, resuelven el cálculo en el primer intento
- no necesitan objetos para obtener el resultado, el cálculo es mental
- no cometen errores
- verbalizan la estrategia completa

Veamos la utilización de la estrategia en este nivel:

E. (plantea un problema con la resta 850 - 630)
G. 800..(piensa, cuenta con los dedos)... 220
E. Cómo le hizo?
G. Pues... conté nada más los "cienes" y al último los 30 y los 20 que quedaban
E. Hágalo con monedas
G. (Cuenta monedas de 100 y de 10, hasta completar $ 630), 100,200,300,400,500,600...10,20,30,630
(toma 2 monedas de 100 y 2 de 10, para completar $ 220), 100,200,220
(junta las monedas de $ 100 y las cuenta, luego las de $ 10), 100,200,300,400,500,600,700,800,10,20,30,40,50
E. Explíquenos otra vez por qué la hizo así
G. Conté nada más las de a 100, solas y aparte conté las 50, entonces dije, si uno se llevó 30 y son nada más 50, tendrán que quedar 20

...

V. 450 ¿verdad?, y sacara 230,... me quedarán... 220
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
V. Quito los 230, y me quedo con 220
E. ¿Qué quitó primero, los quitó todos juntos o le quitó primero los 200, o los 30?
V. Los 30
E. ¿Primero quitó los 30?
V. Los 230, y me quedaron 220
E. Otra vez le voy a preguntar, quitó primero los 30, o los 200, o todos juntos?
V. Todos juntos...hago yo mi cuenta solita acá (señala su cabeza), quito los 230 y quedan 220
E. Vamos a hacer la cuenta con las monedas, había 450 en la alcancía y sacaron 230
V. (Toma 2 monedas de $ 100 y 6 de 5 : $ 230 ; luego toma otras 2 monedas de $ 100 y 4 de $ 5: $ 220 y las coloca en 2 alteros, uno junto a otro):
E. ¿Qué es eso, Vicentita? explíquenos
V. Son los 230 y éstas (señalando los alteros respectivos) son los 220
E. Ahora dígame ¿dónde están los 450 que tenía al principio?
V. (Desconcertada, finalmente, junta todas las monedas, primero las de $ 100 y luego las de $ 5) Allí están .

Nótese que la estrategia como acabamos de ejemplificarla se basa en la idea de complemento. Sólo en un único sujeto ubicado en el *segundo nivel* observamos la asociación de la idea de resto. El sujeto procede así:

C. (piensa) quedaban 230. Si eran 450, entonces sacando 230, quedaban en el cochinito (alcancía) 220.
(Sin que se le indique toma 4 monedas de \$ 100 y 5 de \$ 10; retira en seguida 2 de \$ 100 y luego 3 de \$ 10)
Me quedaron 220*

El procedimiento indoarábigo en este caso, lleva con firmeza a la resolución del cálculo planteado.

Caso 2. Resta de números compuestos por unidades y decenas, sin desagrupación (75-62)

En este caso particular el procedimiento indoarábigo —estrategia que se pone en marcha para resolver el cálculo— puede esquematizarse así:

a) descomposición de los números en decenas y unidades:

75 ---> 70+5 , 62 ---> 60+2

b) resta de las decenas, con la idea de:

resto:	ó	complemento:
70-60 = 10		60+10 = 70

c) resta de las unidades, con la idea de:

resto:	ó	complemento:
5-2 = 3		2 + 3 = 5

d) suma de las restas parciales para integrar la resta final: 10 + 3 = 13

Ilustramos en seguida el uso de la estrategia:

* La estrategia basada en la idea de resto de Carmen, puede explicarse por las enseñanzas en el Círculo de Alfabetización al que asiste, pues aunque sólo le han enseñado sumas y restas con dígitos, la idea que le han asociado puede estar ya definida. Asimismo, tal idea puede interpretarse como la permanencia de un rasgo propio del nivel antedente.

E. En una bodega había 75 costales de frijol, sacaron 62, ¿cuántos costales hay ahora en la bodega?
C. 13
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
C. Primero quito 60 y luego 2 y quedan 13
E. Haga la cuenta con objetos
C. Mejor lo apunto
(anota lo siguiente)

75 13
62

....

E. En una bodega había 75 costales y sacaron 42, ¿cuántos costales hay ahora...?
J. Alcanzan a quedar...75... se les quita 40... vienen a quedar 35... alcanzan a quedar 3 y.. 33
E. ¿Por qué quedan 33?
J. Pues quitando 40 y 30 son 70, y quito el 42 quedan 33.

Puede observarse nuevamente que los sujetos no utilizan tanteos ni objetos físicos para obtener con precisión la resta 75-62. Es decir, el procedimiento indoarábigo ha ganado mucho en claridad, precisión y eficacia en relación con el *nivel* anterior, *nivel* en que los sujetos no logran resolver este cálculo sino hasta después de muchos intentos.

Estrategia de sustracción por complemento aditivo.

La estrategia de sustracción por complemento aditivo apareció, al igual que en el *primer nivel*, en los casos en que la desagrupación está implicada. En seguida analizamos tales casos.

Caso 1. Sustracción de números de dos cifras con sustraendo terminado en cero (80-65)

La estrategia de sustracción por complemento aditivo —y que deriva de asociar a la resta la idea de complemento— en el caso de la resta 80-65 puede esquematizarse así:

$$80 - 65 \dashrightarrow 65 + \underline{x} = 80$$

donde el complemento se obtiene mediante alguno de estos procedimientos:

- de manera compacta (sin evidenciar conteo)
- por conteo de 5 en 5 , ó
- mediante la suma 5 + 10

La estrategia del complemento aditivo, es utilizada por cuatro sujetos. Un quinto sujeto (Carmen) evidencia en las monedas la idea de resto (representación del minuendo y retiro de las monedas correspondientes al sustraendo)*.

Veamos ambas situaciones:

E. Un paletero vendió una paleta a $ 65, la pagaron con $ 80, ¿cuánto tiene que dar de cambio?
M. ....(piensa)... 15
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
M. ... Le conté
E. ¿Qué le contó?
M. Los 15
E. ¿Cómo?
M. Porque 65, 70, 75, 80 (con movimiento de dedos, cada 5 mueve un dedo), son 15 los que da de cambio .

....

G. La paleta cuesta 65?...(piensa)...15
E. ¿Esta cuenta cómo la pensó?
G. Conté 65, y otros 5, 70, y otros 10, 80
E. Hágala con las monedas
G. ... 10,20,30,40,50,60 ¿y 5 verdad? (tomando 6 monedas de $ 10 y una de $ 5) (luego toma otra moneda de $ 10 y otra de $ 5 y las coloca aparte)
E. ... Estos son los 65 y esto me quedó (señalando las monedas)

....

C. $15 (sin que se le diga, toma 8 monedas de $ 10, paralelamente va decidiendo): 10,20,30,40,50,60,70,80... para dar el cambio necesito monedas de $ 1

* Hemos argumentado anteriormente acerca de la aparición de esta idea en Carmen.

(cambia una moneda de $ 10 por 10 monedas de $ 1)
Así es el cambio que se debe dar
(muestra una moneda de $ 10 y 5 de $ 1)

Los sujetos ubicados en este *nivel* resolvieron mentalmente y en el primer intento el cálculo 80-65. Se ha avanzado nuevamente en precisión y eficacia.

Caso 2. Resta de números de dos cifras con desagrupación (92-55)

El manejo de la estrategia de sustracción por complemento aditivo, en este caso nos reitera la dificultad que la resta representa para los sujetos:

- la resolución del cálculo llevó bastante tiempo, —en todos los casos se comete error inicial, en dos permanece el error
- se utiliza de forma generalizada el conteo para apoyar el cálculo.

El esquema de la estrategia es:

92-55 -----> 55 + x = 92

Donde el valor de x se obtiene por conteo simple a partir de 55 (55,56,57,58...) cuando falla el cálculo abreviado. Ejemplificamos en seguida:

G. 50 (en voz baja, se refiere al cálculo 92-55) ...(mueve los dedos contando)... 49(titubeando)
E. Dice que le quedan 49 ¿cómo hizo la cuenta?
G. También contando con los dedos, pero...
E. ¿Cómo le contó?
G. Primero le conté los 55 y de ahí agarré: 55, 56,57,58,59,60...(sigue contando en voz baja, se queda pensativa)... ahora me salen 34 que me quedaban... mejor puros de a 100 (se ríe) (hace la cuenta con monedas y se percata de que el resultado es 37)

....

E. Si usted lleva \$ 92 y paga \$ 55, ¿cuánto dinero le queda?
V. ...(piensa un rato)...32, ¿verdad?
E. Platíqueme como le está pensando
V. Le estoy pensando así: pienso en los 80, en los 82 (nótese que el sujeto cambió el dato) y luego pienso en los que voy a pagar... a los 82 le voy a quitar 55, pienso en los 55 y luego de ahí me abaso (sic) a lo que queda
E. ¿Y cuánto dijo que quedó?
V. Son 17
E. ¿Y fue contando de uno en uno o cómo?
V. Quedan los 2 pendientes (se refiere al 2 de 82) los 15 se los agrego (a los 55) y ya son 80, y 2, 17*.

Podemos afirmar, con base en lo anterior, que los sujetos ubicados en el *segundo nivel* utilizan el conteo para obtener la resta —como apoyo de la estrategia de sustracción por complemento aditivo— cuando el cálculo resulta fallido. En algunos casos los sujetos conscientes de la dificultad antes de poner en marcha la estrategia— inician directamente con el conteo.

3.3. LIMITES Y ERRORES EN EL CALCULO

En este *nivel*, los errores en el cálculo han disminuído considerablemente en relación con el *nivel* antecedente. Se observa, sin embargo, en el caso en que aparece la desagrupación (92-55) la aparición —y en algunos casos la permanencia— de errores. Es decir, si bien la desagrupación no es como en el primer nivel un obstáculo insalvable sí marca la pérdida de eficiencia en la sustracción por complemento aditivo.

3.4. LA NECESIDAD DE OBJETOS FISICOS PARA REALIZAR LOS CALCULOS

Los sujetos ubicados en el *nivel intermedio*, al enfrentarse con la sustracción, muestran la necesidad de manejar objetos físicos sólo cuando aparece la desagrupación. Y el manejo de los

* La utilización del redondeo, tal como aparece en este caso —sólo que sin error en el cálculo— es característico del *tercer nivel*.

objetos va desde el conteo enfático con los dedos hasta la realización del cálculo con monedas. Tales conteos desaparecerán en el *tercer nivel*, nivel en el que la incorporación del redondeo permitirá el cálculo abreviado y preciso.

4. NIVEL FINAL

4.1. CARACTERISTICAS GENERALES

En este *nivel final* se observa un avance fundamental en relación con la sustracción: la capacidad de resolver satisfactoriamente cálculos que implican desagrupación. Y esta capacidad se debe, principalmente, a la incorporación del redondeo como mecanismo que apoya la estrategia del complemento aditivo. En seguida caracterizamos el cálculo que, para resolver los problemas que implican sustracción, se realiza en este *nivel*:

1. Las estrategias de cálculo son las observadas en los *niveles* antecedentes:
   a) el procedimiento indoarábigo (utilizado cuando no está implicada la desagrupación)
   b) la sustracción por complemento aditivo (utilizada para resolver sustracciones que implican desagrupación)
2. Se ha incorporado el redondeo como mecanismo que vuelve eficiente la estrategia del complemento aditivo, desapareciendo así los obstáculos en el cálculo
3. Los tanteos y la necesidad de objetos físicos han desaparecido por completo: los cálculos son precisos y exclusivamente mentales.
4. La idea exclusiva asociada a la resta es la idea de complemento.
5. La agilidad en el cálculo ha aumentado notablemente en relación con el *nivel intermedio*.

6. Las estrategias, por única vez en este *nivel*, dejan de verbalizarse con total precisión. Sin embargo, constituyen la versión más acabada de las mismas si se comparan con las logradas en *niveles* antecedentes.

7. No se mezclan los datos de la experiencia personal con los datos del problema planteado.

4.2. ESTRATEGIAS

Procedimiento indoarábigo.

El procedimiento indoarábigo, si bien conserva la estructura básica observada en los niveles antecedentes, eventualmente presenta una tendencia que implica síntesis y que consiste en no descomponer el minuendo para realizar el cálculo. La estrategia se presenta nuevamente en los casos en que no está implicada la desagrupación (850-630 y 75-62).

Caso 1. Sustracción de números de 3 cifras, sin reagrupación

En este caso el esquema es el siguiente:

a) descomposición de los números en centenas y decenas:

   850 ---> 800+50 , 630 ---> 600+30

b) resta de las centenas con base en la idea de complemento:

   800-600 ---> 600+200 = 800

c) resta de las decenas, con base en la idea de complemento:

   50-30 ---> 30+20 = 50

d) suma de las restas parciales, a partir de los agrupamientos de mayor orden, para obtener la resta global:

   200+20 = 220

Esta estrategia es utilizada de manera ágil, sin tanteos, sin objetos y sin errores. Tales rasgos son los que —esencialmente— la diferencian de los *niveles* antecedentes:

> J. ...(piensa)...quedan 220... ¿sí? (refiriéndose al cálculo 850-630)
> E. ¿Esta cuenta cómo la hizo?
> J. Empecé, mire (señala dos dedos de la mano derecha) y luego acá (dos dedos de la mano izquierda) le volví a sumar otros dos dedos más, ¿cómo la ve? acá abajo (en la mano derecha) sumé 2 dedos y acá (en la izquierda) sumé los otros 2 dedos.
> E. ¿En dónde sumó 2?
> J. Pues aquí (en la mano derecha, lo que sumó primero)
> E. Y esos de que eran?
> J. 600 pesos...

La explicación del sujeto nos indica: primero <u>sumó</u> 2 (<u>6</u>00+<u>2</u>00=800) y luego <u>sumó</u> otros 2 (30+<u>20</u> = 50).

Nuestro segundo sujeto explica su estrategia de la siguiente manera:

> E. (Plantea un problema con la resta 850-630)
> S. Pues... me quedarían $ 220
> E. Dígame cómo le pensó para hacer esta cuenta
> S. Es que pensé en que me había gastado los 630 y me quedaban los 220
> E. Pero explíqueme más, ¿cómo fue haciendo la cuenta?
> S. Es que <u>como tenía 850, si me gastaba 600 quedaban 250, y como me gasto otros 30, quedan 220</u>.

Nótese en este sujeto la tendencia a no descomponer el minuendo: "...como tenía 850, si me gastaba 600 quedaban 250..." Esta es la tendencia a la síntesis a que nos hemos referido al principio del inciso.

Caso 2. <u>Sustracción de números de dos cifras sin desagrupación</u> (75-62)

La estrategia —<u>procedimiento indoarábigo</u>— muestra en uno de nuestros sujetos idénticos componentes que en los niveles <u>antecedentes</u>, en el otro, la tendencia a la síntesis vuelve a aparecer:

E. (plantea un problema con la resta 75-62)
J. ...(piensa)... sería... quedarían... 10 (en voz baja)...13
E. ¿Cómo le pensó a esta cuenta?
J. Nomás con un puro dedo (mueve el anular)... sacando por supuesto de los $ 13 que me sobraban

.....

S. (refiriéndose a la resta 75-62)... serían... 13
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
S. Es que si gastaras 60, tendrías 15, pero como gastas 62, te quedan 13.

Es claro en el primer diálogo que el esquema de descomposición de los dos números involucrados en el cálculo —observados en el *primero y segundo nivel*— se conserva. En el segundo caso, el esquema elimina una descomposición: 75 sigue siendo 75 y 62 es 60 + 2:

75 ---> 75 , 62 ---> 60 + 2

Con la eliminación de este paso, se elimina también —por consecuencia— otro más. En vez de:

(70 - 60) +(5 - 2) , se tiene (75 -60) - 2

La estrategia —tanto en el caso en que se han conservado todas las descomposiciones como en el que se ha eliminado una— es utilizada de manera ágil, sin tanteos y sin apoyo de objetos.

Sustracción por complemento aditivo.

Esta estrategia que, al igual que en los *niveles* antecedentes, aparece al estar implicando la desagrupación, incorpora un elemento —el redondeo— en el caso en que los números no terminan en 5 ó 0. La incorporación de este elemnto vuelve eficaz y eficiente a la estrategia. Analizamos en seguida los casos en que apareció la estrategia.

Caso 1. <u>Sustracción de números de dos cifras con sustraendo terminado en 0</u> (80 - 65)

El esquema de resolución, en este caso, es el siguiente:

80 - 65 -----> 65 + <u>15</u> = 80

A continuación, el uso de la estrategia:

E. Un paletero vendió una paleta de $65, le pagaron con $ 80, ¿cuánto tiene que dar de cambio?
J. ¿A 65?, ¿y le pagaron con 80... le sobraron $ 15,¿ sí?
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
J. Porque me ayudé tantito con los dos dedos estos (meñique y anular) le hice así (mueve un poco los dos dedos en actitud de realizar conteo con ellos)
E. ¿Qué fué lo que contó, cómo hizo la cuenta?
J. ...Dije 65 y luego le hice al dedo este así (el meñique, como contando) y luego volví a <u>sumar</u> el otro así (el anular, lo mueve)... entonces al último <u>sumé</u> con el otro dedo (el anular) el resto que <u>me</u> salía sobrando... de los $ 15
E. Usted tenía 65, y con este (el anular) contó 66, ó 70, ¿o qué?
J. No, con éste (anular) conté ya los últimos, los que salían sobrando porque pagué con esto, con $ 65 (mueve el meñique), entonces me sobraban $ 15...
E. Entonces el 65 lo contó aquí (en el meñique) y con éste (anular) ¿qué contó?
J. pues 15 pesos que me sobraban ya del cambio, del cambio que me daba el de la paleta

. . .

E. Dígame esta cuenta (80-65) cómo la pensó
S. Pues conté los 4 veintes que le habían dado al señor, pero le tenían que dar los $ 15, hice la cuenta de que sobraban $ 15
E. ¿Cómo pensó para saber que eran 15 los que le sobraban?
S. Pensé, en los 60; de otra moneda de 20, ya nomás tendría que cobrarse $ 15, quedaban 15.
E. ¿De los 20?
S. Sí, de los 20, y de los 80

La estrategia, puede verse, utiliza el cálculo —no el conteo— para obtener el complemento. Esto constituye un progreso en relación con el *nivel intermedio*, *nivel* en que algunos sujetos necesitan del conteo de 5 en 5 para apoyar la estrategia.

Caso 2. Sustracción de números de dos cifras con desagrupación (92-55)

En este caso la estrategia del complemento aditivo lleva al resultado en el primer intento. Y la eficacia —lo hemos señalado antes— se logra por la incorporación del redondeo. El esquema es el siguiente:

a) redondeo del minuendo, conservación del sustraendo sin transformación:

$$92 \dashrightarrow 90 + 2 \quad , \quad 55 = 55$$

b) resolución de la resta 90-55, con base en el complemento aditivo:

$$55 + \underline{35} = 90$$

c) suma de las unidades restadas al minuendo para lograr el redondeo con la resta parcial obtenida:

$$35 + 2 = 37$$

Ilustramos la estrategia con los siguientes diálogos:

E. Un paletero llevaba 92 paletas y vendió 55, ¿cuántas paletas le quedan?
S. 55...92 paletas...(piensa)...le sobraban 37 paletas
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
S. Conté los 90 y aparté 1 s 2; después que ya había contado 1 s 55 que vendió el señor quedaban 35, pero como ya había apartado 1 s otros 2, quedaban 37.

. . . .

J. ...(piensa)...llevaba 92, dice...esas sí son cuentas ya más duras para mí...(se refiere a

la cuenta 92 - 55)
55 , 60 , 70 , 80 , 90 ...35 (en voz baja)...
37 ...¿ ya ve ? , nomás es cuestión de darle
uno un poquito más larga ... quedarían 32
E.Me dijo 37
J.Perdón (sic) se me estaba olvidando, sí, le di
je 37.

Esta que acabamos de describir es una de las estrategias en que el progreso es notable en relación con el *nivel intermedio* :

a) no se observan tanteos , el cálculo es ágil y eficaz

b) no se utilizan objetos

c) no se utiliza el conteo de 1 en 1 para apoyar la estrategia

d) se ha incorporado el redondeo , mecanismo que hace eficaz el cálculo

4.3. ERRORES Y LIMITES EN EL CALCULO

En la resolución de sustracciones en el *nivel final* , no se observan errores;- esto es una diferencia sustancial en relación con los *niveles* antecedentes en- los que , o no se obtienen los resultados cuando aparece la desagrupación o se obtienen con tanteos o falta de precisión. Es decir, en este *nivel* han desaparecido los obstáculos en el cálculo que implica sustracción.

5. A MANERA DE SINTESIS : EL ESQUEMA DE LA SUSTRACCION

Estrategias: procedimiento indoarábigo y sustracción por complemento aditivo

PROCEDIMIENTO INDOARABIGO

Principio rector : restar primero lo más grande

Casos en que es utilizado : cuando el cálculo no implica desagrupación

Componentes de la estrategia:

- descomposición de los números involucrados en ...centenas, decenas y unidades
- resta de las ...centenas, mediante la idea de resto o complemento
- resta de las decenas, mediante la idea de resto o complemento
- resta de las unidades, mediante la idea de resto o complemento
- suma de las restas parciales...centenas, decenas, unidades, en ese orden

Desarrollo progresivo de la estrategia:

Primer Nivel

- Se utiliza el principio de restar primero lo más grande
- La estrategia es ineficiente, se necesitan tanteos en todos los cálculos
- Se necesita, con frecuencia, el conteo de objetos físicos para resolver los cálculos
- La estrategia es ineficaz , en algunos casos no lleva al resultado correcto
- La idea de complemento es asociada inicialmente al cálculo, pero en ocasiones se cambia por la idea de resto ,que se liga a la acción de gastar dinero
- Hay escasa agilidad en el cálculo

Segundo Nivel

- Se conserva el principio de restar primero lo más grande
- Los cálculos se realizan mentalmente
- La estrategia no es del todo eficiente, se necesitan tanteos al resolver

restas de dos cifras, sin embargo, se obtienen todos los resultados correctamente

. La idea casi exclusiva asociada a la resta es la de complemento
. La agilidad, en relación con el *nivel* antecedente, ha aumentado

Tercer Nivel

. Permanece el principio de restar primero lo más grande
. La estrategia es eficiente, no se necesitan tanteos para realizar los cálculos
. Se obtienen todos los resultados, la estrategia es altamente eficaz
. La idea exclusiva asociada a la resta es la de complemento
. No hay obstáculos para el cálculo
. La agilidad en el cálculo, en relación con los *niveles* antecedentes, es notable

SUSTRACCION POR COMPLEMENTO ADITIVO

Principio rector: completar un número

Casos en que es utilizada : cuando la desagrupación está implicada en el cálculo

Componentes de la estrategia:

. Transformación de la sustracción en adición:

$$a - b = x \dashrightarrow b + x = a$$

. Obtención del resultado mediante una suma, sin descomposición de los números involucrados :

$$b + c = a \text{ , por lo tanto, } a - b = c$$

Desarrollo progresivo de la estrategia

Primer Nivel

. El complemento se encuentra, generalmente, por conteo de 1 en 1
. La necesidad de tanteos es notable, la estrategia es altamente ineficiente
. La necesidad de utilizar objetos físicos para resolver los cálculos, es frecuente

- No se resuelven los cálculos cuando aparece la desagrupación y los números involucrados no terminan en 5 ó 0 , de hecho , la estrategia para resolver tales casos se está apenas configurand
- hay nula agilidad en los cálculos

Segundo Nivel

- La estrategia se ha perfilado con claridad
- No se hace necesario el apoyo de objetos físicos para realizar los cálculos
- La estrategia es ineficiente en los casos en que los números involucrados no terminan en 5 ó 0
- El conteo de 1 en 1 se hace necesario sólo en los casos en que los números involucrados no terminan en 5 ó 0
- La estrategia no es del todo eficaz , en algunos casos no se logran los resultados precisos .
- La agilidad en los cálculos ha aumentado en relación con el *primer nivel*

Tercer Nivel

- La estrategia es altamente eficiente, los tanteos han desaparecido por completo
- No se necesita el conteo de 1 en 1 para obtener el complemento
- La estrategia se vuelve eficaz gracias a la incorporación del redondeo , mecanismo que permite el logro de todos los resultados
- El cálculo es exclusivamente mental
- No hay obstáculos para el cálculo
- La agilidad en el cálculo ha aumentado notablemente, en relación con el *nivel* antecedente.

III. LA MULTIPLICACION : UNA SUMA PARA DUPLICAR REITERADAMENTE UN VALOR

1. GENERALIDADES

Los 12 sujetos entrevistados fueron capaces de resolver problemas de multiplicación, con estrategias diferentes a las que implica el algoritmo escolarizado. La estrategia básica observada - con diferencias en la economía, la precisión y la agilidad en cada una de los *niveles* definidos - se basa en la adición reiterada, mas no en una adición de sumandos iguales sino en una adición en donde los sumandos vienen a ser el doble del sumando antecedente. En otras palabras, la estrategia básica de multiplicación a la que tienden todos los sujetos, consiste en duplicar reiteradamente uno de los factores hasta lograr la suma equivalente al producto buscado. Es decir, la estrategia consiste en sumar dos veces uno de los factores (obtener el doble); sumar dos veces el resultado logrado (obtener nuevamente el doble , que viene a ser cuatro veces el valor del factor tomado como sumando inicial); sumar dos veces el nuevo resultado (obtener nuevamente el doble , que, en este caso, viene a ser ocho veces el valor del factor tomado como sumando) y... el procedimiento se repite tantas veces como sea necesario para lograr el producto correspondiente, o, en ocasiones, hasta encontrar un número cómodo para continuar realizando el cálculo. A esta estrategia de multiplicación la hemos llamado duplicación reiterada. Cabe señalar que la estrategia, que no se utiliza en cálculos que pueden resolverse por conteos simples, es similar a la utilizada por los egipcios según se registra en el Papiro Rhind, manual práctico de matemáticas escrito hacia el año 1700 A.C. (cf.Newman)

2. NIVEL INICIAL

2.1. CARACTERISTICAS GENERALES

Este *nivel* se caracteriza porque la estrategia de duplicación reiterada no se encuentra aún consolidada y los sujetos tienden a abandonar los cálculos antes de alcanzar la solución. Las características puntuales del cálculo realizado en este *primer nivel* para resolver problemas que involucran multiplicación son las siguientes :

1. Aparece, aún desdibujada y con manejo ineficiente, la estrategia de duplicación reiterada :
   a) se utiliza la suma de sumandos iguales (suma simple de uno de los factores) en repetidas ocasiones, o,
   b) se mezcla la suma de sumandos iguales con la estrategia de duplicación reiterada.
2. No se obtienen los resultados solicitados, excepto en los números más simples (200 x 6 ó 4 x 50, p. ej.)
3. Se hace necesario el apoyo de objetos físicos para realizar los cálculos.
4. La estrategia que dirige hacia la solución, normalmente se abandona en el camino hacia la obtención del producto pues, entre otras dificultades, los sujetos se enfrentan al problema irresoluble en este *nivel* del registro del proceso y "pierden la cuenta".
5. Se mezcla la experiencia personal con los datos del problema matemático planteado.

2.2. ESTRATEGIAS

Conteo o suma de sumandos iguales

Esta estrategia fue observada al resolver la multiplicación -- 200 x 6. Consiste en un conteo seriado, en donde la unidad de conteo la da uno de los factores (en este caso la unidad es 200), valor que también corresponde a cada uno de los sumandos iguales en que podría transformarse la multiplicación.

Esta estrategia se utiliza cuando la sencillez de los números permite traducir el cálculo en un simple conteo. Podemos esquematizar de la siguiente forma la estrategia:

200 x 6 ------> 200, 400, 600, 800, 1000, 1200

Este esquema también podría expresarse como una suma de sumandos iguales:

200 x 6 ------> 200 + 200 + 200 + 200 + 200 + 200 = 1200

En seguida ilustramos el uso de la estrategia:

E. Si se compran 6 jabones de $200 cada uno, ¿cuánto hay que pagar?
H. 6 jabones...(piensa, mueve los labios)...1200
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
H. Por 200
(Se niega a explicar más)

.....

J. ¿6 jabones? ... de 6 tienen que ser ... de 2, 200; de 4, 400; de 6... 600
E. ¿Por qué le salió a 600?
J. ¿De cuánto me dijo?
E. De 200 cada jabón, son 6 jabones
J. ¡Ah! déjeme hacer la cuenta
(Toma de 2 en 2, monedas de $100, hasta completar 6 alteros de 2 monedas cada uno, paralelamente va diciendo): 1,2,3,4,5,6,200,400,600, 800,1000,1200. Aquí está lo de 6...1200.

.....

R. (Después de algunos rodeos, piensa)...800...
(se refiere al resultado de 200 x 6)
E. ¿Eran cuántos jabones?
R. 6 jabones
E. Y 800, ¿de cuántos jabones sería?
R. ¿Cuántos jabones me dijo?
E. 6 jabones
R. Entonces serían...¿$ 1200?
E. ¿Cómo hizo la cuenta?...
R. Pues sabe
E. Hágala con las monedas
R. (Toma, de 2 en 2, monedas de $ 100, hasta completar $ 1200)

A excepción de uno de ellos, los sujetos de este *primer nivel*, necesitaron tanteos o apoyo de objetos para obtener el cálculo solicitado. Es decir, no hay un manejo mental ágil de la estrategia de conteo o suma de sumandos iguales en el *primer nivel*.

. Duplicación reiterada.

Esta estrategia, básica en el cálculo que implica multiplicación, no aparece aún con claridad, y no es manejada sistemáticamente por los sujetos del *nivel inicial*. En seguida presentamos los casos en que esto ocurre.

Caso 1. Multiplicación de un número de dos cifras por otro de dos cifras terminado en cero (12 x 30).

En este caso, algunos sujetos no movilizan aún la estrategia de duplicación reiterada, o al menos no lo hacen sistemáticamente y la suma de sumandos iguales persiste. En otros sujetos, en cambio, está más delineada la estrategia. Veámos ambas situaciones:

E. Si se compran 12 bolillos a $30 cada uno, ¿cuánto se tiene que pagar?
J. ...(piensa un rato)...¿300?...porque si fueran a 50...(pensativa)... yo casi no compro así, compro de $500...(pensativa)... no sale, maestra
E. Haga la cuenta con las monedas
J. (Toma de 3 en 3, monedas de $10 y las pone una sobre otra, hasta formar 12 alteros de $30 cada uno; paralelamente va diciendo): 1,2,3,4,5, 6,7,8,9,10,¿11?...¿12?
Aquí está lo de 12
E. ¿Cuánto es?
J. (Cuenta las monedas y va formando grupos de $100 con ellas)
Son $360 por todo.

Obsérvese que este sujeto fue registrando con las monedas el valor de cada bolillo, es decir, utilizó la suma de sumandos iguales para obtener el resultado. Este cálculo, expresado con una suma, sería el siguiente:

30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 = 360

Los otros sujetos, en cambio, muestran ya cierto manejo de la estrategia de duplicación reiterada, aunque este manejo no es todavía eficiente:

H. 12 bolillos a 30 son...(piensa)...¿4 bolillos me dijo?
E. No, le dije 12 bolillos
H. 12 bolillos a $30...(piensa)... ¿$600 son 12 treintas?
E. No
H. Ahora voy por otro rumbo...(piensa)...30,60, 120 (en voz baja)...son 320 (error)
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
H. (se niega a explicar, sin embargo, como puede observarse, por el pensar en voz alta, utiliza la estrategia deduplicación reiterada)

.....

E. Si usted fuera a comprar 5 bolillos*, ¿cuánto tendría que pagar?
R. 5 bolillos...¿a 30?...30...60...60...60...120; 120 y ...135
E. Iba en 120, ¿y luego qué le puso para que le saliera a 135?
R. Le puse 5 más (aquí Ramón está mezclando la experiencia personal, el precio real del bolillo que es de $35)
E. ¿Pero 120 era de 4?
R. Sí
E. Está bien hasta 120 de 4, a $30 cada uno, ¿y para sacar la cuenta de los 5?
R. Más 35 (vuelve al precio real del bolillo y no resuelve con precisión la multiplicación)

Esquematizando, las estrategias que observamos en este *primer nivel* para resolver la multiplicación 12 x 30, son:

30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 = 360

y

((((30+30) +60) + 120) + 120) = 360

---

* El 12 se cambió por 5 porque el sujeto se negó a resolver el problema con esa cantidad, argumentando que era muy difícil.

Esta última estrategia, que consiste en obtener y doblar el doble y que se muestra como más avanzada que la que se atiene a la suma de sumandos iguales, en ningún caso lleva a la solución correcta.

Puede decirse, entonces, que la estrategia de duplicación reiterada , presente ya en algunos sujetos, no es todavía eficiente en el *primer nivel*, al menos por lo que a este cálculo (12 x 30) se refiere.

Caso 2. Otro caso en el que apareció la estrategia de duplicación reiterada, es en la multiplicación 25 x 23.

Este cálculo también resultó difícil para los sujetos clasificados en en nivel inicial. De hecho, sólo tres sujetos persistieron por algunos minutos en la resolución, otros dos se negaron a terminar de resolverlo casi en el momento de echar a andar la estrategia para hacerlo.

Es importante destacar que aquí la estrategia de duplicación reiterada tiene sus variantes, pues no hay aún un manejo sistemático de ella. Tales variantes son:

a) Duplicar sólo al inicio y al final de la serie de cálculos. Con una suma, esta variante puede expresarse así:

(((((($\underline{25+25}$)+50)+50)+50)+50)+$\underline{250}$)+75 = 575

b) Duplicar hasta obtener un número fácilmente manejable y después sumar ese número reiteradamente.

En el caso trabajado (25 x 23) la duplicación apareció sólo dos veces, al inicio del cálculo, pues con esto los sujetos obtenían un número cómodo para proseguir el cálculo (100). Esta estrategia, en el cálculo particular trabajado, puede expresarse así:

(((($\underline{(25+25)}$ + $\underline{50}$)+$\underline{100}$)+100)+100)+100 = 500

Es decir, que en este caso, la estrategia de duplicación reiterada no es utilizada de manera consistente y uniforme por todos los sujetos. El caso que decribimos en a) lo exhibe, por ejemplo, el siguiente sujeto:

E. (plantea un problema que involucra el cálculo (23 x 25)
H. Son...50,100... son $150... porque voy contando "por dos cincuenta"... son $500 y luego otros "dos cincuenta" son 500.

El caso que describimos en b), podemos observarlo en seguida:

J. A 25, en 2 kilos son 50, en 4 son 100, y en otros 4 otros cien, son 200; y en otros 4 son 100, son 300; otros 4 son 500 (error)...¿ya están todos?, no ¿verdad?...¿faltan cuántos?, ¿3?...
E. Sí
J. De 2 son 50... de otros 2 son 100, serían $600, pero falta uno, son ...65, ¿se dice 65, maestra?
E. Setenta y cinco
J. Son $575

Caso 3. La estrategia de duplicación reiterada, reapareció en la multiplicación 17 x 18. Esta multiplicación, en donde ninguno de los factores terminan en 5 ó 0, permitió observar las diferencias en las estrategias de multiplicación ante la necesidad de descomponer o redondear los números.

Dos de nuestros sujetos se negaron a realizar este cálculo, pues para ellos resultaba "demasiado largo y difícil". Los tres sujetos que intentaron resolver el cálculo no obtuvieron el resultado correcto. Sin embargo, la estrategia que se bosqueja, muestra los siguientes componentes:

a) descomposición de uno de los factores (17) en decenas y unidades:

$$17 \dashrightarrow 15 + 2$$

b) duplicación reiterada (aunque no sistemática) del número mayor obtenido en la descomposición:

$$(((15+15)+30)+60)+120...$$

(Este proceso no culmina satisfactoriamente en ningún caso)

c) suma por conteo simple, de las unidades desagregadas para obtener el redondeo:

2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,...

ó

2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2....

(Este proceso tampoco se culmina satisfactoriamente en ningún caso)

d) suma de los dos resultados parciales para obtener el resultado final:

270 + 36 = 306

(Este resultado, como consecuencia de las deficiencias en el manejo b) y c), no se obtiene con precisión).

De hecho, si bien esta es la estrategia a que tienden los 3 sujetos que intentaron resolver el cálculo, uno de ellos sólo logró trabajar con la multiplicación 15 x 15 y ninguno logró obtener el resultado exacto:

J. (Después de varios intentos de obtener el resultado de 17 x 18, con frijoles y monedas, sin lógica aparente)
¡Ay maestra! una más fácil, ésta no me sale
E. Si fueran 15 cajas con 15 pastillas, ¿cuántas pastillas serían?
J. De 2 son 30, de otras 2 otras 30, de otras 2 otras 30, de otras 2 otras 30, de otras 2 otras 30...¿Ya son 15?
E. Todavía no
J. No, ¿verdad?, tendría que ser una sola*...de 15... en 2, 30; en 4, 60; en otras 4...120...
¡Ay maestra, mejor otra, ésta está re tardada!

.....

E. En un anaquel hay 17 cajas con 18 pastillas cada una ¿cuántas pastillas hay en el anaquel?
H. ¿18 me dijo?... de 17... por 15...(piensa un

* Esta aclaración del sujeto nos muestra un buen conocimiento sobre números pares e impares: al multiplicar por 15 (números impar) tendría que agregarse el valor de una sola caja; al multiplicar por un número par, esto no ocurriría.

rato) ... son 300
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
H. La saqué por 17... por 15 y 15... después por 2 en 2 pesos

....

Ninguno de los sujetos ubicados en el *primer nivel* obtuvo un resultado preciso en la multiplicación 17 x 18; en dos casos por manejo ineficiente; en otro porque sólo se fue capaz de trabajar con números en que no era necesario hacer redondeos, y en otros dos porque de antemano se reconoció como irresoluble la operación.

Parece entonces que los límites del cálculo que implica multiplicación, en el *primer nivel*, aparece precisamente cuando los dos factores son números de 2 cifras y no terminan en 5 ó en 0. En este caso, la estrategia básica de duplicación reiterada no lleva al resultado correcto, o se abandona, o ni siquiera se pone en marcha ante el reconocimiento de la dificultad del cálculo.

2.3. ERRORES Y LIMITES EN EL CALCULO

En el *primer nivel*, los errores y límites en el cálculo que involucra multiplicación, son básicamente tres:

a) abandono del intento de resolución antes de obtener el producto total

b) error de exactitud en el resultado, a pesar de persistir en la estrategia correcta

c) "pérdida de la cuenta", es decir, desconocimiento u olvido del número de veces que se ha repetido (sumado) el factor.

Este último error se refiere a que los sujetos manejan la suma del doble reiterdamente, sin saber cuántas veces se ha reiterado el factor tomado para hacer el cálculo.

2.4 LA NECESIDAD DE OBJETOS FISICOS PARA REALIZAR LOS CALCULOS

En este *primer nivel*, los sujetos requieren generalmente del manejo de objetos físicos para resolver satisfactoriamente los cálculos. Los casos en que esto no ocurre son aquéllos en don de la multiplicación puede resolverse por un conteo simple (200 x 6, p. ej.)o donde los números involucrados son del grupo de los que resultan cómodos para los sujetos (25 ó 50, p. ej.) Sin embargo, no siempre se llega al resultado correcto en estos casos.

3. NIVEL INTERMEDIO

3.1. CARACTERISTICAS GENERALES

El cálculo adulto no escolarizado, por lo que a la multiplicación respecta, ha avanzado en relación con el nivel antecedente porque las estrategias son más precisas, se logran más resultados y el manejo de objetos se hace innecesario.

Los rasgos característicos de este cálculo, en el *nivel intermedio* son los siguientes:

1. Se utiliza eficientemente la estrategia de duplicación reiterada. Esta estrategia es la base de todos los cálculos, excepto en el caso señalado en el punto 3.
2. La estrategia de duplicación reiterada se abandona cuando se logra con base en ella un número "cómodo" para seguir realizando el cálculo.
3. Aparece también la estrategia de suma de sumandos iguales en el caso en que uno de los factores permite reducir a un conteo simple la multiplicación.
4. No se utilizan objetos físicos para realizar los cálculos.
5. Se obtienen todos los productos solicitados, excepto en el caso en que se hace necesario combinar la estrategia de

duplicación reiterada con la descomposición de números (por ejemplo en el cálculo 17 x 18), caso que marca los límites del cálculo en este *nivel*.

En este caso, en que ninguno de los factores termina en 5 ó en 10, los sujetos abandonan la estrategia antes de obtener el resultado u obtienen productos parciales que no logran integrar en un único resultado.

6. La verbalización de las estrategias es completa, a excepción del caso al que nos referimos en el punto anterior. En este caso, los sujetos abandonan la verbalización a la par que abandonan la estrategia.

   No se mezclan los datos de la experiencia personal con los datos del problema matemático planteado.

3.2. ESTRATEGIAS

Conteo o suma de sumandos iguales.

Esta estrategia apareció, al igual que en el *primer nivel*, al resolverse la multiplicación de números compuestos por centenas "completas" por un dígito (200 x 6). Nuevamente, la estrategia puede esquematizarse así:

200 x 6 -------> 200,400,600,800,1000,1200

ó

200 x 6 -------> 200+200+200+200+200+200 = 1200

Si bien esta estrategia, exhibida por todos los sujetos, es idéntica a la utilizada en el *primer nivel*, se diferencia por la seguridad y agilidad con que se maneja: no se hacen necesarios los tanteos ni los objetos para realizar el cálculo. El uso de la estrategia, en este *nivel*, es como sigue:

E. Si se compran 6 jabones, a $200 cada uno, ¿cuánto hay que pagar?

C. ...(Mueve los labios y los dedos)...1200
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
C. Pues en dos jabones son 400, en 3 son 600, en 4 son 800, 5 son 1000 y 6 son 1200

.....

G. 6 jabones de a 200...1200
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
G. Porque casi no tuve que $5, que 300, es así como quien dice seguido, yo pienso, ¿verdad?
E. ¿Esta se le hizo más fácil?
G. Sí, porque repartir los $5, o los $15, o $25, me tardaría más en pensar
E. ¿La hace ahora con las monedas?
G. (Toma de 2 en 2, 12 monedas de $100...)
E. ¿Le fue pensando de jabón en jabón, o cómo?
G. Sí, yo fuí de uno por uno.

Este último diálogo deja ver por qué en este caso no es necesario recurrir a la estrategia de duplicación reiterada: Porque "es como irse seguido", nos dice el sujeto, es como ir contando seriadamente de 2 en 2, o de 200 en 200. 2, 4, 6, 8, 10, 12... es equivalente a 200, 400, 600, 800, 1000, 1200... en términos del razonamiento, la memorización y la habilidad que implica. Otro sujeto nos lo reitera:

J. $200...6 pasajes...son 1000...1200
E. ¿Cómo hizo esta cuenta?
J. De a dos
E. ¿Cómo?
J. De a 2: 2, 4, 6, 8, 10, 12...vienen a ser 12, 1200.

Es entonces, debido a la familiaridad con la serie numérica que implica la resolución de esta multiplicación, que el cálculo puede basarse en el conteo (o la suma de sumandos iguales) y no necesita apoyarse en otra estrategia más compleja, por ejemplo la de duplicación reiterada, estrategia que se guarda para casos más difíciles.

- Duplicación reiterada.

Esta estrategia, al igual que en el *nivel inicial*, aparece en la resolución de las multiplicaciones 12 x 30, 23 x 25 y 17x18.

Caso 1. En el *nivel intermedio*, esta estrategia resulta exitosa al realizarse el cálculo 12 x 30. La siguiente expresión esquematiza el uso de la estrategia en dicho caso:

((((30 + 30) + 60) + 120) + 120) = 360

Esta estrategia avanza en sistematización y agilidad en relación con el *primer nivel*, pues en todos los casos funciona sin necesidad de objetos y, excepto en dos de ellos, en que se obtiene 480 como producto (en vez de 360) debido a una reiteración excesiva del procedimiento, el resultado obtenido es correcto. Obsérvese el uso excesivo y el uso exitoso de la estrategia:

> E. Sí se compran 12 bolillos, a $30 cada uno, ¿cuánto se pagará?
> J. ¿De a 30?
> E. Sí
> J. 12 bolillos de a 30 (en voz baja)...30 y 30 son 60, y 60 son 120 ...120...240 y otros 120...360, 480...
> E. Aver, don Jorge, eran 12 bolillos
> J. Sí, 12 bolillos, 30 y 30 son 60, 60 y 60 son120
> E. Y ahí, en 120, ¿cuántos bolillos van?
> J. ¿En 120?...van 4 ...4 bolillos de a 30
> E. Y como eran 12...
> J. Van 4 bolillos ...en 8...en 8 otros 160, son 200 (error); y 60 y 60, otros 120, son 300, vienen a ser ...son 360... y otros 120... vienen a ser 480.
>
> ....
>
> V. (Refiriéndose a los 12 bolillos de $30)... En 2 serían 60; de otros 2 otros 60, serían 60... 120 de 4; de otros 4 otros 120...240; otros 4 serían otros 120, son ...360 (el resultado es correcto)

Nótese que en la primera situación hay un uso excesivo de la estrategia. Es decir, los sujetos algunas veces incurren en el error de seguir duplicando el resultado obtenido más allá del límite que corresponde a los datos del problema planteado. Es finalmente, un problema de registro o memoria.

Caso 2. Multiplicación de números de dos cifras, en que uno de los factores termina en 5, (25 x 23).

El cálculo 23 x 25, como venimos diciendo, movilizó la estrategia de duplicación reiterada, aunque dicha estrategia se abandona en algunos casos al obtenerse un número que resulta "cómodo" para los sujetos y que es el 100. Esquematizando el uso "puro" de la estrategia, tenemos lo siguiente:

$$((((25 + 25) + 50) + 100) + 200) + 100) + 75 = 575$$

En el caso en que la estrategia de duplicación reiterada se abandona al obtenerse un número cómodo para el cálculo, el esquema es el siguiente:

$$((((25 + 25) + 50) + 100) + 100) + 100) + 100) + 75 = 575$$

Es sólo un sujeto el que utiliza hasta obtener el producto total la estrategia de duplicación reiterada:

> E. En un molino cobraron 23 kilos de masa, si cada kilo cuesta $ 25, ¿cuánto cobraron por la masa?
> C. ...(piensa un rato)...575
> E. ¿Cómo hizo la cuenta?
> C. Hice la cuenta en 2 kilos: en 2 son 50, en 4 son 100, en 8 son 200, en otros 8 otros 200... son 400 en 16 kilos, más 100 en otros 4, que son 20, son 100...400 más 100 son 500... y 75 de 3 ...son 575.

LOs demás sujetos, clasificados en el nivel intermedio, abandonan la duplicación al encontrarse con el 100, número por demás cómodo para realizar los cálculos:

> V. ...Vendieron 23... a 25...(piensa)...¡ésta está larga, ¿eh?!...(piensa)...serían... de 2, 50; de 4 serían 100, y de otros 4 otros 100... donde son 8, ¿no?... son 200; de otros 4 serían otros 100... son 300... ¿12, verdad?... otros 4 kilos son 16... son 400; ahora de otros 4 son...20, serían 500... ¿para cuántos me dijo?
> E. Para 23
> V. Para 23... de 20 son 500, ¿no?, más otros 3 kilos serían...500, 75

E. ¿Entonces cuánto fue?
V. Sólo así me salen a mí
E. Sí, ¿y cuánto fue lo que le salió por los 23 kilos?
V. 575.

El uso de la estrategia de duplicación reiterada (con las variaciones que hemos señalado) lleva en el *nivel intermedio* a resultados exitosos en los casos en que uno de los factores termina en 5, tal es el caso que acabamos de describir. Pero el éxito alcanzado en este caso ya no será posible cuando ninguno de los factores termine en 5 ó 0. De esto nos ocupamos en el inciso siguiente.

Caso 3. En el caso de la multiplicación en que los factores terminan en una cifra diferente que 0 ó 5 (17 x 18 en este caso) los sujetos clasificados en el *nivel intermedio* utilizan nuevamente la estrategia de duplicación reiterada, aunque sin resultados exitosos.

La multiplicación 17 x 18 fue la que resultó más difícil de resolver en este *nivel*. En la resolución se observa un manejo deficiente de la estrategia de duplicación reiterada que no lleva, en ningún caso, al resultado correcto; y la dificultad radica en que necesitan manejar dos dificultades a la vez: por una parte, la duplicación reiterada —que, además, implica memorizar "de cuántos se lleva la cuenta"— y, por otra parte, la descomposición del número que se va a duplicar reiteradamente (17 se convierte en 15 + 2). Así, se hace necesario repetir el proceso de duplicación, tanto para el 17 como para el 2. En otras palabras, se necesita realizar dos multiplicaciones y, finalmente, integrar los productos en uno solo. El manejo deficiente de la estrategia se muestra de dos maneras distintas:

a) abandono de la estrategia

b) obtención de sumas parciales e incapacidad de integrar la suma final.

Veamos ambos casos:

E.Si en un paquete hubiera 17 cajetillas de cigarros y cada cajetilla tuviera 18 cigarros ¿ cuántos cigarros habría - en el paquete ?
M.Ahí sí está larguita, sabe si me salga (se queda callada, en actitud de no hacer la cuenta)
E.Dígame cómo la haría
M.Pues sería de ver lo que es en dos
E.A ver, dígame cómo
M.En dos serían ¿qué?...(piensa)...34...en dos más...30 y 30 ...68...(en voz baja)...y otros 68...(piensa)...mejor ya no, ¡ sabe si me salga ! (se niega a seguir la resolución del problema o a explicar cómo la haría)

.....

C.Ahí sí me la puso dura (se refiere a la cuenta 17 x 18; luego piensa, mueve los labios y los dedos; toma el lápiz y anota a la vez que dice:)
18 y 18, 36

36

(sigue anotando,sin que se le indique; su apunte queda así):

36 36 72 72 72 72 18

(al anotar cada uno de los 72 va diciendo :)
72 de 4, 8, 12, 16. Me falta uno para 17, ¿había cuántos ?,ya se me olvidó, ¿18 ? (y entonces anota el 18)
(después intenta sumar en voz baja los números anotados pero no logra obtener el resultado y desiste en la resolución)
E.Y entonce, ¿cuánto sería de todo?
C....(piensa un rato)...¡Ay maestra, pues no me sale!
E.Pero dígame cómo le haría para sacar toda la cuenta
C.¡Ay maestra, no puedo , ésta sí la puso dura!

Obsérvese entonces que, como señalamos anteriormente, en el *nivel intermedio* no se solucionan las multiplicaciones como 17 x 18; esto se logrará hasta el *tercer nivel*, *nivel* en que los sujetos han encontrado una forma de hacer sencillo el cálculo y que consiste en redondear uno de los factores, sumándole lo necesario para --- transformarlo en un número terminado en 5 ó 0. Este procedimiento del redondeo, los sujetos del *nivel intermedio*, lo hacen exclusivo de la adición y la sustracción.

3.3. ERRORES Y LIMITES EN EL CALCULO

Los errores que se cometen en el *nivel intermedio*, y que hemos venido presentando en los incisos precedentes, pueden sintetizarse así:

a) uso excesivo de la estrategia de duplicación reiterada

b) abandono de la estrategia antes de lograr la solución

c) obtención de sumas parciales e incapacidad de obtener el producto total.

El error tipo a) aparece en la multiplicación 12 x 30 y la exhiben dos sujetos. El error tipo b) aparece en la multiplicación 17 x 18 y lo exhiben 4 de los sujetos. El error tipo c) lo comete un sujeto, también en la multiplicación 17 x 18.

Los límites en el cálculo para la multiplicación, en este *nivel*, se encuentran en la multiplicación de números de dos cifras, cuando éstos no terminan en 5 ó 0.

3.4. LA NECESIDAD DE OBJETOS FISICOS PARA REALIZAR LOS CALCULOS

En este nivel, los sujetos no recurren al manejo de objetos para realizar los cálculos. Se efectuaron satisfactoriamente todas las multiplicaciones mentalmente, a excepción de la multiplicación 17 x 18. Esto marca una diferencia importante en relación con el *primer nivel*.

4. NIVEL FINAL

4.1. CARACTERISTICAS GENERALES

El cálculo adulto no escolarizado ha alcanzado en el *nivel final*, por lo que a la multiplicación respecta, un avance muy considerable en relación con la etapa que le antecede. Los rasgos que definen este cálculo son los siguientes:

1. Se resuelven con gran agilidad, sin errores, sin tanteos y sin apoyo de objetos todos los cálculos solicitados.

2. La estrategia de duplicación reiterada, si bien está en la base de los cálculos, se ha compactado y se multiplica ahora también por 5 y por 10 y ya no sólo por 2. Es decir, en esta etapa los sujetos tienden a buscar soluciones más económicas que la de duplicar reiteradamente y, en ocasiones, de acuerdo con la naturaleza de los números involucrados, esto se logra.

3. Aparece una nueva estrategia que utiliza el redondeo para facilitar los cálculos, en el caso en que ninguno de los factores termina en 5 ó 0. Esta incorporación del redondeo, mecanismo exclusivo del *nivel final*, es el que da la posibilidad de resolver multiplicaciones cuyos factores terminan en números diferentes de 5 ó 0.

4. La verbalización de las estrategias es detallada y completa.

5. No se mezclan los datos de la experiencia personal con los del problema matemático planteado.

4.2. ESTRATEGIAS

. Síntesis del conteo y la suma de sumandos iguales.

Esta estrategia, que constituye una síntesis de la suma de sumandos iguales descrita en páginas precedentes, se observó en la multiplicación de centenas por unidades (200 x 6).

Esta estrategia que, como dijimos, constituye una síntesis del procedimiento observado en etapas precedentes, permite a los sujetos obtener de una manera muy rápida y sin conteos aparentes los resultados. Matemáticamente, la estrategia puede expresarse así:

a) descomposición del 6 para obtener un número de fácil manejo y conservación del 200:

$$200 = 200 \quad , \quad 6 \dashrightarrow 5 + 1$$

b) obtención del resultado de 200 x 5, mediante un conteo no evidente:

$$200 \times 5 = 1000$$

c) obtención del resultado de 200 x 1:

$$200 \times 1 = 200$$

d) suma de los resultados parciales para obtener el resultado global:

$$1000 + 200 = 1200$$

Uno de los sujetos nos muestra más claramente la síntesis que hemos esquematizado mientras que el otro parece estar precisamente en camino de lograrla. Veamos ambos casos:

E. Si se pagan 6 pasajes, a $200 cada uno, ¿cuánto hay que pagar?
S. (piensa)...me resultarían $1200 por 6 (muy rápido)
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
S. Conté primero lo de 5 pasajes, fueron 1000, y al último conté los otros 200, con lo de los 5, me resultaron 200, son 1200
E. ¿Cómo contó lo de los 5, fue contando los 200 de cada pasaje, lo de dos, o lo de los 5 de una vez?
S. Conté todo junto, los 5, y aparte los otros 200
E. Pero para contar los 5 fue contando: de 2, 400; de 3, 600, de 5, 1000, ¿o cómo contó?
S. Conté de una vez los 5
E. ¿Y cómo le hizo para contarle tan rápido?
S. Es que de tanto, ya uno sabe lo que es: son 1000.

.....

J. Serían $1200 (se refiere a 6 pasajes de $200

cada uno; contesta muy rápido)
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
J. Aquí (muestra la mano derecha con los dedos abiertos, como para contar) son $1000, y luego agregué otros 200 más, a este otro (muestra un dedo de la mano izquierda) por eso le dije que eran 1200.

O sea a cada dedo le agregaba yo $200, entonces eran $1000 aquí (en la mano derecha) en una mano eran $1000 y luego ya nomás le agregué el otro dedo de $200 y eran $1200.

Si bien el último diálogo evidencia un conteo de 200 en 200, la rapidez con que se obtiene el resultado, y la atención puesta en el 1000 (el resultado de 200 x 5) nos evidencia la tendencia a compactar la estrategia. Y si bien en la capacidad de compactar las estrategias (característica del *tercer nivel*) intervienen diversos factores y habilidades, hay uno que en este caso un sujeto nos dejó ver: la participación de la memoria, la cuál es producto de la ejercitación. Y se dice de forma muy directa: "de tanto, ya uno sabe lo que es"...

Caso 1. Duplicación reiterada.

En el *tercer nivel*, esta estrategia se ha hecho flexible y toma diversas modalidades.

En la multiplicación de decenas y unidades por decenas (12 x30) uno de los sujetos utiliza nuevamente la estrategia de duplicación reiterada, pero con una modalidad que le permite obtener resultados parciales fácilmente manejables. En este caso, la estrategia puede expresarse así:

$$((((30 + 30) + 60) + \underline{30}) + 150) + 60 = 360$$

Obsérvese que la modificación a la estrategia básica de duplicación consiste en sumar 30 y no 4 x 30 (120) como tercer paso en el cálculo, pues así se obtiene un número que facilita el cálculo posterior y que es 150.

Respecto al uso de esta estrategia, se nos dice:

> J. (fuí contando) de a \$30 por dedo; 30 y 30, 60; en 4 dedos son \$120, entonces en 5 dedos fueron \$150... sí, 30 y 30, 60, y en 4 dedos son 120, más 30, son \$150... y 150 fueron \$300, más \$60, \$360, entonces le sumé con dos dedos para sacar la cuenta completa: 30 y 30, 60; por eso saqué el total de la cuenta.

Nuestro segundo sujeto utiliza una estrategia que implica la <u>duplicación reiterada</u>, pero que es combinada con la descomposición de un factor. Mostramos en el siguiente inciso la estrategia.

Esta estrategia muestra los siguientes componentes:

a) descomposición del 30 para obtener dos números de más fácil manejo, conservación del 12:

$$30 \dashrightarrow 20 + 10 \quad , \quad 12 = 12$$

b) obtención del resultado 20 x 12 , mediante <u>duplicación reiterada</u>:

$$(((20 + 20) + 40) + 80) + \ldots$$

c) obtención del resultado 10 x 12, mediante un procedimiento compacto, apoyado en la memorización de ciertos productos.

d) suma de los productos parciales para integrar el producto total.

Silvino expresa así el uso de la estrategia:

> S. ¿12 costales?
> E. Sí
> S. ...(piensa)... Viene resultando 200 kilos
> E. ¿Cómo contó para sacar la cuenta?
> S. Contó los veintes entre 12 costales, y después contó los dieces
> E. ¿Cómo contó los veintes y después los dieces?
> S. O sea, son 12 costales ...o sea, les fuí poniendo de a 20 kilos por 12, y son 240... ¡ahí, estoy mal, no son 200, son ...360!...luego puse de a 10 por 12, son otros 120 y son 360

E. Pero dígame cómo fue contando los veintes y los dieces
S. De 2 en 2 primero: en 2 son 40, en 4 son 80, y así...hasta que llegué a 12, de 12 costales
E. Así contó los veintes, ¿y los dieces?
S. Ahí ya me fuí más parejo, o sea más rápido.

Esta multiplicación (12 x 30) es de los contados casos en que se movilizan estrategias con elementos distintos entre sujetos del mismo *nivel*. Probablemente esta última estrategia, basada en la descomposición del 30 (30 ---> 20 + 10) se eche a andar por la conciencia que tiene el sujeto de su destreza al multiplicar por 10. Es decir, se han memorizado ya algunos productos (por ejemplo 10 x 5 ó 10 x 10) y esto permite aplicar estrategias más fáciles donde pueden ser utilizados.

. <u>Multiplicación basada en el redondeo de un factor</u>.

Esta estrategia, exclusiva del *tercer nivel*, es utilizada para manejar dos factores que no terminan ni en 5 ni en 0. El progreso respecto al *nivel antecedente* y que es precisamente el que permite la resolución de cálculos de este tipo, consiste en la utilización del redondeo para facilitar el cálculo. Explicamos: uno de los factores se redondea para obtener un número de fácil manejo (18 + 2 = 20 en este caso) y una vez hecha la multiplicación con el nuevo factor, se resta el excedente debido al redondeo. Esquemáticamente, los componentes de la estrategia son:

a) redondeo de uno de los factores, conservación del otro factor: 17 = 17 , 18 ------> 18 + 2 = 20

b) obtención del resultado de la nueva multiplicación, de manera compacta: 17 x 20 = 340 (sin duplicación evidente)

c) cálculo del excedente incorporado para obtener el redondeo, en forma compacta: 17 x 2 = 34

d) resta del excedente incorporado para obtener el redondeo: 340 - 34 = 306.

Nuestros sujetos verbalizan así el uso de esta estrategia:

J. ...(piensa)...son 320 cerrados porque hay que quitarle 20...no, no, no... \$ 318, cerraditos ...porque son 17 manojos, hay que quitar 2 a cada 20 pesos
E. ¿Cómo hizo la cuenta, como si fuera de a 20?
J. Sí, entonces al último yo a la misma cuenta le fuí quitando de a \$ 2 para podérsela yo sacar, son \$ 318 cerraditos.
E. ¿Cuánto le quitó?
J. 22
E. ¿Por qué?
J. Porque \$2 a cada manojo, haga la cuenta y verá que sí sale (piensa), no, hay que quitarle \$24, perdóneme (sic)...quedan \$ 306...yo me estaba equivocando por \$1, \$1 es el que andaba mal, bueno, no andaba muy mal, pero no me salía la cuenta.

.....

S. Ahí está más larga
E. Pero, ¿sí la puede sacar?
S. Sí, nomás espéreme...(piensa, mueve los labios) ...me saldrían 306
E. ¿Cómo la hizo, cómo contó para sacar los 306?
S. Pensé en que fueran de a 20, ahí serían 340, si fueran de a 20, pero luego ahí hay que irle quitando porque sobraban 2 en cada una
E. ¿Cómo?
S. Sí, 2 en 17,...son 34, es lo que hay que apartar de lo que teníamos, y salió ¿a cuánto le dije?
E. 306
S. Sí, 306

En este caso en los dos sujetos es idéntico el razonamiento, y la potencia de éste radica en la utilización del redondeo, mecanismo que simplifica el cálculo y permite compactarlo. No es lo mismo <u>duplicar reiteradamente</u>, a la vez que se maneja la descomposición de números (recuérdese la estrategia utilizada en el *segundo nivel*), que multiplicar un número de fácil manejo (20) y después realizar una resta para quitar el excedente agregado por el redondeo.

4.3. ERRORES Y LIMITES EN EL CALCULO

Uno de los rasgos que distinguen al *nivel final* es la ausencia de errores y límites en los cálculos a que fueron enfrentados los sujetos. En el caso de la multiplicación resuelven todos los cálculos sin errores, y con precisión y agilidad encontrando las estrategias que permiten lograr esto. Y es precisamente esta ausencia reiterada de errores uno de los rasgos definitorios del *nivel final*.

4.4. EL DESPRENDIMIENTO DE LOS OBJETOS

Parece ya redundante señalar el desprendimiento total de los objetos físicos propio de este último *nivel* del desarrollo de las estrategias de cálculo aritmético.

5. A MANERA DE SINTESIS : EL ESQUEMA DE LA MULTIPLICACION

Estrategias: conteo o suma de sumandos iguales, duplicación reiterada y multiplicación basada en el redondeo de un factor.

CONTEO O SUMA DE SUMANDOS IGUALES

Principio rector: conteo simple

Casos en que es utilizada: esta estrategia es poco potente, se utiliza en un reducido número de casos aritméticos (cuando los números involucrados son dígitos o pueden manejarse como dígitos y el cálculo puede resolverse por un -- conteo simple memorizado previamente)

Componentes de la estrategia

. Conteo simple, donde la unidad del conteo es el valor de un factor:
200 x 6 - - - - - → 200, 400, 600, 800, 1000, 1200

Desarrollo progresivo de la estrategia:

Primer Nivel

. La estrategia es eficaz, se logran resultados correctos en todos los casos
. La estrategia es ineficiente, se necesitan tanteos para resolver los cálculos
. Se necesita el apoyo de objetos físicos para resolver los cálculos
. Hay escasa agilidad en los cálculos

Segundo Nivel

. La estrategia es eficaz, se logran resultados correctos en todos los casos
. La estrategia se torna eficiente: no se hacen necesarios los tanteos para obtener los resultados
. No se necesita el apoyo de objetos físicos, el cálculo es mental
. La agilidad en el cálculo ha aumentado

Tercer Nivel

. La estrategia es altamente eficiente y eficaz

- El cálculo es exclusivamente mental
- Se ha abreviado el cálculo y se obtienen los resultados sin conteo evidente
- Se han memorizado algunos productos, lo que permite la agilidad notable que se ha alcanzado en el cálculo

DUPLICACION REITERADA

Principio rector : duplicar reiteradamente un factor

Casos en que es utilizada: esta estrategia es la más potente y generalizada para resolver multiplicaciones , se utiliza en todos los casos, excepto en aquéllos en que la sencillez de los números permite resolver el cálculo con un conteo simple.

Esquematización de la estrategia :

- para el caso en que el factor que indica el número de duplicaciones es un número par:

$$((((n + n) + 2 n) + 4 n) + 8 n) \ldots$$

- para el caso en que el factor que indica el número de duplicaciones es un número impar :

$$((((n + n) + 2 n) + 4 n) + 8 n) \ldots + n$$

Desarrollo progresivo de la estrategia:

Primer Nivel

- La estrategia no se encuentra aún consolidada, frecuentemente se mezcla con la suma de sumandos iguales
- La estrategia no es eficiente ni eficaz, no se obtienen resultados correctos casi en ningún caso, se tiende a abandonar la estrategia antes de lograr los
- Se necesita, de manera generalizada, el apoyo de objetos físicos para realizar los cálculos
- Hay problemas para memorizar el número de duplicaciones que se han realizado
- Hay escasa agilidad en el cálculo

Segundo Nivel

. La estrategia se ha consolidado
. La estrategia es eficaz, excepto en las multiplicaciones de números de dos cifras con terminaciones diferentes de 5 ó 0. El problema se evidencia de dos formas : mediante la obtención de sumas parciales que no se logran integrar en una suma (producto) final, o mediante el abandono de la estrategia
. La eficiencia ha aumentado (los tanteos han disminuído)
. El cálculo es exclusivamente mental
. La agilidad en el cálculo ha aumentado en relación con el *nivel* antecedente

Tercer Nivel

. La estrategia es eficiente y eficaz en todos los casos
. El cálculo es exclusivamente mental
. La estrategia deja de utilizarse en los casos en que los dos factores tienen terminación diferente de 5 ó 0, caso en que se sustituye por otra que describimos en el siguiente inciso
. No hay problemas para memorizar el número de duplicaciones que se han realizado o para integrar las sumas (productos) parciales en un resultado global
. La agilidad en el cálculo es notable

MULTIPLICACION BASADA EN EL REDONDEO DE UN FACTOR

Principio rector : redondeo y reiteración de un factor

Esta estrategia es exclusiva del *tercer nivel*, constituye un progreso en relación con los *niveles* antecedentes ya que incorpora el redondeo para facilitar - y lograr - el cálculo cuando la duplicación reiterada se torna compleja e ineficaz.

Casos en que es utiliza da: cuando los dos factores son números de dos cifras con terminación diferente de 5 ó 0.

Componentes de la estrategia:

. Redondeo de un factor, conservación (sin alteración) del otro factor
. Realización de la "nueva" multiplicación, de forma abreviada, sin duplicación evidente
. Resta del excedente incorporado por el redondeo y obtención del producto total

- El cálculo es exclusivamente mental
- La eficacia y agilidad con que esta estrategia es utilizada son notables.

IV. LA DIVISION : UNA SUMA PARA PROBAR UN COCIENTE

1. GENERALIDADES

Los 12 sujetos entrevistados resolvieron problemas que involucran división. Al igual que en las otras operaciones, el procedimiento utilizado es distinto al escolarizado. En este caso, la estrategia fundamental se basa nuevamente en la adición y consiste en suponer un resultado (cociente hipotético) y probar si es el adecuado, sumándolo tantas veces como indica el divisor. Esta estrategia, que llamaremos suma reiterada del cociente hipotético, se combina con la descomposición del dividendo - se dividen las centenas, las decenas y las unidades por separado con este mismo procedimiento - y se maneja con más o menos "certeza", de acuerdo con el *nivel* de desarrollo del cálculo aritmético en que se encuentren los sujetos.

El obstáculo más fuerte en el manejo de la división lo constituye el residuo, elemento que marca la pérdida de la eficiencia en la estrategia y que hace exclusiva del *nivel final* la resolución de los cálculos que la implican. Y es que en este *nivel* los sujetos han tomado conciencia del "sobrante" y han desarrollado una nueva estrategia - basada también en la suma reiterada pero en esta ocasión no del cociente hipotético sino de múltiplos del divisor - que facilita el cálculo para manejarlo.

En seguida nos ocupamos de esta división propia del pensamiento adulto no escolarizado que, como dijimos antes, también tiene en la base a la adición.

2. NIVEL INICIAL

2.1. CARACTERISTICAS GENERALES

En este *nivel inicial* la estrategia de cálculo para resolver -

problemas que implican división- suma reiterada del cociente hipotético - se encuentra ya definida aunque topa con un obstáculo insalvable: el manejo del "residuo intermedio". Las características esenciales de este cálculo son las siguientes:

1. La estrategia básica de cálculo es la suma reiterada del cociente hipotético.

2. La suma reiterada del cociente hipotético se combina con la descomposición del dividendo, de acuerdo con la naturaleza de los números involucrados.

3. No se resuelven todos los cálculos solicitados, se necesitan tanteos y en ocasiones objetos para obtener los resultados en los casos en que éstos se logran.

4. El residuo intermedio (sobrante que se obtiene al dividir los agrupamientos de mayor orden, es decir las centenas o las decenas), residuo que se tiene que integrar con los agrupamientos de menor orden para continuar la división, marca los límites del cálculo relacionado con la división en este primer nivel.

5. La verbalización de las estrategias es, al igual que en las otras operaciones, incompleta.

6. Se mezclan los datos de la experiencia personal con los datos del problema matemático planteado.

2.2 ESTRATEGIAS

. Suma reiterada del cociente hipotético (sin descomposición)

Caso 1. Esta estrategia apareció en varias ocasiones. Uno de los casos en que es utilizada es el de la división exacta de centenas entre unidades (900 : 3).

Cuatro de los cinco sujetos ubicados en la etapa inicial, fueron capaces de solucionar esta división. En el proceso se observaron algunos errores de intepretación (comprensión) del problema y algunos tanteos. Los errores de interpretación llevaron a los sujetos a multiplicar (sumar reiteradamente el dividendo) en vez de dividir (lo cual implicaría, en todo caso, sumar reiteradamente el divisor).* Finalmente, la estrategia que lleva a la solución a cuatro de nuestros cinco sujetos tiene los siguientes componentes:

a) suposición de un resultado (cociente hipotético):

$$900 \div 3 \dashrightarrow ¿\ 300\ ?$$

b) prueba de la validez del cociente hipotético, mediante suma reiterada del mismo:

$$300 + 300 + 300 = 900$$

(la prueba de la validez se realiza mediante la comparación del número de veces en que es utilizado como sumando el cociente hipotético y el número que corresponde al divisor, así como por la igualdad que deberá existir entre el resultado obtenido en la suma y el dividendo)

Si la prueba no otorga validez al cociente hipotético, entonces:

c) suposición de un nuevo cociente (cociente hipotético) y repetición del proceso, hasta encontrar el que sea valido.

En el primer nivel, se observó la necesidad de repetir el proceso, y uno de nuestros sujetos no logró obtener el cociente correcto. También se observó la necesidad de utilizar monedas. Veamos el manejo de la estrategia en los sujetos del -

* Resulta interesante destacar que, a excepción de este caso, que finalmente es corregido, los sujetos no mostraron dificultades para elegir la operación adecuada para resolver los problemas a lo largo de la entrevista.

primer nivel:

E. Si se pagan $900 por 3 kilos de arroz, ¿cuánto es de cada kilo?
J.. (piensa... en dos sería ... ¿uno ochenta?*
E. Le dije $ 900 por 3 kilos
J.. (piensa un rato) ..., esta re'difícil también, maestra... (piensa, se queda callada un rato)
E. Hágala con las monedas si quiere
J. (toma 2 monedas de $ 100 y las pone una sobre otra, luego hace otro altero de $200 y luego otro más) ¿Así, maestra?
E. Hágale usted la cuenta, eran $900 por 3 kilos
J. Van 600, ¿verdad?
E. Sí
J.. (piensa) ... En 300 el kilo ¿no maestra? (toma, una por una, 3 monedas de $100 y la va poniendo para completar $300 en cada uno de los alteros de $200 que había formado inicialmente)

.....

D.. (piensa) ... 200 (en voz baja)... 200 (en voz baja)... (piensa un rato) ... 300 (en voz baja)... (piensa) ... 300 y 300 son - 600... y 300 ... 900 (siempre en voz baja) 900 (dirigiéndose a la entrevistadora)
E.. ¿900?
D. Por 3 kilos
E. Por 3 kilos fueron 900, entonces ¿a cómo le pusieron el kilo?
D. Como a 300, ¿no?

Este "tanteo", es decir, esta necesidad de modificar el <u>cociente hipotético</u> porque la estimación inicial no es correcta, se observó en cuatro sujetos. Un quinto sujeto, no resolvió el problema, pues se mostraba enfadado con el cuestionamiento. Su único intento nos permite ver la tendencia a multiplicar en vez de dividir que ya hemos mencionado:

E. Si se pagaran $900 por 3 kilos...
H.. (piensa) ... ¿18?
E. ¿Por qué 18?
H. Porque 9 y 9, 18 ¿no?

* Nótese aquí la tendencia a multiplicar, es decir, a sumar reiteradamente el dividendo (900 + 900 = 1800) lo que Josefina expresa como "1.80".

E. ¿Y así es como le salió la cuenta? eran 900 por tes kilos
H ¿Ahora quiere que le diga el resultado de los cienes?
E. Sí
H...(piensa) ...$2700

Nótese cómo el problema se interpreta incorrectamente y la suma que se realiza lo lleva a multiplicar 900 x 3 (900 + 900 + 900) y no a la división 900÷ 3, operación que implicaría la suma 300 + 300 + 300.

Caso 2. En la división 90 ÷ 2 reapareció la estrategia de suma reiterada del cociente hipotético que acabamos de describir. La estrategia, en este caso, tiene los mismos componentes que en el caso 900 ÷ 3; se basa en la suposición de un cociente y la prueba de la validez del mismo mediante su suma reiterada. - El esquema, en este caso es el siguiente:

a) suposición de un cociente (cociente hipotético):

90 ÷ 2 --------------> ¿45?

b) prueba de la validez del cociente hipotético mediante su suma reiterada:

45 + 45 = 90

Si el cociente hipotético no resulta válido, entonces:

c) suposición de un nuevo cociente hipotético y repetición del proceso hasta encontrar el adecuado.

En el primer nivel se observa en general una necesidad de repetir el proceso, pues los sujetos no son capaces de estimar el cociente adecuado en el primer intento:

D. 90 en dos cajas de cerillos ... (piensa) ... 90 ... ¿a cuánto me sale? ... (en voz baja ,

piensa un rato) ¿ a 45 ?
E. Sí, ¿cómo le pensó para sacar la cuenta?
D. Pues fui contando así, como a cuánto salía de a 20, o de a 10, o de así
E. Usted dice que contó de a 20...
D. Y no me salía
E. Dígame cómo le contó y vió que no le salía
D. Sí, conté hasta 60 y ya veía que no me salía, luego le puse ¿cuánto? ... 45
E. Del 20 luego luego se pasó a 45 ó primero le puso nada más de a 40, o cómo?
D. 20, y luego otros 10, o ya ni me acuerdo ... (en voz baja y pensativa dice:) 40.

El uso de la estrategia, que nos muestra la suposición de varios cocientes hasta llegar al correcto, es similar en todos los sujetos clasificados en la primera etapa.

. Suma reiterada del cociente hipotético, (con descomposición del dividendo)

Esta estrategia, que se apoya en principios idénticos a la recién descrita, apareció en las divisiones 480 : 4 y 575 : 5, es decir, en las divisiones exactas en que el dividendo está compuesto por centenas y decenas o centenas, decenas y unidades. En seguida analizamos los dos casos a que enfrentamos a los sujetos.

Caso 1. (División 480 ÷ 4)

La división 480 ÷ 4 presentó más dificultades que las que hemos analizado hasta aquí. De hecho, sólo dos sujetos la resolvieron mentalmente. En otros casos fue necesario modificar los datos. No obstante estas diferencias, los componentes de la estrategia seguida en todos los casos, son los siguientes:

a) descomposición del dividendo (480) en centenas y decenas:

480 ----> 400 + 80

b) resolución de la división 400 ÷ 4 mediante la suma reiterada del cociente hipotético:

. suposición de un cociente: 400 ; 4 -----> ¿100?
. comprobación de la validez del cociente hipotético con base en la suma reiterada del mismo: - 100 + 100 + 100 + 100 = 400 (si el número de veces que se sumó el cociente hipotético y el número que corresponde al divisor es el mismo, y si la suma obtenida y el dividendo son iguales, entonces el cociente hipotético es válido, si no, se supone otro cociente)

c) resolución de la división 80 ÷ 4, mediante suma reiterada del cociente hipotético.

d) suma de los cocientes parciales para obtener el - cociente global:

100 + 20 = 120

Ilustramos en seguida el uso de esta estrategia, tanto en el caso en que se obtiene el cociente adecuado como en el que éste no se logra:

M. ¿Por cuatro jabones me cobraron 480?
E. Sí
M..(piensa) ... ¿4 jabones dice?
E. Sí
M..(piensa) ... ¿ como a 120 ?
E. Sí, a 120, ahora explíqueme cómo la hizo
M. Primero a 100, y luego los veinte.

....

H. ¿4 a 480? ... (piensa)...son 105
E. ¿Cómo sacó el 105?
H. Porque ya valen 2, $210 (sic)
E. Pero dígame cómo fue pensando la cuenta
H. Corté los 400 y luego ya puse los demás
E. ¿Cómo?
H. Los 80, los repartí después

E. ¿Después de los 400?
H. Sí

Caso 2. (División 575 ÷ 5)

Una estrategia similar a la que hemos descrito se utiliza en el primer nivel para resolver la división - 575 ÷ 5; nuevamente se separan las centenas y se dividen con base en la suma reiterada del cociente hipotético. Posteriormente se dividen con la misma - estrategia las decenas y unidades (75) las cuáles se conservan en un solo paquete y así se "reparten", es decir, no se utiliza la descomposición 75 ---> 70 + 5, seguramente porque el 75 es uno de los números que - resultan de fácil manejo para los sujetos. Esquematizando los pasos de la división a que nos venimos - refiriendo, tenemos:

a) descomposición del 575 en centenas y decenas y unidades:

575 ----> 500 + 75

b) resolución de la división 500 ÷ 5, mediante la suma reiterada del cociente hipotético:

500 ÷ 5 ----> ¿ 100 ?
100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 500

c) resolución de la división 75 ÷ 5, mediante la suma reiterada del cociente hipotético :

75 ÷ 5 ----> ¿15?
15 + 15 + 15 + 15 + 15 = 75

d) suma de los cocientes parciales para obtener el cociente global

Un manejo típico de esta estrategia, en el primer nivel es el siguiente:

> M. Vendrían siendo ¿qué? ... (piensa) ... 100...100 si fuera en 500...125... (piensa)... en 5 me dijo ¿verdad?
> E. Sí
> M. Sale más, ya voy en 600... (piensa) ... sale en 115, ¿no, maestra?
> E. Sí, ahora explíqueme cómo la fue haciendo
> M Primero vi en 100, en 500, luego el 15, pero me había pasado, ya iba yo en 600.
> E. ¿Por qué, de a cómo le había puesto?
> M. De a 25, creo, pero luego ya le bajé.

Nótese que, en este último caso (575 ÷ 5) y que hemos ilustrado con el trabajo de Margarita, los tanteos han aumentado, aunque esta división está aún "al alcance" de los sujetos del primer nivel, pues no conlleva la dificultad que marca el límite del cálculo en este nivel y que es el cociente intermedio. De esto último nos ocuparemos en seguida.

Caso 3. (División 840 ÷ 3)

En la resolución de la división 840 ÷ 3, reapareció la estrategia de suma reiterada del cociente hipotético (sin descomposición). Sin embargo, esta división marca en el primer nivel los límites del cálculo con tal operación, pues ninguno de nuestros sujetos logró resolverla. Algunos se negaron a hacerlo argumentando la dificultad, en otros casos hubo necesidad de cambiar los datos y, quienes sí intentaron resolverla con los datos originales, no lograron obtener el resultado.

La estrategia observada, aunque no lleva al resultado, en este caso puede esquematizarse así:

a) suposición de un cociente (cociente hipotético):

840 : 3 ----> ¿ 300 ?

b) prueba de la validez del cociente hipotético mediante su suma reiterada:

$$300 + 300 + 300 = 900$$

c) percepción de la no validez del cociente hipotético e incapacidad de modificarlo.

Esta incapacidad de modificar adecuadamente el cociente hipotético lleva a los sujetos a errores como los siguientes:

E. Si usted tuviera que comprar bolsas de papel, de a $ 3 cada una, ¿cuántas alcanzaría a comprar con $840?
H.. (piensa) ... $ 800... (piensa un rato)... ¿70 bolsas?
E. ¿Por qué 70 bolsas?
H. Aparté los pesos
E. ¿Cuáles pesos?
H. Los 300... y los otros 300
E. ¿Cómo?
H. En los otros 300, es donde ya no salió
E. Explíqueme cómo es que ya no le salió a 300 y le salió a 70
H. (se niega a seguir explicando)

....

D. 840... (en voz baja) ... ¿que me los dieron a cómo?
E. A $ 3
D.. (piensa, hace conteos en voz baja un rato) Dos saldrían a 300 y uno a 240
E. Hágala otra vez, porque no le entendí muy bien
D. ¿Por qué, cuánto me dijo?
E. Eran $ 840, para comprar conos de a $ 3
D. ¿ De a 3 ? , ¡ ah !, yo los saqué de a 300... (piensa un rato) ... es que no se contarla - bien ... (se queda callada, no continúa)

Estos sujetos nos muestran la incapacidad de modificar el cociente supuesto inicialmente (300)de manera satisfactoria.El obstáculo radica precisamente en que la expectativa de los sujetos es obtener una suma igual al dividendo y, por supuesto, tal expectativa no se cumple.

2.3 ERRORES Y LIMITES EN EL CALCULO

Parece ser - y esto queda claro por las estrategias que utilizarán los sujetos de etapas más avanzadas - que la causa de la dificultad estriba en la incapacidad de manejar el residuo. Explicando : la división 800 ÷ 3 - primer cálculo parcial necesario para obtener el resultado global de 840 ÷ 3 - implica residuo y los sujetos son incapaces de manejarlo. Se nos dice:

> H... "300 ... y los otros 300 ... en los otros 300 es donde ya no salió..."
>
> D... "Dos saldrían a 300 y uno a 240"

Es decir, los sujetos buscan un resultado exacto (sin residuo) en su aproximación, al no lograrlo abandonan la solución o afirman un resultado erróneo porque no han incorporado en su reflexión y su estrategia la posibilidad de un sobrante, es decir, de que el resultado de la suma no coincida con el divisor. He aquí los límites del cálculo de cocientes en este primer nivel.

3. NIVEL INTERMEDIO

3.1. CARACTERISTICAS GENERALES

El nivel intermedio conserva la suma reiterada del cociente hipotético como estrategia básica de división cero, en relación con el nivel antecedente han disminuido notablemente los tanteos, haciéndose más ágiles las soluciones. Las características del cálculo realizado para resolver los problemas que implican división, son las siguientes:

1. La estrategia básica de cálculo es la suma reiterada del cociente hipotético.

2. La suma reiterada del cociente hipotético se combina con la descomposición del dividendo, de acuerdo con la naturaleza de los números involucrados en el cálculo.

3. El residuo intermedio (sobrante que se obtiene al dividir los agrupamientos de mayor orden, es decir, las centenas o las decenas y que se tiene que integrar con los agrupamientos menores para continuar la división) marca los límites del cálculo relacionado - con la división en este segundo nivel.

4. La verbalización de las estrategias es aún incompleta.

5. No se mezclan los datos de la experiencia personal con los datos del problema matemático planteado.

3.2. ESTRATEGIAS.

. Suma reiterada del cociente hipotético (sin descomposición)

En el nivel intermedio esta estrategia apareció en dos casos: 900 ÷ 3 y 90 ÷ 2. A continuación se analizan tales casos.

Caso 1. División exacta de centenas entre unidades (900 ÷ 3).

Este cálculo fue resuelto mentalmente por todos los sujetos clasificados en el nivel intermedio, aunque se muestra aún, en algunos casos, necesidad de ensayos para obtener el resultado correcto. La estrategia, al igual que en el primer nivel, tiene los - siguientes componentes:

a) suposición de un cociente (cociente hipotético) :

900 : 3 -----------> ¿300?

b) prueba de la validez del cociente hipotético, mediante la suma reiterada del mismo:

300 + 300 + 300 = 900

Si la prueba otorga validez al cociente hipotético, termina el procedimiento, si no, entonces:

c) suposición de un nuevo cociente hipotético y repetición del proceso, hasta encontrar el que pruebe su validez.

El uso de la estrategia, en este segundo nivel, es como sigue:

J. ¿900 por 3 kilos de azucar?... (piensa) ... ¿a cómo viene saliendo el kilo por ejemplo? ... de 900... (piensa) ... por ejemplo ... 400...no, no sale... porque 400 sale...400 y 400 da muy arriba, porque 400 y 400 son - 800, está muy arriba el precio.
E. ¿Le tiene que bajar el precio?
J. Pues sí ... a 300 (en voz baja)... a $ 300 (en voz alta)
E. ¿Cómo hizo para saber que salía a 300?
J. Porque 300 y 300 son 600 y 300 son 900

....

G. $900 ... por 3 kilos de arroz... (piensa)... ¿ a 300?
E. ¿Cómo sacó la cuenta?
G. Pues nomás partí los 900 en 3 partes ... no le digo que si de a 100 nos vamos le voy a ganar de maestra ... (se ríe) ...
E. ¿Y cómo le hizo para partir los 900 en 3?
G..Pues nada más dije: 3 y 3 son 6 y otros 3, 9.

La estrategia, podemos ver, se repite en relación con el primer nivel. Sin embargo, hay diferencias notables: todos los sujetos resuelven el cálculo, algunos ya no realizan tanteos. y ninguno necesita objetos para llegar al resultado correcto.

Caso 2. División de decenas entre unidades, sin residuo - (90 2). En este cálculo reaparece la estrategia de suma reiterada del cociente hipotético. Nuevamente, la estrategia es similar a la utilizada en la etapa inicial:

a) suposición de un cociente (cociente hipotético):

90 : 2 --------> ¿45?

b) prueba de la validez del cociente hipotético mediante suma reiterada del mismo.

45 = 45 = 90

Si el cociente hipotético prueba su validez, entonces, termina el proceso, si no:

c) suposición de un nuevo cociente hipotético y repetición del proceso hasta encontrar el que prueba su validez.

Como puede observarse, los componentes de la estrategia son - los mismos que los de la estrategia utilizada en el primer nivel. Las diferencias radican en la eficiencia en el uso de la estrategia, pues todos los sujetos en el nivel intermedio llegan al resultado sin utilizar objetos. Veamos a guisa de ejemplo los siguientes diálogos:

C. Si gasto 90 en 2 ...(piensa) ... sale ... a 45.
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
C. Le fuí contando: a 35 serían 70 ... a 40 ... 80... sale a 45.

G..(piensa) ... $90 en 2, ¿verdad?...2 en 90, ... pues si me costarán 60...60 y 60, 120...40 y 40...80...45.

Suma reiterada del cociente hipotético (con descomposición del dividendo)

Al igual que en el primer nivel, la estrategia de suma reiterada del cociente hipotético (con descomposición del dividendo), es utilizada en este segundo nivel para resolver las divisiones 480 ÷ 4 y 575 ÷ 5. Tales cálculos son resueltos por todos los sujetos clasificados en el nivel que analizamos, después de algunos tanteos y sin objetos.

Caso 1. División exacta de números compuestos por centenas y decenas entre un dígito (480÷4). Las componentes de la estrategia en este caso son similares a los del nivel antecedente:

a) descomposición del dividendo en centenas y decenas:

$$480 \rightarrow 400 + 80$$

b) Resolución de la división 400 ÷ 4, mediante el procedimiento de suma reiterada del cociente hipotético:
   . suposición de un cociente: 400 ----> ¿100?
   . prueba de la validez del cociente hipotético con base en la suma reiterada del mismo:

   $$100 + 100 + 100 + 100 = 400$$

   Si el cociente hipotético prueba su validez termina el proceso, si no, entonces se repite el proceso hasta obtener el que sí la pruebe.
c) resolución de la división 80 ÷ 4, mediante suma reiterada del cociente hipotético
d) suma de los dos cocientes parciales para obtener el cociente global:

$$100 + 20 = 120$$

Otra vez, la diferencia de esta estrategia, con respecto a la etapa antecedente, es la eficiencia en su manejo: los sujetos llegan al resultado, y todos sin necesidad de objetos. Ilustramos en seguida esta afirmación:

J. 480 cada uno...y son 4
E. No, 480 por los 4
J. ¡Ah!, 480 los 4 ... (piensa) ... hora verá... salen a ciento...a 120 cada uno.
E. ¿Esta cuenta cómo la hizo?
J. Empezándole de a 100...cada uno y luego ya los 20; se le agregan 20 a cada uno, son 80, son 480.

E. Empezó de a 100 por cada uno...¿y luego cómo contó para ver si le salía la cuenta?
J. Pues 100, 200, 300, 400...y luego va los 20, de a 20 a cada ciento...y salen 480.

Caso 2. División exacta de números compuestos por centenas, decenas y unidades entre un dígito (575 ÷ 5)

Una estrategia con componentes y límites idénticos a la que acabamos de esquematizar, utilizan los sujetos de esta misma etapa para resolver la división 575 ÷ 5:

E. Si se pagan $ 575 por 5 pasajes, ¿cuánto cuesta cada pasaje?
M...(piensa)...no salen ni a 125 ¿verdad?
E. ¿Por qué dice que no salen ni a 125?
M. Porque le pongo de a 100 y son 500...quedan 75, si le pongo de a 25 se va en 3
E. ¿Y entonces, María, de a cómo sale?
M....¿De a 120?...ni de a 120...¿a 110?
E. A ver. Pruébele poniéndole de a 110
M....(piensa)...son 50 y quedan...sale a 115.

Puede observarse claramente la descomposición del dividendo 575---->500 + 75 y, posteriormente, la suma reiterada del cociente hipotético: 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 500, así como la división 75 ÷ 5 por el mismo procedimiento.

Caso 3. División de centenas y decenas entre unidades, con residuo intermedio, (840 ÷ 3).

Este cálculo marcó el inicio de la pérdida de la eficiencia en el uso de la estrategia de suma reiterada del cociente hipotético (con descomposición del dividendo) en el segundo nivel.

Si bien se ha avanzado en relación con la etapa inicial, desde el momento en que todos los sujetos intentan resolver el cálculo mentalmente y en que se logra el resultado en un caso, los tanteos aumentan en número y pierden seguridad y eficiencia si los comparamos con las divisiones que no implican residuo intermedio tal como se resuelven en este segundo nivel.

Los componentes de la estrategia, que cuatro sujetos abandonaron al no saber manejar el risiduo intermedio, son los siguientes:

a) descomposición del 840 en centenas y decenas:

840 ---> 800 + 40

b) intento de resolución de la división 800 ÷ 3, con base en la suma reiterada del cociente hipotético:

800 ÷ 3 -------> ¿ 200 ?

200 + 200 + 200 = 600

800 ÷ 3 -------> ¿ 300 ?

300 + 300 + 300 = 900

c) abandono del intento de resolución después de haber probado sin resultado satisfactorio, dos veces la validez del cociente hipotético

El abandono de la estrategia se debe, desde nuestro punto de vista, a la dificultad para reconocer un sobrante en la división. Con la suma reiterada del cociente hipotético los sujetos buscan obtenr como resultado de la suma un númro igual al dividendo y en el caso de la división con residuo, tal expectativa no se cumple.

Veamos en seguida el abandono de la estrategia:

E. Si usted tiene 840 metros de hilaza para hacer 3 madejas, ¿de cuántos metros saldrá cada madeja?

M....(piensa)...sería...como a 200...no...saldrían sobrando otros 200...(piensa)...está durita, esta mejor no la hago...(se queda callada, después se niega a seguir explicando)

......

E. Si se produjeran 840 cortes en 3 días, ¿cuántos se producirían en un día?

J. 840...(piensa)...¿en 3 días?...(piensa)...para 800, por ejemplo...(piensa)...840...

E. ¿Cuánto le va a poner de ejemplo?

J. ¿Para los 800?...no, de a 200, poniéndole de a 200, son de 3 días, estoy pensando en 600; entonces necesita uno de que salga 840...(piensa)...de a 350 puede que no salga, se pasa...

E. Cuando le puso de a 200, como son 3 días eran 600 y todavía le sobraban ¿cuántos?
J. 200
E. ¿Y esos?
J. ...de a 200...2,4,6...no, pues sí saldría los 800...ahora...¿840 dijo?...sí salen los 800, de a 200; 2,4,6, sale faltando sobrando(sic) 200 para los 800, salen sobrando 260
E. ¿Y entonces ?
J. (pensativo, se queda callado un rato, no atina a responder)

3.3. ERRORES Y LIMITES EN EL CALCULO

En este segundo nivel, según hemos observado, el límite del cálculo con la división se encuentra en la incapacidad de manejar el residuo. Como en el caso analizado el residuo se presenta desde la primera división parcial, los sujetos se detienen en ese punto. Hay, sin embargo, un caso muy interesante que muestra la capacidad de manejar el residuo (rasgo característico del tercer nivel) recurriendo a la utilización de números que le son más familiares y conservando el dividendo sin descomposición posicional. En seguida, esta estrategia:

C. 840...en 3,...sale a...800 repartidos en las 3 cosas será...(piensa un rato)...repartiendo 800 en 3 son 200, pero sobran 200...reparto mejor 750 en 3 y sale a 250. Pero me quedan los 50 y aparte los 40, que son 90...90, 90 en 3...30...entonces sale a 280.

La estrategia nos muestra una forma de eludir un residuo que no se sabe manejar (200) sustituyéndolo por otro (50) que sumado con las decenas dará una división de facil manejo (90 ÷ 3). Esta estrategia implica un manejo flexible de las estrategias básicas, manejo que se acompaña de estrategias alternativas, cuando éstas son necesarias. Este rasgo, que aquí exhibe un único sujeto es propio del tercer nivel, pues, como dijimos antes, el primero y segundo nivel se caracterizan precisamente por no resolver el manejo de los "sobrantes".

4. NIVEL FINAL

4.1. CARACTERISTICAS GENERALES

En el nivel final el cálculo que implica división ha hecho a un lado los límites propios de los niveles antecedentes y, los sujetos son capaces de resolver la división que implica residuo, ya sea éste intermedio o final. Las características del cálculo realizado son las siguientes:

1. La estrategia básica del cálculo es la suma reiterada del cociente hipotético.

2. La suma reiterada del cociente hipotético, se combina con la descomposición del dividendo, de acuerdo con la naturaleza de los números involucrados en el cálculo.

3. Aparece una nueva estrategia para el cálculo, exclusiva del tercer nivel, que se utiliza en los casos en que la división implica residuo intermedioy que hemos llamado suma reiterada de múltiplos del divisor.

4. No se necesitan tanteos ni objetos para realizar los cálculos.

5. Se resuelven satisfactoriamente todos los cálculos solicitados.

6. El residuo intermedio o final, deja de ser obstáculo en el manejo del cálculo, gracias a la estrategia de suma reiterada de multiplos del divisor.

7. Se muestra gran agilidad y flexibilidad en el manejo de las estrategias, las cuáles los sujetos son capaces de modificar de acuerdo con la naturaleza de los números involucrados.

8. No se mezclan los datos de la experiencia personal con los datos del problema matemático planteado.

4.2. ESTRATEGIAS

• Suma reiterada del cociente hipotético. (sin descomposición del dividendo)

Al igual que en las etapas precedentes, esta estrategia apareció en las divisiones 900 ÷ 3 y 90 ÷ 2. En seguida nos ocupamos del primer caso.

Caso 1. División exacta de números compuestos por centena entre un dígito (900 ÷ 3).

La estrategia, en este caso, es casi idéntica en componentes a la utilizada en los *niveles* antecedentes, sólo que aquí el proceso se realiza sin tanteos, es decir, no es necesario repetir el proceso ya que el cociente hipotético es válido desde la primera aproximación :

a) suposición de un cociente (cociente hipotético):

900 ÷ 3 ------> ¿ 300 ?

b) prueba de la validez del cociente hipotético, mediante su suma reiterada:

300 + 300 + 300 = 900

Como en este caso el cociente hipotético es válido desde el primer intento, el proceso concluye. En seguida presentamos la utilización de la estrategia en la etapa final:

E. Si se pagaran $ 900 por 3 kilos de azúcar, a ¿cuánto costaría el kilo?
S....(piensa)... pagara yo $ 300
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
S. Separé cada kilo de 300, separé los 900 para ponerle a cada kilo $ 300
E. ¿Y cómo supo que salía a 300?
S. Porque así sale : 300 y 300 y 300, 900.

....

J....300 cada kilo : 3,6,9.
E. ¿Me puede explicar cómo la hizo?
J. De a $ 3, de a $ 300 por cada kilo, o sea la saqué con 3 dedos: 3,6,9; esta es más sencilla, 3,6,9, porque como se trata de precio cerrado ...es más fácil, son $ 900.

La agilidad con que se utiliza la estrategia, así como la capacidad de hipotetizar un cociente que prueba su validez desde el primer intento, diferencia al nivel final de los niveles antecedentes.

Caso 2. División exacta de números compuestos por decenas entre un dígito (90 ÷ 2)

La estrategia a la cual nos venimos refiriendo, ya lo dijimos antes, aparece también en la resolución de la división 90 ÷ 2. Analicemos este caso en el que elprogreso en la agilidad y la ausencia de tanteos se hacen evidentes:

S....45
E. ¿Cómo hizo la cuenta?
S. Pensé que si fueran 100 iban a ser 50 por caja, pero como son 10 menos, son 90, son de 45 por caja
E. ¿Y cómo supo que salía de a 45?
S. Porque 45 y 45 da 90

....

J....45
E. ¿Cómo le pensó a esta cuenta?
J. No más con la cabeza, 45 en cada paquete
E. ¿Cómo fué contando?
J. No, nomás con la pura memoria: 45.

En este tercer nivel, se hipotetiza un cociente que muestra su validez desde el primer intento de resolución: esto nos muestra un manejo muy amplio de lo que en matemáticas se llama estimación, además de la memorización de ciertas combinaciones para el cálculo.

- Suma reiterada del cociente hipotético, (con descomposición del dividendo)

En el tercer nivel esta estrategia apareció en las divisiones 480 ÷ 4 y 575 ÷ 5 . A continuación presentamos tales casos.

Caso 1. División exacta de números compuestos por centenas y decenas entre un dígito (480 ÷ 4)

Nuevamente es la agilidad y no los componentes lo que diferencia la estrategia de resolución de esta división con respecto a los niveles antecedentes. Los componentes son los siguientes:

a) descomposición del dividendo en centenas y decenas:

480 ⟶ 400 + 80

b) resolución de la división 400 ÷ 4, mediante el procedimiento de suma reiterada de cociente hipotético:

400 ÷ 4 ⟶ ¿ 100 ?

100 + 100 + 100 + 100 = 400

c) resolución de la división 80 ÷ 4, con suma reiterada del cociente hipotético:

80 ÷ 4 ⟶ ¿ 20 ?

20 + 20 + 20 + 20 = 80

d) suma de los cocientes parciales para obtener el cociente global:

100 + 20 = 120

Como el resultado correcto se obtiene nuevamente en el primer intento de resolución, el proceso no se repite. Ilustramos en seguida la utilización de la estrategia:

> J. ¿Por 4, 480 ?...por uno solo...(piensa)... 120, 120 uno solo.
> E. ¿Cómo le pensó a esta cuenta?
> J. Los 80 los compartí, esos se comparten después al último, primero se saca la suma que es completa, o sea los $ 100: 100, 200, 300, 400 pesos, verdad, entonces a esos $ 400 hay que agregarle $ 20 a cada jabón y por eso son los $ 480. Todo el tiempo, lo que es más poco hay que agregárselo a lo más grande...el sobrante hay que agregárselo después, para que salga bien la cuenta, porque si empieza uno por lo más chico...¡yo creo que ha de ser más difícil!

La explicación que nos dan los dos sujetos clasificados en este nivel son muy similares. Tanto en la resolución, como en la verbalización de la estrategia ambos nos muestran el adelanto y la agilidad en el manejo del cálculo en este tercer nivel.

Caso 2. División exacta de números compuestos por decenas, centenas y unidades entre un dígito (575 ÷ 5)

La estrategia seguida para resolver esta división suma reiterada del cociente hipotético (con descomposición del dividendo) responde a un esquema similar al utilizado en los niveles antecedentes:

a) descomposición del 575 en centenas y decenas y unidades:

575 ---> 500 + 75

b) resolución de la división 500 ÷ 5, mediante suma reiterada del cociente hipotético:

500 ÷ 5 ----> ¿ 100 ?

100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 500

c) resolución de la división 75 ÷ 5 mediante suma reiterada del cociente hipotético:

75 ÷ 5 ---> ¿ 15 ?

15 + 15 + 15 + 15 + 15 = 75

d) suma de los cocientes parciales para obtener el cociente global

La agilidad con que es manejada esta estrategia en el nivel final nos la muestra el siguiente diálogo:

> E. Plantea un problema con la división 575 ÷ 5
> J....vienen siendo $ 125 cada uno, sí porque son $ 575...son 5 boletos, entonces los 75 hay que quitárselos para agregárselos a cada boleto, o sea los $ 25, $ 125...perdone (sic) ya estaba yo equivocado, sí...estabamos mal, sí, porque habría salido más la suma...$115 ahora sí tuve que usar los dedos, $ 115 vale cada boleto.

Es claro que el sujeto se percata inmediatamente de su error al dividir 75 ÷ 5 y lo corrige en seguida. Por la rapidez con que hace la corrección se observa - que no necesita hacer completa la suma 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 para plantear el cociente hipotético adecuado.

. Suma reiterada de múltiplos del divisor

Las divisiones 840 ÷ 3 y 200 ÷ 12, movilizaron en este *tercer nivel* una estrategia diferente a la utilizada en los *niveles* antecedentes para resolver cálculos de este tipo. Estas divisiones nos mostraron una característica del cálculo que se realiza en el *tercer nivel* y que lo diferencia del que se ejecuta en los que le anteceden : la capacidad de manejar los residuos intermedios en la división. El *primero* y *segundo nivel* muestran un abandono sistemático al aparecer el residuo intermedio pues éste no se sabe manejar y constituye un obstáculo insalvable para los sujetos. Por el contrario, en el *tercer nivel* se tiene conciencia del residuo dentro del proceso de la división y se cuenta con estrategias para - manejarlo. Este manejo se orienta fundamentalmente a eludirlo así, desaparece - la suma reiterada del cociente hipotético con descomposición del dividendo y se sustituye por otra que se basa en la obtención y suma reiterada de múltiplos del divisor. Los componentes de tal estrategia los esquematizamos con el cálculo — 200 ÷ 12 :

a) suma del divisor tantas veces como sea necesario para obtener un mítiplo cómodo para el cálculo :

12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 60

b) suma del múltiplo obtenido, tantas veces como sea necesario para obtener el múltiplo menor más próximo al dividendo :

60 + 60 + 60 = 180

c) cálculo del residuo intermedio (diferencia entre el dividendo y el múltiplo del divisor obtenido) :

180 + 20 = 200

d) división del residuo intermedio (diferencia entre el dividendo y el múltiplo del divisor obtenido en b), mediante suma reiterada del divisor:

20 ÷ 12 - - - - - - ¿ 1 ?

(en este caso específico no se hizo necesaria la suma porque el 20 sólo - contiene una vez al 12) e) obtención del residuo final mediante búsqueda del complemento :

20 - 12 - - - - - 12 + 8 = 20

f) integración del cociente global , mediante suma de los cocientes parciales:

15 + 1 = 16

Escuchemos a nuestro sujeto :

> J.¿ Con los 200 ?...para comprar cuántas bolsas ?...'hora verá...sería...o sea que en 5 bolsas serían $60 , en otras 5 serían 120...entonces...sobran 80...o sea 15 bolsas...serían 60... sobrarían $20 comprando 15 bolsas...¡16 bolsas! y me sobrarían $8 , o sea que con $8 ya no podría comprar otra bolsa...¡ah, esa sí estaba difícil! ...o sea que con lo que sobrara alcanzaba a comprar 3/4 de bolsa (esto último en tono de broma).

La estrategia como la acabamos de esquematizar , ha adelantado en síntesis en nuestro segundo sujeto quien obtiene en el primer paso el valor de 10 x 12 , obviando los cálculos (5 x 12) + (5 x 12) :

> S....espéreme tantito...(piensa)...12 (en voz baja)... en 10 serían 120...(piensa)...180 en 15...todavía sale sobrando (pensativo)...16...serían 192 en 16...todavía sale sobrando, pero ahí le tienes que dejar, porque no más son 8 , $8.

4.3. ERRORES Y LIMITES EN EL CALCULO

Las estrategias y las verbalizaciones de este *tercer nivel* muestran la reflexión sobre el residuo . Esta reflexión permite obtener un manejo adecuado del mismo y los sujetos pueden resolver todos los cálculos que se les plantean . Es fundamental destacar a este respecto , el desarrollo de una estrategia - suma reiterada de múltiplos del divisor - que no se observa en *niveles* precedentes y que, de manera parecida al manejo del redondeo en la multiplicación, constituye el instrumento para trascender las dificultades que otras estrategias no permiten rebasar.

Una vez más , observamos en el *nivel final* una verbalización clara y detallada de las estrategias , así como el manejo puramente mental de las mismas y una notable capacidad para resolver todos los problemas a los que los sujetos fueron enfrentados.

Podemos afirmar entonces , al final del análisis , que las estrategias analfabetas llegan a tener una solidez y una flexibilidad tales , que permiten enfrentar satisfactoriamente todos los cálculos necesarios para el sujeto. Esta solidez y esta flexibilidad son propias del *tercer nivel* , pero los sujetos que se encuentran en *niveles* antecedentes utilizan - aunque lo hagan deficitariamente - las estrategias nítidamente construídas en el *nivel final* . Es decir , no son diversas sino únicas las estrategias del cálculo adulto no escolarizado . Las diferencias , en todo caso , son de agilidad , eficiencia , eficacia y síntesis , mas no de cualidad . Tales diferencias que, sin embargo , corresponden a un único esquema , permiten hablar del desarrollo progresivo de una estructura que define el pensamiento matemático analfabeto .

5. A MANERA DE SINTESIS : EL ESQUEMA DE LA DIVISION

Estrategias : suma reiterada del cociente hipotético (con dos modalidades : sin descomposición del dividendo y con descomposición del dividendo) y suma reiterada de múltiplos del divisor.

SUMA REITERADA DEL COCIENTE HIPOTETICO (sin descomposición del dividendo)

Principio rector : hipotetizar un cociente y ponerlo a prueba mediante su suma - reiterada.

Casos en que es utilizada la estrategia : cuando el dividendo y el divisor son dígitos o cuando el primero está formado por decenas o centenas "completas".

Componentes de la estrategia :

- suposición de un resultado (cociente hipotético)
- prueba de la validez del cociente hipotético mediante su suma reiterada
- si la prueba no otorga validez al cociente hipotético se repite el rpoceso con un nuevo cociente ...

Desarrollo progresivo de la estrategia:

Primer Nivel

- La estrategia se encuentra definida
- La estrategia es ineficiente , se necesitan varios tanteos (se hipotetizan varios cocientes) para lograr los resultados
- Se hace necesario el apoyo de objetos físicos para realizar los cálculos
- La estrategia es ineficaz , no se obtienen todos los resultados
- No se resuelven los cálculos que implican residuo
- La agilidad en el cálculo es escasa

Segundo Nivel

- Aumentan la eficiencia y la eficacia de la estrategia : los tanteos han disminuído y se obtienen todos los cálculos que no implican residuo
- La agilidad en el cálculo ha aumentado
- El cálculo es exclusivamente mental

Tercer Nivel

. La estrategia es altamente eficiente , desaparecen los tanteos, el cociente hi potético es válido desde el primer intento de resolución
. Se resuelven todos los cálculos , el residuo deja de ser obstáculo insalvable
. La agilidad en el cálculo es notable

SUMA REITERADA DEL COCIENTE HIPOTETICO (con descomposición del dividendo)

Principio rector : hipotetizar un cociente y ponerlo a prueba mediante su suma -- reiterada

Casos en que es utilizada la estrategia : en divisiones exactas en que el dividen do está compuesto por centenas y decenas o centenas , decenas y unidades.

Componentes de la estrategia :

. descomposición del dividendo en centenas y decenas (o en centenas y decenas y u nidades, según sea el caso)
. división de las centenas , mediante suma reiterada de un cociente hipotético
. división de las decenas (o decenas y unidades , según sea el caso) mediante - suma reiterada del cociente hipotético
. suma de los cocientes parciales para obtener el cociente global.

Desarrollo progresivo de la estrategia :

Primer Nivel

. La estrategia se encuentra perfilada pero es ineficaz , sólo algunos sujetos ob tienen resultados correctos
. La estrategia es ineficiente , se necesitan varios tanteos para resolver los cál- culos
. La necesidad de objetos físicos para realizar los cálculos es frecuente
. No se resuelven los cálculos que involucran residuo intermedio (sobrante en la - primera división parcial) porque la expectativa de los sujetos es obtener en la prueba del cociente una suma igual al dividendo parcial y tal expectativa no se - cumple.
. La agilidad en el cálculo es escasa

Segundo Nivel

- La estrategia es eficaz en los casos en que no hay residuo intermedio
- La eficiencia ha aumentado : los tanteos han disminuído
- El pacleulo es exclusivamente mental
- El obstáculo en el cálculo lo constituye el residuo intermedio que, cuando aparece , cancela la posibilidad de resolución
- La agilidad en el cálculo ha aumentado

Tercer Nivel

- La estrategia es eficaz en todos los casos
- La eficiencia de la estrategia es notable : no se observan tanteos ,los cálculos se resuelven en el primer intento
- El cálculo es exclusivamente mental
- La estrategia se sustituye por otra (suma reiterada de múltiplos del divisor) en los casos en que aparece el residuo intermedio .

SUMA REITERADA DE MULTIPLOS DEL DIVISOR

Esta estrategia es exclusiva del *tercer nivel*. Se utiliza para rebasar las dificultades del residuo intermedio.

Principio rector : obtención y suma reiterada de múltiplos del divisor.

Casos en que es utilizada la estrategia en divisiones de números de tres cifras entre números de 1 ó 2 cifras , en que hay residuo intermedio.

Componentes de la estrategia :

- Suma del divisor tantas veces como sea necesario para obtener un número (múltiplo del divisor) que facilite el cálculo
- Suma del múltiplo obtenido , tantas veces como sea necesario para obtener el múltiplo del divisor menor que el dividendo más próximo a él
- Cálculo del residuo intermedio , restando al dividendo el múltiplo del divisor obtenido
- División del residuo intermedio , mediante suma reiterada del divisor
- Obtención del residuo final , restando el resultado de la suma reiterada del di

visor , al residuo intermedio

. Integración del cociente global , mediante suma de los cocientes parciales.

- Esta estrategia elimina los obstáculos para el cálculo de cocientes en el *Tercer Nivel*.
- La eficacia y eficiencia de la estrategia , así como la agilidad en el cálculo exclusivamente mental son notables.

TERCERA PARTE. GENERALIZACION Y USO DE SIMBOLOS

En este apartado del escrito se abordan dos problemas que, a lo largo de la investigación, descubrimos son fundamentales para comprender de una manera global el pensamiento matemático del analfabeto. Tales problemas son: 1) las ataduras a la experiencia particular, es decir, la incapacidad observada en algunos sujetos - de manejar datos y contextos distintos de los utilizados en la experiencia de vida; 2) el conocimiento de los símbolos numéricos, así como su posible relación con el desarrollo de las estrategias de cálculo o su eventual utilización como apoyo a las mismas.

El análisis de los datos indica que las posibilidades de generalización de las estrategias de cálculo que tienen los analfabetos no son similares en todos los sujetos; de hecho, algunos de ellos no logran desprenderse sino con dificultades de lo particular mientras que otros rebasan ampliamente el ámbito de la experiencia de vida. Asimismo, se descubre como inexistente la relación entre el conocimiento y uso de un código gráfico y el desarrollo de las estrategias de cálculo.

I. LAS ATADURAS A LA EXPERIENCIA PARTICULAR

LA FUSION DE LA LOGICA CON LA EXPERIENCIA

Luria reporta, con base en un estudio realizado con campesinos rusos habitantes de zonas alejadas, que los analfabetos no pudieron resolver ni los problemas aritméticos más sencillos que se les plantearon. La causa de la imposibilidad no se encontró en el cálculo numérico, la principal dificultad residía en tomar como base los datos del problema y saber abstraerse de los demás datos de la experiencia práctica suplementaria, razonar dentro de los límites de un sistema lógico cerrado y obtener la respuesta necesaria, no de la experiencia práctica concreta, sino del sistema de razonamientos determinado por la lógica de las condiciones. (Luria,p.155) Tal afirmación, Luria la justifica con casos como el siguiente :

Faizul...analfabeto	
Se propone un problema: hasta aquel árbol hay 5 min.a pie;el ciclista va cinco veces más rápido.¿En cuántos minutos llegará al árbol?	
Si alguien anda bien en bicicleta , llegaría en 2 minutos. No, tal vez yo no llegaría en 5 minutos, pero la bicicleta llegaría en 2 minutos.	Apelación a la experiencia concreta y suposición en lugar de resolución.
No, hay que calcularlo exactamente.	
En mi opinión en 1.5 minutos.	Lo mismo.
Se propone otro problema:hasta Ferganá hay 3 horas en un "arbá",pero en tren se va 3 veces más rápido.¿En cuánto tiempo se llegará en tren?	
Llegaría en una hora	
¿Cómo lo sabe?	
Es que fuí una vez a Ferganá	Lo mismo (Luria,p. 160)

Es claro que el sujeto interrogado por Luria funde la lógica de la experiencia particular con la lógica del problema. Es decir, el pensamiento matemático de este analfabeto , al igual que el de muchos otros, se encuentra atado a la experiencia particular.

DISTINTAS FORMAS DE FUSION

El problema planteado por Luria lo encontramos también en nuestra investigación, pero con matices y formas distintos a los que el psicólogo ruso reporta . Por - una parte , la contaminación de los problemas planteados con los datos de la experiencia personal fue exclusiva de los sujetos clasificados en el *nivel inicial* .Por otra parte , la conjunción de los datos de la experiencia personal -- con los problemas planteados tomó diversas formas y no sólo la incapacidad de resolución. Tales formas las hemos interpretado de la manera siguiente :

1. Incapacidad de resolución
2. Canjeo de los datos del problema por los datos de la experiencia personal, con conservación del contexto planteado en el problema , y resolución de éste con los datos de la experiencia.
3. Canjeo del contexto del problema - y conservación de los datos - para reinterpretarlo y resolverlo con base en una situación y acción conocidas.
4. Intento de solución con los datos del problema y regreso , en una etapa avanzada del proceso de resolución , a los datos de la experiencia personal.

Presentamos en seguida estas interferencias provocadas por la experiencia particular de los sujetos.

Interferencia tipo 1. Incapacidad de resolución.

Tal interferencia se evidenció en casos como los siguientes :

E. Si se pagan $575 por 5 pasajes ¿cuánto cuesta cada pasaje?
H. Póngale que son 250 , así pago de aquí a Taxqueña
E. Haga otra vez la cuenta, se pagan $575 por 5 pasajes
H. 250...en un pasaje
E. ¿Por qué a 250, cómo hizo la cuenta?
H. Lo que pago de aquí a allá son $250,'hora que en 5 pasajeros...(pensativo,no resuelve el problema,sólo alude datos y circunstancias de su experiencia personal)

La dificultad para rebasar los datos de la experiencia personal la muestra otro de nuestros sujetos :

> E.Si se compran cuatro paquetes de sal , a $120 cada uno, ¿ cuánto se paga ?
> J.¿ Así le dan a usted la sal ? , por aquí la dan más cara
> (y el sujeto no resuelve el problema).

Otro caso donde se presenta claramente la interferencia de la experiencia personal es el siguiente :

> E.Si usted comprara 12 bolillos y le dieran a $30 cada uno ¿ cuánto tendría que pagar ?
> D.Ahí sí no sé, ahí sí no sé
> E.¿Por qué no sabe ? explíqueme eso , dígame por que se le hace difícil
> D....(silencio durante un rato)...no, no puedo
> E.¿Por que no puede ?
> D.Porque pues compro yo el pan , y nomás digo ¿cuánto es del pan ? , entonces lo pago y me dan el cambio y no sé ni cuánto es.
> E.¿Y no sabe si le hicieron bien la cuenta o no ?
> D.Pues no, ahí nomás recibo el dinero y ya...
> E.Se la voy a poner más fácil . Aquí están las monedas para que la haga con ellas
> D.¿ Cuántos bolillos eran ?
> E.12
> D.¡Ay! no voy a poder sacar la cuenta de tantos...
> (y el problema queda sin resolverse)

En estos casos, los sujetos muestran una total incapacidad de resolución. Dicha incapacidad denota que en realidad los sujetos no se introducen en la lógica del problema, sino que hacen caso omiso del mismo y permanecen por completo centrados en los datos de su experiencia previa. Este tipo de interferencia , que hemos definido como <u>incapacidad de resolución</u> es similar a la que Luria reporta.

<u>Interferencia tipo 2</u>. Canjeo de los datos del problema por los datos de la experiencia personal - con conservación del contexto planteado en el problema - y resolución con los datos de la experiencia.

Este tipo de atadura a los datos de la experiencia previa, se expresó nítidamente en dos de nuestros sujetos :

E. Si usted va a la tienda y gasta $200 en cerillos y $300 en cigarros, ¿cuánto tiene que pagar?
H. Dos diez y tres cincuenta...
E. Le dije 200 de los cerillos y 300 de los cigarros
H.Por aquí los dan a dos diez y a tres cincuenta
E. Pero ahorita haga la cuenta con los precios que yo le - dije
H. Está bien, para que luego no vaya a decir que no se la supe.

El sujeto resuelve finalmente este problema con los datos del mismo, pero más adelante vuelve a mezclar su experiencia particular con la situación matemática planteada :

E.Si usted trae $450 y gasta $250 en cigarros, ¿cuánto le queda ?
H.(toma dos monedas de $100 y una de $10 ,es decir $210, y dice :)
Ahí está lo de los cigarros
E.Le dije que los cigarros eran de $250
H.Por eso, ahí está, son 210(parece que el sujeto no se da cuenta de que ha canjeado los datos)
E.250 de los cigarros y usted traía 450
H.Sí, me quedan $240

Otro de los casos en que este tipo de interferencia se evidenció, es el siguiente :

E.Si usted va al mercado y compra $200 de nopales y $300 de frijol,¿cuánto tiene que pagar ?
J.(piensa)...por 500 es como yo compro, o por kilo
E.Pero ahorita imagínese que compró $200 de nopales y — 300 de frijol
J.400
E.Haga otra vez la cuenta, son 300 y 200
J.¿200 y 300 me dijo...400
E.Piénsele a la cuenta otra vez, le dije que eran 300 de los frijoles y 200 de los nopales
J.Sí, son 400,¿o no?
E.¿a cómo le dije el frijol?
J.A 200
E.¿A 200?
J.Sí, así está, en 200

Es claro que , en estos casos , la resolución de los problemas se basa en los datos de la experiencia previa . La diferencia en relación con la interferencia incapacidad de resolución la constituye el hecho de que aquí los sujetos se introducen en la lógica de la situación hipotética planteada y utilizan las relaciones implicadas en la misma para realizar el cálculo . En efecto , si bien permanecen en la mente del sujeto los datos numéricos de su realidad cotidiana y son los que utiliza en su razonamiento , se ha aceptado la situación problemática planteada y es ésta la que guía la acción mental.

Interferencia tipo 3. Canjeo del contexto del problema - y conservación de los datos - para reinterpretarlo y resolverlo con base en una situación y acción conocidas.

La interferencia tipo 3 se observó en casos como el siguiente :

> E.En una bodega había 75 costales de frijol y sacaron 62, ¿cuántos costales quedaron en la bodega?
> J....(piensa)...tengo 75 y me gasto 62, ¿cuánto me queda? ...(piensa)...no,no me sale , la voy a hacer con las monedas... ahora aquí van las que me gasté...

En este intento de resolución puede observarse cómo se transforma el problema en otro relacionado con la experiencia previa (gastar dinero) para poder resolverlo . El sujeto cuyas respuestas acabamos de incorporar mostró en varias ocasiones tal razonamiento.

Un segundo sujeto reinterpreta uno de los problemas planteados con base en la acción conocida de gastar dinero :

> E.En un anaquel hay 17 cajas con 18 pastillas cada una , ¿cuántas pastillas hay en el anaquel?
> H.¿18 me dijo?...de 17...por 15...(piensa un rato)...son 300
> E.¿Cómo hizo la cuenta?
> H.La saqué por 17...por 15 y 15...después por 2 en 2 pesos...

Otro de nuestros sujetos también reinterpretó uno de los problemas planteados - con base en la idea de vender :

> E.En una bodega había 75 costales de frijol y sacaron 62, ¿cuántos costales quedaron en la bodega?
> M....75...¿y se vendieron 62?...son 65...¿quedaron qué,3?
> E.Dígame cómo hizo la cuenta
> M.Porque son 60 y...son 70,¿verdad?,75 y se vendieron 62

...quedarían...6...

Parece ser, entonces, que las acciones ligadas al manejo del dinero (comprar y vender) son el origen de las estrategias de cálculo. La reinterpretación de los problemas con base en tales acciones da a los sujetos del *primer nivel* , en ocasiones , la posibilidad de resolución.

Interferencia tipo 4. Intento de solución con los datos y el contexto del problema y regreso , en una etapa avanzada del proceso de resolución, a los datos de la experiencia personal.

Uno de nuestros sujetos regresa a su experiencia cotidiana en un momento avanzado de la solución del problema. Es un punto difícil en el cálculo el que la obliga a retomar los datos de la experiencia . En efecto, después de intentar resolver un problema varias veces , sin lograrlo , solicita :

> M:¿Y si ponemos que son las tortillas?...son ¿qué?... son 140" (y empieza a anotar el 140)

Lo anterior ocurre - sin tener ninguna relación aparente con el problema planteado - cuando las estrategias que se están manejando no llevan a la solución buscada . Este problema que el sujeto pretende canjear por otro que sí podría resolver , se queda sin solución exacta.

La mezcla de la experiencia previa con los datos del problema planteado en un momento avanzado del proceso de resolución, la evidenciaron otros sujetos :

> E.Si usted vendiera 6 raspados y cada uno lo cobrara a $200, ¿cuánto le pagarían por los 6 raspados?
> D.¿Por los 6 raspados, a 200? , ¡ay! pues no la sé hacer yo*
> E.Y si vendiera 4 raspados y cada uno se lo pagaran a $50,¿de eso cuánto sería?
> D.4 raspados, ¿a 50? , pues 200 ¿no?
> E.Mire, aquí puse estas monedas, a ver si con las monedas puede hacer la cuenta de los 6 raspados de a $200

*Delfina vende los raspados a $50 porque tiene su puesto en una zona muy pobre. Dice que si los da más caros no se los compran.

cada uno
D.De los 6 raspados,¿a 200?
E.Sí
D.A ver, a ver si puedo ¿eh? (va colocando monedas de $100, de 2 en 2 , es decir, va poniendo alteros de - $200 que supuestamente es lo de cada raspado, según el problema planteado. Pero después empieza a decir:) 4 y 4, ¿cuánto es?...no no voy a poder (cada $200 dice 4, que son los raspados que se podrían comprar -- con $200 , al precio que Delfina los da)
E.A ver, dígame esto ($200) ¿ de cuánto es?
D.De cuatro
E.Si los vendiera ¿a cuánto ?
D.A 50 (regresó a la experiencia particular, olvidó - los datos del problema)
E.Pero imagínese que los vende a 200
D.¡Ah!,¿para 200?...para 200 son...¡ay! no, no voy a poder, 200...200...son 400...son 600...200...800...10, ¿no? (va poniendo paralelamente alteros de dos monedas de $100, hasta completar $1000)
E.Ahí va lo de cuántos raspados?
D....Ahí es donde se me olvida ya,¿de 10 o de qué?...ya se me olvidó...es que no la voy a poder hacer señito, de a 200.

Se observa en los intentos de solución del problema , la incapacidad de escapar de los esquemas previos conformados en la experiencia de vida lo cual impide resolver satisfactoriamente el problema . Lo mismo ocurre en la siguiente situación :

E.Si usted comprara 5 bolillos , a $30 cada uno ,¿cuánto tendría que pagar?
R.5 bolillos...¿a 30?...30...60...60...120 ;120 y...135
E.Iba en 120,¿y luego qué le puso para que le saliera a 135?
R.Le puse 5 más (obsérvese que aquí el sujeto está mezclando los datos de la experiencia personal,el precio real de los bolillos es de $35)
E.Pero me dijo que de 4 son 120
R.Sí
E.Está bien hasta 120 de 4, a $30 cada uno,¿y para sacar la cuenta de los 5?
R.Más 35 (vuelve al precio real del bolillo,no obtiene el resultado preciso)

En todos estos casos, los sujetos inicialmente muestran un desprendimiento de de los esquemas particulares conformados en su experiencia vital.Finalmente , tal desprendimiento no se logra y se permanece atado a los datos particula -

res.

UNA EXPLICACION DE LA FUSION

Como señalamos al inicio del apartado, la dificultad para escapar de los datos provinientes de la experiencia particular, y que toma distintas formas, se observó solamente en los sujetos del *primer nivel*, lo cual convierte a esta característica en uno de sus rasgos definitorios. Los sujetos clasificados en los subsecuentes *niveles* delimitaron en todo momento el ámbito de la experiencia personal y el de la lógica de las condiciones planteadas en el problema.

Cabe enfatizar que existen elementos que sugieren claramente que esta incapacidad propia de los sujetos ubicados en el *primer nivel* deriva de la falta de frecuencia, diversidad y exigencia de exactitud en los cálculos. Justificamos tal afirmación haciendo un recuento de la actividad matemática de los sujetos :

Hilario. Campesino, no hacía cuentas en el campo, hace sólo unos cuantos meses necesita realizar cálculos (desde que vino a la ciudad).

Ramón. Velador, hace pocas cuentas, en su trabajo nunca las ha necesitado y, por ser velador y permanecer dormido buena parte del día, tampoco hace cuentas con frecuencia.

Josefina. Ama de casa, hace aseos, lleva a su hija al mercado para que la ayude a hacer los cálculos.

Margarita. Ama de casa, su esposo asistió a la escuela, él ayuda a hacer algunas cuentas derivadas del gasto familiar.

Delfina. Vendedora de raspados (antes campesina). Es un caso interesante porque si bien tiene manejo permanente de cuentas por su condición de vendedora, al manejar precios únicos (actualmente $50 y $100 , antes otros precios que le facilitaran los cálculos) sus esquemas han permanecido atados a esos únicos datos.

En contrapartida , los sujetos con más desarrollo en sus estrategias de cálculo y con más capacidad de generalización de las mismas, son los sujetos cuya experiencia matemática ha sido diversa, frecuente y con exigencia de exactitud . Tal es el caso de José y Silvino que, al enfrentarse cotidianamente en el trabajo a diversidad de precios y cantidades de artículos, se han visto obligados a realizar cálculos muy variados y necesariamente exactos. Con ello, sus esquemas han rebasado los límites de los particular y se han ampliado notablemente los límites de su pensamiento matemático.

II. EL CONOCIMIENTO DE LOS SIMBOLOS NUMERICOS, SU RELACION CON EL CALCULO

EL CONOCIMIENTO DE LOS SIMBOLOS NUMERICOS

Dos cosas diferentes son los números y los símbolos numéricos o numerales. El número es una cualidad que define a todos los conjuntos que tienen la misma cardinalidad . El símbolo numérico es la representación de esa cualidad. Así, por ejemplo, 8 es un símbolo que expresa la cualidad común a todos los conjuntos que tienen ocho elementos (cardinalidad ocho) ; tal cualidad, también podría representarse con el numeral VIII.

El número responde a la pregunta "¿cuántos?", y esa respuesta se puede obtener sin utilizar los símbolos numéricos o numerales . Es decir, no se hace necesario representar los números o conocer sus representaciones (símbolos numéricos) para poder afirmar que aquéllos se conocen o que se manejan.

Al iniciar el trabajo investigativo, suponíamos que los individuos conocerían al menos los símbolos numéricos que aparecen en los billetes o monedas, pero esto no resultó cierto en todos los casos . Para investigar tal asunto, presentamos a los sujetos 32 símbolos numéricos entre 0 y 1000, todos sin ningún contexto, y los resultados fueron los siguientes :

- Josefina sólo identificó el 5
- Ramón, María y Delfina sólo identificaron hasta el 10 (la última con confusión entre 6 y 9)
- Hilario identificó sólo el 100 además de los dígitos
- José identificó únicamente los dígitos, el 100 y el 1000
- Carmen y Margarita, con ciertas dificultades, identificaron hasta el 100
- Silvino, Jorge , Vicenta y Guadalupe, identificaron todos los números que se les presentaron , es decir, hasta el 1000.*

* Parece que Silvino identifica números mayores que 1000, pero en la entrevista sólo se exploró hasta ese número.

Y uno se pregunta entonces, ¿ cómo es que estas personas reciben y dan billetes y monedas sin problemas, o es que sí tienen problemas ? Josefina nos dice al respecto :

" Yo llevo a mi niña cuando compro, así es como yo le hago."

Algo parecido hace Delfina, quien comenta :

D. Pues compro el pan, y nomás digo ¿ cuánto es lo del pan ?, entonces lo pago y me dan el cambio, y no sé ni cuánto es

E. ¿ Y no sabe si le hicieron bien la cuenta o no ?

D. Pues no, ahí nomás recibo el dinero y ya.

E. ¿ Y si le dan mal el cambio ?

D. Ahí es donde no sé si me lo dieron bien o me lo dieron mal ... luego mejor mando a mi chamaca.

A la pregunta expresa de ¿ y cómo le hace para saber el dinero que tiene, para reconocer los billetes ? En cuatro casos nos respondieron :

" No me fijo en los números , me fijo en el color "

Y fueron los entrevistados que no identificaron más allá del 10 los que dieron tal respuesta.

Los sujetos, entonces, desarrollan estrategias para sustituir los conocimientos que no poseen; en este caso, la estrategia ante el desconocimiento de los símbolos numéricos que les dan valor representativo, es identificar el color y las figuras de los billetes.

Ahora bien, Silvino y Jorge nos muestran un aprendizaje de símbolos numéricos sumamente desarrollado a la vez que ligado al trabajo :

Silvino conoce los números porque veía las cuentas del maestro albañil cuando trabajaba en la construcción y ahora ve las cuentas de la cooperativa de artesanos a la que pertenece. Jorge, por su parte, diariamente tiene que identificar los números con que están marcados los cortes, o tiene que contar centenares de éstos y anotar en una tarjeta el resultado del conteo.

Pero, ¿ todos los sujetos construyeron su conocimiento sobre los números y los símbolos numéricos en el trabajo ? La respuesta es negativa, y es que los requerimientos laborales no siempre están ligados con la lectura de números o con el cálculo aritmético y, además, en la calle, en las compras y en la escuela (aun con una fugaz estancia en ella) también se aprenden algunoa números.

En algunos casos (Delfina y Josefina) este aprendizaje fue casi inexistente y los sujetos no logran identificar en dónde tuvo lugar.

En otros casos (María, José, Ramón y Margarita) si bien el conocimiento de los símbolos numéricos es muy escaso (hasta 10 y 100, respectivamente) se reconoce la calle - por los números de las casas o las rutas de camión - los precios y las monedas como fuentes del conocimiénto.

Carmen, Guadalupe y Vicenta, quienes reconocen hasta 100 y 1000 respectivamente, identifican la enseñanza formal (del primer -- grado de primaria, de la madrina o del Círculo de Alfabetización respectivamente), así como la calle, los precios y el dinero como situaciones donde han aprendido los números y los símbolos numéricos.

Nuestros sujetos muestran, entonces, disparidad en el conocimiento de los símbolos numéricos, los casos extremos son por una lado, Josefina, que sólo identifica el 5 y, por el otro, Guadalupe, Vicenta, Jorge y Silvino que conocen hasta el 1000.*

---

* Emilia Ferreiro (1984) reporta que, de un total de 57 analfabetos, diez fueron capaces de interpretar sólo los dígitos; 27 interpretaron números - compuestos por unidades y decenas; 12 interpretaron números compuestos por unidades, decenas y centenas; 8 sujetos fueron capaces de interpretar números de 4 cifras. Diríamos que, en términos generales, los resultados de -- nuestro estudio muestran una tendencia similar a la reportada por Ferreiro.

RELACION ENTRE EL CONOCIMIENTO DE LOS SIMBOLOS NUMERICOS Y DESARROLLO DE ESTRATEGIAS DE CALCULO.

Una de las preguntas que nos planteamos al iniciar el trabajo se refería a la posible relación entre el manejo (más o menos desarrollado) del cálculo airtmético y el conocimiento de los símbolos numéricos. Es decir, nos cuestionábamos si los sujetos que fueron capaces de realizar cálculos aritméticos más complejos necesitarían el apoyo de la escritura para hacerlo o si, por el contrario, serían cuestiones independientes. - Los resultados que obtuvimos al respecto los presentamos en - seguida.

Parece ser que no existe relación alguna entre el desarrollo de las estrategias de cálculo aritmético y el conocimiento de la simbolización respectiva, y no nos estamos refiriendo sólo a la simbolización de los algoritmos sino fundamentalmente a la simbolización de los números.

El análisis de los datos nos mostró que los individuos con estrategias de cálculo más desarrolladas y concientizadas, eran incapaces de anotar las cuentas (Silvino, José y Guadalupe)y, particularmente uno (José), no sólo no escribe las complicadas cuentas que hace sino que conoce únicamente los números- del 1 al 10 , el 100 y el 1000.

José, que tiene 20 años de comprar diariamente el mandado - para una familia, nos muestra claramente la falta de relación entre cálculo y simbolización; nos muestra que no siempre van ligadas las necesidades de hacer cuentas y de leer números. - Refiriéndose a la época en que desarrolló sus estrategias de cálculo, José nos dice:

> "De regreso de las compras, en que presentaba el 'ticket' que la señora me había apuntado... me fijaba yo lo que me había costado y por el camino, ya cuando venía en la calle, venía haciendo cuentas así, con la boca y con -

> los dedos... lo normal (era) que se me grababa: las zanahorias me costaron a tanto el kilo, las calabazas a tanto, ... y ahí es donde va uno agarrando las cosas, las ideas ... es lo bueno que no se me olvidaban los precios, porque a las personas que se les olvidan las cosas de los precios nunca pueden sacar una cuenta"...

El aprendizaje de José no fue escrito, fue en el manejo mental de las cuentas - que por necesidades del trabajo tenía que realizar con precisión - donde aprendió y desarrolló estrategias de cálculo nítidas y ágiles. Lo que José no desarrolló, fue un sistema de escritura para anotar las cuentas, ni siquiera los números, prefirió esta estrategia, que era más independiente, y le resultó efectiva.

El aprendizaje de Silvino, en cambio, incluyó el reconocimiento de los símbolos numéricos, pues sus necesidades eran distintas:

> "Entre los artesanos empezamos a prender porque <u>vemos</u> las cuentas de los otros, para saber cómo vamos, unos saben más que otros, y esos son los que te dicen, así es como poco a poco fuí aprendiendo... también de albañil aprendí, el maestro albañil nos hacía las cuentas, porque nos pagaba por metro y <u>nos mostraba</u> las cuentas que él hacía para que viéramos lo que nos debía pagar".

Silvino habla de un aprendizaje muy <u>visual</u>: "veía" las cuentas como albañil y después como artesano, de ahí deriva su aprendizaje. Pero es importante señalar que si bien Silvino escribe bastantes números... "ahí llegaría yo como hasta 400 ... o hasta 1ooo" nos dice, sin embargo no es capaz de escribir las cuentas... "esas las hago en la mente" ... concluye.

La experiencia les ha demostrado a Silvino y a José que no es necesario nada más, con la mente han podido resolver todos los problemas que en las compras o en la comercialización de los productos han surgido, y el procedimiento ha sido eféctivo.

Margarita, Vicenta o Jorge nos muestran también, cada uno de diferente manera la falta de relación entre el desarrollo de las estrategias de cálculo aritmético y el conocimiento de los símbolos numéricos:

- Jorge conoce y escribe hasta 1000 y su desarrollo en el cálculo corresponde a la etapa intermedia.
- Margarita conoce y escribe hasta 100 y se encuentra en la etapa inicial.
- Vicenta, que lee y escribe hasta el 1000, se encuentra en la segunda etapa.

En el siguiente cuadro esquematizamos esta falta de relación entre cálculo y simbolización:

RELACION ENTRE EL CONOCIMIENTO DE LOS SIGNOS NUMERICOS Y DESARROLLO DE ESTRATEGIAS DE CALCULO ARITMETICO

Nivel final	Silvino	conoce hasta 1000
	José	conoce hasta 10 , el 100 y el 1000
Nivel inter-medio	Jorge	conoce hasta 1000
	Guadalupe	conoce hasta 1000
	Carmen	conoce hasta 100
	María	conoce hasta 10
	Vicenta	conoce hasta 1000
Nivel inicial	Margarita	conoce hasta 100
	Delfina	conoce hasta 10 (con confusión en 6 y 9)
	Ramón	conoce hasta 10
	Hilario	conoce hasta 10 y 100
	Josefina	conoce sólo el 5

Es decir, los sujetos clasificados en un mismo *nivel*, tienen conocimientos dispares acerca de los símbolos numéricos. Esto se evidencia con claridad en los dos últimos *niveles* en los que el conocimiento respectivo oscila entre 10 y 1000. En el *primer nivel* la oscilación va del casi desconocimiento total, al conocimiento del 100.

Ahora bien, si como observamos, los sujetos no conocen necesariamente los símbolos numéricos que aparecen en los billetes, y ni siquiera se puede afirmar que se conocen los dígitos en todos los casos ¿ qué es lo que les da la posibilidad de resolución sin contar con un sistema de registro ? Lo que da a los sujetos tal posibilidad es el desarrollo de la memoria la cual tiene un desarrollo paralelo al de las estrategias de cálculo. En efecto, si recordamos por ejemplo el caso de la multiplicación en los sujetos del *primer nivel*, observamos que el "olvido" de las duplicaciones lleva a la imposibilidad de resolución de la multiplicación. Ocurre en cambio que, cuando los sujetos logran registrar (memorizar) el número de duplicaciones, se llega satisfactoriamente a los resultados. Y no sólo eso, los sujetos del *nivel final* pueden compactar estrategias de multiplicación porque han memorizado algunos productos. " De tanto, uno ya sabe los que es.". nos dicen los sujetos.

Pero a los largo de las entrevistas nos quedó claro que si bien los sujetos no conocen los símbolos numéricos ni necesitan de un sistema de registro gráfico para realizar los cálculos, sí están más familiarizados con algunos números (no con su representación) que con otros. Podemos decir que hay números con los que los sujetos se sienten cómodos al realizar los cálculos y esos son los números que terminan en 5 ó 0. De entre los números terminados en esas cifras, hay algunos que son los favoritos: 5,10, 25, 50, 100, 250 ó 500, por ejemplo.

Podemos afirmar algo más: el 1, el 3, el 4, el 6, el 7, el 8 y -

el 9 son números que preferentemente se eluden en algunos cálculos. Es decir, los sujetos, al encontrar un 1, un 3, un 4, etc., le agregan o le restan lo necesario para convertirlo en 5 ó 10. En otras palabras, los sujetos redondean los números siempre que esto sea posible (de acuerdo con la naturaleza del cálculo) y el redondeo y su manejo se perfeccionan a medida que los sujetos alcanzan mayor desarrollo de sus estrategias de cálculo. El por qué de estas afirmaciones, ha quedado justificado en el desarrollo de los capítulos precedentes.

CUARTA PARTE. CONCLUSIONES Y NUEVAS INTERROGANTES

I. CONCLUSIONES SOBRE LAS PREGUNTAS INICIALES, PREGUNTAS SOBRE LAS CONCLUSIONES FINALES

LAS CONCLUSIONES

Al iniciar el estudio nos planteamos las siguientes interrogantes:

a) ¿ resuelven los adultos no alfabetizados los problemas con las cuatro operaciones aritméticas básicas que su cotidianeidad les presenta sin recurrir a la ayuda de otras personas ?

De ser así :

b) ¿ cuáles son las estrategias de resolución de cada una de las cuatro operaciones aritméticas que siguen ?

c) las estrategias de cálculo ¿ se dan indiferenciadamente en todos los analfabetos ?

d) ¿ cuáles son los puntos probemáticos - si es que existen- en las estrategias, y cuáles son los límites en el cálculo ?

e) los límites en el cálculo, ¿ son los mismos para todos los sujetos ?

f) ¿ cuál es la lógica que sustenta a las estrategias de cálculo analfabetas y de dónde proviene dicha lógica ?

g) ¿ cuáles son las posibilidades y limitaciones de aplicación de una estrategia de cálculo en distintos contextos (de intercambio comercial, laboral o ajeno al adulto) y con distintos números ?

h) ¿ qué recursos materiales o gráficos se utilizan para apoyar las estrategias de cálculo ?

i) ¿ hay alguna relación entre el manejo del cálculo mental y la capacidad de simbolización del mismo ?

j) ¿ qué tanto y en qué difieren las estrategias de cálculo analfabetas de las estrategias de cálculo formal ?

De dichas interrogantes, derivamos las siguientes conclusiones:

Los analfabetos cuentan con estrategias de cálculo que atraviesan por tres niveles de desarrollo.

Los analfabetos han construído estrategias para resolver los -- problemas con las cuatro operaciones aritméticas que su cotidianeidad les presenta. Tales estrategias muestran en todos los sujetos una misma lógica pero no un igual nivel de desarrollo. Es decir, todos los sujetos ponen en marcha estrategias similares- para resolver las situaciones problemáticas que involucran las- operaciones aritméticas, pero el manejo que hacen de ellas es - diferenciado por la agilidad, la eficiencia y la flexibilidad , así como por la utilización de objetos físicos, el conteo y el redondeo para a oyar los cálculos. Dos elementos más que dife-- rencian los tres *niveles* de desarrollo por los que atraviesan - las estrategias de cálculo son la posibilidad de generalización y de verbalización de las mismas.

Las diferencias que definen cada uno de los tres *niveles*, enfatizamos, lejos de significar diversidad cualitativa, muestran una tendencia progresiva hacia la definición de las estrategias- que se expresan nítida y sólidamente en el *nivel final*.

Hay puntos problemáticos en las estrategias de cálculo que, en ocasiones, constituyen los límites en el cálculo.

El manejo de las estrategias de cálculo es diferenciado también por la capacidad de rebasar dificultades derivadas de la naturaleza de los números involucrados. Es decir, si bien todos los analfabetos cuentan con estrategias de cálculo, hay puntos problemáticos en cada una de las operaciones que no siempre es posible rebasar. Tales puntos - que en el *nivel inicial* constituyen obstáculos insalvables para el cálculo - son los siguientes :

- la reagrupación en la suma
- la desagrupación en la resta
- el registro (memorización)de las duplicaciones en la multiplicación
- el residuo en la división.

Estos cuatro obstáculos, en conjunto, son rebasados exclusivamente en el *nivel final*.

La aritmética que han construído los analfabetos es un sistema aditivo.

Las estrategias de cálculo detectadas en el estudio muestran que la aritmética construída por los analfabetos es un sistema aditivo.En la base de todos los cálculos está precisamente la adición operación que se muestra como estrategia universal del cálculo analfabeta. Así, la resta se transforma en una suma que permite calcular un faltante; la multiplicación en su estrategia más general es una suma que duplica reiteradamente un valor; la división es la adición reiterada de un cociente hipotético y, por supuesto, la adición es también y simplemente una adición.

El origen de los conocimientos está en el manejo del dinero.Hay evidencias de que su desarrollo deriva de la frecuencia,la diversidad y la exigencia de precisión en los cálculos.

El conocimiento que los analfabetos tienen sobre el cálculo - según los datos recabados en nuestro estudio - deriva del manejo del dinero, es decir, del intercambio comercial. Y si bien sin un análisis profundo puede afirmarse que tal conocimiento -

proviene del trabajo, de la experiencia laboral, esto ha dematizarse y precisarse. El hecho de que algunos sujetos muestren estrategias de cálculo altamente desarrolladas tiene relación con el manejo frecuente , diverso y de exactitud obligadade los cálculos, no de la condición laboral en abstracto. En efecto, los sujetos que manejan cantidades fijas (no diversas)- como puede ser el caso de un vendedor que siempre pone el mismo precio al único producto que vende - aunque permanentemente estén involucrados en el manejo del dinero , no desarrollan hasta niveles altos sus estrategias de cálculo ni la capacidad de generalización de las mismas. En sentido inverso, los sujetos que realizan cotidianamente cálculos diversos (porque venden o compran variados productos y distintas cantidades de ellos) y qu de la exactitud de dichos cálculos dependen sus ganancias o su salario, muestran un desarrollo notable de sus estrategias de cálculo.

Es entonces el manejo frecuente, diverso y de exactitud obligada no la condición laboral en abstracto, el promotor del desarrollo del pensamiento matemático del analfabeto.

La capacidad de generalización de las estrategias de cálculo no es igual en todos los analfabetos.

El despliegue de las estrategias de cálculo lleva aparejado el desarrollo de la capacidad de generalización de las mismas.Es decir,al evolucionar las estrategias de cálculo, evoluciona y aumenta, la capacidad de aplicarlas en la resolución de problemas con datos y contextos distintos de los que se manejan en la experiencia de vida.

La dificultad para escapar de los datos provenientes de la experiencia particular , es decir, los tropiezos para generalizar, es exclusiva de los sujetos que se encuentran en el -

primer nivel.Esto significa que, a partir de la experiencia - de vida, cuando ésta es amplia y diversa , se puede desarrollar la capacidad de generalización, independientemente de - que se manejen símbolos o procedimientos formales.

No hay relación entre el desarrollo de las estrategias de cálculo y el conocimiento de los símbolos numéricos o la posesión de un sistema gráfico de registro.

Una primera impresión podría llevar a pensar que los sujetos capaces de aplicar estrategias de cálculo complejas necesitan del apoyo de signos gráficos para hacerlo. Tal situación no ocurre. Es totalmente independiente el desarrollo de las estrategias de cálculo y la posesión de un sistema de escritura - el cual permitiría registrar los cálculos parciales necesarios para resolver un cálculo final - los sujetos no lo necesitan para realizar sus cálculos. Algunos sujetos con niveles de desarrollo medios o altos no sólo no registran sus cálculos sino que no identifican mas que unos cuantos símbolos numéricos . Tal fenómeno opera también en sentido inverso, es decir, sujetos que conocen todos los números de una y dos cifras fueron catalogados en el *nivel* más bajo de desarrollo de las estrategias de cálculo. Esto significa que el no contar con un sistema gráfico de registro no constituye ningún obstáculo para el cálculo y que, en sentido inverso, contar con él tampoco asegura el desarrollo del mismo.

La lógica de las estrategias de cálculo que han construído los analfabetos difiere sustancialmente de la lógica de los algoritmos formales.

Las estrategias básicas de cálculo que utilizan los analfabetos son :

Para la adición.

El procedimiento indoarábigo, estrategia que se guía por el principio de sumar primero lo más grande. En este caso destaca el hecho de que el principio rector es exactamente inverso a la lógica del algoritmo formal, que consiste en sumar a partir de los agrupamientos de menor orden. Dicho en términos analfabetos: se trata de sumar primero lo más chico.

Para la sustracción.

El procedimiento indoarábigo, que se basa también en el principio de restar primero lo más grande, nuevamente se contrapone al algoritmo formal por la misma razón que el algoritmo de la adición: se trata nuevamente de restar primero lo más chico, es decir, de restar primero los agrupamientos de menor orden, de derecha a izquierda.

La sustracción por completo aditivo - que se utiliza en los casos en que la desagrupación es necesaria - transforma la resta en adición y prescinde de la desagrupación y descomposición de los números involucrados. Ambos elementos definen a esta estrategia como contrapuesta a la que subyace en el algoritmo formal ya que ésta se basa precisamente en la desagrupación de las decenas o centenas (según sea el caso) y en la descomposición de los números con base en el sistema posicional.

Para la multiplicación

El conteo o suma de sumandos iguales, que se basa precisamente en un conteo, es utilizada en un reducido número de casos (sólo en aquéllos en que la memorización de una serie numérica puede sustituir el cálculo). Esta sería la estrategia de multiplicación más coincidente con el algoritmo formal el cual se explica en términos de suma de sumandos iguales. La coincidencia, sin embargo, no tiene un largo camino porque el conteo o suma de sumandos iguales no rebasa el manejo de unos cuantos pares de dígitos.

La estrategia más general de multiplicación - que se compacta y complementa en el *nivel final* - es la duplicación reiterada. Dicha estrategia se diferencia sustancialmente del algoritmo formal ya que el principio que la guía es precisamente el duplicar reiteradamente uno de los factores. El algoritmo formal, en cambio, basado en la propiedad distributiva de la multiplicación - con respecto a la adición, se apoya en las multiplicaciones parciales obtenidas mediante la descomposición de los factores con base en el sistema decimal de numeración. Así, por ejemplo, la multiplicación 34 x 18, en términos analfabetos implica una serie de duplicaciones((((34 + 34) + 68) + 136) + 272)+ 68) mientras el algoritmo formal implica los siguientes cálculos: - (8 x 4) + (8 x 30) + (10 x 4) + (10 x 30).

Para la división

La estrategia básica es la suma reiterada del cociente hipotético que se fundamenta en el principio de hipotetizar un cociente y ponerlo a prueba mediante su suma reiterada.

Probablemente es esta estrategia la que resulta menos diferente del algoritmo formal ya que, tanto la una como el otro trabajan de izquierda a derecha, a partir de los agrupamientos mayores. Sin embargo, no toda la estrategia es coincidente y, en especial hay un paso que se resuelve de forma distinta en el algoritmo - formal: la "prueba del cociente" se realiza mediante una multiplicación (40 ÷ 5 = 8 porque 5 x 8 = 40, p. ej.) mientras en el otro caso, la "prueba del cociente" se basa en la adición reiterada del cociente hipotético (40 ÷ 5 = 8 porque 8 + 8 + 8 + 8 + 8 =40). Esta diferencia que a primera vista podría parecer sutil, en - realidad lo es sólo para quienes han estado en contacto tempranamente con los algoritmos formales, pues no es automático establecer la equivalencia entre una suma y una multiplicación. Los datos recopilados en esta investigación apoyan tal afirmación.

Las estrategias de cálculo que han construido los analfabetos plantean un reto a la andragogía

Sabemos que los analfabetos han construído estrategias de cálculo aritmético que tienen en la base a la adición, y que son diferentes a las que subyacen en los algoritmos escolarizados. No ocurre, sin embargo, que todos los adultos desecolarizados hayan alcanzado un grado óptimo de desarrollo de tales estrategias. De hecho, hay algunos que por su limitada experiencia en el manejo del dinero, se encuentran apenas construyéndolas. La educación de adultos, entonces, no tiene sólo el -- compromiso de enseñar a representar los procesos de cálculo, su compromiso empieza por el desarrollo de los mismos. Es decir, la educación de adultos debe tender a desprender la lógica de los sujetos de las acciones y datos particulares que la generó, en los casos en que tal desprendimiento no se haya logrado. Debe además desarrollar la agilidad, la flexibilidad y la conciencia sobre los procesos de cálculo propios de los sujetos. Por supuesto, ha de enseñarse también a simbolizar el cálculo.

Las formulaciones algorítmicas - y así como se presentan en los textos actualmente vigentes - están necesariamente despegadas de la experiencia, de la interacción con los objetos físicos. En el caso de la educación de los adultos el problema es cómo lograr formas de resolución despegadas de la experiencia y, a la vez, tomar en consideración la experiencia y la - lógica de los sujetos.

Se observa que las estrategias espontáneas muestran un des -- prendimiento de la experiencia particular en el *tercer nivel*, tal desprendimiento proviene de la experiencia misma. El camino para la educación de adultos, entonces, pareciera ser lograr el despegue precisamente a partir de la experiencia, no de su negación. Es decir, el apego a la experiencia quizá -

pueda superarse con base en el manejo diverso de lo conocido, de lo particular. Intensificar y diversificar la experiencia como proceso hacia la generalización y la formalización podría ser un principio rector en la "enseñanza" del cálculo a los adultos.

Pensar en una educación de adultos basada en la experiencia lleva a pensar también en la necesidad de saber qué tanto sabe el sujeto particular que aspira a incorporarse al sistema educativo "formal". Quedaría abierta la posibilidad de ofrecerle una "educación" congruente con el nivel de desarrollo de su pensamiento matemático.

LAS PREGUNTAS.

Al iniciar el trabajo investigativo, ya lo señalamos, teníamos interrogantes que lo orientaron, en la dimensión de lo posible, creemos haberlas contestado. Hoy tenemos nuevas interrogantes :

- ¿ Qué ocurre con las estrategias de cálculo construídas por los analfabetos cuando éstos acuden a un sistema "formal" de educación?

- ¿ Qué impacto real tiene sobre los sujetos la enseñanza formal del cálculo ?

- ¿ Qué tanto se trasladan a la vida cotidiana las estrategias escolares de cálculo?

- ¿ Qué cálculo ha de enseñarse, y cómo ha de enseñarse a quienes acuden a recibir la educación de adultos ?
- ¿ Qué postura ha de tomarse ante los conocimientos que los adultos poseen : ?
  . ¿ desarrollar las estrategias espontáneas y enseñar a representarlas ?
  . ¿ crear un puente entre los conocimientos de los adultos y las estrategias escolarizadas ?

- ¿ omitir el dato y continuar en la perspectiva en que hasta hoy hemos estado ?

Dejo abiertas las preguntas e invito a quienes están comprometidos con la educación de los adultos a escuchar a aquéllos de quienes frecuentemente pensamos nada saben. De hacerlo, seguramente la lección más amplia nos la llevemos nosotros.

ANEXOS

I. LISTADO DE PROBLEMAS CON LAS CUATRO OPERACIONES BASICAS QUE SE PLANTEARON EN LAS ENTREVISTAS.

1. Si usted va al mercado y compra $200 de nopales y $300 de frijol, ¿cuánto tiene que pagar?

2. Un señor vendió 250 de dulces y $310 de pepitas, ¿cuánto vendió?

3. En una bodega había 6 costales de arroz, luego llevaron otros 7 costales ¿cuántos costales hay ahora?

4. Un niño cuenta el dinero que trae en las bolsas del pantalón. En una trae $34 y en otra trae $22 ¿cuánto dinero trae el niño en el pantalón?

5. Juana compró una estampilla de $45 y otra de $28 para enviar una carta. ¿Cuánto le costaron a Juana las estampillas de la carta que envió?

6. Problema relacionado con el trabajo del entrevistado.

7. Si usted lleva $600 y gasta $300 en un pasaje ¿cuánto dinero le queda?

8. Una niña tiene guardados $450, saca $230 ¿cuánto dinero le queda?

9. En una bodega había 75 paquetes de frijol, sacaron 62, ¿cuántos paquetes hay ahora?

10. Un paletero vendió una paleta de $65, le pagaron con $80 ¿cuánto tiene que dar de cambio?

11. Una señora lleva $92, le paga $55 al tendero ¿cuánto dinero le queda?

12. Problema ajeno a las cuentas cotidianas y al trabajo del entrevistado.

13. Si se tiene 4 cajas con 5 pastillas cada una, ¿cuántas pastillas se tienen?

14. Si se compran 12 bolillos de $30 cada uno, ¿cuánto se pagará?

15. En un molino se vendieron 23 kilos de masa a $25 el kilo ¿cuánto cobraron por la masa?

16. En un puesto hay 17 manojos de perejil, cada manojo cuesta $18, si se venden los 17manojos, ¿cuámto se obtiene por la venta del perejil?

17. Problema relacionado con el trabajo del entrevistado.

18. Se pagaron $900 por 3 kilos de arroz, ¿cuánto costó cada kilo?

19. Si se gastan $90 en 2 artículos, ¿cuánto se pagó por cada artículo?

20. Cuatro jabones cuestan $480, ¿cuánto cuesta cada jabon?

21. Se pagan $575 por 5 pasajes ¿cuánto cuesta cada pasaje?

22. Si se tiene $840 para comprar bolsas de plástico de $3 ¿cuántas bolsas se pueden comprar?

23. Si se tienen $300 y se compran manojos de $12 ¿cuántos manojos se pueden comprar?

24. Problema ajeno a las cuentas cotidianas y al trabajo del entrevistado.

Notas: El esquema de los problemas se ha simplificado al máximo pues lo que interesa observar son los algoritmos de cálculo, más que la capacidad de resolver problemas con distintos niveles de dificultad lógica.

Es importante señalar también que los objetos a que se refieren los problemas se cambiarán, de acuerdo con el sexo y las circunstancias del entrevistado (p. ej. en el problema 1 los nopales y los frijoles se sustituyeron por cerillos y cigarros), pero las cantidades y la estructura del problema se conservaron iguales en todos los casos.

II. NUMEROS QUE SE SOLICITO IDENTIFICAR A LOS ENTREVISTADOS

1	5	7	4
9	2	15	23
10	45	71	
128	150	200	
504	615	209	

525	830	90
30	50	100
400	600	900
750	310	832
350	1000	25

¿ En dónde aprendió los números, en dónde los ha visto, en dónde los utili_
za ? ____

____

III. DATOS PERSONALES DE LOS ESTREVISTADOS

Nombre ______________________________

Edad ______________________________

Número de hijos ______________________________

Trabajo actual ______________________________

Otros trabajos ______________________________

Trabajo al que se ha dedicado más tiempo ______________

Lugar de nacimiento ______________________________

Tiempo de vivir en la ciudad ______________________

Asistencia a la escuela ______________________________

Conocimientos escolares que recuerda (si es que asistió algu na vez a la escuela) ______________________________

Causa o causas de inasistencia o abandono escolar ________

Asistencia a un círculo de alfabetización ______________

Aprendizajes académicos logrados en el círculo de alfabetiza ción hasta ahora ______________________________

Alguien le ha enseñado sistemáticamente a hacer cuentas, en alfabetización, en su casa o en el trabajo ______________

Actividades cotidianas o laborales en que le es necesario - realizar cálculos ______________________________

Observaciones ______________________________

BIBLIOGRAFIA

Acioly, Nadma María y Ana Lucía Días Schielman. "Intuitive mathematics and schooling in a lottery game". Proceeding of the Tenth International Conference of Psycology of Mathematics - Education. Londres, julio de 1986.

Carraher, Terezinha Nunes. "Rated addition: a correct aditive solution for proportions problems". Proceeding of the Tenth International Conference of Psycology of Mathematics Education. Londres, julio de 1986.

Carraher, Terezinha Nunes, et. al. "Written and oral mathematics". National Council of Teachers of Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education. Volumen 18. Number 2, March, 1987.

Centro de Estudios Educativos. Ensayos sobre la educación de adultos en América Latina. México, 1982, 689 p.

Dimensión Educativa. Cuentas claras. Cartilla de Matemáticas para Adultos. Dimensión Educativa, Bogotá, sin fecha, 76 p.

Ferreiro, Emilia, et. al. Los adultos no alfabetizados y sus conceptualizaciones del sistema de escritura. Cuadernos de Investigación Educativa número 10. DIE, México, 1983, 234 p.

Freire, Paulo. La educación como práctica de la libertad. Siglo XXI, 17a. edición. México, 1976, 151 p.

Freire, Paulo. Pedagogía del oprimido. Siglo XXI, 28a. edición. México, 1982, 245 p.

Goldman, Lucien. "Epistemología de la sociología". En Jean Piaget, Tratado de lógica y conocimiento científico VI. Epistemología de las ciencias del hombre. Paidós, Buenos Aires, 1979, 230 p.

Hart, Katleen. "De la acción a la formalización". Conferencia dictada en la Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV del IPN. 31 de julio de 1987.

Instituto Nacional para la Educación de lso Adultos. Avila Storer Alicia,et.al." Habilidades y conocimientos matemáticos de los adultos recién alfabetizados o en proceso de alfabetización". Documento interno, julio de 1986.

INEA. Camarena,Isabel. "Comentarios generales acerca de la resolución de la prueba para determinación de niveles de alfabetización, en una muestra de adultos alfabetizados entre 1982 y 1985". Documento interno,1986.

INEA. Dirección de Educación Básica."Habilidades básicas para el autodidactismo de los adultos recién alfanetizados".Documento interno, 1986.

INEA. <u>Matemáticas. Primera parte. Primaria intensiva para adultos</u>.Tercera Edición. México, 1984, 342 p.

INEA. <u>Matemáticas. Segunda parte. Primaria intensiva para adultos</u>.Segunda Edición. México, 1980, 312 p.

INEA. <u>Matemáticas. Tercera parte. Primaria intensiva para adultos</u>. Segunda Edición. México, 1980, 309 p.

INEA. <u>Mi primer cuaderno de operaciones</u>. México, 1985

INEA. <u>Nuestras cuentas diarias. Matemáticas. Primara parte. Volumen 1. Primaria para adultos. Plan experimental</u>.México, 1987, 246 p.

INEA. <u>Nuestras cuentas diarias. Matemáticas. Primera parte.volumen 2. Primaria para adultos. Plan Experimental</u>.México, -- 1987, 239 p.

Luria, A.K. <u>Los procesos cognitivos. Fontanela, Barcelona,1980</u>,-- 213 p.

National Council of Teachers of Mathematics. <u>Historical Topics -- for the Mathematics Classroom</u>. Thirty-first year book ,--- NCTM,Washington D.C.,1969, 553 p.

National Council of Teachers of Mathematics. <u>Estimation and mental calculation</u>. Book of the year, 1986, NCTM., EUA, 1987.

Newman, James R. "El papiro Rhind". En James R. Newman. Sigma, El mundo de las matemáticas. Vol. 1. 10a Edición, España, 1985, 430 p.

Ochoa, Jorge y Juan García Huidobro. "Tendencias de la investigación sobre educación de adultos y educación no formal en América Latina". En C.E.E. Ensayos sobre la educación de adultos en América Latina. México, 1982, 689 p.

Peterson, John. Teoría de la aritmética. Limusa, México, 1980, 383 p.

Piaget, Jean. Introducción a la epistemología genética, 1. El pensamiento matemático. Buenos Aires, Paidós, 1979, 281 p.

Piaget, Jean. Problemas de epistemología genética. Ariel, Buenos Aires,

Piaget, Jean. La génesis del número en el niño. Ed. Guadalupe, Buenos Aires, 1975, 289 p.

Piaget, Jean. Tratado de lógica y conocimiento científico I. Naturaleza y métodos de la espistemología. Buenos Aires; Proteo, 1970, 133 p.

Piaget, Jean e Inhelder, B. The origin of the idea of chance in children. Ed. W.W. Norton and Company Inc., New York, 1976.

Reys, Robert E. "Estimación". Sociedad Matemática Mexicana. Matemáticas y enseñanza. Vol. 1, No. 1, Abril de 1986.

Schmelkes, Silvia. "La investigación sobre educación de adultos en América Latina". En C.E.E. Ensayos sobre la educación de adultos en América Latina. México, 1982, 683 p.

Universidad Pedagógica Nacional. Educación de adultos y cultura popular: hacia una alternativa pedagógica. Tomos I y II. Colección Cuadernos de Cultura Pedagógica, serie Coloquios, No. 1. México, 1985.

Velázquez Guzmán, Guadalupe. La cosmovisión del analfabeta: el caso del campesino semiproletario de Santa Ana Tlacotenco. Colección Cuadernos de Cultura Pedagógica, serie investigación educativa, número 3, UPN. México, 1984, 131 p.

Vergneud, Gerard. L'enfant, la mathemátique et la realité. Collection Exploration Recherches en Sciences de l'education. France, Ed. Peter Lanz, 1984.