UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

MODELOS FISICOS DE GENERACION DE TREMOR VOLCANICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

EDGAR ARTURO MUÑOZ MENDEZ

Ciudad Universitaria, México 1988

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INDICE

RESUMEN

El tremor volcánico consiste en un movimiento del terreno que tiene lugar en zonas volcánicas y el cual se asocia a procesos magmáticos. El estudio de este fenómeno es importante no sólo por su interés científico sino tambien porque al presentarse en erupciones volcánicas nos proporciona un elemento predictivo de gran valor.

Se presentan algunas de las clasificaciones usuales para sismos volcánicos como marco de referencia para caracterizar el tremor volcánico. Se desarrollan en detalle tres modelos físicos de generación de tremor y se discuten los mecanismos generadores en cada uno de ellos así como su aplicabilidad a casos particulares dependiendo del típo de volcanismo. Se concluye que todos los mecanismos son fuentes probables, pero que dependiendo del volcán en particular alguno de ellos puede jugar un papel más relevante.

INTRODUCCION

La actividad volcánica, una de las manifestaciones más espectaculares de la dinámica interna de nuestro planeta, es el resultado de un complicado mecanismo de procesos físico-químicos. Sus efectos no sólo incluyen los típicamente asociados al paroxismo volcánico (emisiones de gases, lavas y productos piroclásticos) sino una amplia gama de fenómenos que muchas veces sólo pueden ser detectados por medio de instrumentos.

Uno de estos fenómenos, quizá el más sobresaliente, es la sismicidad asociada al volcanismo. Su estudio es objeto de particular interés, no solo por la información que puede proveer hacerca de la dinámica del volcanismo sino también por su valor predictivo.

Algunas de las preguntas que podemos hacernos en este momento son desde luego, ¿qué es un sismo? y ¿qué entendemos por sismos volcánicos?, ¿podemos considerar como sismo volcánico a aquel que ocurre en regiones de volcanismo activo?. A la primera de estas preguntas podemos responder que podemos definir un sismo como la respuesta a una fuente de energía cinética impulsiva en la tierra ; respecto a las otras dos preguntas podemos decir que de acuerdo con la definición de sismo, un sismo volcánico es un evento sísmico localizado en una región de vulcanismo activo, aunque desde luego estas definiciones son muy generales.

En los capítulos siguientes se presentarán diversas clasificaciones de sismos volcánicos, así como tres de los modelos más conocidos de generación de un tipo particular de sismo volcánico llamado tremor; y se discutirá la validez de cada uno de los modelos.

El primer modelo, supone como causa de la generación del tremor, oscilaciones de la cámara magmática; este modelo que aunque matemáticamente es simple, presenta el inconveniente de la fuente que origine las oscilaciones, así como el problema del transporte de magma que acompaña al tremor, verificado esto en algunas partes como Hawaii; lo cual no es posible explicar con este modelo. En los resultados se obtiene, siguiendo el trabajo de Kubotera, una estimación para el radio de la supuesta cámara magmática así como diferentes valores del factor de calidad (Q) obtenidos a partir del modelo los cuales pueden ajustar los valores de Q observados, sin embargo, la combinación de los parámetros (V_{pi}, V_{po}, γ) usados para obtener estos valores no es única, por lo que de esta manera se requerirían determinaciones precisas de los parámetros, las cuales no se tienen; también se observa que de acuerdo con el modelo el sistema físico se comporta como un sistema con oscilaciones amortiguadas.

En el capítulo III se presenta el segundo modelo, el cual propone básicamente la fracturación hidráulica aleatoria con transporte de magma como la causa generadora de tremor volcánico, si bien se tienen evidencias de que ocurre transporte de magma durante los intervalos en que se presenta el tremor, así como una migración de este en correlación con erupciones; es difícil pensar en un proceso tal, con una duración de horas o semanas, aunado a esto la dificultad de mantener una longitud promedio de fractura constante, lo cual nos produciría el efecto altamente monocromático que caracteriza al tremor; aunque se han registrado señales similares al tremor volcánico en experimentos de fracturamiento hidráulico, así como en fracturamiento en rocas dentro de algunas minas y en fracturamiento en glaciares, nuevamente podemos ajustar los diferentes parámetros del modelo (ΔP, l, f, . . .) a los valores físicamente posibles sin tener una determinación única . Este modelo es además bastante más complejo requiriendo de la dinámica de fluidos así como de la elasticidad para el caso de la propagación no estacionaria de la fractura.

Por último en el tercer capitulo y en la primera parte, se analiza el espectro de radiación acústica, descomponiendolo en un desarrollo multipolar, y se observa que podemos aproximar muy bien el espectro del tremor mediante el desarrolo del segundo y tercer polos y que los factores de acoplamiento serian en orden de magnitud proporcionales a las dimenciones físicas del reservorio y del conducto. En este mismo capítulo pero en la segunda parte (eigenfrecuencias) se supone que la inestabilidad en el flujo del magma origina resonancias en los conductos de magma, y se obtinen los diferentes modos de resonancia para los distintos casos (extremos abiertos o cerrados) .Este modelo ha sido aplicado de forma muy interesante por diferentes autores al Etna; encontrando diferentes geometrías para los conductos, las cuales si bien son factibles no estan determinadas en forma única por los parámetros del modelo.

Se incluye un apéndice al final en donde se definen algunos términos empleados en el transcurso del presente trabajo.

CAPITULO I

CLASIFICACION DE LOS SISMOS VOLCANICOS

En el estudio de la sismicidad de origen volcánico, el primer paso consistió en la clasificación de los sismos con base en sus características registradas en los sismogramas; obtenidos estos, por medio de los instrumentos instalados en las inmediaciones de las áreas volcánicas. Dicha clasificación puede hacerse con base en la experiencia disponible sobre temblores de origen tectónico.

De acuerdo con Minakami (1974), Omori llevó a cabo una de las primeras clasificaciones de temblores volcánicos a través del estudio de la sismicidad asociada a la actividad volcánica del volcán Asama en 1910. Omori clasificó los temblores que ocurrían en el Asama en dos grupos, a los que llamo tipo A y tipo B. Los temblores tipo B son aquellos directamente asociados a erupciones explosivas; mientras que los temblores tipo A incluyen al resto de los temblores cuya ocurrencia, la mayoría de las veces no esta directamente relacionada con actividad explosiva visible.

En 1974 el mismo Minakami publicó una clasificación de temblores basada en el análisis de la sismicidad de varios volcanes del Japón y Hawaii. Esta clasificación ha sido de gran utilidad y, a pesar de que actualmente se ha notado que no todos los volcanes poseen una sismicidad que se ajuste a esta clasificación, sigue siendo utilizada al menos como marco de referencia para el análisis de la sismicidad en otros volcanes.

Minakami clasificó los sismos originados en areas volcánicas en las siguientes clases:

Tipo A. Son sismos con hipocentros bajo los edificios volcánicos y cuyas caracteristicas son semejantes a las de los sismos tectónicos; es decir, poseen semejantes contenidos de frecuencias, fases bien definidas y mecanismo focal de dislocación. Los focos de estos sismos ocurren entre 1 y 20 Km de profundidad alrededor del cráter volcánico, pero en lugares como Hawaii pueden alcanzar hasta 50 y 60 Km y sus magnitudes son menores a 6 y el valor b entre 1.8 y 1.9 (véase apéndice)

Tipo B. Estos temblores ocurren en un radio de 1Km alrededor del crater volcánico, son de frecuencia más baja (1-5Hz) con fase S apenas distinguible, o indistinguible y magnitudes muy bajas. Su frecuencia de ocurrencia se incrementa antes de una erupción explosiva. Su valor b está entre 3 y 4.

Temblores debidos a explosión.

Estos son los temblores causados por las erupciones explosivas. La forma de onda de estos temblores es muy semejante a la de los tipo B aunque pueden tener magnitudes mayores y su valor b es aproximadamente 4.

Tremor volcánico.

Este es una vibración continua al parecer como consecuencia de la ocurrencia ininterrumpida de temblores de los 2 tipos anteriores y que usualmente esta asociada con actividad eruptiva.

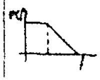
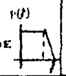
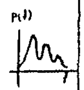
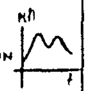
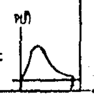
En los ultimos años las observaciones sismológicas efectuadas en volcanes activos de diferentes regiones del globo han proporcionado información adicional a la que dificilmente puede aplicarse los tipos catalogados por Minakami con las particularidades señaladas por él. Como consecuencia, se han presentado esquemas de clasificación que describen mejor el comportamiento de la sismicidad de algun volcán o grupo de volcanes en particular (Malone, 1981, Hovshov, 1983).

Sin embargo tanto la clasificación de Minakami como otras más recientes, señalan la existencia de dos grandes grupos de eventos que, según Latter (1981) pueden denominarse como volcanotectónicos y volcánicos según su mecanismo (Tabla 1.1).

Los sismos volcanotectónicos tienen características que señalan su origen como de tipo fallamiento, aunque los valores b contrasten con los usuales para temblores tectónicos. Sin embargo, podemos decir que la acumulación de esfuerzos que produce el fallamiento mecánico, está relacionada con el material magmático que ocasiona al volcanismo.

Por otra parte, los eventos de naturaleza volcánica son debidos a procesos relacionados directamente con el movimiento del material magmático. La asociación entre los eventos y procesos es fácil de establecer cuando estos últimosocurren en la superficie y puede hacerse con cierta confianza para los eventos más profundos cuyas características señalan este mismo origen. El mecanismo de estos eventos es más dificil de

Tabla 1.1

AUTOR		MINAKAMI(1974)	LATTER(1981)	MALONE(1981)	SHICK(1981)	HAVSKOV(1983)
VOLCAN		Usu, Asama, Aso Kilauea, Mauna Loa	Ruapehu Ngauruhoe	Mt. St. Helens	ETNA	Chichonal
TIPOS	VOLCANO-TECTONICOS	TIPO A.- semejantes a los tectonicos; hipo-centros entre 1-10Km. en Hawaii entre 30-60	VOLCANO-TECTONICOS. f > 3Hz (frecuencia) tienen lugar en rocas competentes	TECTONICOS (tipo t) alta frecuencia loca-lizados fuera del volcán ; profundidad mayor 3Km (h > 3Km) ALTA FRECUENCIA (h) h > 3 Km ; bajo del volcán;alta frecuencia	(espectros) FRACTURAMIENTO  COLAPSO DE CALDERA 	TIPO 4.- semejante a la A de Minakami
DE SISMOS	VOLCANICOS	TIPO B.- Asociados con erupciones; fase S no clara; ocurren en un radio de 1Km alrededor del volcan; periodo periodo entre 0.2-1.0 s EXPLOSION.- Asociados con sismos de explosion TREMOR.- Sucesion de eventos tipo B no muy profundos	VOLCANICOS 1) ALTA FRECUENCIA f > 3 Hz 2) FRECUENCIA MEDIA 2 - 3 Hz 3) BAJA FRECUENCIA f < 2 Hz ancho de banda 1-6 Hz pero con picos en 1-2 Hz	FRECUENCIA MEDIA (m) (1-5 Hz) h < 3 Km fase S no clara BAJA FRECUENCIA (l) fase S no clara; h > 3 Km; f~1 Hz EVENTO DE GAS (S) no claro el primer arrivo; AVALANCA (a) contenido frecuencia mezclado; asociado a avalanchas TREMOR	CAIDA DE PRESION  EXPLOSION  FLUJO DE MAGMA 	TIPO 1.- Arrivos clar. fase S no clara; baja frecuencia TIPO 2 alta frecuencia longitud de la coda anómala; amplitud pico a pico mayor a 20 mm TIPO 3 baja frecuencia amplitud superior a 5 mm

especificar excepto cuando, como se ha dicho, puede correlacionarse directamente con eventos superficiales tales como explociones. flujos de gases, y flujos de mezclas de gases y piroclastos.
La tabla 1.1 muestra algunas de las clasificaciones que se han publicado recientemente. adaptadas a estos dos grandes subgrupos. Las figuras 1.1, 1.2 y 1.3 muestran algunos temblores típicos de estas clasificaciones.

Nótese que excepto la clasificación de Shick (1981) todas están basadas en el análisis de las características de los sismogramas. Este último autor hace notar además la diferencia en las características espectrales de los diferentes tipos de eventos de su clasificación.

La distinción entre ambos tipos de eventos no es abrupta. Recientemente fueron reportado eventos en el monte St. Helens que muestran características que los asemejan a ambos tipos de eventos, volcanotectónicos y volcánicos (Malone,1981).

La tabla 1.1 muestra que para estos grupos de eventos, existe una variedad de subdivisiones; algunos de estos tipos de eventos y sus características son casi exclusivas de un tipo particular de volcán.

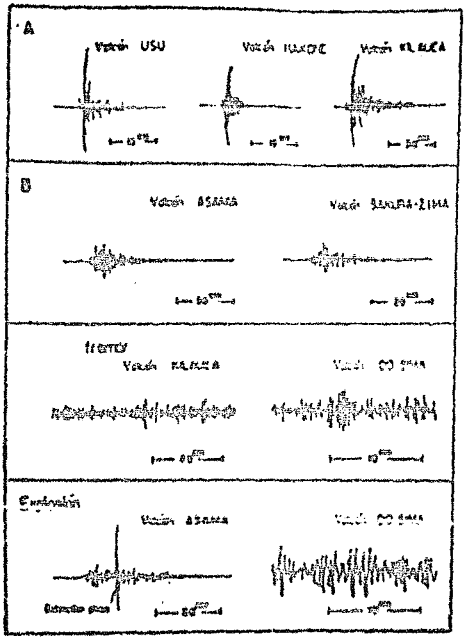


Fig 1.1

MUESTRAS DE SISMOGRAMAS PARA DIFERENTES TIPOS DE SISMOS (SEGUN: MINAKAMI, 1974)

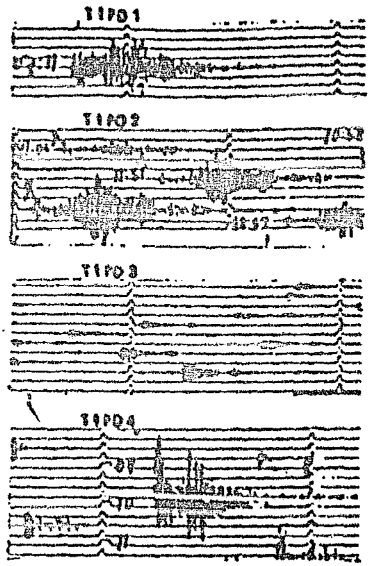
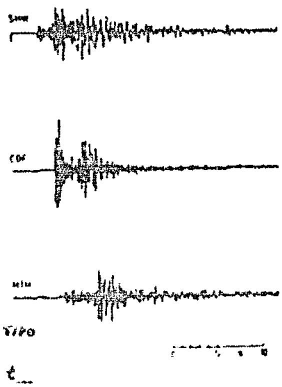
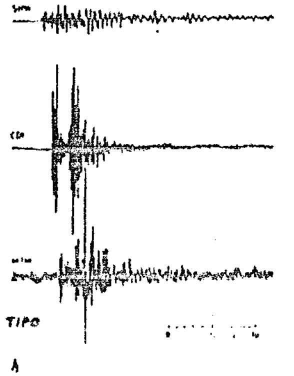
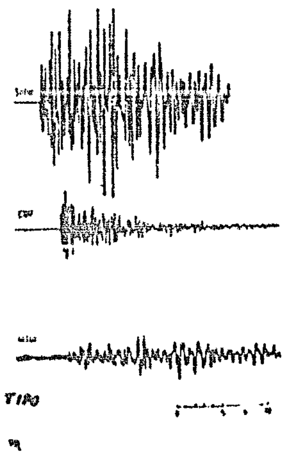


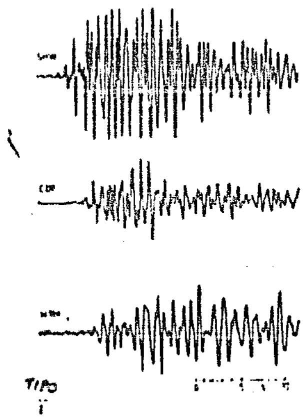
Fig 1.2

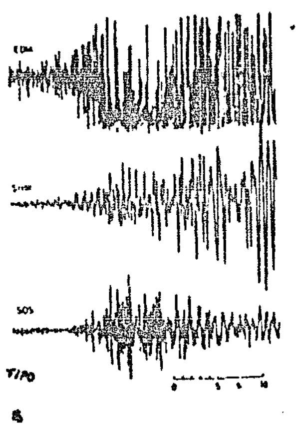
MUESTRAS DE SISMOGRAMAS PARA DIFERENTES TIPOS DE EVENTOS EN EL CHICHON (SEGUN HAVSKOV, ET AL. ,1983)

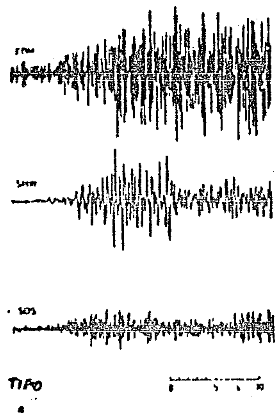

TIPO


TIPO


TIPO


TIPO


TIPO


TIPO

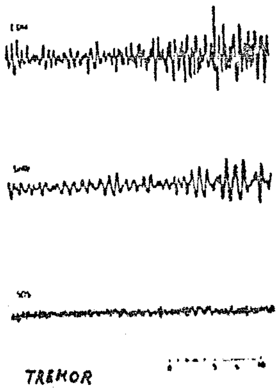


Fig 1.3

MUESTRAS DE SISMOGRAMAS PARA DIFERENTES TIPOS DE EVENTOS EN EL MT. ST. HELENS (SEGUN MALONE, 1981)

Esto difícilmente causa extrañeza puesto que las diferencias en la viscosidad, composición, contenido de gases, etc., del magma; y la resistencia, fracturamiento, cohesion, contenido de agua en el medio en que el magma asciende, confieran características diferentes a la sismicidad de distintos volcánes.

TREMOR VOLCANICO

Uno de los procesos sísmicos más característicos de las zonas volcánicas, es el de generación de una señal continua usualmente asociada a actividad eruptiva, conocida como **Tremor volcánico.**

CLASIFICACION DEL TREMOR VOLCANICO.

De la misma manera que Omori clasificó los sismos volcánicos, Sassa en 1935 clasificó el tremor volcánico en cuatro tipos de acuerdo con las caracteristicas de las ondas; pero al igual que para la clasificación de sismos volcánicos esta fué elaborada basandose en la actividad sismica asociada a un solo tipo de volcanismo (el del volcán Aso), por lo que, aunque útil, no podemos esperar que se ajuste perfectamente a todos los volcanes. De acuerdo con Kubotera (1974), Sassa hizo la siguiente clasificación para el Aso:

TIPO 1: Tremor con frecuencia de cerca de 1Hz y con caracteristicas de onda de Love y velocidades de propagación de cerca de 1 Km/s.

TIPO 2: Tremor caracterizado por un rango de frecuencias de entre 0.3-0.1 Hz, interpretadas por Kubotera como resultado deoscilaciones de la cámara magmática y cuyo espectro es similar al de una respuesta impulsiva de un sistema con oscilación amortiguada.

TIPO 3: Tremor con rango de frecuencias de entre 2.5-1.6 Hz. y con caracteristicas de ondas de Rayleigh y una velocidad de cerca de 1.2 Km/s.

TIPO 4: Tremor caracterizado por una frecuencia de 5Hz, se cree esta relacionado con actividad eruptiva en la superficie.

TREMOR NO VOLCANICO

Existen también ejemplos de señales sísmicas cuyas características corresponden a las del tremor volcánico pero que sin embargo no se encuentran relacionadas con actividad volcánica. Algunos autores han mostrado que la componente dominante de microtremor en un distrito urbano puede ser interpretado como un fenómeno de interferencia constructiva de la vibración de varios estratos del subsuelo. Kubotera ha registrado señales sísmicas de tremor en áreas volcánicas (caldera del Aso) las cuales no han podido ser atribuidas ni a actividad volcánica ni a tráfico urbano; este típo de señales muestran un pequeño y ligero cambio temporal; y un cambio significativo en amplitud con una simetría radial respecto al edificio volcánico. Se han reportado (Mc. Nutt,1986) señales sísmicas similares a las de tremor volcánico en sistemas hidráulicos en Pakistan, cuando los conductos se abrieron para permitir el flujo de agua, estableciendose una condición de flujo no estacionario; se pudo registrar señales de tremor en una red de sismómetros a distancias de hasta 30 Km. Mc. Garr (1975) ha encontrado también una relación entre señales de tremor y el campo de esfuerzos inducido por fracturamiento en las rocas de algunas minas. Esta definición de tremor agrupa señales que pueden tener origenes diversos.

Sin embargo en ciertos eventos volcánicos se presenta un tremor de contenido espectral casi monocromático y de gran estabilidad temporal. Este tremor, "tremor armónico", ha llamado la atención de numerosos investigadores quienes han descrito sus características y propuesto modelos para explicar su generación. La figura 1.4 muestra algunos ejemplos de tremor armónico.

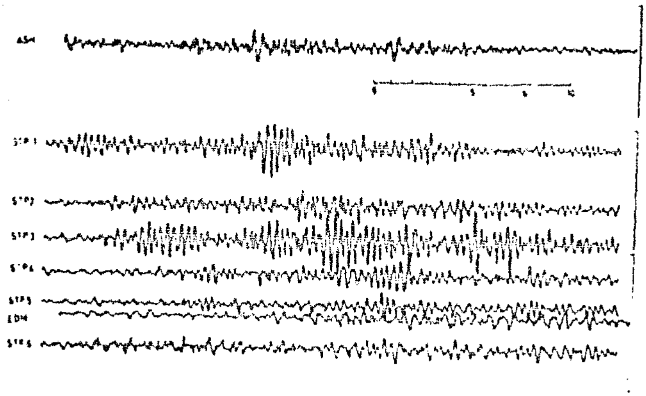


Fig 1.4

SISMOGRAMAS QUE MUESTRAN TREMOR ARMONICO

El tremor armónico es especialmente interesante pues además del interes teórico que tiene el aclarar su origen y la información que puede proporcionar sobre el mecanismo eruptivo, puede presentarse con anterioridad a la ocurrencia del climax eruptivo lo que le da un carácter predictivo.

El mecanismo de generación del tremor volcánico es aún incierto. En algunos volcanes su generación está directamente relacionada con una manifestación superficial, por ejemplo flujo de gases; sin embargo en un gran número de eventos eruptivos el tremor es generado por un mecanismo que no se manifiesta en la superficie. Para explicar este fenómeno, se han propuesto varios modelos fisicos; uno de los primeros fué el modelo de oscilación de la cámara magmática desarrollado por Shima en 1958 y Kubotera

(1974) basándose en el trabajo de Sezawa (1927). Es difícil, sin embargo, explicar el mecanismo por el que la supuesta cámara magmática puede entrar en oscilación y más aún mantener ésta durante períodos prolongados. Otros modelos propuestos y analizados detalladamente son : el de fracturamiento de tensión por intrusión de magma (Aki, et al., 1977), el de resonancia durante el flujo de magma (Seidl, et al., 1981., Shick, R., 1981) y el modelo de resonancia por flujo no estacionario (Ferrick, et al. 1982).

Todos estos modelos explican algunas de las características del tremor volcánico que han sido observadas sistemáticamente y de las cuales las más importantes son las siguientes:

1) El tremor volcánico tiene su origen en la fuente y no es un efecto del medio por el cual atraviesa la señal.

2) El espectro sísmico del tremor volcánico tiene picos pronunciados en, a lo más, 2 o 3 frecuencias características que pueden considerarse bajas con repecto al contenido espectral de un sismo tectónico típico.

3) Estos picos, aún cuando pueden evolucionar lentamente respecto al contenido espectral durante un evento volcánico, son bastante estables.

4) Los eventos sísmicos volcánicos no continuos (p.e. Tipo B Minakami) parecen ser generados por el mismo mecanismo ya que su contenido espectral es semejante.

ALGUNOS MODELOS FISICOS DE GENERACION DE TREMOR

Un gran número de modelos y mecanismos han sido propuestos para explicar el tremor volcánico: Omer (1950) propuso que el tremor es causado por vibraciones de estratos volcánicos. Shima en 1958 y Kubotera (1974) han modelado las bajas frecuencias dominantes del tremor como el modo fundamental de vibración de una fuente esférica en un medio perfectamente elástico y el de una esfera líquida (cámara magmática) inmersa en él. Shimozuru, en 1961, señala a las oscilaciones libres de una columna de magma como fuente generadora. Motoya y Negoro, en 1967, sugieren fuerzas pulsátiles en las paredes de la ventana volcánica, causadas por cambios en la presión del agua y los gases. Kikuchi, en 1964, lo identifica con ondas superficiales derivadas de microsismos originados alrededor del crater. Shimozuru et al., en 1966, proponen para explicarlo movimientos de magma dentro de conductos. Steimberg en 1965 sugiere que las frecuencias del tremor son eigenvalores de conductos cilíndricos. Potter y Denis, en 1974, hacen una analogía con hidrofracturamiento en basamentos de granito en Los Alamos. Steimberg y Steimberg (1975) proponen un modelo que involucra auto-oscilaciones de los gases en la ventana volcánica, pero desafortunadamente no hacen ninguna estimación cuantitativa de la frecuencia o amplitud del tremor . Aki et al. (1977) y Chouet (1981) presentan modelos basados en la apertura aleatoria de fracturas llenas de fluido. Aki y Koyanagi, en 1981, usan éste modelo para explicar características del transporte de magma para tremor profundo (40 Km) bajo el Kilauea. Seidl et al. (1981) presentan un modelo que involucra transitorios hidráulicos y hace un desarrollo multipolar de la fuente generadora para modelarlo Ferrick et al. (1982) sugiere que la inestabilidad en el flujo en los conductos volcánicos provoca una resonancia en los conductos, y propone esto como fuente común para el mecanismo de los sismos volcánicos de baja frecuencia y del tremor.

Todos estos modelos han sido ampliamente discutidos por diversos autores, sin embargo, no tenemos hasta ahora suficientes evidencias en favor de alguno de los modelos y es muy probable que todos los procesos señalados se lleven a cabo en menor o mayor grado. En los siguientes capítulos se expondrán tres de los modelos ya señalados y se discutirá sobre cada uno de ellos.

CAPITULO II

MODELO DE OSCILACION DE LA CAMARA MAGMATICA

Uno de los primeros modelos de generación de tremor volcánico es el de una cámara magmática que oscila (Kubotera,1974). De acuerdo con este modelo el magma de la cámara se comporta como un fluido compresible que ocupa un volumen esférico de radio a sumergido en un medio infinito perfectamente elástico, dentro del cual oscila o vibra. (Figura 2.1). Con base en las soluciones a las ecuaciones de elasticidad y acoplando estas a las de una esfera liquida vibrante Kubotera obtiene para el primer modo de oscilación el radio de la cámara en términos de los parámetros del modelo (contrastes de densidades y velocidades).

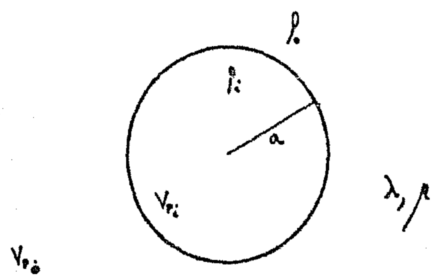


Fig (2.1)

ESFERA LIQUIDA VIBRANTE DENTRO DE UN MEDIO INFINITO ELASTICO

Primero, usaremos las ecuaciones de movimiento para cuerpos elásticos e isótropos (ver p.e. Jaeger,1969) .

(2.1) $$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_i \qquad i,j = 1,2,3$$

Donde: ρ densidad del cuerpo
τ_{ij} esfuerzos
u_i desplazamientos
f_i fuerzas de cuerpo

Si introducimos la notación para coordenadas curvilineas (ver p.e. Love,1944)

(2.2) $$\varepsilon_{kj} = \frac{1}{2} h_k h_j \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u_k}{h_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{u_j}{h_j}\right) \right]$$

(2.3) $$\omega_{kj} = \frac{1}{2} h_k h_j \left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{u_j}{h_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u_k}{h_k}\right) \right]$$

y

(2.4) $$\Delta = h_1 h_2 h_3 \left[\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_i}{h_j h_k}\right) \right] \qquad j \neq k \neq i$$

con: $$h_j^2 = \sum_i \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Y hacemos uso de las ecuaciones que relacionan los esfuerzos y la deformación.

(2.5) $$\tau_{ij} = \lambda \, \Delta \, \delta_{ij} + 2 \mu \, \varepsilon_{ij}$$

donde λ ,μ: constantes de Lamé

Podemos expresar (2.1) en términos de las deformaciones, y de (2.2) en términos de los desplazamientos.

$$(2.6)\qquad \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x_i} + \mu\nabla^2 u_i + f_i$$

Supondremos ρ constante y las fuerzas de cuerpo f_i constantes o cero, con ∇^2 el operador laplaciano en coordenadas curvilineas . Podemos obtener asi las ecuaciones de onda en coordenadas esféricas, omitiendo la componente azimutal, derivando (2.6) respecto a x_i (Sezawa,1927); se obtiene la ecuación de onda:

$$(2.7)\qquad \frac{\rho}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\Delta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Delta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Delta}{\partial\theta}\cot\theta$$

Cuyas soluciones se propagan con velocidad $V_p = \left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ .Si derivamos a u_i en (2.6) respecto a x_j y a u_j respecto a x_i, restando ambas expresiones y utilizando (2.3) , se obtiene la siguiente ecuación de onda:

$$(2.8)\qquad \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\omega_{r\theta}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\omega_{r\theta}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\omega_{r\theta}}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\omega_{r\theta}}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\omega_{r\theta}}{\partial\theta}\cot\theta -$$

$$-\frac{\omega_{r\theta}}{r^2}(1+\cot^2\theta)$$

Cuyas ondas se propagan con velocidad $V_s = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$. Donde:

$$(2.9)\qquad \Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_\theta}{r}\cot\theta$$

$$(2.10)\qquad 2\omega_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}$$

Escribiendo Δ y $\omega_{r\theta}$ en (2.7) y (2.8) de la forma $\Delta = \Delta_k e^{ipt}$ y $\omega_{r\theta} = \omega_k e^{ipt}$, se llega a:

$$(2.11) \qquad \Delta_k = A \frac{P_n(\cos\theta)}{\sqrt{r}} \left\{ J_{n+\frac{1}{2}}(hr) + A' \, Y_{n+\frac{1}{2}}(hr) \right\}$$

$$(2.12) \qquad \omega_k = B \frac{d\, P_n(\cos\theta)}{d\,\theta} \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + B' \, Y_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right\}$$

$$\text{con :} \quad h^2 = \frac{\rho\, p^2}{\lambda+2\mu} = \frac{p^2}{v_p^2} \quad ; \quad k^2 = \frac{\rho\, p^2}{\mu} = \frac{p^2}{v_s^2} \quad ; \; p = 2\pi\nu$$

y $J_n(x)$, $P_n(x)$ y $Y_n(x)$, las funciones de Bessel, los polinomios de Legendre y los armónicos esféricos, respectivamente.

Los desplazamientos u_{r1}, $u_{\theta 1}$ derivados de Δ_k en (2.11) con la condición $\omega_{r\theta} = 0$, y los desplazamientos u_{r2}, $u_{\theta 2}$ derivados del valor de ω_k en (2.12) con la condición $\Delta = 0$ estan dados respectivamente por:

$$(2.13) \qquad u_{r1} = -\frac{A}{h^2} P_n(\cos\theta) \left\{ \frac{d}{dr} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(hr)}{\sqrt{r}} + A' \frac{d}{dr} \frac{Y_{n+\frac{1}{2}}(hr)}{\sqrt{r}} \right\}$$

$$(2.14) \qquad u_{\theta 1} = -\frac{A}{h^2} \frac{d\, P_n(\cos\theta)}{d\,\theta} r^{-\frac{3}{2}} \left\{ J_{n+\frac{1}{2}}(hr) + A' \, Y_{n+\frac{1}{2}}(hr) \right\}$$

$$(2.15) \qquad u_{r2} = -2B \frac{n(n+1)}{k^2} P_n(\cos\theta) \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + B' \, Y_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right\}$$

$$(2.16) \qquad u_{\phi 2} = -\frac{2B}{k^2} \frac{d P_n(\cos\theta)}{d\theta} r^{-1} \left\{ \frac{d}{dr} \left(\sqrt{r} \; J_{n+\frac{1}{2}}(hr) \right) + B' \frac{d}{dr} \left(\sqrt{r} \; Y_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right) \right\}$$

En la superficie $r = a$, con $u_r = u_{r1} + u_{r2}$ y $u_\phi = u_{\phi 1} + u_{\phi 2}$ y bajo suponiendo que esta libre de tracción tangencial, $\tau_{r\phi} = 0$, y una presión normal, $\tau_{rr} = p_1 P_n(\cos\theta) e^{ipt}$ se tienen las ecuaciones:

$$(2.17) \qquad \lambda\Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} = p_1 P_n(\cos\theta) e^{ipt}$$

$$(2.18) \qquad \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} + r^{-1} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0$$

substituyendo los valores de Δ, u_r, u_ϕ de las ecuaciones (2.11) a (2.16), en (2.17) y (2.18) se obtiene:

$$(2.19) \qquad R = \frac{B}{A} = \frac{k^2}{h^2} \left[\frac{d}{dr} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(hr)}{r^{\frac{3}{2}}} \right]_{r=a} \left[r^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2}{dr^2} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) - r^{-\frac{3}{2}} \frac{d}{dr} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + r^{-5/2} [n(n+1) - 5/4] J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right]^{-1}_{r=a}$$

$$(2.20) \qquad p_1 = A \left[\lambda \, r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(hr) - \frac{2\mu \, d^2}{h^2 \, dr^2} r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(hr) \; 4\mu R k^{-2} n(n+1) \frac{d}{dr} r^{-\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right]_{r=a}$$

Usando las soluciones de Sezawa para el modo fundamental de vibración, $n = 0$, de una fuente de forma esférica en un medio elástico e infinito e introduciendo las condiciones de frontera, de continuidad de esfuerzos y desplazamientos en la superficie con las soluciones para una esfera líquida vibrante, se llega a:

$$\left\{h_i^2 a^2 - 4\left[\frac{h_i}{l_o}\right]^2 \left[1 + i h_i a \frac{h_o}{h_i}\right]\right\} \left\{\mathrm{sen}(h_i a) - h_i a \cos(h_i a)\right\} = \frac{\rho_i}{\rho_o} \left\{h_i a^2 \, \mathrm{sen}(h_i a)\right\} \left\{1 + i h_i a \frac{h_o}{h_i}\right\} \tag{2.21}$$

Donde los índices i, o denotan dentro y fuera de la cámara respectivamente, a es, como ya se señaló anteriormente el radio de la cámara, ρ es la densidad ; $i^2 = -1$, $i \in \mathbb{C}$.

Suponiendo que el sistema de vibraciones amortiguadas reside dentro de la cámara magmática, y denotando como p al número complejo, cuya parte real (p_1) e imaginaria (ip_2) expresan la frecuencia circular y el factor de amortiguamiento de las ondas, respectivamente; podemos escribir:

$$Z = \xi + i\eta = \left(\frac{a}{V_{pi}}\right)(p_1 + ip_2) \tag{2.22}$$

Por otro lado las siguientes identidades facilitan la escritura:

$$A_* = \left(\frac{V_{so}}{V_{pi}}\right) \quad ; \quad B_* = \left(\frac{V_{pi}}{V_{po}}\right)$$

$$\left|\begin{aligned} L_1 &= \mathrm{sen}\,\xi \cosh\eta - \xi \cos\xi \cosh\eta - \eta\, \mathrm{sen}\,\xi\, \mathrm{senh}\,\eta \\ L_2 &= \cos\xi\, \mathrm{senh}\,\eta - \xi\, \mathrm{sen}\,\xi\, \mathrm{senh}\,\eta - \eta \cos\xi \cosh\eta \\ K_1 &= \cos\xi \cosh\eta - B_* \cos\xi\, \mathrm{senh}\,\eta \\ K_2 &= B_*\, \mathrm{sen}\,\xi \cosh\eta - \mathrm{sen}\,\xi\, \mathrm{senh}\,\eta \end{aligned}\right. \tag{2.23}$$

Así pues, utilizando (2.22) y (2.23) en (2.21) se obtiene :

$$(2.24)\qquad (L_1+iL_2)\left[\left[(\rho_o-\rho_i)(\xi^2-\eta^2)+4\rho_o A_*\xi_*\eta-4\rho_o A_*\right]-i\left[2\xi\eta(\rho_o-\rho_i)-4\rho_o A_* B_*\right]\right]$$

$$=(K_1+iK_2)\left[\rho_i\xi(\xi^2-3\eta^2)+i\rho_i\eta(3\xi^2-\eta^2)\right]$$

Separando la parte real e imaginaria en la ecuación (2.24) se llega a:

$$(2.25)\qquad \begin{aligned} L_1Q_1-L_2Q_2-(K_1R_2-K_2R_2)\gamma &= 0\\ L_2Q_1+L_1Q_2-(K_2R_2+K_1R_2)\gamma &= 0\end{aligned}$$

donde:

$$Q_1=(1-\gamma)\ (\xi^2-\eta^2)+4A_*B_*-4A_*$$

$$Q_2=\left[2(1-\gamma)\eta-4A_*B_*\right]\eta$$

$$R_1=\xi(\xi^2-3\eta^2)$$

$$R_2=\eta(3\xi^2-\eta^2)$$

$$\gamma=\frac{\rho_i}{\rho_o}$$

Para calcular el radio para la cámara magmática en la ecuación (2.22) se suponen valores paramétricos de V_{po}, V_{so}, V_{pi} y γ en (2.25). De acuerdo con Kubotera los resultados observacionales respecto a V_{po} se han obtenido por 2 métodos experimentales diferentes, encontrándose velocidades de 1.4 a 1.6 Km/s y 2.5 a 3.5 Km/s y en pruebas de laboratorio de 2.82 a 5.56 Km/s por lo que se puede suponer una velocidad de 3.0 Km/s, por otra parte suponemos además la igualdad de las constantes de Lamé ($\lambda=\mu$), V_{so} puede determinarse directamente de V_{po} y para V_{pi} Shima y Sasse han obtenido los valores de V_{pi} = 0.79 Km/s y V_{pi} = 1.6 - 1.8 Km/s respectivamente, por lo que podemos utilizar 3 diferentes valores de V_{pi} = 0.79, 1.0, 1.6 Km/s. Por otra parte como la densidad de la cámara magmática también se desconoce se utilizan varios valores de γ , γ = 0.1, 0.2, 0.5, 1.0; por lo que para los cálculos numéricos usaremos los siguientes valores:

$$V_{po} = 3.0 \text{ km/s}$$

$$V_{pi} = 0.79 \text{ , } 1.0 \text{ , } 1.6 \text{ km/s}$$

$$\gamma = 0.1 \text{ , } 0.2 \text{ , } 0.5 \text{ , } 1.0$$

Las diferentes soluciones se muestran en la figura (2.2) siendo ξ cercano a 4.4 para todos los casos, esto indica que la evaluación el tamaño de la cámara magmática es afectado sólo ligeramente por el valor de diferentes contrastes de densidades y velocidades del sonido en el magma; sin embargo, el factor de amortiguamiento η, se incrementa rápidamente con el incremento de la densida supuesta para la cámara magmática .

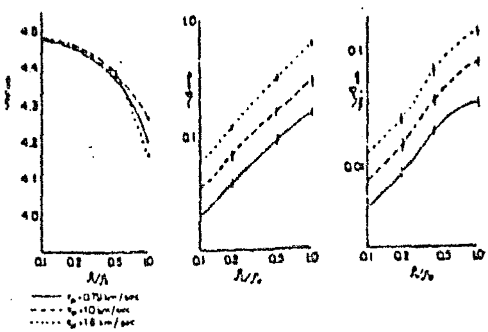


Fig. (2.2)

RESULTADOS CALCULADOS PARA ξ η Y η/ξ (SEOUN KUBOTERA (1974))

De la comparación entre los resultados de los valores calculados para el espectro de eventos de tremor volcánico y el espectro predicho para un oscilador amortiguado, para un sistema sujeto a una fuerza externa, se encuentra que la relación $\eta/\xi = 0.1 - 0.07$ puede ajustarse a las curvas predichas, cuyas soluciones para estos valores de η/ξ corresponden a valores comparativamente altos de γ.

Con base en esto, se infiere que la densidad dentro de la cámara magmática puede ser del mismo orden o más pequeña que la del material que la rodea, sin embargo hay que recordar que la viscosidad del magma no ha sido considerada. El tamaño de la cámara magmática (a) puede determinarse a partir de ξ y del perido (3.5 - 7.0 s)

$$\xi = \frac{a}{V_{pi}} p_1 \qquad ; p_1 = 2\pi\nu_1$$

obteniendose un radio a de entre 3 y 5 km .

El amortiguamiento de las oscilaciones de una esfera liquida está determinado por el contraste de impedancia entre liquido y sólido: dado que el frente de onda es siempre normal a la interface, se espera un resultado similar al del problema de una onda plana que incide en dirección normal a una interface también plana, la reducción de la amplitud en cada reflexión está dada por:

$$A_o = \frac{V_{po}\,\rho_o - V_{pi}\,\rho_i}{V_{po}\,\rho_o + V_{pi}\,\rho_i} \qquad (2.26)$$

si la reflexión ocurre $p * \frac{1}{2\pi}$ veces por segundo, el amortiguamiento en la amplitud es $A_t = A_o^{\nu t}$, y si lo definimos en la forma exponencial habitual $A_t = \exp(-\varepsilon t)$ entonces tendremos:

$$\exp(-\varepsilon t) = \left[\frac{V_{po}\,\rho_o - V_{pi}\,\rho_i}{V_{po}\,\rho_o + V_{pi}\,\rho_i}\right]^{\frac{1}{2\pi}pt}$$

o bien $$\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\, p \,\mathrm{Ln}\left[\frac{V_{po}\,\rho_o + V_{pi}\,\rho_i}{V_{po}\,\rho_o - V_{pi}\,\rho_i}\right]$$

y ya que $\varepsilon \equiv p/2Q$ entonces

$$Q = \pi\left[\mathrm{Ln}\left[\frac{V_{po}\,\rho_o + V_{pi}\,\rho_i}{V_{po}\,\rho_o - V_{pi}\,\rho_i}\right]\right]^{-1} \qquad (2.27)$$

y Q es el factor de calidad definido como $Q \equiv p/\Delta p = p/2\varepsilon$; donde p es la frecuencia pico y Δp el ancho del pico, de (2.27) tenemos:

VPi	gama	Q
.7900	.1000	59.6367
.7900	.2000	29.7977
.7900	.5000	11.8608
.7900	1.0000	5.8245
1.0000	.1000	47.1065
1.0000	.2000	23.5270
1.0000	.5000	9.3369
1.0000	1.0000	4.5324
1.6000	.1000	29.4245
1.6000	.2000	14.6702
1.6000	.5000	5.7481
1.6000	1.0000	2.6409

TABLA 2.1

Por ejemplo, para explicar una Q de entre 5 y 10 observado en algunos casos se requiere que los valores de γ y de V_{pi} sean del orden de γ entre .5,1.0 para V_{pi} entre .8 y 1.0, aunque, desde luego podemos tener otras combinaciones de parámetros físicamente aceptables que nos dieran valores muy similares.

Existen, sin embargo, dos puntos no satisfactorios con este modelo de esfera liquida oscilante dentro de un medio infinito perfectamente elástico; el primero es que no aparece de manera natural la fuerza que origina el tremor; el modelo requiere de una fuente de pulsación en el liquido, la rápida desgasificación y el cambio de fase podrian ser fuentes factibles. El segundo, la geometria esférica no parece ser la más apropiada para varios casos de tremor volcánico (Aki,1977).

CAPITULO III

MODELO DE PROPAGACION HIDRAULICA DE FRACTURAS

De una primera revisión de señales sísmicas de tremor volcánico observadas, su similaridad con las señales asociadas con fracturamiento hidráulico, se puede formular un modelo de la fuente de tremor volcánico en términos de los parámetros de una fractura llena de fluido que se propaga por la presión del fluido; además, en este modelo, a diferencia del de la esfera oscilante, aparece de manera natural la fuente originadora del tremor, es decir, la fuerza que origina la oscilación. Por otra parte, nos proporciona una geometría adecuada para el mecanismo de transporte del magma (Aki,1977), como por ejemplo en la erupción del Kilauea en 1963, donde parece existir una conección continua de fluido entre el techo de la cámara magmática y las fisuras al este del Kilauea.

Se consideran 2 posibles mecanismos de la fuente.

1) Una fractura llena de fluido que crece por extención a pulsos a un extremo de la fractura.

2) Dos o más fracturas llenas de fluido conectadas por un canal el cual se abre y se cierra debido a la presión en el magma.

1) Para el primer mecanismo se hacen primero algunas consideraciones de tipo cuasi-estático. Supóngase una fractura llena de fluido en un médio elástico no acotado. Y, por simplicidad, se supondrá que la superficie de la fracturá está en

el plano x,l y se extiende a $+\infty$ y $-\infty$ en la dirección z. La localización inicial de los extremos de la fractura esta en $x = \pm l$ como se muestra en la figura 3.1, despreciaremos las fuerzas de cuerpo, y supondremos además que el fluido en la fractura y en el sólido que rodea la fractura estan inicialmente bajo una presión hidrostatica uniforme P_o .

Con un incremento de la presión del liquido de ΔP ocurrirá una concentración de esfuerzos en el cuerpo elástico delante de los extremos de la tractura .

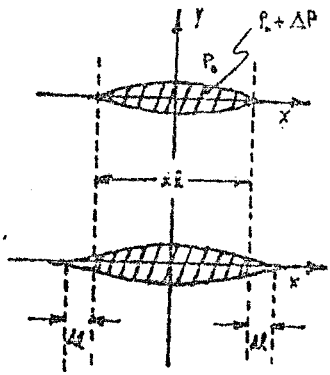


Fig 3.1

FRACTURA LLENA DE FLUIDO, EXTENDIENDOSE A AMBOS EXTREMOS. LA PROPAGACION DINAMICA DE LOS EXTREMOS DEJA UN ESPACIO VACIO CERCA DE LOS EXTREMOS DE LA FRACTURA .

Los esfuerzos de tensión σ_{yy} cerca de los extremos de la fractura. se pueden escribir (ver p.e. Erdogan,1974) como:

$$\sigma_{yy} = \Delta p \sqrt{l}\, [2(x-l)]^{-\frac{1}{2}} \qquad ;\ \text{para } y=0,\ x>l$$

(3.1) donde $$N_o = \Delta P\left(\frac{l}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

N_o es el llamado factor de intensidad de esfuerzos. La fractura se extenderá de acuerdo con el criterio de Irwin, esto es, si N_o excede un cierto valor crítico N_c. Al inicio de la fractura este es equivalente al criterio de Griffith, debido a que N_c está relacionado únicamente con la energía de superficie específica a velocidad cero de ruptura, por lo que la fractura se expanderá si

(3.2) $$N_o = \Delta P\left(\frac{l}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad N_c$$

Cuando una fractura se mantiene abierta por un fluido viscoso inyectado en ella, el fluido no llena la fractura completamente, esto es, siempre hay una parte libre de fluido a ambos lados de la fractura. En el problema dinámico se asume que el líquido viscoso no llena los espacios dejados por el movimiento del extremo de la fractura, de tal forma, que queda un espacio vacío junto a los extremos de ésta sobre una distancia Δl (Fig 3.1). La presión ambiental alrededor del extremo de la fractura actúa como una fuerza cohesiva la cual genera un factor de intensidad de esfuerzos de resistencia a la extensión de la fractura. El factor de intensidad de esfuerzos debido a una distribución $P(x)$ de fuerza cohesiva (Erdogan, 1974) está dado por:

(3.3) $$N_1 = \pi^{-1}(2l)^{\frac{1}{2}} \int_0^l P(x)\left[l^2 - x^2\right]^{-\frac{1}{2}} dx$$

si $$P(x) = \begin{cases} -P_o, & l-\Delta l \leq x \leq l \\ 0, & 0 \leq x \leq l-\Delta l \end{cases}$$ se obtiene :

(3.4) $$N = -\pi^{-1}(2l)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{\pi}{2} - \text{arc sen}\left[1 - \frac{\Delta l}{l}\right]\right\} \approx -0.9\, P_o \sqrt{\Delta l/2}$$

El factor de intensida de esfuerzos total es la suma de (3.2) y (3.4)

$$N = N_o + N_s \simeq \Delta P \left(\frac{l}{2}\right)^{1/2} - 0.9\, P_o \sqrt{\Delta l/2}$$

La fractura comenzará su propagación con la condición $N_o > N_c$ y se detendrá inmediatamente despues de un incremento infinitesimal Δl. En otras palabras una propagación dinámica de una ruptura ocurrirá solo cuasiestáticamente sin la generación de ondas sísmicas .Sin embargo, la situación puede ser muy diferente si el factor de intensidad de esfuerzos cambia de lugar a lugar . El extremo de la fractura puede ser bloqueado en un punto con un N_c alto; cuando el enlace con un punto con un N_c alto es roto, el valor de N_c sobre el siguiente Δl puede reducirse por ΔN_c.

Si esta reducción en N_c satisface la siguiente desigualdad :

$$(3.5) \qquad -N_s = 0.9\, P_o \sqrt{\Delta l/2} \quad > \quad \Delta N_c$$

y si expresamos la fluctuación fraccional de N_c como $e = \Delta N_c/N_c$ y $N_c \simeq \Delta P \left(\frac{l}{2}\right)^{1/2}$ se tiene:

$$(3.6) \qquad e^2 > (0.81)\,(\Delta l/l)\,(P_o/\Delta P)^2$$

la extención ocurre más fácilmente si l y ΔP son grandes y P_o es pequeño; por ejemplo si tomamos Δl = 1m, l = 1Km, $P_o \simeq$ 300 bars (presión litostática a 1Km de profundidad) , $\Delta P \simeq$ 20 bars, la fluctuación de e será del 50 %, por lo que se requieren grandes fluctuaciones si las fracturas son pequeñas .

Ahora se obtendrá la radiación de campo lejano para vibraciones causadas por la extensión de una fractura .

Primero, utilizaremos el teorema de De Hoop - Knopoff, uno de los teoremas fundamentales de la elastodinámica, el cual puede ser derivado con base en la ecuación de movimiento, deformaciones infinitesimales y la existencia de la función de energía de deformación: el teorema establece una expresión para los desplazamientos de la siguiente forma :

$$(3.7) \qquad u_n(\bar{y},s) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_V G_{ni}(\bar{y},s;\bar{x},t)\, f_i(\bar{x},t)\, dVdt \; +$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_S n_j\left\{G_{ni}(\bar{y},s;\bar{x},t)\, c_{ijpq}\, u_{p,q} - u_i(\bar{x},t)\, c_{ijpq}\, G_{ni}(\bar{y},s;\bar{x},t)\right\} dSdt$$

Donde : u_i : son los desplazamientos

$$u_{p,q} = \frac{\partial u_p}{\partial x_q}$$

$$c_{ijpq} = \lambda\, \delta_{jk}\, \delta_{pq} + \mu\, (\delta_{jp}\, \delta_{kq} + \delta_{jq}\, \delta_{kp})$$

: constante elástica en la ley de Hook

λ, μ :constantes de Lamé

$f_i(\bar{x},t)$: fuerzas de cuerpo

$G_{ni}(\bar{y},s;\bar{x},t)$: función de Green

$$G_{np,q} = \frac{\partial G_{np}}{\partial x_q}$$

Para una discontinuidad de los desplazamientos $\Delta u_{p,q}(\bar{\xi},t)$ en un cuerpo elástico de volumen V encerrado por la superfie S (Fig 3.2 , de manera similar que para una falla en un terremoto, se puede obtener su solución en términos de la función de Green.

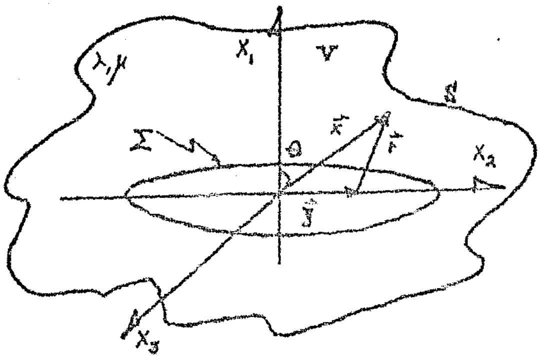


Fig. (3.2)
FRACTURA EN UN MEDIO ELASTICO

Del teorema de De Hoop - Knopoff (3.7) tenemos:

$$(3.8) \qquad u_n(\bar{y},s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V G_{ni}(\bar{y},s;\bar{x},t)\, f_i(\bar{x},t)\, dVdt \; +$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_\Sigma \nu_j \left\{ -G_{ni}(\bar{y},s;\bar{x},t)\, c_{ijpq}\, \Delta u_{p,q}(\xi,t) - \Delta u_i(\bar{x},t)\, c_{ijpq}\, G_{ni}(\bar{y},s;\bar{x},t) \right\} d\Sigma dt$$

donde : ν_j : son los cosenos directores de la normal a Σ

Σ : superficie de la fractura .

$\Delta u_i(\bar{\xi},t)$: discontinuidad de los desplazamientos promedio sobre la superficie de la fractura .

Obtendremos ahora la función de Green para un cuerpo infinito isótropo y homogeneo, encontrando el campo de desplazamientos producidos por una fuerza operando en un punto dentro del cuerpo elástico. Si se utiliza el teorema de Helmholtz para expresar las fuerzas de cuerpo y los desplazamientos mediante los potenciales ψ y ϕ

(3.9) $$f_i = \frac{\partial\psi}{\partial x_i} + (\nabla \times \bar{B})_i$$

(3.10) $$u_i = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} + (\nabla \times \bar{A})_i$$

los cuales satisfacen las ecuaciones de onda

(3.11) $$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - V_p^2\ \nabla^2\phi = \rho^{-1}\psi$$

(3.12) $$\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2} - V_s^2\ \nabla^2 A = \rho^{-1}\bar{B}$$

Y en la determinación de $\bar{B}$ y ψ podemos utilizar la solución a la ecuación de Poisson $\nabla^2\bar{W} = \bar{f}$, es decir :

(3.13) $$\bar{W} = -\int \frac{\bar{f}(\bar{\xi},t)}{4\pi x}\ dV$$

cumpliendose además

(3.14) $$\psi = \nabla \cdot \bar{W} \qquad y \qquad B = -\nabla \times \bar{W}$$

con un cambio en las fuerzas de cuerpo en el tiempo dado por $X_o(t)$ e impulsivo en el espacio, se obtienen los potenciales :

(3.15) $$\left|\begin{aligned} \psi &= -X_o(t)\ (4\pi)^{-1}\ \frac{\partial x^{-1}}{\partial x_1} \\ B_1 &= 0 \\ B_2 &= X_o(t)\ (4\pi)^{-1}\ \frac{\partial x^{-1}}{\partial x_1} \\ B_3 &= -X_o(t)\ (4\pi)^{-1}\ \frac{\partial x^{-1}}{\partial x_1} \end{aligned}\right.$$

donde : $x = \| \bar{x} \|$

De la solución a la ecuación de onda no homogenea (I.11) obtenemos el potencial ϕ ($\bar{x}$,t) como:

$$(I.16) \qquad \phi\,(\bar{x},t) = (4\pi V_p^2\ \rho)^{-1} \int_V \frac{\psi\left(\bar{\xi}\ ,\ t - \frac{r}{V_p}\right)}{r}\, dV$$

siendo $r = \| \bar{x} - \bar{\xi} \|$

Por lo que de (I.15) se tiene

$$(I.17) \qquad \phi\,(\bar{x},t) = -\,(4\pi V_p)^2\ (\rho)^{-1} \int_V \frac{X_o\left(t - \frac{r}{V_p}\right)}{r}\ \frac{\partial \xi^{-1}}{\partial \xi_1}\, dV$$

con $\xi = \| \bar{\xi} \|$

consideremos una superficie esférica S de radio r que contiene un volumen V de manera que dV = dr ds y $\bar{r} = \bar{x} - \bar{\xi}$ tenemos :

$$\int_S \frac{\partial \xi^{-1}}{\partial \xi_1}\, dS = \frac{\partial}{\partial x_1} \int \xi^{-1}\, dS = \begin{cases} 4\pi r^2\ \dfrac{\partial x^{-1}}{\partial x_1} & \text{si } x > r \\ 0 & \text{si } x < r \end{cases}$$

por consiguiente

$$(I.18) \qquad \phi\,(\bar{x},t) = -\,(4\pi V_p^2\ \rho)^{-1}\ \frac{\partial x^{-1}}{\partial x_1} \int_0^x r\ X_o \left(t - \frac{r}{V_p}\right) dr$$

haciendo el cambio de variable $t' = r\ /\ V_p$ se obtiene:

$$(I.19) \qquad \phi\,(\bar{x},t) = -\,(4\pi\rho)^{-1}\ \frac{\partial x^{-1}}{\partial x_1} \int_0^{x/V_p} t'\ X_o \left[t - t'\right] dt'$$

De manera análoga obtendremos el potencial $\bar{A}$ ($\bar{x}$,t)

$$
(2.20)\quad
\left|
\begin{aligned}
&A_1(\bar{x},t) = 0 \\
&A_2(\bar{x},t) = (4\pi\rho)^{-1}\,\frac{\partial x^{-1}}{\partial x_3}\int_0^{x/V_s} t'\,X_o\left[t - t'\right] dt' \\
&A_3(\bar{x},t) = -(4\pi\rho)^{-1}\,\frac{\partial x^{-1}}{\partial x_2}\int_0^{x/V_s} t'\,X_o\left[t - t'\right] dt'
\end{aligned}
\right.
$$

por lo que los desplazamientos en (2.10) quedan como :

$$
(2.21)\quad u_i = (4\pi\rho)^{-1}\left[\frac{\partial^2 x^{-1}}{\partial x_i\,\partial x_1}\int_{x/V_p}^{x/V_s} t'\,X_o\left[t - t'\right] dt' + \delta_{i1}(V_S^2 x)^{-1} X_o(t - \frac{x}{V_s}) + \frac{\partial x\,\partial x}{\partial x_i\,\partial x_1}\left\{(V_p^2 x)^{-1} X_o\left[t - \frac{x}{V_p}\right] - (V_S^2 x)^{-1} X_o\left[t - \frac{x}{V_p}\right]\right\}\right]
$$

Usando los cosenos directores g_i del vector $\bar{x}$, $g_i = \frac{x_i}{x} = \frac{\partial x}{\partial x_i}$ podemos escribir: $\frac{\partial^2 x^{-1}}{\partial x_i\,\partial x_j} = (3g_ig_j - \delta_{ij})\,x^{-3}$ de manera que para una fuerza en el origen, en la dirección x_j tendremos :

$$
(2.22)\quad u_i = (4\pi\rho)^{-1}\left[(3g_ig_j - \delta_{ij})\,x^{-3}\int_{x/V_p}^{x/V_s} t'\,X_o\left[t - t'\right] dt' + g_ig_j\,(V_p^2 x)^{-1} X_o(t - \frac{x}{V_p}) - (g_ig_j - \delta_{ij})(V_S^2 x)^{-1} X_o\left[t - \frac{x}{V_s}\right]\right]
$$

Para el campo lejano , para ondas P y S respectivamente , tenemos de (3.22) :

$$(3.23) \qquad u_i^P = (4\pi\rho)^{-1}\, g_i g_j\, (V_P^2 x)^{-1}\, \chi_o\left(t - \frac{x}{V_P}\right)$$

$$(3.24) \qquad u_i^S = (4\pi\rho)^{-1} - (g_i g_j - \delta_{ij})\,(V_S^2 x)^{-1}\chi_o\left[t - \frac{x}{V_S}\right]$$

y para el campo cercano

$$(3.25) \qquad u_i^C = (4\pi\rho)^{-1}\,(3g_i g_j - \delta_{ij})\, x^{-3}\int_{x/V_P}^{x/V_S} t'\, \chi_o\left[t - t'\right] dt'$$

La respuesta a una fuerza impulso $\chi_o(t) = \delta(t-s)$, localizada en $\bar{\xi}$ y al tiempo s en la dirección x_j , será de (3.22)

$$(3.26)\ G_{ij}(\bar{x}, t;\bar{\xi}, s) = (4\pi\rho)^{-1}\Bigg[(3g_i g_j - \delta_{ij})\, r^{-3}\int_{r/V_P}^{r/V_S} t'\, \chi_o\left[t - t'\right] dt'$$

$$+\, g_i g_j\,(V_P^2 r)^{-1}\,\chi_o\left(t - \frac{r}{V_P}\right) - (g_i g_j - \delta_{ij})\,(V_S^2 r)^{-1}\chi_o\left[t - \frac{r}{V_S}\right]\Bigg]$$

Donde: $r = \| \bar{x} - \bar{\xi} \|$; $g_i = \dfrac{x_i - \xi_i}{r}$

Definimos $G_{ij}[\phi]$ como un operador de la siguiente forma :

$$(3.27)\quad G_{ij}[\phi] = (4\pi\rho)^{-1}\left[(3g_ig_j - \delta_{ij})\, r^{-3}\int_{r/V_p}^{r/V_s} t'\,\phi\left[\bar{\xi}, t - t'\right] dt' \right.$$

$$\left. + g_ig_j\,(V_p^2 r)^{-1}\,\phi\left(\bar{\xi}, t - \frac{r}{V_p}\right) - (g_ig_j - \delta_{ij})\,(V_s^2 r)^{-1}\phi\left[\bar{\xi}, t - \frac{r}{V_s}\right]\right]$$

Las funciones de Green para el campo lejano para ondas P y S y para el campo cercano son respectivamente :

$$(3.28)\quad G^{P}_{ij}[\phi] = (4\pi\rho)^{-1} g_ig_j\,(V_p^2 r)^{-1}\,\phi\left[\bar{\xi}, t - \frac{r}{V_p}\right]$$

$$(3.29)\quad G^{S}_{ij}[\phi] = -(4\pi\rho)^{-1}(g_ig_j - \delta_{ij})\,(V_s^2 r)^{-1}\phi\left[\bar{\xi}, t - \frac{r}{V_s}\right]$$

$$(3.30)\quad G^{C}_{ij}[\phi] = (4\pi\rho)^{-1}(3g_ig_j - \delta_{ij})\, r^{-3}\int_{r/V_p}^{r/V_s} t'\,\phi\left[\bar{\xi}, t - t'\right] dt'$$

Suponiendo que no hay fuerzas de cuerpo, $f_i = 0$, y que no hay discontinuidad en los esfuerzos a través de Σ, i.e. $c_{jkpq}\ \Delta u_{p,q} = 0$ podemos obtener una expresión para el campo elástico debido a una dislocación en un sólido elástico, infinito, isótropo y homogeneo, de (3.8) tenemos :

$$(3.31) \qquad u_i(\bar{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Sigma} \Delta u_j(\bar{\xi},s)\ c_{jkpq}\ G_{ip,q}\ (\bar{x},t;\bar{\xi},s)\ \nu_k\ d\Sigma ds$$

si substituimos (3.2c) en (3.31) y ya que $\dfrac{\partial G_{ij}}{\partial x_q} = \dfrac{\partial G_{ij}}{\partial \xi_q}$ e integramos respecto a s se obtiene :

$$(3.32) \qquad u_i(\bar{x},t) = -\frac{\partial}{\partial x_q} \int_{\Sigma} c_{jkpq}\ G_{ip}\ (\Delta u_j(\bar{\xi},s))\ \nu_k\ d\Sigma$$

Finalmente, para el campo lejano para ondas P y S, substituyendo (3.28) y (3.29) en (3.32) se llega a :

(3.33) . . . .▶▶▶

$$u_i^P\ (\bar{x},t) = -(4\pi\rho)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_q} \int_{\Sigma} c_{jkpq}\ g_i g_p\ (v_P^2\ r)\ \Delta u_j\left(\bar{\xi}, t - \frac{r}{v_P}\right)\nu_k\ d\Sigma$$

(3.34) . . . .▶▶▶

$$u_i^S\ (\bar{x},t) = -(4\pi\rho)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_q} \int_{\Sigma} c_{jkpq}(g_i g_p - \delta_{ip})\ (v_S^2\ r)\ \Delta u_j\left(\bar{\xi}, t - \frac{r}{v_S}\right)\nu_k\ d\Sigma$$

diferenciando respecto a ξ_q obtenemos términos de atenuación en r^{-1} y r^{-2} : por lo que, si nos interesa solamente el campo lejano, podemos despreciar el término r^{-2} y el coeficiente del término r^{-1} será:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_q} \Delta u_j \left(\xi, t - \frac{r}{v_s}\right) = - \frac{\gamma_q}{v} \Delta \dot{u}_j \left(\xi, t - \frac{r}{v_s}\right)$$

Si usamos coordenadas polares (r, θ, ϕ) se obtiene :

(3.55) . . . . ▶▶▶

$$u^{P}(\bar{x}, t) = (4\pi\rho v_p^3 r)^{-1} (c_{jkpq} n_j \nu_k \gamma_p \gamma_q) \int_\Sigma \Delta \dot{u} \left[\bar{\xi}, t - \frac{r}{v_p} \right] d\Sigma$$

$$u^{SH}(\bar{x}, t) = (4\pi\rho v_s^3 r)^{-1} (c_{jkpq} n_j \nu_k \phi_p \gamma_q) \int_\Sigma \Delta \dot{u} \left[\bar{\xi}, t - \frac{r}{v_s} \right] d\Sigma$$

$$u^{SV}(\bar{x}, t) = (4\pi\rho v_p^3 r)^{-1} (c_{jkpq} n_j \nu_k \theta_p \gamma_q) \int_\Sigma \Delta \dot{u} \left[\bar{\xi}, t - \frac{r}{v_s} \right] d\Sigma$$

donde:

γ son los cosenos directores en la dirección r

ϕ en la dirección ϕ

θ en la dirección θ

n_j es el vector de dislocación

SH es la componente de las ondas S en la dirección horizontal

SV es la componente de las ondas S en la dirección vertical

$u(\bar{x},t) = \| \bar{u}(\bar{x},t) \|$

Consideremos ahora que la superficie de la fractura está en el plano $x_2 = x$, $x_1 = z$, ($\phi = \pi/2$ y θ el ángulo entre el plano normal a la fractura y la dirrección del receptor) por lo que: $j=k=3$; $p,q=1,2,3$; $\nu_3=1, \nu_2=\nu_1=0$; $n_3=1, n_2=n_1=0$. Y considerando un sólido isótropo se tiene:

$$C_{3322}\, g_2 g_2 = \lambda \, \mathrm{sen}^2\theta \qquad ; \qquad C_{3333}\, g_3 g_3 = (\lambda + 2\mu) \cos^2\theta$$

$$C_{3322}\, g_2'' g_2 = \lambda \cos\theta \, \mathrm{sen}\theta \quad ; \quad C_{3333}\, g_3'' g_3 = - (\lambda + 2\mu) \, \mathrm{sen}\theta \cos\theta$$

$$C_{33pq}\, g_p g_q = C_{33pq}\, g_p'' g_q = 0 \quad \text{si } p \neq q$$

$$C_{33pq}\, g_p' g_q = 0 \quad p,q = 1,2,3$$

Substituyendo en (3.35) tenemos:

(3.36) . . . . ▶▶▶

$$u^P(\bar{x},t) = (4\pi\rho V_p^3 r)^{-1} (\lambda + 2\mu \cos^2\theta) \int_\Sigma \Delta\dot{v} \left[\bar{\xi}, t - \frac{r}{V_p} \right] d\Sigma$$

$$u^S(\bar{x},t) = (4\pi\rho V_p^3 r)^{-1} (\mu \, \mathrm{sen}\, 2\theta) \int_\Sigma \Delta\dot{v} \left[\bar{\xi}, t - \frac{r}{V_s} \right] d\Sigma$$

Donde por comodidad hemos denotado $\dot{\Delta v} = \dot{\Delta v}_s = \nu_s \Delta u$, y $u^{sv}(x,t) = u^{s}(x,t)$ Por simplicidad, supondremos que la forma de la fractura es estrecha, y se ha tomado el eje ξ_1 a lo largo de ella; (Fig 3.3) estas simplificaciones no afectan seriamente los resultados ya que nos interesa el rango de las bajas frecuencias .

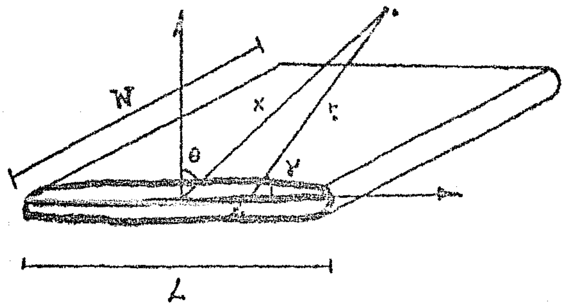


Fig.(3.3)

Ademas supondremos que la distancia r_o del centro de la fractura al receptor satisface : $r_o \lambda > 2L^2$. Entonces podemos simplificar (3.36) y tener:

(3.37) . . . .▶▶▶

$$u^{P}(x,t) = (4\pi\rho v_P^3 r_o)^{-1} W(\lambda+2\mu \cos^2\theta) \int_0^L \dot{\Delta v}\left(\bar{\xi}_1, t - \frac{r_o - \xi_1 \cos\gamma}{v_P} \right) d\xi_1$$

$$u^{s}(x,t) = (4\pi\rho V_p^3 r_o)^{-1} W \mu \text{ sen } 2\theta \int_0^L \Delta\dot{v}\left[\bar{\xi}_1, t - \frac{r_o - \xi_1\cos\gamma}{V_s}\right] d\xi_1$$

donde: L es la longitud de la fractura .

W es el ancho de la fractura perpendicular a ξ_1 .

γ es el ángulo entre ξ_1 y la dirección del receptor .

Si tomamos la transformada de Fourier de (3.37) con respecto a t, encontramos:

(3.38) . . . . ▸▸▸

$$u^{P}(x,\omega)=(4\pi\rho V_p^3 r_o)^{-1}W(\lambda+2\mu\cos^2\theta) \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^L \Delta\dot{v}(\bar{\xi}_1,t)\exp\left[-i\omega t + i\frac{\omega\,\xi_1\cos\gamma}{V_p}\right] d\xi_1\, dt$$

$$u^{S}(x,\omega) = (4\pi\rho V_s^3 r_o)^{-1} W \text{ sen } 2\theta \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^L \Delta\dot{v}(\bar{\xi}_1,t)\exp\left[-i\omega t + i\frac{\omega\,\xi_1\cos\gamma}{V_s}\right] d\xi_1\, dt$$

$\omega = 2\pi/f$

La transformada de Fourier espacio-temporal de la discontinuidad en la velocidad de la partícula a través de la fractura es:

(3.39) $\Delta\dot{v}(k,\omega) = \iint \Delta\dot{v}(\xi,t)\exp(-i\omega t+ik\xi_1)\, d\xi_1 dt$; $k = 2\pi/\lambda$

Por lo que podemos expresar (3.39) de la siguiente forma:

(3.40) . . . . ▸▸▸

$$
\begin{aligned}
u^{P}(x,\omega) &= (4\pi\rho V_{P}^{3} r_{o})^{-1} \, (\lambda + 2\mu\cos^{2}\theta)\, W\, \Delta\dot{v}\left[\frac{\omega\cos\gamma}{V_{P}},\ \omega\right] \\
u^{S}(x,\omega) &= (4\pi\rho V_{S}^{3} r_{o})^{-1}\, W \operatorname{sen} 2\theta\, \Delta\dot{v}\left[\frac{\omega\cos\gamma}{V_{P}},\ \omega\right]
\end{aligned}
$$

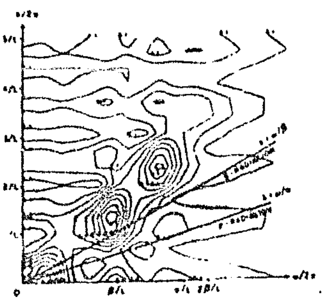
Si se grafica (3.39) en un diagrama k-ω (Aki , 1977) para los siguientes cuatro casos (Figura 3.4).

a) fractura sin fluido dentro , con ambos extremos extendiendose .

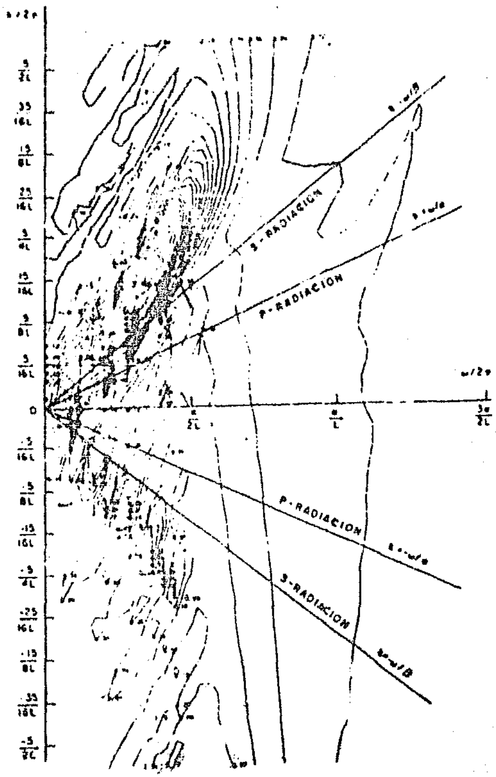
b) fractura sin fluido dentro, con un solo extremo extendiendose .

c) fractura con fluido dentro, con ambos extremos extendiendose .

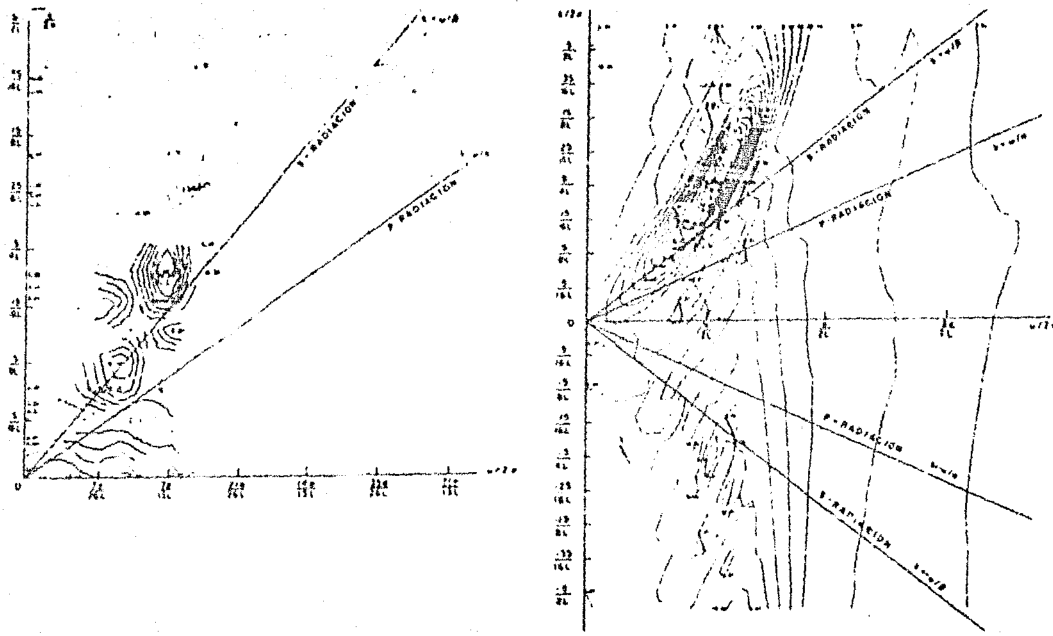
d) fractura con fluido dentro, con un solo extremo extendiendose .



A



B



C

D

Fig 3.4

PATRONES DE RADIACION PARA LOS CUATRO CASOS, A) Y B) FRACTURA SIN FLUIDO EXTENDIENDOSE A AMBOS Y UN EXTREMO RESPECTIVAMENTE; C) Y D) SIMILAR A LAS ANTERIORES PERO CON FLUIDO LA FRACTURA (SEGUN AKI,1977)

Se observan dos cosas, primera la existencia de varios picos espectrales, y segunda que la mayoría de las frecuencias pico, se encuentran fuera del rango de radiación sísmica en el diagrama $k-\omega$, lo cual contrasta con diagramas similares para una ruptura tipo tectónica (donde la fractura se expande hasta su tamaño final, siendo inhibida su propagación por fricción).

Dos características predichas mediante este modelo de propagación de fracturas corresponden bastante bien a algunas de las características observadas del tremor volcánico, éstas son: primera, la existencia de picos espectrales y fuertes oscilaciones de alta frecuencia en las inmediaciones del sitio de la erupción, y segunda , el cambio temporal de la frecuencia pico, lo cual es de esperarse si el tamaño de la fractura cambia con el tiempo.

En el caso de una fractura sin fluido se encuentran picos espectrales correspondientes a las bajas frecuencias, esta frecuencia es de $.27\beta/L$ en el caso de que ambos extremos se extienden, y de $0.15\beta/L$ cuando un sólo extremo se extiende; sin embargo, este pico desaparece cuando la fractura se encuentra llena de fluido y sólo unos pocos picos espectrales se encuentran en el rango de radiación sísmica. Para el caso en que ambos extremos se extienden, se encuentran los picos espectrales en el rango de frecuencias de $0.6\beta/L$ - $0.9\beta/L$ (suponiendo $\alpha=\sqrt{3}\beta$) y para el caso de un solo extremo se encuentran en el rango $0.5\beta/L$ – $0.7\beta/L$ siguiendo además un patrón muy direccional ya que los picos predominantes solo se observan en la dirección de propagación.

Para pequeñas extensiones Δl, la amplitud de la oscilación es proporcional a Δl y podemos expresar el valor absoluto de la densidad espectral para un pico determinado (k_o, ω_o) en términos de los parámetros del modelo, por lo que, en general:

$$(3.41) \qquad |\Delta\dot{V}(k_o, \omega_o)| \cong C\, L\, \Delta P\, \Delta l/\mu$$

Donde C es un número adimensional que puede determinarse para cada uno de los casos a),b),c),d) de fractura.

a) $C = 0.5$ a una frecuencia de $0.23\beta/L$

b) $C = 0.25$ a una frecuencia de $0.15\beta/L$

c) $C = 0.15$ en un rango de frecuencias $[0.6\beta/L\ ,\ 0.9\beta/L]$

d) $C = 0.1$ en un rango de frecuencias $[0.4\beta/L\ ,\ 0.8\beta/L]$

Si substituimos (3.41) en (3.40) se llega a:

(3.42) . . . . ▸▸▸

$$u^P(x,\omega) \cong (4\pi\rho V_P^3 r_o)^{-1} (\lambda + 2\mu \cos^2\theta)\, C\, L\, \Delta P\, \Delta S/\mu$$

$$u^S(x,\omega) \cong (4\pi\rho V_S^3 r_o)^{-1} \operatorname{sen} 2\theta\, C\, L\, \Delta P\, \Delta S/\mu$$

Donde $\Delta S = W\Delta l$,es el incremento de la superficie de la fractura durante una sola extensión de uno de los extremos, para el caso de 2 extremos el área se incrementa en $2\Delta S$.

Hasta este momento sólo se han considerado ondas de cuerpo, si suponemos que la fuente del tremor es bastante superficial, es importante conocer la proporción de las ondas superficiales respecto a las ondas de cuerpo. Consideremos por tanto un espacio semi-infinito con una fractura localizada en $r=0$,$z=d$,(en coordenadas cilíndricas) por lo que si escribimos la componente vertical de los desplazamientos del n-ésimo modo de vibración de ondas de Rayleigh generadas por una fuerza puntual y con un tensor de momento correspondiente a una fractura con la geometría anteriormente descrita, tenemos:

(3.43) . . . . ▸▸▸

$$\left|u_z^R(r,\psi,z;k_n,\omega)\right| = r_2(\omega,k_n,z)\sqrt{2/\pi k r}\;\left[4\,c\;V\;I_1\right]^{-1}\;\left|M_{xx}(\omega)\;k_n\right.$$

$$\left.\cos^2\psi\; r_1(\omega,k_n,d) + M_{yy}(\omega)\;k_n\;\text{sen}^2\psi\; r_1(\omega,k_n,d) + M_{zz}(\omega)\left(\frac{dr_2}{dz}\right)_{z=d}\right|$$

si consideramos además que el espacio semi-infinito no es homogeneo, sino que presenta heterogeneidades verticales, tendremos también ondas de Love, cuyo n-ésimo modo para la componente ψ de los desplazamientos es:

$$(3.44)\qquad \left|u_\psi^L(r,z;k_n,\omega)\right| = l_1(\omega,k_n,z)\sqrt{2/\pi k r}\;\left[4\,c\;V\;I_1\right]^{-1}$$

$$*\left|M_{xx}(\omega) - M_{yy}(\omega)\right|\;k_n\;\text{sen}\psi\,\cos\psi\; l_1(\omega,k_n,d)$$

Donde: $M_{xx}(\omega) = (i\omega)^{-1}\,\lambda\,W\,\Delta\dot{V}\left[\dfrac{\omega\cos\psi}{c},\,\omega\right] = M_{zz}(\omega)$

$$M_{yy}(\omega) = (i\omega)^{-1}\,(\lambda + 2\mu)\;W\,\Delta\dot{V}\left[\frac{\omega\cos\psi}{c},\,\omega\right]$$

es el tensor de momentos.

$r_1(\omega,k_n,z)$, $r_2(\omega,k_n,z)$:las eigenfunciones de desplazamiento para las ondas de Rayleigh.

k_n: número de onda para el n-ésimo modo.

c: velocidad de fase.

V: velocidad de grupo.

$I_1 = \int_0^\infty \rho(r_1^2 + r_2^2)\,dz$ (para ondas de Rayleigh)

$I_1 = \int_0^\infty \rho\, l_1^2\,dz$ (para ondas de Love)

Nuevamente podemos utilizar (3.41) y expresar (3.43) y (3.44) en terminos de los parámetros del modelo.

Consideremos que la extensión a pulsos descrita anteriormente ocurre en forma aleatoria a razón de n extensiones por unidad de tiempo, esto es, se esperan $n\Delta t$ extensiones dentro de un intervalo de tiempo Δt; cada una de ellas generará un espectro de campo lejano dado por (3.42), (3.43) y (3.44). Si suponemos que en el proceso los eventos son independientes entre sí, la transformada de Fourier $\mathbb{F}(\omega)$ de la señal sísmica total muestreada sobre un intervalo Δt, esta relacionada con la transformada de Fourier $\mathbb{F}_0(\omega)$ de una señal individual mediante:

$$\langle |\mathbb{F}(\omega)|^2 \rangle = n \, \Delta t \, |\mathbb{F}_0(\omega)|^2$$

donde los paréntesis $\langle\rangle$ indican promedio sobre todas las muestras. Por otra parte, el espectro de poder $\mathbb{P}(\omega)$ de una serie de tiempo aleatoria, está relacionada con la transformada de Fourier de una muestra de serie de tiempo de longitud Δt

$$\mathbb{P}(\omega) \cong \langle |\mathbb{F}(\omega)|^2 \rangle / 2\Delta t$$

tenemos por tanto

$$\mathbb{P}(\omega) \cong |\mathbb{F}_0(\omega)|^2 \, n / 2$$

Para estimar la raíz cuadrada media (RCM) de la amplitud del tremor volcánico, supondremos que el espectro de poder en la frecuencia pico tiene forma de ventana cuadrada con una altura de $\Phi(f_o)$ y con un ancho Δf. Entonces la RCM de la amplitud del tremor volcánico está dada aproximadamente por:

$$RCM = \sqrt{2\ \Phi(f_o)\ \Delta f}$$

reemplazando $\Phi_o(\omega)$ por el espectro para las ondas P, S, Rayleigh, y Love, encontramos :

(2.45) . . . .

$$RCM(u^P) \cong (4\pi\rho V_p^3 r_o \mu)^{-1} (\lambda + 2\mu\cos^2\theta)\ C\ L\ \Delta P\ \Delta S \sqrt{n\Delta f}$$

$$RCM(u^S) \cong (4\pi\rho V_s^3 r_o \mu)^{-1}\ \mathrm{sen}\ 2\theta\ C\ L\ \Delta P\ \Delta S \sqrt{n\Delta f}$$

$$RCM(u^R) \cong r_2(\omega, k_n, z) \sqrt{2\pi k_n r}\ [4\ c\ V\ I_1\ \mu]^{-1} \Big| r_1(\omega, k_n, d)\ k_n\ \lambda$$

$$\cos^2\psi + (\lambda+2\mu)\ k_n\ \mathrm{sen}^2\psi\ r_1(\omega, k_n, d) + \lambda\left(\frac{dr_2}{dz}\right)_{z=d}\Big|\ C\ L\ \Delta P\ \Delta S \sqrt{n\Delta f}$$

$$RCM(u^L) \cong l_1(\omega, k_n, z) \sqrt{2\pi k_n r}\ [4\ c\ V\ I_1\ \mu]^{-1}\ 2\ k_n\ \mathrm{sen}\psi\ \cos\psi$$

$$l_1(\omega, k_n, d)\ C\ L\ \Delta P\ \Delta S \sqrt{n\Delta f}$$

Aki encontró para la erupción de 1963 en el Kilauea las amplitudes pico a pico promediadas sobre un periodo de 600 a 1800s en diferentes puntos separados por varios kilómetros y comparó las contribuciones relativas de ondas de cuerpo y superficiales usando (3.46). Si suponemos un espacio semi-infinito y consideramos ondas de Rayleigh cuya eigenfunción para un semiespacio con una razón de Poisson de 0.25, $c=0.9194\beta$, $I_1=1.2409\rho/4$ es :

$$(3.46) \quad \left| \begin{array}{l} r_1 = e^{-0.8475kz} - 0.5773\, e^{-0.3933kz} \\ \\ r_2 = 0.847\, e^{-0.8475kz} - 1.4679\, e^{-0.3933kz} \end{array} \right.$$

se obtiene:

$$(3.47) \qquad RMS(u^R) = (\beta\mu)^{-1} (\lambda r)^{-\frac{1}{2}} (p+q\,sen^2\psi)\, C\, L\, \Delta P\, \Delta S \sqrt{n\Delta f}$$

donde p,q son constantes que dependen de la profundidad focal h, teniendo por tanto que:

$$(3.48) \qquad \frac{RMS(u^S)}{RMS(u^R)} \cong \frac{sen2\theta}{4\pi(p+q\,sen^2\psi)} (\lambda/r)^{-\frac{1}{2}}$$

Para una profundidad focal h, en un rango de 0.1 a 1 km y una distancia al epicentro de 5-10 km, se encuentra de la ecuación anterior que la amplitud de las ondas de Rayleigh es de 2 a 10 veces la de las ondas S; y si se toma en cuerta además que la amplitud de las ondas S es mayor al de las ondas P por un factor de V_P/V_S, se tiene que las ondas de Rayleigh son probablemente la principal contribución a las ondas observadas en el tremor volcánico (Mc.Nutt,1986). Podemos ahora restringir los valores de los parámetros para (7.19), por ejemplo. Aki encuentra para el caso particular de la erupción del Kilauea, que si $RMS(u^R)\ r^{-\frac{1}{2}} = 0.3 \mu m\ km^{\frac{1}{2}}$, $p + q\ sen^2\psi \approx 0.1$ y $c \cong 0.1$ como valor medio, se tiene $L\ \Delta P\ \Delta S \sqrt{n\Delta f} \cong 10^{19}$ dinas.cm/s. Ahora bien, L puede determinarse del pico espectral y Δf del ancho del mismo (L entre 1 y 2 km, Δf entre 0.1 y 0.2 Hz, para este caso). También se puede calcular el volumen del magma transportado desde la cámara hasta la superficie y así estimar ΔS; Aki hizo la estimación y obtuvo para el volumen transportado $d\ \Delta S\ n \cong 3 \times 10^8\ cm^3/s$ para esta erupción, y de los anchos típicos para diques observados en Hawaii así como de las frecuencias observadas cercanas a 1 Hz, se tiene $d \cong 30 cm$, $n \cong 1$ Hz; valores que satisfacen las restricciones anteriores, teniendo por consiguiente los siguientes valores:

$\Delta P \cong 20$ bars, $\Delta S \cong 10^3 m^2$, $n \cong 1Hz$, $L \cong 1 \sim 2km$.

Sin embargo Aki señala que este modelo de una sola fractura extendiéndose o creciendo desde el techo hasta las aberturas de erupción, aunque es físicamente aceptable en términos de los valores involucrados, no sería aplicable directamente a algunos eventos debido a lo siguiente:

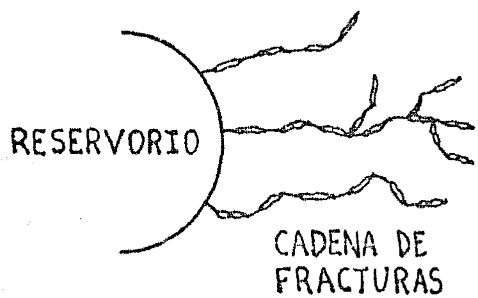
Primero, durante un periodo de actividad de tremor volcánico de varias horas el incremento en el Area total de la fractura podría ser considerable lo cual estaría acompañado de un aumento significativo en el periodo del pico espectral. Aunque este incremento se ha llegado a observar no es tan grande como el esperado de este modelo e incluso se han llegado a observar ligeros decrementos.

Segundo, el patrón inicial en el incremento de la amplitud del tremor es bastante similar en estaciones muy alejadas entre sí, lo cual, no apoya la idea de un solo frente de fractura propagandose desde la cámara magmática.

Tercero, el pico observado más o menos constante en estaciones alejadas hasta por 10 o 12 km, mientras que la longitud L de una fractura con fluido, en un medio con una velocidad de ondas S de 2km/s y una rigidez de 10^{11}dinas/cm^{2}, es calculada en L entre 1 y 2 km .

Cuarto, se ha demostrado (Chouet,1985) que las vibraciones causadas por la abertura de canales, no son mayores que sólo unos pocos ciclos, y que el pico espectral observado es mucho más angosto que el esperado teóricamente a partir del modelo.

2) Para resolver estas inconsistencias, Aki propone una cadena de fracturas llenas de fluido de una longitud de entre 1 y 2 km (Fig.3.5), que se extiende a pulsos y que se encuentran conectadas por canales estrechos, los cuales inicialmente se hayan cerrados. Cuando la presión en el reservorio alcanza cierto valor límite, el primer canal se abre y el magma fluye hacia la primer fractura. En este momento se incrementa la presión en la primer fractura, y el segundo canal se abre permitiendo el flujo de magma hacia la segunda fractura; una vez que el magma ha fluido, la presión en la primera fractura decrece, y el canal entre la primera y la segunda fractura se cierra, repitiéndose el proceso a lo largo de toda la cadena de fracturas, teniendo lugar la erupción cuando, finalmente, el magma fluye hacia la superficie. Considerando ahora este modelo modificado, Aki obtiene longitudes para las fracturas de L entre 0.6 y 1.7 km.



Fig(3.5)

CADENA DE FRACTURAS CONECTADAS POR CANALES ESTRECHOS

Este modelo considera la propagación de fracturas (con transporte de magma) originada por un aumento de presión en el reservorio; como la principal fuente o mecanismo de generación de tremor volcánico.

Sin embargo un análisis completo del problema tendría que considerar también la dinámica de los gases dentro de las fracturas o conductos (Steimberg,1975) lo cual haría del modelo un modelo más completo aunque bastante más complicado. Es importante, darse cuenta que, dependiendo de las características de cada volcán, esto es, viscosidad, temperatura y tipo de magma, así como de la cantidad de gases y agua disueltos en éste puede tener un papel mas importante uno u otro de los mecanismos generadores (gases, magma o incluso alguna otra fuente) por lo que no podemos concluir por ello, que sean éstos, con seguridad, las únicas fuentes generadoras, sino solamente que son fuentes probables de generación de tremor volcánico.

CAPITULO IV

MODELO DE RESONANCIA EN CONDUCTOS CON MAGMA

Existen varios fenómenos como son, vibraciones en sistemas hidráulicos bajo condiciones de flujo transitorio, flujo y fracturamiento en glaciares, etc., los cuales nos permiten asociar la fuente generadora de tremor volcánico con procesos no estacionarios en la dinámica de un fluido, por lo que, podemos emplear la dinámica de fluidos, para describir las vibraciones producidas por el sistema.

Sin duda un modelo muy conocido y bastante reciente es el de resonancias en los conductos magmáticos (Seidl, *et al.*, 1981, Ferrick, *et al.*, 1982). Para este modelo consideraremos en primer lugar las ecuaciones de movimiento y continuidad en 3 dimensiones para un fluido no viscoso, con densidad, presión y temperatura uniformes, y con conductividad calorífica igual a cero. Consideraremos también que la energía involucrada en el proceso acústico es sólo de origen mecánico, y que sólo actuan fuerzas compresivas sobre el fluido. Tendremos así, la ecuación de movimiento:

$$\rho(1 + \varkappa p) \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \mathrm{grad}) \bar{u} \right] = -\mathrm{grad}\ p \tag{4.1}$$

y la de continuidad

$$\rho\varkappa \frac{\partial p}{\partial t} = -\rho(1 + \varkappa p)\ \mathrm{div}\ \bar{u} - \varkappa\rho\bar{u} \cdot \mathrm{grad}\ p \tag{4.2}$$

donde : u es la velocidad del fluido.

ρ es la densidad del fluido.

p es la presión

$\varkappa$ es la compresibilidad adiabática ($\varkappa_s=(\gamma p)^{-1}$; $\gamma=C_p/C_v$)

desarrollando (4.1) y (4.2) a primer orden tenemos:

$$(4.3)\qquad \left| \begin{array}{l} \rho \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\text{grad } p \\[2ex] \rho\varkappa \dfrac{\partial p}{\partial t} = -\rho(1 + \varkappa\rho) \text{ div } \bar{u} \end{array} \right.$$

podemos además expresar p y $\bar{u}$ en términos de una función escalar ψ llamada potencial de velocidades, tal que

$$(4.4)\qquad \bar{u} = -\nabla\psi$$

por lo que

$$(4.5)\qquad p = \rho \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

y

$$(4.6)\qquad \rho\varkappa \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\nabla^2\psi$$

Si ahora escribimos también la suma de las densidades de la energía cinética y potencial, tenemos así la densidad de la energía de una onda en movimiento.

$$(4.7)\qquad H = \tfrac{1}{2}\rho \|\bar{u}\|^2 + \tfrac{1}{2}\varkappa p^2 = \tfrac{1}{2}\rho \|\text{grad}\psi\|^2 + \tfrac{1}{2}\varkappa \rho^2\psi_t^2$$

Así como a la intensidad de la onda, $\bar{I}$ definida como

$$(4.8)\qquad \bar{I} = p\,\bar{u}$$

por lo que la ecuación de continuidad, es:

$$(4.9) \qquad \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{I} = 0$$

Ahora, supóngase que se tiene una esfera de radio a, la cual se expande y se contrae de tal forma que la velocidad radial, U(t), de la superficie de la esfera, es en todo momento función del tiempo t; la razón de flujo a través de la superficie de la esfera en cualquier dirección es $S(t) = 4\pi a^2 U(t)$ y además $p = \frac{P(r-ct)}{r}$, siendo c la velocidad del sonido en el fluido; por lo que de (4.3) se tiene:

$$(4.10) \qquad r^{-1} \frac{\partial P}{\partial r} - r^{-2} P = -(4\pi a^2)^{-1} \frac{\partial S}{\partial t} \quad \text{en } r=a$$

Si la esfera es muy pequeña, esto es, el radio mucho menor que la longitud de onda radiada ($a \ll \lambda$), entonces $P/r \gg \frac{dP}{dr}$ en $r=a$ y $P \cong \frac{\rho}{4\pi} \frac{dS}{dt}$ en $r=a$; y por lo tanto

$$(4.11) \qquad p \cong \frac{\rho}{4\pi r} S'(t-r/c)$$

denotando a $\mathfrak{F}(\omega)$ como la transformada de Fourier de f(t) ($\mathfrak{F}(\omega) \leftrightarrow f(t)$) entonces $f'(t) \leftrightarrow -i\omega\, \mathfrak{F}(\omega)$, por lo que

$$(4.12) \qquad p(r,t) \cong \frac{\rho}{4\pi r} S'(t-r/c) = \frac{\rho}{4\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\omega) S_\omega \, e^{-i\omega t} e^{+i\omega r/c} \, d\omega$$

$$\text{donde } S_\omega = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\, e^{i\omega t}\, dt \quad \text{y} \quad p(r,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\omega)\, e^{i\omega t}\, dt$$

y de (4.12) tenemos

$$(4.14) \qquad p(\omega) = \frac{-i\omega\rho}{4\pi r} e^{i\omega r/c} S_\omega$$

Definimos además la potencia total radiada como:

$$(4.15) \qquad \Pi \equiv 4\pi r^2 \|\bar{I}\|$$

para el caso especial, cuando la fuente es armónica simple $p = P_o(\omega)\, e^{-i\omega t}$, tenemos de (4.5) y (4.4):

$$(4.16) \qquad \psi_o = (4\pi r)^{-1} S_\omega\, e^{ikr}\, e^{-ikct}$$

$$(4.17) \left| \begin{array}{l} u_r^o = -(4\pi r^2)\, S_\omega\, (ikr-1)\, S_\omega\, e^{ikr}\, e^{-ikct} = \dfrac{p}{\rho c}\left(1 + \dfrac{i\lambda}{2\pi r}\right) \\ u_\theta^o = u_\phi^o = 0 \end{array} \right.$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \quad \text{(número de onda)}$$

de la misma forma, de (4.7), (4.8) y (4.15) se llega a

$$(4.18) \qquad \Pi_o = \rho(4\pi r^2)^{-2} \|S_\omega\|^2 \left(k^2 r^2 + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$(4.19) \qquad I_r^o = \rho c(2\lambda r)^{-2} \|S_\omega\| = \rho c \|p\|^2; \quad I_\theta^o = I_\phi^o = 0$$

$$(4.20) \qquad \Pi_o = (4\pi r^2 I_r) = \rho c \pi \lambda^{-2} \|S_\omega\|^2 = \frac{\rho \omega^2}{4\pi c} \|S_\omega\|^2$$

(donde el subíndice o superíndice cero denota el orden del polo) análogamente, para el dipolo (considerado como dos fuentes monopolares de magnitudes $-S_\omega$ y S_ω tal que $\bar{D}_\omega = S_\omega \bar{d}$), y para el cuadrupolo se tiene, respectivamente:

$$(4.21) \qquad \Pi_1 \cong \frac{\rho \omega^4}{12\pi c^3} \|D_\omega\|^2$$

$$(4.22) \qquad \Pi_2 \cong \frac{\rho \omega^6}{60\pi c^5} \|Q_\omega\|^2$$

se encuentra en general (Morse & Ingard, 1968) que la potencia acústica para un multipolo de orden i esta dado por

$$(4.23) \qquad \Pi_i \cong \rho v^2 d^3 \left(\frac{v}{c}\right)^{i+1} v/d = \rho v^2 d^3 \eta\, v/d \;;$$

donde se puede observar que la eficiencia acústica $\eta = \left(\dfrac{v}{c}\right)^{i+1}$

disminuya para ordenes multipolares cada vez mayores, mientras que la potencia acústica total aumenta proporcionalmente como una potencia de $\ell+2$ de la velocidad.

Si consideramos una región; donde las fuentes, monopolar, dipolar y cuadrupolar, fluctúan de manera áltamente aleatoria, en el espacio y en el tiempo, es físicamente razonable suponer que éstas no son independientes una de la otra, y que tienen un acoplamiento mutuo el cual es función del tiempo y del espacio. Podemos representarltal acoplamiento usando la función de autocorrelación $\gamma_s(\bar{d},\tau)$.

Llamaremos $s(\bar{r}_o,t)$ a la diferencia de fluctuación entre el valor en un instante t y en el punto $\bar{r}_o$, de la densidad de la magnitud de la fuente y el valor promedio sobre un intervalo de tiempo t $\in$ $\left[-\frac{1}{2}T,\frac{1}{2}T\right]$ en un volumen V de la región activa, por lo que la transformada múltiple de Fourier de $s(\bar{r}_o,t)$ estará dada por:

$$(4.24) \qquad s(\bar{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{T/2}^{T/2}\iiint_V s(\bar{r}_o,t)\, e^{i\omega t}\, e^{-ik.r}\, dV_o dt$$

Y la función de autocorrelación para la densidad de magnitud de la fuente monopolar

$$(4.25) \qquad \gamma_s(\bar{d},\tau) = (VT)^{-1}\iiint_V s(\bar{r},t)\, s(\bar{r}+\bar{d},t+\tau)\, dVdt$$

Ya que, además, la transformada de Fourier de $\gamma_s(\bar{d},\tau)$ es proporcional al cuadrado de la norma de la transformada de Fourier de $s(r_o,t)$, $\left\{\mathcal{F}\left[\gamma_s(\bar{d},\tau)\right] = (2\pi)^4\ (VT)^{-1}\ \|s(\bar{k},\omega)\|^2\right\}$ (Morse & Ingard, 1968)

$$(4.26)\qquad \|s(\bar{k},\omega)\|^2 = \frac{VT}{(2\pi)^3}\int\int_{V_d}\int \gamma_s(\bar{d},\tau)\ e^{i\omega\tau}\ e^{-i\bar{k}.\bar{d}}\ dV_d d\tau$$

por lo que la intensidad del sonido a una frecuencia $\omega/2\pi$ medida en el punto $\bar{r}$ es:

$$I_\omega = (\rho c r^2)^{-1}\ \|\psi_\omega\|^2$$

$$= \frac{k^2\rho c}{64\pi^4 r^2}\left\| \int_{T/2}^{T/2} \int\int_{V_o}\int s(\bar{r}_o,t)\ e^{i\omega t}\ e^{-i\bar{k}.\bar{r}}\ dV_o\ dt \right\|^2$$

$$= \frac{4\pi^4 k^2 \rho c}{r^2}\ \|s(\bar{k},\omega)\| \text{ y de (4.26)}$$

$$(4.27)\qquad I_\omega = \frac{VT\rho c k^2}{64\pi^4 r^2}\int_T\int\int_{V_d}\int \gamma_\omega(\bar{d},\tau)\ e^{i\omega\tau}\ e^{-i\bar{k}.\bar{d}}\ dV_d d\tau$$

Ahora si consideramos que todas las frecuencias se encuentran presentes en un rango entre cero y alguna frecuencia de corte $\omega_s(2\pi)^{-1} = (\tau_s)^{-1}$, es decir, que γ_s es practicamente constante en $\tau \in [0,\tau_s]$ y cae rápidamente a cero para $\tau > \tau_s$, entonces, τ_s será el intervalo de tiempo de correlación, y de manera semejante W_s será la distancia espacial de correlación, por lo que podemos escribir a $\gamma_s(\bar{d},\tau)$ (Morse & Ingard, 1968) como:

$$(4.28)\qquad \gamma_s(\bar{d},\tau) = \langle\Delta_s^2\rangle \exp\left[-\tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{W_s}\right)^2 - \tfrac{1}{2}(\omega_s\tau)^2\right]$$

donde $\langle\Delta_s^2\rangle = \gamma_s(\bar{0},0)$; de (4.27) tenemos:

$$(4.29)\qquad I_\omega = \rho c\ \frac{k^2 VT}{16\pi^3}\ \langle\Delta_s^2\rangle\ \frac{W_s^3}{\omega_s}\ \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\omega^2\left[\left(\frac{W_s}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega_s}\right)^2\right]\right\}$$

tomando en cuenta que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud (A^2) y de (4.20) a (4.22) asi como de la ecuación anterior se tiene:

$$A_i(f) = \|A_i\| \, f^{i+1} \exp(-Mf^2) \qquad (4.30)$$

$i=0,1,2$; grado del polo

donde:

$$M = 2\pi^2 \left[\left(\frac{W_s}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega_s}\right)^2 \right]$$

f : frecuencia

$A_i(f)$: densidad de la amplitud espectral (raiz cuadrada del espectro de potencia)

Debido a que la fuente generadora de ondas se encuentra inmersa dentro de un material sólido, es necesario tener en cuenta la atenuación del medio, el cual actua como un filtro, por lo que podemos escribir la atenuación como:

$$A(r,f) = A_o \exp\left[- \frac{\pi f}{cQ(f)} r \right] \qquad (4.31)$$

donde:

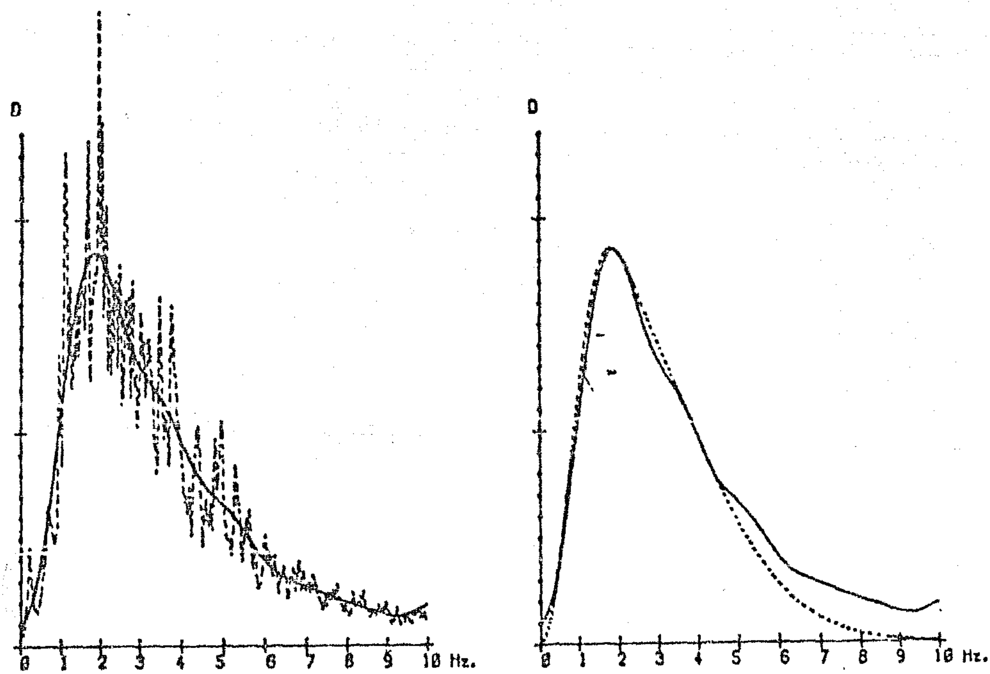
r : es la distancia entre la fuente y el punto de observación

Q : es el factor de calidad

Entonces la amplitud espectral total, en un punto de observación $\bar{r}$ estará dada por la superposición de todas las fuentes; y de (4.30) y (4.31) se tiene finalmente:

$$A(\bar{r},f) = \sum_{i=0}^{2} \|A_i\| \, f^{i+1} \exp\left\{ -\left[Mf^2 + \frac{\pi f}{cQ(f)} r \right] \right\} \qquad (4.32)$$

Las gráficas obtenidas a partir de (4.32) se muestran en la figura (4.1) suponiendo un factor de calidad Q≅20 (Brotopuspito,S.,1983)



Fig(4.1)

LA FIGURA DE LA IZQUIERDA MUESTRA EL ESPECTRO DE TREMOR (LINEA DISCONTINUA), OBTENIDO A PARTIR DE UNA SERIE DE TIEMPO DE 42 MIN., LA LINEA CONTINUA DA EL ESPECTRO DESPUES DE SUAVIZARLO; A LA DERECHA SE MUESTRA LA COMPARACION ENTRE LA GRAFICA CALCULADA A PARTIR DEL MODELO (LINEA PUNTEADA) Y EL ESPECTRO SUAVIZADO (LINEA CONTINUA). (SEGUN: BROTOPUSPITO,S. ,K. ,(1983)).

La tabla 4.1 muestra los valores de M usados en las gráficas para diferentes estados de actividad volcánica

ESTACION	ACTIVIDAD	M (dipolo)	M (cuadrupolo)
TDF	ERUPCION	0.07	0.52
TDF	DESP. ERUPCION	0.05	0.58
MVT	ERUPCION	0.05	0.48
SLN	NO ERUPCION	0.05	0.63
RFO	NO ERUPCION	0.05	0.28

TABLA 4.1

VALORES DE M PARA DIFERENTES ESTACIONES Y CONDICIONES DE ACTIVIDAD VOLCANICA USADOS EN LA GRAFICA DE LA FIG. 4.1 (BROTOPUSPITO,1983).

Se observa que el cambio en los valores de M para diferentes estados de actividad, no es muy grande; esto sugiere que las dimensiones geométricas del patrón de flujo (p.e. diámetro de los vórtices en un fluido turbulento) son bastante constantes, de lo que se podría inferir cambios pequeños en el tamaño de los conductos y en el de la cámara. También se observa que los factores de M para los términos cuadrupolares son un orden de magnitud mayores que para los dipolares, lo cual es de esperarse si suponemos que la cámara magmática es mucho más grande que los conductos, puesto que en el reservorio se presentarían principalmente vorticidades (términos cuadrupolares) en tanto que en los conductos se tendría principalmente una convección simple (términos dipolares).

EIGENFRECUENCIAS

Considerando un modelo basado en resonancias en conductos cerrados o abiertos, esto es, que la resistencia al flujo en ciertos lugares del conducto se incrementa o disminuye abruptamente; podemos hacer corresponder el modo de resonancia de un conducto magmático el cual esta cerrado en ambos extremos, con el modo de resonancia para media longitud de onda de un conducto, de igual manera el de un cuarto de longitud de onda con el de un conducto con un extremo abierto y el otro cerrado.

Las leyes físicas que nos describen el flujo de un liquido en un conducto son, la conservación de momentum y la conservación de masa, es decir:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho F(Q) = 0 \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial p}{\partial t} - \rho g u \,\mathrm{sen}(\alpha) = 0 \tag{4.34}$$

donde:

u velocidad del fluído en la dirección x.

c velocidad de la onda de presión en el fluido.

$p = \rho g H A^{-1}$ presión.

$Q = A\,u$ razon de flujo volumétrico.

g aceleración debida a la gravedad.

H altura en el conducto.

A área de la sección transversal.

α ángulo del conducto con la horizontal.

$F(Q)$ función de pérdida friccional.

Reescribiendo (4.33) y (4.34), en tórmiminos de H y Q, quitando los términos no lineales y descomponiendo H y Q en su valor medio $(\bar{H},\bar{Q})$ y sus componentes de fluctuación (h',q') (Ferrick *et al*, 1982), esto es un análisis de tipo variacional, se tiene:

$$(4.35)\qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial h'}{\partial x} + (gA)^{-1}\dfrac{\partial q'}{\partial t} + Rq' = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial q'}{\partial x} + gAc^{-2}\dfrac{\partial h'}{\partial t} = 0 \end{array}\right.$$

donde R es la resistencia linearizada por unidad de longitud. que satisface la siguiente ecuación:

$$(4.36)\qquad \left|\begin{array}{l} c^2\dfrac{\partial^2 q'}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 q'}{\partial t^2} + gAR\,\dfrac{\partial q'}{\partial t} \\[2ex] c^2\dfrac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 h'}{\partial t^2} + gAR\,\dfrac{\partial h'}{\partial t} \end{array}\right.$$

Resolviendo (4.36) en h' mediante separación de variables se encuentra:

$$(4.37)\qquad h' = e^{st}\left(C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{-\gamma x} \right)$$

donde:

$\gamma^2 = \dfrac{s}{a^2}(s + gAR)$ es la constate de separación.

C_1, C_2 constantes.

$s = \zeta + i\omega$ frecuencia compleja ;ζ es el amortiguamiento.

Substituyendo (4.37) en (4.35) se obtiene una solución para q'

$$(4.38)\qquad q' = -\frac{gAs}{c^2\gamma}\, e^{st}\left(C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{-\gamma x} \right)$$

Si el flujo en la parte superior del extremo se denota mediante el subíndice u se tiene que las constantes C_1 y C_2 tienen la forma siguiente:

$$(4.39)\qquad C_1 = \tfrac{1}{2}(H_u - Z_c Q_u) \quad ; \quad C_2 = \tfrac{1}{2}(H_u + Z_c Q_u)$$

donde: $Z_c = \dfrac{c^2\gamma}{gAs}$ es la impedancia característica

Por lo que las ecuaciones de transferencia para H(x) y Q(x), son:

$$(4.40)\quad \begin{cases} h' = H_u \cosh \gamma x - Z_c Q_u \operatorname{senh} \gamma x = H(x)\, e^{st} \\ q' = - H_u Z_c^{-1} \operatorname{senh} \gamma x + Q_u \cosh \gamma x = Q(x)\, e^{st} \end{cases}$$

Ahora bien, para diámetros de conductos grandes, el valor de la impedancia característica se aproxima al de un sistema sin fricción ($Z_c = a(gA)^{-1}$), para un sistema tal se tiene que $H_u = 0$; $R = 0$; $\gamma = \frac{\beta}{c}$; denotando a $Z_o = H(l)/Q(l)$ donde l es la longitud del conducto se tiene de (4.40)

$$(4.41)\qquad Z_o \cosh \gamma l + Z_c \operatorname{senh} \gamma l = 0$$

Resolviendo (4.41) para la parte real, tenemos que cuando $Z_c > Z_o$, es decir cuando el sistema se comporta como si el conducto estuviera abierto ,se obtienen frecuencias de los armónicos pares, y una atenuación dados por:

$$(4.42)\qquad \omega_{n/2} = 2\pi f_{n/2} = \frac{n\pi c}{2l}$$

$$\lambda_{n/2} = \frac{4l}{n}; \qquad n = 2, 4, 6, \ . \ . \ .$$

$$\zeta = \frac{c}{2l} \ \operatorname{Ln} \left[\frac{Z_c - Z_o}{Z_c + Z_o}\right]$$

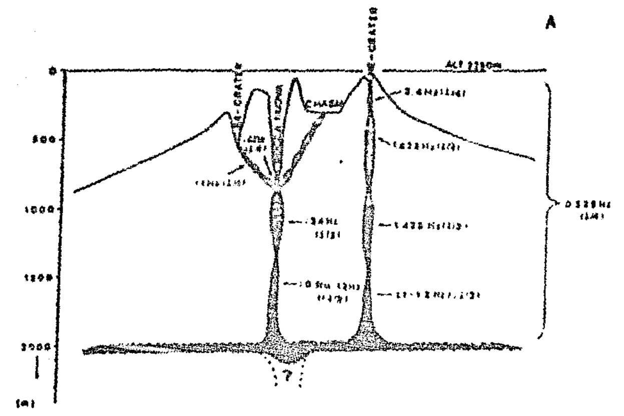
Análogamente de (4.41) para la parte imaginaria cuando $Z_o > Z_c$, esto es, cuando el sistema responde como si el conducto estuviera cerrado, se obtienen las frecuencias de los armónicos impares:

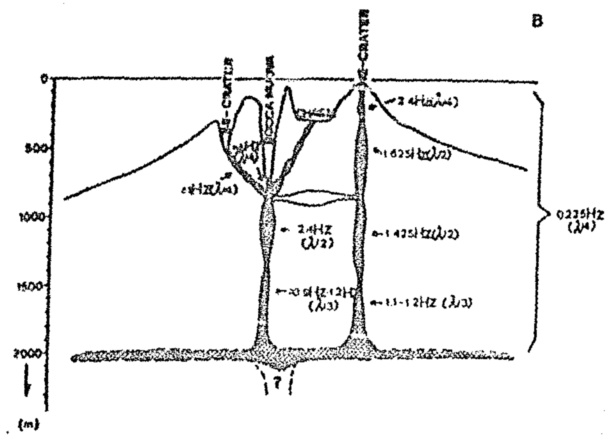
(4.43)
$$\omega_{2n-1} = 2\pi f_{2n-1} = \frac{n\pi c}{2l}$$

$$\lambda_{2n-1} = \frac{4l}{n}; \quad n = 1,3,5, \ . \ . \ .$$

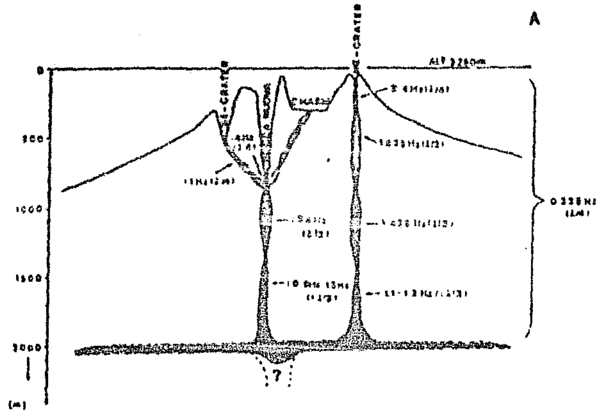
$$\zeta = \frac{c}{2l} \ Ln \left[\frac{Z_o - Z_c}{Z_c + Z_o} \right]$$

Las ecuaciones (4.42) y (4.43) nos dan las eigenfrecuencias correspondientes a un conducto con diferentes condiciones a la frontera. De acuerdo con Gresta *et al.* (1987) Cosentino aplicó estas ecuaciones al Etna en 1983, suponiendo una velocidad $c \cong 1000$ m/s, asociando la longitud de los conductos a los primeros eigenvalores (un cuarto y media onda) y obtuvo un arreglo de los conductos del Etna (Fig 4.2a). Otros autores han sugerido otros arreglos que se ajustan también a las frecuencias observadas; Patanè y Gresta en 1984, basados en observaciones volcanológicas correlacionadas con las características del espectro del tremor, han sugerido una posible conección entre los principales conductos (Fig 4.2b); Gresta en 1987 basándose también en una correlación de fenómenos volcanológicos observados (desgacificación, nivel del magma en los conductos, actividad en la parte superior de la cámara, así como las condiciones tectónicas) con las características espectrales observadas, ha sugerido un nuevo arreglo em los conductos a partir del modelo (Fig 4.2c).

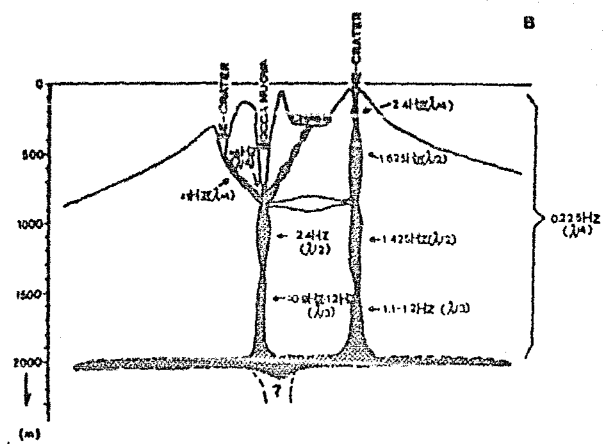

A
0
500
1000
2000
(m)
?


B
0
500
1000
1500
2000
(m)
2.4HZ
(λ/2)
(λ/3)
0.225HZ
(λ/4)
?

A



B



0
500
1000
1500
2000
(m)
CRATER
CRATER
2.4Hz(λ/4)
1.625Hz(λ/2)
1.425Hz(λ/2)
1.1-1.2Hz (λ/3)
2.4Hz
(λ/2)
0.225Hz
(λ/4)
?

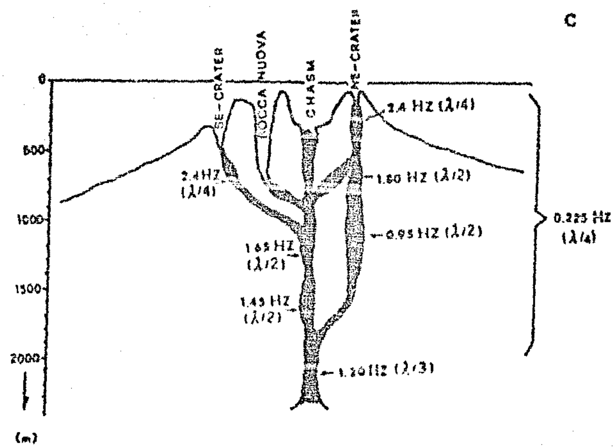


FIGURA 4.2

DIAGRAMAS DEL SISTEMA DE CONDUCTOS PRINCIPALES EN EL ETNA (SEGUN: (A), SHICK ET AL., (1982);(B) PATANE Y GRESTA, (1984) ;(C) GRESTA ET AL., (1987)) Sin embargo es de notar, que si bien dada una cantidad suficiente de parámetros en un volcan especifico, el comportamiento de la fuente en un flujo transitorio, puede ser modelada de manera precisa y única, utilizando estas ecuaciones o algunas más generales; en el presente caso nos estamos enfrentando con el problema inverso de ajustar una geometría del sistema, así como otros parámetros, (tales como la pérdida por fricción) a las señales sismicas observadas; la solución a este problema no es única, volcanes con diferentes magmas y geometrías en el sistema de conductos pueden generarnos señales sismicas similares (Ferrick *et al.*, 1982, Gresta *et al.*, 1987).

CAPITULO V

CONCLUSIONES

Como ya se ha dicho, diferentes modelos pueden explicar algunas de las características del tremor; pero hasta la fecha no existen datos suficientes para decidir cual modelo es el que mejor describe el proceso. Es muy posible que todos estos procesos intervengan en la generación de tremor en un área volcánicamente activa, pero sólo alguno de ellos cobrará mayor importancia debido a las características particulares del volcán; es por esto que la aplicabilidad de alguno de los modelos estará en función del tipo de volcanismo presente; por ejemplo, el modelo de fracturamiento hidráulico aunque posible y bien correlacionado con actividad visible para volcanes en Hawaii, es difícilmente aplicable a volcanes con propiedades en el magma muy diferentes tales como el Chichonal, donde la actividad podría estar mejor descrita por un modelo como el de resonancia en conductos. Si bien existe una gran cantidad de procesos (y modelos asociados a cada uno de ellos) considerados como fuentes generadoras de tremor, no podemos dejar de lado la idea de encontrar algún proceso común presente en la generación de tremor para cualquier tipo de volcán, lo cual desde luego nos daría a conocer más acerca de la dinámica interna ; esto nos alienta en el sentido de una mayor y mejor observación y toma de registros, así como en la elaboración de mejores modelos, más completos, o bien a modificar los ya existentes como lo han hecho algunos autores (Chouet,1985); lo cual sin duda tendrá un gran valor no sólo en cuanto a desarrollo púramente teórico, sino como elemento predictivo en erupciones; recientemente Mc Nutt (1987) ha hecho correlaciones de los diferentes cambios en las señales observadas de tremor (número de eventos, duración, amplitudes, etc.) con actividad eruptiva; y se encontró que el tremor ha sido registrado en más de 84 volcanes en el mundo y con 1100 casos descritos; la mayoría de los reportes de ocurrencia de tremor incluyen reportes de erupciones, y se estima que aproximadamente el 60% de las erupciones en el mundo entero han sido acompañadas por tremor. Se ha determinado que del total de casos reportados de tremor en el mundo, el 70% tienen una duración de 1 a 59 minutos, 25% de 1 a 23 horas, 12% de 1 a 6 dias y el resto más de una semana. También se ha encontrado un aumento en la amplitud del tremor (manteniendose la frecuencia espectral constante) durante los periodos de erupción; y por ejemplo que ,el 23% de los episodios de tremor en el volcán Pavlof han ocurrido durante las erupciones, el 42% 10 dias antes de las erupciones, 16% 10 dias después de las erupciones y el resto en periodos de no erupciones, esto sugiere que el monitoreo de tremor puede ser usado para determinar si una erupción esta por llevarse a cabo, este último punto es desde luego de una gran importancia desde el punto de vista social.

APENDICE

En este apéndice se definen brevemente algunos de los términos empleados en el trabajo; para una información más detallada al repecto ver por ejemplo Båth, M.,(1968). Los textos citados están tomados de Nava, A., (1987). Uno de los términos empleados, es el de sismograma: este término lo podemos definir como un registro gráfico del desplazamiento del suelo. Otro de los términos usados es magnitud, "C. Richter definió, en 1935, el concepto de magnitud pensando en un parámetro que describiera, de alguna manera, la energía sísmica liberada por un terremoto . . . Existen varias formulas que relacionan la magnitud de un sismo con su energía; diferentes formulas son aplicables en diferentes lugares o suelos.". Respecto al valor de b este apareció durante los primeros estudios estadísticos de sismicidad realizados por Gutemberg y Richter en 1954 ". . . Ambos estudiaron los datos disponibles en todas las regiones de la Tierra y encontraron que el número N de sismos mayores de una magnitud M que ocurren en un determinado tiempo, es función de la magnitud: "

$$\text{Log } N = \text{Log } c - b\, M$$

donde c es una constante que depende del tiempo de muestreo y b es una constante que tiene valores característicos para distintas regiones de la Tierra y tipos de sismos.En cuanto a las ondas sísmicas se tiene que: " . . . Las ondas compresionales son las que se transmiten cuando las partículas del medio se desplazan en la dirección de propagación, produciendo compresiones y dilataciones en el medio . . . Esta es la más veloz de todas las ondas sísmicas . . . y, por lo tanto, es la primera en llegar a cualquier punto, en ser sentida, y en ser registrada en los sismogramas, por lo que se le llamó onda Primaria o Primera y de allí su nombre de P. . . "

"Ondas S. Las ondas de corte o de cizalla, llamadas ondas S, son aquellas en las cuales las partículas del medio se desplazan perpendicularmente a la dirección de propagación, por lo que están asociadas con deformaciones del terreno tipo de cizalla . . . La onda S es más lenta que la onda P . . . Como es la segunda en llegar se le llamo secundaria de allí su nombre . . . Como los líquidos no soportan esfuerzos cortantes, las ondas S no se propagan a través de ellos. El desplazamiento de las partículas en el terreno puede ser en cuaquier direccion perpendicular a la de propagación ". La componente vertical de la onda S se denota por SV y la horizontal se denota por SH.

Además de las ondas que viajan a través del terreno existen otras que lo hacen por la superficie, es decir, que su aplitud es máxima en ésta y nula en las grandes profundidades.

"Ondas de Raileigh. Estas, denotadas usualmente por R, o LR cuando son de periodo muy largo, se deben a la interacción entre las ondas P y SV, y el movimiento de cada partícula de la superficie del terreno al paso de la onda se da en forma de elipse retrograda

"Ondas de Love . . . son las denotadas usualmente por L, o G o LQ si son de periodo muy largo. Se comportan de manera muy parecida a la descrita para las ondas de Rayleigh, pero se deben a la interferencia constructiva de ondas SH solamente, por lo que no pueden existir en un semiespacio, sino que requieren al menos de una capa sobre un semiespacio, donde pueda quedar atrapada parte de la energía sismica. "

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

BIBLIOGRAFIA

AKI , K., FEHLER , M. AND SHAMITA , D., 1977 , *Source mechanism of volcanic tremor : Fluid driven cracks models and their application to the 1963 Kilauea eruption* . , J. Volcanol. Geotherm. Res. , 2 : 259-287 .

AKI,K.,B. CHOUET, M. FEHLER, G. ZANDT, R. KOYANAGI, J. COLP, AND R.G. HAY , 1978 , *Seismic properties of a shallow magama reservoir in Kilauea Iki by active and passive experiments* . , J. Geophyis. Res. ,83 : 2273- 2282.

AKI , K. , 1984 , *Evidence for magma intrusion during the Mammoth Lakes of may 1980 and implications of the absence of volcanic (harmonic) tremor* . , J. Geophys. Res. , 89 : 7689 - 7696 .

AKI , K. ,KOYANAGI ,R. , 1981 , *Deep volcanic tremor and magma ascent mechanism under Kilauea , Hawaii* . , J. Geophys. Res. , 86 (B8) : 7095 - 7109 .

ARAÑA ,G.,V. Y ORTIZ ,R.,R. , 1984 , *Volcanologia* , Consejo Superior de Investigaciones Cientificas y Editorial Rueda .

BÅTH , M., 1968 , *Mathematical aspects of seismology* , Elsevier Publishing Co. L.T.D. England .

BÅTH , M., 1974 , *Spectral analysis in geophysics : Developments in solid earth geophisics (7)* , Elsevier Publishing Co.

BRACEWELL , R. , 1965 , *The fourier transform and its applications* , Mc. Graw-Hill Book Co.

BROTOPUSPITO , S. ,K. , 1983 , *Analysis and interpretation of volcanic tremor at Etna* , Publication N° 210 , Institute of Geophisics University of Stuttgart .

BUTKOV , E. , 1968 , *Mathematical physics* , Addison-Wesley Publishing Co.

CHENG , K. ,D. ,1963 , *Analysis of linear systems* , Addison-Wesley Publishing Co. Inc. Co. Inc.

CHOUET , B. , 1985 , *Excitation of a buried magmatic pipe : A seismic source model for volcanic tremor* . , J. Geophys. Res. ,90 : 1881 - 1893 .

CHOUET , B. , 1981 , *Ground motion in the near field of a fluid driven cracks and its interpretation in the study of shalow volcanic tremor* . , J. Geophys. Res. , 86 (B7) : 5985 - 6016 .

ELLIOTT , D. ,F. AND RAO , K. ,R. , 1982 , *Fast transforms , Algorithms , Analyses , Applications* , Academic Press , Inc.

ERDOGAN ,F. , 1974 , *Principles of fracture mechanics* , *Continuum mechanics aspects of geodynamics and rock fracture mechanics* . , 29-44 , D. Reidel Publishing Co. and N.A.T.O. Scientific Affairs Division .

FERRICK ,M.,G.,QUAMAR,A. AND ST. LAWRENCE ,W.,F. , 1982 , Source mechanism of volcanic tremor . , J. Geophys. Res. , 87 (B10) : 8675-8683 .

FREDERIC , D. AND CHANG , T.,S. , 1972 , *Continum mechanics* , Scientifc Publishing Inc. .

FUNG , Y. C. , 1969 ,*Continuum mechanics* , Prentice-Hall Inc., Englenwood Cliff N.J.

GARLAND ,D. G. , 1971 , *Introduction to Geophysics : mantle core and crust* . , Saunders Co.

GRESTA,S., IMPOSA,S., PATANE,D. AND PATANE G. , 1987 , *Volcanic tremor at Mt. Etna : State-of-art and perspectives* , PAGEOPH , 125 (6) , 1079 - 1095 .

HAVSKOV, J.,S. DE LA CRUZ-REYNA, S. K. SINGH, F. MEDINA AND C. GUTIERREZ , 1983 , *Seismic activity related to the March-April, 1982 eruptions of el Chichon volcano, Chiapas, Mexico*, Geophys. Res. Lett., 10, 293-296.

JAEGER , J. ,C. , 1974 , *Elasticity ,fracture and flow* , Science paperbacks .

KANASEWICH , E. ,R. 1975 , *Time sequence analysis in Geophysics* . , The University of Alberta Press .

KARPIN ,T. ,L. AND THURBER , 1987 , *The relationship between earthquake swarms and magma transport : Kilauea volvano Hawaii* : , PAGEOPH , 125 (6) : 971 - 991 .

KUBOTERA , A. , 1974 , *Volcanic tremors at Aso volcano* . , En : L.Civetta , P.Gasperini , G.Luongo and A.Rapola (Editores) , *Physical Volcanology* . Elsevier , Amsterdam , :29-47

LAMB , H. , 1960 , *The Dynamical Theory of sound* , Dover publications, Inc., New York.

LATHI , B. , P. , 1974 , *Signals , Systems and Controls* . , Intext Educational Publishers , New York and London .

LATTER , J. H. , 1981 , *Volcanic earthquakes, and their relationship to eruptions at Ruapehu and Ngauruhoe volcanoes*, Jour. of Volc. and Geotherm. Res., (9), 293-309.

LORD RAYLEIGH , 1945 , *The theory of sound* , Dover Publications , New York , Vol. I .

LOVE , A. ,E. ,H. , 1944 , *A treatise on the mathematical theory of elasticity* , Dover Publications , New York .

Mc. DONALD , G. ,A. , 1972 , *Volcanoes* , Prentice-Hall Inc. Englenwood Cliffs , New Jersey .

Mc NUTT ,S., R. AND BEAVAN ,R. ,J. , 1984 , *Patterns of earthquakes and the effect of solid earth and ocean load tides at mount St. Helens prior to the may 18 ,1980, eruption* , J. Geophys. Res. , 89 : 3075 - 3086

MALONE, S. D. , 1983 , *Volcanic earthquakes: examples from Mt. St. Helens*, Earthquakes: Observation, Theory and Interpretation, LXXXV , Corso, Soc. Italiana di Fisisa, Bologna, Italy, 435-455.

MC NUTT ,S., R. , 1986 , *Observations and analisys of B-type earthquakes explosions , and volcanic tremor at Pavlof volcano , Alaska* , BSSA , 76 (1) : 153 - 175 .

MC NUTT ,S.,R. , 1987 , *Volcanic tremor at Pavlof volcano , Alaska , october 1973 - april 1966 .* , PAGEOPH , 125 (6) : 1051 - 1077 .

MINAKAMI , T. , 1974 , *Seismology of volcanoes in Japan* . ,En : L.Civetta , P.Gasperini , G.Luongo and A.Rapola (Editores) , *Physical Volcanology* . Elsevier , Amsterdam , :1-27 .

MORSE , P., M., AND INGARD , K., U. , 1968 *Theoretical acoustics.* , Mc. Graww-Hill Book Co.

NAVA, A., 1987, *Terremotos, La ciencia desde México* (34), S.E.P., Fondo de cultura económica y CONACYT.

OLLIER , C. , 1969 , *Volcanoes* , The M.I.T. Press , Cambridge , Massachusetts and London , England .

OMER , G.C. , 1950 , *Volcanic tremor* (part two: The theory of volcanic tremor) , Bull. Seism. Soc. Am., 40, 175-194.

RIUSCETTI , M., SHICK , R. AND SEIDL , D. , 1977 , *Spectral parameters of volcanic tremors at Etna* . , J. Volcanol. Geotherm. Res. , 2 : 289-298 .

SCHICK ,R. ,1981 , *Source mechanism of volcanic earthquakes.* , Bull. Volcanol . , 44 (3) : 491-497 .

SCHICK, R. , LOMBARDO , G. AND PATANE , G. , 1982 , *Volcanic tremors and shocks associate with eruptions at Etna (Sicily) , September 1980* , J. Volcanol. Geotherm. Res., 14 : 261-279 .

SEIDL , D. SCHICK , R. AND RIUSCETTI , M. , 1981 , *Volcanic tremors at Etna : a model for hydraulic origin .* , Bull. Volcanol. , 44 (1) : 43-56 .

SEZAWA , K. , 1927 , *Dilatational and distortional waves generated from a cylindrical or spherical origin* , Bull. Earthq. Res Inst. , 2 : 13-20 .

SNEDDON , I. ,N. AND LOWENGRUB , M. , 1969 *Cracks problems in the classical theory of elasticity* , Jhon Wiley and Sons Inc.

STEIMBERG , G. ,S. AND STEIMBERG , A. ,S. , 1975 , *On possible causes of volcanic tremor .* , J. Geophys. Res. 80 (11) : 1600-1604 .