

24, 78



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO.

FACULTAD DE CIENCIAS.

CURVAS GENERADAS POR MOVIMIENTO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

LILIA ROSALBA SALAZAR HERNANDEZ

MEXICO, D.F.

1988



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

I	INTRODUCCION	8
II	DESLIZAMIENTOS	12
	Ecuaciones paramétricas	
	Recta	
	Circunferencia	
III	CONICAS	35
	Elipse	
	Parábola	
	Hipérbola	
IV	RODAMIENTOS	70
	Cicloide	
	Cicloide acortada	
	Cicloide alargada	
	Epicicloide o Nefroide	
	Cardioide	
	Hipocicloide	
	Recta	
	Astroide	
V	FIGURAS DE LISSAJOUS	121
	Circunferencia	
	Recta	
	Parábola	
	Diversas	

VI	ESPIRALES	136
	Espiral logarítmica	
	Espiral de Arquímedes	
	APENDICE A	153
	APENDICE B	154
	BIBLIOGRAFIA.	161

Lo más curioso, es que todos aquellos
que estudian seriamente esta
Ciencia, caen en una especie de
pasión. Verdaderamente, lo que más
placer proporciona no es el saber,
sino el estudiar; no la posesión,
sino la conquista; no el estar aquí,
sino el llegar allá.

Gauss

INTRODUCCION

En todo el mundo que nos rodea nos encontramos con formas o curvas muy caprichosas; por ejemplo en la Naturaleza se nos presentan infinidad de formas en los árboles, en las plantas, en los cuernos de algunos animales, en las conchas, en los caracoles; en el cuerpo humano; en el universo, y no se diga en el arte, donde se han llevado a cabo bastantes estudios al respecto; en fin que podemos decir que estamos llenos de curvas, pero que entendemos por la palabra "curva".

La palabra *curva* o *curvo* se emplea a veces como adjetivo para describir lo que se aparta de la dirección recta.

Los matemáticos suelen emplear la palabra *curva* en calidad de sustantivo, como un sinónimo de línea curva. ¿Qué es una línea curva?. ¿Cómo abarcar en una definición las curvas que se trazan con lápiz o pluma en el papel o con gis en la pizarra y las curvas que describen una estrella fugaz o un cohete en el cielo nocturno?

Aceptaremos la siguiente definición, la cual nos servirá para el desarrollo del presente trabajo:

La curva (o sea la línea curva) es la traza o trayectoria que deja en su camino un punto móvil.

En base a la diversidad de curvas existentes, se ha deseado hacer una sistematización de la naturaleza de algunas curvas, sin que esto represente un examen exhaustivo de todas las curvas conocidas.

Se ha elegido su clasificación, de acuerdo con su naturaleza o construcción cinética, de ahí que este trabajo esté dividido en cinco capítulos: Deslizamientos, Cónicas, Rodamientos, Figuras de Lissajous y Espirales.

En cada uno de estos capítulos se presenta la recopilación de mecanismos conocidos y de anécdotas para su construcción, sin llevar a cabo un análisis de las causas historicos-sociales que les dieron origen, las cuales, sin lugar a dudas, son muy importantes, pero desviarían el objetivo del presente trabajo. Así mismo se lleva a cabo un análisis para la construcción matemática de cada curva.

En el capítulo de Espirales se dan sólo algunas de las situaciones u objetos en donde encontrarlas; ya que este es un tema muy amplio del cual bien podría surgir otro trabajo.

Con respecto a la graficación de algunas curvas, por ejemplo las de Lissajous o las generadas por rodamientos, hubo necesidad de utilizar una microcomputadora y el disket de CALCULUS, donde se

podía hacer variar las figuras y también apreciarlas en todo su esplendor.

Para finalizar diré que inicialmente el trabajo consistía en un texto para la materia de Análisis Vectorial de la carrera de Ingeniería Civil de la Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura del I.P.N.; de ahí el título de esta tesis; sin embargo, por ser un proyecto demasiado ambicioso para un lapso de tiempo corto, se acordó elaborar esta sistematización de curvas parametrizadas, sin que este trabajo esté enfocado a ningún área o lector en especial, sin embargo creo que sería de utilidad, como una fuente de información, para aquellas personas que se interesen en *Las curvas de la vida*.

DESLIZAMIENTOS

En esta primera sección veremos curvas que se van formando al deslizarse algunos objetos o entes sobre otros; encontrándose con curvas tan familiares como la recta y el círculo y descubriendo formas más complicadas como una cardioide*

Se analizarán algunos ejemplos mecánicos para posteriormente hacer un análisis de su construcción analítica.

Antes de llevar a cabo el desarrollo analítico se proporcionan nociones básicas del significado de las ecuaciones paramétricas de una *curva* las cuales se utilizarán en el presente trabajo y de acuerdo a la definición de *curva* proporcionada en la Introducción. *(la curva (o sea la línea curva) es la traza o trayectoria que deja en su camino un punto móvil).*

Veamos el siguiente ejemplo mediante el primer procedimiento mecánico.

Circunferencia:

Supongamos que una regla, de longitud d está situada, en uno de sus extremos, sobre el suelo y apoyada del otro extremo en la pared y fijamos el punto medio de la regla y dejamos que ésta se

*su construcción analítica se hará en el capítulo de Rodamientos.

deslice hasta caer al suelo. ¿qué curva describirá el punto fijado? (fig. 2.1)

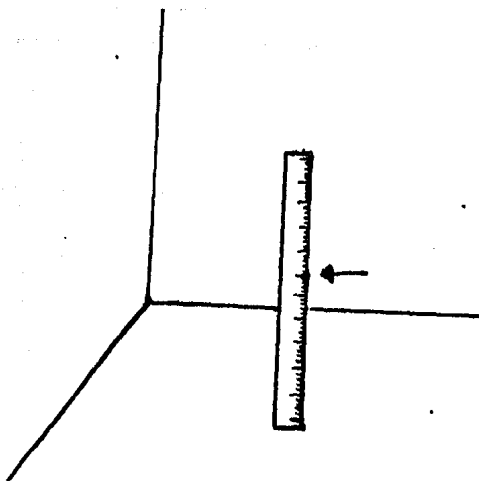


fig. 2.1

Supongamos ahora que se fija el punto desde que la regla forma un ángulo recto con el suelo, hasta que cae. (fig. 2.2)

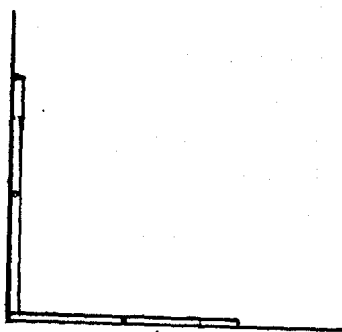


fig. 2.2

Conforme va cayendo irá describiendo cierta curva. (fig. 2.3)

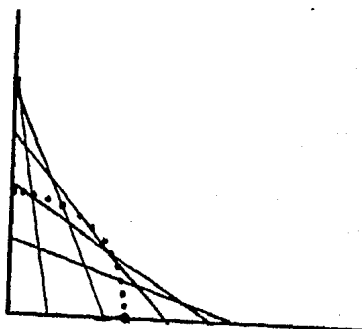


fig. 2.3

Graficamente vemos que la curva encontrada es el arco de una circunferencia cuyo radio es $d/2$ y el centro se encuentra en la esquina entre la pared y el suelo, cuyo vértice podemos determinar como origen.

Elipse

Veamos que pasa si el punto fijado no es el punto medio de la regla sino cualquiera que estuviera desplazado a uno de los extremos.

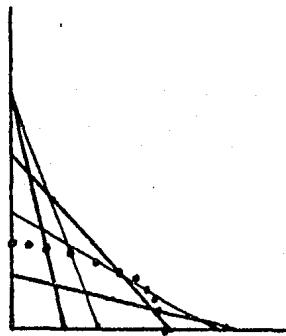


fig. 2.4

De la figura anterior vemos que nuestro arco de circunferencia se convierte en un arco de elipse.

Segmento de Recta:

Veamos otros problemas. ¿Qué línea describirá el punto medio de un segmento entre dos personas que marchan uniformemente por dos caminos rectos?

Llamemos A y B a las dos personas y supongamos que los caminos que llevan son paralelos.

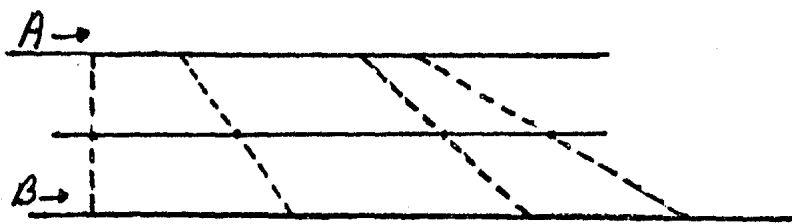


fig. 2.5

Podemos ver que mientras A y B se desplazan, cada uno por su camino, los puntos medios de los segmentos que los unen van describiendo un segmento de recta.

Consideremos ahora el caso en el que los caminos se intersectan.

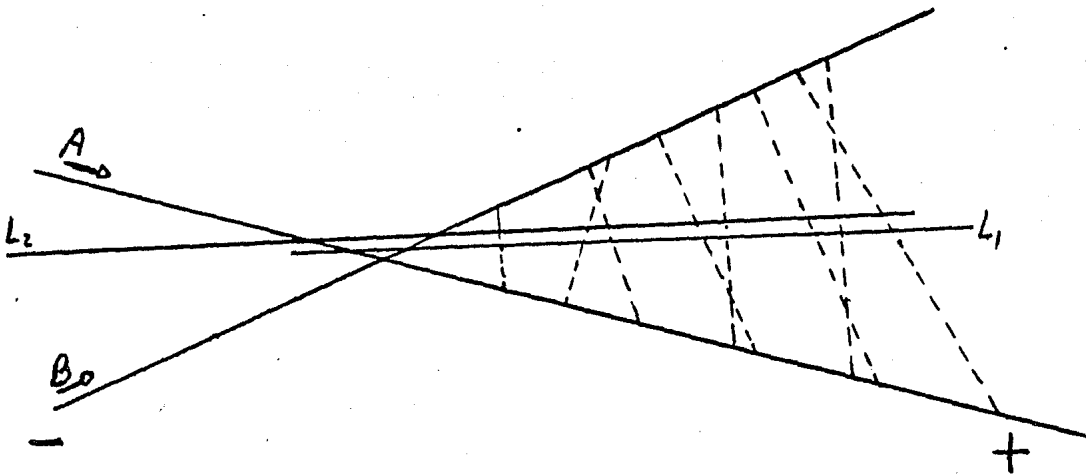


fig. 2.6

Vemos graficamente que al desplazarse A y B uniformemente, es decir si los dos avanzan hacia la parte positiva, los puntos medios de los segmentos que los unen me darán la recta L_1 ; y si los dos avanzan hacia la parte negativa me dará la recta L_2 que es paralela a L_1 .

Continuando con los ejemplos mecánicos de donde podemos encontrar esta clase de curvas analicemos el siguiente ejemplo.

Un triángulo rectángulo de madera se desliza por el plano, de forma que los vértices A y B de sus ángulos se mueven por los lados de dado ángulo recto del plano. ¿Cómo se moverá el vértice del ángulo recto de dicho triángulo?

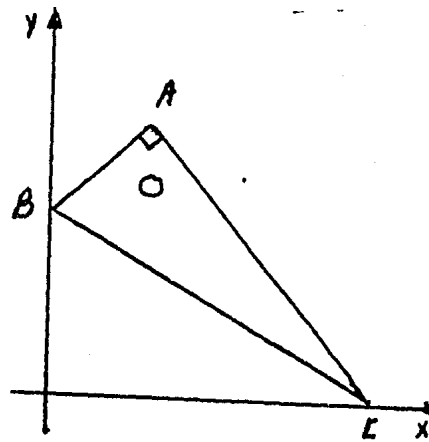


fig. 2.7

Llamemos a los ejes del plano X e Y y supongamos que la hipotenusa está pegada al eje Y hasta deslizarse al eje X .

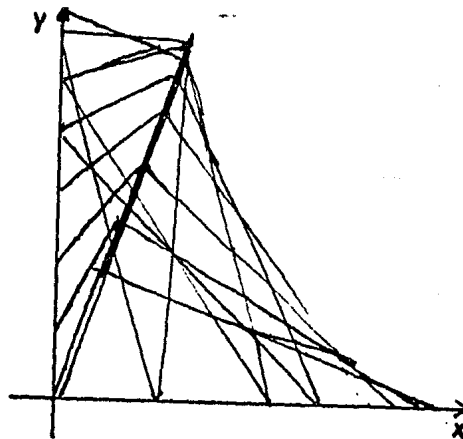


fig. 2.8

Vemos que el vértice del ángulo recto del triángulo rectángulo se mueve por un segmento de recta que primero sube y luego vuelve a bajar.

Circunferencia

Siguiendo con ejemplos para generar curvas por desplazamientos, supongamos ahora que sobre una mesa hay dos relojes planos. Uno y otro andan con exactitud. ¿Por qué línea se traslada el centro M del segmento que une los extremos de sus agujas minuterías?

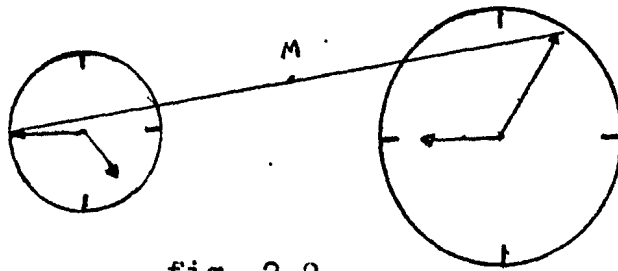


fig. 2.9

Si trazamos una recta del origen de las manecillas de un reloj al otro y obtenemos el punto medio que llamaremos O y sean P y Q las posiciones originales de las manecillas y obtenemos el punto medio M , entonces estaremos viendo la siguiente figura: 2.10

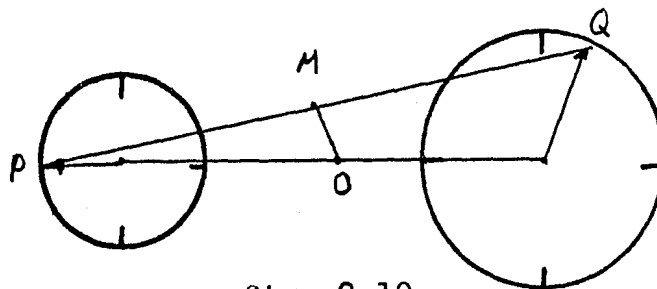


fig. 2.10

Ahora unimos los dos puntos medios por el segmento OM ; como los dos relojes andan con exactitud, entonces mientras que uno recorre quince minutos el otro también los tendrá que haber recorrido, por lo tanto el segmento OM también girará. (fig. 2.11)

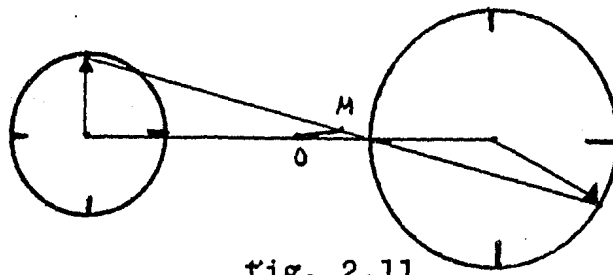


fig. 2.11.

Lo cual indica que la curva descrita será un círculo de radio OM .

Continuando con el círculo pensemos en un punto P que se desplaza sobre un plano de tal manera que la distancia entre el punto P , que se desplaza, y un punto fijo C es constante, entonces el punto estará describiendo una circunferencia.

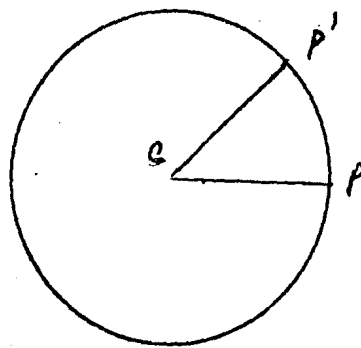


fig. 2.12

Segmento de Recta:

Tomemos ahora un plano XY y sean el punto P , que se desplaza sobre dicho plano XY , y dos puntos fijos F_1 y F_2 sobre el eje X y hagamos que las distancias de P a F_1 y de P a F_2 sean iguales, entonces tendremos que P describirá una recta.

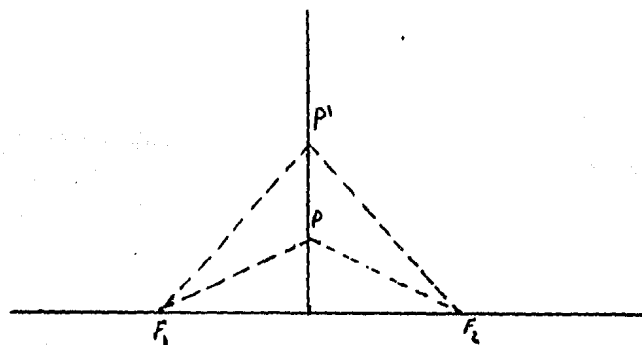


fig. 2.13

La recta y la circunferencia son las curvas más sencillas sin embargo son las más notables por sus propiedades.

Circunferencia:

Modificaremos las condiciones de nuestro ejemplo anterior, es decir, conservaremos el punto P como punto que se desplaza pero ahora la distancia al punto F_1 será, por ejemplo, dos veces mayor que la distancia al punto F_2 .

Supongamos que la primera distancia entre P y F_2 es uno, entonces la distancia entre F_1 y P será dos. Podemos observar que el resultado es una vez más una circunferencia.

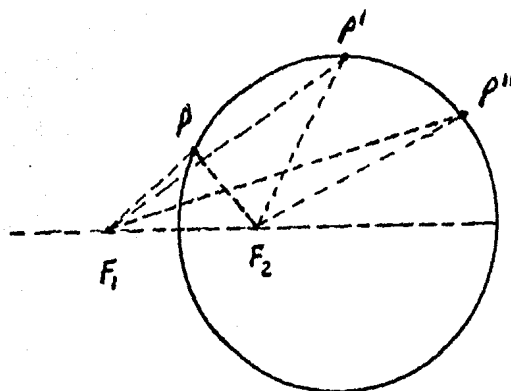


fig. 2.14

No se piense que las únicas curvas que se pueden generar por desplazamientos son la circunferencia y la recta. Analicemos el siguiente problema que nos proporciona una curva bastante diferente.

Cardioides*:

Tenemos un varilla de longitud $2r$ que se mueve en el plano vertical de tal modo que su extremo inferior se apoya sobre el fondo de un hoyo semicircular de radio r y, además, tiene tangencia con un borde del hoyo.

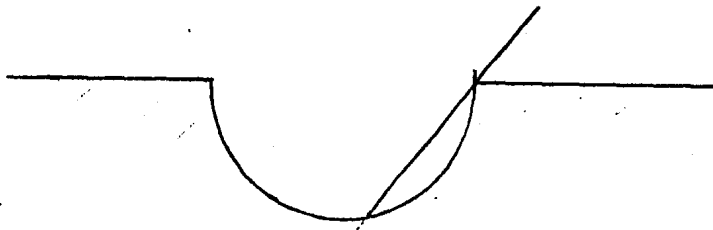


fig. 2.15

Veamos que sucede con los extremos del palo mientras éste se desliza por el semicírculo.

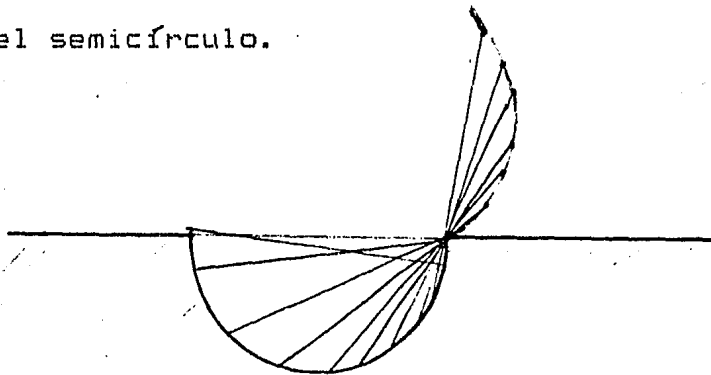


fig. 2.16

* La construcción analítica de esta curva se hará en el capítulo de Rodamientos.

La trayectoria que van dejando los extremos se conoce como cardioide.

Esta curva también se forma al rodar objetos y fijar un punto, por tal motivo su construcción analítica y más ejemplos de su formación se harán en el capítulo de Rodamientos.

Construcción Analítica:

Veremos ahora lo que es la cuestión analítica; es decir veremos matemáticamente como se van conformando las curvas que vimos anteriormente.

Ecuaciones Parametricas:

Antes de llevar a cabo ese análisis se dará una breve introducción a las ecuaciones paramétricas, siendo éstas las ecuaciones que describen la gráfica de un punto en movimiento.

Para empezar todos sabemos que para localizar un punto en el plano necesitamos de dos componentes u ordenadas (x,y) ; es decir, tendríamos una función:

$$y = f(x).$$

Sin embargo existen funciones que a su vez dependen de otra variable; veamos el siguiente párrafo:

Por desgracia, en la vida no ocurren estas cosas de un modo tan sencillo, y los efectos no obedecen nunca a una sola causa, como

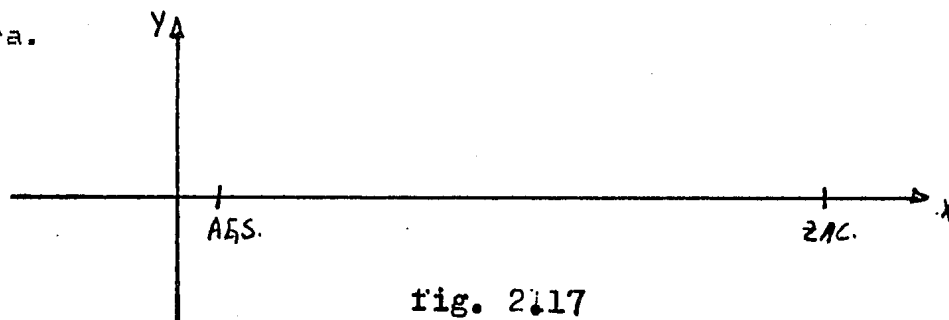
aquí, en donde la Y era una consecuencia de la X solamente, igual que en las novelas malas, en las que cada episodio esta justificado por un sólo móvil: la avaricia, el instinto criminal del malvado o el sentido de justicia, o el valor del heroe. Si, si; pero en la realidad... Dos almas ¡ay! viven en mi pecho, decía el gran poeta Fausto, y en ello tenemos un ejemplo psicológico de una función con dos variables. En la misma Geometría Analítica vemos que la posición de un punto en el plano dependía de dos variables X e Y . De la Física podemos tomar un segundo ejemplo: si se encierra un gas en una pequeña cápsula y se eleva la presión exterior, el volumen de áquel se reduce; la cápsula se contrae. Este es el caso, por ejemplo, de los barómetros aneroides, en cuyas cápsulas se ha hecho practicamente el vacío y contienen muy poco gas. El volumen V es, pues, una función de la presión p . Pero sabemos también que dicho volumen varía con la temperatura t . Casi todos los cuerpos se dilatan cuando se les calienta, y; por consiguiente, el volumen será también una función de la temperatura. Calentando un barómetro lo suficiente, la aguja empezará a moverse y a marcar un volumen mas elevado. En realidad, las indicaciones del barómetro, esto es el volumen de las cápsulas, que son las que constituyen el órgano sensible de medida, depende de dos variables independientes: p y t . Al igual que el ejemplo del párrafo anterior, extradido de un libro; (La magia de los numeros - Dr. Paul Karlson) en nuestra vida diaria se nos presentan muchas funciones como éstas.

El siguiente ejemplo proporciona otra visión de este tipo de ecuaciones.

Todos sabemos que la temperatura en la República Mexicana varía, a veces bastante, dependiendo del lugar donde la midamos.

Supongamos que queremos describir en el plano XY las diferentes temperaturas que registran las capitales de cada uno de los estados de la República Mexicana en determinado día.

Supongamos que el eje X representa el lugar y el eje Y la temperatura.



Pero notemos, también que dichas temperaturas dependen del momento en el que sean medidas, es decir que: la temperatura en Aguascalientes no será la misma si la tomamos a las cero horas o las doce del día; lo mismo para Chihuahua o Zacatecas o cualquier otro lugar.

Entonces digamos que t representará el lapso en el cual se van a tomar dichas temperaturas, esto es que t podrá variar entre cero y veinticuatro horas por dar un intervalo de tiempo.

Esto quiere decir que X depende de t y Y depende de t ; entonces tendremos la pareja ordenada $(X(t), Y(t))$ que nos determinará un punto en el plano.

Al número t que varía en un intervalo, $0 \leq t \leq 24$ para este ejemplo, se le conoce como parametro, siendo entonces $(X(t), Y(t))$ las ecuaciones paramétricas.

Veamos otro aspecto muy importante de estas ecuaciones.

Aunque nos fijáramos sólo en una de las capitales, la temperatura variaría dependiendo del tiempo, es decir que estas ecuaciones involucran siempre que existe un movimiento.

Es decir si quisieramos describir el camino que va dejando una partícula en un intervalo de tiempo, también tendríamos unas ecuaciones paramétricas.

Ya se había mencionado que el camino que va dejando o describiendo un punto móvil se conoce como trayectoria o trazo.

Segmento de Recta:

Supongamos ahora que tenemos una partícula que se desliza a lo largo del eje positivo X , es decir, se mueve sobre X , y que t varía entre 0 y 1 hora; si dividimos el eje X en 60 minutos, entonces:

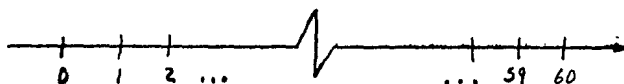


fig. 2.18

La trayectoria que irá describiendo la partícula mientras t va aumentando de 0 a 60 es un segmento de recta contenido en el eje X ; si dejamos que t aumente indefinidamente, lo que tendremos es la recta del eje X , (el lado positivo).

Entonces podemos decir que las ecuaciones paramétricas de esta recta son $X(t) = t$, $Y(t) = 0$ o bien: $(X(t), Y(t)) = (t, 0)$

Si ahora suponemos que se mueve a lo largo del eje Y y no de X , tendremos entonces que t describirá el eje Y siendo las ecuaciones paramétricas de esa recta $X(t) = 0$, $Y(t) = t$ ó $(X(t), Y(t)) = (0, t)$.

Hasta aquí hemos visto las ecuaciones paramétricas de una recta paralela al eje X y las ecuaciones paramétricas de otra recta paralela al eje Y .

Supongamos ahora que nuestra partícula se desplaza sobre el plano. ¿Qué trayectoria describirá si t varía en el intervalo $[0, 1]$, y además sabemos que: $X(t) = t = Y(t)$?

Entonces esto significa que en el momento cero la partícula se encuentra en el origen; después de cinco minutos se encontrará en $(X(5), Y(5)) = (5, 5)$; a la media hora la partícula se encontrará en:

$(X(30), Y(30)) = (30, 30)$; si hacemos los mismos cálculos hasta que haya transcurrido toda la hora veremos que la partícula se ha desplazado sobre una línea recta, pero ¿quién es y dónde se encuentra esta línea recta?

Fues lo antes propuesto no es otra más que la recta identidad.

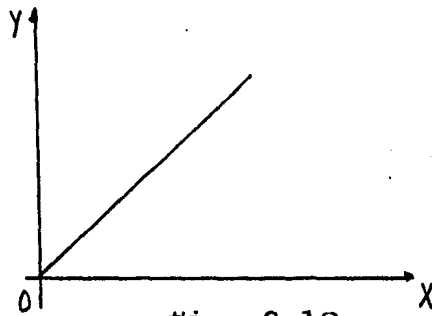


fig. 2.19

Analicemos el caso cuando se presentan las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x(t) = at + b ; y(t) = dt + e$$

donde a, b, d, e son constantes.

Antes de continuar se dirá que trabajaremos casi siempre en el intervalo $[0,1]$ para t ; en las funciones donde sea otro intervalo se hará mención oportunamente.

Después de lo anterior podemos preguntarnos ¿Cuál es el lugar geométrico, el trazo o trayectoria, que conforman todos aquellos puntos tales que:

$$(x(t), y(t)) = (at + b, dt + e)$$

Supongamos ahora que $b=0$, entonces esto implica que lo que tenemos en $x(t) = at$ y en $y(t) = dt + e$. Si a es igual a 1 entonces vemos que t se empieza a mover sobre el eje X . Si e también es igual con cero y $d = 1$ tendremos otra vez la recta identidad, pero ¿qué pasa si a y d son otros números cualesquiera, distintos de 0 y 1?

Supongamos que $a = d = -1$ entonces si $t = 1/4$, esto implica que:

$$x(t) = -(1/4), y(t) = -(1/4)$$

$$\text{Si } t = 1/2, \text{ entonces } x(t) = -(1/2), y(t) = -(1/2)$$

Tendremos entonces la recta identidad pero a partir de $a = d = -1$ hasta el origen. Esto quiere decir que otra vez tenemos un segmento de recta.

Supongamos ahora que b y e son distintos de cero, entonces, démosle a a y a d cualquier valor. Sea $a=2$, $b=3$, $d=2.5$ y $e=3.5$, entonces si

$$t = 1/4, x(t) = 3.5, y(t) = 4.125$$

$$t = 1/2, x(t) = 4, y(t) = 4.75$$

$$t = 3/4, x(t) = 4.5, y(t) = 5.375$$

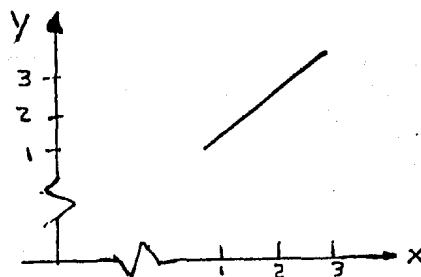


fig. 2.20

Graficamente vemos que la recta se recorre sobre el plano xy.

En conclusión podemos decir que:

$$x(t) = at + b, y(t) = dt + e$$

son las ecuaciones paramétricas de una recta; y que aparecerá en cualquier cuadrante del plano cartesiano, dependiendo de los valores que tomen las constantes a, b, d, y e.

Hagamos ahora un poco de álgebra; sabemos que las dos componentes depende del tiempo t, entonces podemos escribir:

$$\frac{x - b}{a} = t; \frac{y - e}{d} = t$$

como ambas son iguales a t entonces:

$$\frac{y - e}{d} = \frac{x - b}{a}$$

entonces:

$$ay - ae = dx - db$$

$$ay - dx - ae + db = 0$$

Escribiendo lo anterior en una forma más familiar y considerando que a, b, d, y e son constantes, entonces:

$$dx + ay + c = 0$$

lo cual indica que hemos llegado a la ecuacion cartesiana de la recta.

Si escribimos a y en funcion de x tendremos:

$$y = (d/a)x + c/a$$

si llamamos a $(d/a) = m$ y a $(c/a) = b$ entonces:

$$y = mx + b$$

siendo esta la ecuación pendiente intersección de una recta.

Con esta última ecuación hemos llegado a obtener una expresión del tipo de $y = f(x)$, a partir de las ecuaciones paramétricas de una recta.

Circunferencia:

Supongamos ahora que una partícula se mueve sobre una trayectoria que tiene siempre la misma distancia a partir de un punto dado.

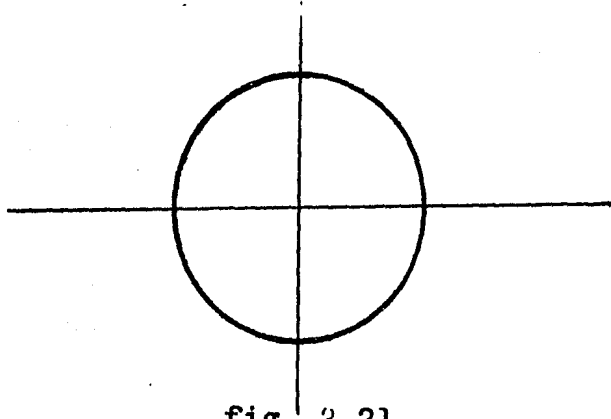


fig. 2.21

Sin lugar a duda se intuye una definición del círculo; es decir que, mientras t se mueve en cierto intervalo, la distancia entre el centro y cualquier punto de la trayectoria es constante.

Veamos ahora cuales podrían ser las ecuaciones paramétricas de esta curva tan familiar.

Supongamos que la distancia d entre el centro del círculo y la trayectoria es 1; es decir que tenemos un círculo C de radio $r = 1$

propongamos entonces que las ecuaciones paramétricas del círculo sean las siguientes:

$$x = \cos t ; y = \sin t , \text{ donde } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Pero ¿por qué precisamente estas funciones y no otras?

Bueno, en primera instancia por que si tuvieramos un punto P sobre el círculo C para localizarlo necesitamos las componentes x e y.

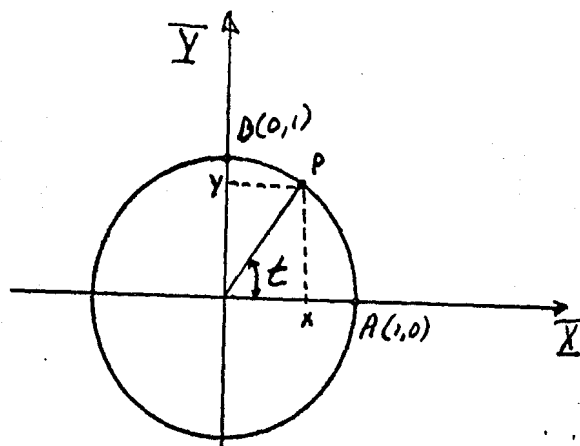


fig. 2.22

Si interpretamos a t como el ángulo que forma el radio que pasa por P, entonces: (fig. 2.22)

$$\cos t = x/r , \text{ y } \sin t = y/r$$

pero $r = 1$ entonces resulta que:

$$\cos t = x ; \sin t = y$$

Por otro lado si $t = 0$, entonces $\cos 0 = 1$ y $\sin 0 = 0$ esto implica que estaríamos en el punto A; si $t = \pi/2$ entonces :

$$\cos \pi/2 = 0 \text{ y } \sin \pi/2 = 1$$

y estaríamos en el punto B

Si t continua tomando valores hasta 2π entonces se habrá concluido una vuelta al círculo unitario.

Otra razón para decir que estas funciones son las ecuaciones paramétricas de un círculo es el siguiente argumento matemático:

Si

$$x = \cos t, y = \sin t$$

elevando al cuadrado tenemos:

$$x^2 = \cos^2 t, y^2 = \sin^2 t$$

si sumamos ambas ecuaciones obtenemos:

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

esto implica que:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Obteniendo así la ecuación cartesiana del círculo. Pero esta ecuación también puede depender de x , es decir:

$$y = (1 - x^2)^{1/2}$$

Vemos que hemos llegado a una expresión de la forma $y = f(x)$, al igual que en el caso de la recta, que a partir de las ecuaciones paramétricas obtuvimos la ecuación cartesiana, hasta llegar a una expresión del tipo $y = f(x)$.

Sin duda alguna y basándonos en los resultados obtenidos podríamos decir que cualquier ecuación que podamos expresar en la forma $y =$

$f(x)$ podemos parametrizarla, es decir obtener sus ecuaciones paramétricas para cierto intervalo donde se moverá t .

No es necesario que la letra t represente al *parámetro* puede ser cualquiera, por ejemplo, s , w , etc.

Algunas veces es más fácil trabajar con las ecuaciones paramétricas que con las cartesianas. Ejemplo de esto lo veremos con las siguientes curvas.

Después de este análisis ya podemos relacionar las ecuaciones vistas anteriormente con las curvas que vimos.

En el primer ejemplo, vimos que al resbalar una regla sobre la pared, y fijar el punto medio en la escalera, se generaba una circunferencia, cuyas ecuaciones paramétricas son: $X(t) = \cos t$
 $Y(t) = \sin t$. Sin embargo al fijar otro punto que no fuera el punto medio, vimos que la curva generada fue una elipse, cuyas ecuaciones veremos en el siguiente tema, que es el de cónicas.

Así mismo en el ejemplo de los relojes se generó una circunferencia, donde las ecuaciones paramétricas son las mismas.

También vimos en el ejemplo de las dos personas que caminan en línea recta que se generaban rectas cuyas ecuaciones hemos visto.

En conclusion este capítulo nos ha servido para echar a volar nuestra imaginacion e idear algunos otros mecanismos de donde poder encontrar figuras simples, que al moverse el punto que la traza, revelarán distintas propiedades o conformarán diferentes familias, así mismo podemos encontrar en situaciones complejas a curvas tan conocidas como la circunferencia o una recta.

CONICAS

Hablaremos ahora de las *cónicas*, de cómo se van generando estas curvas a partir de movimientos mecánicos, como el método del jardinero; también se verán algunas de sus propiedades y de su construcción analítica, en donde se deducen sus ecuaciones cartesianas.

Otro aspecto interesante es que casi nunca vemos estas curvas como cónicas; con más precisión si nos preguntan que curva es la siguiente:

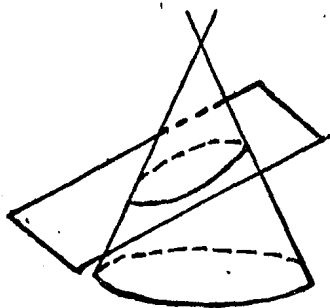


fig. 3.1

diremos que es una elipse, pero ¿dónde están los focos? ¿Satisfacerá la definición de elipse?. Las otras cónicas, la hipérbola y la parábola se encuentran en la misma situación.

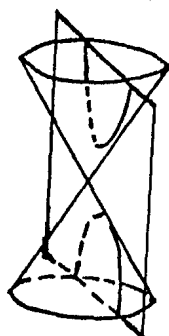


fig. 3.2

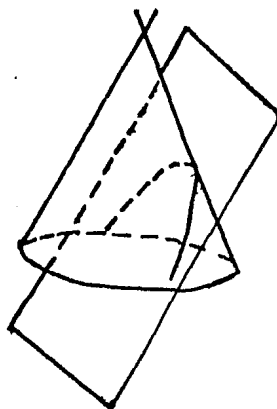


fig. 3.3

Para poder responder a estas preguntas veremos también la solución que dió Pierre Dandelin (1794-1847).

Veamos que nos dice la historia acerca de las *secciones cónicas*.

Su descubrimiento se atribuye a Menecmo, discípulo de Eudoxo, pero es a través de Pappus por quien se sabe que Euclides también escribió al respecto.

De los griegos, quien produce el trabajo más importante es Apolonio de Perga, apodado Epsilon, quizá por ser el número del aula donde habitualmente hacía sus disertaciones; escribió ocho libros sobre las cónicas que han sido conservados hasta nuestra época, los cuatro primeros en griego y los cuatro últimos en árabe.

Comenzaremos por platicar una anécdota sobre el trazo de la elipse al que se le conoce como el Método del Jardinero.

Elipse:

Toussaret, jardinero de la corte de Luis XVI de Francia, pasó a la historia, sin darse cuenta, por haber proporcionado un método para construir la elipse.

Imaginemos a Toussaret en un caluroso día de verano, arrastrando taciturno su carretilla por el parque de Versalles, con los útiles

de trabajo para plantar en un rincón un macizo redondo de unas flores raras que los colonos de Quebec habían enviado al Rey.

En el lugar asignado, encontró también una estaquilla en el sitio donde el maestro quería que estuviese el centro. Además, le había dicho que el diámetro había de tener seis pasos de longitud y como Toussaret no era precisamente famoso por su buena memoria, lo primero que hizo fue medir los seis pasos antes de que se le olvidara el numero. Se dispuso a preparar la cuerda con la que iba a trazar el círculo. Conviene saber que a los jardineros les resulta cómodo utilizar la cuerda doble y variar su longitud mediante un nudo; así resulta un gran lazo, con el que se rodea la estaquilla; después se introduce en el el aguijón y con este se va trazando el círculo. Así lo hacía también Toussaret; sólo que la desgracia, o la fortuna, como se le quiera llamar, hizo que el lazo que nuestro hombre arrojara a la estaquilla se enganchara también en un esqueje o tallo aislado, situado un par de pasos más allá y que -dicho sea en descargo de Toussaret- muy bien podía pasar inadvertido a cualquiera.

Toussaret fue lo bastante ciego como para no darse cuenta, y trazo tranquilamente su línea; quitó el césped, removiendo la tierra y la estercoló a conciencia. Sin embargo cuando el maestro jardinero descubrió la figura de huevo del macizo que Toussaret había preparado se encolerizó, vociferando palabrotas pero Toussaret se había ya marchado. El escándalo distrajo de su paseo

al duque de Grandlieu y le hizo salir de sus obstinados pensamientos, que para no desentonar en esta historia de círculos frustrados, giraban alrededor de la marquesa de P, y se acercó a enterarse de lo sucedido.

Lo que vio, sin embargo, no fue un macizo deforme sino un trazo bastante gracioso:

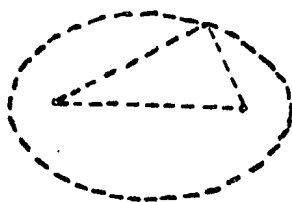


fig. 3.4

Recomendándole al maestro jardinero, frotase los adormilados ojos y admirara la armonía de la figura, dándose cuenta de que Toussaret había hecho algo realmente extraordinario.

Sin embargo, todo ocurrió como tenía que ocurrir Toussaret no se había dado cuenta de que pudiera haber hecho otra cosa que no fuera un círculo y ni aún con la mejor voluntad pudo explicar como había conseguido el trazo de aquella magnífica figura pero tuvo el firme convencimiento de que el demonio le había hecho una jugarreta.

En fin, falso o cierto, estas curvas han dado mucho que decir a varios matemáticos.

Consideremos ahora una construcción más geométrica. ¿Quién será la curva que describe el punto P si permanece constante la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados F_1 y F_2 ?

Tomemos un hilo, atemos sus extremos a dos alfileres clavándolos en una hoja de papel de modo que el hilo quede libre. Si ahora estiramos el hilo mediante un lápiz colocado verticalmente y manteniendo el hilo bien restirado, comenzamos a desplazar el lápiz apretando levemente sobre el papel, su punta P describirá una curva ovalada semejante a un círculo achatado que se conoce como elipse. (fig. 3.5)

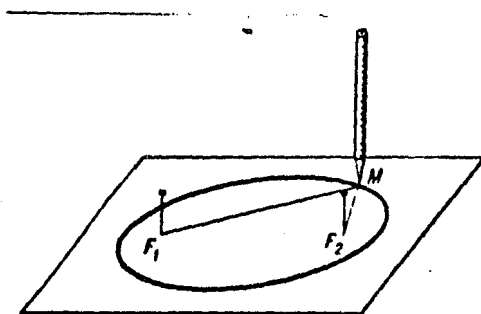


fig. 3.5

Para obtener la elipse completa, una vez trazada la mitad, habrá que pasar el hilo al otro lado respecto a los alfileres.

Es evidente que la suma de las distancias del punto P a los puntos fijos F_1 y F_2 permanece constante durante todo el tiempo; esta suma es igual a la longitud del hilo.

La elipse tiene una propiedad de reflexión, es decir si una fuente

de luz o sonido se coloca por ejemplo en F_1 , entonces los rayos o las ondas se reflejarán en el otro punto F_2 , de ahí que el nombre de estos puntos sean los de focos de la elipse.

Si encorvamos una franja estrecha metálica bien pulida, dándole la forma de elipse y colocamos en uno de sus focos una fuente de luz, sus rayos después de reflejarse en la franja, se reunirán en el otro foco y por consiguiente, en este último también se verá una fuente de luz. (fig. 3.6)

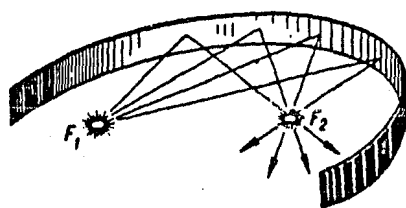


fig. 3.6

Para los amantes del billar se dice que si se construyera una mesa de billar en forma de elipse con una buchaca en uno de los focos, entonces cualquier tiro que se originara en el otro foco, sin efectos, nunca fallaría y la bola entraría siempre a la buchaca.

De manera semejante, si un techo es elíptico con dos focos en el piso pero considerablemente separados entre sí, entonces cualquiera que hable en voz baja en uno de los focos será escuchado en el otro foco. Por ejemplo, dos galerías de susurros existen en Statuary Hall en el Capitolio en Washington, D.C. y en el Tabernáculo Mormón de Salt Lake City Utah.

Otro lugar en donde encontramos esta curva es, por ejemplo, en el caso mas sencillo de que cortemos una rebanada sesgada de un embutido o cuando inclinamos un vaso con agua, la capa superior describe un elipse. (fig. 3.7)

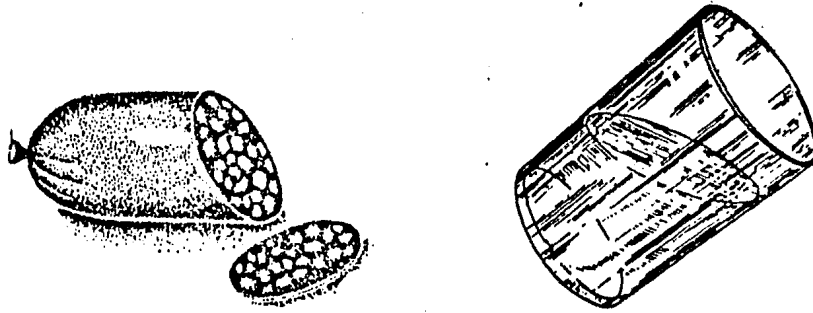


fig. 3.7

Otro ejemplo que todos conocemos es la órbita en la cual giran todos los planetas alrededor del sol, en forma de elipse. A propósito de este movimiento, se cuenta que en el siglo IV a.n.e. Eudoxio buscó una fórmula que explicara las que parecían ser trayectorias planetarias en forma de lazo.

Creyendo que los planetas describían orbitas alrededor de la tierra en círculos perfectos; pero esta teoría dejaba sin explicar las causas por las cuales los planetas palidecían y aumentaban de brillo.

En el siglo II Tolomeo ideó un sistema en el cual los planetas giraban en círculos pequeños al mismo tiempo que describían sus órbitas en torno de la tierra.

Fué hasta 1609 cuando Johannes Kepler describió correctamente las trayectorias de los planetas; sus cálculos, basados en que la velocidad de un planeta depende de su distancia al sol; indicaban que dichas trayectorias eran elípticas.*

Después de imaginarnos estas formas para generar a la elipse y de ver algunas de sus propiedades, continuemos con la parábola.

Parábola:

Para continuar con las cónicas, hablaremos ahora de la parábola.

Tracemos una recta vertical cualquiera D_1D_2 , tomemos un punto F fuera de la misma y hagamos que la punta M del lápiz se desplace de modo que en todo momento sean iguales sus distancias a la recta y al punto F

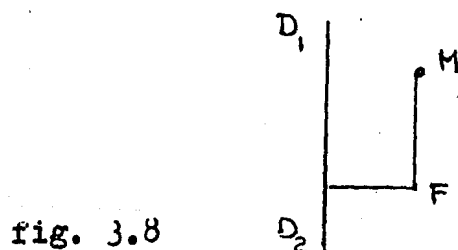


fig. 3.8

Si tomamos una regla, una escuadra y un hilo de longitud SN , y atamos al punto S de la escuadra una punta del hilo y el extremo libre del hilo a un alfiler clavado en el punto F (fig.3.9)

*Por desgracia no fue posible obtener una buena imagen.

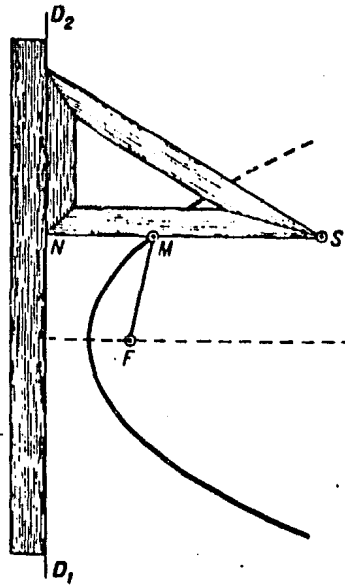


fig. 3.9

Si deslizamos la escuadra sobre la regla, es decir sobre la recta D_1D_2 ; la punta M del lápiz, que estira el hilo y lo aprieta contra la parte libre de la escuadra, estará a una misma distancia de la regla y del alfiler, es decir:

$$NM = MF$$

La punta describirá una parte de la línea llamada parábola.

Para obtener una porción mayor de esta curva, habrá que tomar una escuadra de cateto mayor y una regla más larga. La parábola consta de una rama que se extiende indefinidamente.

El punto F se denomina foco de la parábola; la recta trazada D_1D_2 se conoce como directriz, y prolongada constituye el eje de simetría de la parábola y se denomina simplemente eje de la misma.

Al igual que la elipse, la parábola también tiene la propiedad de reflexión.

Supongamos una franja metálica estrecha, bien pulida, y que tiene forma de parábola, los rayos de una fuente de luz colocada en el foco, después de reflejarse en la franja irán paralelamente al eje de la parábola. Recíprocamente si un haz de rayos paralelos al eje de la parábola incide sobre la franja en forma de parábola los rayos se reunirán después de reflejarse en su foco. (fig. 3.10).

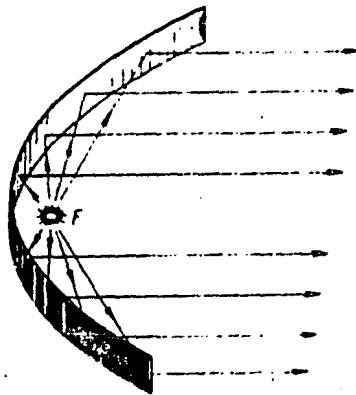


fig. 3.10

En esta propiedad de la parábola se basa el empleo de los espejos parabólicos en los faros de automóviles y en general en los reflectores. En lugar de franjas en el proceso de rectificación de estos espejos se emplean los llamados paraboloides de revolución; otro ejemplo son las antenas de microondas o antenas parabólicas.

Esta curva la encontramos en varios casos por ejemplo si lanzamos una piedra, no verticalmente, describirá una parábola; de la misma forma si se lanza un proyectil también describirá una parábola, sin embargo la resistencia del aire influirá en ambos lanzamientos, obteniéndose una parábola distorsionada; pero en el vacío, resultaría una parábola exacta.

Otros ejemplos de formas parabólicas son las de los cables principales de un puente colgante. Sin embargo un cable que cuelga libre, fijo en sus extremos, genera otra curva interesante: la catenaria.

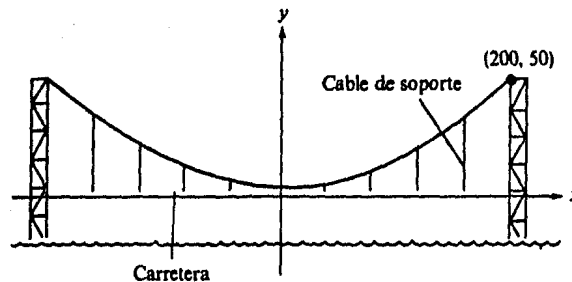


fig. 3.11

Un ejemplo más de donde podemos observar la parábola es cuando un jugador de baloncesto lanza un tiro libre hacia la canasta, la trayectoria que describe el balón es una parábola. (fig. 3.12)

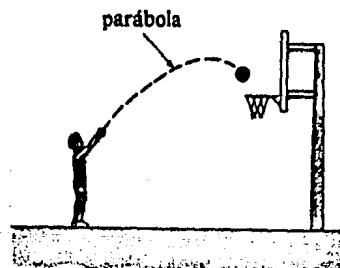


fig. 3.12

Hipérbola:

Hablaremos ahora de la última curva cónica: la hipérbola. Cuando se introdujo la elipse se habló de que permaneciera constante la suma de las distancias del punto M que describía la elipse a dos puntos fijos F_1 y F_2 .

Consideremos ahora el caso de la diferencia. Para garantizar el movimiento necesario del lápiz, clavemos dos alfileres en los

puntos F_1 y F_2 y fijemos una regla en uno de ellos de modo que ésta pueda girar alrededor del alfiler.

Tomemos un hilo, más corto que la regla, y fijemos una de las puntas al extremo S de la regla y el otro al alfiler F_2 . Estiremos ahora el hilo apretándolo contra la regla mediante la punta M del lápiz. (fig. 3.13)

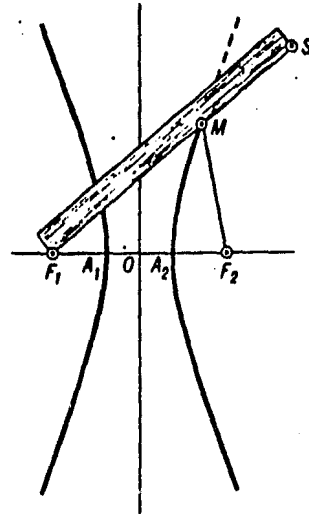


fig. 3.13

Entonces la diferencia entre las distancias MF_1 y MF_2 será igual a la diferencia entre las longitudes de la regla y el hilo, es decir:

$$(MF_1 + MS) - (MF_2 + MS) = F_1S - (MF_2 + MS)$$

Si giramos la regla alrededor de F_1 apretando contra ella el lápiz y manteniendo restirado el hilo, el lápiz describirá una curva tal que la diferencia será siempre la misma e igual a la diferencia, llamémosle m , entre las longitudes de la regla y del hilo. De esta forma obtendremos sólo la parte superior de la curva a la derecha. Para obtener la parte inferior habrá que colocar la regla de modo que aparezca por debajo y no por encima de los alfileres.

Para obtener la parte de la izquierda de la curva fijaremos la regla en F_2 , por encima del alfiler, obteniéndose otra vez la parte superior y para obtener la parte inferior del lado izquierdo procedemos como vimos anteriormente; de esta forma obtenemos lo que es la curva hipérbola, la cual se considera una sola curva.

Al igual que la parábola, la hipérbola se prolonga indefinidamente. El resultado será el siguiente:

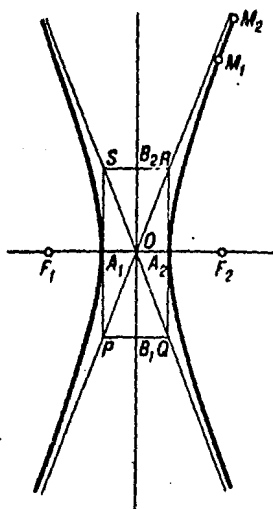


fig. 3.14

De esta gráfica se pueden ver varias cosas: que entre la curva hipérbola está inscrito un rectángulo que toca a cada una de las ramas de la hipérbola, en el punto donde estas últimas cruzan el eje X ; que la distancia entre dichos puntos y los focos de la hipérbola es la misma; que la longitud de dos de los lados del rectángulo son iguales y de la misma forma a los otros dos; que por los vértices del rectángulo y su centro pasan dos rectas y que además las ramas de la hipérbola se van plegando a dichas rectas. De aquí que existe otra forma de construir la hipérbola.

Llamaremos por su nombre a cada uno de los argumentos antes citados.

Las rectas a las cuales se pegan las ramas de la hipérbola se llaman ejes asintóticos; el punto donde se cruzan o intersectan estas asíntotas es el centro de simetría o simplemente centro. Los puntos donde la hipérbola toca al eje X se llaman vértices.

Tomemos en cuenta que: la diferencia entre las distancias del punto A_1 a F_1 y de A_2 a F_2 es la misma, es decir:

$$A_2F_1 = A_2F_2$$

Es decir que por la simetría de la hipérbola podemos escribir que:

$$A_1F_2 - A_1F_1 = m$$

$$A_1F_2 - A_2F_2 = m$$

Dicha diferencia es igual a A_1A_2 , es decir igual a la longitud del eje real de la hipérbola.

Ahora sí, tracemos primero los ejes de simetría, X,Y y tomando en X los focos F_1 y F_2 a igual distancia del centro:

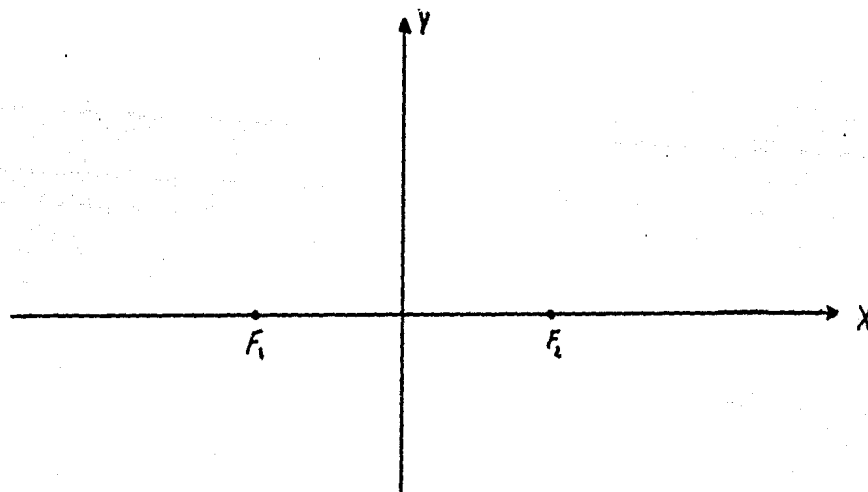


fig. 3.15

Después sobre el mismo eje se contruyen a ambos lados del centro segmentos iguales a la mitad de m o sea a la mitad de la diferencia dada entre las distancias de los puntos de la hipérbola a sus focos, obteniéndose los vértices A_1 y A_2 a la misma distancia que existe entre el origen y los vértices nos permitirán encontrar los puntos B_1 y B_2 .

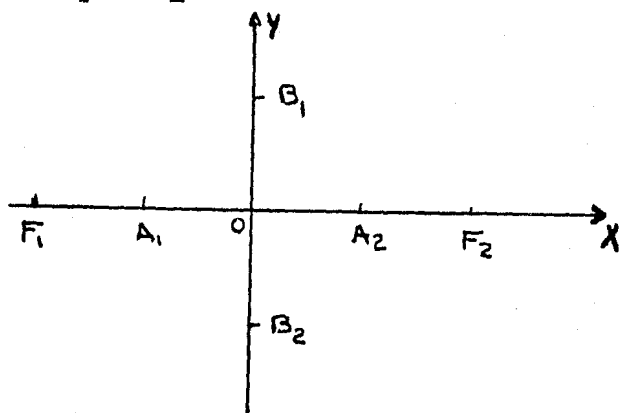


fig. 3.16

Ahora podemos construir un rectángulo PQRS y por ultimo trazar y prolongar las diagonales o asíntotas (fig. 3.17)

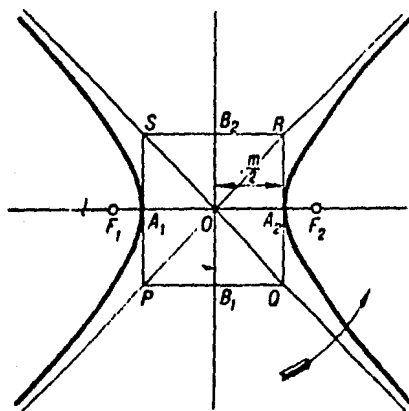


fig. 3.17

Si el rectángulo resulta un cuadrado como en el caso anterior, es decir, esto ocurre cuando las asíntotas son perpendiculares

entonces la hipérbola se denomina equilatera. (fig. 3.18)

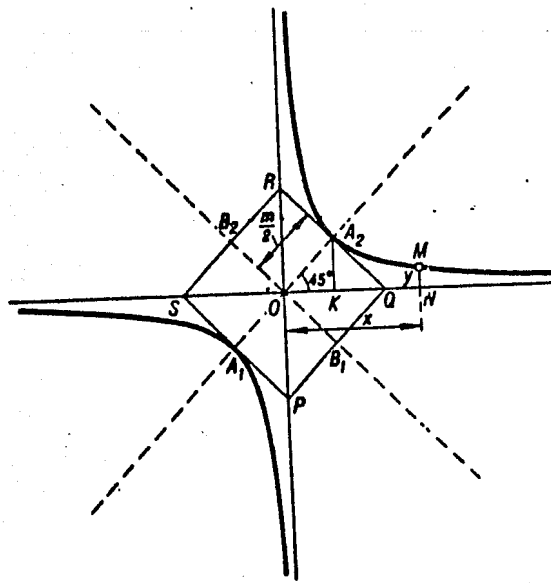


fig. 3.18

Y otra representación de la hipérbola es la no equilatera. (fig. 3.19)

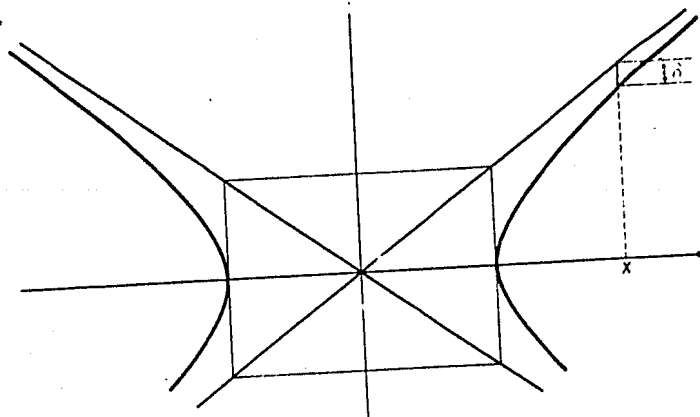
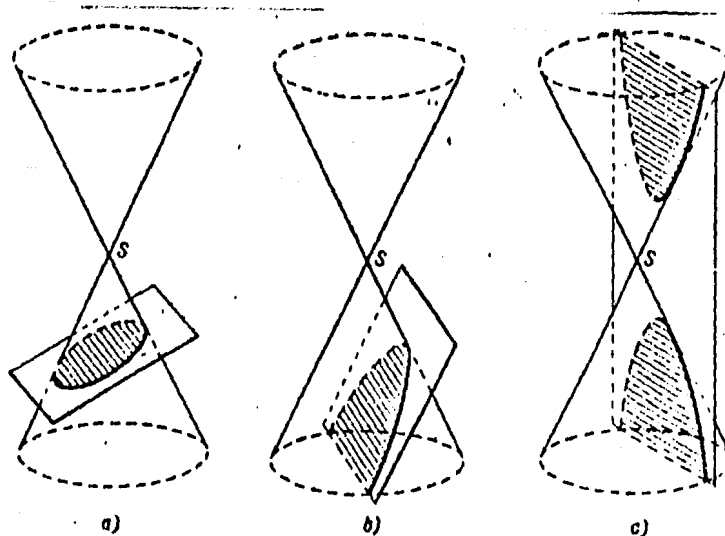


fig. 3.19

Veamos ahora que el hecho de que se les denomine secciones cónicas es porque si intersectamos un cono circular con un plano en diferentes formas obtendremos desde una circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola.



3.20

El dibujo de la figura a) nos representa a la figura completa de la elipse, en b) se presenta una parte de la parábola, es decir que tendríamos que tomar un cono y un plano paralelo a cualquier generatriz del cono que se prolongaran indefinidamente, para así obtener la figura de una parábola que se extendiera indefinidamente. Y finalmente en el c) se tiene parte de la figura de la hipérbola. Es obvio que si el plano estuviera paralelo a la base del cono, la figura sería una circunferencia de distinto tamaño dependiendo de donde se encontrara el plano; pero si intersectáramos al cono con el plano en S, solo veríamos un punto.

Esferas de Dandelin:

Otra propiedad curiosa acerca de las cónicas descubierta en 1822 por Lambert Adolphe Jacques Quetelet y Germinal Pierre Dandelin son las llamadas esferas de Dandelin.

Consideremos la elipse dada por la intersección del cono circular recto C con vértice V y plano P .

De todas las esferas con centro en el eje del cono C y tangentes a éste, hay dos que son también tangentes al plano P ; una por encima y la otra por debajo del plano. (fig. 3.21)

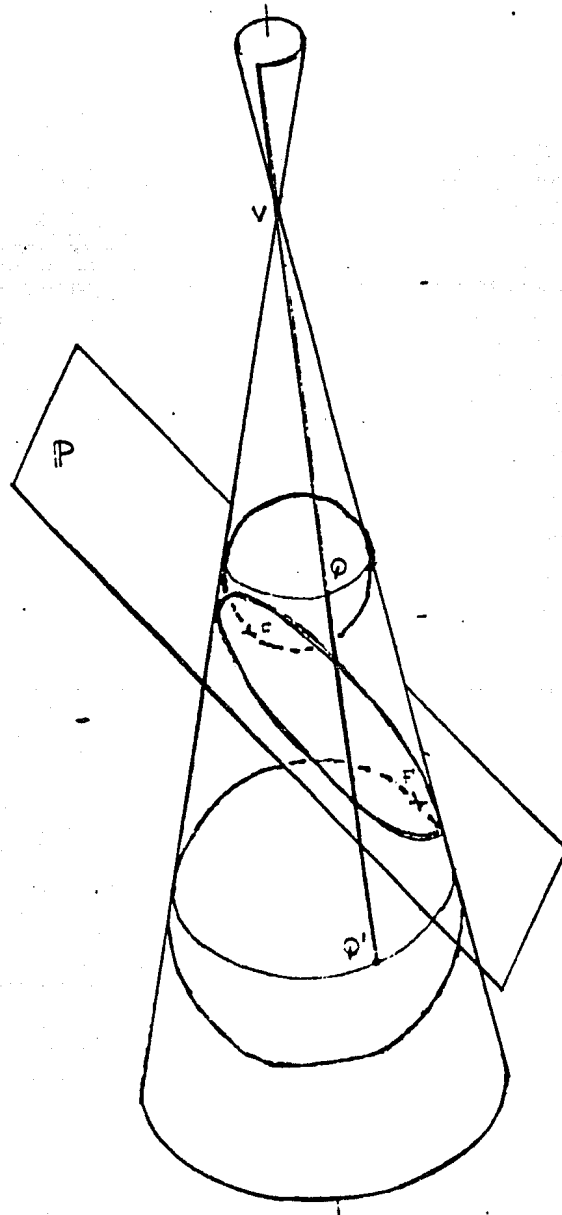


fig. 3.21

Los puntos de tangencia de estas esferas y el plano P son los focos de la elipse y la longitud del segmento de generatriz comprendida entre los círculos de tangencia de cada una de las esferas y el cono (segmento QQ') es la constante de definición.

La hipérbola: para esta curva también encontramos que los focos vienen dados por los puntos de tangencia de las Esferas de Dandelin y el plano que la contiene y la constante de la definición viene dada por QQ' . (fig. 3.22)

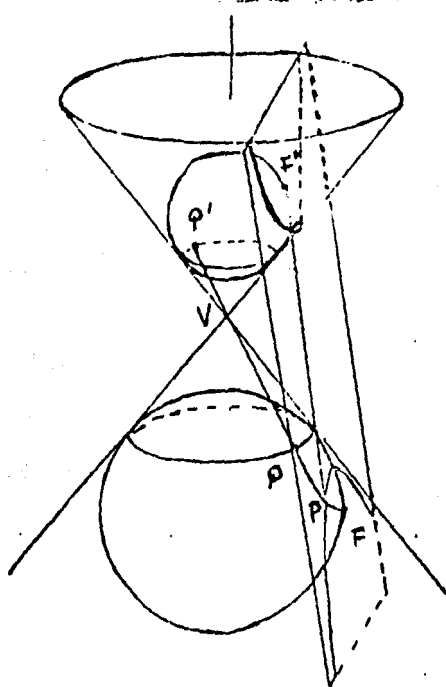


fig. 3.22

En el caso de la parábola sólo se tiene una esfera de Dandelin que se encuentra situada entre el vértice V y el plano P , su punto de tangencia es el foco F . La directriz de la parábola es la intersección del plano P y del plano que contiene al círculo de

tangencia de la esfera de Dandelin y el cono. (fig.3.23)

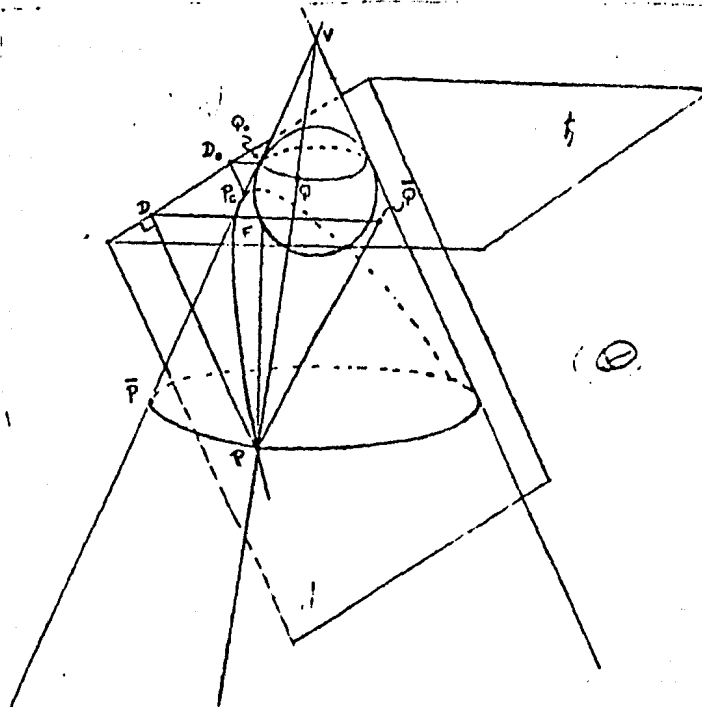


fig. 3.23

Construcción Analítica:

A continuación hablaremos de la cuestión analítica de las curvas vistas con anterioridad. Empezaremos con una de las más familiares: la circunferencia.

Circunferencia:

Supongamos que en un plano dibujamos un círculo C , con un compas y por su centro trazamos la cruz de los ejes X e Y , en el plano leeríamos las coordenadas de un punto cualquiera sobre el círculo C pero Como saber si un punto P cualquiera esta o no sobre C ?

Si sus coordenadas fuesen X e Y y su distancia al origen fuera s , es decir: (fig. 3.24)

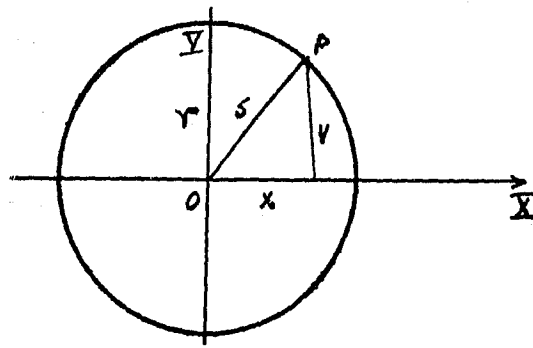


fig. 3.24

entonces por el teorema de Pitágoras tendríamos:

$$s^2 = x^2 + y^2$$

Si el punto P estuviera sobre el círculo, su distancia s al origen tendría que ser precisamente igual al radio r del círculo. Por consiguiente, para todos los puntos del círculo será válida la relación:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Mediante esta relación queda entonces representada una circunferencia en la geometría de los números.

Pero ya no resulta difícil trasladar estos razonamientos al caso en que el centro del círculo no coincida con el origen de coordenadas; si llamamos h y k a las coordenadas de dicho centro y de acuerdo otra vez con el Teorema de Pitágoras, tendremos: (fig. 3.25)

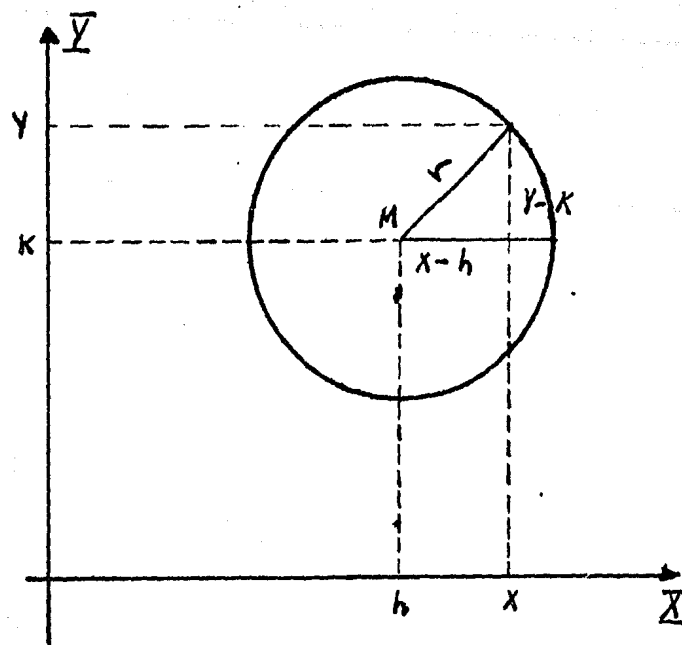


fig. 3.25

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Elipse:

Examinemos ahora el conjunto de puntos de una curva plana en la que es constante la suma de las distancias de sus puntos M a dos puntos fijos F_1 y F_2 ; los cuales llamaremos focos.

Llamemos r_1 y r_2 a las distancias de uno de dichos puntos M a cada uno de los focos F_1 y F_2 ; supongamos también que estos dos focos están sobre el eje coordenado X a quien se denominará el semieje mayor de la elipse, siendo el semieje menor el eje Y; y además el punto medio entre F_1 y F_2 coincide con el origen de nuestro plano coordenado.

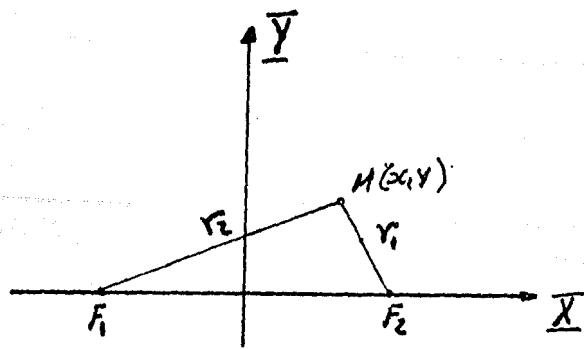


fig. 3.26

Pero la suma de las dos distancias conserva un valor constante llamémosla $2a$, entonces:

$$r_1 + r_2 = 2a$$

Así mismo llamemos por $2c$ a la distancia $|F_1 F_2|$ entre los focos F_1 y F_2 .

Analicemos los casos cuando $a \leq c$; para $a < c$ el conjunto buscado es vacío, ya que en el plano no hay ningún punto M para el cual:

$$d(F_1, M) + d(M, F_2) < d(F_1, F_2)$$

y si $a = c$ el conjunto representa en si el segmento $F_1 F_2$. Por lo tanto el conjunto de soluciones cuando $a \leq c$ no presenta interés.

Supongamos que las coordenadas de F_2 son $(c, 0)$ y como F_1 y F_2 son simétricos respecto al origen entonces F_1 debe tener coordenadas $(-c, 0)$, entonces:

$$d(M, F_2) + d(M, F_1) = 2a$$

esto implica que, por la definición de distancia, tenemos:

$$[(x-c)^2 + (y-0)^2]^{1/2} + [(x+c)^2 + (y-0)^2]^{1/2} = 2a$$

si elevamos ambos miembros al cuadrado y reordenamos, obtendremos:

$$[(x-c)^2 + y^2]^{1/2} = 2a - [(x+c)^2 + y^2]^{1/2}$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a[(x+c)^2 + y^2]^{1/2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$-4cx = 4a^2 - 4a[(x+c)^2 + y^2]^{1/2}$$

$$a[(x+c)^2 + y^2]^{1/2} = a^2 + cx$$

elevamos nuevamente al cuadrado:

$$a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

dividiendo con $a^2(a^2 - c^2)$ obtenemos:

$$(x^2/a^2) + y^2/(a^2 - c^2) = 1$$

definimos $b^2 = a^2 - c^2$ donde $b > 0$

entonces:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

siendo esta la ecuación cartesiana de una elipse; sin duda alguna podemos tener una elipse que no tenga su centro en el origen de nuestro plano, cuya ecuación, en tal caso, sería:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Hipérbola:

Pasemos a examinar otra cónica: la hipérbola que por definición es el conjunto L de todos los puntos en un plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (los focos) es constante.

Escogamos un sistema coordenado de manera que los focos sean $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ y denotemos la diferencia constante por $2a$: entonces un punto $P(x, y)$ esta en la hipérbola si y solo si se cumple una de las dos desigualdades siguientes:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a \text{ -----(1)}$$

$$d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2a \text{ -----(1)}$$

Si $a > c$ el conjunto L es vacío, ya que en el plano no hay ningún punto P para el cual:

$$d(F_1, P) - d(P, F_2) > d(F_1, F_2) \text{ o } d(P, F_2) - d(P, F_1) > d(F_1, F_2)$$

Si $a = c$ el conjunto L representa a la recta (F_1, F_2) , hay que excluir el segmento $[F_1, F_2]$.

En el caso de que $a < c$ el conjunto L consta de dos líneas o ramas (fig. 3.27)

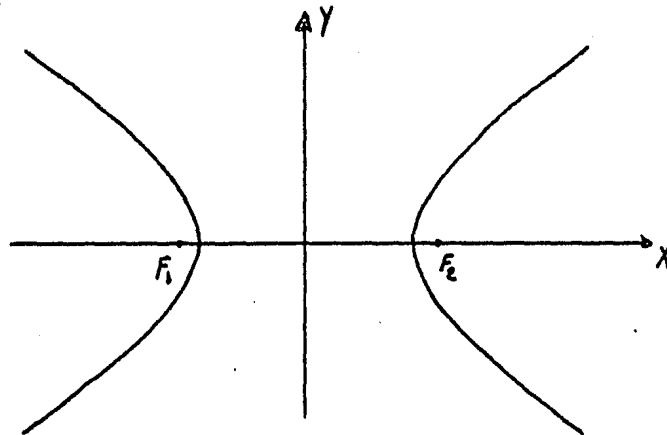


fig. 3.27

Entonces las desigualdades son equivalentes a:

$$d(P, F_2) - d(P, F_1) < d(F_1, F_2)$$

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) < d(F_1, F_2)$$

Utilizando (1) y el hecho de que $d(F_1, F_2) = 2c$ entonces:

$$|d(P, F_2) - d(P, F_1)| = 2a$$

esto implica que:

$$|[(x-c)^2 + (y-0)^2]^{1/2} - [(x+c)^2 + (y-0)^2]^{1/2}| = 2a$$

como en la curva anterior, hacemos un poco de álgebra y llegamos a

$$(x^2/a^2) - y^2/(c^2 - a^2) = 1$$

si $b^2 = c^2 - a^2$ con $b > 0$ entonces:

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

siendo esta la ecuación cartesiana de una hipérbola.

Parábola:

Finalmente veremos la parábola que es el conjunto D de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo F (llamado foco) y de una recta fija l (llamada directriz) ambos contenidos en el plano.

Supondremos que F no se encuentra sobre l ya que si así sucediera entonces se dice que la parábola degenera en una recta.

Si P es cualquier punto del plano y P' es el punto sobre l determinado por una recta que pasa por P y es perpendicular a l, entonces P está sobre la parábola si y solo si :

$$d(P, F) = d(P, P')$$

La recta que pasa por F y es perpendicular a la directriz se llama el eje de la parábola. El punto V sobre el eje, que se encuentra a medio camino entre F y l se llama el vértice de la parábola.

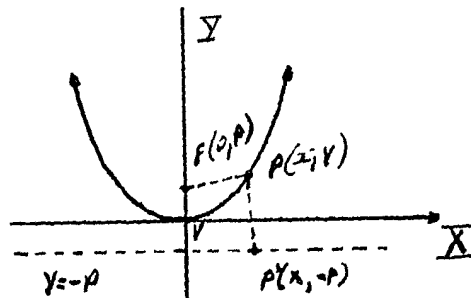


fig. 3.28

Escogamos el eje Y como el eje de la parábola, con el origen en el vértice V. El foco F Tiene coordenadas (0,p) para algún número real p distinto de cero y la ecuación de la directriz es $y = -p$

A partir de la fórmula de la distancia vemos que un punto $P(x,y)$ está sobre la parábola si y solo si:

$$[(x-0)^2 + (y-p)^2]^{1/2} = [(x-x)^2 + (y+p)^2]^{1/2}$$

elevando al cuadrado:

$$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2$$

entonces:

$$x^2 = 4yp$$

Hemos demostrado que las coordenadas de cualquier punto (x,y) sobre la parábola satisfacen la ecuación anterior, siendo ésta la ecuación cartesiana de una parábola con foco en $F(0,p)$ y directriz $y = -p$

Si $p > 0$ la parábola se abre hacia arriba y si $p < 0$ la parábola se abre hacia abajo.

Si el eje de la parábola se coloca a lo largo del eje X ocurre una situación similar. Si el vértice es $V(0,0)$, el foco $F(p,0)$ y la ecuación de la directriz $x = -p$, entonces, obtenemos

$$y^2 = 4px$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia la derecha, mientras que si $p < 0$ la parábola abre hacia la izquierda.

Hemos hasta aquí deducido las ecuaciones cartesianas de las cónicas (elipse, hipérbola y parábola) sin embargo este nombre viene de que dichas curvas se obtienen al intersectar un cono recto con un plano, lo cual casi nunca vemos.

Si nos preguntamos qué curva se presenta en la siguiente figura: 3.29

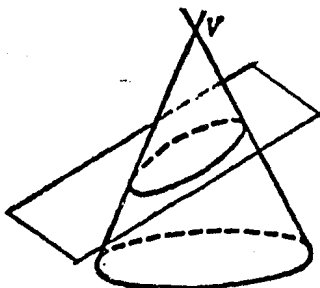


fig. 3.29

sin lugar a dudas diremos que es una elipse, pero ¿dónde están sus focos?, ¿cuánto vale la constante de la definición?, realmente, satisface la definición dada?

Esta y otras preguntas motivaron a Pierre Dandelin y a Adolphe Quelet a hacer la siguiente construcción.

Esferas de Dandelin:

Consideremos antes dos observaciones que nos ayudarán:

Primera: Sea S una esfera y P un punto exterior a ella. Sean PT y PT' rectas tangentes a S , trazadas desde P , con puntos de tangencia T y T' respectivamente, entonces los segmentos PT y PT' tienen la misma longitud. (fig. 3.30)

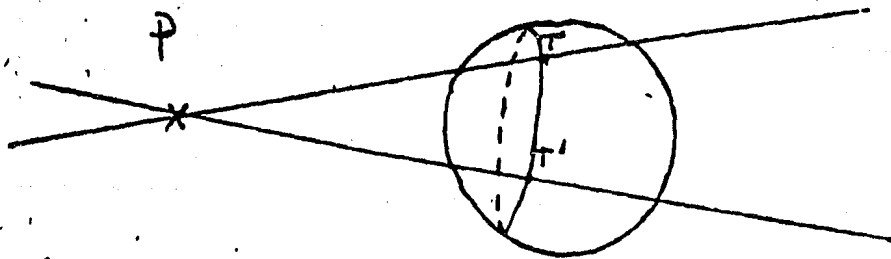


fig. 3.30

Segunda: Sea C un cono recto con vértice V y eje L . Sea S una esfera con centro en L y tangente al cono C . Todos los puntos de tangencia equidistan del vértice V y forman un círculo perpendicular al eje L . (fig. 3.31)

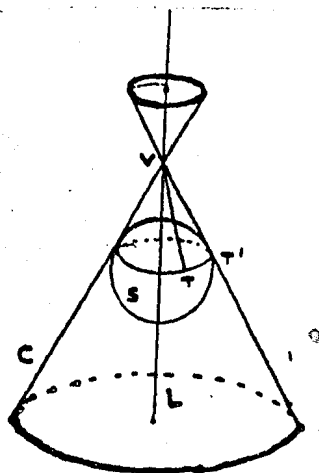


fig. 3.31

Consideremos la elipse dada por la intersección del cono recto C con vértice V y el plano P (fig. 3.32)

De todas las esferas con centro en el eje del cono C y tangentes a éste, hay dos que son también tangentes al plano P , una situada por encima del plano P del lado del vértice V del cono C ; y la otra del lado opuesto. Estas son las esferas de Dandelin. (fig 3.33)

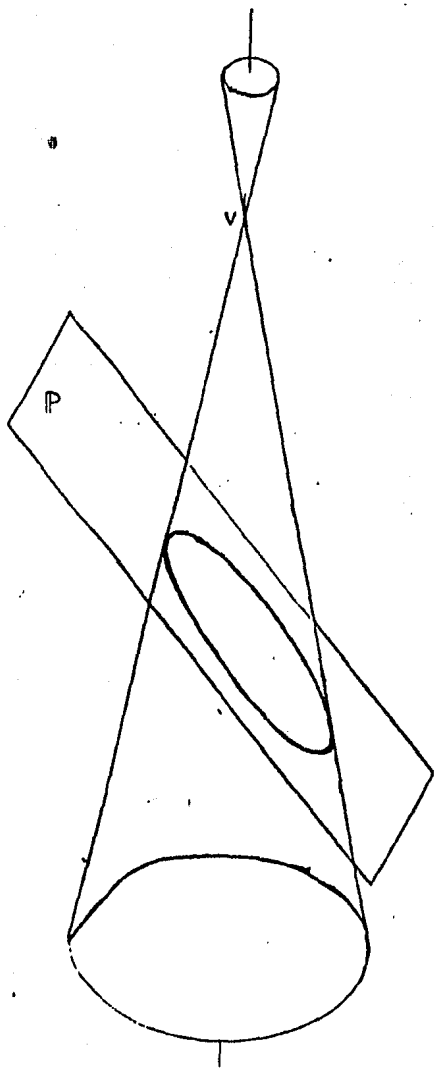


fig. 3.32

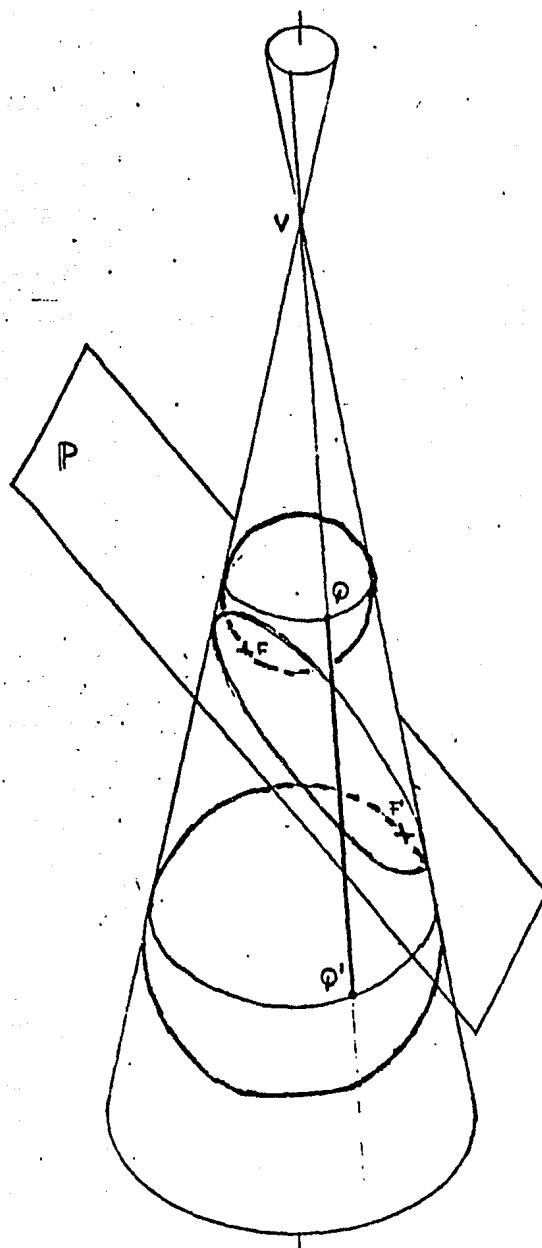


fig. 3.33

Los puntos de tangencia de estas esferas y el plano P son los focos de la elipse y la longitud del segmento del generatriz comprendida entre los círculos de tangencia de cada una de las esferas y el cono (segmento QQ') es la constante de la definición. Veamos por que: (fig. 3.34)

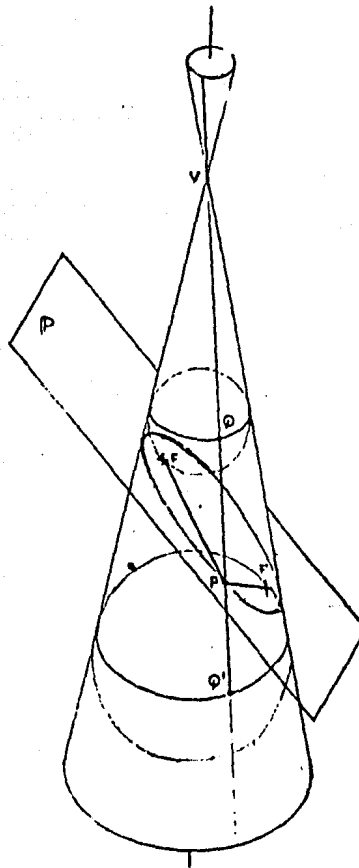


fig. 3.34

Como las rectas PF y PQ son tangentes a la esfera S, los segmentos PF y PQ tienen la misma longitud (primera observación); análogamente los segmentos VF y VQ' tendrán la misma longitud, entonces:

$$VF + VF' = VQ + VQ' = QQ'$$

donde QQ' es la constante de definición, pero:

$$QQ' = VQ' - VQ$$

la cual no depende del punto F (segunda observación)

A continuación probaremos que haciendo uso del mismo cono recto C , podemos obtener cualquier elipse. Para ello, notemos que una elipse está determinada por el eje mayor (segmento ab) y uno sólo de los focos, por ejemplo F , pues sabemos que:

$$aF' = Fb$$

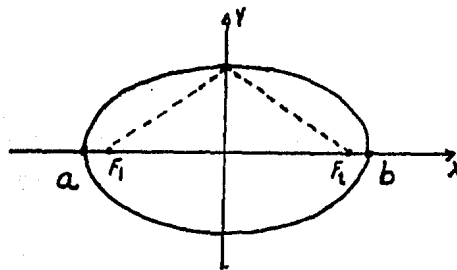


fig. 3.35

y además:

$$ab = PF + PF' = k$$

Ahora bien, dada la distancia ab y el cono C , podemos intersectar éste por medio de un plano, de tal forma que la elipse tenga como eje mayor al segmento ab , de muchas maneras. Si a está muy cerca del vértice V , entonces el foco F estará muy cerca de a .

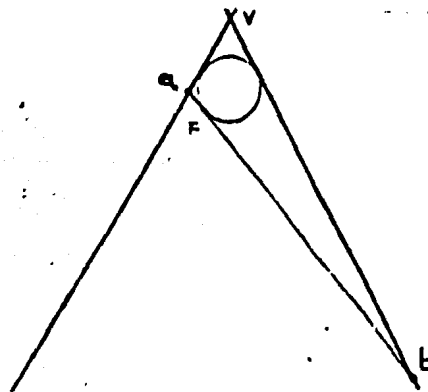


fig. 3.36

Si el segmento ab es perpendicular al eje del cono, el foco F estará en el punto medio de ab y obtendremos un círculo.

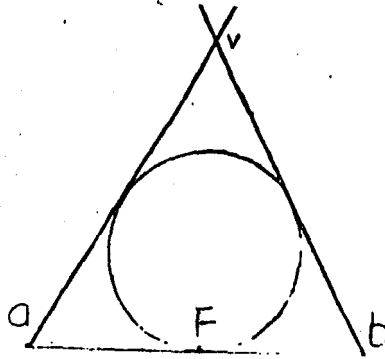


fig. 3.37

Para la hipérbola también nos encontramos con que los focos vienen dados por los puntos de tangencia de las esferas de Dandelin y el plano que la contiene y la constante de la definición viene dada por QQ' (fig. 3.38)

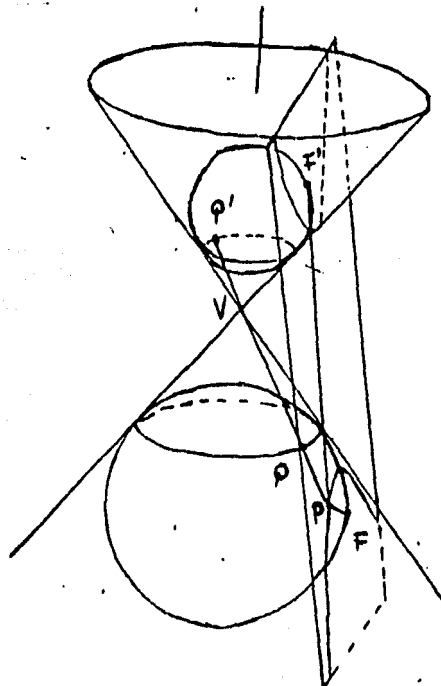


fig. 3.38

En el caso de la parábola tenemos solo una esfera de Dandelin que se encuentra situada entre el vértice V y el plano P . Su punto de tangencia es el foco F . La directriz de la parábola es la intersección del plano P y del plano que contiene al círculo de tangencia de la Esfera de Dandelin y el cono. (fig. 3.39)

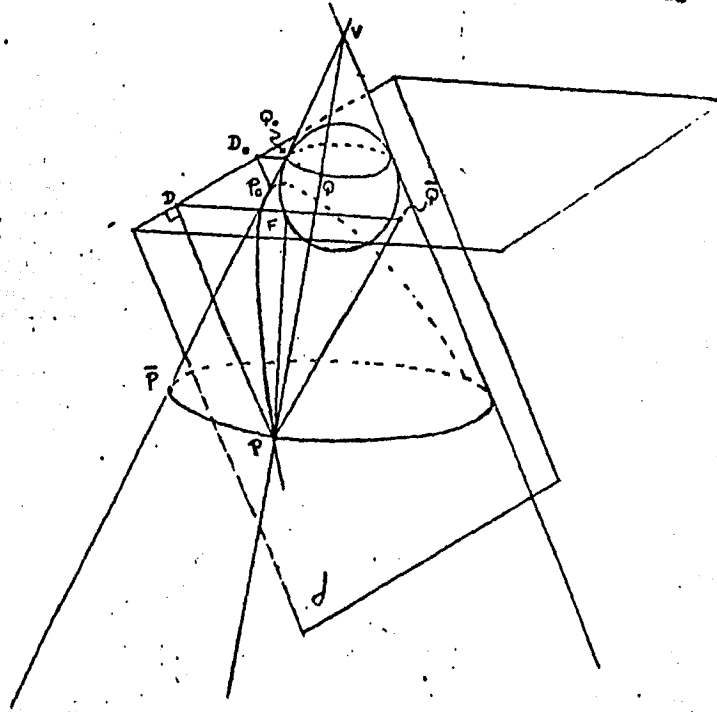


fig. 3.39

Al término de este capítulo vemos algunos aspectos interesantes de estas secciones cónicas siendo inevitable pensar que han contribuido bastante al desarrollo de la humanidad y que las encontramos en los lugares que menos nos imaginamos.

RODAMIENTOS

En este capítulo hablaremos de curvas que se generan por rodamientos, fijando un punto; dando lugar a curvas tan interesantes como la cicloide. Al igual que en los capítulos anteriores se exponen los ejemplos que les dan origen para posteriormente llevar a cabo su estudio analítico.

Así mismo se enuncia el *Problema de la Braquistocrona*, proporcionándose dos soluciones, la primera sin el uso del Cálculo Variacional y la segunda con éste, utilizando la ecuación de Euler, la cual se deduce en el apéndice B.

Empecemos entonces con los ejemplos mecánicos para generar estas curvas.

Cicloide:

Rodemos horizontalmente una moneda (redonda) sobre una mesa, lisa, fijemos ahora sobre la moneda un punto.

Lo que queremos saber es ¿qué curva describe el punto mientras la moneda rueda sin deslizarse?

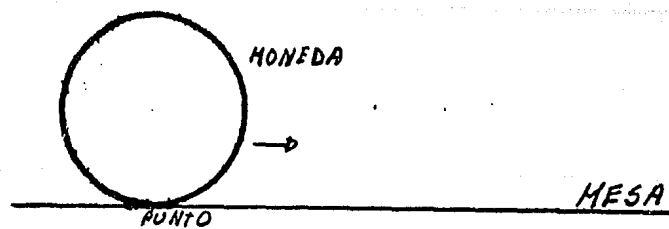


fig. 4.1

En otras palabras rodemos un círculo C de radio a sobre el eje X y escogamos un punto P sobre la circunferencia:

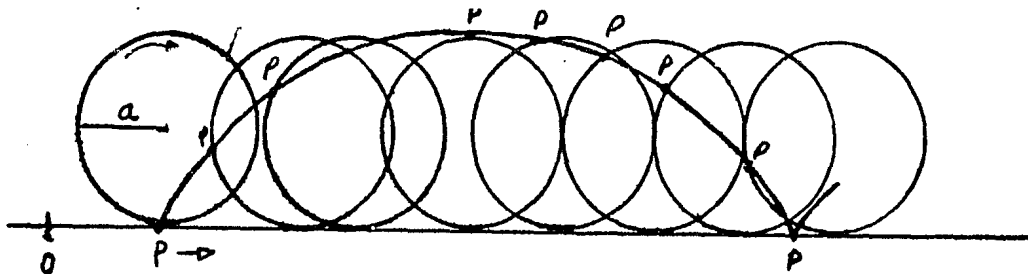


fig. 4.2

La curva descrita por el punto P cuando rueda C se conoce como cicloide.

Esta curva fue descubierta por Galileo Galilei en 1590 dándole ese nombre, y quedó tan maravillado con su graciosa forma que pensó en dársela a los arcos de todos los puentes. Trató también de cuadrarla, es decir, de obtener su área y con tal objeto peso varias cicloides, a pesar de lo cual no consiguió vencer el problema matemáticamente.

Su discípulo Torricelli logró obtener el área de la cicloide e independientemente también el matemático francés Roberval, en 1634.

René Descartes, en 1638, invitó a sus contemporáneos hallar la línea de contacto o tangente de la cicloide. Fermat aceptó la invitación y resolvió el problema.

Se cuenta que en 1658, Pascal interrumpió la soledad que voluntariamente se había impuesto cuando reflexionaba sobre una cuestión matemática: se trataba de la curva de rodamiento, de la cicloide, en ese entonces tan famosa. Pascal interpretó este alivio como una autorización del Cielo para seguir ocupándose del problema.

En el curso de una semana dedujo toda una serie de difíciles proposiciones, de las que ningún otro matemático de su tiempo había encontrado la clave; siendo éste su último trabajo matemático.

En junio de 1658 apareció una invitación anónima a los matemáticos de todo el mundo para demostrar estas nuevas proposiciones sobre la cicloide; siendo el inglés Wallis el que más se aproximara a la meta. Su compatriota Christopher Wren, constructor de la iglesia de San Pablo de Londres, determinó la longitud de arco de la cicloide, aprisionando la curva entre líneas poligonales dentadas.

La determinación de la longitud de una curva de esta clase, había sido declarada imposible por muchos, y entre ellos por Descartes.

Nos interesa destacar que se estudió una sola curva desde todos los puntos de vista: se determinó su ecuación, su propiedad específica, se le rectificó, es decir, se calculó la longitud de su arco.

Fermat y Descartes hallaron su tangente, o lo que es lo mismo, diferenciaron la cicloide. Torricelli y Roverval encontraron su área y Pascal descubrió diversas proposiciones relativas al volumen y al centro de gravedad.

Es realmente impresionante saber que en la antigüedad se estudiaba una sola curva desde todos los puntos de vista, así mismo se estudiaron todas las variantes y propiedades que esta curva podría representar. A continuación se analizarán los mecanismos que dan lugar a las variaciones de esta curva.

Cicloide acortada:

Rodemos ahora el mismo círculo C de radio a pero fijemos el punto P dentro de la circunferencia y distinto del centro, es decir, pensemos en una llanta de bicicleta que rueda sobre una calle lisa, horizontal y tomemos uno de los rayos de la bicicleta, es decir la punta exterior del rayo será nuestro punto fijo, ¿cómo será ahora la curva descrita?:

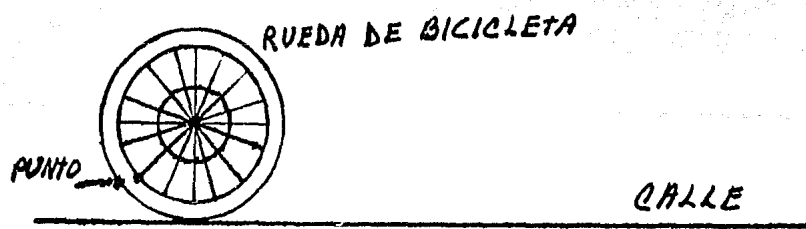


fig. 4.3

Geométricamente tenemos:

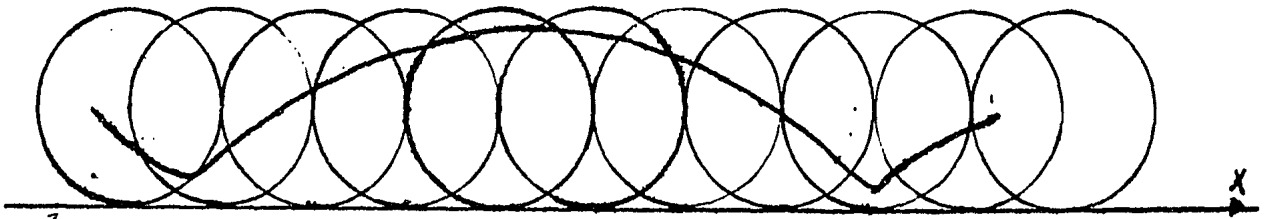


fig. 4.4

Lo cual dice que tenemos una cicloide que se levanta sobre el eje X , también conocida como cicloide acortada.

Cicloide alargada o trocoide:

Si por tercera vez rodamos nuestro círculo C de radio a sobre el eje X pero ahora tomemos un punto F fuera de la circunferencia, pero unido a ella, tendremos graficamente la siguiente situación:

(fig. 4.5)

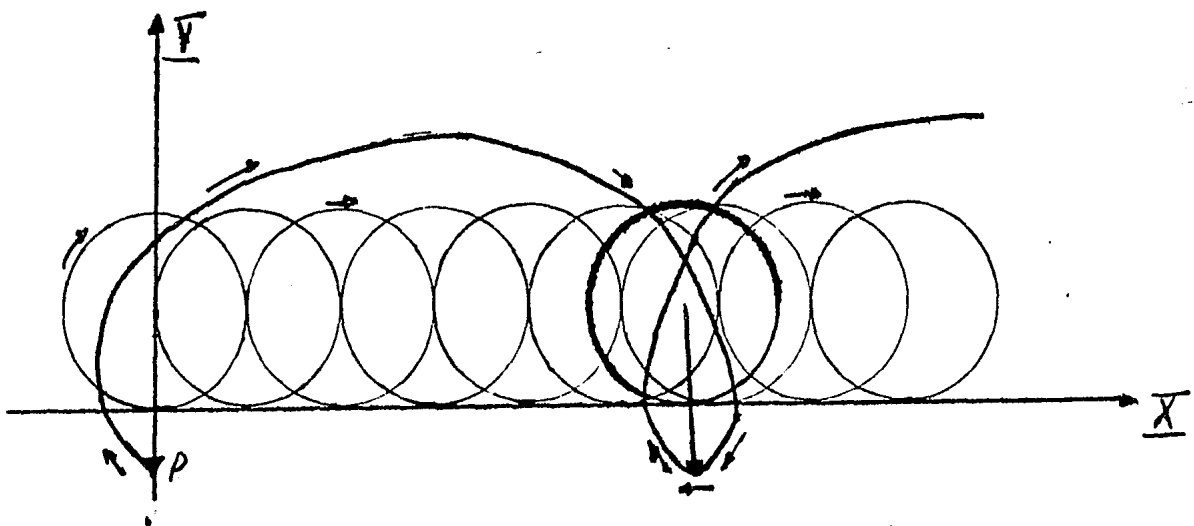


fig. 4.5

La curva descrita por el punto escogido se conoce como cicloide alargada o trocoide.

En particular en esta curva vemos que mientras nuestro círculo va hacia adelante existe un momento en el que el punto fijado va hacia atrás.

Con base en lo anterior podemos decir que una parte del tren que sale de la ciudad de México con destino a Guadalajara, regresa, mientras que el tren avanza.

Veamos que quiere decir esto: conforme el tren avanza, las pestañas de las ruedas van dejando sobre los rieles una trayectoria o trazo imaginario que lleva el sentido contrario al tren; es decir van de regreso.

Propiedades de la cicloide:

De todas las propiedades de la cicloide sólo se indicarán las tres siguientes:

- i) La longitud de un arco completo de cicloide es igual al perímetro del cuadrado circunscrito al círculo generador de la curva.

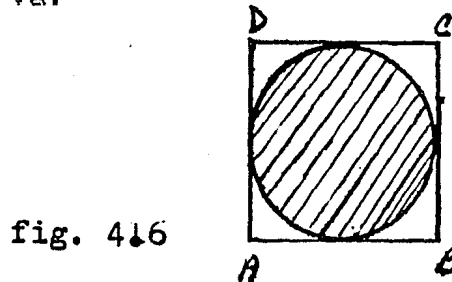


fig. 4.6

- ii) El área encerrada bajo un arco completo de cicloide es igual al triple del área del círculo generador.

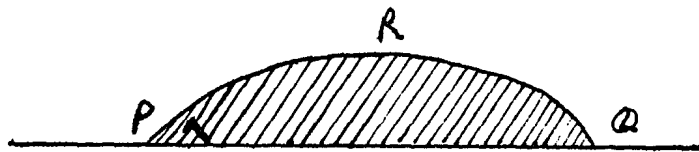


fig. 4.7

- iii) La línea de descenso más rápido entre dos puntos es un arco de cicloide. (fig. 4.8)

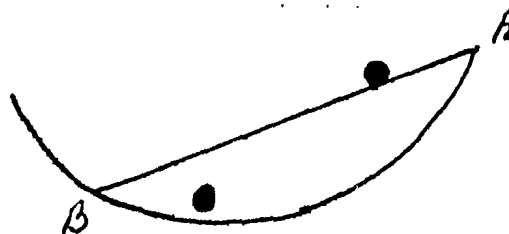


fig. 4.8

Solamente nos ocuparemos de esta tercera propiedad ya que es realmente interesante y da origen a lo que se conoce como el *Problema de la Braquistocrona*. Veamos que nos dice la historia a este respecto.

En el año de 1687 los hermanos Jacobo I y Juan I Bernouilli tuvieron conocimiento de los trabajos de Leibniz sobre el Cálculo Diferencial; pero fué hasta 1690 cuando empieza una época interesante y agitada; cada nueva aplicación del poderoso recurso dejaba boquiabiertos a los matemáticos. Todos trataban de vencerse mutuamente, planteándose nuevos problemas; los siglos XVII y XVIII fueron los grandes tiempos de las apuestas, los retos y las discusiones.

Un ejemplo de ello fué la famosa polémica de los hermanos Bernouilli. Aunque iguales en capacidad, ambos hermanos eran bastante distintos; Jacobo, el que empezó a darle fama matemática a la dinastía, era lento, tenaz, desconfiado y concienzudo; Juan era rápido, ágil de inteligencia, vivo, avido de gloria y descuido en sus procedimientos, era ligero de palabra y siempre pronto a cualquier disputa.

Jacobó, por su parte, envidiaba un poco a su hermano menor, por sus éxitos; él, que había conseguido elevarse a costa de fatigas y mucho esfuerzo, pensaba, y no sin razón del todo, que gracias a sus lecciones y a su propia fama, Juan había logrado en su

juventud una brillante carrera, sin el menor esfuerzo. Por eso nadie extrañó que un día la desaveniencia latente estallara en franca disputa.

En 1695 Jacobo publico en las Actas Eruditorum de Leipzig un artículo contra su hermano. Al principio Juan calló dolido, pero en Junio de 1696 propuso un problema a todos los matemáticos.

Dados dos puntos A y B que no están sobre una recta vertical, ¿cuál es la trayectoria que ha de seguir una pelotita que se suelta* desde A para llegar a B, de suerte que el tiempo empleado sea mínimo?

No era la línea recta, sino una curva muy bien conocida por todos los matemáticos: la cicloide.

Bien podría pensarse que la línea que nos daría el tiempo mínimo fuera la línea recta ya que es la distancia más corta entre dos puntos, sin embargo en el arco de cicloide invertida la velocidad que lleva la pelotita es mayor, por lo tanto llegara mas rápido a su destino (fig. 4.9)



fig. 4.9

*Aquí se entiende que la única fuerza que actua sobre la pelotita acción terrestre, es decir el peso de aquella.

juventud una brillante carrera, sin el menor esfuerzo. Por eso a nadie extrañó que un día la desaveniencia latente estallara en franca disputa.

En 1695 Jacobo publico en las Actas Eruditorum de Leipzig un artículo contra su hermano. Al principio Juan calló dolido, pero en Junio de 1696 propuso un problema a todos los matemáticos.

Dados dos puntos A y B que no están sobre una recta vertical, ¿cuál es la trayectoria que ha de seguir una pelotita que se suelta* desde A para llegar a B, de suerte que el tiempo empleado sea mínimo?

No era la línea recta, sino una curva muy bien concida por todos los matemáticos: la cicloide.

Bien podría pensarse que la línea que nos daría el tiempo mínimo fuera la linea recta ya que es la distancia más corta entre dos puntos, sin embargo en el arco de cicloide invertida la velocidad que lleva la pelotita es mayor, por lo tanto llegara mas rápido a su destino (fig. 4.9)

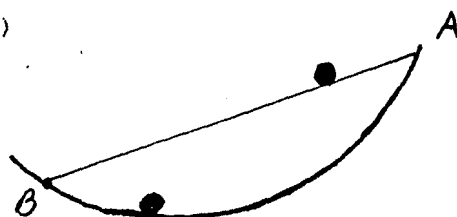


fig. 4.9

*Aqui se entiende que la única fuerza que actua sobre la pelotita es la atracción terrestre, es decir el peso de aquella.

Jacobo I Bernouilli no sólo lo resolvió sino que además fundó una nueva rama del Cálculo Infinitesimal: el Cálculo Variacional donde se estudian los métodos que permiten hallar los valores máximos y mínimos de funcionales*.

Más adelante se demuestra analíticamente que la curva que cumple con estas condiciones es la cicloide. Ahora regresemos a los ejemplos mecánicos para generar otra curva.

Epicicloide o nefroide:

Veremos ahora una curva que se genera al girar dos círculos pero esta vez uno de ellos será de mayor diámetro que el otro.

Supongamos dos monedas de diferente denominación, una, la del diámetro más grande, quedará fija y la otra moneda, de diámetro más pequeño rodará sin deslizarse por fuera de nuestra primera moneda, y fijando nuevamente un punto, en el que coincidan en el momento de empezar a rodar; tendremos una figura similar a la siguiente (fig. 4.10)

*Consultar apéndice B

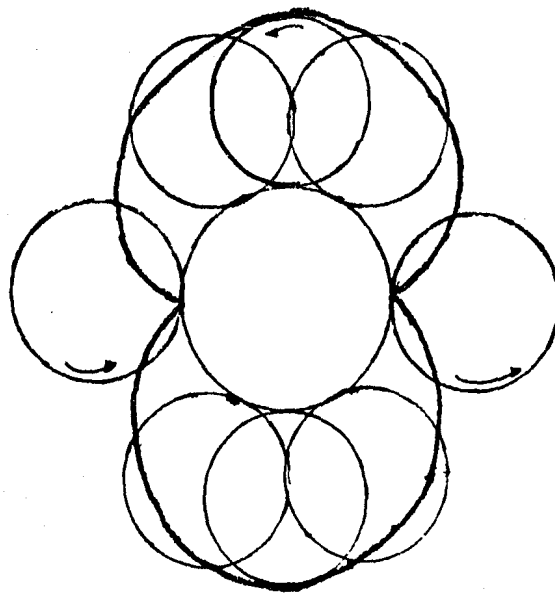


fig. 4.10

Geométricamente tendremos una curva conocida como epicicloide o nefroide (de nephros: riñón).

Cardioide:

Supongamos ahora que tenemos dos monedas de la misma denominación; esto quiere decir que el círculo descrito por cada moneda tiene el mismo diámetro; pero deseamos, fijando una de las monedas, rodar la otra alrededor de la fijada.

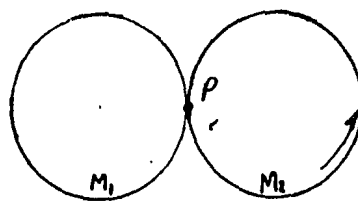


fig. 4.11

Si fijamos un punto en cada una de las monedas y al empezar las hacemos coincidir, al rodar la segunda moneda que curva me describirá.

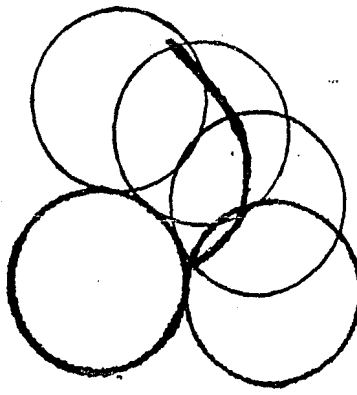


fig. 4.12

Geométricamente tendremos dos circunferencias C_1 y C_2 del mismo radio a ; que al rodar una encima de la otra dará la siguiente figura:

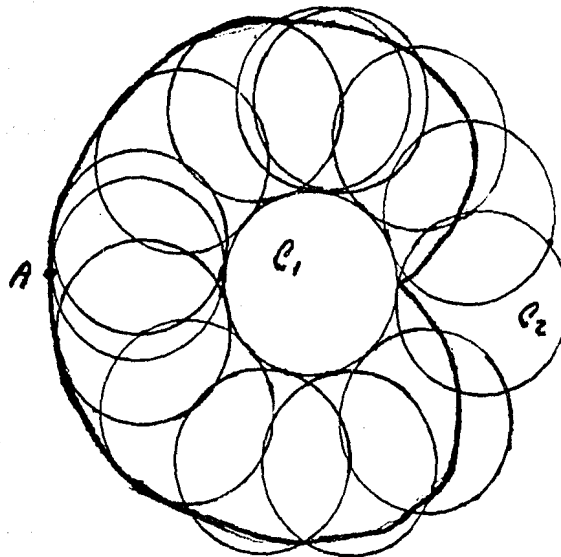


fig. 4.13

La curva que describe el punto fijado al rodar la circunferencia C_2 alrededor de C_1 , se llama Cardioide.

Nótese que a pesar de tener el mismo radio y mientras que C_1 permanece inmóvil, C_2 , hasta el punto A, habrá dado una vuelta completa sobre su centro, es decir que al completar la curva Cardioide, C_2 habrá dado dos vueltas sobre su centro.

Veremos ahora otra forma de generar esta última trayectoria.

Suponiendo que deseamos conocer el conjunto de puntos simétricos a cierto punto A de una circunferencia dada, con relación a todas las tangentes posibles a la circunferencia.

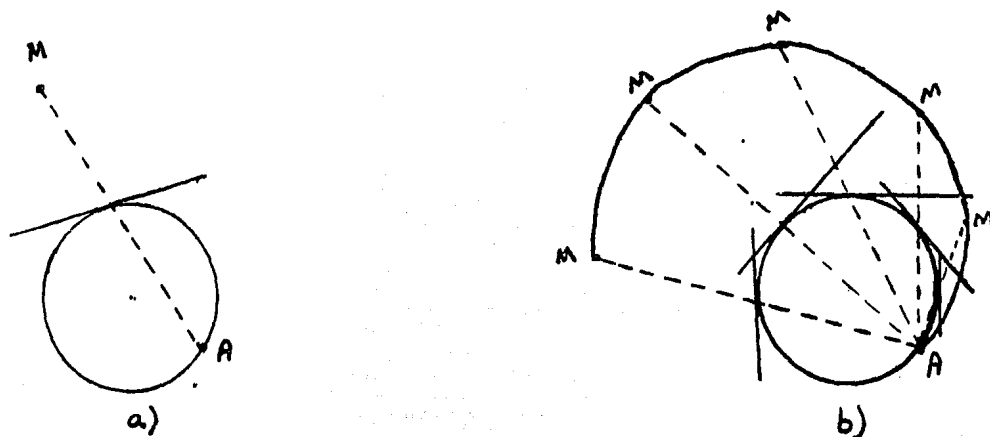


fig. 4.14

En la figura a) podemos ver lo que nos dice el enunciado y en la figura b) vemos que al trazar más rectas tangentes se va conformando la trayectoria del punto M, que indudablemente es una cardioide.

Un ejemplo más de donde se encuentra esta curva es el siguiente:
Sea una circunferencia C y en ella el punto A, geoméricamente vemos que la reunión de todas las circunferencias que pasan por el punto A, cuyos centros están sobre C, es una zona limitada por una cardioide. (fig. 4.15)

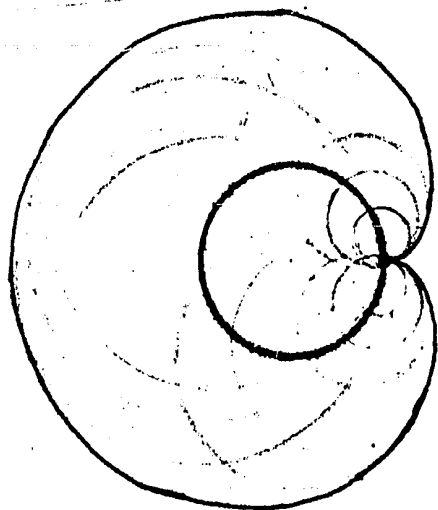


fig. 4.15

La cardioide es una curva cerrada que tiene una particularidad característica en el punto A; es un punto cuspidal; es decir: un punto X_0 donde los límites (por la izquierda y por la derecha de X_0) se indeterminan, presentando así una tangente vertical. A continuación se presentan las gráficas de dos curvas que tienen puntos cuspidales en $(0,0)$.

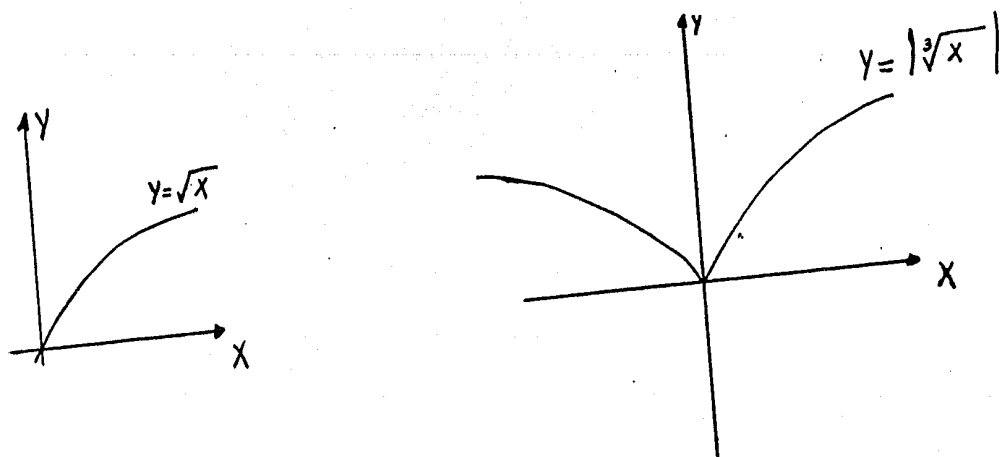


fig. 4.16

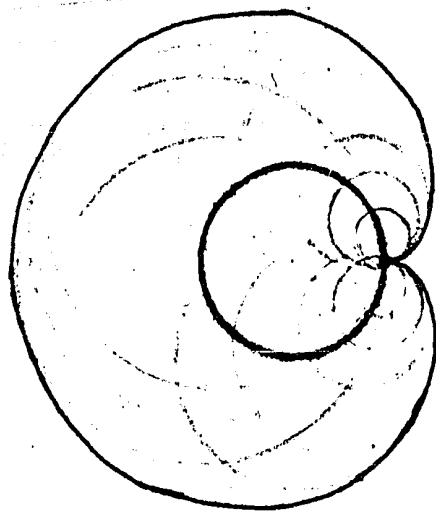


fig. 4.15

La cardioide es una curva cerrada que tiene una particularidad característica en el punto A; es un punto cuspidal; es decir: un punto X_0 donde los límites (por la izquierda y por la derecha de X_0) se indeterminan, presentando así una tangente vertical. A continuación se presentan las gráficas de dos curvas que tienen puntos cuspidales en $(0,0)$.

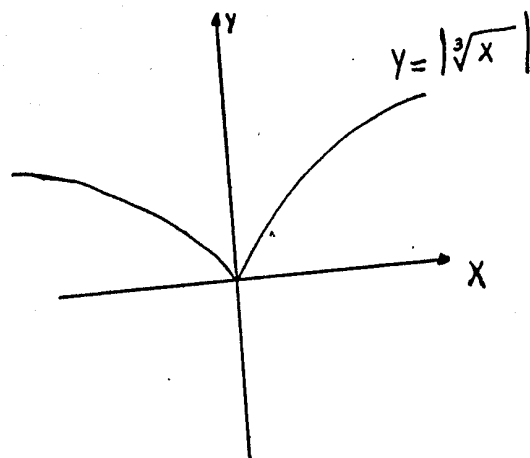
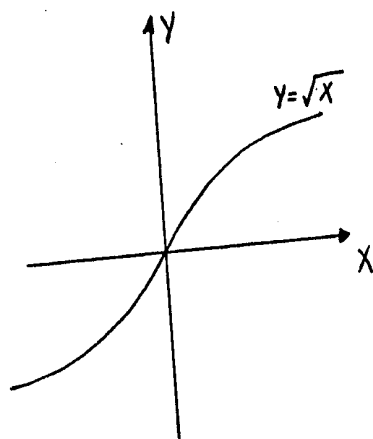


fig. 4.16

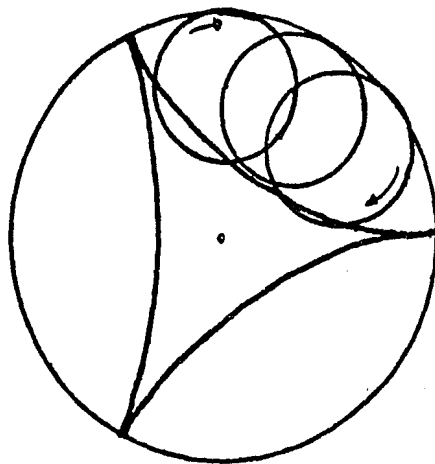
Por su forma se parece al corte de una manzana o al contorno del corazón; de ahí que su nombre (Kardiá significa corazón) sea cardioide.

Con algunas variantes al ejemplo anterior, veremos que se generan otro tipo de curvas o trayectorias de un punto.

Hipocicloide:

Supongamos que ahora la moneda pequeña en vez de rodar por fuera de la grande, rodará por dentro del círculo de mayor diámetro.

Esta nueva trayectoria se conoce como hipocicloide. (fig.4.17)



4.17

Otra forma de obtener una hipocicloide o también conocida como curva de Steiner es la siguiente:

Hagamos rodar una circunferencia de radio $(2/3)r$ por el interior de otra circunferencia de radio r ; y fijemos dos puntos opuestos, M_1 y M_2 , entonces resultaría la grafica de la fig.4.18.

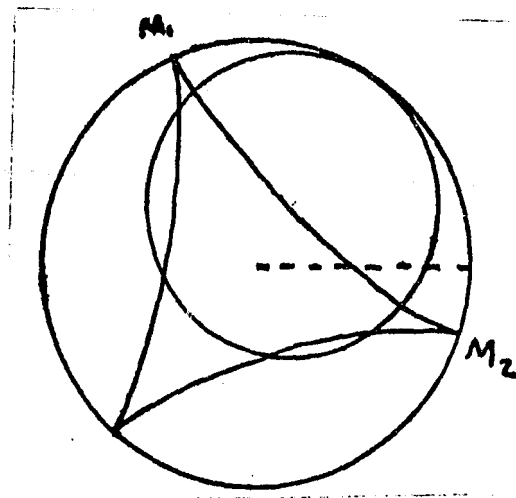


fig. 4.18

Segmento de Rectas

Veamos ahora que pasa si la circunferencia que rueda por el interior tiene un radio que es la mitad que el de nuestra circunferencia fijada.

Como podemos ver la trayectoria que describe nuestro punto fijado es una línea recta, es decir, el punto se desplaza por el diámetro de la circunferencia fijada. (fig.4.19)

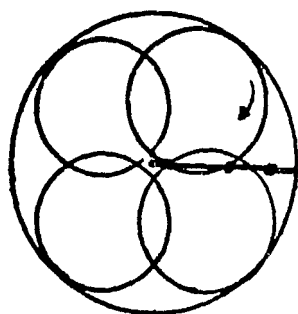


fig. 4.19

Astroide:

Ahora hagamos rodar una circunferencia de diámetro $d/2$ dentro de otra de diámetro $2d$, al igual que en los casos anteriores, fijaremos un punto P , para observar la trayectoria que éste describe.

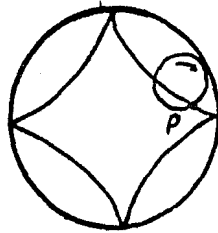


fig. 4.20

Según la figura anterior la curva que describe el punto fijado P es una Astroide. Existen otras formas de generar esta curva, veamos una más.

Hagamos rodar una circunferencia de radio $(3/4)r$ por el interior de otra de radio r y fijemos tres puntos M_1, M_2 y M_3 tales que dentro del círculo de radio $(3/4)r$ formen un triángulo equilátero; la curva que generan estos tres puntos es también una astroide.

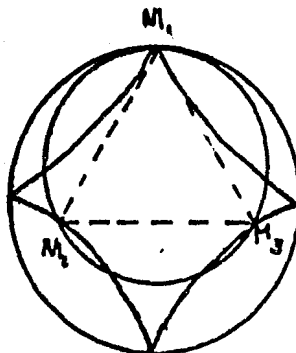


fig. 4.21

Construcción analítica:

Vamos a deducir ahora las ecuaciones paramétricas de las curvas que mencionamos con anterioridad.

Cicloide:

Vimos que al rodar un círculo C de radio r sin deslizarse, sobre una línea recta o sobre el eje X , el punto fijado sobre C nos describía una curva, la cicloide.

Fijemos nuestros ejes cartesianos X e Y , suponiendo que el diámetro de nuestra circunferencia pasa por el eje Y ; tracemos los radios y los centros de ambas circunferencias y veamos que después de un momento t el punto P esta ahora en P' , (fig.4.22)

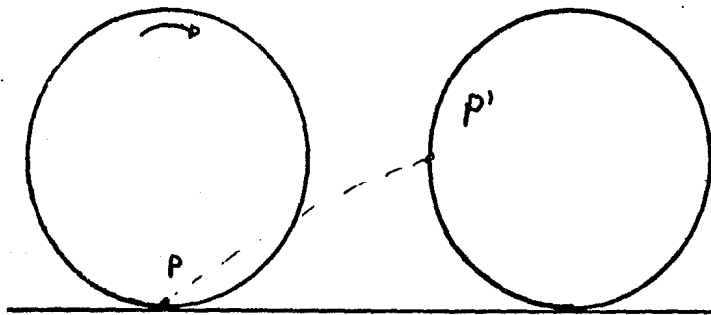


fig. 4.22

es decir que las componentes del punto P' dependen de t : es decir que $(x,y)=(x(t),y(t))$. La pregunta ahora es ¿quiénes son y como obtenerlas?.

Notemos que si el círculo ha rodado sin deslizarse, entonces el segmento PM tiene la misma longitud que el arco MP' , (fig. 4.23)

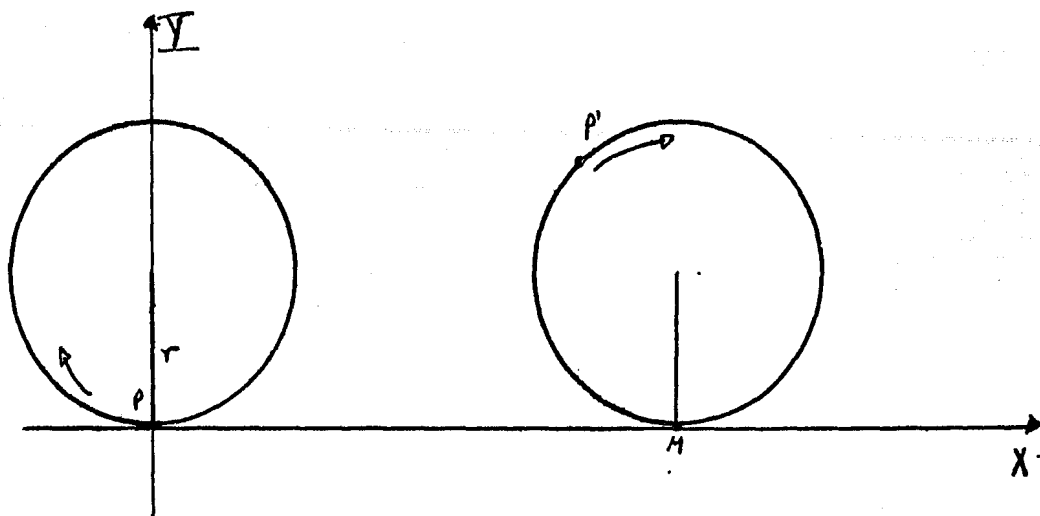


fig. 4.23

entonces ¿que coordenadas tiene M?

Veamos que el radio es el mismo hasta el punto P' y que además el ángulo de ese arco depende de t .

Entonces por geometría sabemos que la longitud del arco MP' es igual al radio por el ángulo, es decir que M tiene coordenadas $(rt, 0)$ (fig. 4.24)

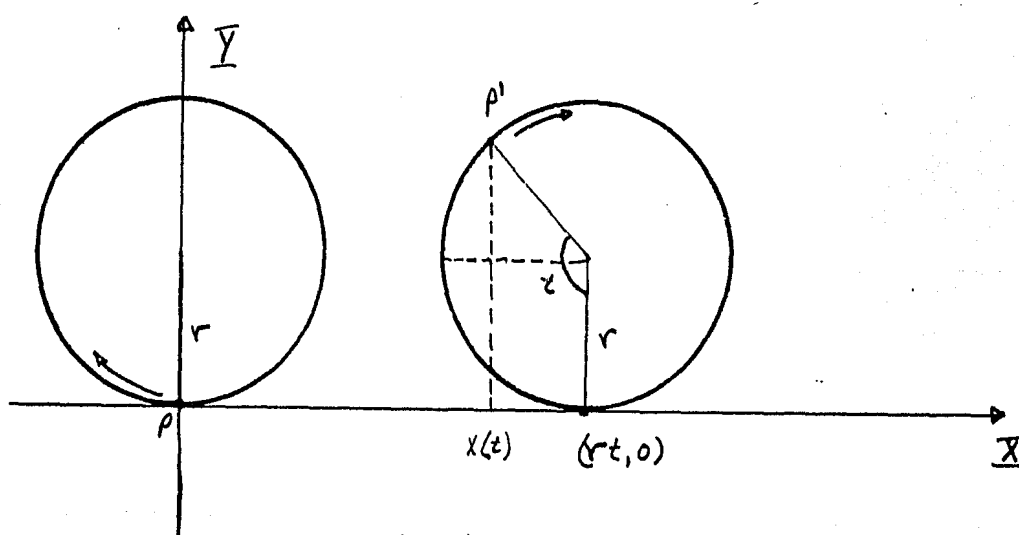


fig. 4.24

Pero lo que nosotros necesitamos saber es ¿quién es la componente $x(t)$?

Entonces trazamos una recta perpendicular, desde P' hasta el eje x ; inscribiéndose un triángulo rectángulo con parte del radio de C , esto implica que el ángulo t se ha dividido en dos ángulos; siendo uno de ellos un ángulo recto, es decir que $t = + \pi/2$, vease fig. 4.25

Llamemos d a la distancia entre $x(t)$ y rt esto implica que:

$$x(t) = rt - d$$

entonces nos falta por calcular el valor de d .

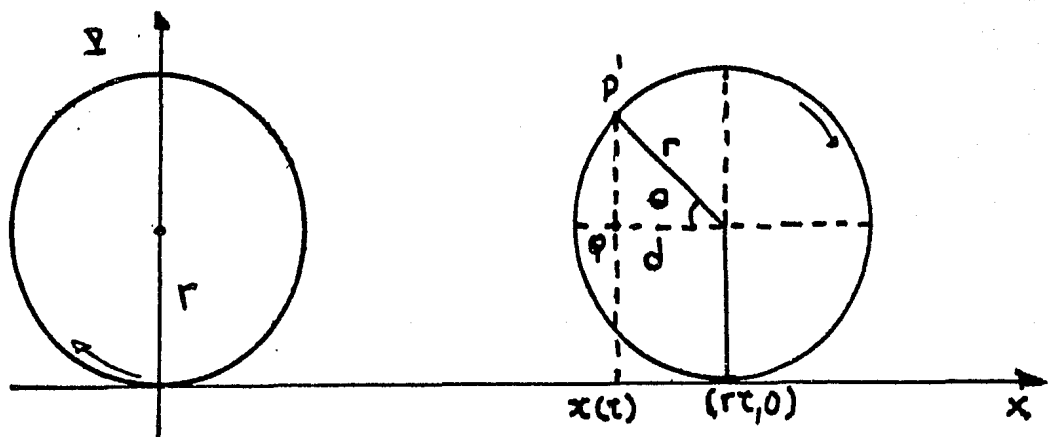


fig. 4.25

De la figura 4.25 vemos que $d = r \cos \theta$ pero como nos interesa que d esté en función del parámetro t y no de θ , entonces vemos que:

$$\theta = t - \pi/2$$

entonces:

$$d = r \cos (t - \pi/2)$$

Pero conocemos una identidad trigonométrica que dice:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b *$$

pero podemos escribir:

$$\cos(a + (-b)) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b)$$

como la función coseno es par entonces: $\cos(-b) = \cos b$

y como la función seno es impar entonces: $\sin(-b) = -\sin b$

quedando nuestra identidad de la siguiente manera:

$$\cos(a + (-b)) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Por lo tanto:

$$\cos(t + (-\pi/2)) = \cos t \cos(\pi/2) + \sin t \sin(\pi/2)$$

$$\text{pero } \cos \pi/2 = 0 \text{ y } \sin \pi/2 = 1$$

de donde:

$$\cos(t - \pi/2) = \sin t$$

esto implica que:

$$d = r \sin t$$

Ahora si podemos saber quien es $x(t)$; teniamos que:

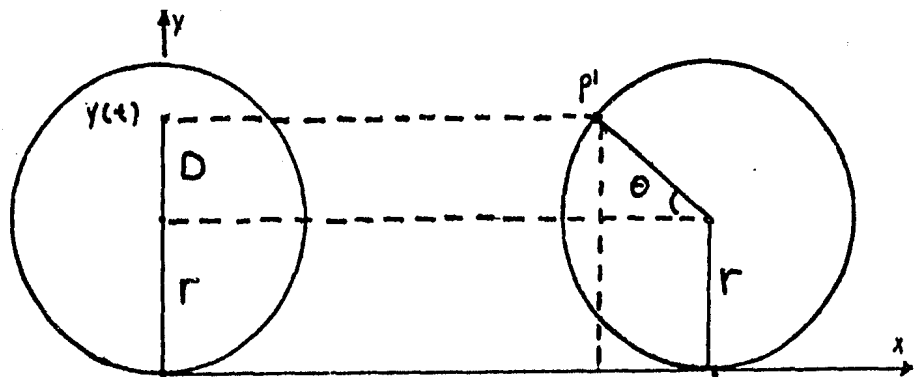
$$x(t) = rt - d$$

sustituyendo d:

$$x(t) = rt - r \sin t$$

$$x(t) = r(t - \sin t)$$

Para conocer ahora quien es la componente $y(t)$ procedamos de una forma similar:



* Consultar apéndice A

fig. 4.26

De la figura observamos que la componente $y(t) = r + D$ pero entonces: $D = r \sin \theta$ involucrando nuevamente al parámetro t , teníamos que $t = \theta + \pi/2$ esto implica que $\theta = t - \pi/2$ sustituyendo en D tenemos que:

$$D = r \sin (t - \pi/2)$$

pero como nuevamente por una identidad trigonométrica, tenemos que:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad *$$

entonces:

$$\sin (t - \pi/2) = \sin t \cos \pi/2 - \cos t \sin \pi/2$$

por lo tanto:

$$\sin(t - \pi/2) = -\cos t$$

sustituyendo en D :

$$D = -r \cos t$$

por lo tanto:

$$y(t) = r - r \cos t$$

$$y(t) = r(1 - \cos t)$$

En resumen tenemos que las ecuaciones paramétricas de la cicloide son:

$$x(t) = r(t - \sin t)$$

$$y(t) = r(1 - \cos t)$$

Tratemos, al igual como se hizo con la recta y con el círculo, de obtener la ecuación cartesiana de la cicloide.

Tenemos que:

$$x = r(t - \operatorname{sen} t)$$

$$y = r(1 - \cos t)$$

entonces:

$$x/r = t - \operatorname{sen} t \dots\dots (1)$$

$$y/r = 1 - \cos t \dots\dots (2)$$

$$\cos t = 1 - y/r \dots\dots (3)$$

$$t = \arccos(1 - y/r) \dots\dots (4)$$

hasta aquí vemos que se dificulta el despeje de t en (1); pero

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \dots\dots (5)$$

Pero $\cos t = (r - y)/r$, entonces:

$$\operatorname{sen} t = \pm [1 - \cos^2 t]^{1/2} \dots\dots (6)$$

De tres tenemos que $\cos t = \frac{(r-y)}{r}$ sustituyendo en (6):

$$\operatorname{sen} t = \pm \left[1 - \frac{(r-y)^2}{r^2} \right]^{1/2}$$

Sustituyendo esta última expresión y la expresión (4) para t en (1) tenemos que:

$$\frac{x}{r} = \arccos \left(1 - \frac{y}{r} \right) \pm \left[1 - \frac{(r-y)^2}{r^2} \right]^{1/2}$$

por lo tanto:

$$x = r \left[\arccos \left(1 - \frac{y}{r} \right) \pm \left[1 - \frac{(r-y)^2}{r^2} \right]^{1/2} \right]$$

Nótese que x está en función de y , es decir $x = f(y)$; la expresión cartesiana de la cicloide, sin duda, es más complicada que las ecuaciones paramétricas.

Cicloide acortada:

Hablemos ahora de la cicloide acortada, que fué la segunda curva que vimos.

Supusimos que el punto fijado era la terminación de uno de los rayos de la rueda de una bicicleta, entonces lo que teníamos era que el punto estaba dentro de la circunferencia es decir:

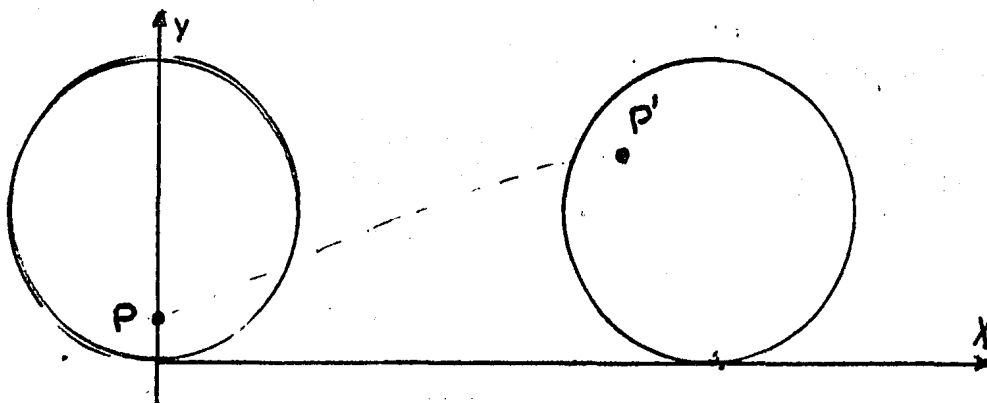


fig. 4.27

Sea C una circunferencia de radio r ; si suponemos como en el caso de la cicloide que la circunferencia empieza a roda a partir de un origen dado, sin duda alguna tendremos que el punto P está sobre el radio r .

Sea r_1 la distancia de P_1 al centro, ésta puede expresarse como:

$$r_1 = kr, \text{ con } 0 < k < 1$$

entonces habrá otra circunferencia interior imaginaria de radio

r_1 .

Si procedemos como lo hicimos anteriormente, tendremos:

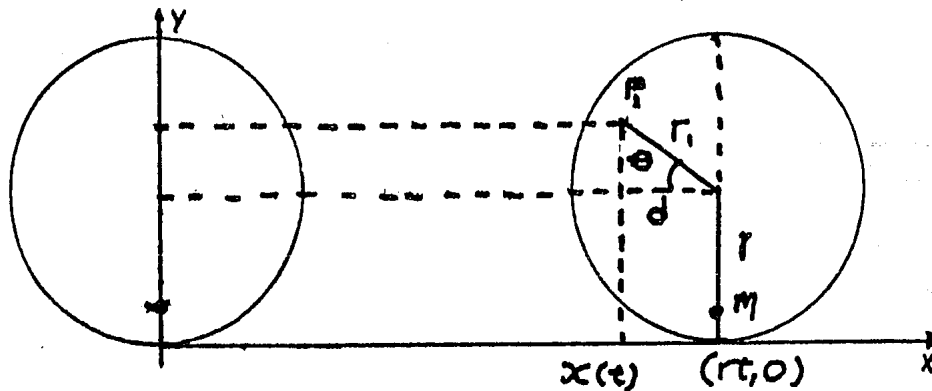


fig. 4.28

Vemos nuevamente que la componente x del punto M es rt , siendo nuestro interés saber quien es la componente $x(t)$ del punto P' , es decir quien es d .

Si hacemos un razonamiento análogo al caso anterior entonces:

$t = \theta + \pi/2$ entonces $x(t) = rt - d$ pero $d = r_1 \cos \theta$, entonces poniendo a d en función de t esto implica que:

$$d = r_1 \cos (t - \pi/2)$$

pero obtuvimos que $\cos (t - \pi/2) = \sin t$ por lo tanto:

$$d = r_1 \sin t$$

Esto implica que:

$$x(t) = rt - r_1 \sin t$$

sustituyendo a $r_1 = kr$, tenemos

$$x(t) = rt - kr \sin t = r(t - k \sin t)$$

Si comparamos las componente $x(t)$ de la cicloide y de la cicloide acortada tendremos:

$$x(t) = r(t - \sin t) \text{ y } x(t) = r(t - k \sin t)$$

es decir que la componente $x(t)$ de la cicloide acortada está afectada por un factor que me disminuye el radio de la circunferencia.

Veamos ahora que pasa con la componente $y(t)$.

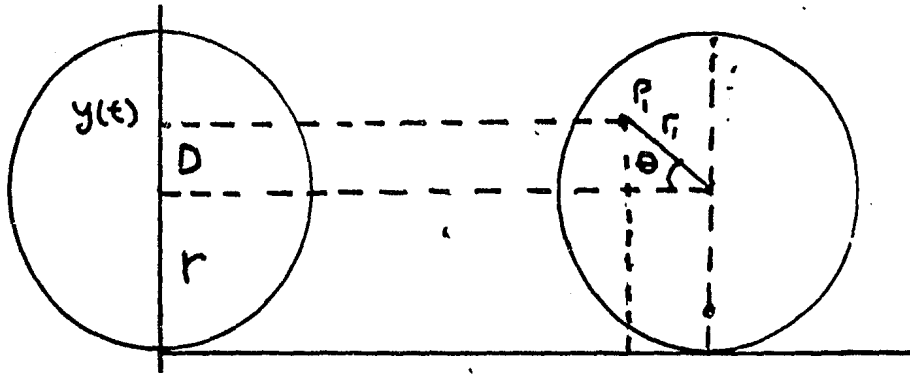


fig. 4.29

Otra vez podemos ver que:

$y(t) = r + D$ pero $D = r_1 \sin \theta$, sustituyendo a θ obtenemos:

$$y(t) = r + r_1 \sin (t - \pi/2)$$

pero obtuvimos que: $\sin (t - \pi/2) = -\cos t$

esto implica que:

$$y(t) = r - r_1 \cos t = r - kr \cos t = r(1 - k \cos t)$$

Concluyendo tenemos que las ecuaciones paramétricas de la cicloide acortada son:

$$x(t) = r(t - k \sin t)$$

$$y(t) = r(1 - k \cos t)$$

que son muy similares a las ecuaciones paramétricas de la cicloide

Cicloide Alargada:

Cicloide Alargada:

Que podemos decir ahora de las ecuaciones paramétricas de la cicloide alargada?

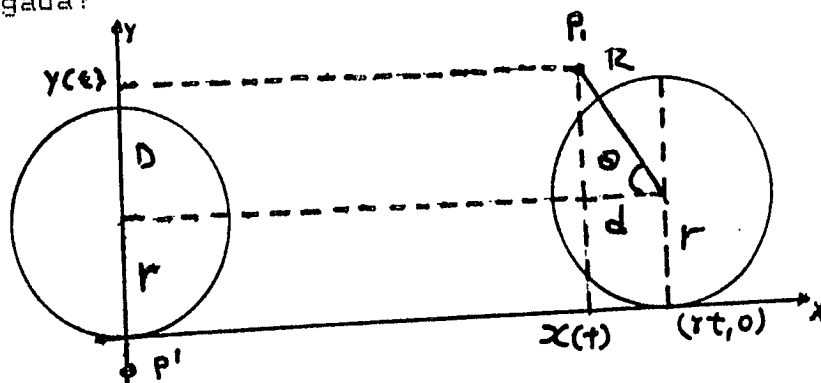


fig. 4.30

Sí, precisamente, lo que necesitamos ahora es un factor, digamos a que sea mayor que 1, es decir $R = ar$

Entonces inmediatamente podemos decir que:

$$x(t) = rt - d \text{ pero } d = R \sin t$$

esto implica que:

$$x(t) = rt - R \sin t$$

$$x(t) = rt - ar \sin t$$

$$x(t) = r(t - \arcsin t)$$

y con respecto a $y(t)$ tenemos:

$$y(t) = r + D \text{ pero } D = -R \cos t$$

esto implica que:

$$y(t) = r - R \cos t$$

$$v(t) = r - ar \cos t$$

por lo tanto:

$$y(t) = r(1 - a \cos t)$$

Hasta aquí hemos ya obtenido las ecuaciones de la cicloide en sus diferentes representaciones; ahora veremos una de sus propiedades más importantes, el *Problema de la Braquistocrona*.

Problema de la Braquistocrona:

La solución de este problema se debe a Jacobo I Bernouilli y según se cuenta que <... al llegar una tarde a su casa cansado de bregar con los conflictos de la moneda, se encontró con el reto de Juan (su hermano). Se puso inmediatamente con él, y lo resolvió en la misma tarde, simplemente, por pasar el rato>.

<La idea substancial de Jacobo fué la siguiente: se trataba de un problema de mínimo; entre todas las curvas que llevan de A a B, buscar aquella para la cual el tiempo invertido en recorrerla posea un valor mínimo>.

A continuación se proporcionaran dos formas de solucionar este problema.

Primer Solución:

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos en el plano (no contenidos en una línea recta vertical) determinar la trayectoria que ha de seguir una masa puntual tal que cayendo desde P_1 , bajo el efecto de la gravedad terrestre, utilice el menor tiempo posible para llegar a P_2 . (Cabe aclarar que si influyera sobre la masa, que cae, otra fuerza, el problema ya no sería el mismo)

Claramente, dados dos puntos en el plano, estos pueden ser unidos por una infinidad de curvas, a cada una de las cuales les corresponderá un cierto tiempo T de recorrido. Se trata pues de seleccionar de entre las posibles una para la que T sea mínimo. El problema puede abordarse de la siguiente manera: Colóquese el origen de un sistema de coordenadas en el punto P_1 , cuestión entonces es determinar una función $y = f(x)$ definida y diferenciable en el intervalo $[0, x_2]$ tal que:

i) $f(0) = 0$, $f(x_2) = y_2$ donde (x_2, y_2) son las coordenadas del punto P_2 dado.

ii) El tiempo empleado por una masa puntual en resbalar desde $P_1 = (0, 0)$ hasta $P_2(x_2, y_2)$ sea mínimo. Evidentemente se desprecia la fricción.

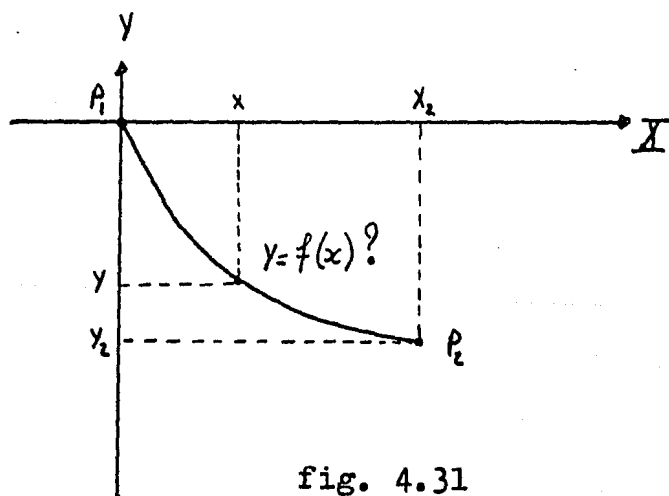


fig. 4.31

Lo que habría que hacer es expresar el tiempo de recorrido T , para cualquier curva $y = f(x)$, para después utilizar algún criterio que permita escoger f tal que T sea mínimo.

Para ello recuerdese que si una curva está dada a través de la ecuación $y = f(x)$, entonces la longitud de arco desde x_0 hasta x es:

$$S(x) = \int_{x_0}^x [1 + (y')^2]^{1/2} dx$$

por lo que:

$$\frac{ds}{dx} = [1 + y'^2(x)]^{1/2}$$

En el problema que nos ocupa, tomemos un punto (X, Y) sobre la curva $y = f(x)$. En este punto el cuerpo en movimiento habrá perdido una energía potencial mgy pero habrá ganado una energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$. De tal manera que si suponemos válida la ley de conservación de la energía entonces:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2$$

esto implica que:

$$v = (2gy)^{1/2} = \frac{ds}{dt}$$

Finalmente para calcular el tiempo de recorrido -utilizando la regla de la cadena- se tiene que:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{ds}\right) \left(\frac{ds}{dt}\right)$$

de donde no considerando los puntos singulares y tampoco los puntos de reposo, lo anterior puede ser escrito como:

$$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{ds}{dx}\right) \left(\frac{dt}{ds}\right)$$

y si se integra de ambos lados respecto a x , de esta igualdad, se determina el tiempo de recorrido a lo largo de la curva $y = f(x)$, así:

$$T = \int_{x_0}^x \left(\frac{ds}{dx}\right) \left(\frac{dt}{ds}\right) dx$$

o bien escribiendo explícitamente el integrando:

$$T[y(x)] = \int_{x_0}^x \frac{[1 + y'^2(x)]^{1/2}}{[2gy(x)]^{1/2}} dx$$

y más aun en nuestro caso particular x toma valores de 0 a x_2 por lo que:

$$T[y(X)] = \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2gy(x)}} dx$$

Esta expresión para T tiene una particularidad que la hace esencialmente diferente al tipo de expresiones con las que hasta ahora hemos trabajado. Se trata aquí de que para cada curva $y = f(X)$, la expresión anterior le asigna un valor (un real) por otro lado los límites de la integral son fijos pues así queremos construir la curva. Esto hace que las técnicas que utilizabamos en Cálculo de funciones de una variable real para optimizar no puedan ser utilizadas esta vez. Entonces debemos enfrentar el problema de una forma diferente, para lo cual previamente discutiremos un problema que nos dará luz en el procedimiento.

Un problema que ayuda: La refracción de la luz (Ley de Snell).

Un hecho físico que a nadie debe sorprender en cuanto que es muy común es el que un rayo luminoso al pasar de un medio más denso a otro menos denso cambie su trayectoria (se refracte). Esto lo que esta significando es que la velocidad de la luz es diferente en medios con diferente densidad. El problema que nos proponemos estudiar es el siguiente: Se trata de determinar el recorrido que ha de seguir un rayo de luz proveniente de una fuente A , situada en cierto medio, hasta un punto B , colocado en un segundo medio,

si es que estos están separados (fig.)

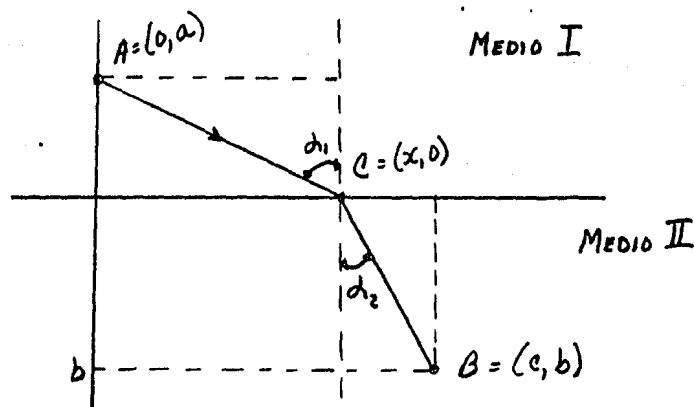


fig. 4.32

De tal manera que el tiempo empleado por el rayo luminoso sea mínimo.

Representaremos por v_1 y v_2 a la velocidad del rayo en el medio I y el medio II respectivamente, entonces el tiempo total de recorrido, desde A hasta B, tendrá el aspecto:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{AC}{v_1} + \frac{CB}{v_2}$$

donde los segmentos: $AC = (x^2 + a^2)^{1/2}$; y $CB = [b^2 + (c-x)^2]^{1/2}$

por lo que:

$$t(x) = \frac{[x^2 + a^2]^{1/2}}{v_1} + \frac{[(c-x)^2 + b^2]^{1/2}}{v_2}$$

para determinar el recorrido tal que t sea mínimo debemos derivar respecto a x .

Dado que es sabido que la trayectoria de un rayo luminoso es una línea recta, entonces el problema se reduce a determinar más bien el punto C sobre el eje horizontal, donde el rayo ha de incidir de tal suerte que llegando finalmente a B, el tiempo empleado sea mínimo. (Principio de Fermat).

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1 [x^2 + a^2]^{1/2}} - \frac{(c-x)}{v_2 [(c-x)^2 + b^2]^{1/2}}$$

pero:

$$\sin \alpha_1 = \frac{x}{[x^2 + a^2]^{1/2}} \quad \text{y} \quad \sin \alpha_2 = \frac{(c-x)}{[(c-x)^2 + b^2]^{1/2}}$$

vease figura

de donde:

$$\frac{dt}{dx} = \left(\sin \frac{\alpha_1}{v_1} \right) - \left(\sin \frac{\alpha_2}{v_2} \right) \quad **$$

Esto implica que:

$$\frac{dt}{dx} = 0 \text{ si y solo si } \sin \frac{\alpha_1}{v_1} = \sin \frac{\alpha_2}{v_2}$$

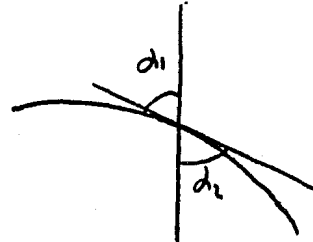
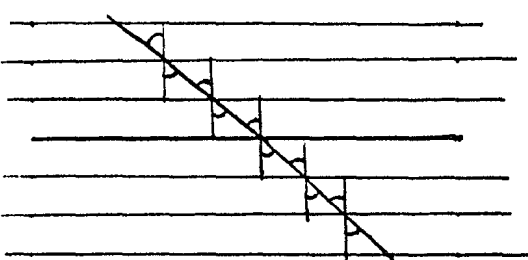


fig. 4.33

De esto podemos ver que aunque no tengamos la expresión analítica de la curva -alguna será- pero cualquiera que sea debe satisfacer con:

$$\sin \frac{\alpha}{v} = \text{cte} \text{ ----- (1)}$$

donde α y v ya han sido especificada antes.

Y esto ¿que tiene que ver con el Problema de la Braquistocrona, planteado al principio?.

**En el caso de que la densidad del medio varíe de manera continua y que la velocidad v sólo dependa de y (lo cual ocurre pues la densidad sólo es función de la coordenada vertical) podemos escribir $\frac{\sin \alpha}{v} = \text{cte.}$

Pues tiene que ver y mucho, sólo hay que hacer las identificaciones correspondientes, después de las cuales no nos quedará la menor duda de que el problema de la braquistocrona; esencialmente es el mismo que el recién discutido. Veamos:

Establecido lo anterior, se tiene según la figura que

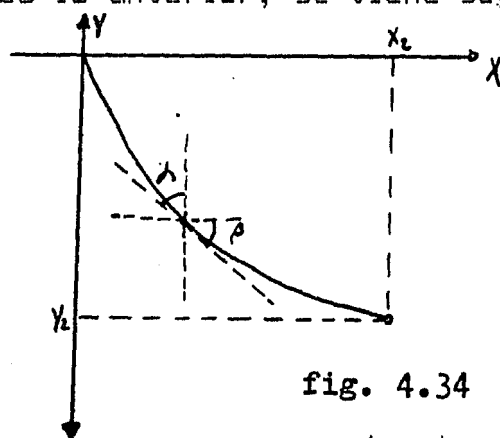


fig. 4.34

$$y' = \tan \beta$$

y como $\alpha + \beta = \pi/2$, entonces $\sin \alpha = \cos \beta$ pero $\cos \beta = 1/\sec \beta$ y utilizando la identidad: $\sec^2 \beta = 1 + \tan^2 \beta$ se tiene que:

$$\sec \beta = [1 + \tan^2 \beta]^{1/2} = [1 + y'^2(x)]^{1/2}$$

por lo que:

$$\sin \alpha = [1 + y'^2(x)]^{-1/2}$$

y entonces la igualdad 1) -que sabemos ha de cumplirse toma la forma:

$$1/[(2gy)]^{1/2} [1 + y'^2]^{1/2} = \text{cte}$$

la cual, después de efectuar algunas operaciones, puede escribirse como:

$$y(1 + y'^2) = k \quad \text{-----}(2)$$

donde k es una constante. Observando la expresión a la que hemos

llegado puede verse que en ella interviene la función que buscamos $y = f(x)$ pero además su derivada y' , elevada al cuadrado. En otras palabras a lo que se ha llegado es a una relación que debe cumplir la función buscada cualquiera que esta sea. Pero otra vez tropezamos con serias dificultades pues a partir de (2) no es inmediato determinar $y = f(x)$, pues para ello tendríamos que conocer herramientas más fuertes (Ecuaciones Diferenciales). Sin embargo a pesar de no tener estas herramientas es posible darle la vuelta al problema introduciendo un parametro t , de la siguiente manera. Sea t tal que $y' = \cot t$, entonces (2) puede ser escrita como:

$$y(1 + \cot^2 t) = k$$

esto implica que:

$$y = \frac{k}{1 + \cot^2 t} = \frac{k}{\csc^2 t}$$

o bien:

$$y = k \sin^2 t = k \left[\frac{1 - \cos 2t}{2} \right] = \left(\frac{k}{2} \right) (1 - \cos 2t)$$

así pues:

$$y = \frac{k}{2} (1 - \cos 2t)$$

que sería la representación paramétrica de y . Para obtener la representación paramétrica de x tenemos que: $y' = \frac{dy}{dx}$ si y' es distinto de cero entonces:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dy}{y'} \\ dx &= \frac{2k \sin t \cos t}{\cos t} dt = 2k \sin^2 t dt \end{aligned}$$

o bien:

$$dx = k(1 - \cos 2t) dt$$

esto implica que:

$$x(t) = k \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right] + C_2$$

donde C_2 es una constante; esto implica que:

$$x(t) = (k/2)(2t - \sin 2t) + C_2$$

Esta sería la representación paramétrica de x . Escribiendo nuevamente las ecuaciones paramétricas para x y para y tenemos:

$$x(t) = \frac{k}{2} (2t - \sin 2t) + C_2$$

$$y(t) = \frac{k}{2} (1 - \cos 2t)$$

Sean τ y a dados como $\tau = 2t$ y $a = k/2$, entonces:

$$x(\tau) = a(\tau - \sin \tau) + C_2$$

$$y(\tau) = a(1 - \cos \tau)$$

La constante C_2 puede determinarse a partir de la condición de que en $t=0$, $X=Y=0$, o equivalentemente de que $\tau=0$, $X=Y=0$, de donde resulta que la ecuación paramétrica (el parámetro es τ), de la trayectoria que ha de seguir el cuerpo en *caída* tal que el tiempo empleado sea mínimo es:

$$x(\tau) = a(\tau - \sin \tau)$$

$$y(\tau) = a(1 - \cos \tau)$$

Las ecuaciones son la representación paramétrica de una cicloide que era lo que queríamos demostrar. Pasemos ahora a la segunda solución.

Segunda solución al Problema de la Braquistocrona:

Veremos ahora una segunda solución al problema de la Braquistocrona; como se mencionó con anterioridad; en esta parte se utilizará el Cálculo Variacional, debiendo consultar el Apéndice B para tener una noción con respecto a esta rama del Cálculo Infinitesimal.

Supongamos nuevamente que existen varias curvas que van del punto A al punto B, pero sólo una de ellas cumplirá con la característica que necesitamos, es decir, que el recorrido lo haga en el menor tiempo posible.

Consideremos que es una partícula la que va a hacer dicho recorrido, entonces de física elemental tenemos que: la velocidad de una partícula en caída libre a partir del reposo a una distancia y es:

$$v = (2gy)^{1/2} \dots \dots \dots (1)$$

como se demostró en la primera solución, y además sabemos que la distancia recorrida de una partícula con velocidad v es:

$$y = vt$$

Sea C la curva que cumple con la propiedad, entonces si particionamos a C, cualquiera de los 'trozos', por pequeños que sean, deben cumplir también con la propiedad.

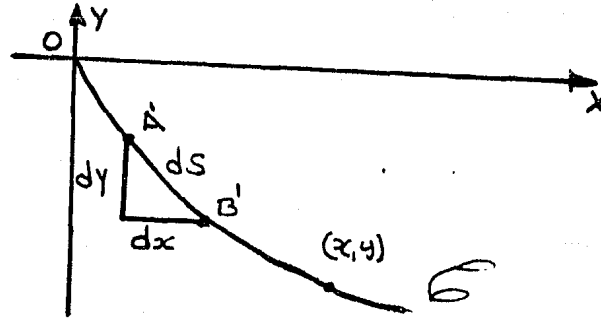


fig. 4.35

donde S representa la longitud de arco y ds la longitud de arco en un trozo y tenemos que:

$$ds = [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2}$$

pero

$$ds = [(dx)^2 (1 + (\frac{dy}{dx})^2)]^{1/2}$$

esto implica que:

$$ds = dx [1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{1/2} \text{ ----- (2)}$$

La velocidad del punto A' a B' es: $v = \frac{ds}{dt}$ pero como nos interesa calcular el tiempo del recorrido, entonces:

$$dt = \frac{ds}{v} \text{ ----- (3)}$$

pero de (1) tenemos que:

$$v = (2gy)^{1/2}$$

sustituyendo esta ultima y la (2) en la (3), tenemos:

$$dt = \frac{dx [1 + (dy/dx)^2]^{1/2}}{[2gy]^{1/2}}$$

Para encontrar el recorrido total del punto de origen al punto (x, y) integramos:

$$t = \frac{1}{(2g)^{1/2}} \int [1 + (\frac{dy}{dx})^2 / y]^{1/2} dx$$

Utilizando un método del calculo variacional para resolver este tipo de problemas; tenemos que esta funcional es de forma simple y su función subintegral no contiene explícitamente a x .

por lo tanto la podemos resolver por la ecuación de Euler* que tiene la primera integral $F - y'F_{y'} = C$ por ser $F = F(y, y')$, entonces en nuestro caso tenemos:

$$F = [1 + (dy/dx)^2/y]^{1/2}$$

pero $dy/dx = y'$ por lo tanto sustituyendo en $F - y'F_{y'} = C$

$$\begin{aligned} \frac{1 + y'^2}{y^{1/2}} - \frac{y'^2}{[y(1 + y'^2)]^{1/2}} &= C \\ \frac{[1 + y'^2 - y'^2]}{[y(1 + y'^2)]^{1/2}} &= C \\ \frac{1}{[y(1 + y'^2)]^{1/2}} &= C \end{aligned}$$

o bien

$$y(1 + y'^2) = C_1 \text{-----(4)}$$

Consideremos ahora el trozo de A' a B' aumentado un cierto número de veces:

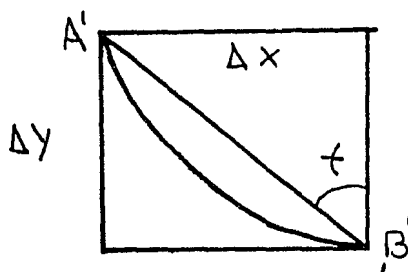


fig. 4.36

Del diagrama podemos ver que:

$$\tan t = \Delta x / \Delta y$$

pero como esto es muy pequeño, entonces t tiende a cero por lo tanto $\Delta x / \Delta y = dx/dy$, pero nosotros necesitamos $dy/dx = y'$ por lo tanto $y' = \cot t$.

Sustituyendo esta igualdad en (4) tenemos:

$$y(1 + \cot^2 t) = C_1$$

esto implica que

$$y = \frac{C_1}{1 + \cot^2 t} = C_1 \sin^2 t$$

por lo tanto

$$y = \frac{C_1}{2} (1 - \cos 2t)$$

pero $y' = dy/dx$ esto implica que

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dy}{y'} = \frac{(C_1 \sin 2t)'}{\cot t} \\ dx &= \frac{2C_1 \sin t \cos t dt}{\cot t} \\ dx &= \frac{2C_1 \sin t \cos t dt}{(\cos t / \sin t)} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$dx = 2C_1 \sin^2 t dt = C_1 (1 - \cos 2t) dt.$$

integrando esta última expresión tenemos que:

$$\begin{aligned} x &= C_1 \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C_2 \\ x &= \frac{C_1}{2} (2t - \sin 2t) + C_2 \end{aligned}$$

Sustituyendo a $2t = t$ y se toma $C_2 = 0$ puesto que para $y = 0$ es

$x = 0$ entonces

$$X = A (t - \sin t) ; Y = A (1 - \cos t)$$

donde $A = \frac{C_1}{2}$ que coinciden con las ecuaciones paramétricas de la cicloide, obtenidas con anterioridad.

Hasta aquí hemos concluido con las dos soluciones al problema de la Braquistocrona. Continuemos con la construcción analítica del resto de las curvas que vimos después de plantear el problema mencionado.

Epicicloide o Nefroide:

A continuación obtendremos las ecuaciones paramétricas de la curva epicicloidal o nefroide generada al girar, sin deslizarse, un círculo de radio r alrededor de un círculo fijo de radio R , es decir que el radio del círculo fijo es mayor que el que gira ($R > r$)

Supongamos que el centro de nuestro círculo fijo es el punto O de un sistema de coordenadas cartesianas XY ; así mismo en el momento inicial, es decir $t=0$, coinciden en un punto A . (fig.4.37)

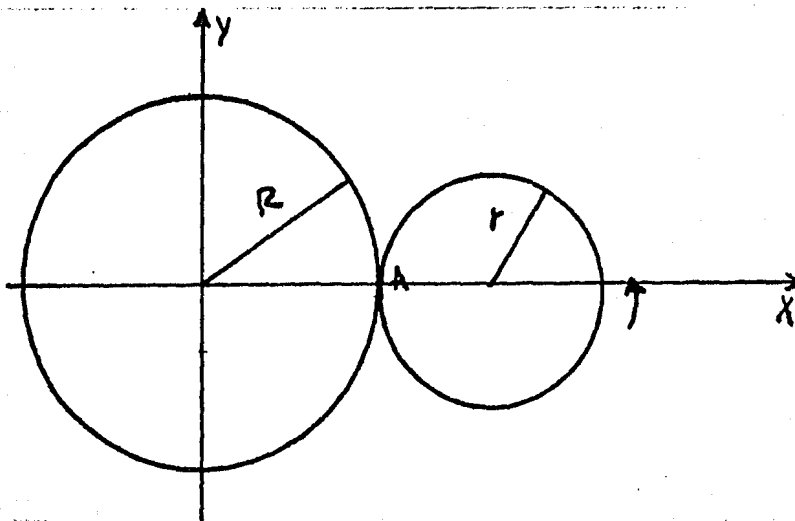


fig. 4.37

Después de un lapso de tiempo t , el círculo pequeño habrá girado sobre el círculo grande, obteniéndose la siguiente situación.

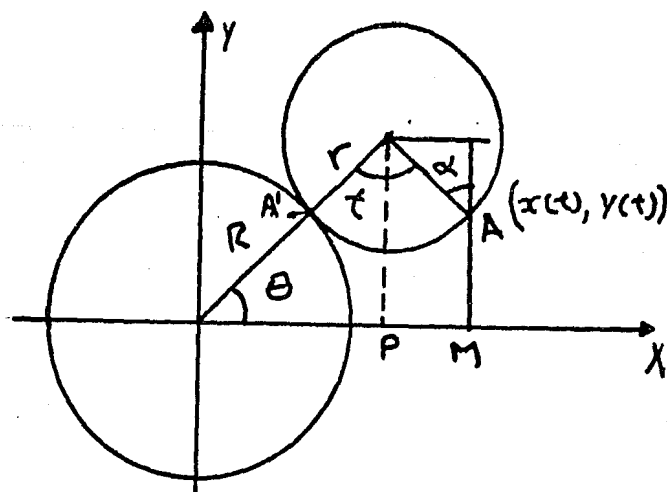


fig. 4.38

Nuestro interés ahora es conocer quien es la componente $x(t)$. De la figura anterior, podemos ver que la componente:

$$x(t) = OP + PM$$

pero: $OP = (R + r) \cos \theta$. Veamos ahora quien es la distancia PM .

Si llamamos α al ángulo del triángulo rectángulo, entonces:

$$PM = r \sin \alpha.$$

Analicemos ahora el círculo por separado:

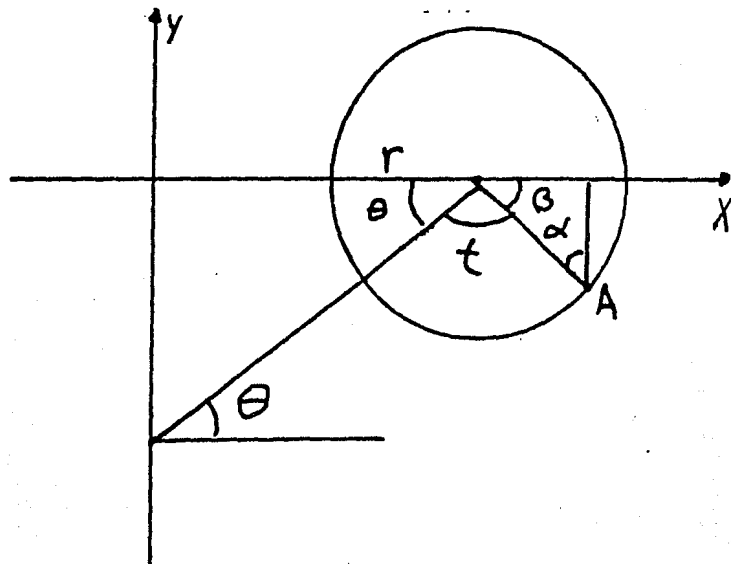


fig. 4.39

Por el siguiente postulado, tenemos la igualdad de los ángulos θ .

Si dos paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos-internos son iguales.

Llamemos β al ángulo restante para así formar los ángulos suplementarios, es decir: $180^\circ = \theta + t + \beta$

esto implica que:

$$\beta = 180^\circ - \theta - t \text{-----(1)}$$

pero como α y β son ángulos complementarios, es decir $\alpha + \beta = 90^\circ$,

tenemos que $\alpha = 90^\circ - \beta$, pero por (1) tenemos:

$$\alpha = 90^\circ - (180^\circ - \theta - t)$$

por lo tanto:

$$\alpha = \theta + t - 90^\circ$$

pero teníamos que:

$$PM = r \sin \alpha$$

por lo tanto:

$$PM = r \sin (\theta + t - 90^\circ)$$

Pero con base a la identidad trigonométrica, tenemos que:

$$PM = r[\sin(\theta+t)\cos 90^\circ - \cos(\theta+t)\sin 90^\circ]$$

resultando:

$$PM = r[-\cos(\theta + t)]$$

$$PM = -r\cos(\theta + t)$$

como:

$$x(t) = OQ + PM$$

$$x(t) = (R + r)\cos \theta - r \cos(\theta + t)$$

Pero como la circunferencia pequeña rueda sin resbalar, entonces la longitud del arco AA' (fig.) será:

$$AA' = R\theta = rt \text{ esto implica que } \theta = (r/R)t$$

Sustituyendo esta última expresión en $x(t)$ resulta:

$$x(t) = (R+r)\cos(r/R)t - r\cos[(r/R)t + t]$$

$$x(t) = (R+r)\cos(r/R)t - r\cos[t(r+R/R)]$$

Obteniendo así la ecuación paramétrica de la componente $x(t)$.

Obtengamos ahora $y(t)$.

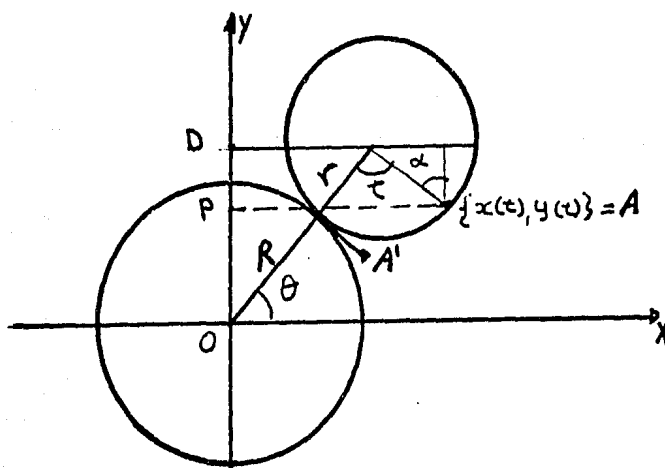


fig. 4.40

$$y(t) = OD - PD \text{ pero } OD = (R + r)\sin \theta$$

y $PD = r \cos \alpha$, sustituyendo a α , tenemos:

$$PD = r \cos(\theta + t - 90^\circ)$$

$$= r \cos(\theta + t)\cos 90^\circ + \sin(\theta + t)\sin 90^\circ$$

esto implica:

$$PD = r \sin(\theta + t)$$

sustituyendo a θ , entonces:

$$y(t) = OD - PD$$

$$y(t) = (R + r)\sin(r/R)t - r \sin[(r/R)t + t]$$

$$y(t) = (R + r)\sin(r/R)t - r \sin[t(r+R/R)]$$

Resultando entonces que las ecuaciones paramétricas buscadas son:

$$x(t) = (R+r)\cos(r/R)t - r \cos(r+R)/R)t$$

$$y(t) = (R+r)\sin(r/R)t - r \sin[(r+R)/R]t$$

La trayectoria de estas ecuaciones es una epicicloide, o nefroide.

Cardioide:

Consideremos ahora el caso particular cuando $r = R$, entonces:

$$x(t) = 2R\cos t - R \cos 2t$$

$$y(t) = 2R\sin t - R \sin 2t$$

Pero estas ecuaciones paramétricas corresponden a una de las curvas que vimos, que fue la Cardioide.

Hipocicloide o Curva de Steiner:

Hicimos una variante con la cual obtuvimos otra curva la hipocicloide o curva de Steiner.

La variante era que ahora la circunferencia pequeña de radio r va a rodar sin deslizarse por dentro de una circunferencia grande fija con centro en el origen y radio R ; supongamos que en el tiempo $t = 0$ coinciden en un punto fijo A , entonces tendremos graficamente la siguiente situación:

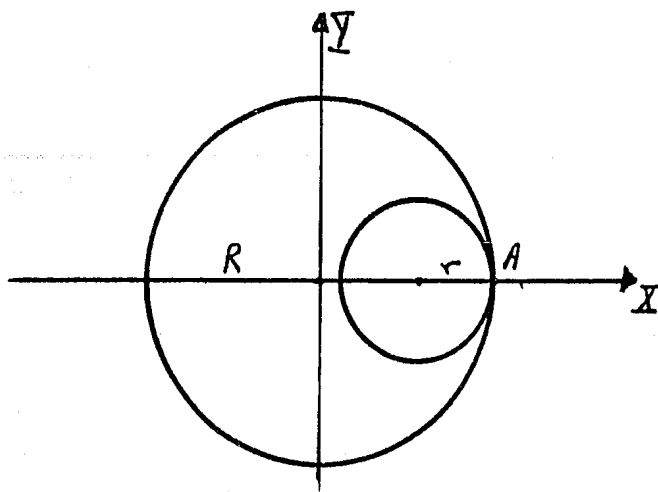


fig. 4.41

Después de un momento t nuestra circunferencia pequeña habrá rodado cierta longitud de arco, observando que:

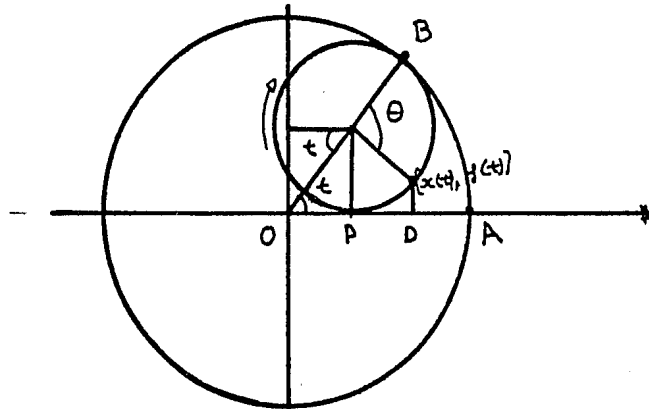


fig. 4.42

$$x(t) = OP + PD$$

pero $OP = (R - r)\cos t$, ahora calcularemos la distancia PD .

Del triángulo rectángulo inscrito en el círculo pequeño tenemos:

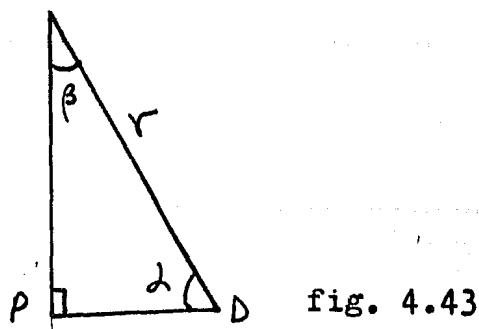


fig. 4.43

$PD = r \cos \alpha$, como α y β son complementarios, es decir:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \text{ entonces: } \alpha = 90 - \beta \text{-----(1)}$$

pero para obtener β , vemos del semicírculo de la circunferencia pequeña:

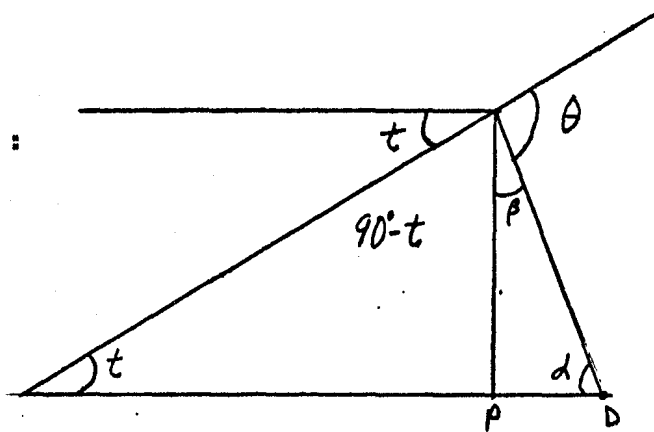


fig. 4.44

que: $180^\circ = 90^\circ - t + \beta + \theta$ entonces $\beta = 180^\circ - 90^\circ + t - \theta$

pero $\beta = 90^\circ + t - \theta$, sustituyendo en (1)

$$\alpha = 90^\circ - (90^\circ + t - \theta)$$

$$\alpha = \theta - t$$

entonces:

$$PD = r \cos(\theta - t)$$

Como:

$$x(t) = OP + PD$$

$$x(t) = (R - r) \cos t + r \cos(\theta - t) \text{-----(2)}$$

Por otro lado tenemos de la fig. que: el arco AB es igual al

arco CB, esto implica: $Rt = r\theta$, entonces $\theta = (R/r)t$,
sustituyendo en (2):

$$x(t) = (R - r)\cos t + r\cos[(R/r)t - t]$$

$$x(t) = (R - r)\cos t + r\cos[(R-r)/r]t$$

Si hacemos un razonamiento similar obtendremos a $y(t)$.

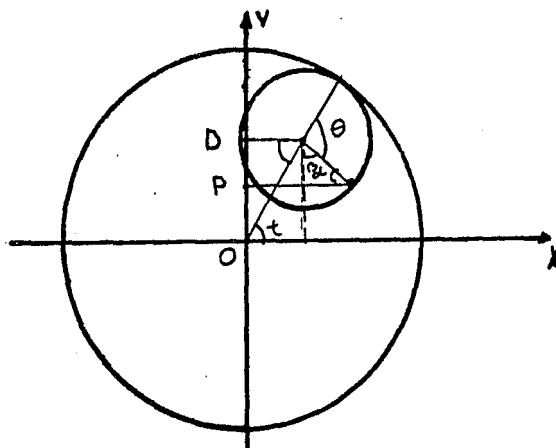


fig. 4.45

$y(t) = OD - DP$ pero $OD = (R - r)\sin t$ y $DP = r\sin \alpha$, esto
implica que:

$$DP = r\sin(\theta - t)$$

es decir:

$$y(t) = (R - r)\sin t - r\sin(\theta - t)$$

$$y(t) = (R - r)\sin t - r\sin[(R/r)t - t]$$

$$y(t) = (R - r)\sin t - r\sin[(R - r)/r]t$$

Por lo tanto las ecuaciones paramétricas de la curva generada al
girar un círculo de radio r dentro de otro círculo de radio R son:

$$x(t) = (R - r)\cos t + r\cos[(R-r)/r]t$$

$$y(t) = (R - r)\sin t - r\sin[(R-r)/r]t$$

resultando ser una hipocicloide.

Astroide:

Veamos que sucede si $r = R/4$, sustituyendo:

$$x(t) = [R - (R/4)]\cos t + (R/4)\cos[R - (R/4)]/(R/4)t$$

$$x(t) = (3/4)R\cos t + (R/4)\cos 3t$$

analogamente:

$$y(t) = (3/4)R\sin t - (R/4)\sin 3t$$

escombrando en el baúl de las identidades trigonométricas, tenemos que:

$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$$

$$\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$$

entonces:

$$x(t) = (3/4)R\cos t + (R/4)(4\cos^3 t - 3\cos t)$$

$$x(t) = (3/4)R\cos t + R\cos^3 t - (3/4)R\cos t$$

$$x(t) = R\cos^3 t \text{-----(1)}$$

$$y(t) = (3/4)R\sin t - (R/4)(3\sin t - 4\sin^3 t)$$

$$y(t) = (3/4)R\sin t - (3/4)R\sin t + R\sin^3 t$$

$$y(t) = R\sin^3 t \text{-----(2)}$$

Siendo (1) y (2) las ecuaciones paramétricas de la astroide.

Segmento de Recta:

Analicemos ahora el caso si $r = R/2$, sustituyendo en:

$$x(t) = (R - r)\cos t + r\cos[(R - r)/r]t$$

$$x(t) = (R/2)\cos t + (R/2)\cos [(R - (R/2))/(R/2)]t$$

$$x(t) = (R/2)\cos t + (R/2)\cos t$$

$$x(t) = R\cos t$$

Para $y(t)$ tenemos:

$$y(t) = (R/2)\sin t - (R/2)\sin t = 0$$

Lo cual significa que la trayectoria del punto fijado se desplaza sobre el diametro horizontal; siendo ésta la última curva que vimos.

A través de los rodamientos nos hemos encontrado con curvas muy interesantes como la cicloide, la cual varía de forma cuando se hace variar el parámetro, se acorta o se alarga y sin duda lo más importante en esta curva es haber sido la fuente para el desarrollo de una parte del Cálculo Infinitesimal: el Cálculo de Variaciones.

También podemos comprobar, una vez más, que surgen curvas trazos o trayectorias realmente sorprendentes, en el momento en que empieza a rodar nuestro punto fijado.

Lo antes dicho coincide plenamente con la definición de curva que hemos venido trabajando.

Veamos ahora otro tipo de curvas que nos harán desarrollar bastante nuestra imaginación: las figuras de Lissajous.

Si bien la destreza humana hace, a toda costa, una variedad de inventos encaminados al mismo fin; pero nunca legará un invento más hermoso, ni más simple, ni más directo como lo hace la naturaleza, porque en sus inventos nada hace falta ni nada es superfluo.

Leonardo Da Vinci.

FIGURAS DE LISSAJOUS

En este capítulo veremos una muestra más de como el hombre, a través del tiempo, va plasmando figuras tan extraordinarias como las de la figuras 5.1 .

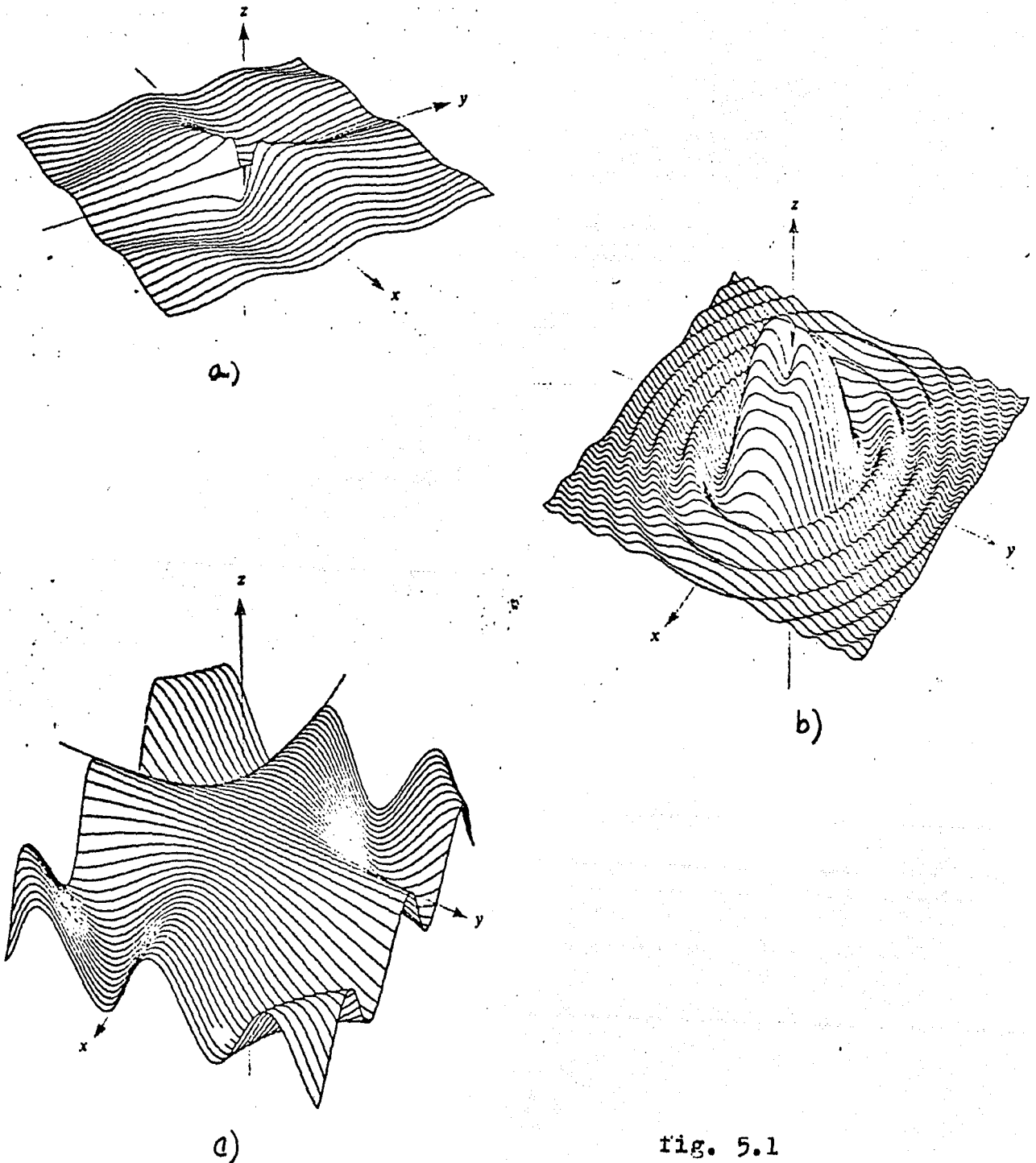
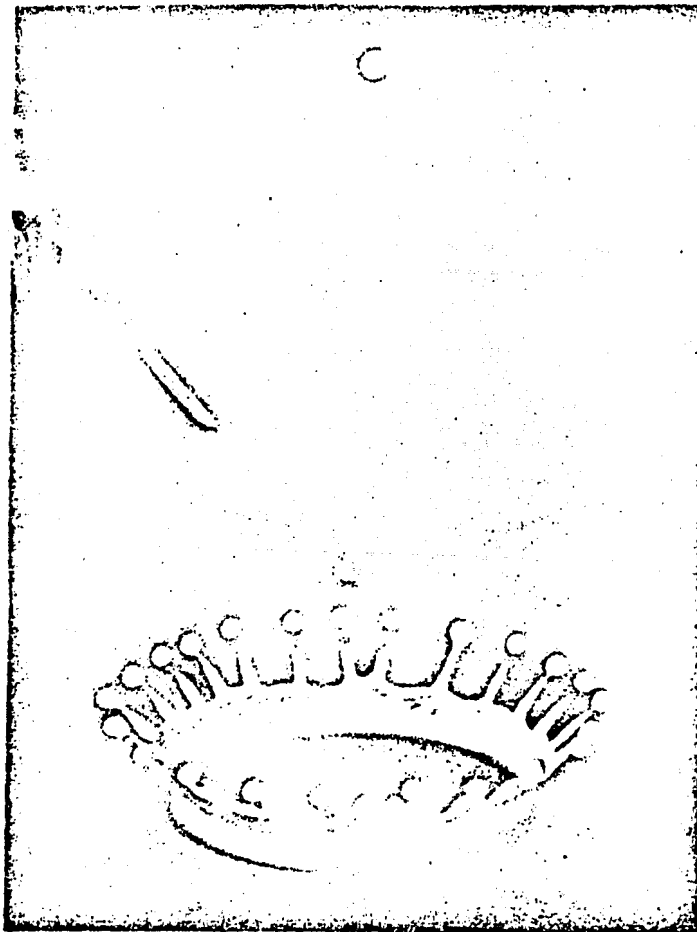


fig. 5.1

Todo el mundo alguna vez hemos extendido un mantel sobre una mesa o una sabana o una colcha sobre una cama. Las ondas que se hacen en el momento de extender el manto al aire y dejar caer sobre la superficie, son curvas que pueden asemejarse mucho a las de la figura anterior. (a) ó (c)

O bien cuando en un recipiente, que contiene agua o crema o cualquier otro líquido, dejamos caer una gota del mismo líquido; se pueden admirar formas como las de la figura 5.1 . (b) ó (fig. 5.2)



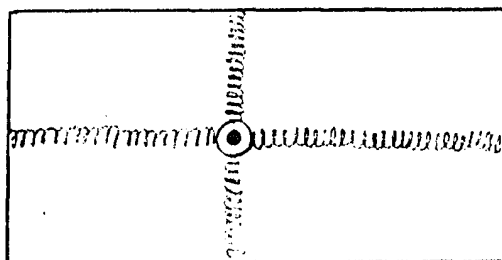
An instantaneous photograph of a 'splash' of milk. From Harold E. Edgerton
Massachusetts Institute of Technology

fig. 5.2

Hemos visto como se generan curvas con ejemplos muy cotidianos; analicemos dos ejemplos menos cotidianos, pero que también nos generan curvas.

Imaginemos ahora que tenemos una lentejuela atada a dos resortes mutuamente perpendiculares, como se muestra en la figura ; y además consideremos que las paredes del rectángulo son rígidas y también que las únicas fuerzas que se ejercen sobre la lentejuela son las debidas al par de resortes.

fig. 5.3



Si suponemos que el centro del rectángulo es la posición de equilibrio del objeto, es decir, la posición en la que la lentejuela no se mueve y en donde no actúa ninguna fuerza, entonces podemos hacer coincidir tal punto con el origen de un sistema de coordenadas.

Cada fuerza que perturbe a la lentejuela le describirá una trayectoria; dependiendo de las constantes de fuerza de cada resorte, pudiéndose admirar curvas tales como las de la figura 5.4

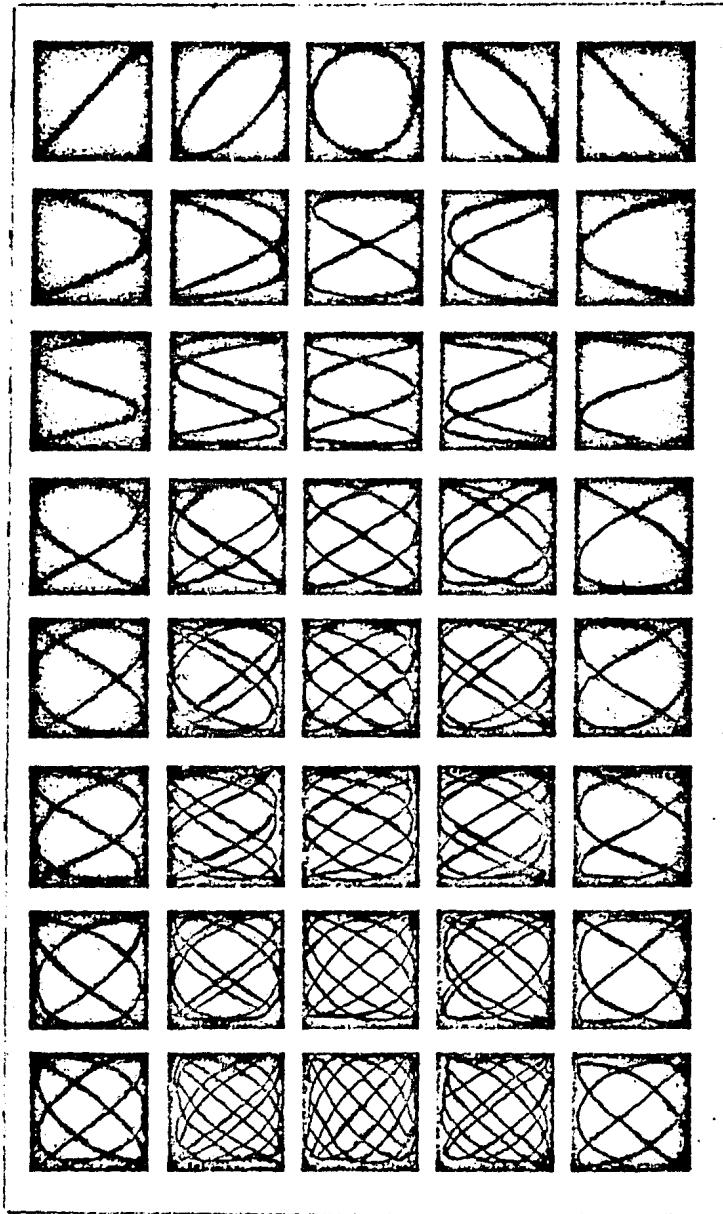


fig. 5.4

El siguiente mecanismo consiste en generar a una curva en particular: el círculo, en un plano.

Suponiendo que tenemos un péndulo muy especial, que oscila tanto a la izquierda y a la derecha como para adelante y para atrás.

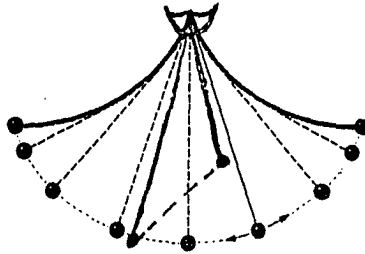


fig. 5.5

Supongamos además que abajo del péndulo se encuentra un plano donde se registra cada movimiento del péndulo, es decir que si el péndulo está en reposo, coincide con el punto origen en el plano, si el péndulo se mueve, entonces dejará graficado un punto hasta donde oscile.

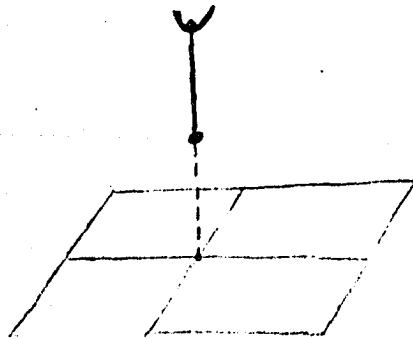


fig.5.6

Supongamos que del lado derecho llega al péndulo una onda cosenoidal y por enfrente hacia el péndulo recibe una onda senoidal, entonces cada punto que deje graficado el péndulo tendrá la forma $(\cos, \sin)$, es decir que estará describiendo
-> un círculo

Consideremos ahora el lugar geométrico que se obtiene al graficar las curvas descritas por las dos funciones coordenadas:

$$x(t) = \cos 2t, y(t) = \sin 2t \dots (1)$$

¿Como es esa curva?. Notemos que $\cos^2 2t + \sin^2 2t = 1$, esto es, que cualquier punto de la forma $(\cos 2t, \sin 2t)$ es un punto de un círculo S' .

Sin embargo, a diferencia de la curva descrita por $(\cos t, \sin t)$; en la ecuación (1) necesitamos un intervalo de longitud π para darle una vuelta completa a S' . Es decir, se recorre a S' con el doble de la velocidad.

En general, la curva con funciones coordenadas:

$$x(t) = \cos wt, y(t) = \sin wt$$

recorre S' a contrareloj y le dá una vuelta completa en $2\pi/w$ unidades de tiempo.

Dado que $x(t) = \cos wt$ y $y(t) = \sin wt$ son funciones que describen oscilaciones de amplitud uno, es posible imaginarnos el movimiento del punto $(\cos wt, \sin wt)$ como el resultado conjunto de dos movimientos oscilatorios independientes: uno sobre el eje X y otro sobre el eje Y .

El oscilador en el eje horizontal tendría periodo fundamental $t = 2\pi/w$ y amplitud igual a uno, lo mismo el del eje vertical:

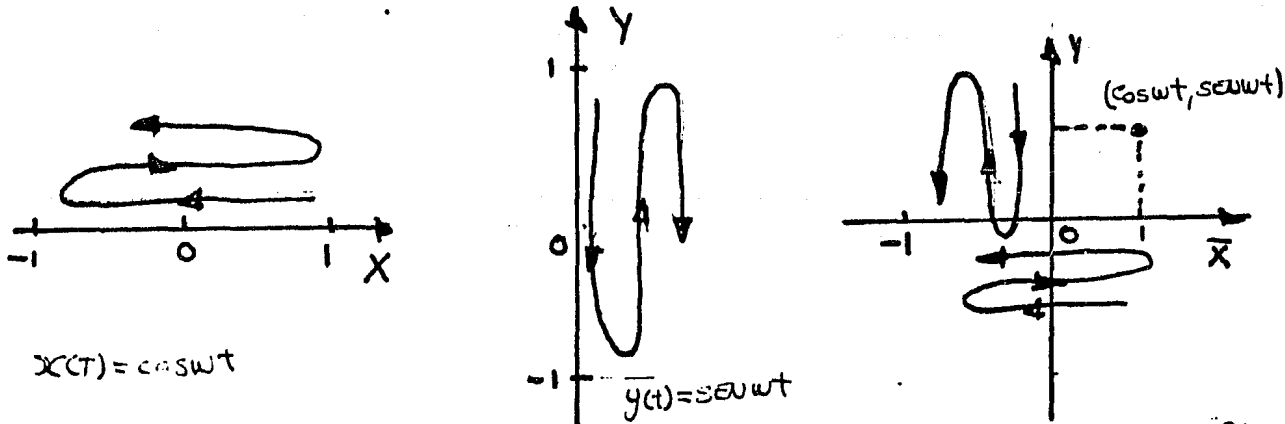


fig.5.7

A las curvas cuyas funciones coordenadas son funciones armónicas se les llama Figuras de Lissajous, (Jules Antoine Lissajous 1822 - 1880)

Si quisieramos encontrar la figura de Lissajous correspondiente a las funciones coordenadas:

$$x(t) = \cos t \text{ y } y(t) = \sin 2t,$$

vemos que el oscilador en el eje horizontal tendría periodo 2π y que el oscilador en el eje vertical lo tendría de π .

En tales condiciones parece claro que la figura que se obtenga no va a ser un círculo.

Para trazar las figuras de Lissajous se recomienda proceder de la siguiente manera:

- 1) Trace los ejes coordenados y prolongue el eje X hacia la derecha y el eje Y hacia abajo.
- 2) Trace perpendiculares a los ejes X y Y a la derecha y abajo del origen. Considere las intersecciones de estas perpendiculares con los ejes como orígenes de nuevos sistemas coordenados. A estos

nuevos ejes llamémosles ejes de la coordenada t .

3). En cada uno de los nuevos sistemas grafique la función coordenada respectiva y finalmente, localice en el sistema original el punto de coordenadas $\{x(t_0), y(t_0)\}$, trasladando estas coordenadas desde las gráficas auxiliares.

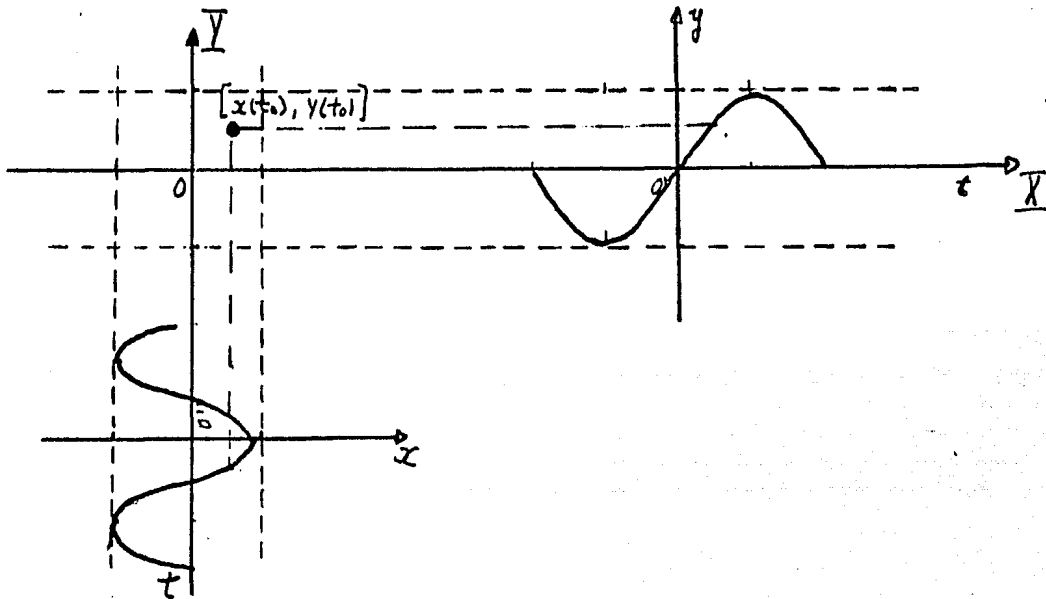


fig. 5.8

El punto $\{x(t_0), y(t_0)\}$ pertenece a la Figura de Lissajous.

Segmento de Recta:

Consideremos ahora las siguientes funciones:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta), y(t) = A_2 \cos(\omega t + \delta)$$

donde A_1 y A_2 son constantes que me indica la amplitud de la función; ω y δ también son constantes pero me indican el periodo.

Procedamos ahora como lo indican las instrucciones de las figuras de Lissajous.

1) Trazamos los ejes coordenados y prolongamos el eje X hacia la derecha y el eje Y hacia abajo.

2) Trazamos perpendiculares a los ejes X e Y a la derecha y abajo del origen, respectivamente, y consideremos las intersecciones de estas perpendiculares con los ejes como origen de nuevos sistemas coordenados, considerándolos como ejes de la coordenada t.

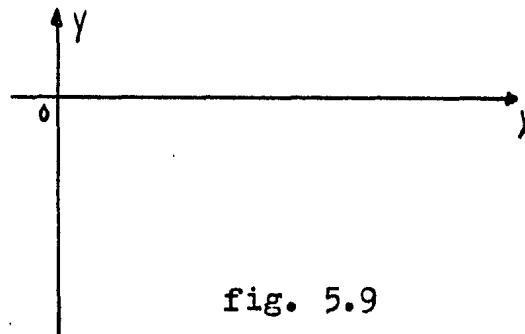


fig. 5.9

Grafiquemos ahora las funciones

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta), \quad y(t) = A_2 \cos(\omega t + \delta)$$

Localicemos en el sistema original el punto de coordenadas $[x(t_0), y(t_0)]$, "trasladando" estas coordenadas desde las gráficas auxiliares.

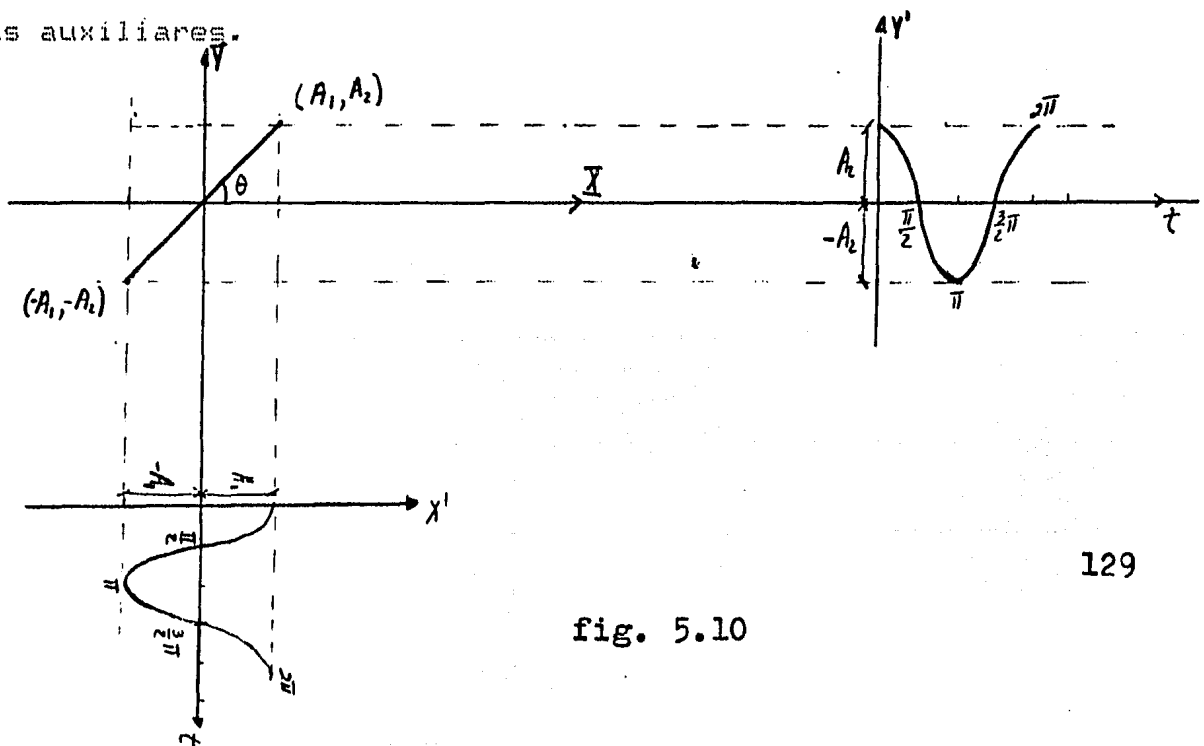


fig. 5.10

La figura de Lissajous obtenida es un segmento de recta, veamos ahora que longitud tiene:

$$d = [(A_1 - (-A_1))^2 + (A_2 - (-A_2))^2]^{1/2} \\ = 2[A_1^2 + A_2^2]^{1/2}$$

Como el segmento de recta forma un ángulo con el eje x original esto implica que:

$$\tan \theta = A_2/A_1$$

por lo tanto:

$$\theta = \arctan A_2/A_1$$

es decir que la inclinación de la recta depende de la amplitud que presenten nuestras funciones $x(t)$ y $y(t)$

Parábola

Consideremos ahora las siguientes funciones:

$$x(t) = A_1 \sin(2t+\delta), \quad y(t) = A_2 \sin(t+\alpha),$$

veremos y demostraremos que la figura de Lissajous que se obtiene a partir de estas funciones es una parábola que satisface la ecuación :

$$x = A_1 [1 - 2y^2/A_2^2]$$

Comenzando como en el ejercicio anterior, trazamos los ejes originales, los prolongamos, trazamos perpendiculares, graficamos las funciones $x(t)$ y $y(t)$ en los sistemas auxiliares y localizamos puntos arbitrarios $(x(t_0), y(t_0))$ en el sistema original. resultando la siguiente figura: 5.//

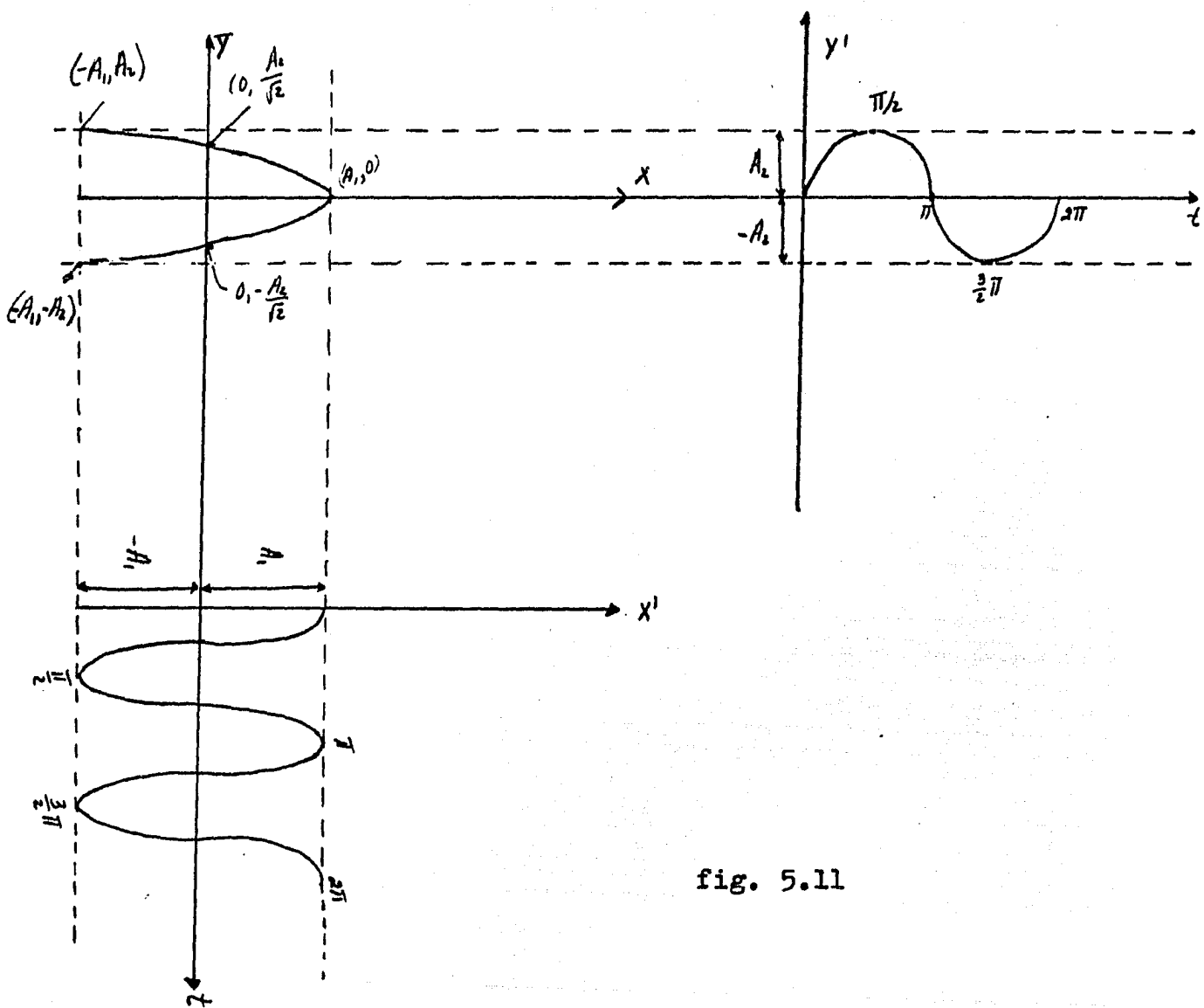


fig. 5.11

Demostremos ahora que la figura de Lissajous obtenida cumple con la siguiente ecuación:

$$x = A_1 (1 - 2y^2/A_2^2)$$

entonces:

$$x = A_1 - 2(A_1/A_2^2)y^2$$

$$x - A_1 = -2(A_1/A_2^2)y^2$$

$$y^2 = -(A_2^2/2A_1)(x - A_1)$$

Si $y = 0$ entonces:

$$-A_2^2/2A_1(x - A_1) = 0 \text{ esto implica que } x = A_1$$

Entonces hemos obtenido el punto $(x,y) = (A_1,0) = V$, es decir el vertice de la parábola.

Veamos que obtenemos si despejamos a y

$$-A_2^2/2A_1(x-A_1) = y^2$$

entonces

$$y = [-A_2^2/2A_1(x-A_1)]^{1/2}$$

si $x \leq -A_1$ entonces:

$$y = [-A_2^2/2A_1(-A_1-A_1)]^{1/2} = \pm A_2 \text{ por lo tanto } (-A_1, \pm A_2)$$

lo cual indica que mientras que x tiende a menos infinito, el valor de $\pm A_2$ me indica la ordenada positiva y negativa de la parábola, que se va extendiendo.

Ahora, si $x = 0$ tenemos

$$y = [-A_2^2/2A_1(0 - A_1)]^{1/2}$$

entonces

$$y = \pm A_2/[2]^{1/2}$$

con lo cual hemos encontrado los siguientes puntos:

$$(0, \pm A_2/(2)^{1/2})$$

Considerando graficamente la parábola de la figura

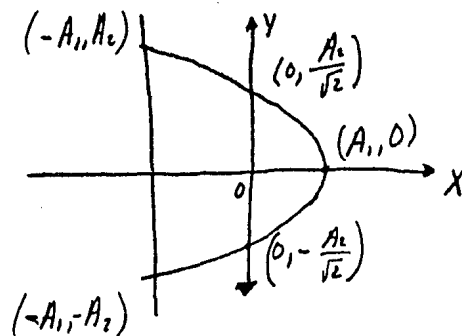


fig. 5.12

Diversas:

Procediendo como en los ejercicios anteriores obtengamos las figuras de Lissajous de las siguientes ecuaciones:

a) $x(t) = A_1 \text{sen}(wt)$; $y(t) = A_2 \text{sen}(2wt)$

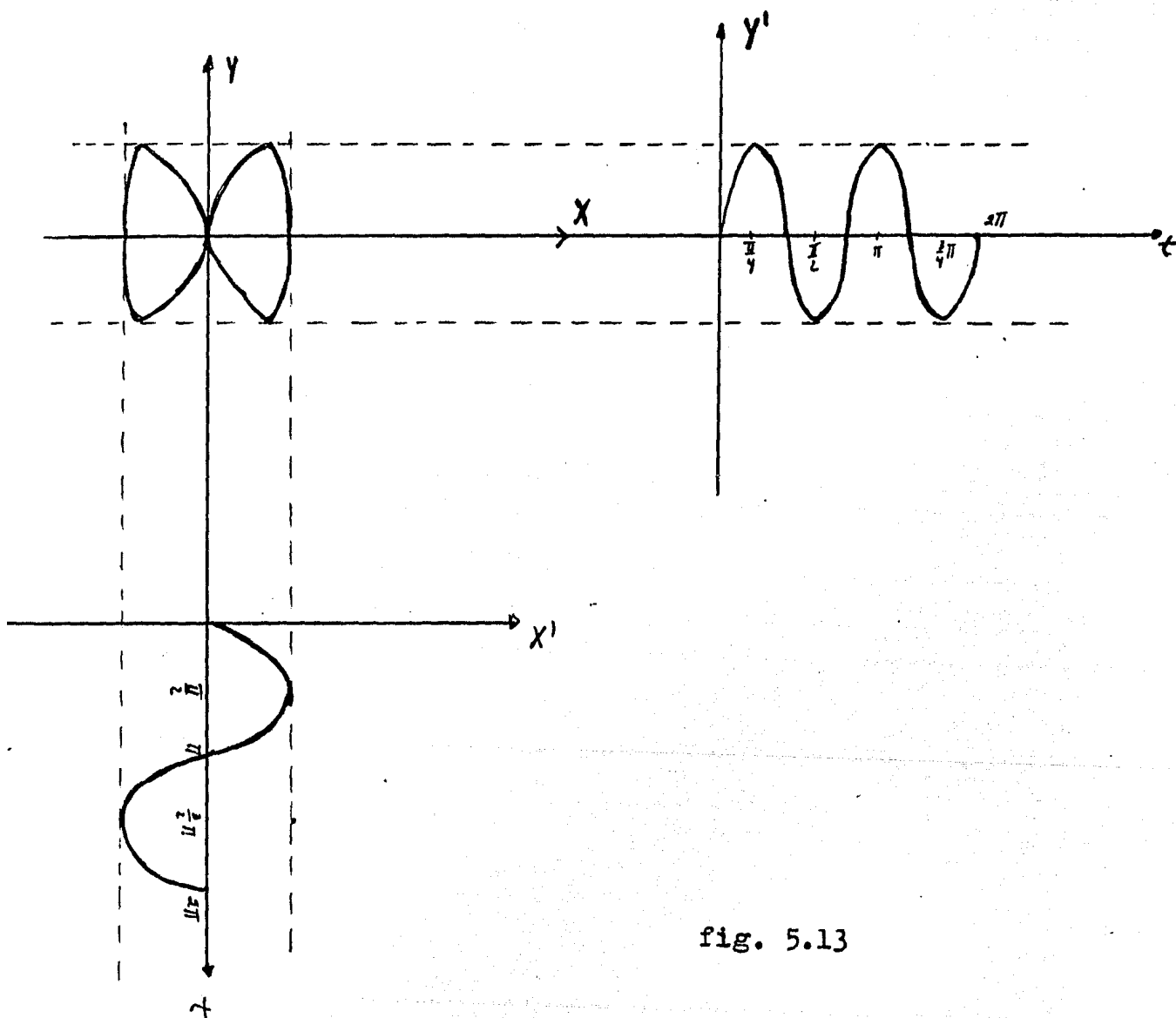


fig. 5.13

b) $x(t) = A \cos(3\omega t + \pi)$; $y(t) = A \sin(\omega t + 0)$

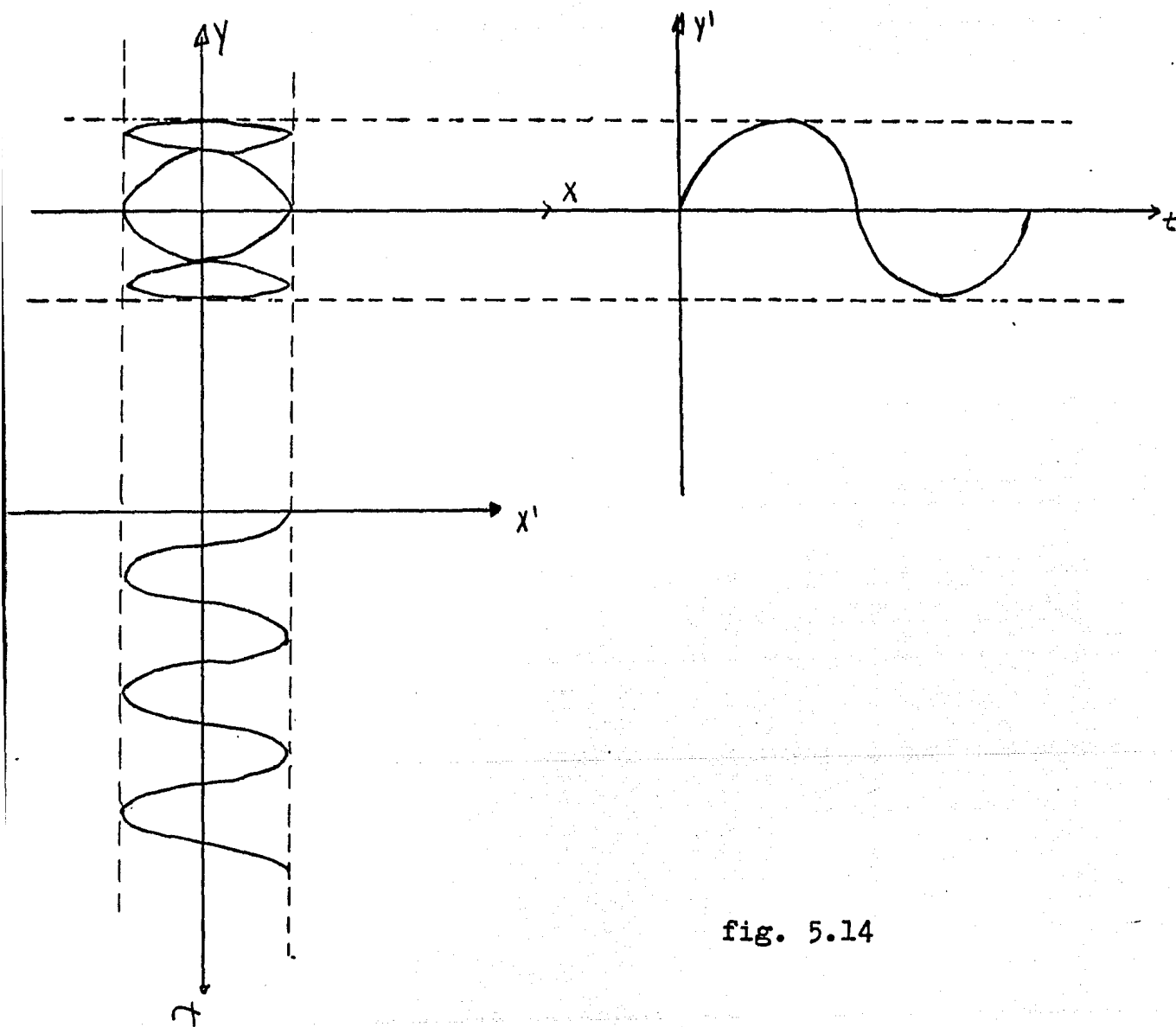


fig. 5.14

...no puedes ser un buen artista a
menos que tengas en tu poder la
capacidad universal de representar
mediante tu arte toda la variedad
de formas de la Naturaleza ...

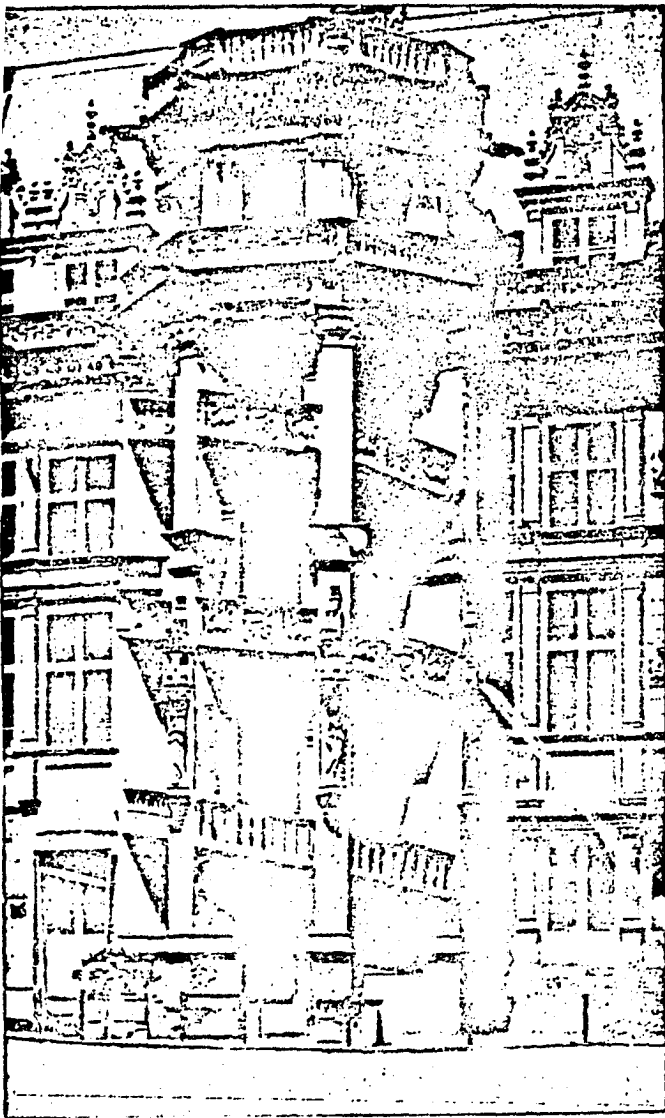
Leonardo Da Vinci.

ESPIRALES

Trataremos ahora unas curvas que realmente son maravillosas, tanto por su forma como por el lugar en donde las encontramos: las espirales. Sin embargo sólo se verán algunos aspectos de éstas, ya que el tema en sí es muy amplio.

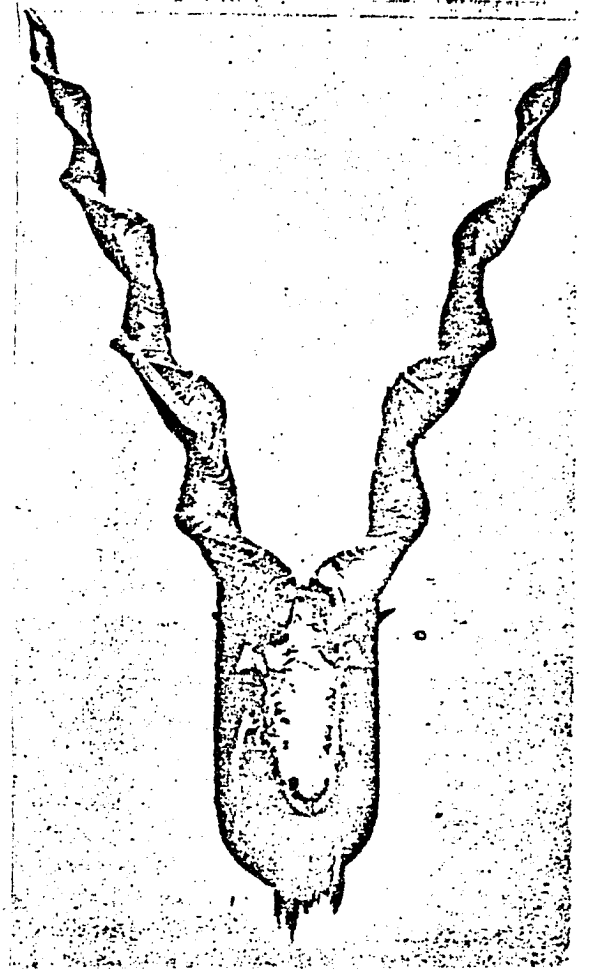
Se han llevado a cabo estudios acerca de las espirales, las cuales se encuentran en: la anatomía humana (cordón umbilical); en la anatomía animal (ventrículo izquierdo del corazón de una oveja); en la Arquitectura (fig. 6.1 solo una pequeñísima muestra); en el Arte (en *Allegoria. La Maledicenza* de G. Bellini y en *Leda* de Leonardo Da Vinci); en la Botánica, donde son una infinidad (en el crisantemo o en las hojas de un *lilium curatum*); en los cuernos de ciertos animales (fig. 2 y 3 solo por presentar las más curiosas); en las conchas y en los caracoles (*Nautilus Pompilius* fig. 6.5)*; en un tornillo, en una hélice circular.

*Por desgracia existe una gran cantidad de todos que no fué posible incluir en este trabajo, pero se recomienda consultar el libro: *The curves of Life* de T. A. Cook para mayor información.



CHATEAU OF BLOIS ON THE LOIRE (1517-1519)

6.1



6.2



6.3



Rosette spirale de la joubarbe.

6.4

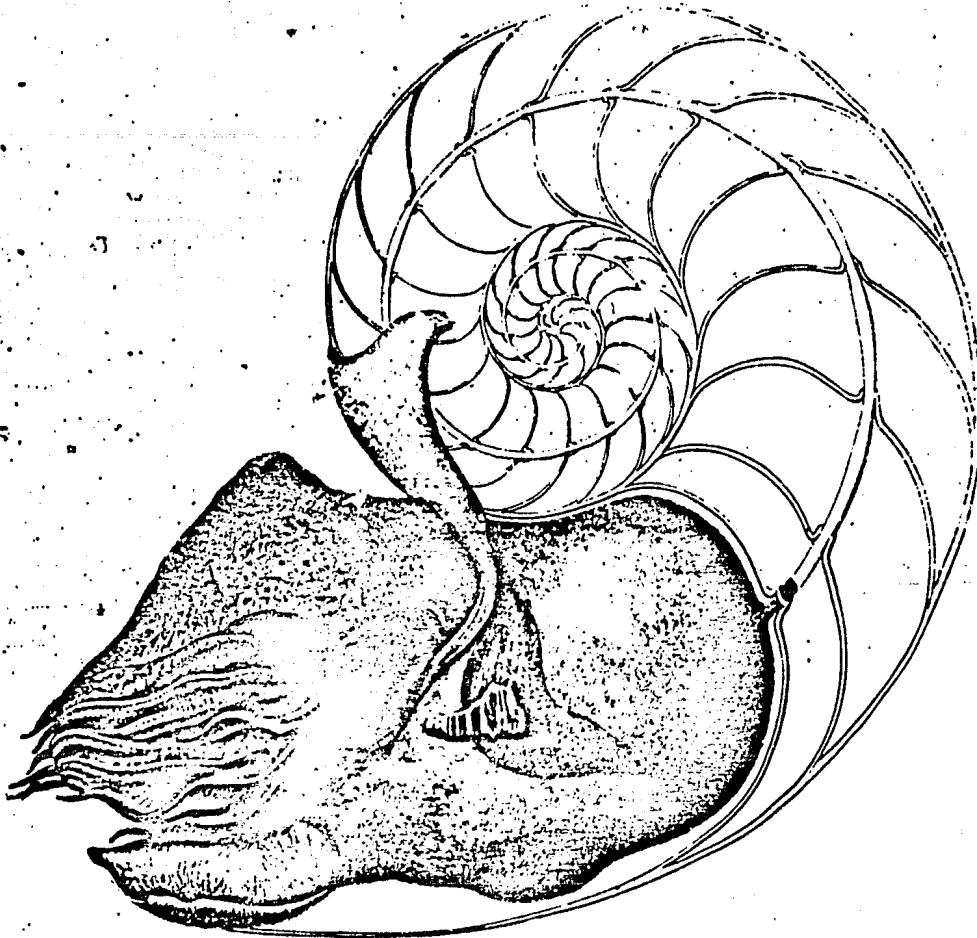
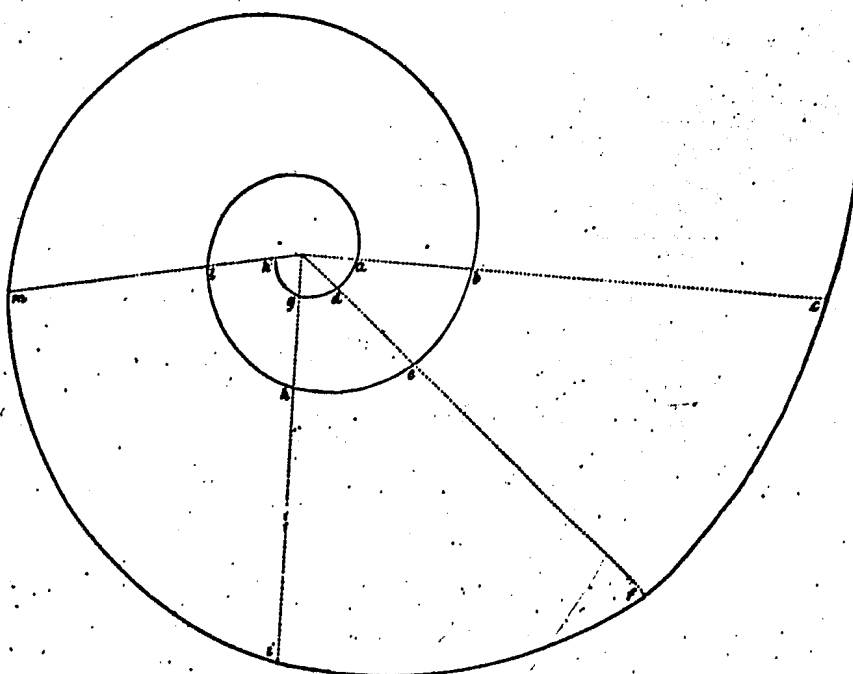


Figure 21. *Nautilus pompilius* of the tropical Pacific Ocean in transverse section.
(From Richard Owen, *Memoir on the Pearly Nautilus* (*Nautilus Pompilius*, Linn.)
..., London: W. Wood, 1832, pl. 1.)

Figure 22. The logarithmic spiral of the nautilus shell. (After Moseley, *op. cit.*
[fn. 9], pl. 9: fig. 6, p. 351.)



6.5

Como puede verse tendríamos tema, no sólo para este trabajo, sino por lo menos, para tres más; de tal forma que sólo se proporcionarían algunos ejemplos para darnos una idea general de donde podemos encontrar espirales, pero qué entendemos exactamente por espiral?

En términos generales una espiral es una curva que empezando desde un punto de origen, continuamente disminuye en curvatura al ir alejándose de ese punto, o en otras palabras, su radio de curvatura continuamente aumenta.

Esta definición no es suficientemente amplia para incluir a un gran número de curvas, sin embargo excluye por lo menos a una que en lenguaje popular es una verdadera espiral: un tornillo o hélice cilíndrica, la cual empieza en un punto y su curvatura no aumenta cuando se aleja del punto.

En la Biología Vegetal, la espiral logarítmica, según T.A. Cook tiene una importancia considerable y con algunas excepciones según él : la formación de la espiral está íntimamente ligada al fenómeno de la vida y el desarrollo. Con sus dos brazos arremolinados da la impresión de vida, movimiento y creación.

Espiral logarítmica

Hablaremos ahora de una serie de números que tienen que ver y mucho con la naturaleza, y con la espiral logarítmica: la serie de Fibonacci.

Que consiste en la suma; después de los dos primeros números; de los dos que le preceden, es decir:

$$0+1=1, 1+1=2, 1+2=3, 2+3=5, 3+5=8, 5+8=13, 8+13=21$$

y así sucesivamente, resultando la serie como:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

y recibe su nombre, serie de Fibonacci, debido a Leonardo de Pisa; matemático italiano del siglo XIII.

Esta serie se ha visto que no tiene mucha importancia en las matemáticas puras, sin embargo, se ha investigado bastante acerca de ella debido a que, paradójicamente, se presenta en la naturaleza y en el arte.

Si examinamos las hojas, las flores o las ramas, en un tallo de una planta, y si nos fijamos en alguna hoja cerca de la base del tallo de esa planta en que no haya más que una hoja en cada punto, y le asignamos el número cero, y contamos las hojas hacia arriba hasta que llegemos a una que esté justamente encima de la primera, el número que obtenemos es, por lo general, alguno de los términos de la serie de Fibonacci. Y si al ir contando hacia arriba, contamos el número de veces que le damos la vuelta al

tallo, también se obtiene alguno de los términos de dicha serie.

Si el número de vueltas es m , y el número de hojas es n , diremos que las hojas están colocadas en una espiral m/n . Veamos las figuras 6.6 :

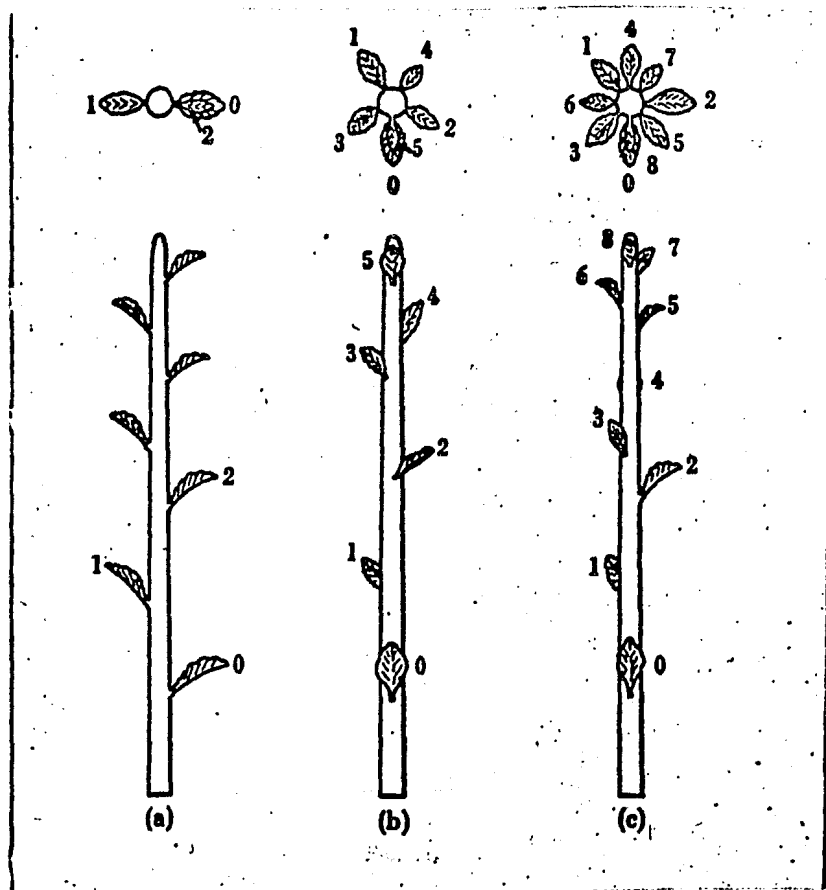


fig. 6.6

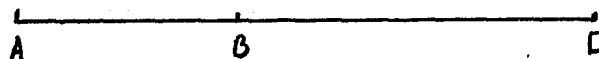
En a) se muestra una espiral $1/2$ vista de lado y desde arriba; en b) se puede decir que es una espiral $2/5$ o $3/5$ según como demos la vuelta en el mismo sentido que las agujas de un reloj o al contrario.

Para fijar ideas se conviene en tomar el camino más largo, entonces tendremos una espiral $3/5$.

Por otro lado en c) se tiene una espiral $5/8$. Es de notar que las relaciones encontradas $1/2$, $3/5$, $5/8$ son de términos sucesivos de la serie de Fibonacci.

Se puede observar disposiciones análogas en una gran cantidad de productos vegetales; en las piñas de un pino, en los pétalos de una flor, en las hojas de una lechuga y en las capas de una cebolla, por ejemplo.

Para comprender estas razones retrocederemos a los años de los geómetras griegos que estaban muy interesados en la llamada *División Aurea*, es decir, en la división de un segmento en media y extrema razón.



El punto B se dice que divide al segmento AC en media y extrema razón, si la razón del segmento más corto al más largo es igual a la razón del más largo al segmento completo, es decir si

$$(AB/BC) = (BC/AC)$$

Se ha demostrado algebraicamente que ambas razones son iguales a

$$\left\{ (5)^{1/2} - 1 \right\} / 2$$

que, con seis decimales es igual a: 0.618034, es decir:

$$(AB/BC) = (BC/AC) = 0.618034$$

Llamaremos R a esta razón.

Volviendo a la serie de Fibonacci, consideremos:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| 1). $1/1 = 1.000000$ | 2). $1/2 = 0.500000$ |
| 3). $2/3 = 0.666667$ | 4). $3/5 = 0.600000$ |
| 5). $5/8 = 0.625000$ | 6). $8/13 = 0.615385$ |
| 7). $13/21 = 0.619048$ | 8). $21/34 = 0.617647$ |
| 9). $34/55 = 0.618182$ | 10). $55/89 = 0.617978$ |
| 11). $89/144 = 0.618056$ | 12). $144/233 = 0.618026$ |

De la tabla anterior podemos observar que los términos de la derecha se aproximan a 0.618034 en forma creciente y los de la izquierda se aproximan en forma decreciente al mismo valor R .

Por consiguiente la serie de Fibonacci nos proporciona una sucesión de números enteros cuyas razones se aproximan a la R de la División Aurea.

Consideremos ahora un rectángulo tal que la razón de su anchura a su longitud sea R :

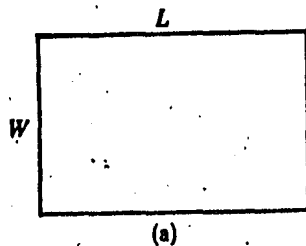
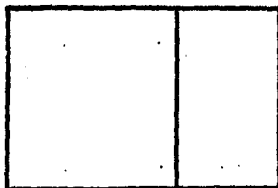


fig. 6.8

Es decir que $W/L = 0.618034$ o $W = 0.618034 * L$

Dividamos ahora el rectángulo, por medio de una recta, en un cuadrado y otro rectángulo; en este último también la razón de las dimensiones es R.

b)



(b)

fig. 6.9

Si se continua dividiendo el rectángulo resultante en un cuadrado y un rectángulo sucesivamente obtendremos:

c)

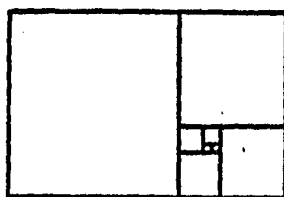


fig. 6.10

Podremos entonces inscribir una curva: la espiral logarítmica.

d)

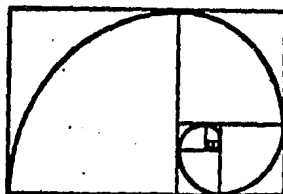


fig. 6.11

Con anterioridad hemos hablado de la espiral logarítmica y en los lugares en donde la encontramos.

Uno de los ejemplos mas curiosos de como se presenta la razón

R, en la Naturaleza es en la flor del girasol. Las semillas se distribuyen por toda ella en espirales que irradian del centro hacia los bordes y tanto en el sentido de las agujas del reloj como en el contrario.

La flor de girasol normal de 12 a 15 cms. de diámetro tiene por lo general 34 espirales en una dirección y 55 en la otra; en las flores mas pequeñas pueden darse las combinaciones 21/34 o 13/21 en las excepcionalmente grandes 89/144.

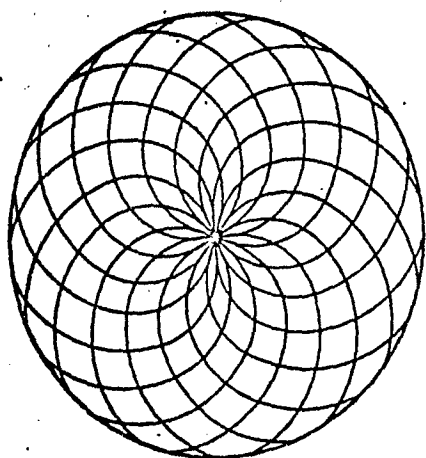


FIG. 25. Distribución de las semillas en la flor del girasol.

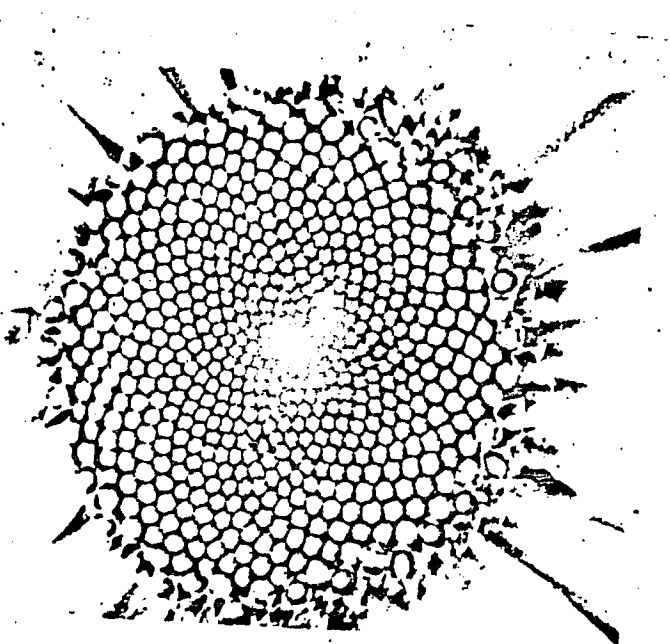


fig. 6.12

Se puede observar el mismo fenómeno, aunque no con tanta facilidad en otras flores como por ejemplo en las margaritas o los crisantemos.

Veamos una anécdota interesante acerca de la espiral logarítmica.

Se cuenta que la espiral logarítmica era la favorita de Jacobo I Bernouilli quien descubrió un día que esta curva no sufría ninguna deformación cuando la dibujó en un globo de caucho y luego lo infló, viendo que sólo empezaba a girar, (aparentemente) también la dibujo en un hule que después estiró, maravillándose de que no sufría ninguna deformación; deseando que la dibujaran en su tumba con la siguiente leyenda:

Eaden mutata resurgo - Resurjo inmutable de toda transformación
Siendo esta inscripcion una verdad matemática, ya que cualquier transformación que se efectue, la funcion exponencial siempre es la misma.

Construcción analítica:

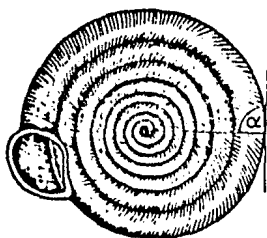
Veamos ahora su construcción matemática.

En páginas anteriores vimos la construcción de la espiral logarítmica en base a la razón aurea, la cual llamamos R ; y a partir de un rectángulo de ciertas dimensiones, construimos la curva de la espiral logarítmica.

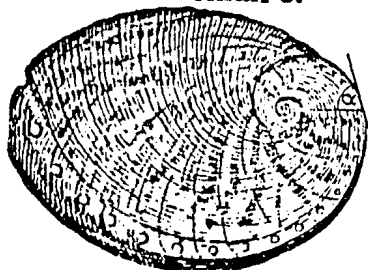
Tomemos ahora un sistema de coordenadas teniendo como origen el punto donde se cruzan los segmentos o rayos AC y BJ, los cuales son perpendiculares; y sea el eje X el rayo DF y el eje Y el rayo EG. (fig. 6.13)

la naturaleza se presentan a continuación en las siguientes figuras:

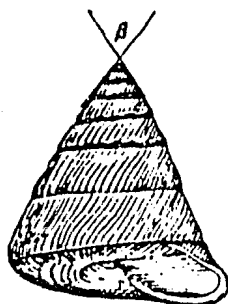
Large α



Small α



Large β



Small β



Large γ



Small γ



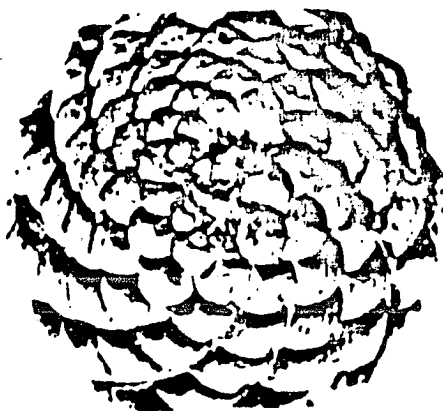
Lamelle de la cochlée
de l'oreille interne.



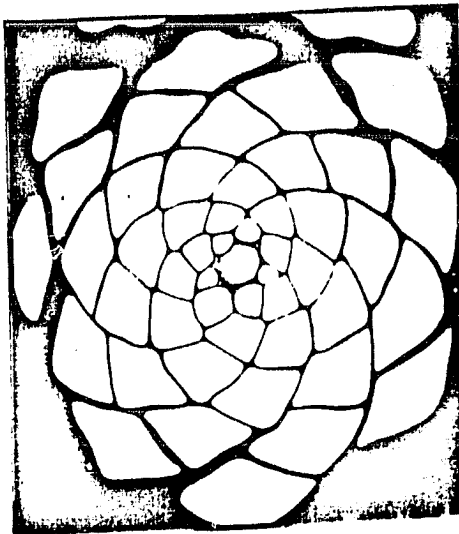
fronde d'une
jeune fougère



Défense d'éléphant

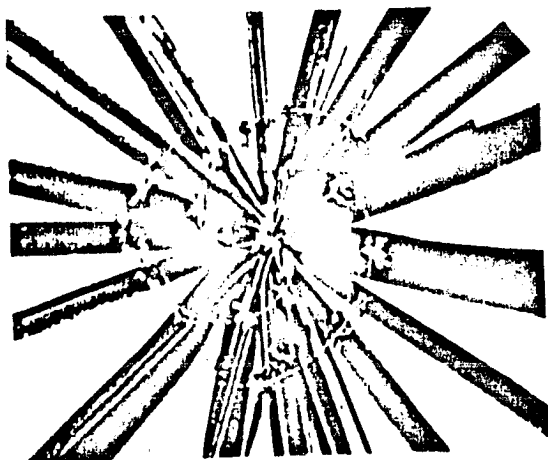


Pin maritime



Pinus Pinea

Coupe transversale de l'apex d'un
jeune semis de 15 cm de hauteur
(A.H. Church) (Spirale génétique
senestre, système 8 + 5).



Cyperus alternifolius



Pinus pinea



Espiral de Arquímedes:

Otra forma muy particular de espiral es la Espiral de Arquímedes.

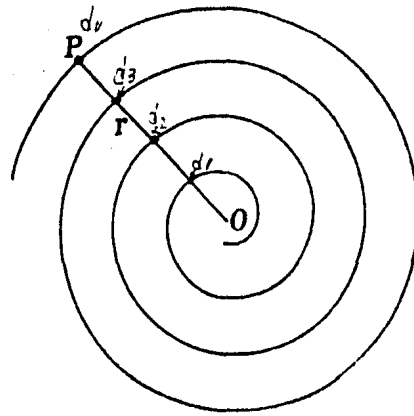


fig. 6.16

Nótese que el segmento de recta que sale del origen O al punto P cruza a la espiral en cada vuelta que da ésta última; y que la distancia que existe entre cada punto de intersección, es decir entre d_1 y d_2 , entre d_2 y d_3 , etc, es la misma, es constante.

Esta curva la podemos ver proyectando una hélice cónica en un plano.

Una definicion más formal podría ser la siguiente:

Si mientras el radio vector gira uniformemente alrededor del polo O , un punto P viaja con una velocidad uniforme alrededor del polo, la curva que describirá el punto será la espiral de Arquímedes, cuya ecuación en coordenadas polares es $r = a\theta$.

Hasta aquí llegaremos con respecto a este capítulo, ya que de no haber mencionado a las espirales, cuando se habla de curvas, habría sido una pena, pero como se menciona al principio es un

tema muy amplio.

Como hemos visto es realmente maravilloso el lugar en donde podemos encontrar estas curvas, sin duda alguna que escapan muchas mas como por ejemplo, las espirales que se forman al caer el agua, (fig. 6.17)



las espirales de los árboles o las espirales de un tornillo y tantas otras. Concluiremos este capítulo con el siguiente pensamiento:

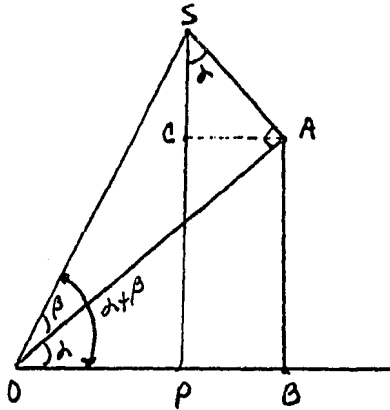
Naturaleza ese manuscrito, público y universal que permanece extendido a los ojos de todos.

Sir Thomas Browne.

A P E N D I C E A

Deducción del $\text{sen } (\alpha + \beta)$; siendo similar la de $\text{cos } (\alpha + \beta)$

Examinemos la siguiente figura y supongamos que el segmento OS es igual a uno



entonces:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = SF = SC + CP \text{ ----- (1)}$$

¿Cuánto vale SC?

$$SC = SA \cos \alpha \text{ ----- (2)}$$

ya que SCA es un triángulo rectángulo pero

$$CP = AB = OA \sin \alpha \text{ ----- (3)}$$

del triángulo OBA. Pero necesitamos SA y OA

Consideremos el triángulo rectángulo SAO cuya hipotenusa OS = 1, entonces:

$$SA = \text{sen } \beta \text{ y } OA = \cos \beta \text{ ----- (4)}$$

entonces:

$$SC = SA \cos \alpha = \text{sen } \beta \cos \alpha \text{ ----- (5)}$$

$$CP = OA \sin \alpha = \cos \beta \sin \alpha \text{ ----- (6)}$$

Sustituyendo (5) y (6) en (1) tenemos:

$$\text{sen } (\alpha + \beta) = \text{sen } \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha$$

A P E N D I C E B

Breve introducción al Cálculo de Variaciones.

En los problemas físicos surge la necesidad de hallar los valores máximos y mínimos de un genero especial de magnitudes, llamadas funcionales.

Se llaman funcionales a las magnitudes variables cuyos valores se determinan mediante la elección de una o de varias funciones.

Ejemplos de funcionales son la longitud de arco de una curva plana. La magnitud l puede calcularse si se da la ecuación de la

curva $y = y(x)$ entonces $l[y(x)] = \iint_D \left\{ 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$

donde D es la proyección de la superficie en el plano OXY

Los momentos de inercia, los momentos estáticos, las coordenadas centro de gravedad de cierta curva o superficie homogénea, son también funcionales. puesto que sus valores se determinan eligiendo la curva o la superficie, es decir, las funciones contenidas en la ecuación de dicha curva o superficie.

A continuación se darán algunas definiciones y teoremas con el fin de deducir la ecuación de Euler.

Definición: La funcional $v[Y(x)]$ tiene un máximo en la curva $Y = Y_0(x)$ si su valor en cualquier curva próxima a $Y = Y_0(x)$ no es mayor que $v[Y_0(x)]$ es decir $\Delta v = v[Y(x)] - v[Y_0(x)] \leq 0$

Teorema:

Si la funcional $v[Y(x)]$ que posee variación, alcanza su máximo o su mínimo para $Y = Y_0(x)$, siendo $Y_0(x)$ un punto interior de la región de definición de la funcional, entonces para $Y = Y_0(x)$ será $\delta v = 0$

El término extremo quiere decir que la funcional alcanzó un máximo o un mínimo, con respecto a otras curvas proximas; (puede ser fuerte o débil).

Analicemos el extremo de la funcional:

$$v[Y(x)] = \int_{X_0}^{X_1} F(x, Y(x), Y'(x)) dx \dots\dots (1)$$

Si los puntos frontera de las curvas admisibles estan fijos: $Y(X_0) = Y_0$ e $Y(X_1) = Y_1$ (fig.) La función $F(x, Y, Y')$ se considerará derivable tres veces.

Tomemos cierta curva admisible $Y = Y^*(x)$ cercana a $Y = Y(x)$ e $Y = Y^*(x)$ en la familia de curvas

$$Y(x, \alpha) = Y(x) + \alpha(Y^*(x) - Y(x))$$

cuando $\alpha = 0$, se obtiene la curva $Y = Y(x)$; para $\alpha = 1$, se tiene: $Y = Y^*(x)$, entonces la diferencia $Y^*(x) - Y(x)$ se llama variación de la función $Y(x)$ y se designa por δy .

En los problemas variacionales la variación δy desempeña un papel análogo al del incremento de la variable independiente x , en los problemas del estudio de los extremos de una función $f(x)$.

La variación $\delta y = Y^*(x) - Y(x)$ es una función de x . Esta función se puede derivar una o varias veces, siendo:

$$(\delta y)' = Y^{*'}(x) - Y'(x) = \delta y'$$

es decir, la derivada de la variación es igual a la variación de la derivada; análogamente

$$(\delta y)'' = Y^{*''}(x) - Y''(x) = \delta y''$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(\delta y)^k = Y^{*k}(x) - Y^k(x) = \delta y^k$$

De este modo, consideremos la familia $Y = Y(x, \alpha)$, donde

$$Y(x, \alpha) = Y(x) + \alpha \delta y$$

que contiene, para $\alpha = 0$, la curva en la cual se alcanza el extremo, y para $\alpha = 1$, cierta curva admisible cercana, llamada curva de comparación.

Si consideramos los valores de la funcional:

$$V[Y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

sólo en las curvas de la familia $Y = Y(x, \alpha)$, la funcional se transforma en una función de α

$$v[Y(x, \alpha)] = \phi(\alpha)$$

ya que el valor del parámetro α determina una curva de la familia $Y = Y(x, \alpha)$, determinando también con esto el valor de la funcional $v[Y(x, \alpha)]$. Esta función $\phi(\alpha)$ tiene un extremo en $\alpha = 0$, puesto que para dicho valor se obtiene $Y = Y(x)$, teniendo la funcional, por hipótesis, un extremo con respecto a cualquier curva cercana admisible y, en particular, con respecto a las curvas cercanas de la familia $Y = Y(x, \alpha)$. La condición necesaria para que la función $\phi(\alpha)$ tenga un extremo en $\alpha = 0$ es la anulación de su derivada para $\alpha = 0$: $\phi'(0) = 0$

Como

$$\phi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha)) dx$$

entonces:

$$\phi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ F_y \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} y'_x(x, \alpha) \right\} dx$$

donde:

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F(x, Y(x, \alpha), Y'_x(x, \alpha))$$

$$F_{y'} = \frac{\partial}{\partial Y'} F(x, Y(x, \alpha), Y'_x(x, \alpha))$$

o puesto que:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} Y(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [Y(x) + \alpha \delta y] = \delta y$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} Y'_x(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [Y'_x(x) + \alpha \delta y'_x] = \delta y'_x$$

se obtiene:

$$\phi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \{F_y(x, Y(x, \alpha), Y'(x, \alpha)) \delta y + F_{y'}(x, Y(x, \alpha), Y'(x, \alpha)) \delta y'\} dx$$

$$\phi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \{F_y(x, Y(x), Y'(x)) \delta y + F_{y'}(x, Y(x), Y'(x)) \delta y'\} dx$$

Como ya hemos visto, $\phi'(0)$ se llama variación de la funcional, y se designa por δv . La condición necesaria para que la funcional v tenga un extremo (es decir un máximo o un mínimo) consiste en la anulación de su variación: $\delta v = 0$. Para la funcional

$$v[Y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

esta condición tiene la forma:

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y'] dx = 0$$

integrando el segundo sumando por partes, y tomando en cuenta que

$\delta y' = (\delta y)'$, obtenemos

$$\delta v = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left\{ F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right\} \delta y dx$$

pero:

$$\delta y|_{x=x_0} = Y^*(x_0) - Y(x_0) = 0$$

y

$$\delta y|_{x=x_1} = Y^*(x_1) - Y(x_1) = 0$$

en virtud de que todas las curvas admisibles en el problema simple considerado pasan por puntos frontera fijos y, por lo tanto,

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right\} \delta y dx$$

De este modo, la condición necesaria de extremo toma la forma:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right\} \delta y dx = 0 \dots (2)$$

donde el factor entre paréntesis es una función continua dada en la curva $Y = Y(x)$ que realiza el extremo, y el factor δy , debido a

la arbitrariedad en la elección de la curva de comparación $Y = Y^*(x)$, es una función arbitraria que satisface sólo ciertas condiciones muy generales, más exactamente: la función δy se anula en los puntos frontera $X = X_0$ y $X = X_1$, es continua y derivable una o varias veces, δy o bien δy y $\delta y'$ son pequeños en valor absoluto.

Para simplificar la condición anterior (2), aplicaremos el siguiente lema: Si para cada función continua $\eta(x)$ se tiene:

$$\int_{X_0}^{X_1} \Psi(x) \eta(x) dx = 0$$

siendo $\Psi(x)$ una función continua en el segmento $[X_0, X_1]$, entonces $\Psi(x) = 0$ en dicho segmento.

Retomando la ecuación (2) vemos que todas las condiciones del lema se cumplen: en la curva que realiza el extremo, el factor:

$$\left\{ F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right\}$$

es función continua, y la variación δy es una función arbitraria a la cual se han impuesto sólo limitaciones de carácter general, ya previstas en el lema. Por lo tanto,

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

en la curva $Y = Y(x)$ que realiza el extremo de la funcional considerada, es decir, $Y = Y(x)$ es solución de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

o bien, en forma desarrollada,

$$F_y - F_{xy}' - F_{yy}y' - F_{yy'}y'' = 0$$

Esta ecuación se denomina *ecuación de Euler* y fue publicada por primera vez en 1744. Las curvas integrales de la ecuación de Euler $Y = Y(x, C_1, C_2)$ se llaman *extremales*. Sólo en las extremales puede alcanzarse un extremo (máximo o mínimo) de la funcional:

$$V[Y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, Y, Y') dx$$

BIBLIOGRAFIA

- "RECTAS Y CURVAS"
N.B. VASILIEV. V.L. GUTENMAJER
ED. MIR-MOSCU
- "GEOMETRIA DIFERENCIAL"
A.V. POGORELOV
ED. MIR-MOSCU
- "MATEMATICAS Y ENSEÑANZA"
REVISTA MATEMATICA
SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA No. 10
- "GEOMETRIA ANALITICA MODERNA"
WOOTON, BECKENBACK, FLEMING.
PUBLICACIONES CULTURALES, S.A.
- "ECUACIONES DIFERENCIALES Y CALCULO VARIACIONAL"
ELSGOLTZ
EDICIONES DE CULTURA POPULAR.
- "CURVAS MARAVILLOSAS"
A.I. MARKUSHEVICH
ED. MIR-MOSCU
- "PHYTOMATHEMATIQUE"
ROGER V. JEAN
LES PRESSES DE L'UNIVERSITE DU QUEBEC
- "THE ART OF ORGANIC FORMS"
PHILIP C. RITTERBUSH
SMITHSONIAN INSTITUTION PRESS
- "PATTERNS IN NATURE"
PETER S. STEVENS
ED. BUTLER IND. TAUNER LTD.

- "INTRODUCCION AL CALCULO Y AL ANALISIS MATEMATICO"
R. COURANT Y F. JOHN.
VOLUMENES I Y II
ED. LIMUSA
- "CALCULO CON GEOMETRIA ANALITICA"
EARL SWOKOWSKY
GRUPO EDITORIAL IBEROAMERICA
- "GEOMETRIA ANALITICA MODERNA"
WENTWORTH Y SMITH
ED. PORRUA, S.A.
- "PARADOJAS MATEMATICAS"
NORTHROP
UTEHA
- "ON. GROWTH AND FORM"
D'ARCY THOMPSON
ABRIDGED EDITION EDITED BY J.T. BONNER
- "THE CURVES OF LIFE"
THEODORE ANDREA COOK M.A.F.S.A.
DOVER PUBLICATIONS, INC. N.Y.