

24.54



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE CIENCIAS

# El Problema de Couette-Taylor

T e s i s

Que para obtener el título de  
Licenciado en Física

Presenta

Carlos Alberto Sánchez Fuentes

México, D. F. 1988



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO I. ASPECTO EXPERIMENTAL Y TECNICO.	5
Aspecto experimental	5
Flujo independiente del tiempo	5
Flujo dependiente del tiempo	6
Efecto de la altura finita de los cilindros	9
Unicidad	10
Aspecto técnico	11
Control de parámetros	11
Determinación de la longitud de onda	11
Sistema óptico de velocimetría Laser-Doppler	12
Recolección de datos y análisis espectral	12
Elección del estado espacial	14
CAPITULO II. ECUACIONES FUNDAMENTALES.	16
Los modelos estadístico y del continuo	16
Coordenada eulerianas y lagrangianas	17
Teorema de transporte de Reynolds	19
Conservación de la masa	21
Conservación del momentum	22
Razones de cambio de rotación y cizallamiento	24
Ecuaciones constitutivas	27
Ecuaciones de Navier-Stokes	28
La ley de similitud	30
CAPITULO III. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.	32
Expresiones para gradiente, divergencia y laplaciano	32
Ecuaciones de Navier-Stokes	32
Ecuación sin dimensiones	37
Flujo de Couette	38
Ecuación perturbada	40
CAPITULO IV. RESULTADOS PRELIMINARES.	44
Lema 1. a	45
Lema 1. b	46
Lema 2. a	50
Lema 2. b	50
Lema 3. a	57
Lema 3. b	58
Corolario 1	68
Lema 4	70
Corolario 2	71
Lema 5	71
Lema 6	73
Teorema 1	73
Teorema 2	76

CAPÍTULO V. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA.	78
Teorema 3	78
Observación al teorema 3	79
Cotas a priori sobre las soluciones	80
Teorema 4	80
Espectro de B	84
Teorema 5	87
Observación al teorema 5	91
Estudio espectral para el caso $V \geq 0$ , $a < 0$	91
Proposición	93
Lema 7	98
Observación al lema 7	99
Lema 8	99
Lema 9	99
Lema 10	100
Teorema 6	101
Teorema 7	102
Teorema 8	105
Observación al teorema 8	105
Solución al problema de bifurcación	106
Teorema 9	108
Comentarios finales	109
Teorema 10	109
REFERENCIAS	111

## INTRODUCCION

Aproximadamente un siglo de investigación ha sido dedicado a los fenómenos relacionados con el flujo de Couette. Estos fenómenos han sido la piedra angular en conceptos de estabilidad hidrodinámica y turbulencia debido a que han jugado un papel importante en hallazgos teóricos y prácticos. El experimento es, sin lugar a dudas, manantial de perplejidad continua que como la caja de Pandora despliega complicaciones sucesivas e interesantes dificultades de interpretación.

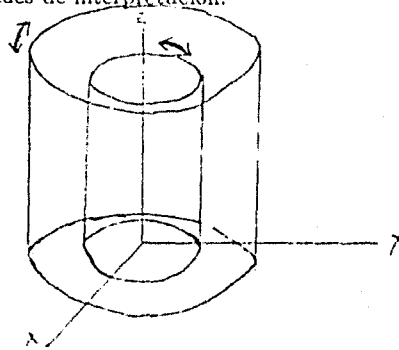


Figura 1. Cilindros concéntricos que rotan en un marco de referencia cartesiano.

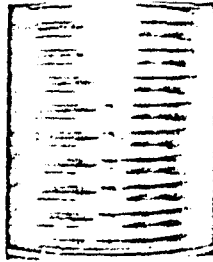


Figura 2. Patrón de Taylor.

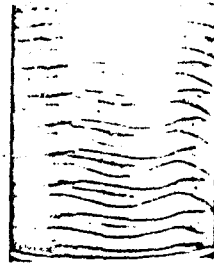


Figura 3. Ondas Rotantes.

Pero, ¿en qué consiste el Problema de Couette-Taylor? Consiste en la descripción de los estados de flujo de un fluido limitado por dos cilindros concéntricos, donde por lo menos uno de ellos rota. El primer flujo que se observa (aumentando gradualmente el Número de Reynolds) consiste en líneas de corriente en forma de círculos coaxiales y se conoce como flujo de Couette. Este flujo es inestable debido a que las partículas del fluido, por una parte son expulsadas del cilindro interior debido a fuerzas inerciales, y por otra oponen resistencia a causa de fuerzas viscosas. G. I. Taylor fue el primero en explicar

correctamente los efectos de viscosidad, en encontrar el límite de estabilidad lineal cuando el cilindro externo se encuentra en reposo y en formular la idea de soluciones bifurcadas estables [31].

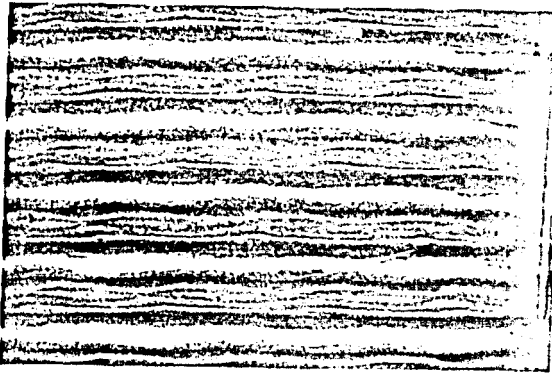


Figura 4. Patrón Ondulado.

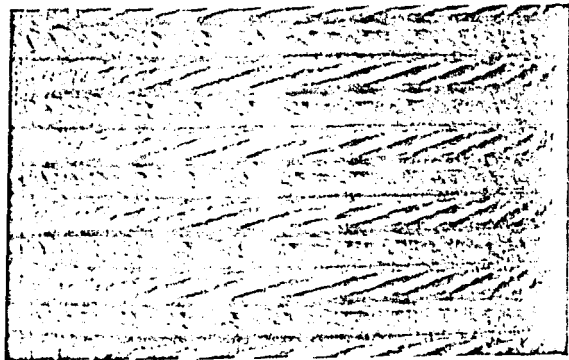


Figura 5. Vórtices Torcidos.

Los estados de flujo que pueden obtenerse a partir del de Couette son varios. Cuando el cilindro exterior se encuentra en reposo o su velocidad angular es pequeña y en sentido contrario a la del cilindro interior, la primera transición tiene la forma de tubos que rodean al cilindro exterior de tal manera que son perpendiculares al eje  $z$ ; se trata de un estado estacionario donde las invariencias rotacionales no se rompen (*Fig. 2*). La segunda transición rompe las simetrías temporal y rotacional pero es periódica; su apariencia es tal que hace recordar la forma de tubos ondulados; estas ondas se mueven uniformemente alrededor del eje  $z$  de tal manera que en un marco de referencia rotatorio adecuado el flujo se ve estacionario; a este tipo de movimiento se le conoce como ondas rotantes (*Fig. 3*). La tercera transición conduce a un flujo cuasiperiódico en el cual la segunda frecuencia aparece como modulación de las ondas rotantes; bifurcaciones posteriores pueden seguir caminos diferentes que suelen conducir rápidamente a turbulencia.

Cuando los cilindros rotan en el mismo sentido se observa una secuencia de bifurca-

ciones parecida a la antes descrita, excepto para la segunda, ya que en ésta se pueden presentar diferentes tipos de ondas rotantes dependiendo de valores de los parámetros que intervienen: los vórtices ondulados (*Fig. 4*) solo se ven en la cara lateral de un cilindro, mientras que los vórtices torcidos (*Fig. 5*) tienen la apariencia de un lazo. Se presenta también otro tipo de flujo —ahora cuasiperiódico— conocido como "wavelets" que consiste en un patrón ondulado en ambas caras laterales de los cilindros pero con velocidades de rotación y números de onda diferentes.

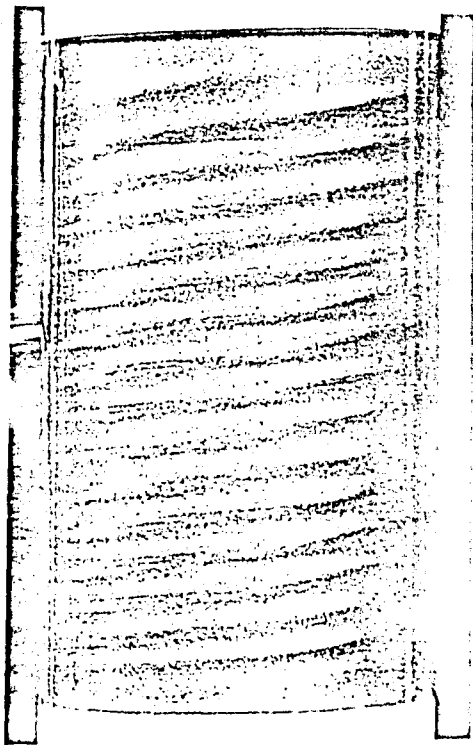


Figura 6. Patrón Espiral.

Finalmente, cuando los cilindros rotan en sentido contrario y la velocidad angular del cilindro exterior es grande, el flujo de periodicidad temporal puede bifurcarse; los experimentos han mostrado que se trata de un patrón helicoidal (*Fig. 6*).

El objetivo del presente trabajo es describir matemáticamente la primera transición. Para lograrlo, la tesis se planeó de la siguiente manera: en el Capítulo I se hace un breve resumen de los aspectos experimental y técnico del problema, haciendo algunas consideraciones sobre el efecto de la altura finita de los cilindros y dando ciertos detalles

sobre el sistema óptico de Velocimetría Laser-Doppler.

En el Capítulo II se deducen las ecuaciones de Navier-Stokes en forma general y para fluidos incompresibles en particular vía el concepto del continuo y el Teorema de Reynolds, apoyándose en fórmulas de conservación de masa, momentum y en las constitutivas. También se presenta la Ley de Similitud debido a que juega un papel importante en los argumentos de adimensionalización de ecuaciones.

En el Capítulo III se hallan las expresiones correspondientes en coordenadas cilíndricas de las ecuaciones fundamentales, se adimensionalizan —de tal manera que la información física quede contenida en el Número de Reynolds (desde el punto de vista matemático se obtiene un problema de valores propios)—, se resuelven para el único caso en que es posible hacerlo (conocido como Flujo de Couette), se perturban y linealizan alrededor de este flujo. Así se obtienen las fórmulas —y sus condiciones de frontera— que constituyen el problema a resolver. Este se replantea al introducir —vía la incompresibilidad del fluido— una función conocida como función de corriente.

En el Capítulo IV se da una serie de resultados cuyo propósito es fundamentar los que se formulan al final de la tesis. Algunos tienen que ver con los productos escalares que se definen, otros con la existencia y unicidad —bajo ciertas circunstancias— de soluciones al Problema de Couette-Taylor, otros con el hecho de que la formulación diferencial es equivalente a una integral. También se dan resultados sobre ecuaciones diferenciales.

Finalmente, en el Capítulo V se establecen las condiciones bajo las cuales no hay más solución al problema que la trivial, así como aquellas que son necesarias para evitar el Flujo de Couette. Se establecen propiedades de las soluciones y se demuestra que a partir de cierto Número de Reynolds el flujo de Couette se bifurca de manera única.

Con esto se logra presentar un modelo matemático que, aún evitando los efectos de borde y por lo tanto solo en cierto rango del dominio formado por los cilindros, describe la primera transición a partir del Flujo de Couette en buen concordancia con los resultados experimentales.



## CAPITULO I

### ASPECTO EXPERIMENTAL Y TECNICO

Este capítulo trata sobre la investigación empírica relacionada con el problema de Couette-Taylor y sobre una de las técnicas experimentales que han podido aplicarse exitosamente al mismo (velocimetría Laser-Doppler). Se tratará casi exclusivamente el caso del cilindro exterior en reposo dado que con esta simplificación se han logrado descubrir varios patrones de flujo (desde el punto de vista experimental el movimiento de ambos cilindros acarrea complicaciones adicionales, lo cual explica la diferencia de literatura —y por lo tanto de resultados— existente entre los casos donde ambos cilindros rotan y donde uno permanece en reposo).

Un sistema simplificado por el estado estacionario del cilindro exterior puede caracterizarse por: (1) el Número de Reynolds,  $R = 2\pi f_{cil} R_1 (R_2 - R_1) / \nu$ , donde  $f_{cil}$  es la frecuencia del cilindro,  $R_1$  el radio del cilindro interior,  $R_2$  el radio del cilindro exterior y  $\nu$  la viscosidad cinemática del fluido; (2) el cociente de los radios  $\eta = R_1 / R_2$ ; y (3), el cociente  $h / (R_2 - R_1)$ , donde  $h$  es la altura de los cilindros. Como se verá más adelante, el control de estos parámetros juega un papel importante en las técnicas experimentales.

### ASPECTO EXPERIMENTAL

#### FLUJO INDEPENDIENTE DEL TIEMPO

Para cierto Número de Reynolds pequeño existe una única solución globalmente estable conocida como flujo de Couette (ver capítulo III) de las ecuaciones de Navier-Stokes (ver capítulo II). Las primeras investigaciones (Mallock 1888, 1896; Couette 1890) indicaron que este flujo se vuelve inestable cuando aumenta  $R$ , pero la naturaleza de la inestabilidad no pudo establecerse. En un estudio clásico sobre estabilidad hidrodinámica, G. I. Taylor (1923) observó y explicó la transición de un flujo azimutal a un flujo con vórtices horizontales toroidales superpuestos sobre el primero [31]. Por otra parte el trabajo debido a Rayleigh (1920) mostró que el flujo azimutal de un fluido no viscoso es inestable con Números de Reynolds infinitamente pequeños, y a partir del análisis de estabilidad lineal de Taylor para fluidos viscosos se concluyó que la viscosidad retrasa la aparición del flujo secundario para  $R$ 's finitas.

Taylor calculó el Número de Reynolds crítico  $R_c$  y la longitud de onda crítica  $\lambda_c$  para inestabilidad en el flujo azimutal cuando  $(R_2 - R_1) \ll R_1$ ; el caso más general fue considerado subsecuentemente por Davey (1962), Walowit, Tsao & DiPrima (1964), Roberts (1965), y otros. Cerca de  $R_c$  la amplitud de equilibrio de la desviación del flujo azimutal aumenta como  $(R - R_c)^{1/2}$ , en concordancia con la predicción de Landau (1944,

Landau & Lifshitz 1959) y con las observaciones de Donnelly (1963). Si  $R$  se incrementa, el flujo desarrolla un comportamiento armónico espacial en la dirección axial. Davey (1962) expandió el campo de velocidad en series de Fourier espaciales en la dirección axial y calculó la dependencia del Número de Reynolds respecto a los coeficientes de Fourier; sus predicciones fueron confirmadas experimentalmente por Donnelly & Schwarz (1965), Snyder & Lambert (1966) y Gollub & Freilich (1976), entre otros. Arriba de  $R_c$ , Burkhalter & Koschmieder (1973) encontraron que la longitud de onda axial permanece constante si  $R$  se incrementa gradualmente, pero experimentos con diferentes condiciones iniciales produjeron flujos estables estacionarios con longitudes de onda mayores y menores a  $\lambda_c$ .

### FLUJO DEPENDIENTE DEL TIEMPO

Muchos investigadores notaron que al incrementar el Número de Reynolds se produce una transición del flujo de Taylor independiente del tiempo a otro dependiente del tiempo. Schultz-Grunow & Hein (1956) obtuvieron fotografías de este último que consiste en ondas viajeras transversales superpuestas en los vórtices horizontales. El caso de una onda alrededor del anillo es el primero en volverse inestable y los casos de más ondas se vuelven inestables con Números de Reynolds ligeramente superiores.

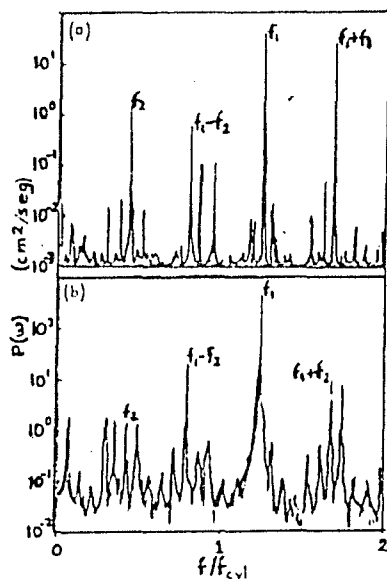


Figura 7. Espectro obtenido cuando  $R/R_c = 10.5$  con transformadas de Fourier temporales de: (a) la velocidad determinada en un punto del fluido mediante velocimetría Laser-Doppler, y (b) la intensidad de luz dispersada por partículas suspendidas en el fluido. La fuente de luz en (b) fue un bulbo de tungsteno; las líneas en (b) se ensancharon debido a variaciones en la velocidad de rotación del motor.

Otros estudios sobre visualización de flujos con vórtices ondulados han sido reportados

por Schwarz, Springett & Donnelly (1964), Coles (1965), Snyder (1968, 1970), Cole (1976) y otros. Eagles (1974) calculó el torque necesario para mantener vórtices ondulados; su trabajo concordó con las mediciones hechas por Donnelly (1958), Donnelly & Simon (1960) y otros.

Investigaciones más recientes han permitido ampliar el número de patrones conocidos y comprobar la efectividad de nuevas técnicas experimentales. Como ejemplo de la fiabilidad de estas últimas, se hace notar que las mediciones de diferentes variables dinámicas en un fluido suministran espectros de potencias con idénticas componentes de frecuencia, como los que se muestran en la figura 7, donde en (a) se ve un espectro obtenido mediante transformaciones de Fourier de las velocidades —registradas con técnicas Laser-Doppler—, y en (b) se observa el mismo espectro pero ahora obtenido con transformaciones de Fourier aplicadas a la intensidad de luz dispersada por partículas asimétricas suspendidas en el fluido.

Resultará instructivo conocer —aunque someramente— algunos de los trabajos llevados a cabo por cinco grupos de investigación que han empleado diferentes técnicas o centrado su interés en variables dinámicas distintas. El grupo de la Universidad de Texas ([13], [14], [21]) utilizando velocimetría Laser-Doppler, se ha avocado a la medición de velocidades radiales y azimutales, mientras que el grupo de Novosibirsk ([14], [24], [36]) haciendo uso de la misma técnica ha medido velocidades angulares. Los investigadores de la Universidad de Nancy ([3], [14]) mediante reacciones electroquímicas han obtenido datos concernientes a las aceleraciones radiales en la cara del cilindro interior. El grupo de la Universidad de Oregon ([10], [14], [34]) ha utilizado corrientes iónicas entre los cilindros, y técnicas de dispersamiento de intensidad para medir la orientación de partículas y las aceleraciones radiales en la cara del cilindro exterior. Finalmente, investigadores de la Universidad de Leeds ([2], [14], [26]) mediante técnicas anemométricas han medido también las aceleraciones radiales en la cara del cilindro exterior. Estos grupos trabajaron con  $\eta = 7/8$ , excepto el de Novosibirsk, donde  $\eta = 0.636$ . El cilindro exterior se encontraba en reposo.

Como se dijo al inicio de este apartado, cuando el Número de Reynolds es suficientemente grande, el flujo se vuelve dependiente del tiempo, con una sola frecuencia fundamental,  $f_1$ , y sus armónicos — $f_1$  es la frecuencia de ondas azimutales que cruzan el punto en que se observan (fig. 3). La aparición de una segunda frecuencia fundamental,  $f_2$ , se observó hace varios años y fue identificada por Gorman & Swinney como la frecuencia de modulación de ondas azimutales. Se encontró que diferentes patrones estables de modulación pueden ocurrir, y que  $f_2$  es diferente para patrones distintos, de tal forma que la no unicidad del flujo se patentizó (figs. 4 y 5). El comportamiento cuasiperiódico con dos frecuencias características en el espectro de potencias ha sido detectado en sistemas con diversas geometrías, pero los cilindros concéntricos es el único caso para el cual el carácter físico de las ondas que producen las componentes espectrales ha sido determinado.

Al incrementar  $R$ , las frecuencias bien marcadas desaparecen del espectro, dejando solo componentes anchos y "ruido". Aumentando nuevamente el Número de Reynolds, Walden & Donnelly, de la Universidad de Oregon, notaron la aparición de un pico bien marcado entre el ruido. El pico ha sido observado para un rango de  $R$ , siempre que  $h/(R_2 - R_1) > 28$ . L'vov y Predtechensky obtuvieron espectros para Números de Reynolds grandes en los

cuales reemergieron picos muy marcados. También observaron una secuencia interesante de transiciones conforme  $R$  aumenta dentro de un rango pequeño (con  $\eta = 0.636$  y  $h/(R_2 - R_1) = 30$ ). Encontraron que cuando  $R/R_c = 14.0$  el espectro de potencias contiene una sola frecuencia fundamental  $f_1$ . La amplitud de potencia espectral en  $f_1$ ,  $P(f_1)$ , se midió como función del tiempo para períodos largos y se encontró constante dentro de la incertidumbre experimental. Al incrementar  $R/R_c = 14.1$ ,  $f_1$  pareció ensancharse; sin embargo, las mediciones de  $P(f_1)$  para intervalos largos de tiempo mostraron que esta amplitud varió periódicamente en  $t$ , de tal forma que el fluido era realmente cuasiperiódico, no caótico, con  $f_1 = 16.9$  Hz. y  $f_2 = 0.0034$  Hz. (un espectro con la resolución suficiente habría mostrado que  $f_1$  no se ensancha, sino que en realidad tiene bandas laterales en  $f_1 \pm n f_2$ ). Cuando  $R/R_c = 14.8$ ,  $f_1$  se ensanchó y la dependencia temporal de  $P(f_1)$  se hizo no periódica; así, este flujo se convirtió en caótico. Con  $R/R_c = 15$ ,  $f_1$  todavía estaba ensanchada pero, sorprendentemente, el flujo se hizo cuasiperiódico. Finalmente, con  $R/R_c = 15.4$ , el flujo otra vez se hizo caótico.

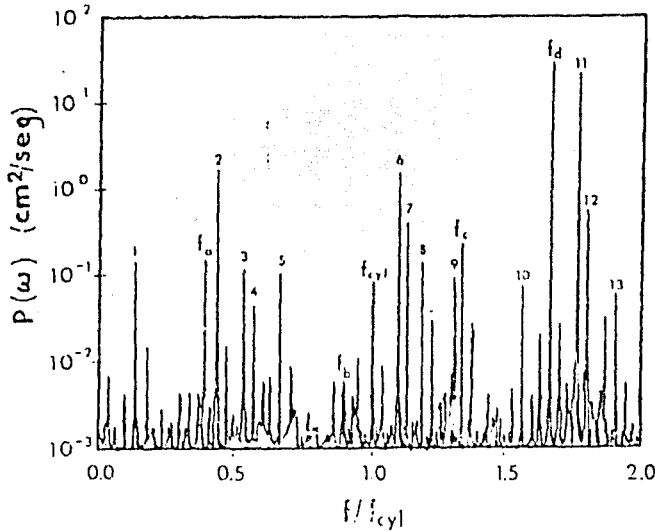


Figura 8. El espectro de un flujo que requiere de cuatro frecuencias independientes para su descripción.  $R/R_c = 12.0$ .

Estudios más recientes efectuados por el grupo de la Universidad de Texas ([15]) demostraron que existe comportamiento cuasiperiódico del flujo no solo con las dos frecuencias  $f_1$  y  $f_2$ , sino con otras. Explicaron también que un espectro caracterizado por dos frecuencias fundamentales a menudo tiene combinaciones espectroscópicas expresables como  $f = n_a f_a + n_b f_b$ , donde  $n_a$  y  $n_b$  son enteros pequeños. Como ejemplo, el espectro de la figura 8 no se ajusta a dos o tres frecuencias, sino a cuatro, además de la del cilindro; cada una de esas frecuencias se puede obtener mediante una elección adecuada de  $n_a$  y  $n_b$  que cumpla, para cada  $n$  con  $|n| \leq 3$  y  $\sum |n| \leq 9$ .

El mismo grupo de la Universidad de Texas mostró que la segunda frecuencia fundamental,  $f_2$ , está asociada a un segundo conjunto de ondas viajeras azimutales que rotan a velocidad diferente del primer conjunto. De aquí que el flujo de vórtices ondulados puede describirse simplemente con dos enteros,  $m_1$  y  $m_2$ , que corresponden al número de onda en el primero y segundo conjuntos, respectivamente. De acuerdo a esta descripción existen dos marcos de referencia rotantes, uno asociado al primer conjunto de ondas viajeras y el otro asociado con el segundo. Por lo tanto, el espectro obtenido a partir de alguno de estos marcos de referencia muestra solo una de las frecuencias independientes.

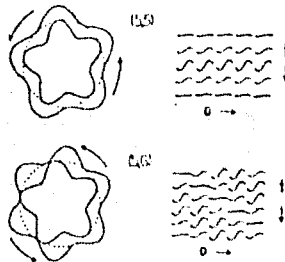


Figura 9. Diagramas esquemáticos que ilustran, para dos estados,  $(m_1, m_2)$ , cómo pueden generarse los patrones de modulación debidos a dos ondas viajeras azimutales. En la columna izquierda se muestra el primer conjunto de ondas viajeras dentro del círculo ( $m_1 = 5$ ) y el segundo conjunto ( $m_2 = 5.6$ ) fuera del círculo. La columna derecha muestra la evolución temporal de los patrones de modulación en un marco de referencia que se mueve junto con el primer conjunto de ondas. Cada línea representa el patrón de flujo en un instante de tiempo (los vórtices se encuentran en fase en la dirección axial); las líneas subsiguientes muestran la evolución temporal del flujo para un período de modulación. El ángulo  $\theta$  se incrementa de  $0$  a  $2\pi$  en la dirección de las flechas.

Para entender cómo dos trenes de ondas viajeras pueden producir los patrones observados en experimentos, considérese la figura 9. A la derecha se muestran diagramas esquemáticos para dos patrones de vórtices ondulados, tal como se verían en un marco de referencia que sigue al primer tren de ondas. A la izquierda se esboza cómo dos ondas viajeras pueden generar los patrones que se observan experimentalmente. En un marco de referencia apropiado, uno de los trenes de ondas aparecería estático y modulado por el movimiento relativo del otro. Por ejemplo, si un patrón fuese el resultado de la superposición simple de dos trenes de ondas y ambos tuviesen el mismo número de onda, entonces la "modulación" de las ondas ocurriría al mismo tiempo y la cancelación estaría en fase, como en el primer ejemplo de la figura 9. Si, por otra parte,  $m = m_1 + 1$ , el punto de máxima cancelación se vería como en el segundo ejemplo de la misma figura.

### EFECTO DE LA ALTURA FINITA DE LOS CILINDROS

Cole (1976) investigó el efecto de cilindros de altura finita en la transición a los vórtices de Taylor y a los vórtices ondulados. Aunque la teoría analítica ha sido desarrollada principalmente para el problema de cilindros infinitos, los vórtices de Taylor se han observado

en experimentos con cilindros tan pequeños que solo unos cuantos vórtices se pueden desarrollar. Los vórtices de cilindros pequeños aparecen en los extremos, con Números de Reynolds por abajo del número crítico para los vórtices de Taylor en un cilindro infinito (Coles 1965; Cole 1976; Benjamin 1978). Conforme se aumenta el Número de Reynolds, el patrón de vórtices se dispersa hacia el centro, llenándolo en un Número de Reynolds crítico que está dentro de la incertidumbre experimental igual al Número de Reynolds crítico para el problema del cilindro infinito (Snyder 1968; Cole 1976). Sin embargo, dado que la transición es enteramente continua, realmente no hay "bifurcación a la cual se le pueda asignar sin ambigüedad un valor de  $R$ , por lo cual las estimaciones experimentales son subjetivas en alguna medida..." (Benjamin 1978).

Cole (1976) encontró que el Número de Reynolds para el inicio de los vórtices ondulados se incrementa considerablemente cuando la altura de los cilindros se reduce. La predicción teórica para el cilindro infinito coincidió dentro del 1% aproximadamente sólo para cilindros altos en comparación con la distancia entre ellos (100 veces más altos que la distancia que los separa). Esta relación, en el sistema estudiado por D. Coles (1965) fue 27.9, mientras que en el de Fenstermacher et al. 20.0, y el cociente entre los radios fue de 7/8. El estudio de J. A. Cole (1976) muestra que para estos cilindros la transición a vórtices ondulados ocurre con Números de Reynolds aproximadamente 9% y 13% mayores que los datos teóricos para un cilindro infinito.

Como es de suponer, los problemas que conllevan el efecto de cilindros de altura son formidables desde el punto de vista teórico.

### UNICIDAD

Con Números de Reynolds suficientemente pequeños existe, para cualquier geometría de flujo, una única solución estable a las ecuaciones de Navier-Stokes; sin tomar en cuenta condiciones iniciales, el flujo se aproxima asintóticamente a esta solución (Serrin, 1959). Sin embargo, con Números de Reynolds grandes pueden existir varias soluciones estables a las ecuaciones de movimiento. La posibilidad de varios flujos estables no fue considerada hasta que Coles presentó su trabajo (1965), pero fue vívidamente demostrada mediante el descubrimiento sorprendente de que en el flujo de su sistema de cilindros concéntricos se pudieron lograr 26 estados espaciales estables con un Número de Reynolds dado. Los estados pudieron distinguirse por el número de vórtices axiales  $p$ , que corrió desde 18 hasta 32, y por el número de ondas azimutales  $m$ , que corrió de 3 a 7. Se produjeron diferentes estados  $p/m$  con un mismo Número de Reynolds gracias a las diferencias de aceleración con que se alcanzó la misma velocidad angular y porque se rotó el cilindro exterior para después detenerlo. Snyder (1969) encontró subsecuentemente que diferentes estados axiales también eran accesibles en los vórtices de Taylor independientes del tiempo, y Burkhalter & Koschmieder (1974) encontraron que el rango de longitud de onda axial para estados estables y estacionarios es muy grande. Benjamin (1978) observó distintos estados espaciales en los vórtices de Taylor, incluso en un anillo tan pequeño que solamente tres o cuatro vórtices podían ser acomodados. La multiplicidad e histéresis asociados en las

transiciones entre diferentes estados espaciales complica enormemente las investigaciones del fluido más allá de la primera inestabilidad. Coles (1965) escribió: "La mayor dificultad experimental es que para un observador que conoce las condiciones de operación estables actuales para los aparatos (geometría, propiedades de los fluidos, velocidad, etc.) pero que no conoce las condiciones previas de operación, no será capaz de especificar los dos números de onda característicos necesarios para determinar el comportamiento del flujo en detalle".

## ASPECTO TECNICO

### CONTROL DE PARAMETROS

El dispositivo empleado para hacer investigación sobre el problema de Couette-Taylor debe ser tal que permita un alto grado de control en las variables que parametrizan al fluido a fin de lograr mediciones precisas. La rotación estable y uniforme de los cilindros se obtiene mediante dos motores sincrónicos colocados fuera de la mesa y dirigidos con las señales de salida que emiten osciladores de precisión; los cilindros pueden montarse sobre una mesa que aisle vibraciones y ser movidos por bandas conectadas a los motores. Es posible lograr frecuencias bastante estables, aunque los períodos de rotación de los cilindros—medidos con cronómetros electrónicos— experimentan pequeñas fluctuaciones debidas a la flexibilidad de las bandas.

La temperatura del dispositivo debe mantenerse constante ya que de no ser así el Número de Reynolds varía (en el caso del agua, por ejemplo, la viscosidad cambia 2% por cada grado centígrado). Esto se logra mediante circulación inducida de aire sobre el sistema. En experimentos realizados por Swinney y su grupo se han evitado cambios mayores a 0.05 grados centígrados utilizando un regulador de calor dentro del recipiente que contiene a los cilindros y al mismo tiempo se logró que las variaciones de viscosidad no excedieran al 0.1 %.

### DETERMINACION DE LA LONGITUD DE ONDA

Para visualizar el patrón formado por el flujo, se mezcla una suspensión en el líquido (por ejemplo Kalliroscope AQ1000). Con el objeto de lograr la suficiente profundidad de campo, las fotografías son tomadas con una pequeña abertura de diafragma y el tiempo de exposición se reduce a unos 50 microsegundos gracias a destellos electrónicos duales.

En un rango amplio de  $R$  y para varios estados espaciales con diferentes números de vórtices axiales y ondas azimutales, las posiciones extremas de los vórtices pueden medirse empleando un catetómetro; las gráficas de éstas son muy útiles en la detección de estados espaciales, en particular cuando se usa la técnica Laser-Doppler y, a su vez, los estados espaciales juegan un papel importante, ya que las frecuencias características y las  $R$ 's que

experimentan transición son diferentes para distintos estados espaciales.

Los números de onda se determinan con fotografías Polaroid, o bien, midiendo la frecuencia del vórtice con un pequeño laser de helio-neón y una fotocelda.

### SISTEMA OPTICO DE VELOCIMETRIA LASER - DOPPLER

La técnica Laser-Doppler ha sido discutida por investigadores como Durrani y Greated (1977), y empleada en el problema de Couette-Taylor exitosamente por muchos otros. Como partículas de dispersión se han usado esferas de poliestireno con diámetros típicos de 0.480 y 0.365 micrómetros cuya concentración es alrededor de 0.03 % del volumen total del líquido, lo cual produce una variación de viscosidad del 0.05 %.

La parte óptica del sistema se basa en la geometría del rayo que una vez reflejado se dispersa (fig. 10). El rayo laser se filtra y colima para ser enfocado sobre el fluido. El rayo que regresa disperso es colectado por las mismas lentes y pasa a través de una pequeña abertura que limita el paso de luz, para después ser dividido y enfocado junto con un laser de referencia en un tubo fotomultiplicador. El volumen de "dispersión" en el fluido forma aproximadamente un elipsoide de revolución alargado hacia los polos, con diámetro mayor en la dirección radial y menor en la dirección del eje  $z$ .

Los vectores de las ondas incidente y dispersada,  $k_0$  y  $k_s$ , respectivamente, están contenidos en un plano vertical que pasa por el eje del sistema y forman ángulos iguales con el plano horizontal, por lo que el vector de transferencia de momentum,  $q = k_0 - k_s$ , se encuentra en el plano horizontal, razón por la cual la luz dispersada experimenta un desplazamiento Doppler en su frecuencia dado por

$$\omega_D = \mathbf{V} \cdot \mathbf{q} = V_r q = (4\pi n / \lambda_0) \sin(\theta/2) V_r,$$

donde  $n$  es el índice de refracción,  $\lambda_0$  es la longitud de onda del laser,  $\theta$  es el ángulo de dispersión y  $V_r(r, t)$  es la componente radial de la velocidad del fluido.

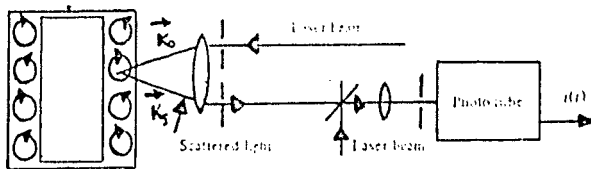


Figura 10. Diagrama esquemático del sistema óptico de velocimetría Laser-Doppler.

El cambio Doppler debido a la dispersión del campo óptico se combina con la luz laser sin variación Doppler en el fotocátodo y la fotocorriente  $i(t)$ , proporcional al cuadrado del campo incidente, oscila de acuerdo con la frecuencia del desplazamiento Doppler.

### RECOLECCION DE DATOS Y ANALISIS ESPECTRAL

El dispositivo para la toma de datos se esquematiza en la figura 11. La fotocorriente es amplificada y filtrada para después ser medida durante un intervalo de tiempo,  $\Delta t$ ,



al final del cual el resultado se transfiere a la memoria de una microcomputadora. De esta forma la frecuencia de la señal Doppler, y por consiguiente la velocidad del fluido, quedan registradas. Los desplazamientos Doppler típicos son de  $10^5$  Hz., mientras que las frecuencias características del campo de velocidad van aproximadamente de 0.1 a 10 Hz.; de aquí que los cambios Doppler, determinados en un tiempo pequeño comparado con el intervalo típico en el cual el campo de velocidad cambia, dan por resultado, esencialmente, la velocidad instantánea. En los flujos muy turbulentos donde las frecuencias características pueden compararse con el desplazamiento Doppler, se requieren dispositivos más sofisticados.

Los datos son transferidos de la microcomputadora a una computadora para ser analizados. La densidad espectral de la velocidad se obtiene a partir de los módulos al cuadrado de la transformada de Fourier, calculada sobre el registro de velocidades. El registro de velocidad-tiempo, el espectro de velocidad y la función de autocorrelación de velocidad pueden graficarse mientras otro programa procesa y lista las frecuencias y las anchuras de banda de todas las líneas espectrales.

La ventana GEO (Otnes & Enochson 1978) se aplica al espectro con el propósito de suprimir lóbulos laterales en la transformada de Fourier original. Si no se hace ningún cálculo estadístico para disminuir el ruido, la resolución de la frecuencia, definida como el ancho total en la mitad del máximo de una línea espectral, es aproximadamente  $2/T$ , donde  $T$  es la longitud del registro de datos. La frecuencia máxima en el espectro es la llamada frecuencia de Nyquist,  $\omega_N = (2\Delta t)^{-1}$ . Dado que una alta resolución y un rango espectral ancho son necesarios para distinguir entre diferentes estados dinámicos de un fluido, deben registrarse tantos datos como sea posible ( $n = T/\Delta t$ ). Gollub & Swinney registraron 1024 puntos en 1975 mientras que ellos mismos en colaboración con Fenstermacher obtuvieron 8192 en 1978, mejorando también la resolución.

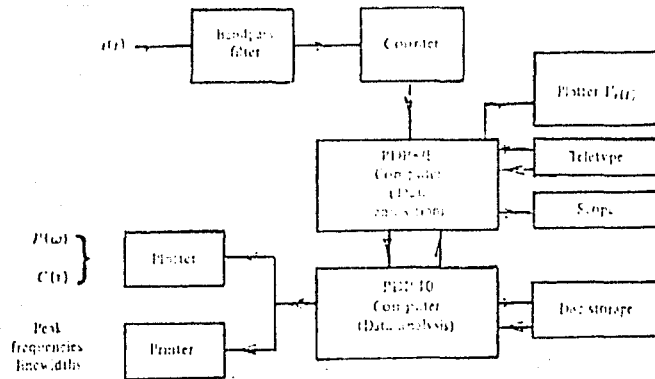


Figura 11. Diagrama esquemático del dispositivo para la toma de datos en el sistema de velocimetría Laser-Doppler.

En la figura 12(a) se muestra el espectro de una onda senoidal con una escala de frecuencia expandida junto con la componente espectral del fluido que corresponde a ondas azimutales.

Un inconveniente del método basado en muestreo periódico —como es el esquema de conteo de frecuencia por multicanal— es que el espectro obtenido en el rango  $0 - \omega_N$  contiene “alias”, que son componentes de frecuencia superior plegadas dentro del mismo rango (Otnes & Enochson 1978). Un ejemplo de esto se puede ver en la figura 12(b) que muestra una componente espectral,  $\omega_1$ , y alias en dos de sus armónicos. Los alias pueden identificarse al comparar dos espectros obtenidos con diferentes tiempos de prueba.

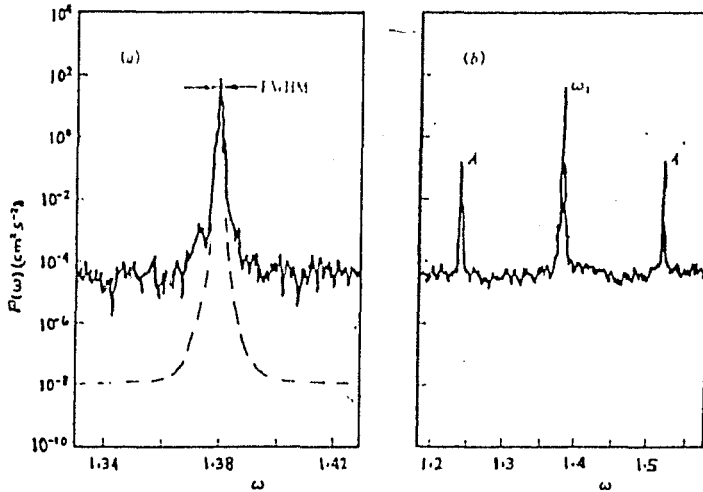


Figura 12. Segmentos de un espectro de velocidad obtenido cuando  $R/R_c = 5.7$ . La frecuencia adimensional  $\omega$  está dada en unidades de frecuencia del cilindro (interior), y el espectro va de  $\omega = 0$  a 2. (a) La curva continua es una gráfica de alta resolución no “sunvizada”; la línea del espectro es la componente fundamental de la frecuencia correspondiente a ondas azimutales. El espectro de una onda tipo seno con la misma frecuencia central está indicada por la línea punteada. (b) La componente espectral  $\omega_1$  en  $\omega = 1.380$  tiene armónicos  $2\omega_1$ ,  $3\omega_1$ , etc., los cuales se encuentran fuera del rango de  $\omega$ . Estas componentes de frecuencias altas aparecen como “alias”. Por ejemplo, la componente A de la izquierda, está en  $2\omega_N - 2\omega_1 = 1.240$ , donde  $\omega_N = 2.000$  es la frecuencia de Nyquist; la componente A que se encuentra a la derecha está en  $4\omega_1 - 2\omega_N = 1.520$ .

### ELECCION DEL ESTADO ESPACIAL

Antes finalizar este bosquejo sobre la técnica Laser-Doppler es conveniente puntualizar que para un Número de Reynolds dado existen varios estados espaciales estables que pueden obtenerse dependiendo de la historia del sistema. De hecho Fenstermacher, Swinney & Gollub (1978) establecieron que diferentes estados  $p/m$ , donde  $p$  es el número de vórtices axiales y  $m$  el número de ondas azimutales, poseen espectros ligeramente diferentes y transiciones de Números de Reynolds. Por lo tanto, cualquier análisis de las transiciones de flujo deberá determinar el estado espacial para toda medida espectral. Sin embargo, un

estudio cuidadoso del comportamiento dinámico de cada estado espacial accesible y de sus transiciones requiere una cantidad enorme de tiempo. Por otra parte, la estabilidad de un estado espacial sugiere que mientras diferentes estados pueden ser ligeramente degenerados en energía, podrían estar separados por una barrera potencial que hace improbable que la variedad de estados espaciales se relacione con la dinámica de transición a turbulencia. Así, se ha conjeturado que la dependencia de los Números de Reynolds puede dividirse en dos problemas separados: el primero tiene que ver con la dependencia del estado espacial sobre la historia de  $R$ ; el segundo tiene que ver con la transición a turbulencia bajo cambios cuasiestáticos en el Número de Reynolds para un estado espacial dado.

## CAPITULO II

### ECUACIONES FUNDAMENTALES

Con un panorama general sobre los aspectos experimental y técnico del problema de Couette-Taylor, en este capítulo se procede a deducir las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de fluidos. Las deducciones se basan, naturalmente, en la hipótesis del continuo, en el importante Teorema de Reynolds, y en las leyes de conservación de masa y momentum. También se discute brevemente la Ley de Similitud ya que juega un papel prominente en los argumentos de adimensionalización de ecuaciones.

De las fórmulas que se obtienen, las de Navier-Stokes constituyen la piedra angular de este capítulo dado que las deducciones subsecuentes se basan en ellas.

#### LOS MODELOS ESTADISTICO Y DEL CONTINUO

Las ecuaciones que describen el comportamiento de un fluido se pueden obtener básicamente a partir de dos enfoques diferentes. El primero de éstos aborda el problema desde un punto de vista molecular, según el cual un fluido no es más que un conjunto de moléculas cuyo movimiento es gobernado por las leyes de la dinámica. Los fenómenos macroscópicos son entonces el producto del movimiento molecular, y la teoría intenta predecir el comportamiento macroscópico de los fluidos a partir de las leyes de la mecánica y de la teoría de probabilidad. Con este método se obtienen las ecuaciones de conservación de masa, momentum y energía, a condición de que el fluido se encuentre en un estado no demasiado lejano al de equilibrio. También es posible obtener expresiones para los coeficientes de transporte, tales como los coeficientes térmico y de viscosidad, todo en términos de cantidades moleculares. En esta dirección la teoría se encuentra bien desarrollada para gases ligeros, pero es incompleta para moléculas de gas poliatómicas y para líquidos.

El enfoque alternativo se vale del concepto del continuo. Según este enfoque, las moléculas individuales son ignoradas para suponer que el fluido está constituido por materia continua, de tal forma que en cada punto puedan ser asignados valores únicos a variables de campo (velocidad, presión, densidad, etc.). Una vez hecho esto, se requerirá que la materia continua obedezca las leyes de conservación arriba citadas y así se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales para las variables de campo. Las soluciones a estas ecuaciones definen el cambio de cada variable de campo respecto a espacio y tiempo, que corresponde al valor medio de la magnitud molecular de esa misma variable en cada posición y tiempo.

Aunque el método estadístico es elegante y puede ser usado para tratar flujos gaseosos en situaciones donde el concepto del continuo deja de ser válido, como se ha dicho, la teoría es incompleta para líquidos y gases densos. En contraposición, cuando las condiciones de la hipótesis del continuo se cumplen (por ejemplo que la trayectoria media de las moléculas

sea muy pequeña comparada con la menor magnitud física del objeto que contiene el fluido), los resultados son igualmente aplicables a líquidos y a gases ligeros o densos. Dado que el problema de Couette–Taylor (así como la gran mayoría de fenómenos en mecánica de fluidos) caen dentro del dominio del continuo, se adoptará este enfoque.

## COORDENADAS EULERIANAS Y LAGRANGIANAS

Una vez que se ha seleccionado el enfoque del continuo, se debe elegir el marco de referencia en el cual se formulen las leyes de conservación. Existen básicamente dos sistemas coordenados que pueden emplearse, a saber, el sistema euleriano (también conocido como sistema de coordenadas espaciales) y el lagrangiano (también conocido como sistema de coordenadas materiales).

En el marco de referencia euleriano las variables independientes son las coordenadas espaciales  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  y el tiempo  $t$ . Este es el marco de referencia familiar en el cual se resuelven la mayor parte de los problemas. A fin de derivar las ecuaciones básicas de conservación, se estudia el fluido que pasa a través de un volumen de control fijo en el espacio y se le aplican los principios de conservación de masa, momentum y energía, para obtener las fórmulas matemáticas correspondientes.

En el enfoque lagrangiano la atención se centra en el flujo de una masa particular del fluido. Supóngase que de alguna forma fuese posible tener una pequeña porción de este último sin cambiar su densidad, y perseguirla (no importa si cambia su forma, siempre y cuando se trate de las mismas partículas). Al aplicar los principios de conservación se obtiene el conjunto de ecuaciones respectivas en coordenadas lagrangianas. En este marco de referencia,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  y  $t$  dejan de ser las variables independientes, ya que si se conocen las coordenadas  $x_1^0$ ,  $x_2^0$  y  $x_3^0$  en un tiempo  $t^0$ , su posición puede ser calculada para cualquier otro tiempo  $t > t^0$  una vez conocidas las componentes de velocidad

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt}, \quad u_2 = \frac{dx_2}{dt}, \quad u_3 = \frac{dx_3}{dt},$$

mediante las siguientes expresiones:

$$x_1 = x_1^0 + \int_{t_0}^t u_1 dt, \quad x_2 = x_2^0 + \int_{t_0}^t u_2 dt, \quad x_3 = x_3^0 + \int_{t_0}^t u_3 dt.$$

Las variables independientes en el sistema lagrangiano son  $x_1^0$ ,  $x_2^0$ ,  $x_3^0$  y  $t$ , donde  $x_1^0$ ,  $x_2^0$ ,  $x_3^0$  identifican al elemento de fluido en cuestión cuando  $t = t^0$ .

La elección del sistema a emplear es cuestión de gusto y comodidad. En general, resulta preferible aplicar las leyes de conservación a un volumen de control que consista siempre de las mismas partículas de fluido, que a un volumen de control a través del cual pasan diferentes partículas del mismo. Por tal motivo, las ecuaciones básicas serán derivadas en el sistema coordenado lagrangiano, no obstante lo cual se hace notar una vez más que el sistema euleriano es el preferido en la resolución de problemas.

Sin importar el sistema coordenado que se emplee, existen dos tipos fundamentales de volúmenes de control. Uno de éstos es un paralelepípedo de dimensiones  $dx_1$ ,  $dx_2$  y  $dx_3$ .

En este caso, toda propiedad de flujo, tal como velocidad o presión, se expande en series de Taylor alrededor del centro del volumen de control, conservando solo el primer término, a fin de encontrar las correspondientes expresiones en cada una de sus caras. Después se hace uso de algún principio de conservación con el propósito de obtener la fórmula buscada.

El segundo tipo de volumen de control es de forma arbitraria, y cada principio de conservación es aplicado a una integral sobre dicho volumen. Por ejemplo, para la masa se tiene

$$\iiint_V \rho \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3,$$

donde  $dV = d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3$  representa el elemento diferencial de volumen,  $\rho$  es la densidad del fluido y la integración es llevada a cabo sobre el volumen  $V$ , contenido en el de control. El resultado de aplicar cada principio será una fórmula integro—diferencial del tipo

$$\iiint_V L\alpha \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 = 0,$$

donde  $L$  es algún operador diferencial y  $\alpha$  alguna propiedad del fluido. Dado que  $V$  fué escogido arbitrariamente, la única manera en que esta ecuación se cumple es fijando  $L\alpha = 0$ , que es la fórmula diferencial de la ley de conservación.

Aunque en el presente trabajo se usarán volúmenes de control arbitrarios, huelga decir que los resultados obtenidos por ambos métodos son idénticos.

Si  $\alpha$  representa cualquier variable de campo, tal como densidad o temperatura de un fluido, desde el punto de vista euleriano  $\alpha$  depende de  $x_1, x_2, x_3$  y  $t$ . Pero si un elemento específico del fluido es observado en un período de tiempo  $\Delta t$ , su posición sufrirá los cambios  $\Delta x_1, \Delta x_2$  y  $\Delta x_3$ , mientras que el valor de  $\alpha$  variará  $\Delta\alpha$ . Esto es, si se observara el elemento de fluido en el marco de referencia lagrangiano, las variables independientes serían  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  y  $t^0$ , donde  $x_1^0, x_2^0$  y  $x_3^0$  son las coordenadas iniciales del elemento de fluido. Así,  $x_1, x_2$  y  $x_3$  dejan de ser variables independientes para convertirse en funciones de  $t$  (que juega el papel de parámetro en la trayectoria), y por lo tanto  $\alpha(\mathbf{x}, t) = \alpha[\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t]$ , con  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , de donde

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial t},$$

(recordar que  $\mathbf{x}^0$  es un punto fijo); o, de manera equivalente:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial\alpha}{\partial x_2} u_2 + \frac{\partial\alpha}{\partial x_3} u_3 + \frac{\partial\alpha}{\partial t}.$$

En notación vectorial esta fórmula puede escribirse como

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\alpha. \quad (2.1a)$$

Alternativamente, usando la convención de Einstein para sumatorias donde los sub-índices repetidos se suman, la forma tensorial puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial\alpha}{\partial x_k} u_k. \quad (2.1b)$$

El término  $\frac{d\alpha}{dt}$  de las ecuaciones (2.1a) y (2.1b) es la llamada "derivada material"; representa el cambio total de la cantidad  $\alpha$  vista por un observador que sigue el fluido y mira una masa particular de éste (cf. [35], pps. 77-81). El lado derecho de la misma ecuación representa el cambio total de  $\alpha$  en coordenadas eulerianas. El término  $\frac{\partial\alpha}{\partial x_k} u_k$  expresa el hecho de que, para un campo de flujo independiente del tiempo, en el cual las propiedades del fluido dependen de las coordenadas espaciales únicamente, existe intercambio en  $\alpha$  debido a que un elemento dado de fluido cambia su posición con el tiempo y por lo tanto toma diferentes valores de  $\alpha$  de acuerdo a la manera en que fluye. El término  $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$  es la bien conocida derivada euleriana respecto al tiempo e indica que en cualquier punto del espacio las propiedades del fluido pueden cambiar con el tiempo. Entonces las ecuaciones (2.1a) y (2.1b) relacionan la variación de  $\alpha$  respecto a  $t$  para un elemento de fluido con los términos de las derivadas eulerianas  $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$  y  $\frac{\partial\alpha}{\partial x_k}$ .

### TEOREMA DE TRANSPORTE DE REYNOLDS

El método seleccionado para derivar las ecuaciones básicas a partir de las leyes de conservación se vale del concepto del continuo, siguiendo un volumen de control de forma arbitraria en el marco de referencia lagrangiano. Consecuentemente se encontrarán derivadas materiales de integrales de volumen que deberán ser transformadas a expresiones equivalentes con derivadas eulerianas. Esto se lleva a cabo mediante el *Teorema de Transporte de Reynolds*.

Considérese una masa específica de fluido que será seguida durante un corto período de tiempo  $\Delta t$ . Sea  $\alpha$  cualquier propiedad de campo, tal como masa, momentum en una dirección o energía. Puesto que se está considerando una masa particular y dado que  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  y  $t$  son las variables independientes en el marco de referencia lagrangiano, la cantidad  $\alpha$  será función de  $t$  únicamente, i. e.,  $\alpha = \alpha(t)$  y se define

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int \int \int_{V(t)} \alpha(t) \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \\ & \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\Delta t} \left( \int \int \int_{V(t+\Delta t)} \alpha(t+\Delta t) \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 - \int \int \int_{V(t)} \alpha(t) \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \right) \right], \end{aligned}$$

donde  $V(t)$  es el volumen de control que contiene la masa del fluido especificado, que a su vez puede cambiar de forma y tamaño. Evidentemente

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int \int \int_{V(t)} \alpha(t) \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\Delta t} \left( \int \int \int_{V(t+\Delta t)} \alpha(t+\Delta t) \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 - \int \int \int_{V(t)} \alpha(t+\Delta t) \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\Delta t} \left( \int \int \int_{V(t)} \alpha(t+\Delta t) \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 - \int \int \int_{V(t)} \alpha(t) \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \right) \right], \end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \alpha(t) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \iiint_{V(t+\Delta t)-V(t)} \alpha(t+\Delta t) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \right) + \iiint_{V(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3. \end{aligned}$$

El límite restante puede evaluarse con ayuda de la figura 13. En la parte (a) se muestra el volumen de control  $V$  que encierra la masa del fluido en consideración a los tiempos  $t$  y  $t + \Delta t$ . Durante el intervalo  $\Delta t$  el volumen se ha movido y cambiado de forma y tamaño. La superficie que envuelve a  $V(t)$  se denota por  $S(t)$ , la velocidad en cualquier punto de  $S$  por  $\mathbf{u}$ , y  $\mathbf{n}$  es la normal exterior unitaria.

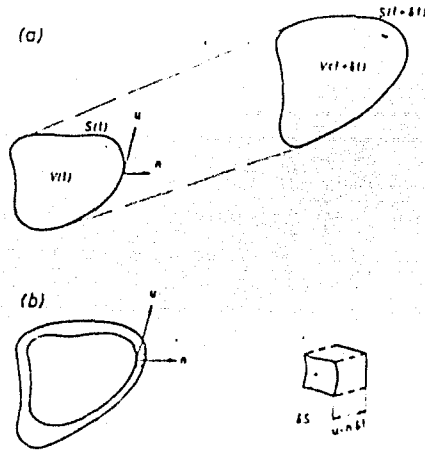


Figura 13. (a) Contorno de un volumen de control arbitrario en los tiempos  $t$  y  $t + \Delta t$ , y (b), superposición del volumen de control en esos tiempos mostrando un elemento  $\Delta V$  del cambio de volumen.

En (b) se bosquejan  $V(t)$ ,  $V(t + \Delta t)$  y un elemento de la diferencia de volúmenes. La distancia perpendicular al primer volumen y que une a ambos está dada, entonces, por  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Delta t$ , y consecuentemente  $dV = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Delta t dS$ . Bajo estas consideraciones, la integral de volumen se puede transformar en una de superficie para obtener

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \alpha(t) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \iint_{S(t)} \alpha(t+\Delta t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\zeta_h d\zeta_k \right] + \iiint_{V(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \\ &= \iint_{S(t)} \alpha(t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\zeta_h d\zeta_k + \iiint_{V(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3, \end{aligned}$$



donde  $dS = d\zeta_h d\zeta_k$  ( $h, k = 1, 2, 3$ ) es el elemento diferencial de superficie adecuado (por ejemplo, al emplear el Teorema de Gauss  $h, k$  son tales que  $dS$  es la superficie que requiere el teorema). Aplicando el teorema de la divergencia se llega finalmente a:

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{V(t)} \alpha d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 = \int \int \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) \right] d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3, \quad (2.2a)$$

o, en notación tensorial

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{V(t)} \alpha d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 = \int \int \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u_k}{\partial x_k} \right] d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3, \quad (2.2b)$$

que son las formas vectoriales y tensoriales del *Teorema de Transporte de Reynolds*.

Las ecuaciones (2.2a) y (2.2b) relacionan las derivadas lagrangianas de una integral con otra cuyo integrando contiene derivadas eulerianas solamente.

### CONSERVACION DE LA MASA

Se afirma que una masa específica de fluido contenida en un volumen  $V$  puede cambiar de tamaño y forma al fluir pero su valor (cantidad de masa) permanece constante. Este es el principio de conservación de la masa que se aplica a fluidos en los que no se llevan a cabo reacciones nucleares. El equivalente matemático de tal enunciado se obtiene tomando la derivada lagrangiana de la masa del fluido contenida en  $V$  e igualándola con cero, esto es

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{V(t)} \rho d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 = 0.$$

Mediante el teorema de Reynolds, esta expresión se transforma en una integral de volumen cuyo integrando contiene solamente derivadas eulerianas:

$$\int \int \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 = 0,$$

o, en notación tensorial:

$$\int \int \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} \right] d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 = 0.$$

Puesto que el volumen  $V$  fue escogido arbitrariamente, el único caso en que estas ecuaciones se satisfacen para todos los posibles valores de  $V$  es cuando el integrando se anula. Por lo tanto, la ley de conservación de masa se expresa mediante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} = 0. \quad (2.3b)$$

Cuando la variación de la densidad puede ignorarse —como en el problema de Couette-Taylor—, se dice que el fluido es incompresible, lo cual implica que, además de la masa, el volumen permanece constante. Dado que  $\rho \neq 0$ , la incompresibilidad se traduce en

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.4a)$$

cundo se emplea notación vectorial, o equivalentemente

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (2.4b)$$

si se utilizan tensores.

### CONSERVACION DEL MOMENTUM

El principio de conservación del momentum es una aplicación de la segunda ley de Newton a un elemento de fluido. Antes de derivarla es conveniente recordar que, en el contexto hidrodinámico, las fuerzas se clasifican en: (1) fuerzas de cuerpo, que son de origen externo y largo alcance (gravitacional, electromagnética, etc.) y (2) fuerzas de superficie, que son de origen molecular y corto alcance (presión, tensión viscosa, etc.).

Si  $\mathbf{f}$  representa la fuerza de cuerpo resultante por unidad de masa, la fuerza de cuerpo total que actúa sobre un volumen  $V$  será:

$$\iiint_V \rho \mathbf{f} \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3.$$

Análogamente, si  $\mathbf{P}$  representa la fuerza de superficie resultante por unidad de área, la fuerza de superficie total viene dada por

$$\iint_S \mathbf{P} \, d\zeta_n d\zeta_k.$$

Por otra parte, dado que la masa por unidad de volumen es  $\rho$  y su densidad de momentum  $\rho \mathbf{u}$ , la cantidad de movimiento contenido en  $V$  es:

$$\iiint_V \rho \mathbf{u} \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3.$$

De aquí que si la masa de un volumen  $V$ , arbitrariamente escogido, es observada en un marco de referencia lagrangiano, la razón de cambio del momentum será:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{u} \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3.$$

Por lo tanto, la expresión matemática resultante de la ley de conservación de la cantidad de movimiento es:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho u_i \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 = \int \int_S P_i \, d\zeta_h d\zeta_k + \int \int \int_V \rho f_i \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3.$$

En cada elemento de volumen existen nueve componentes de esfuerzo: una normal y dos tangenciales sobre cada plano coordenado. La figura 14 las ilustra en un elemento cúbico. Nótese que cuando las dimensiones de la figura geométrica tienden a cero la acción se manifiesta en un punto.

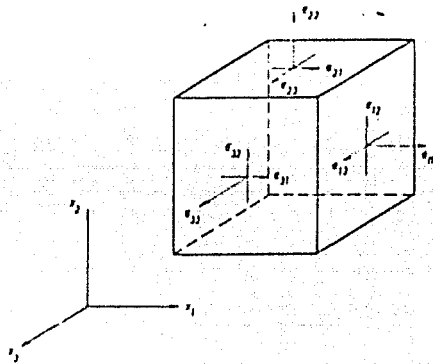


Figura 14. Representación de las nueve componentes del esfuerzo.

Se propone la siguiente notación: cada componente de esfuerzo será identificada mediante la cantidad  $\sigma_{ij}$ , donde el primer subíndice indica el plano  $x_i = \text{constante}$  en que actúa el esfuerzo, y el segundo subíndice indica la dirección del mismo.

El hecho de que tal variable pueda ser representada por las cantidades  $\sigma_{ij}$ , donde  $i, j = 1, 2, 3$ , significa que a su vez puede ser representada por un tensor de rango 2. Para hacerlo así, recuérdese que en la superficie del volumen de control existe una fuerza en cada punto, representada por  $P$ . A su vez, las componentes del esfuerzo que actúan en el plano  $x_i = \text{cte.}$  son  $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}$  y  $\sigma_{i3}$ . Si se considera el vector normal unitario  $n_j$ , la fuerza actuante en la dirección  $x_j$  es  $P_i = \sigma_{ij}n_j$ . Entonces, para cualquier superficie orientada cuyas normales son  $n_1, n_2$  y  $n_3$ , la fuerza de superficie está dada por  $P_j = \sigma_{ij}n_i$ , donde el subíndice  $i$  toma los valores 1, 2 y 3 que se suman.

Así, en notación tensorial, la conservación del momentum se expresa como

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho u_j \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 = \int \int_S \sigma_{ij}n_i \, d\zeta_h d\zeta_k + \int \int \int_V \rho f_j \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3.$$

Aplicando los teoremas de Reynolds y Gauss al miembro izquierdo y a la integral de superficie, respectivamente, se obtiene:

$$\int \int \int_V \left[ \frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_k}{\partial x_k} \right] d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 = \int \int \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 + \int \int \int_V \rho f_j \, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3$$

(para cada ecuación,  $j$  toma un valor fijo, mientras que  $i$  y  $k$  van de 1 a 3).

Así se concluye que

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j$$

(en coordenadas eulerianas), ó

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j.$$

La ecuación (2.3b) hace posible alguna economía de espacio:

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j. \quad (2.5)$$

El miembro izquierdo representa la razón de cambio de la cantidad de movimiento por unidad de volumen: el primer término no es más que la aceleración temporal y el segundo la aceleración convectiva. En el lado derecho se tienen las fuerzas que producen aceleración: La primera es debida al gradiente de los esfuerzos tangenciales sobre la superficie, mientras que la segunda a fuerzas de cuerpo que actúan sobre el fluido.

### RAZONES DE CAMBIO DE ROTACION Y CIZALLAMIENTO

El propósito de esta sección es identificar las cantidades tensoriales que representan el cizallamiento y la rotación de un elemento de fluido alrededor de su propio eje. Para hacerlo, considérese un elemento infinitesimal de fluido de sección transversal rectangular y obsérvense sus cambios de forma y orientación en el tiempo.

La figura 15 muestra un elemento bidimensional de fluido (o la proyección de un elemento espacial) cuyas dimensiones en  $t = 0$  son  $\delta x_m$  y  $\delta x_n$ . En este momento su centro coincide con el origen de un sistema coordenado fijo. Sean A, B, C y D sus esquinas.

Después de un corto período de tiempo  $\Delta t$ , el centro de la porción del fluido se encontrará en un punto diferente, como se muestra en la misma figura. La distancia recorrida en la dirección  $x_m$  viene dada por

$$\Delta x_m = \int_0^{\Delta t} u_m[x_m(t), x_n(t)] dt.$$

Puesto que los valores de  $x_m$  y  $x_n$  son cercanos a cero para tiempos pequeños, la velocidad  $u_m$  puede expandirse en serie de Taylor alrededor del origen:

$$\Delta x_m = \int_0^{\Delta t} \left[ u_m(0,0) + x_m(t) \frac{\partial u_m(0,0)}{\partial x_m} + x_n(t) \frac{\partial u_m(0,0)}{\partial x_n} + \dots \right] dt.$$

Si se retiene solo el primer término y se integra, el resultado es:

$$\Delta x_m = u_m(0,0) \Delta t.$$



$$= \arctan \left[ \frac{\delta x_m \frac{\partial u_n(0,0)}{\partial x_m} + \dots}{\delta x_m (1 + \dots)} \right] = \arctan \left[ \left( \frac{\partial u_n(0,0)}{\partial x_m} + \dots \right) \Delta t \right].$$

Dado que el argumento del arcotangente es pequeño, con una expansión en serie se obtiene:

$$\Delta \alpha_m = \left[ \frac{\partial u_n(0,0)}{\partial x_m} + \dots \right] \Delta t + \dots,$$

de donde

$$\frac{\delta \alpha_m}{\delta t} = \frac{\partial u_n(0,0)}{\partial x_m} + \dots.$$

Cuando  $\delta t$  tiende a cero:

$$\dot{\alpha}_m = \frac{\partial u_n(0,0)}{\partial x_m}.$$

Mediante un procedimiento absolutamente similar se encuentra que:

$$\dot{\alpha}_n = \frac{\partial u_m(0,0)}{\partial x_n}.$$

Entonces, la razón de cambio de rotación en el sentido de las manecillas del reloj del elemento de fluido alrededor de su centro viene dado por:

$$\frac{1}{2} [\dot{\alpha}_n - \dot{\alpha}_m] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_m}{\partial x_n} - \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right].$$

De la misma manera, la razón de cambio del cizallamiento (cuando  $B'C'$  y  $D'C'$  se aproximan) queda expresada por:

$$\frac{1}{2} [\dot{\alpha}_n + \dot{\alpha}_m] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right].$$

El presente análisis es válido en proyecciones bidimensionales de un elemento tridimensional. De aquí que los siguientes resultados también lo sean:

$$\text{Razón de cambio de rotaciones} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right],$$

$$\text{Razón de cambio de cizallamiento} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right].$$

Ambas expresiones pueden ser representadas por un tensor de rango 2. Debe resaltarse el hecho de que la razón de cambio del tensor de rotación es antisimétrica, y por lo tanto, solo tiene tres componentes independientes, mientras que la razón de cambio del tensor de cizallamiento es simétrico y tiene seis componentes independientes. Estas cantidades son, a su vez, las partes antisimétrica y simétrica de otro tensor conocido como *tensor de la razón de cambio de deformación*,  $e_{ij}$ , dado por:

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right].$$

## ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Ahora se relacionarán los nueve elementos del tensor de esfuerzo  $\sigma_{ij}$  con los nueve elementos del tensor de la razón de cambio de la deformación  $e_{kl}$ , mediante un conjunto de parámetros de los cuales todos serán evaluados analíticamente excepto dos (los coeficientes de viscosidad se determinan mediante experimentos). A fin de lograrlo se introducirán ciertas observaciones y postulados concernientes al tensor de esfuerzo. La manera precisa en que se enuncian es, de alguna forma, cuestión de gusto, pero las ecuaciones resultantes siempre son las mismas:

(1) Cuando el fluido se encuentra en reposo, el esfuerzo es hidrostático y la presión ejercida por el fluido es termodinámica.

(2) El tensor de esfuerzo,  $\sigma_{ij}$ , está relacionado linealmente con el tensor de la razón de cambio de la deformación,  $e_{kl}$ , y solamente depende de él.

(3) Puesto que no hay efectos de cizallamiento en rotaciones de cuerpo rígido en el fluido, ningún esfuerzo de cizallamiento actuará durante tal movimiento.

(4) No hay direcciones privilegiadas en el fluido, de tal forma que las propiedades del mismo son funciones de punto.

La condición (1) requiere que el tensor de esfuerzo sea de la forma  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$ , donde  $\tau_{ij}$  solo depende del movimiento del fluido y es conocido como el *tensor de esfuerzo de viscosidad*. La cantidad  $p$  es la presión termodinámica, y  $\delta_{ij}$  la delta de Kronecker.

La condición (2) postula que el tensor de esfuerzo —y por consiguiente el de esfuerzo de viscosidad— está relacionado linealmente con el tensor que da la razón de cambio de la deformación. Esta es la característica distintiva de los fluidos newtonianos que puede comprobarse experimentalmente.

Hay nueve elementos del tensor de esfuerzo de viscosidad  $\tau_{ij}$ , y cada uno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los nueve elementos del tensor que da la razón de cambio de la deformación,  $e_{kl}$ , por lo cual se necesitan ochenta y un parámetros para relacionarlos. Esto significa que la forma general de  $\tau_{ij}$  puede obtenerse con la ayuda de un tensor de rango cuatro que, según la condición (2) debe cumplir con

$$\tau_{ij} = \alpha_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}.$$

Como se vió en el apartado anterior,  $\frac{\partial u_k}{\partial x_l}$  tiene componentes simétrico y antisimétrico (propiedad válida para tensores de rango dos). De acuerdo con la condición (3), la parte antisimétrica debe anularse y por lo tanto

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2} \beta_{ijkl} \left[ \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right].$$

Por su parte, la condición (4) —conocida como condición de isotropía— conduce a

$$\beta_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}] + \gamma [\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}],$$

(con  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\gamma$  escalares), ya que esta es la forma más general de un tensor isotrópico de rango cuatro (cf. [6], pps. 417-420).

Si se aplica la condición (3) a  $\beta_{ijkl}$ ,  $\gamma$  debe anularse, para tener

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2} [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \left[ \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right].$$

Pero  $\delta_{kl} = 0$  a menos que  $k = l$ , de donde

$$\frac{1}{2} \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \left[ \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right] = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

(se ha reemplazado  $l$  por  $k$ ). Análogamente, si se reemplaza  $l$  por  $j$ , y  $k$  por  $i$ :

$$\frac{1}{2} \mu \delta_{ik} \delta_{jl} \left[ \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right] = \frac{1}{2} \mu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right].$$

Reemplazando  $k$  por  $j$ , y  $l$  por  $i$ :

$$\frac{1}{2} \mu \delta_{il} \delta_{jk} \left[ \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right] = \frac{1}{2} \mu \left[ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right].$$

Por lo tanto

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right].$$

Finalmente, la relación constitutiva para el esfuerzo en fluidos newtonianos será:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]. \quad (2.6)$$

Los parámetros  $\lambda$  y  $\mu$ , conocidos como coeficientes de viscosidad, se determinan empíricamente.

### LAS ECUACIONES DE NAVIER - STOKES

Las famosas ecuaciones de Navier-Stokes, que definen las condiciones más importantes que debe satisfacer un fluido en movimiento, surgen de la ley de conservación del momentum [ec. (2.5)] y de la relación constitutiva para el esfuerzo en fluidos newtonianos [ec. (2.6)]. Una vez obtenida la fórmula para el tensor de esfuerzo, se evalúa su derivada respecto a  $x_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ -p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$



donde  $i$  ha sido reemplazada por  $j$  en los dos primeros términos, ya que solamente cuando  $i = j$  no se anulan. Sustituyendo este resultado en (2.5) se obtiene

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho f_j, \quad (2.7a)$$

$j = 1, 2, 3$ , que son las ecuaciones escalares de Navier-Stokes (recordar que los índices  $i, k$  corren de 1 a 3).

El equivalente vectorial,

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \Delta \mathbf{u}] + \rho \mathbf{f}, \quad (2.7b)$$

se desprende de las siguientes igualdades:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \mathbf{u},$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} = \Delta u_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \mu \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \right] = \mu [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \Delta \mathbf{u}].$$

Para un fluido incompresible:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = 0,$$

ó

$$\lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0,$$

y, por lo tanto, las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a:

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} + \rho f_j,$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f},$$

ó

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} + f_j, \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (2.8b)$$

donde  $\nu = \mu/\rho$  es la viscosidad cinemática (en contraposición con  $\mu$ , que se conoce como viscosidad dinámica).

Cuando los efectos de viscosidad son despreciables se obtienen las fórmulas de Euler:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + f_j,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}.$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes forman un conjunto de tres ecuaciones diferenciales parciales elípticas de segundo orden con condiciones de frontera de Dirichlet o Neumann en un dominio cerrado. El equivalente físico consiste en especificar la velocidad del fluido en la superficie del objeto que lo contiene. La evidencia experimental indica que no hay deslizamiento entre la frontera sólida y el líquido en la interface cuando se adopta la aproximación del continuo. (Aunque a escala molecular es posible que haya deslizamiento, éste se presenta únicamente en capas cuyas dimensiones son del mismo orden de magnitud que la trayectoria media libre entre moléculas.) Entonces, si  $\mathbf{U}$  representa la velocidad en la frontera sólida, la condición

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \quad (2.9)$$

debe cumplirse.

### LA LEY DE SIMILITUD

Mediante argumentos concernientes a las dimensiones de varias cantidades físicas es posible obtener resultados importantes en el estudio del movimiento de fluidos viscosos. Considérese cualquier tipo de movimiento, por ejemplo, el de un cuerpo sólido a través de un fluido. Si no se trata de una esfera, su dirección de movimiento puede especificarse (en un elipsoide, la dirección del eje mayor da una posible orientación). Alternativamente pueden considerarse flujos en una región con fronteras definidas.

Se dice que cuerpos de la misma forma son geoméricamente similares si uno de ellos puede obtenerse del otro cambiando sus dimensiones en la misma proporción. De aquí que si se tiene el contorno de un cuerpo, es suficiente especificar cualquiera de sus dimensiones lineales a fin de determinar las restantes.

Por el momento se considerarán flujos uniformes e incompresibles. Si, por ejemplo, se está estudiando el paso de un cuerpo sólido a través de un fluido, la velocidad de la corriente principal debe ser constante.

De los parámetros que caracterizan a los fluidos, solo la viscosidad cinemática,  $\nu$ , aparece en las fórmulas de Navier-Stokes; las funciones desconocidas que se deben determinar son la velocidad  $\mathbf{u}$  y el cociente  $p/\rho$  (dado que  $\rho$  es conocido y se supone constante). Sin embargo, el flujo depende, vía las condiciones de frontera, de la forma y dimensiones del cuerpo. Puesto que se conoce la primera, sus propiedades geométricas quedan determinadas por una dimensión lineal, que se denotará por  $l$ . Sea  $v$  la rapidéz de la corriente principal (o de una corriente "típica"). Entonces cualquier flujo queda especificado por los parámetros  $\nu$ ,  $v$  y  $l$ , que tienen las siguientes dimensiones:

$$[\nu] = \frac{L^2}{T}, \quad [l] = L, \quad [v] = \frac{L}{T}.$$

Es fácil verificar que la única cantidad adimensional que puede formarse con estos parámetros es el Número de Reynolds,

$$R = \frac{vl}{\nu} = \frac{\rho vl}{\mu}.$$

Cualquier otro parámetro adimensional puede escribirse como función de  $R$ .

Se pueden introducir las cantidades  $x/l$  y  $u/v$  (sin dimensiones físicas), para medir longitudes en términos de  $l$ , y velocidades en términos de  $v$ . Dado que el único parámetro adimensional es el Número de Reynolds, es evidente que la distribución de velocidad que se obtiene al resolver la ecuación (2.8) está dada por una función de la forma

$$u = vf(x/l, R).$$

Puede verse que en dos flujos diferentes del mismo tipo (por ejemplo, el flujo debido al movimiento de esferas de radios desiguales en líquidos de distintas viscosidades), las velocidades  $u/v$  son las mismas funciones del cociente  $x/l$  si el Número de Reynolds es el mismo en cada flujo. A los flujos que pueden obtenerse uno de otro cambiando unidades de espacio y de velocidad se les conoce como flujos similares, i. e., son similares cuando son del mismo tipo y tienen el mismo  $R$ . Esta es la *Ley de Similitud* (O. Reynolds, 1883).

Es posible obtener una fórmula parecida a la anterior con la distribución de presión del fluido. Para hacerlo, debe construirse a partir de los parámetros  $\nu$ ,  $l$  y  $v$  alguna cantidad con dimensiones de presión dividida por la densidad; esta cantidad puede ser  $u^2$ , por ejemplo. Así, se puede decir que  $p/\rho v^2$  es función de la variable adimensional  $x/l$  y del parámetro adimensional  $R$ . De aquí que

$$p = \rho v^2 f(x/l, R).$$

Se aplican consideraciones semejantes a cantidades que caracterizan al fluido pero que no son funciones de coordenadas, por ejemplo, a la fuerza de frenamiento  $F$ . El cociente adimensional entre  $F$  y alguna cantidad formada por  $\nu$ ,  $v$ ,  $l$  y  $\rho$  que tenga dimensiones de fuerza debe ser función del Número de Reynolds exclusivamente. Tal combinación puede ser  $\rho v^2/l^2$ , y de esta forma se tendrá que

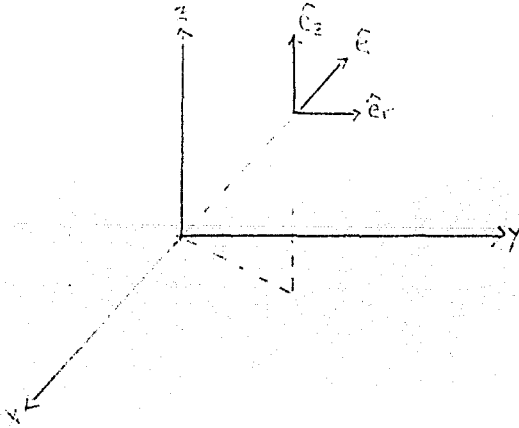
$$F = \frac{\rho v^2}{l^2} f(R).$$

En el capítulo siguiente se hace uso de la Ley de Similitud en las ecuaciones de Navier-Stokes para adimensionalizarlas y concentrar toda la información física en un parámetro (Número de Reynolds). Desde el punto de vista matemático se obtendrá un problema de valores propios.

## CAPITULO III

### PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El objetivo de este capítulo es plantear la ecuación diferencial espacial a partir de la que se obtendrá la primera bifurcación junto con las condiciones que debe satisfacer. Para hacer esto, las fórmulas de Navier-Stokes se expresan en coordenadas cilíndricas —elección que naturalmente permitirá explotar la simetría del sistema— y se resuelven en el caso más sencillo, cuyo resultado es el flujo de Couette. Se adimensionalizan para que toda la información física quede contenida en el Número de Reynolds y se perturban, linealizándolas alrededor del flujo de Couette. Las condiciones impuestas a velocidad y presión perturbativas ([1] independencia de  $\theta$  para ambas, [2] la velocidad debe anularse en las caras laterales de los cilindros y su divergencia vale cero en el espacio donde se encuentra el líquido, y [3] la velocidad se supone función periódica de  $z$ ) simplifican la formulación matemática. Finalmente, en la última parte del capítulo, por conveniencia en la formulación y en el estudio matemático, se introduce la función de corriente planteada en el contexto del problema de Couette-Taylor.



#### EXPRESIONES PARA GRADIENTE, DIVERGENCIA Y LAPLACIANO. ECUACIONES DE NAVIER - STOKES

Las relaciones entre coordenadas cartesianas y cilíndricas (fig. 16) son:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

Para toda función espacial  $u$ , cuyas componentes cartesianas son  $u_i$ ,  $u_j$  y  $u_k$ , y cuyas componentes cilíndricas son  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ , la fórmula siguiente es válida:

$$\begin{pmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

En particular, para los vectores unitarios en las direcciones correspondientes:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_j \\ \mathbf{e}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}.$$

Divergencia, Gradiente y Laplaciano son operadores que involucran derivadas; evaluándolas se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \mathbf{e}_i \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \mathbf{e}_j \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial z} \\ &= (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \left[ \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + (\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta) \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

i. e.,

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

y por lo tanto, para toda función escalar  $\psi(r, \theta, z)$ , el gradiente está dado por:

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_r \frac{\partial\psi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad (3.1a)$$

y, para funciones independientes de  $\theta$ :

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_r \frac{\partial\psi}{\partial r} + \mathbf{e}_z \frac{\partial\psi}{\partial z}. \quad (3.1b)$$

Por otra parte, si  $\Psi = \psi_1\mathbf{e}_r + \psi_2\mathbf{e}_\theta + \psi_3\mathbf{e}_z = \psi_i\mathbf{e}_i + \psi_j\mathbf{e}_j + \psi_k\mathbf{e}_k$  es una función vectorial, su divergencia se calcula a partir de la definición y de las relaciones que se dan al principio de este apartado:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \Psi &\equiv \frac{\partial\psi_i}{\partial x} + \frac{\partial\psi_j}{\partial y} + \frac{\partial\psi_k}{\partial z} \\ &= \left( \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \right) (\cos\theta\psi_1 - \sin\theta\psi_2) + \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \right) (\sin\theta\psi_1 + \cos\theta\psi_2) + \frac{\partial\psi_3}{\partial z}, \end{aligned}$$

i. e.,

$$\nabla \cdot \Psi = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial r\psi_1}{\partial r} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} + \frac{\partial r\psi_3}{\partial z} \right]. \quad (3.2a)$$

Para funciones independientes de  $\theta$ :

$$\nabla \cdot \Psi = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial r\psi_1}{\partial r} + \frac{\partial r\psi_3}{\partial z} \right]. \quad (3.2b)$$

El laplaciano de una función escalar  $\psi(r, \theta, z)$ , de acuerdo con las relaciones entre derivadas, viene dado por:

$$\Delta\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) \right]. \quad (3.3a)$$

Como caso particular, para funciones que no dependen de  $\theta$  se tiene:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) \right]. \quad (3.3b)$$

El laplaciano de una función vectorial,  $\Psi = \psi_1\mathbf{e}_i + \psi_2\mathbf{e}_j + \psi_3\mathbf{e}_k = \psi_1\mathbf{e}_r + \psi_2\mathbf{e}_\theta + \psi_3\mathbf{e}_z$ , se obtiene a partir de (3.3a):

$$\begin{aligned} \Delta\Psi &\equiv \mathbf{e}_i \Delta\psi_i + \mathbf{e}_j \Delta\psi_j + \mathbf{e}_k \Delta\psi_k \\ &= \mathbf{e}_i \Delta(\psi_1 \cos\theta - \psi_2 \sin\theta) + \mathbf{e}_j \Delta(\psi_1 \sin\theta + \psi_2 \cos\theta) + \mathbf{e}_k \Delta\psi_3 \\ &= (\mathbf{e}_r \cos\theta - \mathbf{e}_\theta \sin\theta) \Delta[\psi_1 \cos\theta - \psi_2 \sin\theta] + (\mathbf{e}_r \sin\theta + \mathbf{e}_\theta \cos\theta) \Delta[\psi_1 \sin\theta + \psi_2 \cos\theta] + \mathbf{e}_z \Delta\psi_3 \end{aligned}$$

$$= (\cos \theta \Delta [\psi_1 \cos \theta - \psi_2 \sin \theta] + \sin \theta \Delta [\psi_1 \sin \theta + \psi_2 \cos \theta]) \mathbf{e}_r \\ + (\cos \theta \Delta [\psi_1 \sin \theta + \psi_2 \cos \theta] - \sin \theta \Delta [\psi_1 \cos \theta - \psi_2 \sin \theta]) \mathbf{e}_\theta + \Delta \psi_3 \mathbf{e}_\varphi.$$

Es conveniente evaluar las componentes de los vectores unitarios una a una; para  $\mathbf{e}_r$ :

$$\begin{aligned} & \cos \theta \Delta [\psi_1 \cos \theta - \psi_2 \sin \theta] + \sin \theta \Delta [\psi_1 \sin \theta + \psi_2 \cos \theta] \\ &= \cos \theta \left[ \cos \theta \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} - \sin \theta \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} \right] + \sin \theta \left[ \sin \theta \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \cos \theta \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} \right] \\ &+ \frac{\cos \theta}{r} \left[ \cos \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right] + \frac{\sin \theta}{r} \left[ \sin \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right] \\ &+ \frac{\cos \theta}{r^2} \left[ -\psi_1 \cos \theta - \sin \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} \right. \\ &\quad \left. + \psi_2 \sin \theta - \cos \theta \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} \right] \\ &+ \frac{\sin \theta}{r^2} \left[ -\psi_1 \sin \theta + \cos \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} \right. \\ &\quad \left. - \psi_2 \cos \theta - \sin \theta \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} \right] \\ &+ \cos \theta \left[ \cos \theta \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - \sin \theta \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right] + \sin \theta \left[ \sin \theta \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + \cos \theta \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right]. \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \psi_1 + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial r \psi_1}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} & \cos \theta \Delta [\psi_1 \sin \theta + \psi_2 \cos \theta] - \sin \theta \Delta [\psi_1 \cos \theta - \psi_2 \sin \theta] \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial r \psi_2}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

y

$$\Delta \psi_3 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2},$$

por lo que

$$\Delta \Psi = \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r \psi_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right] \mathbf{e}_r$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r \psi_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right] \mathbf{e}_\theta \\
& + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} \right] \mathbf{e}_z,
\end{aligned}$$

i. e.

$$\Delta \Psi = \left[ \Delta \psi_1 - \frac{1}{r^2} \psi_1 - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_r + \left[ \Delta \psi_2 - \frac{1}{r^2} \psi_2 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\theta + \Delta \psi_3 \mathbf{e}_z, \quad (3.4a)$$

donde  $\Delta$  está dado por (3.3a). Para funciones independientes de  $\theta$ :

$$\Delta \Psi = \left[ \Delta \psi_1 - \frac{1}{r^2} \psi_1 \right] \mathbf{e}_r + \left[ \Delta \psi_2 - \frac{1}{r^2} \psi_2 \right] \mathbf{e}_\theta + \Delta \psi_3 \mathbf{e}_z, \quad (3.4b)$$

donde  $\Delta$  está dado por la ecuación (3.3b).

A partir de (3.2a), el término  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  puede evaluarse:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \left[ u_i \frac{\partial}{\partial x} + u_j \frac{\partial}{\partial y} + u_k \frac{\partial}{\partial z} \right] (v_i \mathbf{e}_i + v_j \mathbf{e}_j + v_k \mathbf{e}_k) \\
&= \left[ (u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta) \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \right. \\
&\quad \left. (u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta) \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + u_3 \frac{\partial}{\partial z} \right] \\
&\quad \left[ (v_1 \cos \theta - v_2 \sin \theta) \mathbf{e}_i + (v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta) \mathbf{e}_j + v_3 \mathbf{e}_k \right] \\
&= \left[ u_1 \cos \theta \frac{\partial v_1}{\partial r} - u_1 \sin \theta \frac{\partial v_2}{\partial r} - \frac{1}{r} u_2 v_1 \sin \theta + \frac{1}{r} u_2 \cos \theta \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{r} u_2 v_2 \cos \theta - \frac{1}{r} u_2 \sin \theta \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + u_3 \cos \theta \frac{\partial v_1}{\partial z} - u_3 \sin \theta \frac{\partial v_2}{\partial z} \right] \mathbf{e}_i \\
&\quad + \left[ u_1 \sin \theta \frac{\partial v_1}{\partial r} + u_1 \cos \theta \frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{1}{r} u_2 v_1 \cos \theta + \frac{1}{r} u_2 \sin \theta \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{r} u_2 v_2 \sin \theta + \frac{1}{r} u_2 \cos \theta \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + u_3 \sin \theta \frac{\partial v_1}{\partial z} + u_3 \cos \theta \frac{\partial v_2}{\partial z} \right] \mathbf{e}_j \\
&\quad + \left[ u_1 \frac{\partial v_3}{\partial r} + \frac{1}{r} u_2 \frac{\partial v_3}{\partial \theta} + u_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} \right] \mathbf{e}_k.
\end{aligned}$$

Expresando a  $\mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{e}_j$ ,  $\mathbf{e}_k$  en función de  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_z$ , y simplificando se llega a:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \left[ u_1 \frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{1}{r} u_2 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_2 v_2 + u_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r$$



$$+ \left[ u_1 \frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{1}{r} u_2 \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_2 v_1 + u_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} \right] \mathbf{e}_\theta + \left[ u_1 \frac{\partial v_3}{\partial r} + \frac{1}{r} u_2 \frac{\partial v_3}{\partial \theta} + u_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} \right] \mathbf{e}_z,$$

que, con cierto abuso de notación, también puede escribirse de la siguiente manera:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \left[ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{u_2 v_2}{r} \\ \frac{u_2 v_1}{r} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5a)$$

En particular, para funciones  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  independientes de  $\theta$ :

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \left[ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{u_2 v_2}{r} \\ +\frac{u_2 v_1}{r} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5b)$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes (2.8) puestas en coordenadas cilíndricas son, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r} u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_2^2 + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta u_1 - \frac{1}{r^2} u_1 - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \right) + f_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{1}{r} u_2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_1 u_2 + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \Delta u_2 - \frac{1}{r^2} u_2 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) + f_2 \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{1}{r} u_2 \frac{\partial u_3}{\partial \theta} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta u_3 + f_3, \end{aligned}$$

donde  $\Delta$  está dado por (3.3a)

## ECUACION SIN DIMENSIONES

En la sección final del capítulo II se discutió la importancia de las dimensiones físicas en los parámetros que intervienen en el estudio del movimiento de fluidos. Para el caso particular de las ecuaciones de Navier-Stokes pueden proponerse los siguientes cambios de variable, de acuerdo a las consideraciones antes hechas:

$$t = \frac{R_2 - R_1}{R_1 \Omega_1} \bar{t}, \quad \mathbf{x} = (R_2 - R_1) \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u} = R_1 \Omega_1 \bar{\mathbf{u}}, \quad p = \rho R_1^2 \Omega_1^2 \bar{p}.$$

(Nótese que las nuevas variables  $\bar{t}$ ,  $\bar{\mathbf{x}}$ ,  $\bar{\mathbf{u}}$ ,  $\bar{p}$  son adimensionales, que  $R_1$ ,  $R_2$  son los radios de los cilindros interior y exterior, y que  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  son las velocidades angulares de los cilindros interior y exterior, respectivamente). Sustituyendo en la ecuación de Navier-Stokes (2.8b), sin olvidar que  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , se obtiene:

$$\frac{R_1^2 \Omega_1^2}{(R_2 - R_1)} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{t}} + \frac{R_1^2 \Omega_1^2}{(R_2 - R_1)} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\rho R_1^2 \Omega_1^2}{(R_2 - R_1)} \right] \nabla \bar{p} = \nu \frac{R_1 \Omega_1}{(R_2 - R_1)^2} \Delta \bar{\mathbf{u}},$$

de donde

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{p} = \lambda^{-1} \Delta \bar{\mathbf{u}}, \quad (3.6)$$

con  $\lambda = \frac{(R_2 - R_1) R_1 \Omega_1}{\nu}$  y  $\Delta$  dado por (3.4a) ( $\lambda$  es el Número de Reynolds en el cual está concentrada toda la información física del problema). Bajo estas transformaciones, los nuevos radios de los cilindros interior y exterior se denotarán mediante  $r_i \equiv \bar{R}_i = \frac{R_i}{(R_2 - R_1)}$ , y las anteriores condiciones de frontera ( $u_1(R_i) = u_3(R_i) = 0$ ,  $u_2(R_i) = R_i \Omega_i$ ) se transforman en  $\bar{u}_1(r_i) = \bar{u}_3(r_i) = 0$ ,  $\bar{u}_2(r_i) = r_i \Omega_i / (r_1 \Omega_1)$  ya que para las nuevas variables la velocidad tangencial deja de ser  $u = \Omega r$ , para convertirse en  $R_1 \Omega_1 \bar{u} = \Omega (R_2 - R_1) \bar{r}$ .

En cuanto a la condición  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  se convierte en  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0$ . De aquí en adelante, por comodidad, se suprimirán las barras en las variables que intervienen en la ecuación vectorial (3.6) cuyas componentes cilíndricas son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r} u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_2^2 + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial r} &= \lambda^{-1} \left( \Delta u_1 - \frac{1}{r^2} u_1 - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{1}{r} u_2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_1 u_2 + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \lambda^{-1} \left( \Delta u_2 - \frac{1}{r^2} u_2 - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{1}{r} u_2 \frac{\partial u_3}{\partial \theta} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \lambda^{-1} \Delta u_3, \end{aligned}$$

donde  $\Delta$  está dado por (3.3a).

### FLUJO DE COUETTE

A partir de ahora y durante el resto de la tesis se supondrá que los cilindros son de longitud infinita y que  $u$  es periódica en  $z$  con un período que se fijará más adelante. Estas suposiciones, particularmente la que tiene que ver con las dimensiones de los cilindros, facilitan el tratamiento matemático; si se quisieran considerar los efectos de las tapas el análisis sería mucho más complicado.

En ausencia de fuerzas de cuerpo ( $\mathbf{f} = 0$ ) y cuando la única componente de la velocidad que no se anula es la tangencial ( $u_2$ ) que, al igual que la presión, sólo depende de  $r$  (en coordenadas cilíndricas), se tienen las condiciones matemáticas observadas en el *Flujo de Couette*, que restringen fuertemente el tipo de soluciones en las fórmulas de Navier-Stokes (de hecho, el Flujo de Couette es la única solución analítica para el sistema de cilindros concéntricos que rotan). Las fórmulas de Navier-Stokes expresadas en coordenadas cilíndricas quedan reducidas a:

$$\frac{u_2^2}{r} = \frac{dp}{dr}, \quad \Delta u_2 - \frac{u_2}{r^2} = \frac{d^2 r_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_2}{dr} - \frac{u_2}{r^2} = 0.$$

La última fórmula tiene solución única de la forma  $r^n$ ; sustituyendo se encuentra que  $n = \pm 1$ , de tal manera que

$$V(r) \equiv u_2^0 = ar + \frac{b}{r}, \quad (3.7a)$$

donde

$$a = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[ \frac{\Omega_2}{\Omega_1} r_2^2 - r_1^2 \right] \frac{1}{r_1}, \quad b = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[ 1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right] r_2^2 r_1.$$

(las constantes  $a$  y  $b$  se evalúan a partir de las condiciones de frontera). Una vez conocida la velocidad  $V(r)$ , es directo el cálculo de la presión  $p^0$ :

$$p^0 = \int_{r_1}^r \frac{u_2^2(\vartheta)}{\vartheta} d\vartheta + \text{constante.} \quad (3.7b)$$

Será útil hacer un pequeño estudio sobre los signos de  $V(r)$ ,  $a$  y  $b$ . Se proponen los siguientes cambios de variable:

$$\omega = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}, \quad \bar{r} = \frac{r}{r_1}, \quad \varrho = \frac{r_2}{r_1} > 1.$$

De las transformaciones se ve claramente que  $\bar{r} \in [1, \varrho]$  y que la ecuación (3.7b) se puede escribir como

$$V(\bar{r}r_1) = \frac{1}{\varrho^2 - 1} \left[ (\omega\varrho^2 - 1)\bar{r} + (1 - \omega)\frac{\varrho^2}{\bar{r}} \right],$$

por lo que  $a$  tiene el signo de  $\omega\varrho^2 - 1$ , mientras que  $b$  tiene el signo de  $1 - \omega$ . Al evaluar a  $V$  en los extremos de  $r$  los resultados son:  $V(r_1) = 1$ ,  $V(r_2) = \omega\varrho$ . La derivada de  $V$  es:

$$V'(r) = \frac{1}{\varrho^2 - 1} \left[ (\omega\varrho^2 - 1) - (1 - \omega)\frac{\varrho^2}{\bar{r}^2} \right],$$

por lo que  $V' = 0 \iff \bar{r}_0^2 = \frac{(1-\omega)\varrho^2}{\omega\varrho^2 - 1}$ . Evidentemente

$$V(\bar{r}_0 r_1) = \frac{2\bar{r}_0}{\varrho^2 - 1} (\omega\varrho^2 - 1),$$

si  $\frac{1-\omega}{\omega\varrho^2 - 1} > 0$ . Por lo tanto:

$\omega \leq 0 \implies V' \leq 0$ , y por lo tanto  $V$  es decreciente, variando desde 1 hasta  $\omega\varrho \leq 0$ . Es claro entonces que  $a < 0$  y  $b > 0$ .

$0 \leq \omega \leq 1/\varrho^2 \implies V' \leq 0$ , y por lo tanto  $V$  es decreciente, yendo de 1 hasta  $\omega\varrho \geq 0$ .  $a \leq 0$ ,  $b > 0$  y  $a = 0$  solo para  $\omega = \frac{1}{\varrho^2}$ .

$1/\varrho^2 < \omega \leq 1 \implies V$  tiene un mínimo (para  $\bar{r} > 0$ ) en  $\bar{r}_0$ . Dado que  $V(\bar{r}_0 r_1) > 0$ , entonces  $V(r) > 0$ . En este intervalo de  $\omega$  los valores de las constantes  $a$  y  $b$  son positivos, excepto para  $\omega = 1$ , donde  $b = 0$ .

$\omega > 1 \implies V' > 0$ , i. e.,  $V$  es creciente, variando desde 1 hasta  $\omega\varrho$ . En este intervalo de  $\omega$ ,  $a > 0$  y  $b < 0$ .

De lo anterior se concluye que  $\omega \geq 0 \iff V(r) \geq 0$ , y  $a > 0 \iff \omega > \frac{1}{\varrho^2} \implies V > 0$ .

## ECUACION PERTURBADA

Sean  $\mathbf{u}^0 = (0, V(r), 0)$  y  $p^0$  las soluciones correspondiente al flujo de Couette dadas por las fórmulas (3.7). Considérense las funciones  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \mathbf{u}$ ,  $q = p^0 + p$ , donde  $\mathbf{u}$  y  $p$  son términos perturbativos. La ecuación (3.6) se transforma en:

$$\frac{\partial(\mathbf{v}^0 + \mathbf{u})}{\partial t} + ((\mathbf{v}^0 + \mathbf{u}) \cdot \nabla)(\mathbf{v}^0 + \mathbf{u}) + \nabla(p^0 + p) = \lambda^{-1} \Delta(\mathbf{v}^0 + \mathbf{u}),$$

expresión que una vez desarrollada y simplificada conduce a:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v}^0 \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}^0 + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \lambda^{-1} \Delta \mathbf{u},$$

con  $\Delta$  dado por (3.4a). Desarrollándola en sus componentes cilíndricas se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{r} V \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{2u_2 V}{r} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r} u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_2^2 + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial r} \\ = \lambda^{-1} \left( \Delta u_1 - \frac{1}{r^2} u_1 - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + 2au_1 + \frac{1}{r} V \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{1}{r} u_1 u_2 + \frac{1}{r} u_2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ = \lambda^{-1} \left( \Delta u_2 - \frac{1}{r^2} u_2 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{1}{r} V \frac{\partial u_3}{\partial \theta} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{1}{r} u_2 \frac{\partial u_3}{\partial \theta} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \lambda^{-1} \Delta u_3, \end{aligned}$$

donde  $\Delta$  está dado por (3.3a). Estas ecuaciones, en el caso estacionario, para funciones  $u$  y  $p$  independientes de  $\theta$ , pueden escribirse de la siguiente manera:

$$(\Delta - r^{-2})u_1 = \lambda \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{2\lambda V(r)}{r} u_2 - \frac{\lambda}{r} u_2^2 + \lambda u_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} + \lambda u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z}, \quad (3.8a)$$

$$(\Delta - r^{-2})u_2 = 2\lambda a u_1 + \lambda u_1 \frac{\partial u_2}{\partial r} + \lambda u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\lambda}{r} u_1 u_2, \quad (3.8b)$$

$$\Delta u_3 = \lambda \frac{\partial p}{\partial z} + \lambda u_1 \frac{\partial u_3}{\partial r} + \lambda u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z}, \quad (3.8c)$$

con  $\Delta$  dado por (3.3b).

Las restricciones hechas arriba, además de que  $u$  es función periódica de  $z$ , son sugeridas por el tipo de flujo observado que se quiere describir matemáticamente.

Para el último conjunto de ecuaciones se adoptará la siguiente notación:

$$D\mathbf{u} = \lambda \nabla p + \lambda A(V)\mathbf{u} + \lambda B(\mathbf{u})\mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad (3.9a)$$

donde

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \left[ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad (3.9b)$$

$$D = \begin{pmatrix} \Delta - r^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta - r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.9c)$$

$$A(V) = \begin{pmatrix} 0 & -2V/r & 0 \\ 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.9d)$$

$$B(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{u_2}{r} & 0 \\ \frac{u_2}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9e)$$

Las condiciones impuestas a  $\mathbf{u}$  serán, por lo antes dicho:  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  para  $r = r_1, r_2$ ,  $\mathbf{u}(r, z) = \mathbf{u}(r, z + 2\pi/\alpha)$ , donde  $\alpha$  es el número de onda de los vórtices. Se supondrá también que la densidad no varía (fluido incompresible), lo cual implica que se debe satisfacer también la ecuación (2.4) que establece lo siguiente:

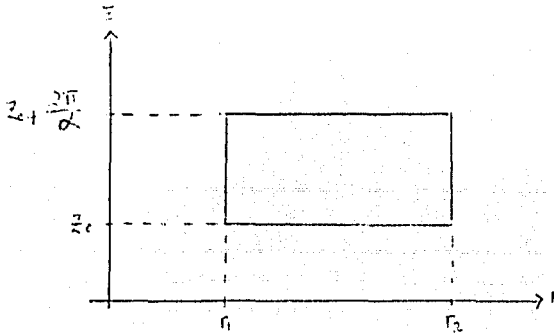
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

i. e.

$$\frac{\partial r u_1}{\partial r} + \frac{\partial r u_3}{\partial z} = 0. \quad (3.9f)$$

El estudio de las fórmulas (3.9a) y (3.9f) junto con las condiciones impuestas tanto a  $p$  como a  $\mathbf{u}$  se llevará a cabo en el dominio

$$\Omega_\alpha = \{(r, z) \mid r_1 < r < r_2, \quad z_0 < z < z_0 + 2\pi/\alpha\}. \quad (3.9g)$$



En el planteamiento matemático resulta adecuado introducir la llamada función de corriente junto con las condiciones que tanto esta función como la velocidad perturbativa

$\mathbf{u}$  deben satisfacer (cf. [32], cap. II). Dado que  $\Omega_\alpha$  es simplemente conexo, de la ecuación (3.9f) se concluye que existe una función  $\Phi(r, z) = \phi_1 \mathbf{e}_r + \phi_2 \mathbf{e}_\theta + \phi_3 \mathbf{e}_z$  (de aquí en adelante, se usará  $\phi$  en lugar de  $\phi_2$  ya que es la única componente de interés) tal que

$$\frac{\partial r \phi}{\partial r} = -ru_3, \quad \frac{\partial r \phi}{\partial z} = ru_1 \quad (3.10a)$$

(si la divergencia de  $\mathbf{u}$  es cero, existe una función  $\Phi$  tal que  $\mathbf{u} = \text{rot} \Phi$ ). Dado que  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  en  $r_1, r_2$ , y haciendo uso de (3.9f) se tiene lo siguiente:

$$r\phi(r, z) = - \int_{r_1}^r su_3(s, z) ds,$$

por lo que

$$\frac{\partial r \phi}{\partial z} = - \int_{r_1}^r \frac{\partial su_3}{\partial z} ds = \int_{r_1}^r \frac{\partial su_1}{\partial s} ds = ru_1(r, z) - ru_1(r_1, z) = ru_1,$$

y las ecuaciones (3.10a) se transforman en:

$$r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \phi = -ru_3, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = u_1. \quad (3.10b)$$

Nuevamente, por las condiciones de frontera sobre  $\mathbf{u}$  se concluye que estas últimas expresiones se anulan en  $r_1$  y  $r_2$ , por lo que  $\phi$  es constante en esos radios, y por construcción,  $\phi$  se anula en 0 y  $r$ .

Desde el punto de vista físico hay aún más restricciones que deben imponerse a fin de que este modelo sea aceptable. En adición a la periodicidad de  $\mathbf{u}$ , es necesario que  $u_3(r, z_0) = u_3(r, z_0 + 2\pi/\alpha) = 0$  (para que el fluido no salga de  $\Omega_\alpha$ , ni  $\Omega_\alpha$  se haga más chico). Esta restricción sobre  $u_3$  implica —por la forma en que  $u_3$  y  $\phi$  están relacionadas— que  $r\phi$  es una constante sobre  $\partial\Omega_\alpha$  la cual se puede tomar como cero. Entonces, no solamente  $\phi$  se anula en  $r_1, r_2$ , sino que también  $\frac{\partial \phi}{\partial r}$  se anula en esos mismos radios. Además, como  $r\phi(r, z) = - \int_{r_1}^r su_3(s, z) ds$ ,  $\phi$  es periódica en  $z$ , de período  $2\pi/\alpha$ .

Considérese ahora al operador  $\mathfrak{S}$  definido con ayuda de las ecuaciones (3.10b):

$$\mathfrak{S}\phi \equiv \left( \Delta - \frac{1}{r^2} \right) \phi = \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial r} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \phi.$$

Mediante (3.3b) se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta u_3}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial r} \right) \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial u_3}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_3}{\partial r} = \mathfrak{S} \left( \frac{\partial u_3}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

Si se deriva (3.8a) respecto a  $z$ , (3.8c) respecto a  $r$ , se les aplica  $\mathfrak{S}$  y se restan:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right) - \mathfrak{S}\left(\frac{\partial u_3}{\partial r}\right) &= \mathfrak{S}\mathfrak{S}\phi = \lambda \left[ -\frac{2V}{r} \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{2u_2}{r} \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial r \partial z} + u_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{\partial u_1}{\partial r} \frac{\partial u_3}{\partial r} - \frac{\partial u_3}{\partial r} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right] - u_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial r \partial z} - u_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z \partial r} \\ &= \lambda \left[ -\frac{2}{r}(V + u_2) \frac{\partial u_2}{\partial z} + \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. + u_1 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial r} \right) + u_3 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial r} \right) \right]. \end{aligned}$$

Las ecs. (3.9f) y (3.10b) permiten continuar la igualdad como sigue:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}\mathfrak{S}\phi &= \lambda \left[ -\frac{2}{r}(V + u_2) \frac{\partial u_2}{\partial z} - (\mathfrak{S}\phi) \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \mathfrak{S}\phi}{\partial r} - \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \phi \right) \frac{\partial \mathfrak{S}\phi}{\partial z} \right] \\ &= \lambda \left[ -\frac{1}{r} \frac{\partial (V + u_2)^2}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathfrak{S}\phi \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r \phi}{\partial r} \mathfrak{S}\phi \right) \right] = \mathfrak{S}^2 \phi. \end{aligned}$$

(3.8c) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}u_2 &= \lambda \left[ 2a \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z} u_2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \phi \right) \frac{\partial u_2}{\partial z} \right] \\ &= \lambda \left[ 2a \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial r u_2}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial r \phi}{\partial r} \frac{\partial u_2}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Nótese lo siguiente:

- (1) Si  $\phi$  es conocida, esta última ecuación es lineal en  $u_2$ .
- (2) Dado que las ecuaciones son invariantes con respecto a traslaciones en  $z$ , es posible fijar  $z_0 = -\pi/\alpha$ , para que el dominio tome la forma de

$$\Omega_\alpha = \{(r, z) \mid r_1 < r < r_2, -\pi/\alpha < z < \pi/\alpha\}.$$

(3) Con este dominio, nótese que si  $u_1, u_2, p$  son pares y  $u_3$  es impar —todas— en  $z$  (i. e.,  $u_1(r, z) = u_1(r, -z)$ ,  $u_2(r, z) = u_2(r, -z)$ ,  $u_3(r, -z) = -u_3(r, z)$ ), evidentemente  $\frac{\partial u_i}{\partial r}$  conserva la paridad de  $u_i$ , mientras que  $\frac{\partial u_i}{\partial z}$  la invierte. En estas circunstancias, las ecuaciones (3.8a) y (3.8b) son pares en  $z$ , mientras que la ecuación (3.8c) es impar en  $z$ . En ese caso  $\phi$  es par y si  $u_2$  es tal que  $u_2(r, z) = u_2(-r, z)$  también en la ecuación que le corresponde lo será. Además, puesto que  $\phi$  es periódica,  $\phi(\pi/\alpha) = \phi(-\pi/\alpha) = 0$ .

En los siguientes capítulos se trabajará con espacios que conservan paridades.

## CAPITULO IV

### RESULTADOS PRELIMINARES

El objetivo de este capítulo es encontrar resultados importantes que serán invocados más adelante. Algunos de éstos tienen que ver con desigualdades entre normas o con desigualdades que involucran directamente al operador  $\mathfrak{S}$ . Otros se relacionan con la existencia de soluciones a ciertos problemas donde nuevamente el operador  $\mathfrak{S}$  juega un papel relevante y con algunas propiedades de las mismas.

Al estudiar las ecuaciones que describen el problema matemático se definen por conveniencia dos nuevos operadores estrechamente ligados con  $\mathfrak{S}$ . Para éstos se identifica el espacio funcional en que actúan y se demuestran algunas de sus propiedades.

Finalmente se proponen dos teoremas que, aunque no están relacionados con lo hecho a lo largo del capítulo, juegan un papel importante en los resultados que se obtienen después.

El espacio funcional  $C_\alpha$  en que se trabajará contiene a las funciones vectoriales  $\mathbf{u}(r, z)$  cuya divergencia es cero, periódicas en  $z$  con período  $2\pi/\alpha$  y que se anulan en los radios  $r_1, r_2$  que pertenecen a  $\Omega_\alpha$ . En  $C_\alpha$  se define el producto escalar, por conveniencia en la formulación del Problema de Couette-Taylor, como sigue:

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \int \int_{\Omega_\alpha} \left[ \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{r^2} (u_1 v_1 + u_2 v_2) \right] r \, dr dz, \quad (4.1a)$$

con la notación

$$\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}, \quad |\nabla \mathbf{u}|^2 = \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}.$$

El producto escalar en  $L_2(\Omega_\alpha)$  se denota mediante  $(\cdot, \cdot)$ , la norma  $L_p(\Omega_\alpha)$  por  $|\cdot|_p$  ( $p > 1$ ), y el valor absoluto de un vector con  $|\cdot|$ . Al completar a  $C_\alpha$  respecto a la norma  $\|\cdot\|^2 \equiv ((\cdot, \cdot))$ , el espacio de Hilbert  $H_\alpha$  queda bien definido.

También se definirá un producto escalar con ayuda del operador  $\mathfrak{S}$  en el cual se involucran las propiedades de periodicidad y condiciones de frontera de las funciones que intervienen:

$$(((\phi_1, v_1), (\phi_2, v_2))) = \int \int_{\Omega_\alpha} (\mathfrak{S}\phi_1 \ \mathfrak{S}\phi_2) r \, dr dz - \int \int_{\Omega_\alpha} (\mathfrak{S}v_1 \ v_2) r \, dr dz. \quad (4.1b)$$

Nótese que

$$- \int \int_{\Omega_\alpha} (\mathfrak{S}v_1, v_2) r \, dr dz$$



$$\begin{aligned}
&= \int \int_{\Omega_\alpha} \left( \left\{ -\frac{\partial^2 r v_1}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial v_1}{\partial r} \right] \right\} v_2 + \frac{1}{r^2} v_1 v_2 \right) r \, dr dz \\
&= \int \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial r} \frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} v_1 v_2 \right) r \, dr dz \\
&\quad - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial r v_1}{\partial z} v_2 \Big|_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} dr - \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \left( r v_2 \frac{\partial v_1}{\partial r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} dz,
\end{aligned}$$

y como  $\frac{\partial v_i}{\partial z}$  son periódicas en  $z$ , y  $v_2$  se anula en  $r_i$ , el resultado es:

$$- \int \int_{\Omega_\alpha} (\mathfrak{S} v_1 \, v_2) r \, dr dz = \int \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{\partial v_1}{\partial r} \frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{1}{r^2} v_1 v_2 \right) r \, dr dz.$$

Con estos cálculos se ve con claridad que, efectivamente,  $((\phi_1, v_1), (\phi_2, v_2))$  es una forma bilineal simétrica positiva. El caso  $\|(\phi, v)\| = 0$  solo es posible si  $\mathfrak{S}\phi = v = 0$  y  $\int \int_{\Omega_\alpha} (\mathfrak{S}\phi \, \phi) r \, dr dz = 0$ , por lo cual  $\phi = 0$ . Con esto se comprueba que se trata de un producto escalar.

Es conveniente recordar que en la sección final del capítulo anterior se formuló el problema a resolver de la siguiente manera:

$$\mathfrak{S}^2 \phi \equiv \lambda T_2(u, \phi) = \lambda \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial(V+u)^2}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathfrak{S}\phi \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial r \phi}{\partial r} \mathfrak{S}\phi \right] \right), \quad (4.2a)$$

$$\mathfrak{S}u \equiv \lambda T_1(u, \phi) = \lambda \left( 2a \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial r u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial r \phi}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (4.2b)$$

**LEMA 1.a**  $\forall u \in H_\alpha, \quad |u| \leq c_1 \|u\|$ , i. e.

$$\int \int_{\Omega_\alpha} u^2 r \, dr dz \leq c_1^2 \int \int_{\Omega_\alpha} \left[ |\nabla u|^2 + \frac{1}{r^2} (u_1^2 + u_2^2) \right] dr dz.$$

**PRUEBA** La demostración de este lema se logra mediante un caso particular de la desigualdad de Poincaré (cf. [29], pps. 188-197 y 341).

Dado que  $u(r_1, z) = 0$ , para cada componente  $u_1, u_2$  y  $u_3$  (por comodidad denotada por  $u_i$ ), que  $\Omega_\alpha$  es un rectángulo de lados paralelos a los ejes, y por la desigualdad de Schwarz (cf. [29], p. 37) las siguientes estimaciones son válidas:

$$\begin{aligned}
u_i(r, z) &= \int_{r_1}^r \frac{\partial u_i(\xi, z)}{\partial r} d\xi \\
\Rightarrow u_i^2(r, z) &= \left( \int_{r_1}^r \frac{\partial u_i}{\partial r} d\xi \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (r - r_1) \int_{r_1}^r \left[ \frac{\partial u_i(\xi, z)}{\partial r} \right]^2 d\xi \leq (r_2 - r_1) \int_{r_1}^{r_2} \left[ \frac{\partial u_i(\xi, z)}{\partial r} \right]^2 d\xi \\
&\Rightarrow \int \int_{\Omega_a} u_i^2(r, z) r \, dr dz \leq (r_2 - r_1) \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \int_{r_1}^{r_2} \int_{r_1}^{r_2} \left[ \frac{\partial u_i(\xi, z)}{\partial r} \right]^2 d\xi dr dz \\
&= (r_2 - r_1)^2 \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \int_{r_1}^{r_2} \left[ \frac{\partial u_i(\xi, z)}{\partial r} \right]^2 d\xi dz \leq \frac{(r_2 - r_1)^2}{r_1} \int \int_{\Omega_a} r \left[ \frac{\partial u_i(\xi, z)}{\partial r} \right]^2 d\xi dz
\end{aligned}$$

(la última desigualdad se sigue del hecho que  $r \geq r_1$ ).

Conviene señalar, por una parte, que es posible obtener la misma desigualdad sin el peso  $r$ , y por otra, que la constante  $c_1^2 = (r_2 - r_1)^2 / r_1$  puede ser mejorada si se toma en cuenta la otra condición de frontera ( $u(r_2, z) = 0$ ). No es el propósito del presente trabajo encontrar la mejor constante; para quien esté interesado en el aspecto numérico se sugiere consultar [29], Cap. 18, donde se hacen mejoras a  $c_1$ , y [20].

La suma de las tres desigualdades conduce a:

$$\begin{aligned}
&\int \int_{\Omega_a} \sum_{n=1}^3 u_n^2(r, z) r \, dr dz \leq c_1^2 \int \int_{\Omega_a} \sum_{n=1}^3 \left[ \frac{\partial u_n(r, z)}{\partial r} \right]^2 r \, dr dz \\
&\leq c_1^2 \int \int_{\Omega_a} \sum_{n=1}^3 \left[ \left( \frac{\partial u_n(r, z)}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_n(r, z)}{\partial z} \right)^2 \right] dr dz,
\end{aligned}$$

que por un abuso de notación se escribe como sigue:

$$\int \int_{\Omega_a} |u|^2 r \, dr dz \leq c_1^2 \int \int_{\Omega_a} |\nabla u|^2 r \, dr dz.$$

De aquí es directa la conclusión que  $|u| \leq c_1 \|u\|$ .

LEMA 1.b  $\forall u \in H_\alpha$ ,  $|u|_4 \leq c_2 \|u\|$ , i. e.

$$\left( \int \int_{\Omega_a} u^4 r \, dr dz \right)^{1/4} \leq c_2 \left( \int \int_{\Omega_a} \left[ |\nabla u|^2 + \frac{1}{r^2} (u_1^2 + u_2^2) \right] r \, dr dz \right)^{1/2}.$$

PRUEBA

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u^2(r, z)}{\partial r} = 2u(r, z) \cdot \frac{\partial u(r, z)}{\partial r} \\
&\Rightarrow u^2(r, z) = 2 \int_{r_1}^r \frac{\partial u(\rho, z)}{\partial \rho} \cdot u(\rho, z) \, d\rho \leq 2 \int_{r_1}^{r_2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right| |u| \, d\rho \quad \forall r \\
&\Rightarrow \max_r u^2(r, z) \leq 2 \int_{r_1}^{r_2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right| |u| \, d\rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \max_r u^2(r, z) dz \leq 2 \int_{r_1}^{r_2} \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right| |u| d\rho dz \\ &\leq 2 \left( \int \int_{\Omega_a} \left[ \frac{\partial u}{\partial \rho} \right]^2 d\rho dz \right)^{1/2} \left( \int \int_{\Omega_a} u^2 d\rho dz \right)^{1/2} \leq 2c_1 \int \int_{\Omega_a} \left[ \frac{\partial u}{\partial \rho} \right]^2 d\rho dz. \end{aligned}$$

La penúltima desigualdad se obtiene a partir de la de Schwarz, la última a partir del lema 1.a, y a partir de los cálculos de arriba es posible concluir que

$$\int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \max_r u^2 dz \leq c' \int \int_{\Omega_a} |\nabla u|^2 dr dz. \quad (4.3)$$

Naturalmente,  $2c_1 = c'$ .

La expansión en series de Fourier de  $u$ ,

$$u = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\nu}(r) e^{i\nu\alpha z},$$

donde  $u_{-\nu} = \overline{u_{\nu}}$  (complejo conjugado) debido a que  $u$  es real, permite hacer la siguiente estimación:

$$|u| \leq |u_0| + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} |u_{\nu}| \leq |u_0| + 2 \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-2} \right)^{1/2} \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 |u_{\nu}|^2 \right)^{1/2}, \quad (4.4)$$

donde la última desigualdad es un caso particular de la desigualdad de Schwarz para  $l^2$  que establece lo siguiente: si  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ , son sucesiones que pertenecen a  $l^2$ , entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \right)^{1/2},$$

por lo cual

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |u_{\nu}| = \sum_{\nu=1}^{\infty} (|u_{\nu}| \nu) \frac{1}{\nu} \leq \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-2} \right)^{1/2} \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 |u_{\nu}|^2 \right)^{1/2}.$$

Se procederá a estimar cada una de las sumas que aparecen en la última desigualdad (4.4). Por una parte

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 |u_{\nu}|^2 = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \alpha^2 |u_{\nu}|^2,$$

donde la última suma contiene los coeficientes al cuadrado del desarrollo en serie de Fourier de  $\frac{\partial u}{\partial z}$ , y por definición (cf. [15], p. 17):

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \alpha^2 |u_{\nu}|^2 = \frac{\alpha}{8\pi} \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz.$$

De los dos anteriores resultados se sigue que

$$\left( \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 |u_{\nu}|^2 \right)^{1/2} = \left( \frac{1}{8\pi\alpha} \right)^{1/2} \left( \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 dz \right)^{1/2}. \quad (4.5)$$

Además, haciendo uso de la función zeta de Riemann ( $\zeta(p) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-p}$ ) para  $p = 2$  (cf. [15], p. 1072) se obtiene lo siguiente:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-2} = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{te^t}{e^{2t} - 1} dt = \frac{\pi^2}{6}. \quad (4.6)$$

Combinando las ecuaciones (4.5) y (4.6) con (4.4), agrupando el producto de todas las constantes en la nueva constante  $c^2 = \alpha\pi/11$  se llega a la ecuación:

$$|u| \leq |u_0| + c \left( \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 dz \right)^{1/2},$$

que, elevándola al cuadrado y tomando el valor de la función resultante sobre el máximo  $z$  da:

$$\begin{aligned} \max_z u^2 &\leq u_0^2 + c^2 \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 dz + 2c|u_0| \left( \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 dz \right)^{1/2} \\ &\leq 2u_0^2 + 2c^2 \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 dz, \end{aligned}$$

ya que  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .

En cuanto a  $|u_0|$ :

$$|u_0| = \frac{\alpha}{\pi} \left| \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} u(r, z) dz \right| \leq \left( \frac{\alpha}{2\pi} \right)^{1/2} \left( \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} u^2 \right)^{1/2}.$$

Pero  $c \geq (\alpha/2\pi)^{1/2}$ , por lo que puede concluirse entonces:

$$\int_{r_1}^{r_2} \max_z u^2 dr \leq 2c^2 \int \int_{\Omega_a} \left( u^2 + \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 \right) dr dz,$$

y aún más, mediante la desigualdad de Friedrichs aplicada al primer sumando de la última integral (cf. [29], p. 192), con la nueva constante  $c''$  producto de  $2c^2$  y la constante que aparece en la desigualdad antes citada, se concluye:

$$\begin{aligned} 2c^2 \int \int_{\Omega_a} \left( u^2 + \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 \right) dr dz &\leq c'' \int \int_{\Omega_a} |\nabla u|^2 dr dz \\ \Rightarrow \int_{r_1}^{r_2} \max_z u^2 dr &\leq c'' \int \int_{\Omega_a} |\nabla u|^2 dr dz. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por otra parte, como  $|u|^4 \leq \max_r u^2 \max_z u^2$ , con ayuda de las ecuaciones (4.3) y (4.7) es posible hacer algunas estimaciones:

$$\begin{aligned}
 \int \int_{\Omega_\alpha} |u|^4 dr dz &\leq \int \int_{\Omega_\alpha} \max_r u^2 \max_z u^2 dr dz \\
 &= \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \max_r u^2 dz \int_{r_1}^{r_2} \max_z u^2 dr \leq c' c'' \left( \int \int_{\Omega_\alpha} |\nabla u|^2 dr dz \right)^2 \\
 &\Rightarrow \left( \int \int_{\Omega_\alpha} u^4 dr dz \right)^{1/4} \leq (c' c'')^{1/4} \left( \int \int_{\Omega_\alpha} |\nabla u|^2 dr dz \right)^{1/2}. \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Como

$$|u|_4^4 = \int \int_{\Omega_\alpha} u^4 r dr dz \leq r_2 \int \int_{\Omega_\alpha} u^4 dr dz,$$

y

$$\begin{aligned}
 \|u\|^2 &= \int \int_{\Omega_\alpha} \left[ |\nabla u|^2 + \frac{1}{r} (u_1^2 + u_2^2) \right] r dr dz \\
 &\geq \int \int_{\Omega_\alpha} |\nabla u|^2 r dr dz \geq r_1 \int \int_{\Omega_\alpha} |\nabla u|^2 dr dz,
 \end{aligned}$$

es claro que

$$\frac{|u|_4}{\|u\|} \leq \left( \frac{r_2}{r_1^2} \right)^{1/4} \frac{\left( \int \int_{\Omega_\alpha} |u|^4 dr dz \right)^{1/4}}{\left( \int \int_{\Omega_\alpha} |\nabla u|^2 dr dz \right)^{1/2}}.$$

De esta última ecuación y de (4.8), eligiendo  $c_2 = (c' c'' \frac{r_2}{r_1^2})^{1/4}$  se llega finalmente a que

$$|u|_4 \leq c_2 \|u\|.$$

Se ha probado un caso de la desigualdad de Sobolev con  $m = 1$ ,  $n = 2$ ,  $p = 2$ ,  $\Omega_\alpha \subset R^n$ , (segundo caso) que establece lo siguiente:

$$\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = \frac{1}{q} \geq 0 \Rightarrow \|u\|_{L^q(\Omega_\alpha)} \leq c \|u\|_{H^{m,p}(\Omega_\alpha)},$$

$$\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0 \Rightarrow \|u\|_{L^q(\Omega_\alpha)} \leq c \|u\|_{H^{m,p}(\Omega_\alpha)} \quad \forall q \mid 1 \leq q \leq \infty,$$

$$\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0 \Rightarrow \|u\|_{C^0(\Omega_\alpha)} \leq c \|u\|_{H^{m,p}(\Omega_\alpha)}.$$

LEMA 2.a

$$-\int \int_{\Omega_\alpha} (\Im v \ v)r \ drdz \geq c \int \int_{\Omega_\alpha} v^2 r \ drdz.$$

PRUEBA Es completamente análoga a la de (1.a).

LEMA 2.b

$$\int \int_{\Omega_\alpha} (\Im \phi \ \Im \phi)r \ drdz \geq c \|\phi\|_{H^2(\Omega_\alpha)}^2,$$

y esto define una norma equivalente a la norma  $H^2(\Omega_\alpha)$ .

PRUEBA. Es claro que

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Omega_\alpha} |\Im \phi|^2 r \ drdz \leq c' \|\phi\|_{H^2(\Omega_\alpha)}^2 \\ & = c' \int \int_{\Omega_\alpha} \left( \phi^2 + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]^2 + \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right]^2 + \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \right]^2 + \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]^2 \right) drdz. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para probar la desigualdad en sentido contrario se usará un caso particular de las desigualdades a priori para operadores elípticos (cf. [29], cap. 31). Considérese el problema siguiente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f, \quad u|_{r_1} = u|_{r_2} = 0,$$

donde  $u$  es una función periódica en  $z$  que está contenida en el dominio  $\Omega_\alpha = \{r_1 < r < r_2, -\pi/\alpha < z < \pi/\alpha\}$ . El desarrollo en series de Fourier de  $u$  viene dado por:

$$u(r, z) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n(r) e^{in\alpha z},$$

con  $\bar{u}_n(r) = u_{-n}(r)$  (ya que  $u$  es real), y  $u_n(r)$  función compleja.

Por definición (cf. [15], p. 17)

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} u^2 dz = \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{-\infty}^{\infty} |u_n(r)|^2 \\ & \Rightarrow \int \int_{\Omega_\alpha} u^2 drdz = \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{r_1}^{r_2} |u_n(r)|^2 dr, \end{aligned}$$

y como se supone que  $u \in L_2(\Omega_\alpha)$ , esta fórmula es convergente.

Procediendo por separación de variables:

$$u_n'' - (n\alpha)^2 u_n = f_n(r), \quad (4.10)$$

con  $u_1(r_1) = u_1(r_2) = 0$ . Usando variación de parámetros, con  $e^{n\alpha r}$ ,  $e^{-n\alpha r}$  soluciones particulares de la ecuación homogénea que se obtiene a partir de la fórmula (4.10) (en el caso  $n \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} u_n &= a(r)e^{n\alpha r} + b(r)e^{-n\alpha r} \\ u_n' &= n\alpha a e^{n\alpha r} - n\alpha b e^{-n\alpha r} + a' e^{n\alpha r} + b' e^{-n\alpha r} \\ u_n'' &= (n\alpha)^2 a e^{n\alpha r} + (n\alpha)^2 b e^{-n\alpha r} + n\alpha a' e^{n\alpha r} - n\alpha b' e^{-n\alpha r}. \end{aligned}$$

Para obtener la última expresión se fijó  $a' e^{n\alpha r} + b' e^{-n\alpha r} = 0$ . Esto, junto con la fórmula original pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} e^{n\alpha r} & e^{-n\alpha r} \\ n\alpha e^{n\alpha r} & -n\alpha e^{-n\alpha r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Al invertir la matriz se tiene:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = -\frac{1}{2n\alpha} \begin{pmatrix} -n\alpha e^{-n\alpha r} & -e^{-n\alpha r} \\ -n\alpha e^{n\alpha r} & e^{n\alpha r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_n \end{pmatrix} = \frac{f_n}{2n\alpha} \begin{pmatrix} e^{-n\alpha r} \\ -e^{n\alpha r} \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2n\alpha} \int_{r_1}^r f_n(s) e^{-n\alpha s} ds + a_n, \\ b &= -\frac{1}{2n\alpha} \int_{r_1}^r f_n(s) e^{n\alpha s} ds + b_n, \end{aligned}$$

lo cual implica

$$u_n(r) = \frac{1}{2n\alpha} \int_{r_1}^r f_n(s) (e^{n\alpha|r-s|} - e^{-n\alpha|r-s|}) ds + a_n e^{n\alpha r} + b_n e^{-n\alpha r},$$

y por consiguiente

$$\begin{pmatrix} e^{n\alpha r_1} & e^{-n\alpha r_1} \\ e^{n\alpha r_2} & e^{-n\alpha r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{n\alpha} \int_{r_1}^{r_2} f_n(s) \sinh(n\alpha|r_2 - s|) ds \end{pmatrix}.$$

Despejando  $a_n$  y  $b_n$ :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \sinh(n\alpha|r_2 - r_1|)} \begin{pmatrix} e^{-n\alpha r_2} & -e^{-n\alpha r_1} \\ -e^{n\alpha r_2} & e^{n\alpha r_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{n\alpha} \int_{r_1}^{r_2} f_n(s) \sinh(n\alpha|r_2 - s|) ds \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2 \sinh(n\alpha|r_2 - r_1|)} \left( -\frac{e^{-n\alpha r_1}}{n\alpha} \int_{r_1}^{r_2} f_n(s) \sinh(n\alpha|r_2 - s|) ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{n\alpha r_1}}{n\alpha} \int_{r_1}^{r_2} f_n(s) \sinh(n\alpha|r_2 - s|) ds \right) \\
&\Rightarrow u_n(r) = \frac{1}{n\alpha} \left[ \int_{r_1}^r f_n(s) \sinh(n\alpha|r - s|) ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sinh(n\alpha|r - r_1|)}{\sinh(n\alpha|r_2 - r_1|)} \int_{r_1}^{r_2} f_n(s) \sinh(n\alpha|r_2 - s|) ds \right] \\
&= \frac{1}{2n\alpha \sinh(n\alpha|r_2 - r_1|)} \left( \int_r^{r_2} f_n(s) \cosh(n\alpha|r_2 - r_1 - r - s|) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{r_1}^r f_n(s) \cosh(n\alpha|r_2 - r_1 - r + s|) ds + \int_{r_1}^{r_2} f_n(s) \cosh(n\alpha|r_2 + r_1 - r - s|) ds \right),
\end{aligned}$$

(en la última igualdad se usó la relación  $\sinh p \sinh q = \frac{1}{2}(\cosh[p + q] - \cosh[p - q])$ ).

Usando la desigualdad  $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$  se pueden hacer ciertas estimaciones:

$$\begin{aligned}
\int_{r_1}^{r_2} u_n^2(r) dr &\leq \frac{3}{4(n\alpha)^2 \sinh^2(n\alpha|r_2 - r_1|)} \left( \int_{r_1}^{r_2} \left[ \int_r^{r_2} |f_n(s)| \cosh(n\alpha|r_2 + r - r_1 - s|) ds \right]^2 dr \right. \\
&\quad \left. + \int_{r_1}^{r_2} \left[ \int_{r_1}^r |f_n(s)| \cosh(n\alpha|r_2 - r_1 - r + s|) ds \right]^2 dr \right. \\
&\quad \left. + \int_{r_1}^{r_2} \left[ \int_{r_1}^{r_2} |f_n(s)| \cosh(n\alpha|r_2 + r_1 - r - s|) ds \right]^2 dr \right) \\
&\leq \frac{3}{4(n\alpha)^2 \sinh^2(n\alpha|r_2 - r_1|)} \times \\
&\quad \times \left( \int_{r_1}^{r_2} \left[ \int_r^{r_2} f_n^2(s) \cosh(n\alpha|r_2 + r - r_1 - s|) ds \int_r^{r_2} \cosh(n\alpha|r_2 + r - r_1 - s|) ds \right] dr \right. \\
&\quad \left. + \int_{r_1}^{r_2} \left[ \int_{r_1}^r f_n^2(s) \cosh(n\alpha|r_2 - r_1 - r + s|) ds \int_{r_1}^r \cosh(n\alpha|r_2 - r_1 - r + s|) ds \right] dr \right. \\
&\quad \left. + \int_{r_1}^{r_2} \left[ \int_{r_1}^{r_2} f_n^2(s) \cosh(n\alpha|r_2 + r_1 - r - s|) ds \int_{r_1}^{r_2} \cosh(n\alpha|r_2 + r_1 - r - s|) ds \right] dr \right) \\
&\leq \frac{3}{4(n\alpha)^2 \sinh^2(n\alpha|r_2 - r_1|)} \frac{1}{n\alpha} \times \\
&\quad \times \left( \int_{r_1}^{r_2} \left[ \int_r^{r_2} f_n^2(s) \cosh(n\alpha|r_2 + r - r_1 - s|) ds \right] [\sinh(n\alpha|r_2 - r_1|) - \sinh(n\alpha|r - r_1|)] dr \right. \\
&\quad \left. + \int_{r_1}^{r_2} \left[ \int_{r_1}^r f_n^2(s) \cosh(n\alpha|r_2 - r_1 - r + s|) ds \right] [\sinh(n\alpha|r_2 - r_1|) - \sinh(n\alpha|r_2 - r|)] dr \right)
\end{aligned}$$



$$+ \int_{r_1}^{r_2} \left[ \int_{r_1}^{r_2} f_n^2(s) \cosh(n\alpha|r_2 + r_1 - r - s) ds \right] [\sinh(n\alpha|r_2 - r|) + \sinh(n\alpha|r - r_1|)] dr.$$

(En el penúltimo paso se usó la desigualdad de Schwarz aplicada al producto formado por las funciones  $f_n \sqrt{\cosh(*)} \sqrt{\cosh(*)}$  y en el último se llevaron a cabo las integraciones en el sinh). El paso que sigue se da tomando en cuenta que  $f_n^2 \cosh(n\alpha|*|) \geq 0$ ,  $\sinh(n\alpha|r - r_1|) \geq 0$ ,  $\sinh(n\alpha|r_2 - r|) \geq 0$ ,  $\sinh(n\alpha|r_2 - r|) \leq \sinh(n\alpha|r_2 - r_1|)$  y  $\sinh(n\alpha|r - r_1|) \leq \sinh(n\alpha|r_2 - r_1|)$ :

$$\begin{aligned} & \int_{r_1}^{r_2} u_n^2(r) dr \leq \frac{3}{4(n\alpha)^3 \sinh(n\alpha|r_2 - r_1|)} \times \\ & \times \left( \int_{r_1}^{r_2} f_n^2(s) \left[ \int_{r_1}^s \cosh(n\alpha|r_2 + r - r_1 - s) dr \right] ds \right. \\ & \left. + \int_{r_1}^{r_2} f_n^2(s) \left[ \int_s^{r_2} \cosh(n\alpha|r_2 - r_1 - r + s) dr \right] ds \right. \\ & \left. + 2 \int_{r_1}^{r_2} f_n^2(s) \left[ \int_{r_1}^{r_2} \cosh(n\alpha|r_2 + r_1 - r - s) dr \right] ds \right) \\ & \leq \frac{3}{4(n\alpha)^4 \sinh(n\alpha|r_2 - r_1|)} \left( \int_{r_1}^{r_2} f_n^2(s) [\sinh(n\alpha|r_2 - r_1|) - \sinh(n\alpha|r_2 - s)] ds \right. \\ & \left. + \int_{r_1}^{r_2} f_n^2(s) [\sinh(n\alpha|r_2 - r_1|)] - \sinh(n\alpha|s - r_1|) ds \right. \\ & \left. + 2 \int_{r_1}^{r_2} f_n^2(s) [\sinh(n\alpha|r_2 - s|)] + \sinh(n\alpha|s - r_1|) ds \right) \\ & \leq \frac{3}{4(n\alpha)^4} 6 \int_{r_1}^{r_2} f_n^2(r) dr \\ & \Rightarrow \int_{r_1}^{r_2} u_n^2(r) dr \leq \frac{9}{2(n\alpha)^4} \int_{r_1}^{r_2} f_n^2(r) dr \end{aligned} \quad (4.11)$$

(con las mismas desigualdades del sinh).

Para  $n = 0$  la ecuación (4.10) se reduce considerablemente:

$$u_0'' = f_0(r) \Rightarrow u_0'(r) = \int_{r_1}^{r_2} f_0(s) ds + c$$

$$\Rightarrow u_0(r) = \int_{r_1}^{r_2} \int_{s_1}^s f_0(\xi) d\xi ds + c(r - r_1) + d = \int_{r_1}^r f_0(\xi)(r - \xi) d\xi + c(r - r_1),$$

(dado que  $u_0(r_1) = 0$  y por lo tanto  $d = 0$ ). Además, como  $u_0(r_2) = 0$  se tiene que

$$\int_{r_1}^{r_2} \int_{r_1}^s f_0(\xi) d\xi ds + c(r_2 - r_1) = 0,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
c &= -\frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \int_{r_1}^s f_0(\xi) \, d\xi ds = -\frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} f_0(\xi)(r_2 - \xi) \, d\xi \\
&\Rightarrow u_0(r) = \int_{r_1}^r \int_{r_1}^s f_0(\xi) \, d\xi ds - \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \int_{r_1}^s f_0(\xi) \, d\xi ds \\
&\leq (r_2 - r_1) \int_{r_1}^{r_2} |f_0(r)| \, dr + (r_2 - r_1) \int_{r_1}^{r_2} |f_0(r)| \, dr = 2(r_2 - r_1) \int_{r_1}^{r_2} |f_0(r)| \, dr \\
&\Rightarrow |u_0(r)|^2 \leq 4(r_2 - r_1)^2 \int_{r_1}^{r_2} f_0^2(r) \, dr,
\end{aligned}$$

y si  $c$  es el máximo entre 11,  $4(r_2 - r_1)$  y  $9/2\alpha^2$ , se concluye que

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\alpha)}^2 \leq \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^4} \int_{r_1}^{r_2} f_n^2(r) \, dr. \quad (4.12)$$

De la ecuación (4.11), y dado que  $(a - b)^2 \geq 0$ , se hacen las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned}
\int_{r_1}^{r_2} \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} \right|^2 dr &\leq 2 \left( \int_{r_1}^{r_2} f_n^2 dr + \int_{r_1}^{r_2} (n\alpha)^4 u_n^2 dr \right) \\
&\leq 2 \left( \int_{r_1}^{r_2} f_n^2 dr \right) \left( 1 + \frac{9}{2} \right) \leq 11 \int_{r_1}^{r_2} f_n^2 dr \\
&\Rightarrow \int_{r_1}^{r_2} |u_n''|^2 dr \leq c \int_{r_1}^{r_2} f_n^2(r) \, dr
\end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{r_1}^{r_2} \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} \right|^2 dr = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right\|_{L^2(\Omega_\alpha)}^2 \leq c \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{r_1}^{r_2} f_n^2 dr \leq c \|f\|_{L^2(\Omega_\alpha)}^2. \quad (4.14)$$

También se tiene que

$$\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \leq c_1 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\|_{L^2(\Omega_\alpha)}^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} (n\alpha)^4 \int_{r_1}^{r_2} u_n^2(r) \, dr \leq c \|f\|_{L^2(\Omega_\alpha)}^2. \quad (4.15)$$

Integrando por partes a  $u'^2$  y usando las condiciones de frontera de  $u$  en  $r_1$  y  $r_2$  (donde se anula) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\int_{r_1}^{r_2} u'^2 dr &= - \int_{r_1}^{r_2} u u'' dr \\
\Rightarrow \int_{r_1}^{r_2} u_n'^2 dr &\leq \left( \int_{r_1}^{r_2} u_n^2 \right)^{1/2} \left( \int_{r_1}^{r_2} u_n''^2 \right)^{1/2} \leq \frac{c}{(n\alpha)^2} \|f_n\|_{L^2(\Omega_\alpha)}^2
\end{aligned}$$

(con ayuda de las ecuaciones (4.10) y (4.11)), por lo que

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|_{L^2(\Omega_\alpha)}^2 \leq c \|f\|_{L^2(\Omega_\alpha)}^2$$

y

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} \right\|_{L^2(\Omega_\alpha)}^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} (n\alpha)^2 \int_{r_1}^{r_2} \left[ \frac{\partial u_n(r)}{\partial r} \right]^2 dr \leq c \|f\|_{L^2(\Omega_\alpha)}^2. \quad (4.16)$$

Con ayuda de las ecuaciones (4.12), (4.14), (4.15) y (4.16) se ha probado que para cualquier función periódica en  $z$ ,  $u(r_1) = u(r_2) = 0$ ,

$$\|u\|_{H^2(\Omega_\alpha)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega_\alpha)} = c \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\|_{L^2(\Omega_\alpha)}, \quad (4.17)$$

y por lo tanto las normas son equivalentes.

Por otra parte

$$\int \int_{\Omega_\alpha} |\mathfrak{S}u|^2 dr dz \geq \frac{1}{r_2^2} \int \int_{\Omega_\alpha} |\mathfrak{S}u|^2 r^2 dr dz,$$

y

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega_\alpha} |\mathfrak{S}u|^2 r^2 dr dz &= \int_{r_1}^{r_2} \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \left( r^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]^2 \right. \\ &+ 2r \frac{\partial u}{\partial r} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]^2 + \frac{u^2}{r^2} - 2u \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] \left. dr dz \right. \\ &= \int \int_{\Omega_\alpha} \left( r^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]^2 + 2r \frac{\partial u}{\partial r} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \right. \\ &\left. + \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]^2 + \frac{u^2}{r^2} + 2 \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]^2 + 2 \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 - \frac{u^2}{r^2} \right) dr dz. \end{aligned}$$

Este último resultado se obtiene integrando por partes y usando las condiciones de frontera en  $u$ , periodicidad en  $u$  y en  $\frac{\partial u}{\partial z}$ . Mediante las integraciones

$$\begin{aligned} - \int_{r_1}^{r_2} u \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} dr &= \int_{r_1}^{r_2} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]^2 dr, \\ - \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz &= \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 dz, \\ - \int_{r_1}^{r_2} \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} dr &= - \frac{1}{2} \frac{u^2}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} - \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} u^2 dr, \end{aligned}$$

la desigualdad se puede continuar así:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_a} |\mathfrak{S}u|^2 r^2 dr dz &\geq \iint_{\Omega_a} \left( r^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]^2 + 3 \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]^2 + 2 \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 \right) dr dz \\ &\quad - 2 \left( \iint_{\Omega_a} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]^2 dr dz \right)^{1/2} \left( \iint_{\Omega_a} r^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]^2 dr dz \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Usando  $2ab \leq a^2 \epsilon^2 + \frac{b^2}{\epsilon^2}$  se encuentra que

$$\iint_{\Omega_a} |\mathfrak{S}u|^2 r^2 dr dz \geq \iint_{\Omega_a} \left( r^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]^2 [1 - \epsilon^2] + \left[ 3 - \frac{1}{\epsilon^2} \right] \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]^2 + 2 \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 \right) dr dz.$$

Tomando  $\epsilon^2 = 1/2$  :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_a} |\mathfrak{S}u|^2 r^2 dr dz &\geq \iint_{\Omega_a} |\mathfrak{S}|^2 r^2 dr dz \\ &\geq \iint_{\Omega_a} \left( \frac{1}{2} r^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]^2 + \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]^2 + 2 \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 \right) dr dz \geq \frac{r_1^2}{2} \iint_{\Omega_a} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 dr dz \end{aligned}$$

(la última desigualdad se obtuvo a partir de (4.17))

$$\Rightarrow \iint_{\Omega_a} |\mathfrak{S}|^2 r^2 dr dz \geq c \|u\|_{H^2(\Omega_a)}^2.$$

De las ecuaciones (4.9) y (4.17) se concluye que las normas son equivalentes.

También se probará que si  $u \in H^2(\Omega_a)$ , entonces  $u$  es continua. De (4.10) se tiene que

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{(n\alpha)^2} (u_n'' - f_n) \Rightarrow u_n u_n' = \frac{1}{(n\alpha)^2} (u_n'' u_n' - f_n u_n') \\ &\Rightarrow \int_{r_1}^{r_2} 2u_n u_n' ds = u_n^2(r) = \frac{2}{(\alpha n)^2} \int_{r_1}^{r_2} (u_n'' u_n' - f_n u_n') dr \\ &\leq \frac{2}{(n\alpha)^2} \left( \int_{r_1}^{r_2} \left[ \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} \right]^2 dr \right)^{1/2} \left( \int_{r_1}^{r_2} \left[ \frac{\partial u_n}{\partial r} \right]^2 dr \right)^{1/2} + \left( \int_{r_1}^{r_2} f_n^2 dr \right)^{1/2} \left( \int_{r_1}^{r_2} \left[ \frac{\partial u_n}{\partial r} \right]^2 dr \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{2}{(n\alpha)^3} c \|f_n\|_{L^2(\Omega_a)}^2 \Rightarrow |u_n(r)| \leq \frac{c}{n^{3/2}} \|f_n\|_{L^2(\Omega_a)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left| \sum_{n=-k}^k u_n(r) e^{in\alpha z} \right| \leq c \sum_{n=-k}^k \frac{\|f_n\|_{L^2(\Omega_a)}}{n^{3/2}} \leq c \left( \sum_{n=-k}^k \frac{1}{n^3} \right)^{1/2} \left( \sum_{n=-k}^k |f_n|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq c \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^3} \right)^{1/2} \|f\|_{L^2(\Omega_\alpha)} \leq c' \|f\|_{L^2(\Omega_\alpha)}.$$

La cota superior es finita. La serie es uniformemente convergente y cada término continuo por lo que el límite es continuo también.

**LEMA 3.a**  $\forall g \in L^2(\Omega_\alpha) \exists u$  único  $\in \{H^2(\Omega_\alpha), u(r_1) = u(r_2) = 0, u$  periódico en  $z\}$  tal que  $\mathfrak{S}u = g$ . Además  $\|u\|_{H^2(\Omega_\alpha)} \leq c \|g\|_{L^2(\Omega_\alpha)}$ .

**PRUEBA.** Al definir el producto escalar con ayuda del operador  $\mathfrak{S}$  se vió que  $(-\mathfrak{S}v, v)$  define una norma equivalente a la norma  $H^1$  en el espacio  $\bar{H}^1 = \{H^1(\Omega_\alpha) \mid u(r_1) = u(r_2) = 0, u$  periódica en  $z\}$ .

A partir de las estimaciones (desigualdad de Schwarz y  $\|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_{H^1}$ )  $(-g, v) \leq \|g\|_{L^2(\Omega_\alpha)} \|v\|_{L^2(\Omega_\alpha)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega_\alpha)} \|v\|_{H^1(\Omega_\alpha)}$ , se concluye que el producto escalar  $(-g, v)$  define un funcional lineal acotado,  $((u_0, v))$ , sobre  $\bar{H}^1(\Omega_\alpha)$ , con  $\|u_0\| \leq \|g\|_{L^2(\Omega_\alpha)}$  (Teorema de Riesz, cf. [29], p. 111). Por lo tanto, puede plantearse la ecuación  $(-\mathfrak{S}u + g, v) \equiv ((u, v))_1 - ((u_0, v))_1 = 0 \quad \forall v \in \bar{H}^1(\Omega_\alpha) \iff u = u_0$ .

$u_0$  es único (se trata de un caso particular del teorema de Lax-Milgram ([29], p.383)), y  $u_0 \in \bar{H}^1(\Omega_\alpha)$ , con  $\|u_0\| \leq \|g\|_{L^2(\Omega_\alpha)}$ .

Si se considera el problema

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = h$$

en  $\bar{H}^1(\Omega_\alpha)$  con la norma equivalente

$$((u, v)) = \int \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dr dz,$$

este problema tiene solución única débil  $\bar{u}_0 : ((u, v)) = (-h, v) \quad \forall u \in \bar{H}^1(\Omega_\alpha)$ , y esta solución está en  $H^2(\Omega_\alpha)$ , con  $\|\bar{u}_0\|_{H^2(\Omega_\alpha)} \leq c \|h\|_{L^2(\Omega_\alpha)}$  (calculada explícitamente en el lema 2.b). Entonces, para

$$h = -g + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{u_0}{r^2},$$

$h \in L^2(\Omega_\alpha)$  ( $u_0 \in \bar{H}^1(\Omega_\alpha)$ ),  $\bar{u}_0$  es solución débil, pero como también lo es  $u_0$ , entonces  $\bar{u}_0 = u_0$ , por la unicidad de la solución y  $\|u_0\|_{H^2(\Omega_\alpha)} \leq c \|h\|_{L^2(\Omega_\alpha)} \leq c \|g\| + \left| \frac{\partial u_0}{\partial r} \right| + |u_0| \leq c(\|g\| + \|u_0\|_{H^1(\Omega_\alpha)}) \leq 2c\|g\|$ . Entonces  $\mathfrak{S} : H^2(\Omega_\alpha) \cap \bar{H}^1(\Omega_\alpha) \longrightarrow L^2(\Omega_\alpha)$  es un operador continuo con inverso  $\mathfrak{S}^{-1}$  continuo (por unicidad de la solución al problema  $\mathfrak{S}u = g$ ,  $\mathfrak{S}^{-1}$  es lineal y  $\|\mathfrak{S}^{-1}g\|_{H^2(\Omega_\alpha)} \leq 2c\|g\|$ ).

(En cuanto a la unicidad debe procederse con cuidado ya que las normas de energía son diferentes para  $\mathfrak{S}$  y para  $\Delta$ . Integrando por partes:  $(u_0, \Delta\phi) = (h, \phi) = (\bar{u}_0, \Delta\phi) \quad \forall \phi \in$

$H^2(\Omega_\alpha) \cap \bar{H}^1(\Omega_\alpha)$ . Dado que  $\Delta : H^2(\Omega_\alpha) \cap \bar{H}^1 \rightarrow L^2(\Omega_\alpha)$  es inyectiva, entonces  $\{\Delta\} = L^2(\Omega_\alpha)$  y por lo tanto  $u_0 = \bar{u}_0$  en  $L^2(\Omega_\alpha)$ .

**LEMA 3.b**  $\forall g \in L^2(\Omega_\alpha)$ ,  $\exists \phi$  único  $\in \left\{ H^2(\Omega_\alpha) \mid \phi(r_1) = \phi(r_2) = \frac{\partial \phi(r_1)}{\partial r} = \frac{\partial \phi(r_2)}{\partial r} = 0, \phi \text{ periódico en } z \right\}$ , tal que  $\mathfrak{S}^2 \phi = g$ . Además,  $\phi \in H^4(\Omega_\alpha)$  y  $\|\phi\|_{H^4(\Omega_\alpha)} \leq c\|g\|_{L^2(\Omega_\alpha)}$ .

**PRUEBA**

$$\begin{aligned} (\mathfrak{S}^2 \phi, \psi) &= \int \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) \times \\ &\quad \times \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \phi \right) \psi r \, dr dz \\ &= \int \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \phi}{\partial z^2} - \frac{\phi}{r^2} \right) r \psi \, dr dz \\ &= \int \int_{\Omega_\alpha} \left( -r \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \mathfrak{S} \phi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \mathfrak{S} \phi - \frac{r}{r^2} \psi \mathfrak{S} \phi \right) \, dr dz \\ &\quad + \psi r \mathfrak{S} \phi \Big|_{r_1}^{r_2} + r \psi \frac{\partial \mathfrak{S} \phi}{\partial z} \Big|_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} - r \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathfrak{S}(\phi) \Big|_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha}; \end{aligned}$$

de las condiciones sobre  $\psi$  y  $\mathfrak{S} \phi$  ( $\psi(r_1) = \psi(r_2) = 0$ ;  $\psi, \frac{\partial \phi}{\partial z}, \mathfrak{S} \phi$  son funciones periódicas en  $z$ ) se logra la siguiente simplificación:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{S}^2 \phi, \psi) &= \int \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \mathfrak{S}(\phi) + r \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \mathfrak{S} \phi - \frac{1}{r} \psi \mathfrak{S} \phi \right) \, dr dz \\ &= \int \int_{\Omega_\alpha} (\mathfrak{S} \psi, \mathfrak{S} \phi) r \, dr dz. \end{aligned}$$

Sobre

$$\bar{H}^2(\Omega) \equiv \left\{ \phi \in H^2(\Omega) \mid \phi(r_1) = \phi(r_2) = \phi_r(r_1) = \phi_r(r_2) = 0, \phi(z + \frac{2\pi}{\alpha}) = \phi(z) \right\}, \quad \|\cdot\|_{(\mathfrak{S}\phi, \mathfrak{S}\phi)}$$

la formulación débil del problema  $\mathfrak{S}^2 \phi = g$  es

$$(\mathfrak{S} \phi, \mathfrak{S} \psi) - (g, \psi) = 0,$$

es decir,  $((\phi, \psi))_2 - (g, \psi) = 0$ , y dado que  $|(g, \psi)| \leq c\|g\|_{L^2(\Omega_\alpha)}\|\psi\|_{\bar{H}^2(\Omega_\alpha)}$ , puede escribirse  $(g, \psi) = ((\phi_0, \psi))_2$  (Lema de Riesz, cf. [29], p. 111), y la formulación débil es, por

consiguiente,  $((\phi, \psi))_2 - ((\phi_0, \psi))_2 = 0 \quad \forall \psi \in \overline{H}^2(\Omega_\alpha)$ , y por lo tanto  $\phi = \phi_0$  es la única solución (Teorema de Lax-Milgram, cf. [29], p. 383), con  $\|\phi\|_{\overline{H}^2(\Omega_\alpha)} \leq c\|g\|_{L^2(\Omega_\alpha)}$ .

Para  $\mathfrak{S}$  se resolverá el problema con el operador biarmónico

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 \phi = h,$$

y las condiciones  $\phi(r_1) = \phi(r_2) = \frac{\partial \phi(r_1)}{\partial r} = \frac{\partial \phi(r_2)}{\partial r} = 0$ ,  $\phi$  periódica en  $z$ .

Es conveniente desarrollar en series de Fourier a  $\phi$  y  $h$  ( $\phi = \sum_{-\infty}^{\infty} \phi_n(r)e^{i\alpha n z}$ ,  $h = \sum_{-\infty}^{\infty} h_n(r)e^{i\alpha n z}$ ) para obtener el conjunto de ecuaciones

$$\phi_n''''(r) - 2(n\alpha)^2 \phi_n'' + (n\alpha)^4 \phi_n = h_n.$$

Esta fórmula se estudiará usando variación de parámetros. El primer paso es ver que las soluciones de la ecuación homogénea son  $e^{n\alpha r}$ ,  $e^{-n\alpha r}$ ,  $re^{n\alpha r}$  y  $re^{-n\alpha r}$ . Ahora se escriben las expresiones para  $\phi_n$  y sus cuatro primeras derivadas:

$$\phi_n = ae^{n\alpha r} + be^{-n\alpha r} + cre^{n\alpha r} + dre^{-n\alpha r} = a\phi_1 + b\phi_2 + c\phi_3 + d\phi_4$$

$$\phi_n' = a(e^{n\alpha r})' + b(e^{-n\alpha r})' + c(re^{n\alpha r})' + d(re^{-n\alpha r})' + [a'e^{n\alpha r} + b'e^{-n\alpha r} + c're^{n\alpha r} + d're^{-n\alpha r}]$$

(el sumando que está entre paréntesis se fija igual a cero)

$$\phi_n'' = a\phi_1'' + b\phi_2'' + c\phi_3'' + d\phi_4'' + [a'\phi_1' + b'\phi_2' + c'\phi_3' + d'\phi_4']$$

(el sumando que está entre paréntesis se anula)

$$\phi_n''' = a\phi_1''' + b\phi_2''' + c\phi_3''' + d\phi_4''' + [a'\phi_1'' + b'\phi_2'' + c'\phi_3'' + d'\phi_4'']$$

(el sumando que está entre paréntesis se anula)

$$\phi_n'''' = a\phi_1'''' + b\phi_2'''' + c\phi_3'''' + d\phi_4'''' + a'\phi_1''' + b'\phi_2''' + c'\phi_3''' + d'\phi_4''',$$

por lo que

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_1' & \phi_2' & \phi_3' & \phi_4' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \phi_3'' & \phi_4'' \\ \phi_1''' & \phi_2''' & \phi_3''' & \phi_4''' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_n \end{pmatrix}.$$

El determinante de la matriz es  $-16(n\alpha)^4$  y al despejar se obtiene:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = -\frac{h_n}{4(n\alpha)^4} \begin{pmatrix} e^{-n\alpha r}[n\alpha + (n\alpha)^2 r] \\ e^{n\alpha r}[-n\alpha + (n\alpha)^2 r] \\ -e^{-n\alpha r}(n\alpha)^2 \\ -e^{n\alpha r}(n\alpha)^2 \end{pmatrix},$$

por lo que, a su vez

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = -\frac{1}{4(n\alpha)^4} \begin{pmatrix} \int_{r_1}^r h_n e^{-n\alpha s} [n\alpha + (n\alpha)^2 s] ds + a'_0 \\ \int_{r_1}^r h_n e^{n\alpha s} [-n\alpha + (n\alpha)^2 s] ds + b'_0 \\ - \int_{r_1}^r h_n e^{-n\alpha s} (n\alpha)^2 ds + c'_0 \\ - \int_{r_1}^r h_n e^{n\alpha s} (n\alpha)^2 ds + d'_0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4(n\alpha)^3} \begin{pmatrix} a_1 + a_0 \\ b_1 + b_0 \\ c_1 + c_0 \\ d_1 + d_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4(n\alpha)^3} \begin{pmatrix} \int_{r_1}^r (1 + n\alpha s) e^{-n\alpha s} h_n ds + a_0 \\ \int_{r_1}^r (-1 + n\alpha s) e^{n\alpha s} h_n ds + b_0 \\ -n\alpha \int_{r_1}^r e^{-n\alpha s} h_n ds + c_0 \\ -n\alpha \int_{r_1}^r e^{n\alpha s} h_n ds + d_0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\phi_n = -\frac{1}{2(n\alpha)^3} \left( \int_{r_1}^r h_n [\sinh\{n\alpha(r-s)\} - n\alpha(r-s) \cosh\{n\alpha(r-s)\}] ds \right. \\ \left. + a_0 e^{n\alpha r} + b_0 e^{-n\alpha r} + c_0 r e^{n\alpha r} + d_0 r e^{-n\alpha r} \right). \quad (4.12)$$

De las condiciones de frontera:

$$\begin{pmatrix} e^{n\alpha r_1} & e^{-n\alpha r_1} & r_1 e^{n\alpha r_1} & r_1 e^{-n\alpha r_1} \\ (e^{n\alpha r})'|_{r_1} & (e^{-n\alpha r})'|_{r_1} & (r e^{n\alpha r})'|_{r_1} & (r e^{-n\alpha r})'|_{r_1} \\ e^{n\alpha r_2} & e^{-n\alpha r_2} & r_2 e^{n\alpha r_2} & r_2 e^{-n\alpha r_2} \\ (e^{n\alpha r})'|_{r_2} & (e^{-n\alpha r})'|_{r_2} & (r e^{n\alpha r})'|_{r_2} & (r e^{-n\alpha r})'|_{r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ - \int_{r_1}^{r_2} h_n (\sin\{n\alpha[r_2-s]\} - n\alpha[r_2-s] \cosh\{n\alpha[r_2-s]\}) ds \\ (n\alpha)^2 \int_{r_1}^{r_2} h_n (r_2-s) \sinh\{n\alpha[r_2-s]\} ds \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A \\ B \end{pmatrix}.$$



El determinante de la matriz es  $K \equiv -4 \sinh^2(n\alpha[r_2 - r_1]) + 4(n\alpha)^2(r_2 - r_1)^2$  ( $< 0$  por el desarrollo en serie del  $\sinh x$ )  $= -4(\sinh\{n\alpha[r_2 - r_1]\} + n\alpha[r_2 - r_1])(\sinh\{n\alpha[r_2 - r_1]\} - n\alpha[r_2 - r_1]) = -2(\cosh\{2n\alpha[r_2 - r_1]\} - 1 - 2\{n\alpha\}^2[r_2 - r_1])$ .

Debido a los ceros que tiene el vector, solo es necesario calcular la mitad de las componentes de la matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{K} \begin{pmatrix} * & * & A_{13} & A_{14} \\ * & * & A_{23} & A_{24} \\ * & * & A_{33} & A_{34} \\ * & * & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A \\ B \end{pmatrix},$$

con

$$A_{13} = e^{-n\alpha r_2}(1 - n\alpha r_2 + 2n\alpha r_1[1 + \alpha n\{r_1 - r_2\}] - e^{2n\alpha[r_2 - r_1]}[1 + n\alpha r_2]),$$

$$A_{23} = e^{n\alpha r_2}(1 + n\alpha r_2 - 2n\alpha r_1[1 - n\alpha\{r_1 - r_2\}] - e^{2n\alpha[r_1 - r_2]}[1 + n\alpha r_2]),$$

$$A_{33} = n\alpha e^{-n\alpha r_2}(-1 + 2n\alpha[r_2 - r_1] + e^{2n\alpha[r_2 - r_1]}),$$

$$A_{43} = n\alpha e^{n\alpha r_2}(1 + 2n\alpha[r_2 - r_1] - e^{2n\alpha[r_1 - r_2]}),$$

$$A_{14} = e^{-n\alpha r_2}(-r_2 - 2n\alpha r_1[r_2 - r_1] + r_2 e^{2n\alpha[r_2 - r_1]}),$$

$$A_{24} = e^{n\alpha r_2}(-r_2 + 2n\alpha r_1[r_2 - r_1] + r_2 e^{2n\alpha[r_1 - r_2]}),$$

$$A_{34} = e^{-n\alpha r_2}(1 - 2n\alpha[r_1 - r_2] - e^{2n\alpha[r_2 - r_1]}),$$

$$A_{44} = e^{n\alpha r_2}(1 + 2n\alpha[r_2 - r_1] - e^{2n\alpha[r_1 - r_2]})$$

$$\Rightarrow a_0 e^{n\alpha r} + b_0 e^{-n\alpha r} + c_0 r e^{n\alpha r} + d_0 r e^{-n\alpha r}$$

$$= \frac{A}{K}(A_{13} e^{n\alpha r} + A_{23} e^{-n\alpha r} + A_{33} r e^{n\alpha r} + A_{43} r e^{-n\alpha r})$$

$$+ \frac{B}{K}(A_{14} e^{n\alpha r} + A_{24} e^{-n\alpha r} + A_{34} r e^{n\alpha r} + A_{44} r e^{-n\alpha r})$$

$$= \frac{2A}{K}(\{1 + 2\{n\alpha\}^2\{r - r_1\}\{r_2 - r_1\}\} \cosh[n\alpha\{r_2 - r\}])$$

$$+ n\alpha\{r_2 + r - 2r_1\} \sinh[n\alpha\{r_2 - r\}] - \cosh[n\alpha\{r_2 + r - 2r_1\}])$$

$$- n\alpha\{r_2 - r\} \sinh[n\alpha\{r_2 + r - 2r_1\}])$$

$$+ \frac{2B}{K}(\{r_2 - r\}(\cosh[n\alpha\{r + r_2 - 2r_1\}] - \cosh[n\alpha\{r_2 - r\}])$$

$$- 2n\alpha\{r - r_1\}\{r_2 - r_1\} \sinh[n\alpha\{r_2 - r\}])$$

$$= \frac{2}{K} \int_{r_1}^{r_2} h_n(\{ \cosh[n\alpha\{r_2 + r - 2r_1\}] - \cosh[n\alpha\{r_2 - r\}] \} \sinh[n\alpha\{r_2 - s\}])$$

$$+ n\alpha(\{r_2 - s\} \cosh[n\alpha\{r_2 - s\}](\cosh[n\alpha\{r_2 - r\}] - \cosh[n\alpha\{r_2 + r - 2r_1\}])$$

$$+ \{r_2 - r\} \sinh[n\alpha\{r_2 - s\}] \sinh[n\alpha\{r_2 + r - 2r_1\}])$$

$$\begin{aligned}
& -[r_2 + r - 2r_1] \sinh[n\alpha\{r_2 - s\} \sinh\{n\alpha\{r_2 - r\}\}] \\
& + (n\alpha)^2 (-2[r - r_1][r_2 - r_1] \cosh(n\alpha[r_2 - r_1]) \sinh(n\alpha[r_2 - s]) \\
& + [r_2 - s][r_2 + r - 2r_1] \cosh(n\alpha[r_2 - s]) \sinh(n\alpha[r_2 - r]) \\
& - [r_2 - r][r_2 - s] \sinh(n\alpha[r + s - 2r_1]) - [r_2 - r][r_2 - s] \sinh(n\alpha[r_2 - s]) \cosh(n\alpha[r_2 - r])) \\
& + 2(n\alpha)^3 ([r_2 - s][r - r_1][r_2 - r_1] \cosh(n\alpha[r - s])) ds \\
& = \frac{1}{K} \int_{r_1}^{r_2} h_n (\sinh(n\alpha\{2\{r_2 - r_1\} + r - s\}) - \sinh(n\alpha[r + s - 2r_1]) \\
& \quad - \sinh(n\alpha\{2r_2 - r - s\}) - \sinh(n\alpha[r - s]) \\
& + (n\alpha) (-\cosh(2n\alpha[r_2 - r_1] + r - s)[r - s] - \cosh(n\alpha\{2r_2 - r - s\})[r + s - 2r_1] \\
& \quad - \cosh(n\alpha[r + s - 2r_1])[2r_2 - s - r] + \cosh(n\alpha[r - s])\{2\{r_2 - r_1\} + r - s\}) \\
& \quad - 2(n\alpha)^2 (\sinh(n\alpha\{2r_2 - r - s\})[r - r_1][s - r_1] \\
& + \sinh(n\alpha[r - s][r_2 - r_1])[r_2 - r_1 + r - s] + [r_2 - r][r_2 - s] \sinh(n\alpha[r + s - 2r_1])) \\
& \quad + 4(n\alpha)^3 (r_2 - s)(r - r_1)(r_2 - r_1) \cosh(n\alpha[r - s]) ds.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación (4.12) se transforma en:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4(n\alpha)^3 (\cosh(2n\alpha[r_2 - r_1]) - 1 - 2(n\alpha)^2 [r_2 - r_1]^2)} \times \\
& \quad \times \left( \int_r^{r_2} h_n \sinh(n\alpha\{2\{r_2 - r_1\} + r - s\}) ds \right. \\
& + \int_{r_1}^r h_n (\sinh n\alpha\{2\{r_2 - r_1\} - r + s\} - n\alpha\{r - s\} \cosh(n\alpha\{2\{r_2 - r_1\} - r + s\}) ds \\
& \quad \left. - n\alpha \int_r^{r_2} h_n (r - s) \cosh(n\alpha\{2\{r_2 - r_1\} + r - s\}) ds \right. \\
& \quad \left. + k_0(r) + n\alpha k_1(r) + (n\alpha)^2 k_2(r) + (n\alpha)^3 k_3(r) \right),
\end{aligned}$$

donde en  $k_0(r)$  hay términos de la forma

$$\begin{aligned}
& \int_{r_1}^{r_2} h_n \sinh(n\alpha[r + s - 2r_1]) ds, \quad \int_{r_1}^{r_2} h_n \sinh(n\alpha\{2r_2 - r - s\}) ds, \\
& \int_{r_1}^{r_2} h_n \sinh(n\alpha[r - s]) ds, \quad \int_{r_1}^r h_n \sinh(n\alpha[r - s]) ds;
\end{aligned}$$

en  $k_1(r)$  hay términos de la forma

$$\int_{r_1}^{r_2} h_n \cosh(n\alpha\{2r_2 - r - s\})[r + s - 2r_1] ds, \quad \int_{r_1}^{r_2} h_n (2r_2 - r - s) \cosh(n\alpha[r + s - 2r_1]) ds,$$

$$\int_{r_1}^{r_2} h_n(2[r_2 - r_1] + r - s) \cosh(n\alpha[r - s]) \, ds, \quad \int_{r_1}^{r_2} h_n(r - s) \cosh(n\alpha[r - s]) \, ds;$$

en  $k_2(r)$  hay términos de la forma

$$\int_{r_1}^{r_2} h_n'(r - r_1)(s - r_1) \sinh(n\alpha[2r_2 - r - s]) \, ds, \quad \int_{r_1}^{r_2} h_n(r_2 - r_1 + r - s) \sinh(n\alpha[r - s]) \, ds$$

$$\int_{r_1}^{r_2} h_n(r_2 - r)(r_2 - s) \sinh(n\alpha[r + s - 2r_1]) \, ds, \quad \int_{r_1}^r h_n \sinh(n\alpha[r - s]) \, ds;$$

y, en  $k_3(r)$  hay términos de la forma

$$\int_{r_1}^{r_2} h_n(r_2 - s)(r - r_1) \cosh(n\alpha[r - s]) \, ds, \quad \int_{r_1}^r h_n(r - s) \cosh(n\alpha[r - s]) \, ds.$$

Por otra parte

$$\cosh 2\eta - 1 - 2\eta^2 = \frac{(2\eta)^4}{4!} + \frac{(2\eta)^6}{6!} + \frac{(2\eta)^8}{8!} + \dots = \frac{(2\eta)^4}{4!} \left( 1 + \frac{(2\eta)^2}{5 \times 6} + \frac{(2\eta)^4}{5 \times 6 \times 7 \times 8} + \dots \right).$$

Si  $\beta < 2 \implies \left(\frac{2}{\beta}\right)^n \frac{4!}{(n+4)!} \geq \frac{k(\beta)}{n!}$  para algún  $k(\beta)$ ,  $\forall n$ , ya que  $\left(\frac{2}{\beta}\right)^n \geq k'(n+4)^4$ , porque  $n \log(2/\beta) \geq \log k' + 4 \log(n+4)$  ( $n \log(2/\beta) \geq 4 \log(n+4)$  para  $n \geq n_0$ ). En el caso  $n \leq n_0$  basta escoger  $k'$  suficientemente pequeña. Por lo tanto  $\cosh 2\eta - 1 - 2\eta^2 \geq k(\beta)\eta^4 \cosh \beta\eta \geq \bar{k}(\beta)\eta^4 e^{\beta\eta}$ . Además  $\cosh 2\eta - 1 - 2\eta^2 \geq \frac{1}{2} \cosh 2\eta$  para  $\eta \geq \eta_0$ .

También se tiene que  $\eta^\beta \cosh \eta$ ,  $\eta^\beta \sinh \eta \leq k(\beta\eta) \cosh \beta\eta$  para  $\beta > 1$ ,  $\eta \geq 0$ , ya que  $\eta^\beta e^\eta \leq \bar{k} e^{\beta\eta} \iff \eta^\beta \leq \bar{k} e^{(\beta-1)\eta}$  es cierto para  $\eta \geq \eta_0$ , y para  $0 \leq \eta \leq \eta_0$  se elige  $\bar{k}$  lo suficientemente grande.

Con estas consideraciones, al estimar las cantidades

$$\left( \int \phi_n^2(r) \, dr \right)^{1/2}, \quad \left( \int \phi_n'^2(r) \, dr \right)^{1/2}, \quad \left( \int \phi_n''^2(r) \, dr \right)^{1/2},$$

$$\left( \int \phi_n'''(r) \, dr \right)^{1/2}, \quad \left( \int \phi_n''''^2(r) \, dr \right)^{1/2},$$

la contribución de los términos en  $(n\alpha)^3$  será de la forma

$$\frac{(n\alpha)^{3+p}}{(n\alpha)^3 K} \left( \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_{r_1}^{r_2} |h_n| \cosh(n\alpha[r - s]) \, ds \right)^2 dr \right)^{1/2}$$

$$\leq k \frac{(n\alpha)^{p-4}}{\cosh(\alpha\beta n[r_2 - r_1])} \cosh(n\alpha[r_2 - r_1]) \left( \int_{r_1}^{r_2} h_n^2 dr \right)^{1/2} \leq \bar{k}(\eta) \|h_n\|_{L^2(\Omega_\alpha)} \frac{1}{(n\alpha)^q},$$

para  $p \leq 4$ . Entonces estos términos están en  $H^q(\Omega_\alpha) \forall q$  y por el teorema de encaje son  $C^\infty$ . Lo mismo sucede con los términos que contienen  $\sinh(n\alpha[r - s])$ .

Para los términos en  $(n\alpha)^2$ , las expresiones que contienen  $\sinh n\alpha|r-s|$  se comportan como antes, dando lugar a términos que son  $C^\infty$ .

Para el término  $\sinh(n\alpha[2r_2 - r - s])$  hay que estimar a lo más, para cuartas derivadas en  $r$  o  $z$ :

$$\begin{aligned} & k \frac{(n\alpha)^2}{(n\alpha)^3} \frac{(n\alpha)^4}{\cosh(2n\alpha[r_2 - r_1])} \left[ \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_{r_1}^{r_2} |h_n(s)| |r - r_1| |s - r_1| \sinh(n\alpha[2r_2 - r - s]) ds \right)^2 dr \right]^{1/2} \\ & \leq \bar{k} \frac{(n\alpha)^3}{e^{2n\alpha[r_2 - r_1]}} \left( \int_{r_1}^{r_2} |r - r_1|^2 e^{2n\alpha|r_2 - r|} dr \int_{r_1}^{r_2} h_n^2(s) ds \int_{r_1}^{r_2} (s - r_1)^2 e^{2n\alpha|r_2 - s|} ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Nótese que integrando por partes se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \int_{r_1}^{r_2} (r - r_1)^2 e^{2n\alpha|r_2 - r|} dr \\ & = -\frac{1}{2n\alpha} (r_2 - r_1)^2 + \frac{1}{n\alpha} \int_{r_1}^{r_2} (r - r_1) e^{2n\alpha(r_2 - r)} dr \\ & = -\frac{1}{2n\alpha} (r_2 - r_1)^2 - \frac{1}{2(n\alpha)^2} (r_2 - r_1) + \frac{1}{4(n\alpha)^3} [e^{2n\alpha(r_2 - r_1)} - 1] \\ & \leq \frac{k e^{2n\alpha|r_2 - r_1|}}{(n\alpha)^3}, \end{aligned}$$

y por lo tanto este término es acotado por  $k\bar{k} \|h_n\|_{L^2(\Omega_a)}$ .

Las estimaciones para el otro término que tiene cuarta derivada en  $r$  de esta expresión se obtienen a partir de lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{(n\alpha)^2}{(n\alpha)^3} (n\alpha)^3 \left[ \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_{r_1}^{r_2} |h_n| |s - r_1| \cosh(n\alpha[2r_2 - r - s]) ds \right)^2 dr \right]^{1/2} \\ & \leq k (n\alpha)^2 \left( \int_{r_1}^{r_2} \int_{r_1}^{r_2} |h_n|^2 ds \int_{r_1}^{r_2} |s - r_1|^2 e^{2n\alpha|r_2 - s|} ds e^{2n\alpha|r_2 - r|} dr \right)^{1/2} \\ & \leq k \|h_n\|_{L^2(\Omega_a)} \frac{(n\alpha)^2}{(n\alpha)^2} e^{2n\alpha|r_2 - r_1|}. \end{aligned}$$

Al intercambiar  $r_1$  por  $r_2$  se obtiene la misma estimación para

$$\int_{r_1}^{r_2} h_n(s) |r_2 - r| |r_2 - s| \sinh(n\alpha[r + s - 2r_1]) ds.$$

Para los términos con  $n\alpha$ , los que involucran  $\cosh(n\alpha[r - s])$  son  $C^\infty$ .

Para las derivadas de

$$\int_{r_1}^{r_2} h_n(r + s - 2r_1) \cosh(n\alpha[2r_2 - r - s]) ds$$

son necesarias estimaciones de las integrales

$$\frac{(n\alpha)^5}{(n\alpha)^3 K} \int_{r_1}^{r_2} h_n(r+s-2r_1) \cosh(n\alpha[2r_2-r-s]) ds$$

y

$$\frac{(n\alpha)^4}{(n\alpha)^3 K} \int_{r_1}^{r_2} h_n \sinh(n\alpha[2r_2-r-s]) ds;$$

o sea, estimar

$$\frac{(n\alpha)^2}{e^{2n\alpha|r_2-r_1|}} \left( \int_{r_1}^{r_2} \left[ \int_{r_1}^{r_2} |h_n|(r+s-2r_1) e^{n\alpha[2r_2-r-s]} ds \right]^2 dr \right)^{1/2}$$

y

$$\frac{n\alpha}{e^{2n\alpha|r_2-r_1|}} \left( \int_{r_1}^{r_2} \left[ \int_{r_1}^{r_2} |h_n| e^{n\alpha[2r_2-r-s]} ds \right]^2 dr \right)^{1/2}.$$

Esto se logra mediante la desigualdad de Schwarz e integrando por partes en la primera integral:

$$\begin{aligned} & \left( \int_{r_1}^{r_2} \left[ \int_{r_1}^{r_2} |h_n|(r+s-2r_1) e^{n\alpha[2r_2-r-s]} ds \right]^2 dr \right)^{1/2} \\ & \leq \int_{r_1}^{r_2} \int_{r_1}^{r_2} (r+s-2r_1)^2 e^{2n\alpha[2r_2-r-s]} dr ds \int_{r_1}^{r_2} h_n^2 dr \\ & = \int_{r_1}^{r_2} \left[ (r+r_1-2r_1)^2 \frac{e^{2n\alpha|r_2-r|}}{n\alpha} + \frac{(r-r_1)^2}{n\alpha} e^{2n\alpha[2r_2-r-r_1]} + (r+r_2-2r_1) \frac{e^{2n\alpha|r_2-r|}}{(n\alpha)^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(r-r_1)}{(n\alpha)^2} e^{2n\alpha[2r_2-r-r_1]} + \frac{e^{2n\alpha|r_2-r|}}{(n\alpha)^3} + \frac{e^{2n\alpha[2r_2-r-r_1]}}{(n\alpha)^3} \right] dr |h_n|^2 \\ & \leq k \left( \frac{e^{2n\alpha|r_2-r_1|}}{(n\alpha)^2} + \frac{e^{4n\alpha|r_2-r_1|}}{(n\alpha)^4} \right) |h_n|^2 \leq \bar{k} \frac{e^{4n\alpha|r_2-r_1|}}{(n\alpha)^4} |h_n|^2. \end{aligned}$$

En la segunda integral se tiene lo siguiente:

$$\int_{r_1}^{r_2} \int_{r_1}^{r_2} e^{2n\alpha[2r_2-r-s]} ds \leq \frac{k}{(n\alpha)^2} (1 + e^{2n\alpha|r_2-r_1|} + e^{4n\alpha|r_2-r_1|}) \leq \frac{\bar{k}}{(n\alpha)^2} e^{4n\alpha|r_2-r_1|}.$$

Al considerar las derivadas de

$$\int_{r_1}^{r_2} h_n(2r_2-s-r) \cosh(n\alpha[r+s-2r_1]) ds,$$

se encuentra que los cálculos son parecidos a los anteriores intercambiando  $r_1$  por  $r_2$ . Debido a esto los términos que involucran derivadas hasta de cuarto orden de  $k(r)$  están acotadas por  $k \|h_n\|_{L^2(\Omega_\alpha)}$ .

Del mismo modo se encuentra que los términos de  $k_0(r)$  están acotados en sus derivadas hasta cuarto orden por la misma cota ( $k\|h_n\|_{L^2(\Omega_\alpha)}$ ).

En los términos restantes, al derivar el límite de integración, puede verse que aparecen factores no integrados solo cuando se toma hasta la cuarta derivada respecto a  $r$ , (aparece  $h_n(r)$  que está en  $L^2(\Omega_\alpha)$ ). Entonces, hay que estimar las integrales:

$$\begin{aligned}
& \frac{(n\alpha)^4}{(n\alpha)^3 K} \left[ \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_r^{r_2} h_n \sinh(n\alpha[2\{r_2 - r_1\} + r - s]) ds \right)^2 dr \right]^{1/2} \\
& \leq \frac{k(n\alpha)}{e^{2n\alpha|r_2 - r_1|}} e^{2n\alpha|r_2 - r_1|} \left[ \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_r^{r_2} h_n e^{n\alpha|r-s|} ds \right)^2 dr \right]^{1/2} \\
& \leq kn\alpha \left[ \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_r^{r_2} h_n^2(s) e^{n\alpha|r-s|} ds \int_r^{r_2} e^{n\alpha|r-s|} ds \right) dr \right]^{1/2} \\
& \leq k(n\alpha)^{1/2} \left( \int_{r_1}^{r_2} \int_r^{r_2} h_n^2(s) e^{n\alpha|r-s|} ds dr \right)^{1/2} \\
& \leq k(n\alpha)^{1/2} \left( \int_{r_1}^{r_2} h_n^2(s) \left[ \int_{r_1}^s e^{n\alpha|r-s|} dr \right] ds \right)^{1/2} \leq k\|h_n\|_{L^2(\Omega_\alpha)}.
\end{aligned}$$

De la misma manera, el término

$$\int_{r_1}^r h_n(s) \sinh(n\alpha[2\{r_2 - r_1\} - r + s]) ds$$

puede acotarse mediante

$$\begin{aligned}
& \leq kn\alpha \left[ \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_{r_1}^r h_n(s) e^{n\alpha|s-r|} ds \right)^2 dr \right]^{1/2} \\
& \leq kn\alpha \left[ \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_{r_1}^r h_n^2(s) e^{n\alpha|s-r|} ds \int_{r_1}^r e^{n\alpha|s-r|} ds \right) dr \right]^{1/2} \\
& \leq k(n\alpha)^{1/2} \left[ \int_{r_1}^{r_2} h_n^2(s) \left( \int_s^{r_2} e^{n\alpha|s-r|} dr \right) ds \right]^{1/2} \leq k\|h_n\|_{L^2(\Omega_\alpha)}.
\end{aligned}$$

Análogamente, para el término

$$\int_r^{r_2} h_n(n\alpha|s-r|) \cosh(n\alpha[2\{r_2 - r_1\} + r - s]) ds$$

se tienen estimaciones como las de arriba y también de la forma

$$\begin{aligned}
& \frac{(n\alpha)^5}{(n\alpha)^3 K} \left[ \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_r^{r_2} h_n(s-r) e^{n\alpha[2\{r_2 - r_1\} + r - s]} ds \right)^2 dr \right]^{1/2} \\
& \leq k(n\alpha)^2 \left[ \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_r^{r_2} h_n^2(s) e^{n\alpha|r-s|} ds \int_r^{r_2} (s-r)^2 e^{n\alpha|r-s|} ds \right) dr \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\leq k(n\alpha)^{1/2} \left( \int_{r_1}^{r_2} \int_r^{r_2} h_n^2(s) e^{n\alpha|r-s|} ds dr \right)^{1/2} \leq k \|h_n\|_{L^2(\Omega_\alpha)}.$$

Finalmente, el término

$$\int_{r_1}^r h_n(s) n\alpha(r-s) \cosh(n\alpha[2\{r_2 - r_1\} - r + s]) ds$$

tiene una cota de la misma forma.

Con todas las estimaciones se prueba lo siguiente:  $\forall h \in L^2(\Omega_\alpha) \exists \phi$ , solución única al problema  $\Delta^2 \phi = h$ ,  $\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$  en  $r_1, r_2$ ,  $\phi$  periódica en  $z$ , y  $\|\phi\|_{H^4(\Omega_\alpha)} \leq k \|h\|_{L^2(\Omega_\alpha)}$ .

Hasta ahora no se ha probado la unicidad, pero se obtiene a partir de la formulación débil y de una integración por partes:

$$(\Delta \phi, \Delta \psi) = (h, \psi) \implies \iint_{\Omega_\alpha} (\Delta \phi)(\Delta \psi) dr dz = \iint_{\Omega_\alpha} h \psi dr dz,$$

para todo  $\psi$  que pertenece a  $\overline{H}^2(\Omega_\alpha)$ . Entonces, si hay dos soluciones  $\phi_1, \phi_2$ , la diferencia cumple con  $\Delta(\phi_1 - \phi_2) = 0$ ,  $(\phi_1 - \phi_2)|_{r_1} = (\phi_1 - \phi_2)|_{r_2} = 0$ , y por la unicidad de las soluciones del operador  $\Delta$  se concluye que  $\phi_1 = \phi_2$ .

Por último, para demostrar  $\|\phi\|_{H^4(\Omega_\alpha)} \leq c \|g\|_{L^2(\Omega_\alpha)}$  recuérdese que de la misma formulación débil:

$$\iint_{\Omega_\alpha} \mathfrak{S} \phi \mathfrak{S} \psi r dr dz = \iint_{\Omega_\alpha} g \psi r dr dz, \quad \forall \psi \in \overline{H}^2(\Omega_\alpha)$$

tiene solución única,  $\phi$ , en  $\overline{H}^2(\Omega_\alpha)$ , con  $\|\phi\|_{H^2(\Omega_\alpha)} \leq c \|g\|_{L^2(\Omega_\alpha)}$ .

A partir de la definición de  $\mathfrak{S}$  se ve claro que

$$\begin{aligned} r^{1/2} \mathfrak{S} \phi &= r^{1/2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + r^{1/2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{r^{1/2}}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{r^{1/2}}{r^2} \phi \\ &= \frac{\partial^2 r^{1/2} \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial r^{1/2} \phi}{\partial z^2} - \frac{3}{4r^2} r^{1/2} \phi \\ \implies \iint_{\Omega_\alpha} \mathfrak{S} \phi \mathfrak{S} \psi r dr dz &= \iint_{\Omega_\alpha} \left( \Delta(r^{1/2} \phi) \Delta(r^{1/2} \psi) \right. \\ &\quad \left. - \Delta(r^{1/2} \phi) \frac{3}{4} \frac{r^{1/2} \psi}{r^2} - \frac{3}{4r^{3/2}} \phi (\Delta[(r^{1/2} \psi) - \frac{3}{4r^2} r^{1/2} \psi]) \right) dr dz \\ &= \iint_{\Omega_\alpha} \Delta(r^{1/2} \phi) \Delta(r^{1/2} \psi) dr dz \\ &\quad - \iint_{\Omega_\alpha} \left( \Delta \left[ \frac{3}{4} \frac{r^{1/2}}{r^2} \phi \right] + \frac{3}{4r^2} \Delta(r^{1/2} \phi) - \frac{9}{16r^4} r^{1/2} \phi \right) r^{1/2} \psi dr dz. \end{aligned}$$

La fórmula se reduce integrando por partes y haciendo uso de las condiciones de frontera y periodicidad:

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Omega_\alpha} \Delta(r^{1/2}\phi) \Delta(r^{1/2}\psi) \, dr dz \\ &= \int \int_{\Omega_\alpha} \left( r^{1/2}g + \frac{3}{4r^2} \Delta(r^{1/2}\phi) + \Delta\left[\frac{3}{4} \frac{r^{1/2}\phi}{r^2}\right] - \frac{9r^{1/2}}{16r^4} \phi \right) r^{1/2}\psi \, dr dz \end{aligned}$$

$\forall \psi \in \overline{H}^2(\Omega_\alpha)$ .

Es claro que  $\psi \in H^2(\Omega_\alpha) \iff r^{1/2}\psi \in H^2(\Omega_\alpha)$ , y también es claro por las condiciones de frontera que  $\psi = 0$  y  $\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \iff r^{1/2}\psi = 0$  y  $\frac{\partial r^{1/2}\psi}{\partial r} = 0$ , respectivamente. Por lo tanto puede escribirse que  $\overline{\psi}(r, z) = r^{1/2}\psi(r, z)$ , y considerarse ahora el siguiente problema:

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Omega_\alpha} \Delta(r^{1/2}\phi) \Delta(\overline{\psi}) \, dr dz \\ &= \int \int_{\Omega_\alpha} \left[ r^{1/2}g + \Delta\left(\frac{3}{4} \frac{\phi}{r^{3/2}}\right) + \frac{3}{4r^2} \Delta(r^{1/2}\phi) - \frac{9}{16r^{7/2}} \phi \right] \overline{\psi} \, dr dz. \end{aligned}$$

La única solución a

$$\Delta^2 X = r^{1/2}g + \Delta\left(\frac{3}{4} \frac{\phi}{r^{3/2}}\right) + \frac{3}{4r^2} \Delta(r^{1/2}\phi) - \frac{9}{16} \frac{\phi}{r^{7/2}} = h,$$

con  $X = \frac{\partial X}{\partial r} = 0$  en  $r_1, r_2$  y periódica en  $z$  está en  $H^4(\Omega_\alpha)$ , ya que el lado derecho está en  $L^2(\Omega_\alpha)$  ( $\phi \in H^2(\Omega_\alpha)$ ), con  $\|X\|_{H^4(\Omega_\alpha)} \leq c\|h\|_{L^2(\Omega_\alpha)}$ . Esto implica que  $r^{1/2}\phi$  es la única solución, por lo tanto  $\phi \in H^4(\Omega_\alpha)$  y se tienen las desigualdades  $\|r^{1/2}\phi\|_{H^4(\Omega_\alpha)} \leq c\left(\|r^{1/2}g\|_{L^2(\Omega_\alpha)} + \left\| \Delta\left[\frac{3}{4} \frac{\phi}{r^{3/2}}\right] \right\|_{L^2(\Omega_\alpha)} + \left\| \frac{3}{4r^2} \Delta(r^{1/2}\phi) \right\|_{L^2(\Omega_\alpha)} + \left\| \frac{9}{16} \frac{\phi}{r^{7/2}} \right\|_{L^2(\Omega_\alpha)}\right) \leq \bar{c}(\|g\|_{L^2(\Omega_\alpha)} + \|\phi\|_{H^2(\Omega_\alpha)})$ .

También, estimando cada derivada puede verse que  $c_1\|\phi\|_{H^4(\Omega_\alpha)} \leq \|r^{1/2}\phi\|_{H^4(\Omega_\alpha)} \leq c_2\|\phi\|_{H^4(\Omega_\alpha)}$ , y por lo tanto  $\|\phi\|_{H^4(\Omega_\alpha)} \leq c(\|g\|_{L^2(\Omega_\alpha)} + \|\phi\|_{H^2(\Omega_\alpha)})$ .

Finalmente, al invocar de nuevo la formulación débil:  $\|\phi\|_{H^2(\Omega_\alpha)} \leq \bar{c}\|g\|_{L^2(\Omega_\alpha)} \implies \|\phi\|_{H^4(\Omega_\alpha)} \leq c\|g\|_{L^2(\Omega_\alpha)}$ .

Con esto se termina la prueba del lema 3.b. El siguiente es un resultado de regularidad:

### COROLARIO 1

1) Sea  $u$  solución de  $\mathfrak{S}u = g$ , con  $u \in H^2(\Omega_\alpha)$ ,  $u(r_i) = 0$ . Si  $g \in H^k(\Omega_\alpha)$  entonces  $u \in H^{k+2}(\Omega_\alpha)$  y  $\|u\|_{H^{k+2}(\Omega_\alpha)} \leq c\|g\|_{H^k(\Omega_\alpha)}$ .

2) Sea  $\phi$  la solución a  $\mathfrak{S}^2\phi = g$ , con  $\phi \in H^4(\Omega_\alpha)$ ,  $\phi(r_i) = \frac{\partial \phi(r_i)}{\partial r} = 0$ . Si  $g \in H^k(\Omega_\alpha)$  entonces  $\phi \in H^{k+4}(\Omega_\alpha)$  y  $\|\phi\|_{H^{k+4}(\Omega_\alpha)} \leq c\|g\|_{H^k(\Omega_\alpha)}$ .

PRUEBA Si  $g \in H^1(\Omega_\alpha)$  entonces  $g(r, z) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_n(r)e^{in\alpha z}$ , con  $\sum_{-\infty}^{\infty} \int_{r_1}^{r_2} g_n^2(r) \, dr < \infty$  (correspondiendo a  $\frac{\partial g}{\partial r}$ ) y  $\sum_0^{\infty} \int_{r_1}^{r_2} g_n^2(r)(n\alpha)^2 dr < \infty$  (correspondiendo a  $\frac{\partial g}{\partial z}$ ). Al



estimar una derivada más en  $z$ , el término en  $n\alpha$  permite la convergencia de las series (esto también puede verse encontrando la única solución a  $\Im \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z}$  o  $\Im^2 \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z}$  con las mismas condiciones de frontera). Para las derivadas en  $r$ , se puede integrar por partes cada uno de los términos de la expresión para la solución. Esto aportará un factor  $n\alpha$  en el denominador con  $g'_n$  en el numerador, y una estimación del mismo tipo que en los lemas 3.a y 3.b. Además se tendrá un término de frontera en función de  $g_n(r_i)$  (acotado en términos de  $\int_{r_1}^{r_2} (g_n^2(r) + g_n'^2(r)) dr$  por el teorema de traza) y una función hiperbólica cuyo cuadrado se integra para obtener la convergencia. Debido a que los detalles son tediosos no se dará una descripción más completa.

Por otra parte, si  $\phi \in H^4(\Omega_\alpha) \implies \phi \in C^2(\overline{\Omega_\alpha})$ , con  $\|\phi\|_{C^2(\Omega_\alpha)} \leq c\|\phi\|_{H^4(\Omega_\alpha)}$  ya que las segundas derivadas son continuas, se recuerda que el problema a resolver viene dado por las fórmulas (4.2a) y (4.2b). Para  $\phi \in H^4(\Omega_\alpha) \cap \overline{H}^2(\Omega_\alpha)$ ,  $u \in H^2(\Omega_\alpha) \cap \overline{H}^1(\Omega_\alpha)$  se buscarán cotas para los lados derechos de estas ecuaciones. Es decir, las soluciones se buscan en el espacio

$$E \equiv H^2(\Omega_\alpha) \cap \overline{H}^1(\Omega_\alpha) \times H^4(\Omega_\alpha) \cap \overline{H}^2(\Omega_\alpha). \quad (4.18)$$

Procediendo término a término:

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega_\alpha} u^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dr dz &\leq \left( \int \int_{\Omega_\alpha} u^4 dr dz \right)^{1/2} \left( \int \int_{\Omega_\alpha} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]^4 dr dz \right)^{1/2} \\ &\leq c \left| \nabla u \right|^2 \left| \nabla \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \leq c \|u\|_{H^2(\Omega_\alpha)}^4, \end{aligned}$$

(en la penúltima desigualdad se ha usado el lema 1). También la siguiente desigualdad es válida:

$$\int \int_{\Omega_\alpha} u^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \leq \|u\|_{C^0(\Omega_\alpha)}^2 \|u\|_{H^1(\Omega_\alpha)}^2.$$

Del mismo modo:

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial r} \right)^2 (\Im \phi)^2 dr dz &\leq c \left| \nabla \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial r} \right|^2 \left| \nabla \Im \phi \right|^2 \leq c \|\phi\|_{H^3(\Omega_\alpha)}^4, \\ \int \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \left( \frac{\partial \Im \phi}{\partial z} \right)^2 dr dz &\leq c \left\| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\|_{C^0(\Omega_\alpha)}^2 \left\| \frac{\partial \Im \phi}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega_\alpha)}^2 \leq c \|\phi\|_{H^3(\Omega_\alpha)}^4, \\ \int \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{\partial^2 r \phi}{\partial r \partial z} \right)^2 (\Im \phi)^2 dr dz, \quad \int \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{\partial r \phi}{\partial r} \right)^2 \left( \frac{\partial \Im \phi}{\partial z} \right)^2 dr dz &\leq c \|\phi\|_{H^3(\Omega_\alpha)}^4, \\ \int \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \left( \frac{\partial r u}{\partial r} \right)^2 dr dz &\leq c \left\| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\|_{C^0(\Omega_\alpha)}^2 \|u\|_{H^1(\Omega_\alpha)}^2 \leq c \|\phi\|_{H^3(\Omega_\alpha)}^2 \|u\|_{H^1(\Omega_\alpha)}^2, \end{aligned}$$

$$\int \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{\partial r \phi}{\partial r} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dr dz \leq \left\| \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\|_{C^0(\Omega_\alpha)}^2 \|u\|_{H^1(\Omega_\alpha)}^2 \leq \bar{c} \|\phi\|_{H^3(\Omega_\alpha)} \|u\|_{H^1(\Omega_\alpha)}^2.$$

Entonces el lado derecho de (4.2a) es acotado por

$$c|\lambda|(\|u\|_{H^1(\Omega_\alpha)} + \|u\|_{H^2(\Omega_\alpha)}^2 + \|\phi\|_{H^3(\Omega_\alpha)}^2)$$

o por

$$c|\lambda|(\|u\|_{H^1(\Omega_\alpha)} + \|u\|_{C^0(\Omega_\alpha)} \|u\|_{H^1(\Omega_\alpha)} + \|\phi\|_{H^3(\Omega_\alpha)}^2),$$

y el lado derecho de (4.2b) es acotado por

$$c|\lambda|(\|\phi\|_{H^1(\Omega_\alpha)} + \|\phi\|_{H^3(\Omega_\alpha)} \|u\|_{H^1(\Omega_\alpha)}).$$

Como  $\mathfrak{S}$  y  $\mathfrak{S}^2$  son invertibles en sus espacios respectivos, se resolverá

$$\phi = \lambda(\mathfrak{S}^2)^{-1} T_2(u, \phi) = \lambda \bar{T}_2(u, \phi)$$

y

$$u = \lambda \mathfrak{S}^{-1} T_1(u, \phi) = \lambda \bar{T}_1(u, \phi),$$

o sea  $(u, \phi) = \lambda T(u, \phi)$ , por las definiciones de  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T$ .

#### LEMA 4

$$\bar{T}_2(u, \phi) : E = H^2(\Omega_\alpha) \cap \bar{H}^1(\Omega_\alpha) \times H^4(\Omega_\alpha) \cap \bar{H}^2(\Omega_\alpha) \longrightarrow H^4(\Omega_\alpha)$$

$$\bar{T}_1(u, \phi) : E = H^2(\Omega_\alpha) \cap \bar{H}^1(\Omega_\alpha) \times H^4(\Omega_\alpha) \cap \bar{H}^2(\Omega_\alpha) \longrightarrow H^2(\Omega_\alpha)$$

son operadores continuos y compactos.

PRUEBA Usando las mismas desigualdades de antes se encuentra que

$$\begin{aligned} & \|T_2(u_1, \phi_1) - T_2(u_2, \phi_2)\|_{L^2(\Omega_\alpha)} \leq c(\|u_1 - u_2\|_{H^1(\Omega_\alpha)} \\ & \quad + [\|u_1\|_{C^0(\Omega_\alpha)} + \|u_2\|_{C^0(\Omega_\alpha)}] \|u_1 - u_2\|_{H^1(\Omega_\alpha)} \\ & \quad + \{\|u_1\|_{H^1(\Omega_\alpha)} + \|u_2\|_{H^1(\Omega_\alpha)}\} \{\|u_1 - u_2\|_{C^0(\Omega_\alpha)}\} \\ & \quad + [\|\phi_1\|_{H^3(\Omega_\alpha)} + \|\phi_2\|_{H^3(\Omega_\alpha)}] \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^3(\Omega_\alpha)}), \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} & \|T_1(u_1, \phi_1) - T_1(u_2, \phi_2)\|_{L^2(\Omega_\alpha)} \\ & \leq c(\|\phi_1 - \phi_2\|_{H^1(\Omega_\alpha)} + [\|u_1\|_{H^1(\Omega_\alpha)} + \|u_2\|_{H^1(\Omega_\alpha)}] \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^3(\Omega_\alpha)} \\ & \quad + [\|\phi_1\|_{H^3(\Omega_\alpha)} + \|\phi_2\|_{H^3(\Omega_\alpha)}] \|u_1 - u_2\|_{H^1(\Omega_\alpha)}). \end{aligned}$$

Como  $\mathfrak{S}^{-1}$  y  $\mathfrak{S}^{-2}$  son operadores continuos,  $\overline{T}_1$  y  $\overline{T}_2$  también lo son (la composición de operadores continuos es continua).

Además, si  $\|\phi_n\|_{H^4(\Omega_\alpha)} \leq M$ ,  $\|u_n\|_{H^2(\Omega_\alpha)} \leq M$ , de los teoremas de compacidad de Rellich (cf. [1], p. 30),  $H^4 \subset H^3$ ,  $H^2 \subset H^1$ ,  $H^2 \subset C^0$  son compactos y por lo tanto debe existir una subsucesión  $\{\phi_n\}$  convergente en  $H^3(\Omega_\alpha)$ ,  $\{u_n\}$  convergente en  $H^1(\Omega_\alpha)$  y en  $C^0(\Omega_\alpha)$ .

De las desigualdades para  $T_1$  y  $T_2$  se tiene que  $T_1(u_n, \phi_n)$  y  $T_2(u_n, \phi_n)$  son sucesiones de Cauchy en  $L^2(\Omega_\alpha)$  y por lo tanto también lo son  $\overline{T}_2(u_n, \phi_n)$ ,  $\overline{T}_1(u_n, \phi_n)$  en  $H^4(\Omega_\alpha)$ ,  $H^2(\Omega_\alpha)$  respectivamente. Con esto se demuestra la compacidad.

COROLARIO 2 Las soluciones en  $E$  al problema de Couette-Taylor son  $C^\infty$ .

PRUEBA Sea  $(u, \phi)$  una solución en  $E$  a las ecuaciones (4.2). Por las estimaciones anteriores se tiene que  $\mathfrak{S}u = g_1$ ,  $\mathfrak{S}^2\phi = g_2$ , con  $g_i \in H^1(\Omega_\alpha)$ , ya que se pueden derivar los lados derechos de (4.2) y obtener una cota en términos de  $\|\nabla u\|_{H^1(\Omega_\alpha)}$ ,  $\|\nabla \phi\|_{H^2(\Omega_\alpha)}$  y las derivadas del término  $u \frac{\partial u}{\partial z}$  en (4.2a); dado que  $u$  es continua, se puede ver que los términos de la forma  $u \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r}$ ,  $u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  están en  $L^2(\Omega_\alpha)$  y el término

$$I = \int \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dr dz$$

está acotado por  $c\|u\|_{H^2(\Omega_\alpha)}^4$  ya que

$$\begin{aligned} I &\leq \left( \int \int_{\Omega_\alpha} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]^4 dr dz \right)^{1/2} \left( \int \int_{\Omega_\alpha} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]^4 dr dz \right)^{1/2} \\ &\leq c \left| \nabla \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 \left| \nabla \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \leq c \|u\|_{H^2(\Omega_\alpha)}^4. \end{aligned}$$

Por el corolario 1,  $u \in H^3(\Omega_\alpha)$ ,  $\phi \in H^5(\Omega_\alpha)$  y por lo tanto  $g_i \in H^2(\Omega_\alpha)$ . Si se emplea el mismo razonamiento otras veces se encuentra que  $(u, \phi) \in H^m(\Omega_\alpha) \forall m$ , y por el teorema de encaje ya probado,  $u$  y  $\phi$  son funciones  $C^\infty$ .

LEMA 5 Sea

$$B(u, \phi) = \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}^{-1} \left( 2a \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ \mathfrak{S}^{-2} \left( -\frac{2}{r} V \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{array} \right\}$$

definido sobre el espacio  $E$  (ec. 4.13).  $B$  es un operador lineal compacto y es la derivada de Frechet de  $T$ .

PRUEBA La compacidad sigue del hecho que

$$\left\| \mathfrak{S}^{-1} \left( 2a \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\|_{H^2(\Omega_a)} \leq c \left\| 2a \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega_a)} \leq \bar{c} \|\phi\|_{H^1(\Omega_a)}$$

$$\left\| \mathfrak{S}^{-2} \left( -\frac{2}{r} V \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\|_{H^4(\Omega_a)} \leq c \left\| -\frac{2}{r} V \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega_a)} \leq \bar{c} \|u\|_{H^1(\Omega_a)}$$

y del mismo argumento de compacidad de encajes de Sobolev.

Además

$$\begin{aligned} & \|T(u, \phi) - B(u, \phi)\|^2 \\ &= \left\| \mathfrak{S}^{-1} \left( T_1(u, \phi) - 2a \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\|_{H^2(\Omega_a)}^2 + \left\| \mathfrak{S}^{-2} \left( T_2(u, \phi) + \frac{2}{r} V \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\|_{H^4(\Omega_a)}^2 \\ &\leq c(\|u\|_{C^0(\Omega_a)} \|u\|_{H^1(\Omega_a)} + \|\phi\|_{H^3(\Omega_a)}^2) + c(\|\phi\|_{H^3(\Omega_a)} \|u\|_{H^1(\Omega_a)}) \\ &\leq c(\|u\|_{H^2(\Omega_a)}^2 + \|\phi\|_{H^3(\Omega_a)}^2) \leq c(\|u\|_{H^2(\Omega_a)}^2 + \|\phi\|_{H^4(\Omega_a)}^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $B(u, \phi)$  es la linealización de  $T(u, \phi)$ .

Es conveniente recalcar que el problema que se quiere resolver también se expresa como

$$\begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix} = \lambda B \begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix} + \lambda \left( T \begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix} - B \begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix} \right) = \lambda T \begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix}, \quad (4.19a)$$

que, componente a componente es

$$u = \lambda \mathfrak{S}^{-1} \left( 2a \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \lambda \left( T_1(u, \phi) - \mathfrak{S}^{-1} \left( 2a \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right) \quad (4.19b)$$

$$\phi = \lambda \mathfrak{S}^{-2} \left( -\frac{2}{r} V \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \lambda \left( T_2(u, \phi) + \mathfrak{S}^{-2} \left( \frac{1}{r} V \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right). \quad (4.19c)$$

La ecuación linealizada es:

$$\begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix} = \lambda B \begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix}, \quad (4.20a)$$

cuyas componentes son:

$$u = \lambda \mathfrak{S}^{-1} \left( 2a \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (4.20b)$$

$$\phi = \lambda \mathfrak{S}^{-2} \left( -\frac{2}{r} V \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (4.20c)$$

Las soluciones que se buscan están en  $E$ .

LEMA 6 Sea  $W(r, z) = (u(r, z), \psi(r, z))$  una solución de (4.19). Al definir  $G(W) = T(u, \psi) - B(u, \psi)$  el problema es  $W = \lambda BW + \lambda G(W)$ . Se supondrá que funciones  $u, \psi$  son par e impar en  $z$  (en el capítulo siguiente se verá la razón de esto). Se define también  $\bar{W}(r, z) = W(r, z + \pi/\alpha)$  y se afirma que también es una solución con el mismo valor propio  $\lambda$  y las mismas paridades de las funciones.

PRUEBA Las soluciones de la ecuación integral (4.19) son las mismas que las de la ecuación diferencial (4.2) —y además  $C^\infty$ , con  $u$  y  $\psi$  periódicas en  $z$  y  $u|_{r_i} = \psi|_{r_i} = \frac{\partial \psi}{\partial r}|_{r_i} = 0$ . Las ecuaciones no dependen explícitamente de  $z$ ,  $(u(r, z + \tau), \psi(r, z + \tau))$  son también soluciones con las mismas condiciones de frontera y de periodicidad. Esto implica que los valores propios de la ecuación linealizada (4.20) son de multiplicidad par. En efecto, si  $W(r, z)$  es un vector propio, lo mismo sucede con  $W(r, z + \tau)$ .

Normalizando a  $W$  con la unidad usando cualquier producto escalar se tiene que  $\|W(r, z + \tau)\|^2 = 1$  y por lo tanto  $(\frac{\partial W}{\partial r}(r, z), W(r, z)) = 0$ , i. e.,  $\frac{\partial W}{\partial r}(r, z)$  es ortogonal a  $W(r, z)$ ; además es solución de  $W = \lambda BW$  (diferenciando con respecto a  $r$ ) y no se anula ya que si para toda  $\tau$ ,  $\frac{\partial W}{\partial r}(r, z + \tau) = 0$ ,  $W(r, z + \tau)$  sería constante en  $r$  por lo que  $W$  no dependería de  $z$  y las ecuaciones  $\Im u, \Im^2 \psi$  se anularían, con lo que  $u = \psi = 0$ : se tienen dos vectores propios linealmente dependientes y la multiplicidad es par.

Si  $\tau = \pi/\alpha$ , por las condiciones de paridad y periodicidad  $u(r, z + \pi/\alpha) = u(r, -z - \pi/\alpha) = u(r, -z + \pi/\alpha)$ , y  $u(r, z + \pi/\alpha)$  es par. Análogamente  $\psi(r, -z + \pi/\alpha) = \psi(r, -z - \pi/\alpha) = -\psi(r, z + \pi/\alpha)$  y  $\psi(r, z + \pi/\alpha)$  es impar. Con esto se demuestra el lema.

El capítulo concluirá con dos teoremas que no tienen relación con los resultados que se han presentado hasta el momento. Se incluyen por la importancia que tienen en el estudio del problema de Couette-Taylor y porque más adelante serán invocados. El primer teorema trata sobre algunas de las propiedades de ecuaciones diferenciales y el segundo (que no se demuestra) no es otra cosa sino la bien conocida función de Green.

TEOREMA 1 Sea  $u$  solución de

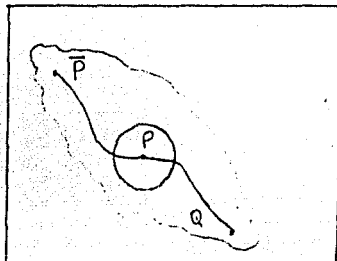
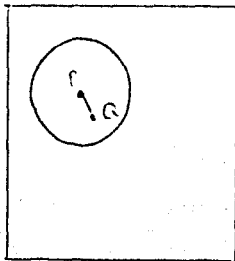
$$Lu \equiv \Delta u + a(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} + b(r, z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

en  $\Omega$ , con  $a$  y  $b$  continuos. Entonces:

- 1) Si  $u$  tiene un máximo o un mínimo local en  $\Omega$  entonces  $u$  es constante.
- 2) Si  $u$  tiene un máximo global en  $P$  (y por lo tanto  $P$  está en  $\partial\Omega$ ; de otro modo  $u$  es constante), entonces  $\frac{\partial u}{\partial n}|_P > 0$ , donde  $n$  denota la normal exterior, ó  $P$  es una esquina de  $\Omega$ . Si se trata de un mínimo global de  $u$  en  $Q$  entonces  $\frac{\partial u}{\partial n}|_Q < 0$  y  $Q$  está en  $\partial\Omega$ , o  $Q$  es una esquina de  $\Omega$ .

PRUEBA. (Ver [27], pps. 61-66).

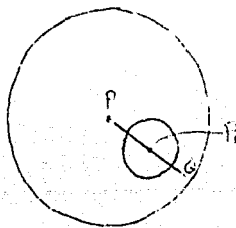
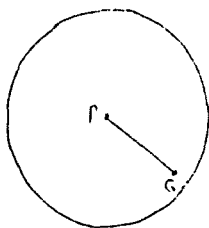
1) Sea  $\bar{P} \in \Omega \mid u(\bar{P}) = M$  y  $u(R) \leq M$  en una vecindad de  $\bar{P}$ . Si  $u \neq M$  existen  $P$  y  $Q$  tales que  $u(P) = M$  y  $u(R) < M$  en un disco de centro en  $P$ , llamado  $\Omega'$  y contenido en  $\Omega$  y  $u(Q) < M$ , con  $Q \in \Omega'$ .



En efecto, si  $u \neq M$ , hay una vecindad de  $\bar{P} \mid u(R) \leq M$  en ella y hay un punto  $\bar{Q}$  en ella también, donde  $u(\bar{Q}) < M$ . Tómese un camino de  $\bar{P}$  a  $\bar{Q}$  contenido en la vecindad. Sea  $P$  el primer punto sobre este camino con  $u(P) = M$ , entonces  $u(R) < M$  entre  $\bar{Q}$  y  $P$ . Se puede construir  $\Omega'$  tomando a  $Q$  sobre el camino entre  $\bar{P}$  y  $\bar{Q}$  arbitrariamente cerca de  $P$  y tal que  $\Omega'$  esté contenido en la vecindad original.

Repetiendo este argumento se puede suponer que sobre el segmento  $PQ$ ,  $u(R) < M$ , excepto en  $P$ .

Sea  $\rho_0$  el radio de  $\Omega'$  y  $P_1 = (r_0, z_0)$  un punto entre  $P$  y  $Q$  a una distancia de  $P$  menor que  $\rho_0/2$ . Como  $u(P_1) < M$  y dado que  $u$  es una función continua, existe un disco  $K$  de centro  $P_1$  tal que  $K \subset \Omega'$ ,  $u(R) < M$  en  $K$ , y  $u(S) = M$  en algún punto de  $\partial K$ . En efecto, si se aumentan los radios de los círculos centrados en  $P_1$  llegará un momento en que  $u(S) = M$  en su frontera.



De los varios posibles puntos que hay sobre  $\partial K$  donde  $u = M$  se selecciona uno de ellos y se designa a un disco contenido en  $K$  y tangente al mismo en  $S$  por  $K_1$ . Entonces,  $u(R) < M$  en  $K_1$ , excepto en  $S$ , donde  $u(S) = M$ . Sea  $\rho_1$  el radio de  $K_1$  y  $\rho_1/2$  el radio de un disco  $K_2$  centrado en  $S$ . Como  $u(R) \leq M$  en  $K_2 \subset \Omega'$  y dado que  $\partial K_2 \cap \bar{K}_1$  es cerrado,  $u$  tiene un máximo ahí de la forma  $u(R) \leq M - \eta$ ,  $\eta > 0$ , ya que en esa parte

del círculo  $u < M$ .

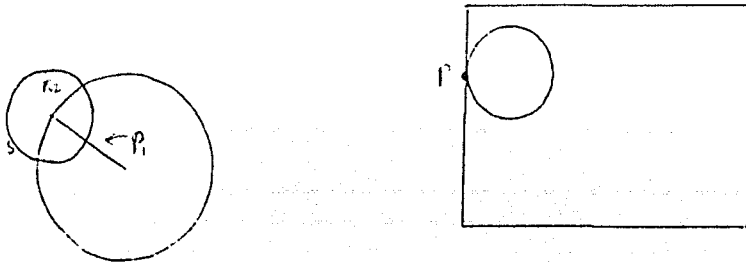
Sea  $W(r, z) = e^{\alpha[(r-r_0)^2 + (z-z_0)^2]} - e^{-\alpha\rho_1^2}$ , con  $\alpha > 0$  (recordar que  $P_1 = (r_0, z_0)$ ). Entonces  $W(r, z) > 0$  en  $K_1$ ,  $W(r, z) = 0$  en  $\partial K_1$  y  $W(r, z) < 0$  fuera de  $K_1$ . Además, de la definición de  $W$  se ve claramente que  $\Delta W + a\frac{\partial W}{\partial r} + b\frac{\partial W}{\partial z} = (4\alpha^2[(r-r_0)^2 + (z-z_0)^2] - 4\alpha - 2\alpha[(r-r_0)a + (z-z_0)b])e^{-\alpha[(r-r_0)^2 + (z-z_0)^2]}$ . Si  $(r, z) \in K_2$  entonces  $\rho_1^2/4 \leq (r-r_0)^2 + (z-z_0)^2 \leq 9\rho_1^2/4$  y se puede escoger  $\alpha$  lo suficientemente grande de tal forma que  $\Delta W > 0$  en  $K_2$  (recordar que  $a$  y  $b$  son acotados).



Considérese ahora la cantidad  $v = u + \epsilon W$  con  $0 < \epsilon < 1/(1 - e^{-\alpha\rho_1^2})$ . En  $\partial K_2 \cap \overline{K_1}$  se tiene que  $v < M$  ( $0 \leq W < 1 - e^{-\alpha\rho_1^2} \implies u + \epsilon W < M - \eta + \eta = M$ ). Sobre el complemento de  $\partial K_2 \cap \overline{K_1}$ ,  $u \leq M$  y  $W < 0$  ( $\implies v < M$ ) por lo que  $v < M$  sobre  $\partial K_2$  y  $v = M$  en  $S$ . Por lo tanto  $v$  tiene un máximo local en algún punto  $R \in K_2$ , donde  $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ ,  $\Delta v \leq 0$  (por ser máximo), y por lo tanto  $Lv(R) \leq 0$ . Pero esto contradice el hecho que  $Lv = \epsilon LW > 0$  en  $K_2$ .

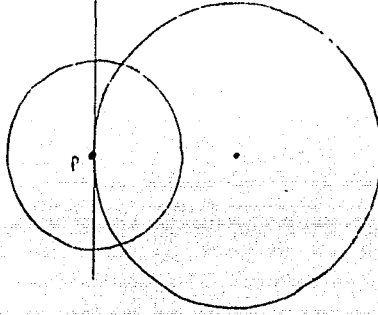
Análogamente, si se trabaja con  $-u$  se concluye que  $u$  no tiene mínimo local, con lo cual se completa la demostración.

2) Sobre  $\overline{\Omega}$   $u$  tiene máximo y mínimo los cuales deben estar en  $\partial\Omega$  ya que de otra manera  $u \equiv \text{constante}$ . Sea  $P \in \partial\Omega \mid u(P) = M$ , pero  $P$  no es una esquina, y  $u(R) \leq M$  en  $\overline{\Omega}$ .



Dado que  $P$  no es una esquina, puede construirse un disco  $K_1 \subset \Omega$  de radio  $\rho_1$ , tangente en  $P$  que cumple con  $u(R) < M$  si  $R \in \overline{K_1}$ , excepto en  $P$ , donde evidentemente

$u = M$ . Se construye ahora el disco  $K_2$  con centro en  $P$  y radio  $\rho_1/2$ . Se definen las cantidades  $W$  y  $v$  como en la parte 1) escogiendo  $\epsilon$  de tal manera que  $v < M$  sobre  $\partial K_2 \cap \overline{K_1}$  (como antes). Como  $W = 0$  en  $\partial K_1$  entonces  $v \leq M$  en  $\partial(K_2 \cap K_1)$ , con desigualdad estricta fuera de  $P$ . Dado que  $Lu > 0$  en esa región, el único máximo de  $v$  está en  $P$ , con  $v(P) = M$ , evidentemente.



Por lo tanto, en  $P$ ,

$$\frac{\partial v}{\partial n} \geq 0,$$

y

$$\frac{\partial W}{\partial n} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial W}{\partial r} = 2\alpha(r_1 - r_0)e^{-\alpha[(r_1 - r_0)^2 + (z - z_0)^2]} < 0 \text{ en } r = r_1 \text{ (} r_0 > r_1 \text{)} \\ \frac{\partial W}{\partial r} = -2\alpha(r_2 - r_0)e^{-\alpha[(r_2 - r_0)^2 + (z - z_0)^2]} < 0 \text{ en } r = r_2 \text{ (} r_0 < r_2 \text{)} \\ \frac{\partial W}{\partial z} = -2\alpha\left(\frac{\pi}{\alpha} - z_0\right)e^{-\alpha[(r - r_0)^2 + (\pi/\alpha - z_0)^2]} < 0 \text{ en } z = \frac{\pi}{\alpha} \text{ (} z_0 < \frac{\pi}{\alpha} \text{)} \\ -\frac{\partial W}{\partial z} = 2\alpha\left(-\frac{\pi}{\alpha} - z_0\right)e^{-\alpha[(r - r_0)^2 + (-\pi/\alpha - z_0)^2]} < 0 \text{ en } z = -\frac{\pi}{\alpha} \text{ (} z_0 > -\frac{\pi}{\alpha} \text{)} \end{array} \right\},$$

de donde

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} - \epsilon \frac{\partial W}{\partial n} > 0.$$

Análogamente, para un mínimo  $-u$  tiene un máximo y

$$\frac{\partial(-u)}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial n} > 0.$$

Con esto se concluye la demostración.

**TEOREMA 2** Sea

$$Lu(r) = P_0(r)u^{(n)}(r) + P_1(r)u^{(n-1)}(r) + \dots + P_n(r)u(r)$$

con  $r \in [r_1, r_2]$ ,  $P_0(r) \neq 0$  y condiciones de frontera

$$U_j u = \sum_{k=1}^n M_{jk} u^{(k-1)}(r_1) + N_{jk} u^{(k-1)}(r_2) = 0$$



para  $j = 1, \dots, n$ . Entonces, si la única solución al problema  $Lu = 0$ ,  $U_j u = 0$  es  $u \equiv 0$ , existe una única función  $G(r, \rho)$  (conocida como función de Green) definida en  $[r_1, r_2] \times [r_1, r_2]$  tal que:

1)  $G$  es  $C^{n-2}$  en  $[r_1, r_2] \times [r_1, r_2]$ ,  $G$  es  $C^{n-1}$  para  $r_1 \leq r \leq \rho \leq r_2$  y para  $r_1 \leq \rho \leq r \leq r_2$ . Además,

$$\frac{\partial^{n-1} G(\rho + 0, \rho)}{\partial r^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1} G(\rho - 0, \rho)}{\partial r^{n-1}} = \frac{1}{P_0(\rho)}.$$

2)  $LG(r, \rho) = 0 \quad \forall \rho \neq r$ .

3)  $U_j G(r_1, \rho) = U_j G(r_2, \rho) = 0 \quad \forall \rho \in [r_1, r_2]$ .

4) La solución de  $Lu(r) = f(r)$  es

$$u(r) = \int_{r_1}^{r_2} G(r, \rho) f(\rho) \, d\rho.$$

Además, si  $L$  es autoadjunto, entonces  $G(r, \rho) = G(\rho, r)$ .

PRUEBA Ver [5 ], p. 192.

## CAPITULO V

### SOLUCION DEL PROBLEMA

En este capítulo se dan resultados importantes sobre el problema de Couette-Taylor. En dos de ellos se establecen condiciones que implican la inexistencia de soluciones no triviales al problema. Se dan las condiciones necesarias para que a partir del flujo de Couette pueda haber bifurcación. Se establecen propiedades interesantes de las funciones propias (velocidad y presión perturbativas) así como de los valores propios (Números de Reynolds). Por último, se establece que a partir de cierto valor propio hay una rama (única) de soluciones no triviales que bifurca del flujo de Couette.

**TEOREMA 3**  $\exists \bar{\lambda} > 0$  tal que para  $0 \leq \lambda < \bar{\lambda}$  la única solución al problema de Couette-Taylor es  $\phi = u = 0$  (por lo tanto  $u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ ,  $u_2 = u$ ,  $u_3 = -\frac{1}{r} \frac{\partial r \phi}{\partial r}$  son 0 y  $p = \text{constante}$  (que puede tomarse igual a cero)), i. e., la única solución es el flujo de Couette.

**PRUEBA** Si  $(\phi, u)$  es una solución al problema entonces, integrando por partes, haciendo uso de la periodicidad en  $z$  y por las condiciones de frontera en  $r_1$  y  $r_2$  se tiene que

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Omega_a} (\mathfrak{S}^2 \phi) \phi r \, dr dz - \int \int_{\Omega_a} (\mathfrak{S} u) u r \, dr dz \\ = & \int \int_{\Omega_a} \left( |\mathfrak{S} \phi|^2 + |\nabla u|^2 + \frac{u^2}{r^2} \right) r \, dr dz = \lambda \int \int_{\Omega_a} \left( -\frac{\partial(V+u)^2}{\partial z} \phi - \frac{\partial r \phi}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathfrak{S} \phi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial r \phi}{\partial r} \mathfrak{S} \phi \right. \\ & \left. + 2ar \phi \frac{\partial u}{\partial z} + \phi \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial r u}{\partial r} u \right] - r \phi \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} u \right] \right) dr dz. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial r u}{\partial r} u \right) - r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial z} u \right) \\ = & \frac{\partial}{\partial z} \left( r u \frac{\partial u}{\partial r} + u^2 \right) - r \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} u + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial u^2}{\partial z} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega_a} \left( |\mathfrak{S} \phi|^2 + |\nabla u|^2 + \frac{u^2}{r^2} \right) r \, dr dz & = \lambda \int \int_{\Omega_a} \phi \frac{\partial u}{\partial z} (-2V - 2u + 2ar + 2u) \, dr dz \\ & = -\lambda \int \int_{\Omega_a} \frac{2b}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \phi \, dr dz \end{aligned}$$

(con  $V = ar + \frac{b}{r}$ ). El lado derecho está acotado por (ver lema 2):

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda|b|}{r_1} \|\phi\|_{L^2(\Omega_a)} \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega_a)} &\leq \frac{\lambda|b|}{r_1} (\|\phi\|_{L^2(\Omega_a)}^2 + \|u\|_{H^1(\Omega_a)}^2) \\ &\leq c \frac{\lambda|b|}{r_1} \int \int_{\Omega_a} \left( |\mathfrak{S}\phi|^2 + |\nabla u|^2 + \frac{u^2}{r^2} \right) r \, dr dz, \end{aligned}$$

de lo que se concluye que si  $\lambda < r_1/c|b|$ , la única posibilidad de no caer en alguna contradicción es que  $u = \phi = 0$ .

OBSERVACION AL TEOREMA 3 Por un camino diferente —que involucra la participación del adjunto de  $B$ — es posible mejorar la cota  $\bar{\lambda}$  para la cual el problema de Couette–Taylor no tiene más soluciones que la trivial (Flujo de Couette). Para hacerlo, considérese lo siguiente:

$$\frac{B + B^*}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}^{-1} \left( a - \frac{V}{r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \mathfrak{S}^{-2} \left( a - \frac{V}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \end{array} \right\} = A(u, \phi) = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{pmatrix}; \quad (5.1)$$

entonces

$$\begin{aligned} &\int \int_{\Omega_a} (\mathfrak{S}^2 \bar{A}_2(u, \phi) \phi - \mathfrak{S} \bar{A}_1(u, \phi) u) r \, dr dz \\ &= \int \int_{\Omega_a} \left( \left[ a - \frac{V}{r} \right] \frac{\partial u}{\partial z} \phi - \left[ a - \frac{V}{r} \right] \frac{\partial \phi}{\partial z} u \right) r \, dr dz \\ &= \int \int_{\Omega_a} (-2V + 2ar) \phi \frac{\partial u}{\partial z} \, dr dz = - \int \int_{\Omega_a} \frac{2b}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \phi \, dr dz \end{aligned}$$

(en la penúltima igualdad se ha integrado por partes usando la periodicidad de  $u$  y  $\phi$  respecto a  $z$  y el hecho de que  $V$  es independiente de  $z$ ).

El operador  $A$  es compacto (usando las mismas desigualdades que antes) y autoadjunto con respecto al producto escalar

$$\int \int_{\Omega_a} (|\mathfrak{S}^2 \psi| \phi - |\mathfrak{S} v| u) r \, dr dz \equiv ((\psi, v), (\phi, u)) \quad (5.2)$$

ya que

$$\begin{aligned} (A(\psi, v), (\phi, u)) &= \int \int_{\Omega_a} \left( \left[ a - \frac{V}{r} \right] \frac{\partial v}{\partial z} \phi - \left[ a - \frac{V}{r} \right] \frac{\partial \psi}{\partial z} u \right) r \, dr dz \\ &= \int \int_{\Omega_a} \left( a - \frac{V}{r} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial z} \phi + \frac{\partial u}{\partial z} \psi \right) r \, dr dz = ((\psi, v), A(\phi, u)) \end{aligned}$$

( $B^*$  es el autoadjunto de  $B$  con respecto a este producto escalar). Entonces cualquier elemento

$$\begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix}$$

se escribe de la forma

$$\begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix} = \sum_{-\infty}^{\infty} d_n \begin{pmatrix} u_n \\ \phi_n \end{pmatrix},$$

(cf. [28], p. 203), donde

$$A \begin{pmatrix} u_n \\ \phi_n \end{pmatrix} = \lambda_n \begin{pmatrix} u_n \\ \phi_n \end{pmatrix},$$

y  $\lambda_n$  es el valor propio de  $A$ , con  $\lambda_n \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ , y los vectores

$$\begin{pmatrix} u_n \\ \phi_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_m \\ \phi_m \end{pmatrix}$$

son ortogonales (en el producto escalar  $((\cdot, \cdot))$ ), con norma 1, por lo que  $\|(u, \phi)\|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} d_n^2$ , y consecuentemente

$$-\int \int_{\Omega_a} \frac{2b}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \phi \, dr dz = \left( \left( A \begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix} \right) \right) = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_n d_n^2 \leq \max_n (\lambda_n) \|(u, \phi)\|^2.$$

En particular, para la solución  $(u, \phi)$  al problema

$$\|(u, \phi)\|^2 = \lambda \left( \left( A \begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix} \right) \right) \leq \lambda \max_n (\lambda_n) \|(u, \phi)\|^2,$$

y es entonces evidente que si  $\lambda < 1/\max_n \lambda_n$  la única solución es  $(u, \phi) = (0, 0)$  si no se quiere caer en contradicción (Por supuesto que  $\max_n \lambda_n > 0$  ya que, por una parte pueden escogerse funciones  $(u, \phi)$  tales que  $-\int \int_{\Omega_a} \frac{2b}{r} \phi \frac{\partial u}{\partial z} \, dr dz > 0$ , y por otra  $\max_n \lambda_n \leq \|A\|$ ).

### ACOTAS A PRIORI SOBRE LAS SOLUCIONES

Se demostrará que las soluciones al problema de Couette-Taylor son acotadas y para hacerlo se propone el siguiente teorema:

**TEOREMA 4** Si las funciones  $(u, \phi)$  son solución del problema de Couette-Taylor, entonces  $\|u\|_{H^2(\Omega_a)} + \|\phi\|_{H^1(\Omega_a)} \leq C(\lambda)$ , donde  $C(\lambda)$  es una función continua de  $\lambda$  menor o igual que  $c\lambda^2(1 + \lambda)$ .

PRUEBA Dado que  $\mathfrak{S}(V) = 0$ , la ecuación

$$\mathfrak{S}u = \frac{\lambda}{r} \left( 2a \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial ru}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial r \phi}{\partial r} \right)$$

puede escribirse como

$$\mathfrak{S}(u + V) = \frac{\lambda}{r} \left( \frac{\partial r[u + V]}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial r \phi}{\partial r} \frac{\partial [u + V]}{\partial z} \right).$$

Si se define  $U \equiv r(u + V)$ , una forma equivalente de las ecuaciones anteriores es

$$\mathfrak{S}U - \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r^2} - \lambda \left( \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial r \phi}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0,$$

de donde

$$\Delta U - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \lambda \left( \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial r \phi}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0.$$

Si se supone a  $\phi$  conocida, esta es una ecuación lineal, homogénea y de segundo orden para  $U$  en  $\Omega_\alpha$  y por lo tanto cumple con las hipótesis del Teorema 2. Aún más, dado que  $a$  y  $b$  son periódicas en  $z$  (a partir de este momento y hasta completar la prueba será conveniente apegarse a la notación que se empleó al formular y demostrar el Teorema 2), si se considera la función  $U$  sobre el intervalo  $-\pi/\alpha \leq z \leq \pi/\alpha$ , es claro que los máximos y mínimos sobre  $\Omega_\alpha$  no pueden estar en  $z = \pm\pi/\alpha$  ya que de ser así, por la periodicidad, se tendría que  $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$  en esos puntos lo cual contradice el inciso 2 del Teorema 2. Entonces, necesariamente los máximos y mínimos de  $U$  están en  $r = r_i$  (se sobreentiende que  $i = 1, 2$ ).

Por la definición de  $U$  y dado que  $u$  se anula en  $r_i$ , se tiene que —de acuerdo a la notación del Teorema 2:  $\alpha = \min(r_1 V(r_1), r_2 V(r_2)) \leq r(u + V) \leq \max(r_1 V(r_1), r_2 V(r_2)) = \beta$ , con  $V(r_1) = 1$ ,  $V(r_2) = \omega_2$ , (ver la sección *Flujo de Couette* del Capítulo III). Claramente  $r_1 V(r_1) = r_1$  y  $r_2 V(r_2) = \omega r_2$ , por lo cual  $\alpha/r - V \leq u \leq \beta/r - V$ . Por ejemplo, si  $\Omega_2 = 0$  entonces, de acuerdo a lo que se acaba de ver,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = r_1$ , y  $-V \leq u \leq r_1/r - V = -ar - (b - r_1)/r$ . De las cotas  $\alpha$  y  $\beta$  para  $u$ , se concluye que  $|u| \leq c$ , donde  $c$  no depende de  $\lambda$ . También puede verse que  $V \leq |a|r_2 + |b|/r_1$ , y esta cota tampoco depende de  $\lambda$ . Por comodidad se designará por  $c$  a la cota de  $u$  y  $V$ .

Por otra parte, las ecuaciones (3.8a) y (3.8c) pueden escribirse de una manera ligeramente diferente a como aparecen en el capítulo III:

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ r \frac{\partial u_1}{\partial z} \right] \right) - \frac{u_1}{r^2} = \lambda \left( \frac{\partial p}{\partial r} - 2 \frac{V}{r} u_2 - \frac{u_2^2}{r} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right),$$

y

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial u_3}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ r \frac{\partial u_3}{\partial z} \right] \right) = \lambda \left( \frac{\partial p}{\partial z} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial r} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} \right).$$

Multiplicando la primera ecuación por  $ru_1$ , la segunda por  $ru_3$ , sumándolas e integrando sobre  $\Omega_\alpha$ , tomando en cuenta las condiciones de frontera y periodicidad, se tiene que

$$I \equiv - \int \int_{\Omega_\alpha} \left( \left[ \frac{\partial u_1}{\partial r} \right]^2 + \left[ \frac{\partial u_1}{\partial z} \right]^2 + \left[ \frac{\partial u_3}{\partial r} \right]^2 + \left[ \frac{\partial u_3}{\partial z} \right]^2 + \frac{u_1^2}{r^2} \right) r \, dr dz$$

$$= \lambda \int \int_{\Omega_a} \left( -\frac{2V}{r} u_1 u_2 - \frac{1}{r} u_1 u_2^2 + u_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial r} + u_1 u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} + u_1 u_3 \frac{\partial u_3}{\partial r} + u_3^2 \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) r \, dr dz.$$

Para obtener esta fórmula se tomó en cuenta el hecho que la integral

$$\int \int_{\Omega_a} \left( \frac{\partial p}{\partial r} r u_1 + \frac{\partial p}{\partial z} r u_3 \right) \, dr dz$$

se anula debido a que

$$\frac{\partial r u_1}{\partial r} + \frac{\partial r u_3}{\partial z} = 0$$

(y una integración por partes). Las fórmulas (1)-(4) permitirán una simplificación adicional:

$$(1) \quad \int \int_{\Omega_a} \frac{\partial u_3}{\partial z} u_3^2 r \, dr dz = \frac{1}{3} \int_{r_1}^{r_2} u_3^3 \Big|_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} r \, dr = 0$$

(por periodicidad),

$$(2) \quad \int \int_{\Omega_a} u_1 u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} r \, dr dz = \frac{1}{2} \int \int_{\Omega_a} u_3 \frac{\partial u_1^2}{\partial z} r \, dr dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} u_1^2 u_3 \Big|_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} r \, dr - \frac{1}{2} \int \int_{\Omega_a} u_1^2 \frac{\partial u_3}{\partial z} r \, dr dz$$

$$= \frac{1}{2} \int \int_{\Omega_a} u_1^2 \frac{\partial r u_1}{\partial r} \, dr dz = \frac{1}{2} \int \int_{\Omega_a} \left( u_1^3 + r u_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \, dr dz$$

$$= \frac{1}{2} \int \int_{\Omega_a} \left( u_1^3 + \frac{r}{3} \frac{\partial u_1^3}{\partial r} \right) \, dr dz = \frac{1}{2} \int \int_{\Omega_a} \left( u_1^3 - \frac{u_1^3}{3} \right) \, dr dz = \frac{1}{3} \int \int_{\Omega_a} u_1^3 \, dr dz,$$

$$(3) \quad \int \int_{\Omega_a} u_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial r} r \, dr dz = \frac{1}{3} \int \int_{\Omega_a} \frac{\partial u_1^3}{\partial r} r \, dr dz = -\frac{1}{3} \int \int_{\Omega_a} u_1^3 \, dr dz,$$

$$(4) \quad \int \int_{\Omega_a} u_1 u_3 \frac{\partial u_3}{\partial r} r \, dr dz = \frac{1}{2} \int \int_{\Omega_a} r u_1 \frac{\partial u_3^2}{\partial r} \, dr dz = -\frac{1}{2} \int \int_{\Omega_a} u_3^2 \frac{\partial r u_1}{\partial r} \, dr dz$$

$$= \frac{1}{2} \int \int_{\Omega_a} u_3^2 \frac{\partial r u_3}{\partial z} \, dr dz = \frac{1}{6} \int \int_{\Omega_a} \frac{\partial r u_3^3}{\partial z} \, dr dz = 0.$$

De las fórmulas (1)-(4), del hecho particular que las funciones  $u_2, V$  son acotadas, de la desigualdad de Schwarz y de  $2ab \leq a^2 \epsilon^2 + b^2 / \epsilon^2$ , tomando  $\epsilon^2 = (3c^2 \lambda)^{-1}$ , se concluye lo siguiente:

$$\begin{aligned} I &= \lambda \int \int_{\Omega_a} u_1 u_2 (u_2 + 2V) \, dr dz \leq 3c^2 \lambda \int \int_{\Omega_a} |u_1| \, dr dz \\ &\leq 3c^2 \lambda \left( \int \int_{\Omega_a} r \, dr dz \right)^{1/2} \left( \int \int_{\Omega_a} \frac{u_1^2}{r} \, dr dz \right)^{1/2} \leq \frac{3c^2 \lambda}{2} \left( \epsilon^2 \int \int_{\Omega_a} \frac{u_1^2}{r} \, dr dz + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{2\pi}{\alpha} (r_2 - r_1) \right), \end{aligned}$$

de donde

$$\int \int_{\Omega_a} \left( |\nabla u_1|^2 + |\nabla u_3|^2 + \frac{u_1^2}{2r^2} \right) r \, dr dz \leq 9c^4 \lambda^2 \frac{\pi}{\alpha} (r_2 - r_1) \equiv \bar{c} \lambda^2.$$

Resulta entonces evidente que

$$\int \int_{\Omega_a} (|\nabla u_1|^2 + u_1^2) r \, dr dz \leq \bar{c} \lambda^2,$$

y por lo tanto, de esta última ecuación combinada con las (3.10b) se concluye que

$$\int \int_{\Omega_a} \left( \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]^2 + \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]^2 \right) r \, dr dz \leq \bar{c} \lambda^2.$$

Por otra parte, usando la desigualdad de Poincaré y abusando de la notación:

$$\int \int_{\Omega_a} |\nabla (ru_3)|^2 dr dz \leq k \int \int_{\Omega_a} |\nabla u_3|^2 dr dz \leq \bar{c} \lambda^2.$$

Con este resultado y la relación (3.10b) se encuentra que las primeras derivadas de  $\phi$  también están acotadas por  $\bar{c} \lambda^2$ . Esto, junto con la conclusión de que las segundas derivadas también son acotadas conduce al resultado siguiente:  $\|\phi\|_{H^2(\Omega_a)} \leq \sqrt{\bar{c} \lambda}$ .

Continuando con  $\phi$ , a partir de la desigualdad de Sobolev se concluye que  $\|\phi\|_{C^0(\Omega_a)} \leq \sqrt{\bar{c} \lambda}$  (por un abuso de notación se ha empleado otra vez la constante  $\bar{c}$  que aparece en más de una desigualdad. Se sobreentiende que siempre se elige el mayor valor de  $\bar{c}$  para que las fórmulas tengan sentido).

Por otra parte, las cotas para  $u$  se obtienen de las siguientes maneras:  
Dado que

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \int \int_{\Omega_a} \left( |\Im \phi|^2 + |\nabla u|^2 + \frac{u^2}{r^2} \right) r \, dr dz = -2\lambda b \int \int_{\Omega_a} \frac{\phi}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \, dr dz \\ &\leq 2\bar{c} \lambda^2 |b| \int \int_{\Omega_a} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right| \, dr dz \leq \bar{c}' \lambda^2 \left( \int \int_{\Omega_a} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 \, dr dz \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\bar{c}''}{2} \lambda^2 \left( \epsilon^2 \int \int_{\Omega_a} |\nabla u|^2 r \, dr dz + \frac{1}{\epsilon^2} \right) \leq \bar{c}'' \lambda^4, \end{aligned}$$

donde se ha vuelto a usar la relación  $2ab \leq a^2 \epsilon^2 + b^2 / \epsilon^2$ , con  $\epsilon^{-2} = \bar{c}'' \lambda^2$  para tener  $I_2 \leq 2\bar{c}'' \lambda^4$ . Esto implica que  $\|u\|_{H^1(\Omega_a)} \leq c \lambda^2$ .

Por otra parte, de la relación  $\Im u = \lambda T_1(u, \phi)$  se tiene que  $\|u\|_{H^2(\Omega_a)} \leq c \|\Im u\|_{H^1(\Omega_a)}^2 \leq c \lambda^2 (\lambda^2 + c \lambda^3 + c \lambda^3) \leq \bar{c} \lambda^5$ , para  $\lambda > 1$ . De hecho,  $\|u\|_{H^2(\Omega_a)} \leq c \lambda^2 (1 + \lambda)^{1/2} \leq c \lambda (1 + \lambda)$ . De la relación  $\Im^2 \phi = \lambda T_2(u, \phi)$ , junto con las desigualdades  $|u + V| \leq c$  y  $2ab \leq a^2 \epsilon^2 b^2 / \epsilon^2$ , con  $\epsilon^2 = (2c \lambda^3)^{-1}$ , entonces  $\|\phi\|_{H^4(\Omega_a)}^2 \leq c \|\Im^2 \phi\|^2 \leq c \lambda^2 (c \lambda^2 + c \lambda^2 +$

$c\lambda^2 + c\lambda \|\nabla \mathfrak{S}\phi\| \leq c\lambda^2(\lambda^2 + \lambda\|\phi\|_{H^1(\Omega_\alpha)}) \leq c\lambda^2(\lambda^2 + \lambda\epsilon^2\|\phi\|_{H^1(\Omega_\alpha)} + \lambda/\epsilon^2)$ . Si  $\lambda > 1$ , necesariamente  $\|\phi\|_{H^1(\Omega_\alpha)} \leq \lambda^2(1 + \lambda)$ .

Entonces, dado que  $\|u\|_{H^2(\Omega_\alpha)}$  y  $\|\phi\|_{H^1(\Omega_\alpha)}$  son menores que  $c\lambda^2(1 + \lambda)$ , la demostración está completa.

### ESPECTRO DE B

Como se ha visto,  $B$  no es un operador autoadjunto y no se puede asegurar que las funciones propias de  $B$  sean completas. Sin embargo, al estudiar el problema (4.19) en el espacio  $E$  (ec. (4.18)), el término no lineal es acotado por  $c(\|u\|_{H^2(\Omega_\alpha)}^2 + \|\phi\|_{H^1(\Omega_\alpha)}^2)$ . Por lo tanto, dado que  $B$  es compacto, si  $1/\lambda$  no es un valor propio de  $B$ , entonces  $I - \lambda B$  es un operador invertible (cf. [28], p. 127) y por consiguiente

$$\begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix} = \lambda(I - \lambda B)^{-1} \left( T(u, \phi) - B \begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix} \right) \implies \left\| \begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix} \right\| \leq c \left\| \begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix} \right\|^2$$

lo cual es cierto solo en caso de que

$$\begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, si  $\lambda^{-1}$  no es valor propio de  $B$  la solución trivial es aislada.

DEFINICION  $\lambda$  es un punto de bifurcación si hay soluciones no cero a

$$\begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix} = \lambda T \begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix}$$

en cualquier vecindad de  $(\lambda, 0)$  (cf. [16] p. 1).

Por lo visto, en el problema de Couette-Taylor, una condición necesaria para tener bifurcación es que  $\lambda^{-1}$  sea un valor propio de  $B$ . Es importante, por lo tanto, estudiar el espectro de  $B$ . Para hacerlo se desarrollaran en series de Fourier las funciones  $u$  y  $\phi$  que intervienen en el problema simplificado (4.20) que también se escribe así:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{S}u \\ \mathfrak{S}^2\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a\lambda \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ -2\lambda \frac{V}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

La justificación para hacer desarrollos en series viene de los resultados de regularidad, ya que si  $\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix}$  es una función propia entonces  $\frac{\partial \phi}{\partial z} \in H^3(\Omega_\alpha)$  y consecuentemente

$$\Delta u = 2a\lambda \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{u}{r^2}$$



pertenece al espacio  $H^1(\Omega_\alpha)$ , por lo cual  $u \in H^3(\Omega_\alpha)$  (por el corolario 1) y entonces

$$2a\lambda \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{u}{r^2}$$

está en el espacio  $H^2(\Omega_\alpha)$ , lo cual, a su vez significa que  $u \in H^4(\Omega_\alpha)$ . De esto se sigue que

$$2a\lambda \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{u}{r^2}$$

se encuentra en el espacio  $H^3(\Omega_\alpha)$ , por lo que  $u \in H^5(\Omega_\alpha)$ .

En cuanto a  $\phi$ , puesto que

$$\mathfrak{S}^2 \phi = -2\lambda \frac{V}{r} \frac{\partial u}{\partial z},$$

de donde

$$\Delta^2(r\phi) = -2\lambda V \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{3}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \Delta \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

pertenece al espacio  $H^1(\Omega_\alpha)$ , lo cual implica que  $r\phi \in H^5(\Omega_\alpha)$ , lo cual a su vez quiere decir que  $\Delta^2 \phi \in H^2(\Omega_\alpha)$ , cuya consecuencia es  $r\phi \in H^6(\Omega_\alpha)$ . Así se concluye que  $\frac{\partial u}{\partial z} \in H^4(\Omega_\alpha)$  y por lo tanto  $\phi$  debe pertenecer al espacio  $H^8(\Omega_\alpha)$ . Si se continúa argumentando de esta manera se comprueba que  $\phi, u \in H^m(\Omega_\alpha) \quad \forall m \geq 0$ , y por lo tanto,  $u, \phi \in C^\infty$ . Con esto se justifica el manejo de series.

Las expansiones en serie para  $u$  y  $\phi$ ,

$$u = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n(r) e^{in\alpha z}, \quad \phi = \sum_{-\infty}^{\infty} \phi_n(r) e^{in\alpha z},$$

con  $u_{-n} = \bar{u}_n$ ,  $\phi_{-n} = \bar{\phi}_n$ ,  $u_n(r_1) = u_n(r_2) = 0$ ,  $\phi_n = \phi'_n = 0$  en  $r_1$  y  $r_2$ , permiten escribir las ecuaciones (5.3) de la manera siguiente:

$$u''_n - (n\alpha)^2 u_n - \frac{u_n}{r^2} + \frac{u'_n}{r} = 2a\lambda(in\alpha)\phi_n$$

y

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - (n\alpha)^2 - \frac{1}{r^2} \right)^2 \phi_n = -2\lambda \frac{V}{r} (in\alpha) u_n.$$

A partir de este momento las consideraciones se restringirán al espacio

$$(u, \phi) \mid u(r, z) = u(r, -z), \quad \phi(r, z) = -\phi(r, -z), \quad (5.4)$$

en el cual las ecuaciones son equivariantes bajo esta simetría (ver la última parte del capítulo IV). Por lo tanto  $u_n(r) = u_{-n}(r) = \bar{u}_n$ , lo cual quiere decir que  $u_n$  es real, y  $\phi_n(r) = -\phi_{-n}(r) = -\bar{\phi}_n$ , i. e.,  $\phi_n(r)$  es imaginario y puede escribirse como  $i\psi_n(r)$ .

Sumando la ecuación para  $u_n$  y  $u_{-n}$  y dividiendo por 2 se obtiene:

$$-\left( u''_n + \frac{u'_n}{r} - \frac{u_n}{r^2} - (n\alpha)^2 u_n \right) = -a\lambda(in\alpha)\phi_n(r) - in\alpha\phi_{-n}(r),$$

por lo que

$$\mathfrak{S}_n u_n = -2a\lambda(in\alpha\phi_n(r)) = 2a\lambda n\alpha\psi_n(r),$$

donde  $\mathfrak{S}_n$  está definido por el lado izquierdo (nótese el cambio de signo).

A partir de

$$\frac{\mathfrak{S}_n^2 \phi_n - \mathfrak{S}_{-n}^2 \phi_{-n}}{2i}$$

se concluye

$$\mathfrak{S}_n^2 \psi_n = -\lambda \frac{V}{r} (n\alpha u_n(r) + n\alpha u_{-n}(r)) = -2\lambda \frac{V}{r} n\alpha u_n(r),$$

y por lo tanto el sistema (5.3), en este espacio, se reduce a:

$$\mathfrak{S}_n u_n = 2a\lambda n\alpha\psi_n, \quad (5.5a)$$

$$\mathfrak{S}_n^2 \psi_n = -2\lambda \frac{V}{r} n\alpha u_n, \quad (5.5b)$$

con  $n \geq 0$ ,  $u_n = \psi_n = \psi'_n = 0$  en  $r_1$  y  $r_2$ ,  $u_n \in H^2[r_1, r_2]$ ,  $\psi_n \in H^4[r_1, r_2]$ , o, de manera equivalente:

$$\begin{aligned} u_n &= 2a\lambda n\alpha \mathfrak{S}_n^{-1} \psi_n, \\ \psi_n &= -2a\lambda n\alpha \mathfrak{S}_n^{-2} \left( \frac{V}{r} u_n \right). \end{aligned}$$

Con ayuda del operador  $B_n$ , definido en el espacio  $H^2[r_1, r_2] \times H^4[r_1, r_2]$  que es compacto el mismo (esto se deduce de las estimaciones y lemas previos), pueden escribirse estas últimas ecuaciones así:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ \psi_n \end{pmatrix} = \lambda B_n \begin{pmatrix} u_n \\ \psi_n \end{pmatrix}.$$

(Nótese que si  $n = 0$  entonces  $u_n = \psi_n = 0$  ya que  $\mathfrak{S}_n$  y  $\mathfrak{S}_n^2$  son invertibles).

Para estudiar este sistema es conveniente definir las transformaciones  $v = -u_n r^{1/2}$ ,  $\phi = \psi_n r^{1/2}$  y el operador  $\wp$ :

$$\wp_n(r^{1/2}u) \equiv r^{1/2} \mathfrak{S}_n u. \quad (5.6a)$$

De la definición de  $\wp$  y de la igualdad

$$(r^{1/2}u)'' = r^{1/2}u'' + \frac{r^{1/2}}{r}u' - \frac{r^{1/2}}{4r^2}u$$

se concluye que

$$\wp_n v = -v'' + (n\alpha)^2 v + \frac{3}{4} \frac{v}{r^2}. \quad (5.6b)$$

Con ayuda de estas nuevas variables, al multiplicar las ecuaciones (5.5) por  $r^{1/2}$ , se encuentra que

$$r^{1/2} \mathfrak{S}_n^2 u = r^{1/2} \mathfrak{S}_n (\mathfrak{S}_n u) = \wp_n (r^{1/2} \mathfrak{S}_n u) = \wp_n (\wp_n (r^{1/2} u)) = \wp_n^2 (r^{1/2} u)$$

$$\Rightarrow r^{1/2} \mathfrak{S}_n^2 \psi_n = \varphi_n^2 \phi = -2\lambda n \alpha \frac{V}{r} r^{1/2} u_n = 2\lambda n \alpha \frac{V}{r} v,$$

y

$$-r^{1/2} \mathfrak{S}_n u_n = \varphi_n v = -2a\lambda n \alpha \phi.$$

Dado que el sistema original puede transformarse en el anterior, es suficiente estudiar

$$\varphi_n v = -2a\lambda n \alpha \phi, \quad (5.7a)$$

$$\varphi_n^2 \phi = 2\lambda n \alpha \frac{V}{r} v, \quad (5.7b)$$

con

$$v \Big|_{r_i} = \phi \Big|_{r_i} = \phi' \Big|_{r_i} = 0, \quad (5.7c)$$

ya que  $\phi' = (r^{1/2} \psi)' = r^{1/2} \psi' + \frac{1}{2} \frac{\psi}{r^{1/2}}$ , y  $\psi \Big|_{r_i} = \psi' \Big|_{r_i} = 0$ .

Es claro que el problema completo se reformula como

$$\varphi v = \lambda \left( 2a \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial r^{1/2} v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r^{1/2} \phi}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (5.8a)$$

y

$$\varphi^2 \phi = \lambda \left( 2 \frac{V}{r} \frac{\partial v}{\partial z} - r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z} \varphi \phi \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial r^{1/2} \phi}{\partial r} \varphi \phi \right] \right). \quad (5.8b)$$

Con esta formulación del problema se probará un resultado importante.

**TEOREMA 5.** Si  $\Omega_2/\Omega_1 \geq r_1^2/r_2^2$ , no hay bifurcación a partir del flujo de Couette de soluciones  $(v, \phi)$  al problema (5.8) tal que  $v$  es función para y  $\phi$  función impar; ambas respecto a  $z$ .

**PRUEBA.** El primer paso es encontrar algunas de las condiciones que deben cumplir las soluciones al problema de Couette-Taylor a partir de la formulación que se acaba de proponer. Si  $(v, \phi)$  es solución, aplicando  $\varphi_n^2$  a (5.7a) se obtiene

$$\varphi_n^3 v = -2a\lambda n \alpha \varphi_n^2 \phi = -4(n\alpha)^2 \lambda^2 a \frac{V}{r} v, \quad (5.9)$$

con

$$v \Big|_{r_i} = \varphi_n v \Big|_{r_i} = (\varphi_n v)' \Big|_{r_i} = 0$$

(lo cual se concluye a partir de las condiciones para  $\phi$ ). De paso, es conveniente darse cuenta que  $v \Big|_{r_i} = \varphi_n v \Big|_{r_i} = 0$  si y solo si  $v \Big|_{r_i} = v'' \Big|_{r_i} = 0$ , y que si  $(v, \phi)$  es una función propia de las ecuaciones linealizadas de Navier-Stokes (5.7) entonces  $v$  es una función propia del problema (5.9) cuyo valor propio es  $-4(n\alpha)^2 \lambda^2 a V/r$ .

Al revés, si  $v$  es solución de esta ecuación del problema (5.9), entonces, definiendo a  $\phi$  mediante (5.7a), esta  $\phi$  debe satisfacer la a (5.7b) y (5.7c), para  $a\lambda \neq 0$  (i.e., para  $n \geq 1$ ). En el caso  $a\lambda = 0$ ,  $\varphi_n v = 0 \implies v = 0 \implies \varphi_n^2 \phi = 0 \iff \phi = 0$  y se verá más adelante que  $\varphi_n^3 v = 0 \implies v = 0$  con esas condiciones de frontera.

Sea  $v$  solución de (5.9). Al multiplicar esta fórmula por  $\varphi_n v$  e integrarla respecto a  $r$  se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_{r_1}^{r_2} \varphi_n^3 v \varphi_n v \, dr &= -4(n\alpha)^2 \lambda^2 a \int_{r_1}^{r_2} \frac{V}{r} v \varphi_n v \, dr \\
\implies \int_{r_1}^{r_2} \left( -[\varphi_n^2 v]'' + \left[ \{n\alpha\}^2 + \frac{3}{4r^2} \right] \varphi_n^2 v \right) \varphi_n v \, dr \\
&= -4(n\alpha)^2 \lambda^2 a \int_{r_1}^{r_2} \frac{V}{r} v \left( -v'' + [n\alpha]^2 v + \frac{3}{4r^2} v \right) \, dr \\
\implies \int_{r_1}^{r_2} \left[ (\varphi_n^2 v)^2 \, dr - (\varphi_n^2 v)' \varphi_n v \Big|_{r_1}^{r_2} + \varphi_n^2 v (\varphi_n v)' \Big|_{r_1}^{r_2} \right] \, dr \\
&= -4(n\alpha)^2 \lambda^2 a \int_{r_1}^{r_2} \left[ \frac{V}{r} \left( [n\alpha]^2 v^2 + \frac{3}{4r^2} v^2 \right) + \left( \frac{V}{r} \right)' v' \right] \, dr \\
\implies \int_{r_1}^{r_2} (\varphi_n^2 v)^2 \, dr &= -4(n\alpha)^2 \lambda^2 a \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{V}{r} \left[ \{n\alpha\}^2 v^2 + \frac{3}{4r^2} v^2 + v'^2 \right] - \frac{3bv^2}{r^4} \right) \, dr.
\end{aligned}$$

Por lo visto en la sección *Flujo de Couette* en el capítulo III se sabe que si  $\omega = \Omega_2/\Omega_1 \geq 1$  entonces  $V$  es positiva y decreciente, mientras que  $a > 0$  y  $b \leq 0$ . Siendo así las cosas, a partir de la última fórmula se concluye necesariamente que  $v = 0$  lo cual, a su vez, implica que  $\phi = 0$ .

Considérese ahora el caso en que  $\varrho^{-2} \leq \omega \leq 1$ , i. e., el caso donde  $a$  y  $b$  son positivos, excepto para  $\omega = 1$ , donde  $b = 0$ . Para estudiarlo es conveniente introducir las variables  $k$  y  $w$  de la siguiente manera:

$$k^2(r) = \frac{V}{r}, \quad w(r) = kv.$$

Por la forma en que han sido definidas se cumple que

$$\begin{aligned}
w' &= k'v + kv' = \frac{k'}{k}w + kv' \\
\implies (kv')^2 &= \frac{V}{r}v'^2 = w'^2 + \left( \frac{k'}{k} \right)^2 w^2 - 2ww' \frac{k'}{k} \\
\implies \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{V}{r} \left[ (n\alpha)^2 v^2 + \frac{3}{4r^2} v^2 + v'^2 \right] - 3 \frac{bv^2}{r^4} \right) \, dr \\
&= \int_{r_1}^{r_2} \left( \left[ (n\alpha)^2 + \frac{3}{4r^2} - \frac{3b}{r^4 k^2} + \left( \frac{k'}{k} \right)^2 + \left( \frac{k'}{k} \right)' \right] w^2 + w'^2 \right) \, dr \quad (5.10)
\end{aligned}$$

(esto se obtiene integrando por partes el término  $w w' k' / k$  y usando las condiciones de frontera de  $w$  ( $w(r_i) = 0$ )).

El siguiente paso es hacer una estimación de (5.10), lo cual puede lograrse mediante ciertas consideraciones:

$$\begin{aligned} \frac{k'}{k} &= (\log k)' = \frac{1}{2}(\log V - \log r)' = \frac{1}{2} \left( \frac{V'}{V} - \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{a - b/r^2}{ar + b/r} - \frac{1}{r} \right) = -\frac{b}{r^2 V} \\ &\Rightarrow \left( \frac{k'}{k} \right)' = \frac{b}{r^3 V^2} (3ar + \frac{b}{r}). \end{aligned}$$

A partir de estos resultados se concluye que

$$\begin{aligned} \frac{3}{4r^2} - \frac{3b}{r^4 k^2} + \left( \frac{k'}{k} \right)^2 + \left( \frac{k'}{k} \right)' &= \frac{3}{4r^2} - \frac{3b}{r^3 V} + \frac{b^2}{r^4 V^2} + \frac{b}{r^3 V^2} \left( 3ar + \frac{b}{r} \right) \\ &= \frac{3}{4r^2} - \frac{b^2}{r^4 V^2} = \frac{3}{4r^2} - r^{-2} \left( \frac{a}{b} r^2 + 1 \right)^{-2} \\ &\geq \frac{3}{4r^2} - \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{4r^2} \end{aligned}$$

(la desigualdad se sigue del hecho que  $ar^2/b + 1$  es creciente en  $a$  y que tanto las cantidades  $a$  como  $b$  son positivas. Recuérdese que el caso  $b \leq 0$  ya fué considerado).

Volviendo a la ecuación (5.10) y empleando las desigualdades que acaban de ser obtenidas, es claro que

$$\begin{aligned} &\int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{V}{r} \left[ (n\alpha)^2 v^2 + \frac{3}{4r^2} v^2 + v'^2 \right] - 3 \frac{b v^2}{r^4} \right) dr \\ &\geq \int_{r_1}^{r_2} \left( \left[ (n\alpha)^2 - \frac{1}{4r^2} \right] w^2 + w'^2 \right) dr \geq \int_{r_1}^{r_2} \left( w'^2 - \frac{w^2}{4r^2} \right) dr. \end{aligned}$$

Esta última integral es la norma de energía del problema

$$\mathfrak{S} = -w'' - \frac{w}{4r^2}, \quad (5.11)$$

ya que

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{S} w \, w \, dr = \int_{r_1}^{r_2} \left( w'^2 - \frac{w^2}{4r^2} \right) dr.$$

Sobre  $L^2(r_1, r_2)$  el operador  $\mathfrak{S}$  es autoadjunto y tiene espectro discreto  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \dots \rightarrow \infty$  (cf. [5], p. 212). Además  $\lambda_j$  es algebraicamente simple y el vector propio correspondiente tiene  $j$  ceros entre  $r_1$  y  $r_2$ .

El problema (5.11) es un caso particular de uno más general que puede formularse de la siguiente manera:

$$\mathfrak{S}_t w \equiv -w'' - \frac{tw}{4r^2} = 0,$$

con  $t \in [0, 1]$  y  $w(r_i) = 0$  (claramente cuando  $t = 1$  se recupera el problema (5.11)). Si se elige  $w = r^\zeta$ ,  $\mathfrak{S}_t w$  no es más que

$$\zeta(\zeta - 1) + \frac{t}{4} = 0,$$

cuya solución es

$$\zeta = \frac{1 \pm \sqrt{1-t}}{2},$$

y por lo tanto, para  $t < 1$

$$w_1 = r^{(1+\sqrt{1-t})/2}, \quad w_2 = r^{(1-\sqrt{1-t})/2},$$

y para  $t = 1$

$$w_1 = r^{1/2}, \quad w_2 = r^{1/2} \log r$$

soluciones del problema homogéneo (cf. [5], p. 123).  $w$  se escribe entonces como  $w = cw_1 + dw_2$ , con  $w(r_i) = 0$ . Para el caso  $t = 1$ , por las condiciones de frontera  $c + d \log r_i = 0$ , se concluye que  $c = d = 0$ . Para el caso  $t < 1$  las condiciones de frontera implican que

$$\begin{pmatrix} r_1^{\sqrt{1-t}/2} & r_1^{-\sqrt{1-t}/2} \\ r_2^{\sqrt{1-t}/2} & r_2^{-\sqrt{1-t}/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 0.$$

El determinante de esta matriz es

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\sqrt{1-t}/2} - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\sqrt{1-t}/2} \neq 0,$$

lo cual implica que  $c = d = 0$  y por lo tanto el operador  $\mathfrak{S}_t$  es invertible para  $t \in [0, 1]$ .

Por otra parte, dado que

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{S}_t w \, w \, dr = \int_{r_1}^{r_2} \left( w'^2 - \frac{tw^2}{4r^2} \right) dr$$

es una función continua de  $t$  diferente de cero (debido a que  $\mathfrak{S}_t$  es invertible), la integral es de un solo signo, y como, para  $t = 0$  se obtiene

$$\int_{r_1}^{r_2} w'^2 dr \geq 0,$$

se concluye que es no negativa. Por lo tanto (5.10) también es no negativa, lo cual implica que

$$\int_{r_1}^{r_2} (\varphi_n^2 v)^2 dr \leq 0,$$

que solo tiene sentido cuando se cumple la igualdad, i. e., cuando  $v = 0$  (lo cual a su vez implica que  $\phi = 0$ ). Así se completa la demostración del teorema.

OBSERVACION AL TEOREMA 5 Es importante tener presentes las hipótesis del teorema ya que en ausencia de todas las simetrías que supone puede haber bifurcación de soluciones, o bifurcación de soluciones periódicas. Se verá más adelante que si no se pide la simetría en  $z$  para el caso  $\omega \geq r_1^2/r_2^2$  tampoco hay bifurcación de soluciones independientes de  $\theta$ .

### ESTUDIO ESPECTRAL PARA EL CASO $V \geq 0$ , $a < 0$

Nótese primero que  $V \geq 0$ ,  $a < 0 \iff 0 \leq \Omega_2/\Omega_1 < r_1^2/r_2^2$ , de acuerdo a lo visto en el apartado *Flujo de Couette*, en el Capítulo III. Este caso es más difícil que el considerado en el Teorema 5; para estudiarlo se transformarán las ecuaciones (5.7) en ecuaciones integrales mediante el Teorema 2. Aplicado a este caso particular, donde se tienen los dos problemas autoadjuntos

$$\wp_n u = f, \quad u|_{r_i} = 0$$

y

$$\wp_n^2 \phi = g, \quad \phi|_{r_i} = \phi'|_{r_i} = 0.$$

Se hace observar que el problema autoadjunto para  $\wp_n^3$  tiene las condiciones de frontera

$$u|_{r_i} = \wp_n u|_{r_i} = \wp_n^2 u|_{r_i} = 0,$$

por lo que el problema

$$\wp_n^3 u = h, \quad u|_{r_i} = \wp_n u|_{r_i} = (\wp_n u)'|_{r_i} = 0$$

no es autoadjunto. Esto se traduce en el hecho que la convolución no preserva la simetría.

Para el problema autoadjunto se tiene una función de Green  $G_1(r, \rho) = G_1(\rho, r)$  tal que

$$\wp_n u = f, \quad u|_{r_i} = 0,$$

$$u(r) = \int_{r_1}^{r_2} G_1(r, \rho) f(\rho) d\rho,$$

y una función de Green  $G_2(r, \rho) = G_2(\rho, r)$  tal que

$$\varphi_n^2 \phi = g, \quad \phi \Big|_{r_i} = \phi' \Big|_{r_i} = 0,$$

$$\phi(r) = \int_{r_1}^{r_2} G_2(r, \rho) g(\rho) \, d\rho.$$

Entonces el problema (5.7) se traduce en

$$v(r) = -2a\lambda n\alpha \int_{r_1}^{r_2} G_1(r, \rho) \phi(\rho) \, d\rho, \quad (5.12a)$$

$$\begin{aligned} \phi(r) &= 2\lambda n\alpha \int_{r_1}^{r_2} \frac{V(\rho)}{\rho} G_2(r, \rho) v(\rho) \, d\rho \\ &= -4\lambda^2 (n\alpha)^2 a \int_{r_1}^{r_2} \frac{V(\rho)}{\rho} G_2(r, \rho) \int_{r_1}^{r_2} G_1(\rho, s) \phi(s) \, ds \, d\rho \end{aligned} \quad (5.12b)$$

o en

$$v(r) = -4\lambda^2 (n\alpha)^2 a \int_{r_1}^{r_2} \bar{G}(r, s) v(s) \, ds, \quad (5.12c)$$

$$\phi(r) = -4\lambda^2 (n\alpha)^2 a \int_{r_1}^{r_2} G(r, s) \phi(s) \, ds, \quad (5.12d)$$

con

$$\bar{G}(r, s) = \frac{V(s)}{s} \left( \int_{r_1}^{r_2} G_1(r, \rho) G_2(\rho, s) \, d\rho \right) \quad (5.12e)$$

y

$$G(r, s) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{V(\rho)}{\rho} G_2(r, \rho) G_1(\rho, s) \, d\rho. \quad (5.12f)$$

Regresando a las funciones de Green, para el problema (5.9) expresado como

$$\varphi_n^3 w = \frac{V}{r} h, \quad w \Big|_{r_i} = \varphi_n w \Big|_{r_i} = (\varphi_n w)' \Big|_{r_i} = 0$$

se tiene una función  $G_3(r, s)$  tal que

$$w = \int_{r_1}^{r_2} G_3(r, s) \frac{V(s)}{s} h(s) \, ds. \quad (5.12g)$$

Es posible fijar  $f \equiv \varphi_n w$  con  $w \Big|_{r_i} = 0$  (lo cual implica que  $\varphi_n w \Big|_{r_i} = f \Big|_{r_i} = 0$ ). De aquí se deduce que el problema para  $\varphi_n^3$  se expresa como

$$\varphi_n^2 f = \frac{V}{r} h, \quad f \Big|_{r_i} = f' \Big|_{r_i} = 0,$$



con

$$f(r) = \int_{r_1}^{r_2} G_2(r, \rho) \frac{V(\rho)}{\rho} h(\rho) d\rho,$$

$$w(r) = \int_{r_1}^{r_2} G_1(r, \rho) f(\rho) d\rho,$$

de donde, claramente

$$w(r) = \int_{r_1}^{r_2} \int_{R_1}^{r_2} G_1(r, \rho) G_2(\rho, s) \frac{V(s)}{s} h(s) d\rho ds$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \bar{G}(r, s) h(s) ds \quad \forall h,$$

y, por lo tanto

$$\bar{G}(r, s) = \frac{V(s)}{s} G_3(r, s).$$

Del Teorema 2 se concluye que  $\bar{G}(r, s)$  es  $C^4$  en  $([r_1, r_2] \times [r_1, r_2])$ ,  $C^5$  para  $r \leq 0$  y  $s \leq r$ , y  $C^6$  para  $r \neq s$ . Además  $\bar{G}(r_i, s) = 0$ . Por otra parte

$$\frac{\partial^5 \bar{G}(s+0, s)}{\partial r^5} - \frac{\partial^5 \bar{G}(s-0, s)}{\partial r^5} = -\frac{V(s)}{s}.$$

Las funciones de Green  $G_1$  y  $G_2$  tienen propiedades que serán útiles. Estas se enuncian y demuestran en seguida.

### PROPOSICION

1)  $G_1(r_i, \rho) = 0$ ,  $G_1(r, \rho) > 0$  para  $r_1 < r < r_2$ ,  $r_1 < \rho < r_2$ . Además

$$\frac{\partial G_1(r_1, \rho)}{\partial r} > 0, \quad \frac{\partial G_1(r_2, \rho)}{\partial r} < 0$$

para  $r_1 < \rho < r_2$ .

2) Si  $r_1 < r < r_2$  y  $r_1 < \rho < r_2$  entonces

$$G_2(r_i, \rho) = \frac{\partial G_2(r_i, \rho)}{\partial r} = 0, \quad G_2(r, \rho) > 0.$$

Además

$$\frac{\partial^2 G(r_i, \rho)}{\partial r^2} > 0$$

para  $r_1 < \rho < r_2$ .

PRUEBA (La demostración está basada en el principio del máximo).

1) Por el Teorema 2 se sabe que  $G_1$  es  $C^2$  para  $\rho \neq r$ , es  $C^1$  para  $r_1 \leq \rho \leq r \leq r_2$  y  $r_1 \leq r \leq \rho \leq r_2$ ; también se sabe que

$$\frac{\partial G_1(\rho + 0, \rho)}{\partial r} - \frac{\partial G_1(\rho - 0, \rho)}{\partial r} = -1$$

( $P_0 = -1$ ),

$$-\frac{\partial^2 G_1}{\partial r^2} + \left( (n\alpha)^2 + \frac{3}{4r^2} \right) G_1 = 0$$

( $r \neq \rho$ ), que  $G_1(r_i, \rho) = 0$  y que  $G_1(r, \rho) = G_1(\rho, r)$ , por lo que  $G_1(r, r_i) = 0$ ).

Sea  $\rho \in [r_1, r_2]$  fijo. Si, en contraposición con lo que se quiere probar, se supone que  $G_1(r, \rho) < 0$  entonces, por la continuidad de  $G$  hay un mínimo para  $G_1(r, \rho)$  que se designará mediante  $r_0$ . En  $r_0$ ,  $G_1 < 0$  y

$$\frac{\partial G_1(r_0 - 0, r_0)}{\partial r} \leq 0, \quad \frac{\partial G_1(r_0 + 0, r_0)}{\partial r} \geq 0.$$

Pero

$$\frac{\partial G_1(r_0 + 0, r_0)}{\partial r} = -1 + \frac{\partial G_1(r_0 - 0, r_0)}{\partial r} \leq -1,$$

lo cual es una contradicción.

Por otra parte, si  $r_0 \neq \rho$  entonces  $G_1$  es  $C^2$  (como se acaba de ver) en una vecindad de  $r_0$ , con

$$\frac{\partial G_1(r_0, \rho)}{\partial r} = 0$$

por ser un punto crítico, y

$$\frac{\partial^2 G_1(r_0, \rho)}{\partial r^2} \geq 0$$

por ser mínimo el punto crítico. Pero

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial r^2} = \left( (n\alpha)^2 + \frac{3}{4r^2} \right) G_1 < 0,$$

lo cual también es una contradicción. Por lo tanto  $G_1(r, \rho) \geq 0$ .

Ahora, si  $G_1(r_0, \rho) = 0$  para  $r_0 \neq r_i$ , entonces  $r_0$  es un mínimo, y si  $r_0 \neq \rho$ ,  $\frac{\partial G_1(r_0, \rho)}{\partial r} = 0$ . De ser esto cierto,  $G_1$  es solución de

$$-u'' + \left( (n\alpha)^2 + \frac{3}{4r^2} \right) u = 0, \quad u \Big|_{r_0} = u' \Big|_{r_0} = 0,$$

lo cual implica, por la unicidad de la solución, que  $G_1 \equiv 0$  en el intervalo  $[\rho, r_2]$  si  $r_0 > \rho$ , o en el intervalo  $[r_1, \rho]$  si  $r_0 < \rho$ . En ambos casos, tomando  $f(r)$  con soporte en el intervalo donde  $G_1 \equiv 0$ , la solución a  $\varphi_n u = f(r)$  sería

$$u(r) = \int_{r_1}^{r_2} G_1(r, \rho) f(\rho) \, d\rho = \int_{r_1}^{r_2} G_1(\rho, r) f(\rho) \, d\rho \equiv 0,$$

lo cual no es posible.

Si  $r_0 = \rho$ , el mismo argumento de derivadas laterales funciona, con lo que se concluye  $G_1(r, \rho) > 0$ .

Finalmente, dado que  $G_1(r_i, \rho) = 0$  y que  $G_1(r, \rho) > 0$  (esto último para  $r_1 < r < r_2$ ,  $r_1 < \rho < r_2$ ), las derivadas deben cumplir con

$$\frac{\partial G_1(r_1, \rho)}{\partial r} \geq 0, \quad \frac{\partial G_1(r_1, \rho)}{\partial r} \leq 0.$$

En caso de anularse las derivadas, por la unicidad al problema de valores iniciales (en  $r_1$  o en  $r_2$ ) se tendría  $G_1 \equiv 0$  en  $[r_1, \rho]$  o en  $[\rho, r_2]$ , lo cual no es posible. Con esto se concluye la prueba de 1).

2) Las propiedades conocidas hasta el momento de  $G_2$  son las siguientes: es  $C^4$  para  $\rho \neq r$ ,  $C^3$  para  $\rho \leq r$  y  $\rho \geq r$ ; cumple con

$$\frac{\partial^3 G_2(\rho + 0, \rho)}{\partial r^3} - \frac{\partial^3 G_2(\rho - 0, \rho)}{\partial r^3} = 1, \quad \text{es } C^2 \quad \forall \rho, r$$

y

$$G_2(r_i, \rho) = \frac{\partial G_2(r_i, \rho)}{\partial r} = 0, \quad \varphi_n^2 G_2(r, \rho) = 0, \quad r \neq \rho.$$

Se define  $K(r, \rho) \equiv \varphi_n G_2(r, \rho)$ . Entonces  $K$  es continuo  $\forall r, \rho$ , es  $C^1$  para  $r_1 \leq \rho \leq r \leq r_2$  y  $r_1 \leq r \leq \rho \leq r_2$ , es  $C^2$  para  $\rho \neq r$ , cumple con  $\varphi_n K = 0$  para  $\rho \neq r$  y con

$$\frac{\partial K(\rho + 0, \rho)}{\partial r} - \frac{\partial K(\rho - 0, \rho)}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial^3 G_2}{\partial r^3} \right) + 0 = -1$$

(ya que  $G_2$  es  $C^2$ ).

Por la unicidad de la solución al problema  $\varphi_n u = f$ ,  $u|_{r_i} = 0$   $G_2$  cumple con

$$G_2(r, \rho) = \int_{r_1}^{r_2} K(s, \rho) G_1(r, s) \, ds$$

Esto implica que

$$G_2(r, \rho) = \int_{r_1}^r K(s, \rho) G_1(r, s) \, ds + \int_r^{r_2} K(s, \rho) G_1(r, s) \, ds. \quad (5.13)$$

Al derivar a  $G_2$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2(r, \rho)}{\partial r} &= K(r, \rho) G_1(r, r) - K(r, \rho) G_1(r, r) \\ &+ \int_{r_1}^r K(r, \rho) \frac{\partial G_1(r, s)}{\partial r} \, ds + \int_r^{r_2} K(s, \rho) \frac{\partial G_1(r, s)}{\partial r} \, ds \end{aligned}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} K(s, \rho) \frac{\partial G_1(r, s)}{\partial r} ds,$$

donde  $\frac{\partial G_1}{\partial r}$  tiene una discontinuidad en  $r$ .

Evaluando en  $r = r_1$  se encuentra que

$$\int_{r_1}^{r_2} K(s, \rho) \frac{\partial G_1(r_1, s)}{\partial r} ds = 0. \quad (5.14)$$

Es decir que  $K$  es solución del problema  $\varphi_n K = 0$ ,  $r \neq \rho$  con las condiciones integrales (5.14); además, como

$$\frac{\partial G_1(r_1, s)}{\partial r} > 0, \quad \frac{\partial G_1(r_2, s)}{\partial r} < 0,$$

de (5.14) se concluye que  $K$  debe cambiar de signo en el intervalo  $[r_1, r_2]$ . Supóngase que  $K$  tiene dos ceros en  $\bar{r}_1$  y  $\bar{r}_2$  (aunque se han supuesto dos ceros, el argumento funciona igualmente bien para más ceros). Con estas suposiciones,  $K$  es la función de Green para  $\varphi_n$  en el intervalo  $(\bar{r}_1, \bar{r}_2)$ , ya que las condiciones 1) a 3) del Teorema 2 garantizan la unicidad, lo cual implica que: 1)  $K > 0$  entre dos de sus ceros (si  $\rho$  está entre ellos), o 2)  $K(r, \rho) \equiv 0$  en  $[\bar{r}_1, \bar{r}_2]$  si  $\rho$  no está entre  $\bar{r}_1$  y  $\bar{r}_2$ . De hecho, por la unicidad del problema de valores iniciales,  $K \equiv 0$  para  $r$  entre  $r_1$  y  $\rho$ , o para  $r$  entre  $\rho$  y  $r_2$ .

Pero el caso 2) es imposible. Si  $K \equiv 0$  en  $[r_1, \rho]$  entonces

$$\frac{\partial K(\rho + 0, \rho)}{\partial r} = -1,$$

de donde  $K(r, \rho) < 0$  para  $r > \rho$ , ya que lo es para  $r > \rho$  y vecino a  $\rho$ ; además, si hay otro nuevo cero en  $r_0$  de  $K$  a la derecha de  $\rho$ , entonces  $K \equiv 0$  en  $[\rho, r_0]$ , lo cual es una contradicción ya que con  $K \leq 0$  (5.14) no se cumple.

La otra posibilidad es que  $K \equiv 0$  en  $[\rho, r_2]$ , y a la izquierda de  $\rho$ ,  $K(r, \rho) > 0$ , ya que si hubiera otro cero de  $K$  se tendría un máximo entre ese cero y  $\rho$ , con  $K'' \leq 0$  ( $K$  es  $C^2$ ), lo cual implicaría que  $\varphi_n K > 0$ , pero como  $\varphi_n K = 0$  entonces  $K(r, \rho) \geq 0$ , lo cual está en contradicción con (5.14).

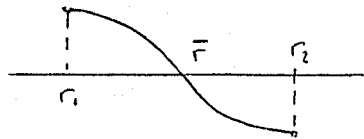
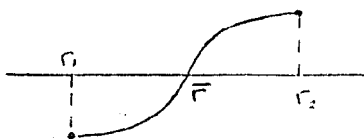
Por otra parte,  $K$  no puede tener más de dos ceros. Esto se sigue del hecho que si  $K$  tuviera más de dos ceros entonces habría por lo menos dos máximos positivos, y al menos uno de ellos es diferente de  $\rho$ , contradiciendo la condición  $\varphi_n K = 0$ .

Con esto se ha probado que  $K$  tiene un cero (con  $K|_{r_1} < 0$  o con  $K|_{r_1} > 0$ ) o dos ceros y que si tiene dos debe ser positivo entre ellos ( $\rho$  debe estar entre ellos; de otra forma  $K \equiv 0$ ). Los tres casos se estudiarán con detalle.

Caso 1:  $K(r_1, \rho) < 0$ ,  $K(r_2, \rho) > 0$ , lo cual implica, por las condiciones sobre  $G_2$ , que  $G_2''(r_1, \rho) > 0$ ,  $G_2''(r_2, \rho) < 0$ .

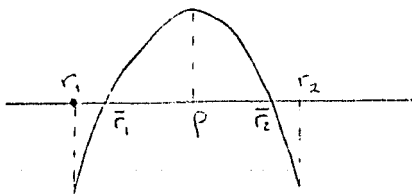
Sea  $\bar{r}$  el único cero de  $K(r, \rho)$ . De las condiciones particulares de este caso y dado que  $G_2(r_1, \rho) = G_2'(r_1, \rho) = 0$  ( $G_2$  es  $C^2$ ) (ver ecs. (5.13) y (5.14)) entonces  $G_2$  tiene un mínimo en  $r_1$ , y  $G_2(r, \rho) > 0$  para  $r > r_1$  en una vecindad de  $r$ . Por otra parte, si  $G_2$  tiene un máximo positivo en  $r_0$  entonces  $G_2''(r_0, \rho) \leq 0$  y esto implica que  $K(r_0, \rho) = \varphi_n G_2(r_0, \rho) > 0$  (ec. (5.13)), es decir,  $r_0 > \bar{r}$ , lo que a su vez conduce a que  $G_2$  es creciente y positiva en  $[r_1, \bar{r}]$ .

Si la función de Green  $G_2(r, \rho)$  tiene un mínimo negativo en  $r_0$ , entre  $\bar{r}$  y  $r_2$ , entonces  $K(r_0, \rho) = \varphi_n G_2(r_0, \rho) < 0$ , lo cual es imposible, por lo cual  $G_2(r, \rho) \geq 0$  en  $[r_1, r_2]$ . Además, por (5.13) y (5.14), en  $r_2$  o en cualquier otro cero de  $G_2$ , se cumple con  $G_2(r_2, \rho) = G_2'(r_2, \rho) = 0$ , y se debe tener  $G_2'' \geq 0$  ya que se trata de un (o unos) mínimo(s). Pero esto es imposible debido a que en ese punto  $K > 0$ . Con esto se concluye que el caso 1 no es posible.



Caso 2  $K(r_1, \rho) > 0$ ,  $K(r_2, \rho) < 0$ .

Sea  $\bar{r}$  el único cero de  $K(r, \rho)$ . Utilizando el mismo argumento que en el caso 1 pero ahora empezando con  $r_2$  se concluye que  $G_2$  es positiva y decreciente en el intervalo  $[\bar{r}, r_2]$ . Después se encuentra que  $G_2$  es no negativa en  $[r_1, r_2]$ , y en un cero  $G_2'' \geq 0$ , pero  $K > 0$  en  $[r_1, \bar{r}]$ , y el caso 2 tampoco es posible.



Caso 3  $K(r_1, \rho) < 0$ ,  $K(\bar{r}_1, \rho) = 0$ .

Como antes,  $\bar{r}_1 < \rho < \bar{r}_2$ ,  $G_2(r, \rho) \geq 0$  en  $[r_1, \rho]$  y  $[\rho, r_2]$ , con  $G_2''(r_1, \rho) > 0$ . Si  $G_2(r_0, \rho) = 0$  entonces debe haber un mínimo en  $r_0$  y necesariamente  $G_2'(r_0, \rho) = 0$ ,  $G_2''(r_0, \rho) \geq 0$ , de donde  $K(r_0, \rho) \leq 0$ . Por otra parte se sabe que  $G_2(r, \rho)$  es creciente en el intervalo  $[r_1, \bar{r}_1]$  donde no puede haber máximos relativos y por lo tanto  $r_0$  no es  $\bar{r}_1$ ; además, entre  $\bar{r}_1$  y  $\bar{r}_2$ ,  $K$  es positivo y después de  $\bar{r}_2$   $G_2$  es decreciente, por lo que  $G_2(\bar{r}_2, \rho) > 0$ . Así se concluye la desigualdad  $G_2(r, \rho) > 0$ .

Considérese la definición siguiente:

$$(Kv)(r) \equiv \int_{r_1}^{r_2} \bar{G}(r, s)v(s) ds, \quad (5.15)$$

donde  $\bar{G}(r, s)$  es la misma que en (5.12c). A partir de las propiedades de  $\bar{G}$

$$\frac{\partial \bar{G}(r, s)}{\partial r} = \frac{V(s)}{s} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial G_1(r, \rho)}{\partial r} G_2(\rho, s) d\rho,$$

$$\frac{\partial G_1(r_1, \rho)}{\partial r} > 0$$

excepto para  $\rho = r_1$ ,  $G_2(\rho, s) > 0$  para  $r_1 < s$ ,  $\rho < r_2$ ,  $V(s) > 0$  (excepto si  $\Omega_2 = 0$  y  $s = r_2$ ) se concluye que  $(Kv)'(r_1) > 0$ , y que  $(Kv)'(r_2) < 0$ .  $(Kv)(r)$  tiene propiedades importantes que se demostrarán a continuación

LEMA 7 Sea

$$u_0(r) = (K1)(r) = \int_{r_1}^{r_2} \bar{G}(r, s) ds.$$

Existen constantes positivas  $\alpha$  y  $\beta$  tales que

$$\alpha u_0(r) \leq (Ku_0)(r) \leq \beta u_0(r) \quad \forall r \in [r_1, r_2].$$

PRUEBA Del hecho que  $0 \leq u_0 \leq M$  se sigue inmediatamente que

$$Ku_0 \leq M \int_{r_1}^{r_2} \bar{G}(r, s) ds = Mu_0,$$

y una de las cotas (poniendo  $\beta = M$ ) ya se tiene.

Para obtener la otra cota se usará el hecho que  $u_0(r) > 0$  si  $r \in (r_1, r_2)$ . Sea  $\epsilon$  un número positivo y pequeño de tal forma que  $u_0(r) \geq \alpha_0 > 0$  en  $[r_1 + \epsilon, r_2 - \epsilon]$ . Claramente

$$Ku_0 = \int_{r_1}^{r_2} \bar{G}(r, s) u_0(s) ds \geq \int_{r_1 + \epsilon}^{r_2 - \epsilon} \bar{G}(r, s) u_0(s) ds \geq \alpha_0 \int_{r_1 + \epsilon}^{r_2 - \epsilon} \bar{G}(r, s) ds$$

(ya que  $\bar{G}u_0 \geq 0$ ).

Considérese una función  $\kappa(r)$  que va de 0 a 1, sea  $C^\infty$  y tal que valga 1 si  $r \in [r_1 + 2\epsilon, r_2 - 2\epsilon]$ , 0 si  $r_1 \leq r \leq r_1 + \epsilon$ ,  $r_2 - \epsilon \leq r \leq r_2$ . Por la forma en que se definió  $\kappa$  se ve que  $K\kappa > 0 \quad \forall r \in [r_1, r_2]$ ,  $(K\kappa)'(r_1) > 0$ ,  $(K\kappa)'(r_2) < 0$ . También, a partir de la definición de  $\kappa$  es fácil ver que

$$Ku_0 \geq \alpha_0 \int_{r_1}^{r_2} \bar{G}(r, s) \kappa(s) ds = \alpha_0 K\kappa.$$

Sea  $\eta$  una constante positiva. Considérese a  $K\kappa - \eta K(1) = K(\kappa - \eta)$ , anulándose en  $r_1$ , naturalmente. Por las condiciones de frontera para  $(K\kappa)'(r_i)$  se deduce que existe una constante  $\eta_0$  tal que para toda  $0 \leq \eta \leq \eta_0$ ,  $K(\kappa - \eta)'(r_1) > 0$ ,  $K(\kappa - \eta)'(r_2) < 0$ , y también existe  $\epsilon_1$  tal que  $K(\kappa - \eta) \geq 0$  si  $r_1 \leq r \leq r_1 + \epsilon_1$ ,  $r_2 - \epsilon_1 \leq r \leq r_2$ . Además, debido a que  $\kappa > 0$  y por lo tanto  $K\kappa > 0$  en el intervalo  $(r_1, r_2)$ , entonces  $K\kappa \geq \beta$  para  $r \in [r_1 + \epsilon_1, r_2 - \epsilon_1]$ , y para algún  $\eta_1$ ,  $K(\kappa - \eta) \geq 0$  en el intervalo  $[r_1, r_2]$  para  $0 \leq \eta \leq \eta_1$ . De aquí que  $K\kappa \geq \eta K(1) = \eta u_0$ , y como  $Ku_0 \geq \alpha_0 K\kappa$  se tiene que  $Ku_0 \geq \alpha_0 \eta u_0 \equiv \alpha u_0$ . Con esto se concluye la demostración.

OBSERVACION AL LEMA 7 Dado que las derivadas de  $\bar{G}(r, s)$  con respecto a  $r$  son acotadas hasta orden 5, se tiene que  $K : C^0[r_1, r_2] \rightarrow C^5[r_1, r_2]$  es continuo, y por el Teorema de Arzela-Ascoli  $K : C^0[r_1, r_2] \rightarrow C^0[r_1, r_2]$  es un operador compacto.

LEMA 8 Existen  $\lambda_1 > 0$  y  $v(r) > 0$  en  $(r_1, r_2)$ , con  $v(r_i) = 0$  y tales que  $Kv = \lambda_1 v$ .

PRUEBA Sea

$$K_n(u) = \frac{K(u + u_0/n)}{\|K(u + u_0/n)\|_{C^0}}$$

definido sobre el conjunto  $T$  de formas continuas tales que  $u(r) \geq 0$  y  $\|u\|_{C^0} \leq 1$ .

$K_n$  está bien definido ya que  $\|K(u + u_0/n)\|_{C^0} > 0$  para  $u \geq 0$  (esto se sigue del hecho que  $u + u_0/n \geq u_0/n$ , por lo que  $K(u + u_0/n)(r) \geq (1/n)(K(u_0))(r) > 0$  debido a que  $\bar{G} \geq 0$ ; de paso se hace notar que  $K(u_n + u_0/n) \geq K(u_n)$ ). Además se puede probar que  $\|K_n(u) - K_n(v)\|_{C^0} \leq c\|u - v\|_{C^0}$ , de lo cual se concluye que  $K_n$  es continuo. También  $K_n$  es compacto ya que si  $\{u_m\}$  es una sucesión tal que  $0 \leq u_m(r) \leq M$  entonces, por la compacidad de  $K$ , existe una subsucesión  $K(u_{m_j} + u_0/n)$  que converge en  $C^0$  a  $\Xi(r) \geq (1/n)(K(u_0))(r) > 0$ , y  $K_n(u_{m_j})$  converge a  $\Xi(r)/\|\Xi(r)\|_{C^0}$ .

Con estas propiedades de  $K_n$  se puede usar el Teorema de Schauder (cf. [28], p. 203) que dice lo siguiente: Si  $K_n$  es un mapeo compacto sobre un conjunto convexo y cerrado  $T$  de un espacio de Banach tal que  $K_n(T) \subseteq T$ , entonces  $K_n$  tiene un punto fijo  $u_n$  tal que  $K_n(u_n) = u_n$ . En este caso  $\|K_n(u)\|_{C^0} = 1$  y  $K_n(u) \geq 0$  para  $u \geq 0$  y de aquí que  $K_n(T) \subset T$ . Entonces  $\|K_n(u_n)\|_{C^0} = \|u_n\|_{C^0} = 1$ , y si se fija  $\lambda_n = \|K(u_n + u_0/n)\|_{C^0}$ ,  $K(u_n + u_0/n) = \lambda_n u_n$ , donde  $\lambda_n$  es positivo lo cual se desprende de las desigualdades que se obtuvieron arriba para  $K(u_n + u_0/n)$ . De esas mismas desigualdades se deduce que  $u_n \geq K(u_0)/\lambda_n n$  y  $u_n \geq K(u_n)/\lambda_n$ , y con ayuda del Lema 6  $u_n \geq \alpha u_0/n \lambda_n$ .

Para continuar con la prueba se define  $\beta_n = \max_{\Lambda} (u_n \geq \lambda u_0(r))$ . Se hace notar que el conjunto no es vacío ya que  $\beta_n \geq \alpha/n \lambda_n$  y que  $\beta_n$  es un número positivo. Con esta notación se tiene que  $u_n \geq \beta_n u_0$ , por una parte, y por otra que  $u_n = K(u_n + u_0/n)/\lambda_n \geq (\beta_n K u_0 + K u_0/n)/\lambda_n \geq \alpha(\beta_n + n^{-1})u_0/\lambda_n$  (ya que  $\bar{G} \geq 0$ ). De estas dos últimas estimaciones para  $u_n$  y de la definición de  $\beta_n$  se concluye que  $\beta_n \geq \alpha(\beta_n + n^{-1})/\lambda_n$  y por lo tanto  $\lambda_n \geq \alpha(1 + (n\beta_n)^{-1}) \geq \alpha > 0$ .

Por otra parte, como  $\|u_n\|_{C^0} = 1$ ,  $\|u_n + u_0/n\|_{C^0} \leq 1 + |u_0|$ , por la compacidad de  $K$ , existe una subsucesión  $\{u_{n_j}\}$  tal que  $K(u_{n_j} + u_0/n_j)$  converge a  $v$ . Además, dado que  $\lambda_{n_j} = \|K(u_{n_j} + u_0/n_j)\|_{C^0} \leq \|K(1) + K(u_0)\|_{C^0} \leq \|u_0\|_{C^0} + \|K(u_0)\|_{C^0}$ , se puede suponer que  $\lambda_{n_j}$  converge a  $\lambda_1$  con  $\alpha \leq \lambda_1 \leq \|u_0\|_{C^0} + \|K(u_0)\|_{C^0}$ , por supuesto.

Entonces  $u_{n_j} = K(u_{n_j} + u_0/n_j)$  converge a  $v/\lambda_1$ , pero como  $u_0/n_j$  converge a cero y  $K$  es continuo, se concluye que  $v/\lambda_1 = \lambda_1^{-1}K(v/\lambda_1)$ , y por lo tanto  $Kv = \lambda_1 v$ , lo cual demuestra el lema.

LEMA 9  $\lambda_1$  es un valor propio algebraicamente simple.

PRUEBA Primero se demostrará —por contradicción— que la multiplicidad geométrica es 1.

Por el Lema 8 se sabe que  $Kv = \lambda_1 v$ . Supóngase que existe  $w$  tal que  $Kw = \lambda_1 w$ . Supóngase además que en algún punto  $r_0$  se cumple que  $w(r_0) > 0$ ; esta suposición es válida, ya que si  $w(r_0) < 0$  puede escogerse a  $w' = -w$ . Se sabe también (ver Lema 8) que  $v > 0$  en  $(r_1, r_2)$  y que  $v'(r_1) > 0$ ,  $v'(r_2) < 0$  (ya que esto sucede para  $\bar{G}$  y  $v$  es positivo). Por lo tanto, para  $t$  pequeña, como en el Lema 7,  $(v - tw)|_{r_i} = 0$ ,  $(v - tw)'|_{r_i} \neq 0$ . De estas condiciones se sigue que  $v - tw \geq 0$  en una vecindad de  $r_i$ ; fuera de esa vecindad  $w$  es acotado y  $0 \leq \alpha \leq v$ . Se cumple que  $v - tw \geq 0$  en  $[r_1, r_2]$ .

Si se define a  $t_0$  como el  $\max\{t \mid v - tw \geq 0 \text{ en } [r_1, r_2]\}$ , es claro que  $t$  es un número positivo y acotado ya que  $w(r_0) > 0$ . De aquí se sigue que: 1) para  $t_0$  existe un  $r_0$  que pertenece a  $(r_1, r_2)$  tal que  $v(r_0) - t_0 w(r_0) = 0$ , o 2)  $v'(r_i) - t_0 w'(r_i) = 0$ . El primer caso no se puede dar ya que  $K(v - t_0 w) = \lambda_1(v - t_0 w) \geq 0$  y  $K(v - t_0 w) > 0$  entre  $r_1$  y  $r_2$ , por lo cual no es posible  $v(r_0) - t_0 w(r_0) = 0$ . En cuanto al segundo caso, debido a que  $v(r) - t_0 w(r) \geq 0$ ,  $\bar{G}'(r_1, s) > 0$ ,  $\bar{G}'(r_2, s) < 0$ , la única forma como se cumple es con  $v(r) \equiv t_0 w(r)$ , lo cual quiere decir que los vectores  $v$  y  $w$  son linealmente dependientes. Con esto se ha demostrado que la multiplicidad geométrica es 1.

Por otra parte, si  $w \neq av$ , donde  $a$  es una constante, y  $(K - \lambda_1)^2 w = 0$  entonces  $(K - \lambda_1)w$  está en el núcleo de  $K - \lambda_1$  y por lo tanto  $(K - \lambda_1)w = kv$ , donde  $k$  es una constante diferente de cero. El problema  $Kw = \lambda_1 w - v$  se obtiene del anterior al reemplazar a  $w$  por  $-w/k$ . En la ecuación particular existe algún punto  $r_0$  donde  $w(r_0)$  sea negativa, ya que si se supone  $w(r) \geq 0 \forall r$  se tendrá que  $0 \leq K^n w = \lambda_1 K^{n-1} w - K^{n-1} v = \lambda_1^2 K^{n-2} w - \lambda_1 K^{n-2} v - \lambda_1^{n-1} v = \lambda_1^2 K^{n-2} w - 2\lambda_1^{n-1} v = \lambda_1^n w - n\lambda_1^{n-1} v$ , y por lo tanto  $\lambda_1 w/n - v \geq 0 \forall n$ , lo cual implica que  $-v \geq 0$ , que es una contradicción.

De las consideraciones anteriores se desprende que existe un número positivo tal que  $v + t_0 w \geq 0$  en  $[r_1, r_2]$ , y  $v + tw < 0$  en algún punto  $\bar{r} \in [r_1, r_2]$ , para  $t > t_0$ . El mismo argumento usado en la primera parte de esta demostración funciona ya que  $v + tw \geq 0$  para  $t$  pequeño, mientras que para  $t$  grande  $v(r_0) + tw(r_0) < 0$ ; de lo anterior se deduce que  $0 \leq K(v + t_0 w) = \lambda_1 v + t_0 Kw = \lambda_1 v + t_0 \lambda_1 w - t_0 v = (\lambda_1 - t_0)v + t_0 \lambda_1 w$ , y dado que  $v(r_0) > 0$ ,  $w(r_0) < 0$  ( $\implies [\lambda_1 - t_0]v(r_0) > 0$ ),  $\lambda_1 > t_0$ . Con esto se demuestra que  $v + t_0 \lambda_1 w / (\lambda_1 - t_0) \geq 0$ . Como  $t_0 \lambda_1 / (\lambda_1 - t_0) > t_0$  (debido a que  $t_0 > 0$ ), esto contradice el hecho que  $t_0$  es máximo. Esto prueba que  $\ker(K - \lambda_1)^2 = \ker(K - \lambda_1)$ .

Además, si  $(K - \lambda_1)^n w = 0$ ,  $(K - \lambda_1)^{n-2} w = u$ , entonces  $(K - \lambda_1)^2 u = 0$ .  $u$  es múltiplo de  $v$  con  $(K - \lambda_1)u = 0$ , y así se concluye que  $(K - \lambda_1)^{n-1} w = 0$ . Si se repite este argumento  $n$  veces se llega finalmente a que  $(K - \lambda_1)w = 0$ . Con esto se termina la demostración del Lema.

LEMA 10 Si  $\lambda$  es un valor propio de  $K$  con vector propio  $w$  ( $\lambda \neq \lambda_1$ , por el Lema 9), entonces  $w$  cambia de signo entre  $r_1$  y  $r_2$ .

PRUEBA Se procederá por contradicción. Supóngase que  $w \geq 0 \forall r \in [r_1, r_2]$ , y  $\lambda_1 < \lambda$ . Sea  $t_0$  tal que  $v - t_0 w \geq 0$  y  $v - tw < 0$  en algún punto, para  $t > t_0$ . De aquí



se concluye que  $0 \leq K(v - t_0 w) = \lambda_1 v - t_0 \lambda w$ , y por lo tanto  $v - t_0 \lambda w / \lambda_1 \geq 0$ ; como  $t_0 \lambda / \lambda_1 > t_0$ , esto contradice el hecho que  $t_0$  es máximo.

En el caso  $\lambda < \lambda_1$  se sigue la misma línea de razonamiento cambiano a  $v$  por  $w$  y a  $\lambda$  por  $\lambda_1$ . Así se concluye la prueba.

Los Lemas 7-10 (cuyas demostraciones, para este caso particular, están basadas en [22], caps. 2 y 7) son importantes porque permiten demostrar el siguiente resultado que es un caso particular del Teorema de Krein-Rutman, el cual es bien conocido para matrices con elementos positivos.

TEOREMA 6 Existen  $v(r)$  positiva en el intervalo  $(r_1, r_2)$  y cero en  $r_i$ ; y  $\lambda_1$  también positiva tales que  $Kv = \lambda_1 v$ .  $\lambda_1$  es un valor propio algebraicamente simple de  $K$ , y para cualquier otro valor propio,  $\lambda$ ,  $|\lambda| < \lambda_1$ . Además, si  $w$  es tal que  $Kw = \lambda w$ ,  $w$  cambia de signo entre  $r_1$  y  $r_2$ .

PRUEBA. Con ayuda de los Lemas 7-10 lo único que queda por demostrar es que, para cualquier valor propio  $\lambda$  se cumple  $|\lambda| < \lambda_1$ . Para hacerlo supóngase que  $Kw = \lambda w$ , con  $\lambda \geq 0$ . Por el Lema 10,  $K$  cambia de signo entre  $r_1$  y  $r_2$ . De manera análoga a como se procedió en los Lemas, se define a  $t_0$  tal que  $v + t_0 w \geq 0$  y  $v + t w < 0$  para  $t > t_0$ . Esto implica que  $0 \leq K(v + t_0 w) = \lambda_1 v + t_0 \lambda w$ , siguiéndose que  $v + t_0 \lambda w / \lambda_1 > 0$ , y por ser  $t_0$  máximo,  $\lambda / \lambda_1 < 1$ , de donde  $\lambda < \lambda_1$ .

Antes de continuar con la prueba es conveniente hacer notar que los Lemas 7-10 también son válidos para  $K^2$ . El Lema 7 se sigue del hecho que si  $f > g$  entonces  $Kf > Kg$  y por lo tanto  $\alpha^2 u_0 \leq \alpha K u_0 \leq K^2 u_0 \leq \beta K u_0 \leq \beta^2 u_0$ . El Lema 8 depende del Lema 7 — que ya se vio funciona para  $K^2$ — y de la compacidad de  $K$ , por lo tanto no hay problema. Para el Lema 9 considérese lo siguiente: el núcleo de  $K^2$  es la convolución de  $\bar{G}$  con él mismo, el núcleo es positivo, y

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{r_1}^{r_2} \bar{G}(r, s) \bar{G}(s, \rho) \, d\rho$$

es positivo en  $r_1$ , negativo en  $r_2$ , y la función propia  $v$  es no negativa, evidentemente cumple con  $K^2 v = \lambda_1^2 v$ ,  $v'(r_1) > 0$ ,  $v'(r_2) < 0$ ; así se ve que los argumentos del Lema 9 también son válidos para  $K^2$ . Finalmente, es claro que si  $Kw = \lambda w$  entonces  $K^2 w = \lambda^2 w$  y por lo tanto el Lema 10 es cierto para  $K^2$ .

Sabiendo que los Lemas 7-10 también se cumplen para  $K^2$  es directa la demostración del caso  $\lambda < 0$ ; se procede de la siguiente manera: a partir de  $Kw = \lambda w$  es clara la relación  $K^2 w = \lambda K w = \lambda^2 w$ . Para el valor propio  $\lambda_1$  se tiene una fórmula similar:  $K^2 v = \lambda_1^2 v$ . A partir del Lema 10 se concluye que  $\lambda^2 < \lambda_1^2$  y la demostración del Teorema está completa.

Como se vió, el sistema (5.7) se traduce en la ecuación  $\varphi_n^2 v = -4(n\alpha)^2 \lambda^2 a V v / r$ , y esta es equivalente a  $v = -4(n\alpha)^2 \lambda^2 a K v$ ,  $[4(n\alpha)^2 \lambda^2 |a|]^{-1}$  es valor propio de  $K$ .

**TEOREMA 7** El sistema (5.7) tiene un par de funciones propias  $(v, \phi)$  que son positivas en el intervalo  $(r_1, r_2)$  y el valor propio  $\bar{\lambda}_{1,n} = [2n\alpha\sqrt{|a|\lambda_1}]^{-1}$  que es mayor o igual a  $r_1^2(n\alpha)^2/b$  y algebraicamente simple. Cualquier otro valor propio  $\lambda$  cumple con  $\bar{\lambda}_{1,n} < |\lambda|$  y las funciones propias correspondientes cambian de signo entre  $r_1$  y  $r_2$ .

**PRUEBA** Del Teorema 6 se sabe que  $\lambda_1 \geq [4(n\alpha)^2 \lambda^2 |a|]^{-1}$  y por lo tanto  $|\lambda| > \bar{\lambda}_{1,n}$ . Para el valor propio  $\bar{\lambda}_{1,n}$  su vector propio  $v$  es positivo en el intervalo  $(r_1, r_2)$ , al igual que la función de Green  $G_2$ ; por lo tanto  $\phi$ , dada por la ecuación (5.12b) es positiva. Además, para cualquier otro valor propio  $v'$  la función propia correspondiente cambia de signo en  $(r_1, r_2)$ . Si  $\phi'$  es de un solo signo entonces, por la relación (5.7a) y la positividad de  $G_1$ , se tendría que  $v'$  es diferente de cero en todo el intervalo, lo cual está en contradicción con el teorema 6.

Si hay dos pares de vectores propios  $(v_1, \phi_1)$ ,  $(v_2, \phi_2)$  correspondientes al mismo valor propio entonces, por la simplicidad algebraica de  $\lambda_1$  respecto al operador  $K$ ,  $v_1$  debe ser múltiplo de  $v_2$  (i. e., son linealmente dependientes). La ecuación (5.7a) implica que  $\phi_1$  y  $\phi_2$  también son linealmente dependientes con la misma constante de proporcionalidad. Esto quiere decir que  $\lambda_{1,n}$  es algebraicamente simple.

Por otra parte, si  $(v_1, \phi_1)$  es tal que

$$\begin{pmatrix} \varphi_n & 2a\lambda n\alpha \\ -2\lambda n\alpha \frac{V}{r} & \varphi_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

también debe cumplir con

$$\begin{pmatrix} \varphi_n & 2a\lambda n\alpha \\ -2\lambda n\alpha \frac{V}{r} & \varphi_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} v \\ \phi \end{pmatrix}$$

donde  $H$  es un número que en este contexto puede tomarse como la unidad, a menos que  $(v_1, \phi_1) = (v, \phi)$  y que la multiplicidad algebraica sea uno.

De la última relación entre matrices se sigue que

$$\varphi_n v_1 = -2a\lambda n\alpha \phi_1 + v$$

$$\varphi_n^2 \phi_1 = 2\lambda n\alpha \frac{V}{r} v_1 + \phi,$$

y mediante funciones de Green

$$v_1(r) = \int_{r_1}^{r_2} G_1(r,s) [-2a\lambda n\alpha \phi_1(s) + v(s)] ds$$

$$\phi_1(r) = \int_{r_1}^{r_2} G_2(r, s) \left[ 2\lambda n\alpha \frac{V(s)}{s} v_1(s) + \phi(s) \right] ds.$$

Combinando las expresiones para  $v_1$  y  $\phi_1$ :

$$\begin{aligned} v_1(r) &= -4\lambda^2(n\alpha)^2 a \int_{r_1}^{r_2} \int_{r_1}^{r_2} G_1(r, s) G_2(s, \rho) \frac{V(\rho)}{\rho} v_1(\rho) d\rho ds \\ &\quad + \int_{r_1}^{r_2} G_1(r, s) v(s) ds + \int_{r_1}^{r_2} G_2(r, s) \phi(s) ds \\ &= -4\lambda^2(n\alpha)^2 a \int_{r_1}^{r_2} \bar{G}(r, \rho) v_1(\rho) d\rho + \int_{r_1}^{r_2} [G_1(r, s) v(s) + G_2(r, s) \phi(s)] ds \\ &= \frac{1}{\lambda_1} K v_1 + \int_{r_1}^{r_2} [G_1(r, s) v(s) + G_2(r, s) \phi(s)] ds, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$(K - \lambda_1) v_1 = -\lambda \int_{r_1}^{r_2} [G_1(r, s) v(s) + G_2(r, s) \phi(s)] ds.$$

Pero el operador  $K$  es compacto y entonces, por la alternativa de Fredholm (cf. [29], pps. 450 y 469) es necesario que el lado derecho sea ortogonal en  $L^2$  a  $w$ , vector propio del operador adjunto, i. e.,

$$\int_{r_1}^{r_2} w(r) \int_{r_1}^{r_2} [G_1(r, s) v(s) + G_2(r, s) \phi(s)] ds ds = 0, \quad (5.16)$$

con  $K^* w = \lambda_1 w$  y

$$(K^* v)(r) = \int_{r_1}^{r_2} \bar{G}(s, r) u(s) ds.$$

Si se considera que

$$\bar{G}(s, r) = \int_{r_1}^{r_2} G_1(s, \rho) G_2(r, \rho) d\rho \frac{V(r)}{r} = K(s, r) g(r)$$

con  $G_2(r, \rho) = G_2(\rho, r)$  y  $g(r) = a + b/r^2$ ,  $g'(r) = -2b/r^3 < 0$ ,  $g''(r) = 6b/r^4$ ,  $K(r_i, \rho) = 0$ ,

$$\left. \frac{\partial K}{\partial r} \right|_{r_i} = \int_{r_1}^{r_2} G_1(s, \rho) \frac{\partial G_2(r_i, \rho)}{\partial r} d\rho = 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 K}{\partial r^2} \right|_{r_i} = \int_{r_1}^{r_2} G_1(s, \rho) \frac{\partial^2 G_2(r_i, \rho)}{\partial r^2} d\rho > 0,$$

$$\bar{G}(s, r) > 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{G}}{\partial r} \right|_{r_i} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial r^2} \right|_{r_i} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 \bar{G}(s, r)}{\partial r^2} \Big|_{r_i} = \frac{\partial^2 K(s, r_i)}{\partial r^2} g(r_i) > 0,$$

y se usa, en lugar de primeras, segundas derivadas en  $r_i$  para los *Lemas* 7-10, se puede comprobar que siguen siendo válidos; de aquí que los argumentos del Teorema 6 funcionen en este caso (para el operador adjunto) y  $w > 0$  en el intervalo  $(r_1, r_2)$ . Además se sabe que el mismo análisis espectral es válido para  $K^*$  y se sabe que los valores propios reales de  $K$  y  $K^*$  coinciden (cf. [28], p. 203). Una vez demostrada la positividad de  $w$  es claro que la ecuación (5.16) no se puede cumplir debido a que todos sus términos son positivos en  $(r_1, r_2)$ . Con esto se establece la simplicidad algebraica.

La demostración de que  $\bar{\lambda}_{1,n} \geq r_1^2(n\alpha)^2/b$  es como sigue:

$$\begin{aligned} & \int_{r_1}^{r_2} ([\varphi_n v]v + [\varphi_n^2 \phi] \phi) \, dr \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \left( v'^2 + [(n\alpha)^2 + \frac{3}{4r^2}]v^2 + [-\phi'' + (n\alpha)^2\phi + \frac{3}{4r^2}\phi]^2 \right) \, dr \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \left( v'^2 + (n\alpha)^2 v^2 + \frac{3}{4r^2} v^2 + [-\phi'' + \frac{3}{4r^2}\phi]^2 + (n\alpha)^4 \phi^2 + 2(n\alpha)^2 \phi'^2 + \frac{3}{2r^2} (n\alpha)^2 \phi^2 \right) \, dr \\ &\equiv I(v, \phi). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} J(r; \lambda) &\equiv 2\lambda n\alpha \int_{r_1}^{r_2} \frac{b}{r^2} v(r) \phi(r) \, dr \\ &= 2\lambda n\alpha b \int_{r_1}^{r_2} \frac{v(r) \phi(r)}{r^2} \, dr \\ &= 2\lambda n\alpha b \int_{r_1}^{r_2} \frac{v(r)}{r} \frac{\phi(r)}{r} \, dr \\ &\leq \frac{2\lambda n\alpha b}{r_1^2} \left( \int_{r_1}^{r_2} v^2 \, dr \right)^{1/2} \left( \int_{r_1}^{r_2} \phi^2 \, dr \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\lambda n\alpha b}{r_1^2} \left( \frac{1}{n\alpha} \int_{r_1}^{r_2} v^2 \, dr + n\alpha \int_{r_1}^{r_2} \phi^2 \, dr \right) \\ &= \frac{\lambda b}{r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} [v^2 + (n\alpha)^2 \phi^2] \, dr \\ &\leq \frac{\lambda b}{r_1^2 (n\alpha)^2} \int_{r_1}^{r_2} [(n\alpha)^2 v^2 + (n\alpha)^4 \phi^2] \, dr \\ &\leq \frac{\lambda b}{r_1^2 (n\alpha)^2} I(r, \phi). \end{aligned}$$

Pero  $I(r, \phi) = J(r; \lambda)$ , lo cual implica que  $1 \leq \lambda b (r_1 n\alpha)^{-2}$ . Con esto se termina la prueba.

**TEOREMA 8** Se puede escoger  $\alpha$  de tal manera que el primer valor propio real positivo  $\bar{\lambda}_1$  de  $B$  sea algebraicamente simple y que, para cualquier otro valor propio  $\lambda$ , se cumpla la desigualdad  $|\lambda| > \bar{\lambda}_1$ . El vector propio correspondiente a  $\bar{\lambda}_1$  es  $(U_1, \Phi_1)(r, z) = (u_1(r) \cos(\alpha z), \phi_1(r) \sin(\alpha z))$ , con  $u_1(r), \psi_1(r) > 0$ .

**PRUEBA** El espectro de  $B$  viene dado por las ecuaciones (5.3) donde las funciones  $u$  y  $\phi$  son par e impar respecto a  $z$  respectivamente. Si se multiplican por  $\sqrt{r}$  y se definen las funciones  $v = -\sqrt{r}u$  y  $\psi = \sqrt{r}\phi$ , introduciendo el operador  $\wp$  (ver (5.6)), el sistema (5.3) se transforma en

$$\wp v = 2a\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \wp^2 \psi = 2\lambda \frac{V(r)}{r} \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Por la periodicidad de  $u$  y  $\phi$  se pueden hacer los siguientes desarrollos en serie:

$$v = \sum_{-\infty}^{\infty} v_n(r) e^{in\alpha z}, \quad \psi = \sum_{-\infty}^{\infty} \psi_n(r) e^{in\alpha z},$$

con  $v_n(r) = v_{-n}(r) = \bar{v}_n(r)$ ,  $\psi_n(r) = -\psi_{-n}(r) = i\phi_n(r)$  ( $\phi$  es real) debido a las simetrías, y  $\wp_n v_n = -2a\lambda\phi_n$ ,  $\wp_n^2 \phi_n = 2\lambda V v_n/r$  (lo cual se obtiene sumando las ecuaciones para  $v_n$  y  $v_{-n}$  por una parte, y restando las de  $\psi_n$  divididas por  $2i$ ).

Por otra parte,  $|\lambda| > \bar{\lambda}_{1,n} \geq r_1^2(n\alpha)^2/b \rightarrow \infty$  si  $n \rightarrow \infty$  (ver el Teorema 7). Si se introduce al valor propio  $\bar{\lambda}_1$  como  $\bar{\lambda}_1 = \inf_{\lambda^{-1} \in \sigma(B)} |\lambda| = \inf_{n \geq 1} \bar{\lambda}_{1,n} \geq r_1^2 \alpha^2/b > 0$ , donde  $\lambda^{-1} \in \sigma(B)$  significa que  $\lambda$  es un valor propio de  $B$  —condición necesaria para tener bifurcación según se ha visto—, entonces es claro que  $\bar{\lambda}_1 \geq r_1^2 \alpha^2/b$  y que solo puede haber un número finito de  $n$ 's tales que  $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_{1,n}$ . Si  $n_0$  denota la más grande de estas  $n$ 's y se cambia  $\alpha$  por  $\alpha_0 = n_0\alpha$  solo habrá  $n$ 's múltiplos de  $n_0$  y los desarrollos en serie para  $v$  y  $\psi$  tendrán exponentes de  $in\alpha_0 z$ . Además, por la definición de  $n_0$  y sustituyendo a  $\alpha$  por  $\alpha_0$ , se tiene que  $\bar{\lambda}_{1,n} > \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_{1,1}$ . Finalmente,  $\bar{\lambda}_{1,1}$  es algebraicamente simple por su simplicidad geométrica y por no haber interacción con modos más altos.

Para terminar, el vector propio correspondiente a  $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_{1,n}$  se obtiene a partir de las series de Fourier de  $v$  y  $\psi$  (en este caso con  $n = 1$ ), tomando la parte real para  $v$  ( $v_1$ ) y la imaginaria para  $\psi$  ( $\phi_1$ ).

### OBSERVACIONES AL TEOREMA 8

1) Recordando que  $v_1(r)$  y  $\phi_1(r)$  son de un signo e introduciendo las funciones  $v_1(r) \cos(\alpha z)$  y  $\phi_1(r) \sin(\alpha z)$  en (5.1) se obtiene

$$\mathfrak{S}_1 v_1 = 2a\lambda\alpha\phi_1, \quad \mathfrak{S}_1^2 \phi_1 = 2\lambda V \alpha v_1.$$

Cambiando a  $(v, \phi)$  por  $-(v, \phi)$  puede tomarse a  $v_1 \geq 0$ , con lo cual  $\phi_1 > 0$  (el núcleo de  $\mathfrak{S}_1^2$  es positivo); por lo tanto  $\alpha\phi_1 \leq 0$  y  $\mathfrak{S}_1 v_1 > 0$  (el núcleo de  $\mathfrak{S}$  es negativo). Esto es consistente y no hay problemas con los signos.

2) Considérese el problema (5.3) pero ahora sin las simetrías respecto a  $z$  que se han utilizado. Del desarrollo en series para  $u$  y  $\phi$ ,

$$u = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n e^{in\alpha z}, \quad \phi = \sum_{-\infty}^{\infty} \phi_n e^{in\alpha z},$$

se tiene que

$$\wp_n u_n = 2a\lambda n\alpha \phi_n, \quad \wp_n^2 \phi_n = 2\lambda \frac{V}{r} in\alpha u_n,$$

con  $u_n = v_n + iw_n$ ,  $\phi_n = \chi_n + i\psi_n$ , y por lo tanto

$$\begin{aligned} \wp_n v_n &= -2a\lambda n\alpha \psi_n, & \wp_n w_n &= 2a\lambda n\alpha \chi_n, \\ \wp_n^2 \psi_n &= 2\lambda \frac{V}{r} n\alpha v_n, & \wp_n^2 \chi_n &= -2\lambda \frac{V}{r} n\alpha w_n, \end{aligned}$$

y si se toma  $\xi_n = -\chi_n$ ,

$$\wp_n w_n = -2a\lambda n\alpha \xi_n, \quad \wp_n^2 \xi_n = 2\lambda \frac{V}{r} n\alpha w_n.$$

Se ve que los valores propios del problema sin simetrías son de multiplicidad par y que para  $a \geq 0$ ,  $V \geq 0$  no hay bifurcación a partir del flujo de Couette de soluciones independientes de  $t$  y  $\theta$ . Esta consideración no la tuvieron en cuenta los autores de [20] quienes suponen la existencia de un valor propio simple sin restringir las soluciones con las simetrías que se han mencionado ( $v$  par y  $\phi$  impar, ambos respecto a  $z$ ).

3) Al escoger  $\alpha_0 = n_0\alpha$  se reduce la altura de los cilindros a  $2\pi/\alpha_0$  o se considera solamente un vórtice de Taylor (un vórtice de Taylor consiste en dos vórtices que giran en sentido contrario).

Entre dos vórtices existe una línea donde la velocidad vertical es cero, i. e., para alguna  $z$  se cumple que  $u_3 = 0 \quad \forall r$ . Si  $\lambda \sim \bar{\lambda}_1$  se puede hacer la siguiente aproximación:  $u_3 \simeq \frac{\partial}{\partial r} [r\phi_1(r) \sin(\alpha_0 z)] = \sin(\alpha_0 z) \frac{\partial}{\partial r} [r\phi_1(r)] = 0$ , de donde  $z = k\pi/\alpha_0$ . El ancho aproximado de un vórtice es entonces  $\pi/\alpha_0$ , y el de un vórtice de Taylor  $2\pi/\alpha$ .

## SOLUCION AL PROBLEMA DE BIFURCACION

Esta parte de la tesis está basada en [16].

Conviene recordar que el objetivo del presente trabajo es probar la existencia de soluciones no triviales al sistema (4.2) o del sistema equivalente (5.8) en el espacio de funciones (4.18), con las restricciones (5.4). Invirtiendo los operadores  $\mathfrak{U}$  y  $\mathfrak{U}^2$ , el problema también puede ser expresado por la ec. (4.19) en el mismo espacio y con las mismas restricciones.

Se trabajará cerca de  $\bar{\lambda}_1$ , el valor propio algebraicamente simple (Teorema 8); para hacerlo así sean  $\lambda = \bar{\lambda}_1 + \mu$ ,  $W = (u, \psi)$ ,  $G(W) = T(u, \psi) - B(u, \psi)$ . Con esta notación, el problema (4.19) queda expresado de la manera siguiente:

$$W = \lambda BW + \lambda G(W),$$

definido sobre  $E$  (ver ec.(4.18)) con  $B$  compacto y  $G$  bilineal. Por el hecho de que  $\bar{\lambda}_1$  es algebraicamente simple,  $E = \ker(I - \bar{\lambda}_1 B) \oplus \text{Rango}(I - \bar{\lambda}_1 B)$  (cf. [16], p. 36), donde la descomposición directa puede verse si se usa el hecho que  $\text{Rango}(I - \bar{\lambda}_1) = \ker(I - \bar{\lambda}_1 B^*)^\perp$ , donde  $B^*$  es el adjunto de  $B$  y el producto escalar viene dado por (5.2).

Si  $W = \eta W_1 + W_2$ , con  $W_1 = (u_1(r) \cos(\alpha z), \phi_1(r) \sin(\alpha z))$ ,  $Q$  es la proyección sobre  $\text{Rango}(I - \bar{\lambda}_1 B)$  y  $I - Q$  la proyección sobre  $\ker(I - \bar{\lambda}_1 B)$ , entonces  $\eta W_1 + W_2 = \lambda B(\eta W_1 + W_2) + \lambda G(\eta W_1 + W_2) = \lambda \eta W_1 / \bar{\lambda}_1 + \lambda B W_2 + \lambda G(\eta W_1 + W_2)$ , ya que  $\bar{\lambda}_1 B W_1 = W_1$ .

$B W_2 \in \text{Rango}(I - \bar{\lambda}_1 B)$  ya que  $W_2 = (I - \bar{\lambda}_1 B) \bar{W}$  y por lo tanto  $B W_2 = (I - \bar{\lambda}_1 B) B \bar{W}$ .

Por otro lado, proyectando sobre  $\ker(I - \bar{\lambda}_1 B)$ ,

$$\eta = \lambda / \bar{\lambda}_1 \eta + \lambda (G(\eta W_1 + W_2)),$$

y entonces

$$\Upsilon \eta + (\bar{\lambda}_1 + \Upsilon)(I - Q)G(\eta W_1 + W_2) = 0.$$

Además, proyectando sobre  $\text{Rango}(I - \bar{\lambda}_1 B)$ ,

$$W_2 = \lambda B W_2 + \lambda Q G(\eta W_1 + W_2)$$

$$= \bar{\lambda}_1 B W_2 + \Upsilon B W_2 + \lambda Q G(\eta W_1 + W_2).$$

Ahora,  $(I - \bar{\lambda}_1 B)|_{\text{Rango}(I - \bar{\lambda}_1 B)}$  es inyectiva ya que  $\ker(I - \bar{\lambda}_1 B) \cap \text{Rango}(I - \bar{\lambda}_1 B) = \{0\}$ . También es sobreyectiva ya que  $X \in \text{Rango}(I - \bar{\lambda}_1 B)$  si y solo si  $X = (I - \bar{\lambda}_1 B)W = (I - \bar{\lambda}_1 B)W_2$ . Entonces el operador  $I - \bar{\lambda}_1 B$  que va de  $\text{Rango}(I - \bar{\lambda}_1 B)$  a  $\text{Rango}(I - \bar{\lambda}_1 B)$  tiene un inverso  $K$  y por lo tanto la segunda ecuación se escribe

$$W_2 - \Upsilon K B W_2 - \lambda K Q G(\eta W_1 + W_2) \equiv F(W_2, \Upsilon, \eta).$$

$F(W_2, \Upsilon, \eta)$  es una función analítica ya que  $G$  es cuadrático en sus argumentos, va de  $\text{Rango}(I - \bar{\lambda}_1 B) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  a  $\text{Rango}(I - \bar{\lambda}_1 B)$ , con  $F(0, 0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial F(0, 0, 0)}{\partial W_2} = I$ , ya que  $\frac{\partial G(0)}{\partial u} = 0$ . Entonces, por el Teorema de la Función Implícita (cf. [1]) existe una única función  $W_2(\Upsilon, \eta)$  tal que  $F(W_2(\Upsilon, \eta), \Upsilon, \eta) = 0$  y  $W_2(0, 0) = 0$ , definida en una vecindad del punto  $(0, 0)$  y  $W_2(\Upsilon, \eta)$  es analítica en  $\Upsilon$  y  $\eta$ .

Además para  $\Upsilon < \|K\|^{-1}$ ,  $I - \Upsilon K$  es invertible y entonces

$$W_2 = \lambda (I - \Upsilon K)^{-1} K Q G(\eta W_1 + W_2).$$

Si  $\eta = 0$ , debido a que  $G$  es cuadrático y por las desigualdas para  $T$  (Lema 4), el lado derecho es acotado por  $C(\Upsilon) \|W_2\|^2$ . Entonces, para  $\Upsilon$  pequeña la única solución es

$W_2 \equiv 0$  en una vecindad de  $W_2 = 0$ . El desarrollo en series de Taylor de  $W_2$  alrededor de cero,

$$W_2(\Upsilon, \eta) = \eta \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n + \Upsilon \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,m} \eta^n \Upsilon^m \right),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} W_2(0, \eta) &= \eta \sum_0^{\infty} a_n \eta^n = \bar{\lambda}_1 KQG \left( \eta W_1 + \eta \sum_0^{\infty} a_n \eta^n \right) \\ &= \eta^2 \bar{\lambda}_1 KQG \left( W_1 + \sum_0^{\infty} a_n \eta^n \right). \end{aligned}$$

Identificando potencias se tiene que  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = \bar{\lambda}_1 KQG(W_1)$ , etc., y por lo tanto

$$W_2(\Upsilon, \eta) = \eta(\eta A(\eta) + \Upsilon B(\eta, \Upsilon)).$$

En la ecuación de bifurcación

$$\Upsilon \eta + (\bar{\lambda}_1 + \Upsilon)(I - Q)G(\eta W_1 + W_2(\Upsilon, \eta)) = 0$$

se tiene, debido a que  $G$  es cuadrática,

$$\eta[\Upsilon + \eta(\bar{\lambda}_1 + \Upsilon)(I - Q)G(W_1 + \eta A(\eta) + \Upsilon B(\eta, \Upsilon))] = 0.$$

La solución  $\eta = 0$  es la trivial ya que  $W_2(\Upsilon, 0) = 0$ , y queda

$$\Upsilon + \eta(\bar{\lambda}_1 + \Upsilon)(I - Q)G(W_1 + \eta A(\eta) + \Upsilon B(\eta, \Upsilon)) = h(\Upsilon, \eta) = 0$$

con  $h(0, 0) = 0$ ,  $h_{\Upsilon}(0, 0) = 1$ , y por el Teorema de la Función Implícita hay una única solución  $\Upsilon = \Upsilon(\eta)$ , analítica en  $\eta$  para  $\eta$  pequeña, con  $\Upsilon(0) = 0$ .

Considérese a  $W_1(r, z) = (u_1(r) \cos(\alpha z), \psi_1(r) \sin(\alpha z))$ ;  $\bar{W}_1(r, z) = W_1(r, z + \pi/\alpha) = -W_1(r, z)$ . Se ha probado que la única solución no trivial para  $\eta$  cercano a cero es  $(\eta W_1(r, z) + W_2(r, z, \Upsilon(\eta), \eta), \Upsilon(\eta))$ . Pero de acuerdo a lo que dice el Lema 6,  $(\eta \bar{W}_1(r, z) + \bar{W}_2(r, z, \Upsilon(\eta), \eta), \Upsilon(\eta)) = (-\eta W_1(r, z) + W_2(r, z, \Upsilon(\eta), \eta), \Upsilon(\eta))$  también es solución. Por la unicidad debe cumplirse con  $\bar{W}_2(r, z, \Upsilon(\eta), \eta) = W_2(r, z, \Upsilon(-\eta), -\eta)$  y  $\Upsilon(-\eta) = \Upsilon(\eta)$ . Por lo tanto  $\Upsilon$  es función par de  $\eta$  y la bifurcación es de un solo lado de  $\bar{\lambda}_1$ , sea  $\Upsilon \geq 0$  o  $\Upsilon \leq 0$ . Con esto se ha probado un resultado importante:

**TEOREMA 9** A partir de  $\bar{\lambda}_1$  hay una única rama de soluciones no triviales que bifurca del flujo de Couette con las propiedades siguientes:

1) La rama tiene la forma  $(\eta W_1(r, z) + W_2(r, z, \Upsilon(\eta), \eta), \bar{\lambda}_1 + \Upsilon(\eta))$  con  $W = (u, \psi)$ ,  $u$  par en  $z$ ,  $\psi$  impar en  $z$ ,  $\Upsilon(\eta) = \Upsilon(-\eta)$ ,  $W_2(r, z, \Upsilon(-\eta), -\eta) = W_2(r, z + \pi/\alpha, \Upsilon(\eta), \eta)$ , donde todas las funciones son analíticas en  $\eta$ .

2) La bifurcación es unilateral (i. e.  $\Upsilon \geq 0$  o  $\Upsilon \leq 0$ ).



## COMENTARIOS FINALES

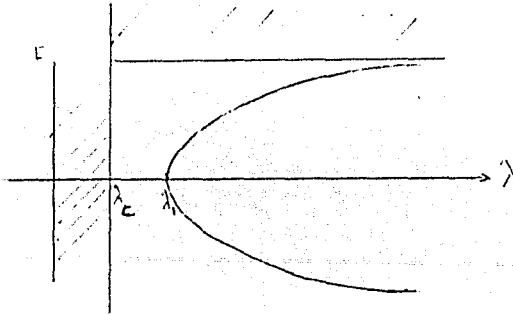
1) Sea  $\lambda_{1,n}$  primer valor característico de  $B_n$  para algún  $n$  y para un  $\alpha$  dados. Se sabe que

$$\lambda_{1,n} \geq \frac{r_1^2}{b} (n\alpha)^2 \rightarrow \infty.$$

Tomando el más grande  $n_0$  de los  $n$ 's tales que  $\lambda_{1,m} = \lambda_{1,n_0}$  y cambiando  $\alpha$  por  $n_0\alpha$ , el teorema 9 demuestra que se tiene bifurcación de una curva analítica de soluciones a partir de  $\lambda_{1,n_0}$ . Se obtiene entonces un número infinito de ramas bifurcadas del flujo de Couette que corresponden a números de onda  $n_0\alpha$  cada vez más grande y periódicas de período  $2\pi/\alpha$  en  $z$ , también cada vez más grande, y con  $u$  y  $\phi$  funciones par e impar en  $z$  respectivamente.

2) Nótese que  $B_n$  puede tener otros valores característicos, generando valores propios  $\lambda$  para el problema  $W = \lambda BW + \lambda GW$ , que no son simples necesariamente. Para este tipo de valores propios se puede usar el siguiente teorema de bifurcación global de Rabinowitz (cf. [16], p. 77) donde se usa la compacidad de  $B$  y  $G$ . (Se prueba usando teoría de grado).

**TEOREMA 10** Sea  $\lambda_0$  un valor característico de  $B$  con multiplicidad algebraica impar; entonces, a partir de  $(0, \lambda_0)$  hay una rama de soluciones no triviales en el espacio  $E \times \mathbb{R}$ , la cual o es 1) no acotada, o 2) regresa a otro punto  $(0, \lambda_1)$  con  $\lambda_1$  valor característico de  $B$ .



En este caso se sabe que no hay soluciones no triviales para  $0 \leq \lambda \leq \lambda_c$  y que  $\|W\|_E \leq c(\lambda)$  (ver teorema 4), por lo tanto si la rama no es acotada se tendrán soluciones no triviales para  $\lambda > \overline{\lambda_1}$ .

3) Debe hacerse notar que en este trabajo no se ha tocado el problema de estabilidad de las soluciones encontradas. El motivo de no hacerlo es que la estabilidad lineal depende

del espectro de  $B$ . Si bien el teorema de Krein-Rutman puede extenderse al caso complejo, dando como resultado que todos los valores propios de  $K$  tienen la propiedad de ser menores que  $\lambda_{1,n}$ , dando resultados de estabilidad en el flujo de Couette para  $\lambda < \overline{\lambda_1}$ , los resultados de estabilidad para los vórtices de Taylor no son establecidos firmemente desde el punto de vista matemático y en todo caso son resultados válidos solo para perturbaciones en el espacio  $E$ , es decir, con todas las simetrías que se han usado, y no para perturbaciones arbitrarias en el espacio de campos de velocidades: en ese espacio el problema es altamente degenerado con núcleos de alta dimensión (por lo menos 2, como ya se ha visto).

4) A partir de 1980 cierto número de investigadores han estudiado el problema de Couette-Taylor usando técnicas de teoría de singularidades con simetrías (cf. [8], [12]). La idea es usar las simetrías del problema en  $\theta$ ,  $z$  y  $t$ , y proponer un modelo de dimensión finita (6 en estos artículos) con ecuaciones algebraicas "genéricas" para este tipo de simetrías. Al estudiar este modelo se puede discutir las distintas formas de las soluciones obtenidas (ver las fotografías de la introducción), sus posibles estabildades y las transiciones de una a otra según los valores de los parámetros. El defecto de este modelo es que no está basado en leyes físicas, sino en consideraciones matemáticas; por lo tanto su relación con las ecuaciones de Navier-Stokes o con la mecánica de fluidos —para hablar con generalidad— no está establecida.

Desde el punto de vista clásico (apoyándose en las ecuaciones de Navier-Stokes) no hay mucho más que lo presentado en esta tesis (aparte, claro está, de resultados numéricos y experimentales). Los casos donde  $V$  cambia de signo o  $a \geq 0$ , o el problema que busca soluciones dependientes de  $\theta$  y  $t$  no han sido prácticamente estudiados, sin mencionar el caso físico de condiciones de frontera reales en  $z$  (no las periódicas).

5) En [20] se hace un estudio teórico y numérico sobre el problema con las simetrías y demás condiciones que se han manejado en este trabajo. Los resultados predichos concuerdan con los experimentales razonablemente bien, sobre todo si —como se mencionó en el primer capítulo— la diferencia entre los radios es muy pequeña comparada con su altura.

## REFERENCIAS

- [1] Agmon, S., 1965, *Elliptic Boundary Value Problems*, Academic Press.
- [2] Barcilon, A., J. Brindley, M. Lessen & F. R. Mobbs, 1979, *J. Fluid Mech.*, **94**, 453-463.
- [3] Bouabdallah, A. & G. Cognet, 1979, *Laminar-Turbulent Transition in Couette-Taylor Flow*, I.U.T.A.M. Symposium on Laminar-Turbulent Transition.
- [4] Brooke, T., 1980, *Procc. of a Symp. Conducted by The Mathematics Research Center (The Univ. of Wisconsin-Madison)*, 25-41.
- [5] Coddington, E. A. & N. Levinson, 1955, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc. Graw-Hill.
- [6] Currie, I. F., 1974, *Fundamental Fluid Dynamics*, McGraw-Hill.
- [7] Chandrasechar, S., 1961, *Hydrodynamic and Hidromagnetic Stability*, Oxford University Press.
- [8] Chossat, P. & G. Iooss, 1985, *Japan J. Appl. Math.*, Vol. 2, **1**, 37-68.
- [9] DiPrima, R. C., 1980, *Porcc. of a Symp. Conducted by The Mathematics Research Center (The Univ. of Wisconsin-Madison)*, 1-23.
- [10] Donnelly, R. J., K. Park, R. Shaw & R. W. Walden, 1980, *Phys. Rev. Lett.*, **44**, 987-989.
- [11] Fenstermacher, P. R., H. L. Swinney & J. P. Gollub, 1979, *J. Fluid Mech.*, **94**, 103-128.
- [12] Golubitsky, M. & I. Stewart, 1986, *SIAM J. Math. Anal.*, **17**, 249-288.
- [13] Gorman M. & H. L. Swinney, 1979, *Phys. Rev. Lett.*, **45**, 1871-1875.
- [14] Gorman M., L. A. Reith & H. L. Swinney, 1980, *Ann. New York Acad. Sci.*, **357**, 10-21.
- [15] Gradshtein, I. S., 1980, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press.
- [16] Ize, J., 1976, *Bifurcation Theory for Fredholm Operators*, *Memoirs of the A. M. S.*, Vol. 7, **174**.
- [17] Ize, J., 1987, *Notas de Clase de Ecuaciones Diferenciales Parciales II*, *Fac. de Ciencias, U.N.A.M.*
- [18] Ize, J., 1981, *Teoría de Bifurcación*, *I.I.M.A.S., U.N.A.M.*
- [19] Joseph, D. D., 1976, *Stability of Fluid Motions*, Vol. 1, Springer-Verlag.
- [20] Kirchgässner, K. & P. Sorger, 1969, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **22**, 183-209.
- [21] Koschmieder, E. L., 1979, *J. Fluid Mech.*, **93**, 515-527.
- [22] Krasnoselk, M. A., 1964, *Positive Solutions of Operator Equations*, P. Noordhoff LTD.
- [23] Landau, L. D. & E. M. Lifshitz, 1982, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press.
- [24] L'vov, V. S. & A. A. Predtechensky, 1979, *Institute of Automation and Electrometry, Novosibirsk, U. S. S. R.*, Preprint 111.
- [25] Meyer-Spasche, R. & H. B. Keller, 1978, *Numerical Study of Taylor-Vortex Flows between rotating cylinders*, *Appl. Math.. Calthech*.
- [26] Mobbs, F. R., S. Preston & M. S. Ozagan, 1979, *An Experimental Investigation of Taylor Vortex Waves*, in *Taylor Vortex Flow Working Party, Leeds*.

- [27] Protter, M., & H. Weinberger, 1970, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice Hall.
- [28] Red, M. & B. Simon, 1964, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic Press.
- [29] Rektorys, K., 1975, *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, D. Reidel Publishing Company.
- [30] Sorger, P., 1966, *Z. Angew. Math. Phys.*, **17**, 201-216.
- [31] Taylor, G. I., 1923, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **223**, 289-343.
- [32] Temam, R., 1977, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North-Holland.
- [33] Velte, W., 1966, *Arch. ration. Mech. Analysis*, **22**, 1-14.
- [34] Walden, R. W. & R. J. Donnelly, 1979, *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 301-304.
- [35] Whitaker, 1970, *Introduction to Fluid Mechanics*, Pergamon Press.
- [36] Zhuravel, F. A., Z. B. Kruglayak, E. A. Kuznetsov, V. S. L'vov, Y. E. Nesterikhin, A. A. Predtechensky & V. S. Sobolev, 1979, *Institute of Automation and Electrometry, Novosibirsk, U. S. S. R., Preprint 103.*