



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

**“RESULTADOS RECIENTES EN
TEORIA DE NUCLEOS”**

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

MARIA DEL ROCIO ROJAS MONROY



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

	pág.
1. Introducción	1
2. Aplicaciones	4
3. Algunos resultados clásicos	11
4. Estructura de las R^--digráficas	18
5. La conexidad de R^--digráficas	36
6. Una condición suficiente para que una digráfica sea R^--digráfica	50
7. Una digráfica de paridad es R^--digráfica	55
8. Las digráficas de paridad son Núcleo-M-Solubles	58
9. Núcleos en gráficas i-trianguladas	65
Referencias	70

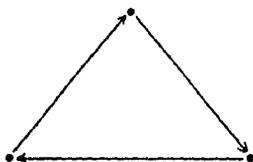
1. INTRODUCCION

El objetivo de este trabajo es presentar un panorama de los resultados más recientes en Teoría de Núcleos y algunas de sus aplicaciones.

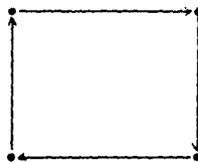
En 1986, M. Blidia demostró que toda digráfica de paridad tiene núcleo. Aquí doy una nueva demostración más simple de dicho resultado.

Definimos una *digráfica* D como un conjunto finito no vacío de objetos llamados *vértices* y denotado por $V(D)$, junto con una colección de pares ordenados de distintos elementos de $V(D)$ llamados *flechas* y denotada por $F(D)$. Para $(u_1, u_2) \in F(D)$ escribiremos $u_1 u_2$ en lugar de (u_1, u_2) .

Se dice que un conjunto $I \subset V(D)$ es *independiente* si para cualesquiera dos vértices $x, y \in I$, $(x, y) \notin F(D)$. Un conjunto $S \subset V(D)$ es *absorbente* si para cada $x \in (V(D) - S)$ existe una flecha de x a S en D . Un conjunto $N \subset V(D)$ se dice que es un *núcleo* si es independiente y absorbente. No toda digráfica tiene núcleo y si una digráfica tiene núcleo no necesariamente éste es único.



Digráfica sin núcleo



Digráfica con dos núcleos

Es fácil ver que en general los ciclos impares \vec{C}_{2k+1} no tienen núcleo y que los ciclos pares \vec{C}_{2k} tienen dos núcleos.

El concepto de núcleo de una digráfica fue considerado primeramente por Von Neumann en Teoría de Juegos donde lo llamó "solución de un juego de cooperación entre n personas". Posteriormente C. Berge [6] notó que el mismo concepto resultaba de utilidad en otros contextos y propuso llamarlo "el núcleo de una digráfica" y demostrar más teoremas de existencia.

En la sección 2 se incluyen aplicaciones de la Teoría de Núcleos en varios campos. Y en la sección 3 se mencionan los primeros resultados obtenidos sobre la existencia de núcleos en digráficas.

En la sección 4 se introducen los conceptos de R -digráfica y R^- -digráfica y a partir del estudio de la estructura de éstas últimas (secciones 4 y 5) se obtienen más condiciones suficientes para que una digráfica tenga núcleo, como se muestra en las secciones 6, 7 y 8. En particular en la sección 7, doy una demostración más simple del resultado ahí expuesto que la obtenida por M. Blidia en [9].

En las secciones 8 y 9 se estudian casos particulares de la relación entre los conceptos de R -digráfica y Gráfica perfecta establecida por Berge y Duchet [8].

Preliminares

Dada una digráfica D y $u \in V(D)$, definimos $\Gamma^+(u) = \{v \in V(D) / (u, v) \in F(D)\}$ y $\Gamma^-(u) = \{v \in V(D) / (v, u) \in F(D)\}$. Si D_0 es una subdigráfica (resp. subdigráfica inducida) de D , escribiremos $D_0 \subseteq D$ (resp. $D_0 \subseteq^* D$). Si $S_1, S_2 \subseteq V(D)$, la flecha $u_1 u_2$ de D será llamada una $S_1 S_2$ -flecha siempre que $u_1 \in S_1$ y $u_2 \in S_2$. $D[S_1]$ denotará la subdigráfica de D inducida por S_1 , y $D[S_1, S_2]$ la subdigráfica de D con conjunto de vértices $S_1 \cup S_2$ y cuyas flechas son las $S_1 S_2$ -flechas de D . Una flecha $u_1 u_2 \in F(D)$ es llamada *asimétrica* (resp. *simétrica*) si $u_2 u_1 \notin F(D)$ (resp. $u_2 u_1 \in F(D)$). La parte asimétrica de D (resp. parte simétrica de D) que será denotada por $Asim(D)$ (resp. $Sim(D)$), es la subdigráfica generadora de D cuyas flechas son las flechas asimétricas (resp. simétricas) de D . Diremos que D es una *gráfica orientada* si $Asim(D) = D$.

Conexidad fuerte. Un camino dirigido en una digráfica es una sucesión de puntos y flechas, $(u_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n)$ en el cual cada flecha $x_i = (v_{i-1}, v_i)$. La longitud de dicho camino es n , el número de flechas que aparecen en él. Un camino cerrado es el que tiene los mismos puntos inicial y final, un camino generador contiene a todos los puntos de la digráfica. Una trayectoria es un camino en el cual todos los puntos son distintos; un ciclo es un camino cerrado no trivial con todos los puntos distintos (excepto el primero y el último), el ciclo de longitud n será denotado por \vec{C}_n . Si hay una trayectoria de u a v , entonces se dice que v es alcanzable desde u .

Una digráfica es fuertemente conexa, o fuerte, si cualesquiera dos puntos

son mutuamente alcanzables. Notemos que la digráfica trivial, consistente de exactamente un punto, es (por vacuidad) fuerte ya que no contiene dos puntos distintos.

Una *componente fuerte* de una digráfica es una subdigráfica fuerte maximal. Es fácil verificar que cada punto está exactamente en una componente fuerte y una flecha está en una componente fuerte o en ninguna dependiendo si pertenece o no a algún ciclo. Una *componente fuerte terminal* de D es una componente fuerte tal que de ella no salen flechas hacia otra componente fuerte distinta.

Definimos el *complemento de D* , como la digráfica \bar{D} tal que $V(\bar{D}) = V(D)$ y $(x, y) \in F(\bar{D})$ si y solo si $(x, y) \notin F(D)$.

Para terminología no definida aquí ver por ejemplo C. Berge [3], Behzad-Chartrand [1].

son mutuamente alcanzables. Notemos que la digráfica trivial, consistente de exactamente un punto, es (por vacuidad) fuerte ya que no contiene dos puntos distintos.

Una *componente fuerte* de una digráfica es una subdigráfica fuerte maximal. Es fácil verificar que cada punto está exactamente en una componente fuerte y una flecha está en una componente fuerte o en ninguna dependiendo si pertenece o no a algún ciclo. Una *componente fuerte terminal* de D es una componente fuerte tal que de ella no salen flechas hacia otra componente fuerte distinta.

Definimos el *complemento de D* , como la digráfica \bar{D} tal que $V(\bar{D}) = V(D)$ y $(x, y) \in F(\bar{D})$ si y solo si $(x, y) \notin F(D)$.

Para terminología no definida aquí ver por ejemplo C. Berge [3], Behzad-Chartrand [1].

2. APLICACIONES

2.1 Aplicación en Teoría de Juegos (Von Neumann, Morgenstern, 1944 [36])

El concepto de núcleo fue presentado primeramente bajo el nombre de *solución* en la Teoría de Juegos en el siguiente ejemplo:

Supongase que n personas $(1), \dots, (n)$ deben discutir juntas y elegir un punto x ("una situación") de un conjunto X ("un conjunto de situaciones"). Notemos primero que tenemos un conjunto no vacío X , y entre las n personas deben elegir un elemento x (una situación) del conjunto X . Así, entre las n personas se debe establecer la preferencia de una situación sobre las demás. Para esto necesitan establecer una relación de preferencia entre algunos pares de "situaciones". Veamos ahora cómo (con qué criterio) establecer una relación de preferencia entre un par de situaciones. Las preferencias individuales podrían no ser compatibles y se requiere una elección de grupo, así que la preferencia individual no será considerada. La preferencia unánime de una situación a sobre una situación b sería la mejor solución, pero es muy difícil que esto suceda. Notemos que en realidad la importancia de la unanimidad es la capacidad de imponer o de obligar la preferencia de a , sobre b , y esto es lo que se considerará.

La "preferencia efectiva": diremos que a es efectivamente preferida a la situación b si entre las n personas existe un grupo de personas capaces ellas juntas de obligar o de imponer la preferencia de a sobre b .

El conjunto de situaciones y la relación de preferencia efectiva que se dará en algunos pares de situaciones define de manera natural una digráfica D con $V(D) = X$ y con $(a, b) \in F(D)$ si b es efectivamente preferida sobre a , $a \rightarrow b$. Si la digráfica D tiene algún núcleo S , la elección de el punto x se limita a elegir un punto de S . Ya que por ser S independiente ninguna situación en S es efectivamente preferida a otra de S , y si $x \notin S$, entonces existiría otra situación en S que es efectivamente preferible a x .

2.2 Base de axiomas (C. Berge [3])

Consideremos una "teoría", esto es: un conjunto de proposiciones a, b, c, \dots y se quiere encontrar una *base de axiomas* para esta teoría, esto es, un conjunto B de proposiciones tales que:

- (1) Cada proposición que no está en B se sigue de alguno de los axiomas.
- (2) Ningún axioma se sigue de otro.

Podemos representar cada proposición por un vértice y una flecha de a a b , $a \rightarrow b$ si b implica a . La digráfica resultante D es *transitiva*, esto es, $(a, b) \in F(D)$ y $(b, c) \in F(D)$ implica que $(a, c) \in F(D)$. Claramente el problema de encontrar una base de axiomas se traduce a encontrar un núcleo en la digráfica D . Se ha demostrado que toda digráfica transitiva tiene núcleo, la demostración se dará en la sección 3.

2.3 Juego entre dos personas (C. Berge [3])

Dados los jugadores A y B y una digráfica D , se puede definir el siguiente juego: se fija un punto inicial x_0 . El jugador A selecciona un punto x_1 en $\Gamma^+(x_0)$, el jugador B selecciona cualquier vértice x_2 en $\Gamma^+(x_1)$, enseguida el jugador A selecciona un punto x_3 en $\Gamma^+(x_2)$ etc, y pierde el primer jugador que no puede elegir un vértice. Claramente si la digráfica tiene ciclos el juego podría no terminar. Si la digráfica D tiene un núcleo, entonces el jugador que escoge un punto en el núcleo empataría o gana.

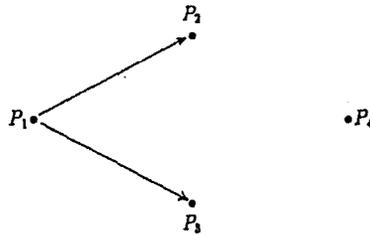
2.4 Un problema de combinatoria en lógica (C. Berge [2])

Consideremos un conjunto de propiedades $P = \{P_1, P_2, \dots\}$ y un conjunto de teoremas del tipo: "propiedad P_i implica propiedad P_j ". Estos teoremas pueden ser representados por una digráfica D , con conjunto de vértices P ,

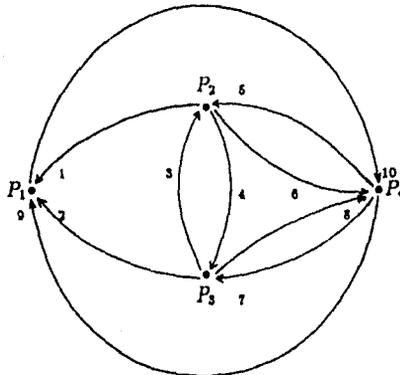
donde $(P_i, P_j) \in F(D)$ si y solo si se sigue de uno o más de los teoremas dados que P_i implica P_j . Supongamos que queremos mostrar que todas las implicaciones representadas por las flechas del complemento de D , \bar{D} son falsas, es decir, que la teoría representada en D ya está completa, más precisamente, por cada pareja (p, q) con $p \neq q$ y $(p, q) \notin F(D)$, asignaremos un estudiante que tiene que encontrar un ejemplo donde p se cumple pero q no, (es decir, un contraejemplo de la afirmación p implica q).

Aquí determinaremos el mínimo número de estudiantes necesarios para mostrar que todas las posibles implicaciones están ya representadas en la digráfica D .

Consideremos la siguiente digráfica D :



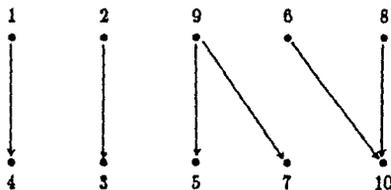
\bar{D} , digráfica complementaria de D :



Es suficiente con probar la falsedad de las implicaciones representadas por las cinco flechas 3, 4, 5, 7, y 10 de \bar{D} de las cuales se sigue la falsedad

de las otras posibles implicaciones. Por ejemplo tenemos $P_3 \not\Rightarrow P_1$, de otro modo $P_3 \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_3$ contradice la afirmación de que la flecha (P_3, P_1) es falsa.

Sea H una digráfica cuyos vértices representan las flechas $1, 2, \dots, 10$ de \bar{D} y donde una flecha es dibujada de i a j si y solo si "la implicación i es verdadera" implica "la implicación j es verdadera".



En H , el conjunto $N = \{3, 4, 5, 7, 10\}$ es un núcleo, es decir, es absorbente e independiente. Del hecho que N es absorbente, se sigue que si las implicaciones 3, 4, 5, 7 y 10 son falsas entonces todas las implicaciones 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 son falsas, y al ser N independiente, resulta ser minimal con respecto a la propiedad anterior. Como N es el único núcleo de H , se sigue que cinco contraejemplos son necesarios para mostrar que todas las implicaciones de D son falsas.

2.4.1 Las antibases de una teoría

Una teoría $T = (X, C)$ esta definida por:

- (i) Un conjunto X cuyos elementos x_1, x_2, x_3, \dots pueden ser pensados como proposiciones.
- (ii) Una relación de cerradura C en X ; para $S \subset X$, $C(S)$ denota el conjunto de todas las proposiciones en X que pueden ser probadas a partir de las proposiciones en S .

Por conveniencia escribimos $C(s)$ en lugar de $C(\{s\})$ para $s \in X$.

Una teoría $T = (X, C)$ es *unitaria* si $x \in C(S)$ implica la existencia de algún $s \in S$ tal que $x \in C(s)$. En otro caso T es *plural*. Si una teoría T es unitaria, puede ser representada por una digráfica transitiva con conjunto de vértices X , donde (x, y) es una flecha si y solo si $x \in C(y)$. Una *base* de

axiomas para T es un conjunto $B \subseteq X$ tal que $C(B) = X$ y el cual es minimal con respecto a esta propiedad.

Una **antibase** para T es un conjunto $A \subseteq X$ tal que $C(x) \cap A \neq \emptyset$ para todo $x \in X$ y el cual es minimal con respecto a esta propiedad. La interpretación de esta definición es que si todas las proposiciones en A son falsas entonces todas las proposiciones en X son falsas y A es minimal con respecto a esta propiedad. La **inversa** $T' = (X, C')$ de una teoría $T = (X, C)$ esta definida por : $x \in C'(S)$ si y solo si $C(x) \cap S \neq \emptyset$. Es fácil checar que T' es una teoría, pues X es el mismo conjunto de proposiciones que en T y C' es una relación de cerradura en X .

Lema 2.1 La inversa T' de una teoría T es unitaria.

Demostración. Sea $S \subset X$ y $x \in C'(S)$, entonces $C(x) \cap S \neq \emptyset$ por definición de C' . Sea $s \in C(x) \cap S$, entonces $C(x) \cap \{s\} \neq \emptyset$ esto implica que $x \in C'(s)$ y por lo tanto T' es unitaria. \square

Lema 2.2 Un conjunto $A \subseteq X$ es una antibase para T si y solo si A es una base para T' .

Demostración. Si $A \subseteq X$ es una antibase par T entonces $C(x) \cap A \neq \emptyset$ para toda $x \in X$ y es minimal con respecto a esta propiedad. Esto es, $x \in C'(A)$ para toda $x \in X$, donde C' es la relación de cerradura de T . Esto implica que $X = C'(A)$ y A es minimal con respecto a esta propiedad, por lo tanto A es una base de axiomas para T' .

Ahora, si A es una base de axiomas para T' , entonces $C'(A) = X$ y A es minimal con respecto a esta propiedad, esto es, $x \in C'(A)$ para toda $x \in X$. Esto implica que $C(x) \cap A \neq \emptyset$ para todo $x \in X$, por lo tanto A es una antibase para T . \square

Como T' , la inversa de una teoría T es unitaria, entonces puede ser representada por una digráfica transitiva.

Lema 2.3 $A \subseteq X$ es una base para $T' = (X, C')$ si y solo si es un núcleo para H , donde H es la digráfica transitiva que representa a T' .

Demostración. Sea H la digráfica transitiva que representa a T' , entonces $V(H) = X$ y $(x, y) \in F(H)$ si y solo si $x \in C'(y)$.

Sea N un núcleo de H , entonces N es un conjunto independiente y ab-

sorbente. Entonces para cada $x \in X - N$ existe $y \in N$ tal que $(x, y) \in F(H)$, esto es $x \in C'(y)$, por lo tanto $X = C'(N)$ y N es minimal con respecto a esta propiedad, ya que si suponemos que existe $N' \subsetneq N$ tal que $X = C'(N')$, tomamos $x' \in N - N'$ y como N es independiente $x' \notin C'(y)$ para todo $y \in N$, entonces $x' \notin C'(N')$ y por lo tanto $X \not\subseteq C'(N')$, por lo tanto N es una base de axiomas para T' .

Inversamente, sea N una base de axiomas para T' , esto es, $X = C'(N)$ y N es minimal con respecto a esta propiedad. Como T' es unitaria entonces para cada $x \in X$ existe $y \in N$ tal que $x \in C'(y)$, es decir $(x, y) \in F(H)$ y N es minimal con respecto a esta propiedad, por lo tanto N es absorbente. N es independiente ya que si suponemos que existen $x, x' \in N$ tal que $(x, x') \in F(H)$, entonces si $y \in C'(x)$, $(y, x) \in F(H)$ y por la transitividad de H , $(y, x') \in F(H)$ es decir $y \in C'(x')$ por lo tanto $X = C'(N - \{x\})$ pero esto no es posible porque N es minimal. Por lo tanto N es un núcleo de H . \square

En la sección 3 se probará el siguiente resultado: en una digráfica transitiva, todos los núcleos tienen la misma cardinalidad.

Teorema 2.1 En una teoría $T = (X, C)$ todas las antibases tienen la misma cardinalidad.

Demostración. Por el Lema 2.2, $A \subseteq X$ es una antibase para T si y solo si A es una base para T' , por el Lema 2.3 esto sucede si y solo si A es un núcleo de H , donde H es la digráfica transitiva que representa a T' . Por el resultado mencionado anteriormente todos los núcleos de H tienen la misma cardinalidad, por lo tanto todas las antibases para T tienen la misma cardinalidad. \square

2.4.2 La digráfica de implicaciones

Sea D una digráfica transitiva cuyos vértices representan proposiciones y cuyas flechas representan implicaciones y sean x_1, x_2, \dots, x_m las flechas de la digráfica complementaria \bar{D} . Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ y para $S \subseteq X$, denotemos $C(S)$ las implicaciones que se pueden derivar de las implicaciones en S , es decir todas las flechas de X que están en la cerradura transitiva de $D + S$. La pareja $T = (X, C)$ es una teoría.

Teorema 2.2 En la teoría $T = (X, C)$, definida anteriormente por una digráfica transitiva D , todas las antibases tienen la misma cardinalidad,

y esta cardinalidad es el número de absorción de la digráfica H definida por $V(H) = X$ y $(x, y) \in F(H)$ si y solo si y es una flecha de la cerradura transitiva de $D + x$. Además, hay una correspondencia uno a uno entre las antibases de T y los núcleos de H .

Demostración. Primero demostraremos que H es un digráfica transitiva. $(x, y) \in F(H)$ si y solo si $y \in C(x)$ esto es si y solo si $C(x) \cap \{y\} \neq \emptyset$ es decir, si y solo si $x \in C'(y)$. Esto quiere decir que H representa a T' y por el Lema 2.1 T' es unitaria y por lo tanto H es transitiva. El resto de la demostración se sigue directamente de los Lemas 2.2 y 2.3. \square

Este Teorema da el mínimo número de estudiantes necesarios para el problema planteado.

3. ALGUNOS RESULTADOS CLASICOS

Ya que el concepto de núcleo tiene un papel importante en el juego de cooperación entre n personas, resultó interesante tener teoremas de existencia y unicidad.

Teorema 3.1 Sea $D = (X, U)$ una digráfica *simétrica* (es decir $(x, y) \in U$ implica $(y, x) \in U$). Entonces D posee un núcleo, de hecho S es un núcleo si y solo si S es un conjunto independiente maximal.

Demostración. Sea S un conjunto independiente maximal y $x \in V(D) - S$, entonces existe una xS -flecha o una Sx -flecha en D , pero como D es simétrica entonces existe una xS -flecha y una Sx -flecha, por lo tanto S es absorbente y S es un núcleo de D .

Sea S un núcleo de D , supongamos que existe $S' \supset S$ tal que S' es un conjunto independiente, sea $x \in S' - S$, entonces no hay xS' -flechas en D , en particular no hay xS -flechas, esto contradice que S sea absorbente. Por lo tanto S es un conjunto independiente maximal. \square

Teorema 3.2 (König). Sea $D = (X, U)$ una digráfica *transitiva*, (es decir $(x, y) \in U$, y $(y, z) \in U$ implica $(x, z) \in U$). Entonces D posee un núcleo. Más aún, todo núcleo se obtiene escogiendo un vértice de cada componente fuerte terminal (y por lo tanto todos los núcleos tienen la misma cardinalidad) y todo conjunto absorbente minimal es un núcleo.

Demostración. Sea $N \subseteq V(D)$ tal que cada elemento de N proviene de una componente fuerte terminal de D .

- (i) N es un conjunto independiente. Sea $v \in N$, por definición de N , v pertenece a alguna componente fuerte terminal de D , entonces de v no salen flechas hacia otra componente distinta, en particular no salen flechas a otras componentes fuertes terminales. Por lo tanto v no es adyacente hacia los demás elementos de N .
- (ii) N es absorbente.

Observación. Como D es transitiva, u, v , están en la misma componente fuerte si y solo si (u, v) y (v, u) son flechas de D .

Sea $v \in V(D) - N$, entonces v está en alguna componente fuerte de D . Si dicha componente es terminal, existe u en esa componente tal que $u \in N$ y por la observación anterior (v, u) es una flecha de D .

Si la componente que contiene a v no es terminal, como D es finita, existe un camino dirigido de esta componente a otra que si es terminal sean u_1, u_2 los vértices inicial y final de este camino, como D es transitiva, $(u_1, u_2) \in F(D)$, por la observación $(v, u_1) \in F(D)$, por lo tanto $(v, u_2) \in F(D)$. Por otro lado existe u en la componente fuerte terminal que contiene a u_2 , tal que $u \in N$, y nuevamente por la observación $(u_2, u) \in F(D)$ y por lo tanto $(v, u) \in F(D)$ con $u \in N$.

Inversamente, sea N un núcleo de D , supongamos que existe una componente fuerte de D tal que ninguno de sus puntos pertenece a N , como de dicha componente no salen flechas hacia las otras, entonces N no sería absorbente, lo que contradice que N sea un núcleo. Por lo tanto N contiene un punto de cada componente fuerte terminal, que por lo anterior, con ellos obtenemos un núcleo, es decir, si en N hubiera algún punto que no pertenece a alguna componente fuerte terminal entonces N no sería independiente. Por lo tanto cada elemento de N pertenece a una componente fuerte terminal. Con esto concluimos la primera parte de la demostración.

Ahora sea N un conjunto absorbente minimal, supongamos que N no es independiente es decir que existen $u, v \in N$ tal que $(u, v) \in F(D)$, como D es transitiva, entonces si $(x, u) \in F(D)$ también $(x, v) \in F(D)$, esto implica que $N - \{u\}$ es absorbente, pero esto contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto N es independiente y un núcleo para D . \square

Teorema 3.3 (Von Neumann y Morgenstern, 1944, [36]). Si $D = (X, U)$ es una digráfica sin ciclos dirigidos entonces D tiene un núcleo. Mas aún, el núcleo es único.

Demostración. Por inducción sobre $|V(D)| = n$.

Para $n = 2$, sea $V(D) = \{u, v\}$, si $\{(u, v)\} = F(D)$, entonces $N = \{v\}$ es núcleo de D , análogamente si $\{(v, u)\} = F(D)$, el núcleo de D sería $N = \{u\}$, y si $F(D) = \emptyset$, entonces $N = \{u, v\}$ sería el núcleo de D , claramente en todos los casos el núcleo es único.

Hipótesis de Inducción: supongamos cierto el resultado para toda digráfica D sin ciclos dirigidos y con $|V(D)| \leq n - 1$.

Sea D una digráfica acíclica tal que $|V(D)| = n$. Sea $N_0 = \{v \in V(D) / (v, x) \notin F(D), \text{ para todo } x \in (V(D) - \{v\})\}$, $N_0 \neq \emptyset$ ya que D no tiene ciclos dirigidos. Sea $B_0 = \{v \in V(D) / \text{ existe alguna } vN_0\text{-flecha en } D\}$, ahora consideremos a la digráfica $D' = D[V(D) - (N_0 \cup B_0)]$, como $N_0 \neq \emptyset$, $|V(D')| \leq n - 1$, por hipótesis de inducción D' tiene un único núcleo N' y $N = N_0 \cup N'$ es un núcleo de D .

Ahora demostraremos que N es el único núcleo de D .

Supongamos que existe N_1 otro núcleo de D , por definición de N_0 , $N_0 \subseteq N_1$ y también por definición de D' , $N_1 - N_0$ es un núcleo de D' , entonces por hipótesis de inducción $N_1 - N_0 = N'$. Por lo tanto $N_1 = N$. \square

Teorema 3.4 (Richardson, 1946, [40]; 1953 [41], [39]). Si $D = (X, U)$ es una digráfica sin ciclos dirigidos impares (es decir ciclos dirigidos de longitud impar), entonces D tiene núcleo.

La demostración original es larga y complicada, en el año de 1971 Victor Neumann Lara [37] introdujo el concepto de *seminúcleo*, que permitió una demostración nueva mucho más simple.

El concepto de *seminúcleo* ha sido importante en el desarrollo de la Teoría de Núcleos en Digráficas.

Definición 3.1 (V. Neumann Lara, 1971, [37]). Sea D una digráfica. Diremos que $S \subseteq V(D)$ es un *seminúcleo* de D , si:

- (a) S es independiente.
- (b) Para cada flecha f que va de S a x (en virtud de la condición anterior, $x \in V(D) - S$), existe una flecha f' que va de x a S .

Claramente \emptyset es un *seminúcleo*.

Debido a que solo consideramos digráficas finitas, entonces resulta obvio el siguiente teorema.

Teorema 3.5 (V. Neumann Lara, [37], 1971). Todo *seminúcleo* está incluido en un *seminúcleo* máximo.

En caso de que la digráfica no sea finita, es consecuencia directa del siguiente lema y el Lema de Zorn.

Lema 3.1 (V. Neumann Lara, [37]) El conjunto de seminúcleos de D , ordenado por inclusión, es inductivo superiormente.

Demostración. Sea C una cadena de seminúcleos de D , es decir una colección de seminúcleos tal que si $S_1, S_2 \in C$, se tiene $S_1 \subseteq S_2$ ó $S_2 \subseteq S_1$. Sea $U = \bigcup_{S \in C} S$.

- (a) U es independiente, pues si existiera una flecha $f = (v_1, v_2)$ con sus dos terminales en U , se tendría $v_1 \in S_1 \in C$ para algún S_1 y $v_2 \in S_2 \in C$ para algún S_2 . Luego $v_1, v_2 \in \max(S_1, S_2) \in C$ lo que es imposible.
- (b) Si f es una flecha que va de U a x , existen s y S tales que $f = (s, x)$ y $s \in S \in C$. Como S es un seminúcleo, existe una flecha f' que va de x a S y, por consiguiente a U . \square

Lema 3.2 (V. Neumann Lara, [37]) Sea S un seminúcleo de D , $B = \{v \in V - S / \text{No existe flecha de } v \text{ a } S\}$ y S' un seminúcleo de la subdígrafa \overline{B} de D inducida por B . Entonces $S \cup S'$ es un seminúcleo de D .

Demostración. Sea f una flecha de u a v . Consideremos los siguientes casos:

- (i) $u \in S, v \in S$
 (ii) $u \in S', v \in S'$
 (iii) $u \in S', v \in S$
 (iv) $u \in S, v \in S'$

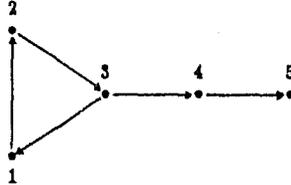
(i) e (ii) no pueden cumplirse por ser S y S' independientes. (iii) es imposible ya que $S' \subseteq B$. Finalmente, si (iv) se cumpliera, existiría otra flecha de S' a S , por ser S seminúcleo, lo cual satisfacería (iii). Luego $S \cup S'$ es independiente. Sea $A = V - (S \cup B)$, sea f una flecha de $S \cup S'$ a x . Si $x \in A$, obviamente existe una flecha de x a S y por consiguiente a $S \cup S'$. Si $x \notin A$, f necesariamente sale de S' y llega a $B - S'$ y, por ser S' seminúcleo de \overline{B} , existe f' de x a S' y, por consiguiente, a $S \cup S'$. \square

Si en el lema anterior en lugar de pedir que S' sea un seminúcleo de \overline{B} pedimos que sea un núcleo de \overline{B} , claramente la conclusión sería: $S \cup S'$ es un núcleo de D .

Analizaremos ahora algunas relaciones importantes entre los conceptos de núcleo y seminúcleo de una dígrafa.

Claramente si N es un núcleo de D entonces N es seminúcleo de D , además los núcleos son *seminúcleos máximos*, pero no recíprocamente.

Existen digráficas con seminúcleo no vacío y que no tienen núcleo.



{ 5 } es un seminúcleo de D

Por otra parte es fácil demostrar, echando mano del Lema 3.2 que si $B_0, B_1, \dots, B_k, B_{k+1}$ y S_0, S_1, \dots, S_k son dos sucesiones de subconjuntos de V tales que:

- (i) $B_0 = V, B_k \neq \emptyset, B_{k+1} = \emptyset$
- (ii) S_i es un seminúcleo de la subdigráfica inducida de D por B_i para $i = 0, \dots, k$
- (iii) $B_{i+1} = \{x \in B_i / \text{No existe flecha de } x \text{ a } S_i\}, i = 0, \dots, k$

Entonces $\bigcup_{i=0}^k S_i$ es un núcleo de D_0 . Ya que por el Lema 3.2 $\bigcup_{i=0}^k S_i$ es un seminúcleo y si existiera $x \in V$ tal que no existe flecha de x a $\bigcup_{i=0}^k S_i$, entonces no existiría flecha de x a S_i para $i = 0, \dots, k$, y esto implicaría que $x \in B_i$ para $i = 0, \dots, k+1$ pero $B_{k+1} = \emptyset$, por lo tanto $\bigcup_{i=0}^k S_i$ es un núcleo de la digráfica.

Definición 3.2 (V. Neumann Lara, [37]) Diremos que D es una *R-digráfica*, si toda subdigráfica inducida de D posee un seminúcleo no vacío. (Estas digráficas fueron llamadas independientemente por C. Berge *gráficas núcleo perfectas*).

Es evidente que si D es *R-digráfica* y D_0 subdigráfica inducida de D entonces D_0 es también *R-digráfica*.

Teorema 3.6 (V. Neumann Lara, [37]) Toda R -digráfica posee al menos un núcleo.

Demostración. Sea D una R -digráfica, S un seminúcleo máximo de D , y $B = \{v \in V - S / \text{No existe flecha de } v \text{ a } S\}$.

$B = \emptyset$ pues de lo contrario, existiría un seminúcleo $S' \neq \emptyset$ de la subdigráfica \bar{B} de D inducida por B , y por el Lema 3.2 $S \cup S'$ sería un seminúcleo de D que contendría propiamente a S , lo que contradice la maximalidad de S . \square

En realidad, como es fácil observar, el que D sea R -digráfica implica que toda subdigráfica inducida de D contiene un núcleo.

Este resultado es importante en la investigación de la existencia de núcleos para digráficas con alguna propiedad que se hereda para subdigráficas inducidas. Claramente para tales digráficas es suficiente demostrar que poseen algún seminúcleo no vacío. (Como es el caso de las condiciones analizadas en los Teoremas 3.1 a 3.4).

Se dará ahora como aplicación del Teorema 3.6 un bosquejo de demostración del Teorema de Richardson (Teorema 3.4).

Definamos en V las relaciones \sim y $<$ poniendo:

- a) $v' < v$ si y solo si existe en D un camino de v a v' .
- b) $v \sim v'$ si y solo si $v < v'$ y $v' < v$.

Es fácil ver que $<$ es un preorden (relación binaria transitiva y reflexiva) y \sim es una equivalencia.

Sea $m_0 \in V$ un elemento mínimo con respecto a $<$ (es decir, tal que $m < m_0$ implique $m \sim m_0$) y $M = \{m \in V / m \sim m_0\}$. Si se toma $S = \{m \in M / \text{existe un camino de longitud par de } m_0 \text{ a } m\}$ y $I = \{m \in M / \text{existe un camino de longitud impar de } m_0 \text{ a } m\}$ se tiene:

- i) $m_0 \in S$
- ii) $S \cap I = \emptyset$, pues si existiera $s \in S \cap I$, existiría un camino de m_0 a s de longitud par, otro de longitud impar y además uno de s a m_0 por ser $m_0 \sim s$. Luego existiría en D un camino cerrado dirigido de longitud impar y, por lo tanto, un ciclo dirigido de longitud impar, en contra de la hipótesis.

Es fácil ver que todas las flechas de D que salen de elementos de S llegan a I y que de cada vértice de I sale alguna flecha hacia S . De aquí se sigue sin más que S es un seminúcleo de D . \square

Corolario 3.1 (Teorema de Richardson). Si D es finita y no posee ciclos impares, D es R -digráfica y, por consiguiente, posee un núcleo.

Una digráfica D es bipartita si existe una descomposición de $V(D)$ en dos subconjuntos ajenos independientes. En [40] M. Richardson demuestra que toda digráfica bipartita contiene un núcleo. Aquí se da una demostración simple de que las digráficas bipartitas son R -digráficas. Como toda subdigráfica de una digráfica bipartita sigue siendo bipartita, basta probar que cada digráfica bipartita contiene al menos un seminúcleo no vacío. La demostración es como sigue:

Si existe algún vértice v del cual no salen flechas, $\{v\}$ es un seminúcleo. Si no es ése el caso, sea (V_1, V_2) una descomposición de V en conjuntos independientes ajenos. V_1 y V_2 son, claramente, núcleos de D . †

4. ESTRUCTURA DE LAS R⁻-DIGRAFICAS

Ya en 1976 Claude Berge propuso (en [4]) caracterizar las gráficas núcleo críticas, que son digráficas sin núcleo tales que la eliminación de cualquier vértice produce una digráfica con núcleo. Se conocen algunos ejemplos de gráficas núcleo críticas (los ciclos impares y otras digráficas que mencionaremos más adelante) pero él y sus colaboradores encontraron poco accesible trabajar este problema. En 1980 [15] C. Berge y algunos de sus colaboradores consideraron más conveniente investigar digráficas minimales sin núcleo (digráficas sin núcleo tales que toda subdigráfica inducida propia tiene núcleo), les llamaron *gráficas núcleo perfectas críticas*. Independientemente Victor Neumann Lara y Hortensia Galeana Sánchez consideraron estas digráficas [24] en 1980, las llamaron *R⁻-digráficas*. Claramente toda digráfica sin núcleo contiene una subdigráfica inducida que es *R⁻-digráfica*, de aquí la importancia de conocer la estructura de *R⁻-digráficas* para el desarrollo de la Teoría de Núcleos en digráficas.

Si $C = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$ es un ciclo dirigido, y $(u_i, u_j) \in F(D)$, con $j \neq i+1$ entonces (u_i, u_j) es llamada una *seudodiagonal* de C y a u_j se le denomina *polo* de C .

Denotaremos por

$$C_{u_0}^0 = \{u_i / i \equiv 0 \pmod{2}, i \neq 0\}, C_{u_0}^1 = \{u_i / i \equiv 1 \pmod{2}\}.$$

Si $C = (u_0, u_1, u_2, u_0)$, $C_{u_0}^0 = \{u_2\}$, $C_{u_0}^1 = \{u_1\}$.

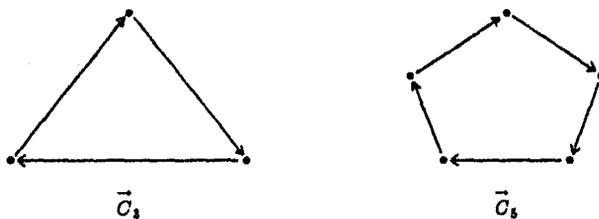
Para una trayectoria $T = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ denotaremos por

$$T_{u_0}^0 = \{u_i / i \equiv 0 \pmod{2}\}, T_{u_0}^1 = \{u_i / i \equiv 1 \pmod{2}\}.$$

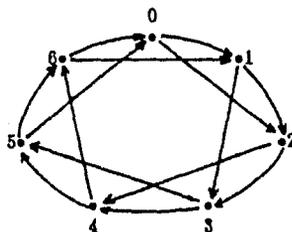
4.1 Ejemplos de R^- -digráficas y algunas construcciones

Los Primeros Ejemplos (P. Duchet [15], 1980, independientemente H. Galeana Sánchez y V. Neumann Lara, [24], 1980).

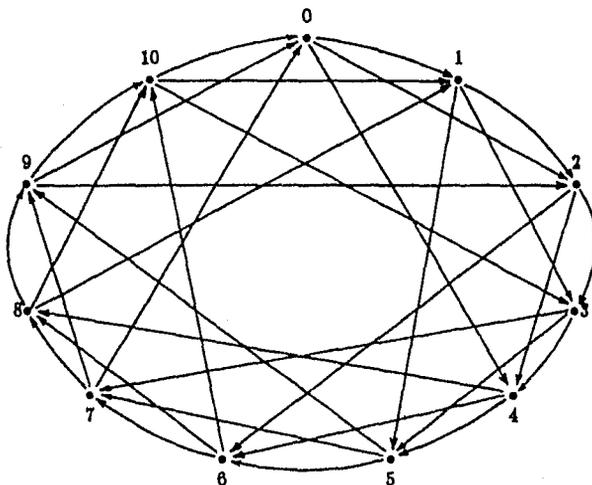
(a) Los ciclos dirigidos impares.



(b) $C_{7,1,2}$ donde $V(C_{7,1,2}) = \{ 0,1,2,3,4,5,6 \}$ y $(x,y) \in F(C_{7,1,2})$ si y solo si $y - x \in \{ 1,2 \} \pmod{7}$.



(c) $C_{11,1,2,4}$ donde $V(C_{11,1,2,4}) = \{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \}$ y $(x,y) \in F(C_{11,1,2,4})$ si y solo si $y - x \in \{ 1,2,4 \} \pmod{11}$.



A partir de éstos se puede construir una colección infinita usando algunas construcciones dadas en la sección 5.3.1 y que preservan la propiedad de tener (no tener) núcleo.

4.2 Seminúcleos módulo R y trayectorias dirigidas K -normales (H. Galeana Sánchez, V. Neumann Lara [28], 1984)

En esta sección se introduce el concepto de *seminúcleo fuerte* de una digráfica *módulo* un conjunto de vértices y se establece el Teorema 4.1, el cual es la principal herramienta en esta sección. Teoremas 4.2 y 4.3 son variaciones usuales del Teorema 4.1.

Definición 4.1 Sea D una digráfica; $I, R \subset V(D)$ y consideremos las siguientes condiciones:

- (i) $I \cap R^c$ es un conjunto independiente.
- (i') D no contiene $(I \cap R^c)$ -flechas.
- (ii) Si $uv \in F(D)$, $u \in I \cap R^c$ y $v \in I^c \cap R^c$, entonces existe $w \in I$ tal que $vw \in F(D)$.

Si las condiciones (i) y (ii) son satisfechas, I será llamado un *seminúcleo de D módulo R* .

Si las condiciones (i') (la cual es más fuerte que la (i)) y (ii) son satisfechas, I será llamado un *seminúcleo fuerte de D módulo R* .

Definición 4.2 Sea $K \subseteq V(D)$. Una trayectoria dirigida $T = (w_0, w_1, \dots, w_n)$ en D será llamada *K -normal* cuando T satisfaga:

- (i) $V(T) \cap K = \{w_j / 1 \leq j \leq n, j \text{ impar}\} \cup \{w_0\}$
 $V(T) \cap K^c = \{w_j / 1 \leq j \leq n, j \text{ par}\},$
- (ii) Si $s < j < n$, $w_j \in K^c$, $w_s \in K$ entonces $w_j w_s \notin F(D)$.

Observación 4.1 Note que cualquier K -normal, trayectoria dirigida pasa alternativamente por K y K^c .

Teorema 4.1 Si $I_0, I, R \subset V(D)$ son tales que $I_0 \subset I$, $I_0 \cap R = \emptyset$ y satisface a) I es un seminúcleo fuerte de D módulo R .

b) Toda I -normal, I_0R -trayectoria dirigida pasa por $U = \Gamma^-(I_0) \cap R^c$.

Entonces $S = \{w \in I / \text{existe una } I\text{-normal, } I_0w\text{-trayectoria dirigida que no pasa por } U\}$ es un seminúcleo de D el cual satisface $I_0 \subset S \subset I \cap R^c$.

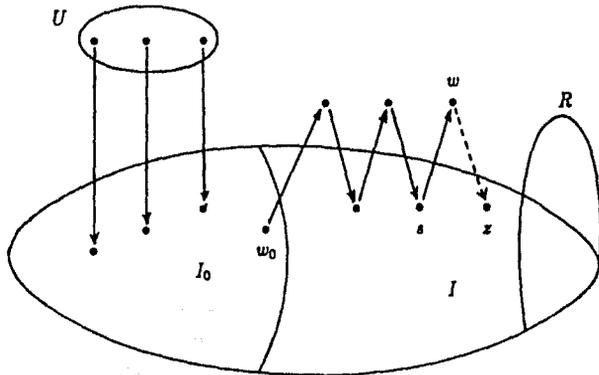
Demostración. $U \subset I^c \cap R^c$: sea $u \in U = \Gamma^-(I_0) \cap R^c$, por (a) D no contiene $(I \cap R^c)I$ -flechas y como $I_0 \subset I$ entonces $u \notin I \cap R^c$, es decir $u \in I^c \cup R$, pero como $u \in U$, $u \in I^c \cap R^c$.

$S \subset R^c$: sea $w \in S$, entonces existe una I -normal, I_0w -trayectoria dirigida que no pasa por $U = \Gamma^-(I_0) \cap R^c$, y por (b) $w \notin R$ por lo tanto $w \in R^c$.

Como $S \subset I$ por definición, entonces $S \subset I \cap R^c$.

D no contiene SI -flechas, pues, por (a) D no contiene $(I \cap R^c)I$ -flechas y $S \subset I \cap R^c$. Por lo tanto S es un conjunto independiente.

Supongamos que S no es un seminúcleo de D . Entonces existe $s \in S$ y $w \in V(D) - S$ tal que $sw \in F(D)$ y D no contiene wS -flechas. Sea (w_0, w_1, \dots, w_m) , $w_m = s$, $w_0 \in I_0$, una I -normal I_0s -trayectoria dirigida que no pasa por U . Como D no contiene sI -flechas, entonces $w \in I^c$ y la trayectoria dirigida $(w_0, w_1, \dots, w_m, w)$ es también I -normal. Entonces $w \notin R$, pues de otro modo, por el inciso (b) w pertenecería a $U = \Gamma^-(I_0) \cap R^c$, es decir, $w \in R$ y $w \in R^c$ lo cual es imposible. Por lo tanto $w \in I^c \cap R^c$ y por (a) existe $x \in I$ tal que $wz \in F(D)$. Entonces la trayectoria dirigida $(w_0, w_1, \dots, w_m, w, z)$ es I -normal y no pasa por U , por lo tanto $z \in S$ y wz es una wS -flecha en D , contradiciendo la suposición de que D no contiene wS -flechas. Concluimos que S es un seminúcleo de D .



Los Teoremas 4.2 y 4.3 son variaciones usuales del Teorema 4.1.

Teorema 4.2 Supongamos que $I_0, I, R \subset V(D)$ satisfacen las condiciones siguientes:

- (i) I es un seminúcleo fuerte de D módulo R .
- (ii) D no tiene seminúcleo S tal que $I_0 \subset S \subset I \cap R^c$.

Entonces existe una I -normal, I_0R -trayectoria dirigida $T = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ que no pasa por $\Gamma^-(I_0) \cap R^c$ la cual satisface las siguientes propiedades:

1. T no tiene $(V(T) - t_n)T^0$ -seudodiagonales.
2. $l(T)$ es par si y solo si $t_n \in I$.

Demostración. Por (ii) y el Teorema 4.1 existe una I -normal, I_0R -trayectoria dirigida que no pasa por $\Gamma^-(I_0) \cap R^c$. Escogemos T tal que $l(T)$ toma el valor mínimo posible y como $I \cap R^c$ es un conjunto independiente entonces T satisface:

$$t_{2j}t_j \notin F(D) \text{ para todo } 0 \leq 2j < j \leq n, j \neq 2i + 1.$$

$$t_{2i+1}t_{2j} \notin F(D) \text{ para todo } 0 < 2i + 1 < 2j \leq n, j \neq i + 1.$$

Por lo tanto se cumple 1) y usando la I -normalidad de T se cumple 2). \natural

Un caso especial del Teorema 4.2 es el siguiente resultado:

Teorema 4.3 Sea $I_0, I, R \subset V(D)$ tal que $\emptyset \neq I_0 \subset I, I_0 \cap R = \emptyset$. Supongamos que las condiciones (i), (ii), y (iii) son satisfechas.

- (i) I es un seminúcleo fuerte de D módulo R .
- (ii) D no tiene núcleo.
- (iii) $D - (I_0 \cap \Gamma^-(I_0))$ es una R -digráfica.

Entonces existe una I -normal, I_0R -trayectoria dirigida, T que no pasa por $\Gamma^-(I_0) \cap R^c$, el cual satisface las condiciones 1) y 2) del Teorema 4.2.

Demostración. Si el Teorema 4.3 fuera falso, por el Teorema 4.1 D tendría un seminúcleo S tal que $\emptyset \neq I_0 \subset S \subset I \cap R^c$. Por (iii) y el Lema 3.2, D tendría un núcleo, contradiciendo (ii). \natural

4.3 Resultados Estructurales en Teoría de Núcleos (H. Galeana Sánchez, V. Neumann Lara, [28], 1984)

En esta parte aplicaremos los resultados de la sección 4.2.

Teorema 4.4 Sea D una digráfica, $u \in V(D)$ y N_u un núcleo de $D - u$. Supongamos que las condiciones (i) y (ii) son satisfechas

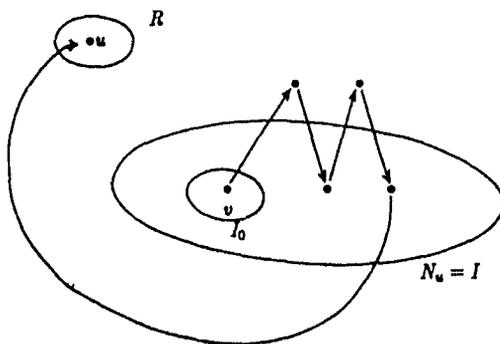
- (i) $D - v$ es R -digráfica.
- (ii) D no tiene núcleo.

Entonces existe una N_u -normal, vu -trayectoria dirigida T sin $(V(T) - u)T^i$ -seudodigonales (donde i es el residuo de $l(T) + 1$ módulo 2).

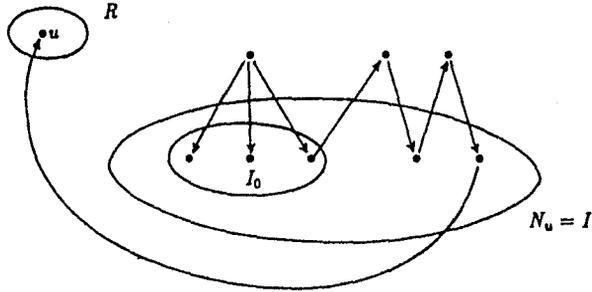
Demostración. Tomamos $I = N_u$, $R = \{u\}$ y definimos I_0 como sigue:

Si $v \in N_u$, $I_0 = \{v\}$ y de otro modo $I_0 = \Gamma^+(v) \cap N_u$. Como las condiciones del Teorema 4.3 son satisfechas, se sigue el Teorema 4.4.

- 1) Si $v \in N_u$



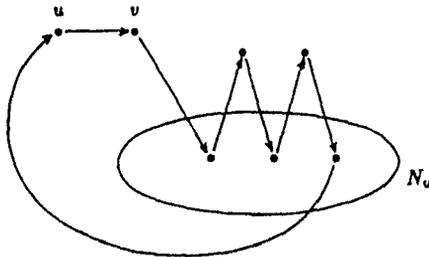
2) Si $v \notin N_u$



Corolario 4.1 Sea $f = uv$ una flecha de D . Supongamos que D no tiene núcleo y satisface

- (i) $D - u$ tiene núcleo
- (ii) $D - v$ es R -digráfica.

Entonces existe un ciclo dirigido C , de longitud impar que pasa por f y no tiene $V(C)C_u^0$ -seudodiagonales. (En particular C_u^0 es un conjunto independiente).



Teorema 4.5 Si $\emptyset \neq A \subset F_u^+$ y $I_0 = \{z \in V(D) / uz \in A\}$ satisfacen las propiedades (i) y (ii)

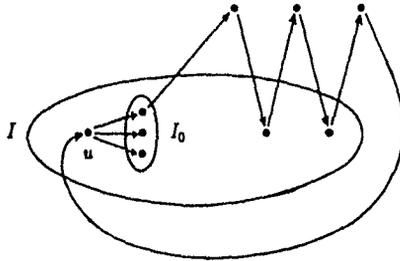
- (i) $D - A$ tiene núcleo pero $D - A'$ no tiene núcleo para $A' \subsetneq A$.
- (ii) $D - (I_0 \cup \Gamma^-(I_0))$ es R -digráfica.

Entonces existe $f \in A$ y un ciclo dirigido C de longitud impar que pasa por f , no intersecta $\Gamma^-(I_0) - \{u\}$ y sin $V(C)(C_u^+ \cup \{u\})$ -seudodiagonales.

Demostración. Por (i) D no tiene núcleo. Sea I un núcleo de $D - A$. Claramente I es un seminúcleo fuerte de D módulo $R = \{u\}$.

$I_0 \cup \{u\} \subset I$: pues si suponemos que existe $v \in I_0 \cup \{u\}$ tal que $v \notin I$, entonces tendríamos que I es un conjunto independiente en D si $v = u$, ó que I es un conjunto independiente en $D - A'$, con $A' = A - \{uv\}$ si $v \neq u$. Como $D - A \subset D$, I también es un conjunto absorbente en D ó en $D - A'$ respectivamente, por lo tanto I sería un núcleo de D ó de $D - A'$ con $A' \subsetneq A$ lo que contradice (i).

Por el Teorema 4.3 existe una I -normal, $t_0 u$ -trayectoria dirigida T con $t_0 \in I$ que no pasa por $\Gamma^-(I_0) - \{u\}$ y sin $(V(T) - t_n)T^0$ -seudodiagonales. Agregándole la flecha ut_0 a T , tendremos un ciclo dirigido que no pasa por $\Gamma^-(I_0) - \{u\}$ y sin $V(C)(C_u^+ \cup \{u\})$ -seudodiagonales.



Corolario 4.2 Sea $f = uv \in F(D)$. Si D no tiene núcleo y $D - f$ es R -digráfica entonces existe un ciclo dirigido C de longitud impar que contiene a f y sin $V(C)(C_u^+ \cup \{u\})$ -seudodiagonales.

Corolario 4.3 Sea $u \in V(D)$. Si D no tiene núcleo y $D - u$ es R -digráfica entonces existe un ciclo dirigido C de longitud impar que contiene a u y sin $V(C)(C_u^+ \cup \{u\})$ -seudodiagonales.

Demostración. $\{u\}$ es un seminúcleo de $D - F_u^+$ y $B = \{v \in V(D) - \{u\} / \text{no existe } vu\text{-flecha en } D\} \subset D - \{u\}$ que es una R -digráfica, entonces por el Lema 3.2, $D - F_u^+$ tiene un núcleo N_u que contiene a u . Escojemos N_u de tal forma que $|F(D[N_u]) \cap F_u^+|$ tome el valor mínimo posible, sea

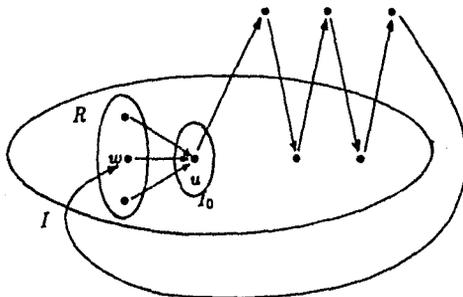
$A = F_u^+ \cap F(D[N_u])$ y aplicando el Teorema 4.5 se concluye la demostración. \square

Teorema 4.6 Si $\emptyset \neq A \subset F_u^-$ tiene las siguientes propiedades:

- (i) $D - A$ tiene núcleo
- (ii) $D - A'$ no tiene núcleo para $A' \subsetneq A$.
- (iii) $D - (\Gamma^-(u) \cup \{u\})$ es R -digráfica.

Entonces existe $f = wu \in A$ y un ciclo dirigido C de longitud impar que pasa por f , no interseca $\Gamma^-(u) - \{u, w\}$ y sin $V(C)(C_u^+ \cup \{w\})$ -seudodiagonales.

Demostración. Sea I un núcleo de $D - A$ y tomamos $I_0 = \{u\}$ y $R = \{s \in V(D) / zu \in A\}$. Por (ii), $R \cup \{u\} \subset I$. Por el Teorema 4.3 existe una I -normal, uw -trayectoria dirigida T que no pasa por $\Gamma^-(u) \cap R^c$, tal que $w \in R$ y sin $(V(T) - t_n)T^0$ -seudodiagonales. Agregándole la flecha wu a T , obtenemos un ciclo dirigido con las propiedades requeridas.



\square

Corolario 4.4 Sea $u \in V(D)$. Si D no tiene núcleo y $D - u$ es R -digráfica entonces existe $f = uv \in F(D)$ y un ciclo dirigido C de longitud impar que pasa por f y que no contiene $V(C)(C_u^+ \cup \{v\})$ -seudodiagonales.

Demostración. Sea N_u un núcleo de D_u tal que $|\Gamma^-(u) \cap N_u|$ tome el valor mínimo posible. Sea $A = F_u^- \cap F(D[N_u])$.

$A \neq \emptyset$, pues si $A = \emptyset$, como D no tiene núcleo no hay flechas en D de u hacia N_u entonces $N_u \cup \{u\}$ sería independiente en D y por lo tanto sería

un núcleo de D , lo cual es una contradicción. Aplicando el Teorema 4.6 se concluye la demostración. \square

4.4 Estructura de las R^- -digráficas (H. Galeana Sánchez, V. Neumann Lara, [28], 1984)

Los resultados de esta sección son corolarios de la sección 4.3.

Teorema 4.7 Sea D una R^- -digráfica $u, v \in V(D)$. Entonces existe un uv -paseo dirigido $T = (w_0, w_1, \dots, w_n)$, $w_0 = v$, $w_n = u$, que no tiene $V(T)T^i$ -seudodiagonales (donde i es el residuo de $n + 1$ módulo 2).

Demostración. Se sigue directamente del Teorema 4.4. \square

Como consecuencia directa se obtiene el siguiente Corolario.

Corolario 4.5 (Duchet, 1979, [18]). Toda R^- -digráfica es fuertemente conexa.

Teorema 4.8 Sea D una R^- -digráfica y $f = uv \in F(D)$. Entonces existe un ciclo dirigido C de longitud impar que contiene a f y no tiene $V(C)C_u^0$ -seudodiagonales (En particular C_u^0 es un conjunto independiente).

Demostración. Se sigue directamente del Corolario 4.1. \square

Corolario 4.6 Sea D una R^- -digráfica $u \in V(D)$. Entonces existe un ciclo dirigido C de longitud impar que pasa por u y no tiene $V(C)C_u^0$ -seudodiagonales y tampoco uC -seudodiagonales.

Teorema 4.9 Sea D una R^- -digráfica, $u \in V(D)$. Entonces existe un ciclo dirigido C de longitud impar que pasa por u y no tiene $V(C)(C_u^1 \cup \{u\})$ -seudodiagonales.

Demostración. Se sigue directamente del Corolario 4.3. \square

Teorema 4.10 Sea D una R^- -digráfica y $u \in V(D)$. Entonces para

alguna $f = uv \in F(D)$ existe un ciclo dirigido C de longitud impar que pasa por f y no tiene $V(C)(C_0^1 \cup \{v\})$ -seudodiagonales.

Demostración. Se sigue directamente del Corolario 4.4. \square

Teorema 4.11 Sea D una R^- -digráfica que no es un ciclo dirigido de longitud impar, $u \in V(D)$. Entonces existe $f' \in F_u^-$ y $f'' \in F_u^+$ tal que cada una de ellas pertenece a al menos dos ciclos de longitud impar.

Demostración. Por el Teorema 4.10 existe un ciclo dirigido C de longitud impar que pasa por alguna $f' = vu \in F_u^-$ y no tiene $V(C)(C_0^1 \cup \{v\})$ -seudodiagonales. Por el Teorema 4.8 existe un ciclo dirigido C' de longitud impar que pasa por f' y sin $V(C')C_0^0$ -seudodiagonales, $C' \neq C$, de otro modo C sería una subdigráfica propia de D que no tiene núcleo y esto no es posible por ser D una R^- -digráfica. De manera análoga y aplicando los Teoremas 4.8 y 4.9 probamos la existencia de f'' . \square

Corolario 4.7 Sea D una R^- -digráfica que no es un ciclo dirigido de longitud impar, $u \in V(D)$. Entonces u pertenece a al menos $\Delta_D(u) + 1$ ciclos dirigidos de longitud impar ($\Delta_D(u) = \max\{|\Gamma^-(u)|, |\Gamma^+(u)|\}$).

Demostración. Se sigue directamente de los Teoremas 4.8 y 4.11.

4.5 R-digráficas

(H. Galeana Sánchez, V. Neumann Lara, [28], 1984)

En esta sección se estudian algunas condiciones suficientes para que una digráfica sea R -digráfica. El Lema 4.1 da un esquema general para resultados y pruebas incluidas en esta sección.

4.5.1 Resultados Generales

Lema 4.1 Si $P_0 \subset P(D) = \{D_0 \subset^* D \mid \text{no existe } H \text{ tal que } H \text{ es una } R^- \text{-digráfica y } D_0 \subset^* H \subset^* D\}$, entonces D es una R -digráfica si y solo si toda subdigráfica inducida D_0 de D que no tiene subdigráficas inducidas en P_0 es una R -digráfica.

Demostración. Supongamos que D es una R -digráfica, entonces toda subdigráfica inducida de D es también una R -digráfica, en particular lo son

las que no tienen subdigráficas inducidas en P_0 .

Inversamente, supongamos que toda subdigráfica inducida D_0 de D que no tiene subdigráficas inducidas en P_0 es una R -digráfica. Si D no fuera una R -digráfica, contendría una R^- -subdigráfica inducida H . Como H no contiene subdigráficas inducidas pertenecientes a P_0 , H es una R -digráfica, pero esto es una contradicción. Por lo tanto D es una R -digráfica. \square

Teorema 4.12 Sea D una digráfica y $T \subset V(D)$ tal que $D - T$ es una R -digráfica. Además supongamos que para todo $u \in T$ se satisface (a) o (b),

- (a) Todo ciclo dirigido C que pasa por u tiene al menos una $V(C)C_u^0$ -seudodiagonal.
- (b) Todo ciclo dirigido C de longitud impar que pasa por u tiene al menos una $V(C)(C_u^1 \cup \{u\})$ -seudodiagonal.

Entonces D es una R -digráfica.

Demostración. Supongamos que D no es una R -digráfica, entonces D contiene una R^- -subdigráfica inducida H . Como $D - T$ es R -digráfica entonces $V(H) \cap T \neq \emptyset$. Sea $u \in V(H) \cap T$. Por los Teoremas 4.8 y 4.9 no se satisface (a) y (b) en H y por lo tanto, tampoco en D . Esto contradice la hipótesis. Entonces D es una R -digráfica. \square

Teorema 4.13 Sea D una digráfica y $A \subset F(D)$. Supongamos que toda $f = uv \in A$ satisface la condición (i)

- (i) Cada ciclo de longitud impar que pasa por f tiene alguna $V(C)C_u^0$ -seudodiagonal.

Entonces D es una R -digráfica si y solo si toda subdigráfica inducida H de D tal que $F(H) \cap A = \emptyset$ es una R -digráfica.

Demostración. Si D es una R -digráfica entonces toda subdigráfica inducida H de D también lo es, en particular si H es tal que $F(H) \cap A = \emptyset$.

Inversamente, supongamos que D no es una R -digráfica, entonces D contiene una R^- -digráfica inducida H . Se sigue de las hipótesis que $F(H) \cap A \neq \emptyset$. Sea $f \in F(H) \cap A$ y aplicando el Teorema 4.8 se contradice la condición (i). Por lo tanto D es una R^- -digráfica. \square

Sea C un ciclo dirigido de longitud impar y $p(C) = \{w \in V(C) / \text{existe } V(C)w\text{-seudodiagonal de } C\}$. Definimos:

- (i) $C^{(0)} = \bigcup_{v \in p(C)} C_v^1$;
(ii) $C^{(1)} = p(C) \cup \bigcup_{u \in p(C)} C_u^1$.

Corolario 4.8 (del Teorema 4.12) Sea D una digráfica y $T \subset V(D)$. Supongamos que $D - T$ es una R -digráfica. Si todo ciclo dirigido C de longitud impar tal que $V(C) \cap T \neq \emptyset$ satisface $C = C^{(1)}$, entonces D es una R -digráfica.

Demostración. Si C es un ciclo dirigido en D de longitud impar tal que $C = C^{(1)}$ y $u \in V(C)$ entonces $u \in p(C)$ ó $u \in C_v^0$ para algún $v \in p(C)$. Si $u \in p(C)$ entonces existe al menos una $V(C)$ - v -seudodiagonal la cual es una $V(C)C_u^1$ -seudodiagonal. Y por el Teorema 4.12, D es una R -digráfica. \square

Corolario 4.9 (del Teorema 4.13) Sea D una digráfica y $A \subset F(D)$. Supongamos que todo ciclo C de longitud impar tal que $F(C) \cap A \neq \emptyset$ satisface $C = C^{(0)}$. Entonces D es una R -digráfica si y solo si toda subdigráfica inducida H de D tal que $F(H) \cap A = \emptyset$ es una R -digráfica.

Demostración. Si C es un ciclo dirigido en D de longitud impar tal que $C = C^{(0)}$ y $f = uv \in F(C)$ entonces C tiene al menos una $V(C)C_u^0$ -seudodiagonal. Y por el Teorema 4.13 se sigue la demostración. \square

Observación. Sea $C = (u_0, u_1, \dots, u_{2n}, u_0)$ un ciclo dirigido en D de longitud impar, $p(C) = \{u_1, \dots, u_k\}$. Entonces

- (i) $V(C) = C^{(1)}$ si y solo si
(i.1) Existe j , $1 \leq j \leq k$ tal que $i_{j+1} = i_j + 1$ ó
(i.2) Existen j, l , $i \leq j < l \leq k$, tal que la u_j, u_{j+1} -trayectoria dirigida y la u_i, u_{i+1} -trayectoria dirigida contenidas en C , tienen ambas longitud impar, (la suma es tomada módulo k).
(ii) $V(C) = C^{(0)}$ si y solo si (i.2)

(i) **Demostración.** Supongamos que $V(C) = C^{(1)}$. Si no sucede (i.2) entonces para todo j, l , $1 \leq j < l \leq k$, si consideramos la u_j, u_{j+1} -trayectoria dirigida y la u_i, u_{i+1} -trayectoria dirigida ambas contenidas en C , alguna de ellas es de longitud par, o las dos. Esto implica que a lo más existe una j , $1 \leq j \leq k$ tal que la u_j, u_{j+1} -trayectoria dirigida contenida en C es de longi-

tud impar, pero como C es de longitud impar entonces sí existe esa j , y es única. Supongamos que $u_{i,j+1} \notin p(C)$, como $V(C) = C^{(1)} = p(C) \cup \bigcup_{u \in p(C)} C_u^0$ entonces $u_{i,j+1} \in C_u^0$ para alguna $u \in p(C)$, por lo tanto existe l , $1 \leq l \leq k$ $l \neq j$, tal que la $u_i, u_{i,l+1}$ -trayectoria dirigida contenida en C es de longitud par. Si consideramos ahora la $u_i, u_{i,j}$ -trayectoria dirigida contenida en C , ésta deberá ser de longitud impar por lo que existe $l' \leq l' \leq j-1$ tal que la $u_i, u_{i,l'+1}$ -trayectoria dirigida contenida en C es de longitud impar, pero esto es una contradicción con lo que habíamos supuesto. Entonces $u_{i,j+1} \in p(C)$ y por lo tanto $u_{i,j+1} = u_{i,j+1}$ y se cumple (i.1).

Inversamente, sea $v \in V(C)$, si $v \notin p(C)$ y sucede (i.1) entonces existe j , $1 \leq j \leq k$ tal que $i_j + 1 = i_{j+1}$, es decir $u_{i,j} \in p(C)$ y $u_{i,j+1} \in p(C)$. Si la $u_{i,j}, v$ -trayectoria dirigida contenida en C es de longitud par entonces $v \in C_{u_{i,j}}^0$, si no, entonces la $u_{i,j+1}, v$ -trayectoria dirigida contenida en C es de longitud par y $v \in C_{u_{i,j+1}}^0$. Por lo tanto si sucede (i.1) $v \in \bigcup_{u \in p(C)} C_u^0$. Ahora si $v \notin p(C)$

y sucede (i.2), entonces existe j, l , $1 \leq j < l \leq k$ tal que la $u_j, u_{j,l+1}$ -trayectoria dirigida y la $u_i, u_{i,l+1}$ -trayectoria dirigida contenidas en C , tienen ambas longitud impar. Si la u_i, v -trayectoria dirigida tiene longitud par entonces $v \in C_{u_i}^0$, si no, entonces la u_{j+1}, v -trayectoria dirigida es de longitud par y $v \in C_{u_{j+1}}^0$. Por lo tanto, si sucede (i.2) $v \in \bigcup_{u \in p(C)} C_u^0$. Entonces $V(C) \subset C^{(1)}$,

pero la otra contención es inmediata, por lo tanto $V(C) = C^{(1)}$ si sucede (i.1) ó (i.2).

(ii) Demostración. De (ii). Supongamos que $V(C) = C^{(0)} = \bigcup_{u \in p(C)} C_u^0$.

Como C es de longitud impar, entonces existe l , $1 \leq l \leq k$ tal que la u_l, u_{l+1} -trayectoria dirigida contenida en C es de longitud impar. Como $V(C) = C^{(0)}$, entonces $u_l \in C_v^1$ para alguna $v \in p(C)$, es decir, l' , $1 \leq l' \leq k$ tal que la $u_{l'}, u_{l'}$ -trayectoria dirigida contenida en C es de longitud impar, esto implica que existe j , $l' \leq j \leq l-1$ tal que la u_l, u_{j+1} -trayectoria dirigida contenida en C es de longitud impar, Por lo tanto se cumple (i.2).

Inversamente supongamos que se cumple (i.2). Es decir existe j, l , $1 \leq j < l \leq k$ tal que la $u_j, u_{j,l+1}$ -trayectoria dirigida y la $u_i, u_{i,l+1}$ -trayectoria dirigida, ambas contenidas en C , son de longitud impar. Sea $v \in V(C)$, si la u_j, v -trayectoria dirigida contenida en C es de longitud impar, entonces $v \in C_{u_j}^1$, si no, entonces la u_{j+1}, v -trayectoria dirigida contenida en C , es de longitud impar y $v \in C_{u_{j+1}}^1$. Por lo tanto $V(C) \subset \bigcup_{v \in p(C)} C_v^1$, pero la otra

contención es inmediata, por lo que $V(C) = C^{(0)}$. \square

4.5.2 Aplicaciones

A continuación se mencionan ocho aplicaciones de los resultados obtenidos en esta sección.

Sea D una digráfica y $T \subset V(D)$. Supongamos que $D - T$ es una R -digráfica y que para todo ciclo dirigido $C = (u_0, u_1, \dots, u_{2n}, u_0)$ en D de longitud impar tal que $V(C) \cap T \neq \emptyset$ existe i tal que $u_i, u_{i+1} \in p(C)$. Entonces D es una R -digráfica.

Demostración. Por la observación 4.1, $C = C^{(1)}$ y aplicando el Corolario 4.8 se concluye la prueba. \square

Esta proposición implica el siguiente resultado obtenido por Duchet.

D es una R -digráfica si y solo si $D - V_{o.o}(D)$ es una R -digráfica, donde $V_{o.o}$ denota el conjunto de vértices de D que no pertenecen a ciclos dirigidos de longitud impar.

Demostración. Aplicar el Teorema 4.12 y el Lema 4.1. \square

Si todo ciclo dirigido C en D , de longitud impar, tal que para alguna $uv \in F(C)$, $vu \notin F(D)$, tiene unaseudodiagonal f_c tal que para todo ciclo dirigido γ de longitud impar que contiene a f_c , $\gamma = \gamma^{(0)}$, entonces D es una R -digráfica.

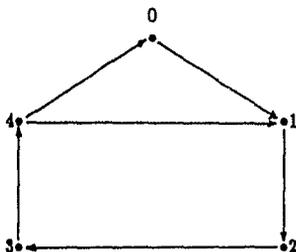
Demostración. Si D no es R -digráfica, existe H una R^- -digráfica inducida de D . Sea C un ciclo dirigido de longitud impar en H . Si C no fuera simétrico, H contendría una flecha $f_c = uv$ asimétrica tal que para todo ciclo dirigido γ que contiene a f_c , $\gamma = \gamma^{(0)}$ lo cual contradice al Teorema 4.5. Entonces, todo ciclo de longitud impar es simétrico y $C = C^{(1)}$. Por el Corolario 4.8, H es una R -digráfica lo cual es una contradicción. Por lo tanto D es una R -digráfica. \square

Esto generaliza el siguiente resultado obtenido por Romanowicz, Zbigniew en [42].

Denotemos por $F_{o.a.}(D)$ el conjunto de flechas de D no contenidas en los ciclos dirigidos de longitud impar. Entonces D es una R -digráfica si y solo si toda subdigráfica inducida H de D tal que $F(H) \cap F_{o.a.} = \emptyset$ es una R -digráfica.

Demostración. Aplique el Teorema 4.13. \square

En particular, D es una R -digráfica cuando $D - F_{o.a.}$ es una R -digráfica. El inverso de la proposición anterior es falso, considere la digráfica representada en la siguiente figura:



En este caso D es una R -digráfica ya que $\{1, 3\}$ es un núcleo y toda subdigráfica inducida ya no tiene ciclos dirigidos de longitud impar, pero $D - F_{o.a.} \sim \vec{C}_3$ y por lo tanto no es R -digráfica.

Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos inducidos de longitud impar y $T \subseteq V(D)$. Suponga que todo $u \in T$ pertenece a lo más a $\Delta_D(u)$ ciclos dirigidos de longitud impar. Entonces D es una R -digráfica si y solo si $D - T$ es una R -digráfica.

Demostración. Supongamos que $D - T$ es una R -digráfica, si D no es una R -digráfica, entonces existe H una R^- -subdigráfica inducida de D , H no es un ciclo dirigido y además $V(H) \cap V(T) \neq \emptyset$. Sea $u \in V(H) \cap V(T)$ y $M =$ número de ciclos dirigidos que contienen a u . Por el Corolario 4.7, $M \geq \Delta_D(u) + 1$ y por hipótesis $M \leq \Delta_D(u)$ entonces $\Delta_D(u) + 1 \leq M \leq \Delta_D(u)$, es decir $\Delta_D(u) + 1 \leq \Delta_D(u)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto D es una R -digráfica. La otra implicación es inmediata. \square

Teorema (P. Duchet, 1980). Sea D una digráfica tal que al menos una de las siguientes dos propiedades se satisface.

- (a) Si $(x, a) \in F(D)$ y $(a, y) \in F(D)$ entonces $(x, y) \in F(D)$ o $(y, a) \in F(D)$
 (b) Si $(x, a) \in F(D)$ y $(a, y) \in F(D)$ entonces $(x, y) \in F(D)$ o $(a, x) \in F(D)$

Entonces D es una R -digráfica.

Demostración. Sea $T \subset V(D)$ tal que $D - T$ es R -digráfica. Sea $u \in T$ y sea C un ciclo dirigido de longitud impar que pasa por u , $C = (u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_{2n}, u = u_0)$.

Supongamos que en D se cumple (b), entonces $u_{2n-1}u_1 \in F(D)$ ó $u_{2n}u_{2n-1} \in F(D)$, por lo tanto C tiene al menos una $V(C)(C_u^1 \cup \{u\})$ -seudodiagonal.

Entonces tenemos que para todo $u \in T$ se cumple que todo ciclo dirigido de longitud impar que pasa por u tiene al menos una $V(C)(C_u^1 \cup \{u\})$ -seudodiagonal, aplicando el Teorema 4.12 obtenemos que D es una R -digráfica. \square

Teorema (P. Duchet, H. Meyniel [20], 1983). Si todo ciclo dirigido de longitud impar $C = (x_1, x_2, \dots, x_{2k+1}, x_1)$ tiene dos cuerdas cortas cruzadas (es decir dos flechas de la forma (x_i, x_{i+2}) y (x_{i+1}, x_{i+3})), entonces la digráfica es R -digráfica.

Demostración. Sea $u \in V(D)$ y C un ciclo dirigido de longitud impar que pasa por u , $C = (u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_{2n}, u = u_0)$ entonces C tiene dos cuerdas cortas cruzadas, esto implica que C tiene al menos una $V(C)(C_u^1 \cup \{u\})$ -seudodiagonal. Por lo tanto, aplicando el Teorema 4.12, D es R -digráfica. \square

Teorema (H. Galeana Sánchez y V. Neumann Lara [28], 1984). Si todo ciclo dirigido de longitud impar tiene dosseudodiales cuyos extremos terminales finales son vértices consecutivos en el ciclo, entonces la digráfica tiene núcleo (es R -digráfica).

Demostración. Sea $C = (u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_{2n}, u = u_0)$ un ciclo dirigido de longitud impar entonces C tiene dosseudodiales cuyos extremos terminales son vértices consecutivos en el ciclo, esto implica que C tiene al menos una $V(C)(C_u^1 \cup \{u\})$ -seudodiagonal. Por lo tanto, aplicando el Teorema 4.12, D es R -digráfica. \square

5. LA CONEXIDAD DE R^- -DIGRAFICAS (H. Galeana Sánchez, V. Neumann Lara [26], 1986)

Una digráfica D es llamada *quasi R -digráfica* si toda subdigráfica inducida propia de D tiene núcleo.

Notemos que una quasi R -digráfica es una R -digráfica ó una R^- -digráfica.

En esta parte estudiaremos nuevas condiciones suficientes para que una digráfica sea una R -digráfica y propiedades estructurales de R^- -digráficas. En particular se prueba que la parte asimétrica de una R^- -digráfica es fuertemente conexa. Un nuevo método para construir R^- -digráficas es desarrollado.

Además se estudian relaciones entre quasi R -digráficas y su parte asimétrica así como la existencia de R -digráficas con número dicromático arbitrariamente grande.

5.1 La Parte Asimétrica de Quasi R -digráficas

La mayoría de los resultados obtenidos en esta sección son consecuencia del Teorema 5.1.

Teorema 5.1 Supongamos que $V(D)$ tiene una partición $\{V_1, V_2\}$ tal que toda V_1V_2 -flecha en D es simétrica y $D[V_1]$ y $D[V_2]$ son R -digráficas. Entonces D es una R -digráfica.

Demostración. Sea D' una subdigráfica inducida de D . Si $D' \subset D[V_1]$ o $D' \subset D[V_2]$ entonces D' tiene núcleo. En caso contrario, cualquier núcleo de $D' \cap D[V_1]$ es un seminúcleo de D' . Entonces D es una R -digráfica. \square

Un corolario del Teorema 5.1 es:

Teorema 5.2 Si D es una R^- -digráfica, no existe una partición $\{V_1, V_2\}$

de $V(D)$ tal que $D[V_1, V_2] \subset \text{Sim}(D)$; en otras palabras, $\text{Asim}(D)$ es fuertemente conexa.

Demostración. Por el Teorema 5.1, no existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$ tal que $D[V_1, V_2] \subset \text{Sim}(D)$.

Supongamos que $\text{Asim}(D)$ no es fuertemente conexa, entonces existe $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(D)$ tal que no existe V_1V_2 -flecha asimétrica de D ó no existe V_2V_1 -flecha asimétrica de D , pero como $D[V_1, V_2] \not\subset \text{Sim}(D)$, entonces deben existir V_1V_2 -flechas asimétricas ó V_2V_1 -flechas asimétricas.

Sin pérdida de generalidad supongamos que existen solo V_1V_2 -flechas. Como D es R^- -digráfica, entonces $D[V_2]$ tiene un núcleo N_2 y como no hay V_2V_1 -flechas asimétricas entonces N_2 es un seminúcleo de D , pero esto contradice la suposición de que D es R^- -digráfica. Por lo tanto $\text{Asim}(D)$ es fuertemente conexa. \square

Como consecuencia directa del Teorema 5.2 tenemos el siguiente Corolario

Corolario 4.5 (Duchet[18]) Toda R^- -digráfica es fuertemente conexa.

Corolario 5.1 (Duchet y Meyniel [19]). Si $\text{Asim}(D)$ es acíclica, entonces D es una R -digráfica.

Demostración. Supongamos que D no es R -digráfica, entonces existe H una subdigráfica inducida de D tal que H es R^- -digráfica. Por el Teorema 5.2 $\text{Asim}(H)$ es fuertemente conexa, y por lo tanto tiene un camino cerrado generador, el cual a su vez contiene un ciclo dirigido C , pero también C es un ciclo dirigido contenido en $\text{Asim}(D)$, lo cual contradice la hipótesis de que $\text{Asim}(D)$ es acíclica. Por lo tanto D es R -digráfica. \square

Como aplicación del Corolario 5.1 obtenemos los siguientes Teoremas:

Teorema 5.3 Si D es una digráfica tal que todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica, entonces D es R -digráfica.

Teorema 5.4 Si $\text{Asim}(D) = \vec{C}_n$, entonces D es quasi R -digráfica y $D - f$ es una R -digráfica para toda $f \in F(\text{Asim}(D))$.

Definimos la digráfica $C = \vec{C}_n(j_1, j_2, \dots, j_k)$ como $V(C) = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $F(C) = \{uv / v - u \equiv j_s \pmod{n} \text{ con } s = 1, \dots, k\}$

Una aplicación del Teorema 5.4 es el siguiente Teorema:

Teorema 5.5 Si $2 \leq r \leq \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$, entonces $C = \vec{C}_n(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm r)$ es una R -digráfica ó una R^- -digráfica dependiendo si $n \equiv 0 \pmod{r+1}$ ó $n \not\equiv 0 \pmod{r+1}$.

Demostración. Como $Asim(C) = \vec{C}_n$ y en virtud del Teorema 5.3 tenemos solo que probar que C tiene núcleo si y solo si $n \equiv 0 \pmod{r+1}$.

Si $n \equiv 0 \pmod{r+1}$, $\{i / i \equiv 0 \pmod{r+1}\}$ es un núcleo de C .

Inversamente, sea N un núcleo de C . Si $u \in N$, $u' = u + 1 \notin N$. Tenemos $u' + j \in N$ tal que $u'(u' + j) \in F(C)$. Claramente $u' + k \notin N$, para $k = \pm 2, \dots, \pm(r-1), -r$, ya que para estos valores de k , $u' + k$ es adyacente a u . Entonces j debe ser igual a r y $u + r + 1 \in N$. Además $u + m(r+1) \in N$ (tomando operaciones mod n) para toda m . Como N es un conjunto independiente, debemos tener que $n \equiv 0 \pmod{r+1}$. \square

Un caso particular del Teorema 5.5 es:

Corolario 5.2 $\vec{C}_n(1, \pm 2, \dots, \pm \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor)$ es una R^- -digráfica para $n \geq 4$.

Otra consecuencia del Teorema 5.2 es:

Teorema 5.6 D es una R -digráfica si y solo si para toda componente fuerte α de $Asim(D)$, $D[V(\alpha)]$ es una R -digráfica.

Demostración. Si D es una R -digráfica, entonces toda subdigráfica inducida de D también lo es, en particular $D[V(\alpha)]$ es R -digráfica, para toda α componente fuerte de $Asim(D)$.

Inversamente, supongamos que D no es R -digráfica, entonces existe H una subdigráfica inducida de D tal que H es R^- -digráfica. Por el Teorema 5.2, $Asim(H)$ es fuertemente conexa y por lo tanto está contenida en una componente fuerte α de $Asim(D)$. Además H es una subdigráfica inducida de $D[V(\alpha)]$. Lo cual contradice que $D[V(\alpha)]$ sea R -digráfica. \square

En la sección 3 se prueba que toda digráfica bipartita es R -digráfica. Como una aplicación del Teorema 5.6 obtenemos

Corolario 5.3 Si para toda componente fuerte α de $Asim(D)$, $D[V(\alpha)]$ es bipartita entonces D es una R -digráfica.

El Corolario 5.3 incluye como un caso particular el siguiente resultado obtenido por Duchet.

Teorema 5.7 (Duchet [15]). Si todo ciclo dirigido de longitud impar en D tiene al menos dos flechas simétricas, entonces D es una R -digráfica.

Demostración. Es suficiente con probar el siguiente Lema:

Lema 5.1 Si todo ciclo de longitud impar en D tiene al menos dos flechas simétricas, entonces para toda componente fuerte α de $Asim(D)$, $D[V(\alpha)]$ es bipartita.

Demostración. Sea α una componente fuerte de $Asim(D)$, supongamos que $|V(\alpha)| > 1$. Sea $m_0 \in V(\alpha)$, y sea $V_1 = \{u \in V(\alpha) / \text{existe un } m_0u\text{-camino dirigido en } Asim(D) \text{ de longitud impar}\}$, y sea $V_2 = V(\alpha) - V_1$.

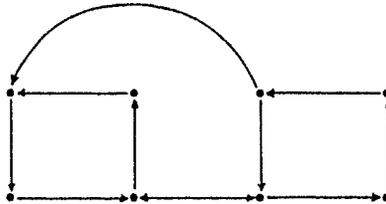
$V_1 \neq \emptyset$ ya que $\Gamma^+(m_0) \subset V_1$ y $\Gamma^+(m_0) \neq \emptyset$ por ser α fuertemente conexa. $m_0 \in V_2$ entonces $V_2 \neq \emptyset$. Claramente $V_1 \cup V_2 = V(\alpha)$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, por lo tanto $\{V_1, V_2\}$ es una partición de $V(\alpha)$.

Sea $f = uv \in F(\alpha)$, si $u, v \in V_1$, entonces existe C_1 un m_0u -camino dirigido en α de longitud impar, y existe C_2 un m_0v -camino dirigido en α de longitud impar, como α es fuertemente conexa existe C_3 un vm_0 -camino dirigido en α . Si C_3 es de longitud impar entonces $C_1 \cup (u, v) \cup C_3$ es un camino cerrado asimétrico de longitud impar, el cual contiene un ciclo dirigido de longitud impar y esto contradice la hipótesis. Si C_3 es de longitud par entonces $C_2 \cup C_3$ es un camino cerrado asimétrico de longitud impar, y éste contiene un ciclo dirigido de longitud impar lo cual es una contradicción. Por lo tanto $u \notin V_1$ ó $v \notin V_1$.

Supongamos que $u, v \in V_2$, como α es fuertemente conexa, entonces existe C_1 un m_0u -camino dirigido de longitud par, C_2 un m_0v -camino dirigido de longitud par, y C_3 un vm_0 -camino dirigido. Si C_3 es de longitud par entonces $C_1 \cup (u, v) \cup C_3$ es un camino cerrado asimétrico de longitud impar, y contiene un ciclo dirigido de longitud impar lo que contradice la hipótesis. Si C_3 es de longitud impar entonces $C_2 \cup C_3$ es un camino cerrado

asimétrico de longitud impar, y éste contiene un ciclo dirigido de longitud impar lo cual es una contradicción. Por lo tanto $u \in V_1$ y $v \in V_2$ ó $u \in V_2$ y $v \in V_1$. Entonces $\{V_1, V_2\}$ es una partición de $V(\alpha)$ tal que no existen V_1V_1 -flechas ni V_2V_2 -flechas en α . Si suponemos que existe una V_1V_1 -flecha simétrica en $D[V(\alpha)]$ ó una V_2V_2 -flecha simétrica, con argumentos análogos a los anteriores obtendríamos ciclos de longitud impar con una sola flecha simétrica, por lo tanto $\{V_1, V_2\}$ es una bipartición de $V(\alpha)$ tal que no existen V_1V_1 -flechas ni V_2V_2 -flechas en $D[V(\alpha)]$. Por lo tanto $D[V(\alpha)]$ es bipartita. \square

La digráfica mostrada en la siguiente figura, la cual es R -digráfica por el Corolario 5.3, muestra que éste es más fuerte que el Teorema 5.7.



5.2 R -digráficas cuya parte asimétrica es separable

El principal resultado de esta sección es el Teorema 5.11.

Lema 5.2 Sean D_1, D_2 y D digráficas, $v \in V(D_i)$, $i = 1, 2$. Supongamos que $D_1 \cup D_2 = D$, $V(D_1) \cap V(D_2) = \{v\}$ y que N_1 es un núcleo de D_1 ,

- (i) Si N_2 es un núcleo de D_2 y $v \in (N_1 \cap N_2) \cup (N_1^c \cap N_2^c)$, entonces $N_1 \cup N_2$ es un núcleo de D .
- (ii) Si $v \notin N_1$ y N_2' es un núcleo de $D_2 - v$, entonces $N_1 \cup N_2'$ es un núcleo de D .

Demostración.

- (i) Supongamos que N_2 es un núcleo de D_2 y $v \in (N_1 \cap N_2) \cup (N_1^c \cap N_2^c)$.

Sea $u \in V(D) - (N_1 \cup N_2)$, si $u \in V(D_1)$, como $u \notin N_1$ entonces existe

$w_2 \in N_2$ tal que $uw_2 \in F(D_2) \subset F(D)$. Por lo tanto $N_1 \cup N_2$ es un conjunto absorbente de D .

Supongamos que $v \in N_1 \cap N_2$, sean $w_1, w_2 \in N_1 \cup N_2$ si $w_1, w_2 \in N_i$, $i = 1, 2$ entonces $w_1 w_2 \notin F(D_i)$, $i = 1, 2$, por ser N_1 y N_2 conjuntos independientes, por lo tanto $w_1 w_2 \notin F(D)$. Si $\{w_1, w_2\} \not\subset N_1$ y $\{w_1, w_2\} \not\subset N_2$, supongamos sin pérdida de generalidad que $w_1 \in N_1$ y $w_2 \in N_2$, entonces $w_1 \neq v$ y $w_2 \neq v$, por otro lado tenemos que $V(D_1) \cap V(D_2) = \{v\}$ y $D_1 \cup D_2 = D$ entonces $w_1 w_2 \notin F(D)$. Por lo tanto $N_1 \cup N_2$ es independiente.

Si $v \in (N_1^c \cap N_2^c)$ es decir $v \notin N_1$ y $v \notin N_2$ entonces $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ y como ambos son conjuntos independientes, $N_1 \cup N_2$ es independiente.

Por lo tanto $N_1 \cup N_2$ es un núcleo de D .

(ii) Supongamos que $v \notin N_1$ y N_2' es un núcleo de $D_2 - v$. Como $V(D_1) \cap V(D_2) = \{v\}$, $N_1 \subset V(D_1) - \{v\}$ y $N_2' \subset V(D_2) - \{v\}$, entonces $N_1 \cap N_2' = \emptyset$, y como ambos conjuntos son independientes, entonces $N_1 \cup N_2'$ también lo es.

Sea $u \in V(D) - N_1 \cup N_2'$, $N_1 \subset V(D_1)$, $N_2' \subset V(D_2)$ y $v \notin N_1 \cap N_2'$ entonces $u \in V(D_1) - N_1$ o $u \in V(D_2) - N_2'$, si $u \in V(D_1) - N_1$, existe $w_1 \in N_1$ tal que $uw_1 \in F(D_1) \subset F(D)$, si $u \in V(D_2) - N_2'$ y $u \neq v$, existe $w_2 \in N_2'$ tal que $uw_2 \in F(D_2) \subset F(D)$, si $u = v$, $u \in V(D_1) - N_1$ y es el caso primero. Por lo tanto $N_1 \cup N_2'$ es absorbente y en consecuencia es un núcleo de D . \square

Lema 5.3 Sean D_1, D_2 y D digráficas, $v \in V(D_i)$, $i = 1, 2$. Supongamos que $D_1 \cup D_2 = D$, $V(D_1) \cap V(D_2) = \{v\}$ y que N es un núcleo de D y $N_i = N \cap V(D_i)$, $i = 1, 2$. Si N_2 no es un núcleo de D_2 , entonces N_1 es un núcleo de D_1 y N_2 es un núcleo de $D_2 - v$.

Demostración. Si $v \in N$, entonces N_i es un núcleo de D_i , $i = 1, 2$. Si $v \notin N$, y N_2 no es un núcleo de D_2 , entonces existe una vN_1 -flecha y no existe vN_2 -flecha, por lo tanto N_1 es un núcleo de D_1 y N_2 es un núcleo de $D_2 - v$. \square

Lema 5.4 Sean D_1, D_2 y D digráficas, $v \in V(D_i)$, $i = 1, 2$. Supongamos que $V(D_1) \cap V(D_2) = \{v\}$, $u_i v \in \text{Sim}(D_i)$, $H_i = D_i - u_i v - v u_i$, $i = 1, 2$ y $D = (H_1 \cup H_2) + u_1 u_2 + u_2 u_1$. Si $H_i, H_i - v$ ($i = 1, 2$), $H_1 - u_1$ y D_2 , cada una tiene núcleo entonces D tiene núcleo.

Demostración. De aquí en adelante $N(S)$ denotará cualquier núcleo de S . Supongamos que D no tiene núcleo, entonces:

Por el Lema 5.2, $H_1 \cup H_2$ tiene núcleo, entonces

(i) $\{u_1, u_2\} \subset N(H_1 \cup H_2)$ para cualquier núcleo $N(H_1 \cup H_2)$ de $H_1 \cup H_2$. De otro modo $N(H_1 \cup H_2)$ sería un núcleo de D . Sea $N(H_1)$ un núcleo de H_1 y supongamos que $v \notin N(H_1)$. Entonces $u_1 \in N(H_1)$, de otro modo $N = N(H_1) \cup N(H_2 - v)$ por el Lema 5.2 sería un núcleo de $H_1 \cup H_2$, y no contendría a u_1 , contradiciendo (i). Entonces $N' = N(H_1) \cup N(H_2 - \{u_2, v\})$ es un núcleo de D , ya que como $V(H_1) \cup (V(H_2) - \{u_2, v\}) = \emptyset$, entonces $N(H_1) \cup N(H_2 - \{u_2, v\})$ es independiente, y como $v \notin N(H_1)$ pero $v \in V(H_1)$, existe una $vN(H_1)$ -flecha en H_1 , que es a su vez una vN' -flecha de D , y $(u_2, u_1) \in F(D)$ con $u_1 \in N(H_1)$, entonces N' es un conjunto absorbente de D , pero esto contradice la suposición inicial. Por lo tanto debe suceder que $v \in N(H_1)$ y análogamente $v \in N(H_2)$. Por el Lema 5.2, se sigue que $N(H_1) \cup N(H_2)$ es un núcleo de $H_1 \cup H_2$, y por (i) $u_i \in N(H_i)$.

Hemos probado:

- (ii) $u_i, v \in N(H_i)$ para todo núcleo $N(H_i)$ de $H_i, i = 1, 2$. Sea $N(D_2)$ un núcleo de D_2 . Entonces $v \notin N(D_2)$, de otro modo $N(D_2) \cup N(H_1)$ sería un núcleo de D . Por lo tanto $v \notin N(D_2)$ para cualquier núcleo $N(D_2)$ de D_2 . Además $u_2 \in N(D_2)$, ya que si $u_2 \notin N(D_2)$, $N(D_2)$ sería un núcleo de H_2 no conteniendo a v . Hemos probado:
- (iii) Todo núcleo $N(D_2)$ de D_2 satisface $v \notin N(D_2)$ y $u_2 \in N(D_2)$.
- (iv) $v \in N(H_1 - u_1)$ para todo núcleo $N(H_1 - u_1)$ de $H_1 - u_1$. De otro modo por (iii), $N(H_1 - u_1) \cup N(D_2)$ sería un núcleo de D . Finalmente por (ii) y (iv) concluimos que $N(H_1 - u_1) \cup N(H_2)$ es un núcleo de D , lo que nos dá la conclusión final. Por lo tanto, D tiene núcleo. \square

Lema 5.5 Sean $D_1, D_2, v \in V(D_i) i = 1, 2$. Supongamos que $V(D_1) \cap V(D_2) = \{v\}$, $u_i, v \in \text{Sim}(D_i)$, $H_i = D_i - u_i, v - vu_i i = 1, 2$ y $D = (H_1 \cup H_2) + u_1 u_2 + u_2 u_1$. Si N es un núcleo de D y $N_i = N \cap V(D_i), i = 1, 2$, entonces N_i es un núcleo de D_1 ó N_2 es un núcleo de D_2 .

Demostración. Sea N un núcleo de D , $N_i = N \cap V(D_i), i = 1, 2$. Como $u_1 u_2 \in F(D)$ y $u_2 u_1 \in F(D)$ entonces $\{u_1, u_2\} \not\subset N$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $u_1 \notin N$. Si $v \in N$, entonces N_1 es un núcleo de D_1 ; si $v \notin N$ y $u_2 \in N$, N_2 es un núcleo de D_2 . Finalmente, si $v \notin N$ y $u_2 \notin N$, como $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, debe existir alguna vN_i -flecha para alguna $i = 1, 2$. Y para esa i , N_i es un núcleo de D_i . \square

En lo que sigue, necesitaremos el siguiente resultado obtenido por Jacob.

Teorema 5.8 (Jacob [31]). Sean D_1, D_2 y D digráficas, tales que $V(D_1) \cap V(D_2) = \{v\}$, y $D = D_1 \cup D_2$. Entonces D es R -digráfica si y solo si D_1 y D_2 son R -digráficas.

El Teorema 5.8 es una consecuencia directa del Lema 5.2.

Teorema 5.9 Sean D_1, D_2, D, H_1 y H_2 como en el Lema 5.5. Supongamos que H_1 y H_2 son R -digráficas. Entonces D es una R^- -digráfica si y solo si D_1 y D_2 son R^- -digráficas.

Demostración.

- (i) Supongamos que D_1 y D_2 son R^- -digráficas. Por el Lema 5.5, D no tiene núcleo. Sea $D' \subsetneq D$. Si $\{v, u_1, u_2\} \not\subset V(D')$, entonces D' tiene núcleo por el Teorema 5.8. Si $\{v, u_1, u_2\} \subset V(D')$, entonces D' tiene núcleo por el Lema 5.4. Por lo tanto D es una R -digráfica.
- (ii) Supongamos que D es una R^- -digráfica. Por el Lema 5.4, D_i no tiene núcleo para $i = 1, 2$. Sea $D'_2 \subsetneq D_2$. Si $\{v, u_2\} \not\subset V(D'_2)$ entonces D'_2 tiene núcleo. Si $\{v, u_2\} \subset V(D'_2)$, sea $D' = D[V(D'_2) \cup V(D_1)]$, como $D' \subsetneq D$, D' tiene núcleo y por el Lema 5.5 y el hecho de que D_1 no tiene núcleo, concluimos que D'_2 tiene núcleo. Por lo tanto D_2 es R^- -digráfica. Análogamente D_1 es R^- -digráfica. \square

El Teorema 5.10 puede ser obtenido aplicando el Teorema 5.8 y los Lemas 5.4 y 5.5.

Teorema 5.10 Sean D_1, D_2, D, H_1 y H_2 como en el Lema 5.5. Si H_1 y H_2 son R -digráficas, entonces D es una R^- -digráfica si y solo si al menos una de las digráficas D_1, D_2 es una R^- -digráfica.

Definición 5.1 Sea D una digráfica tal que $vu, uv \in F(D)$, se dice que D es una $R^-(u, v)$ -digráfica si y solo si D es una R^- -digráfica y $D - uv - vu$ es una R -digráfica.

De los Teoremas 5.8 y 5.9 podemos probar fácilmente el Teorema 5.11.

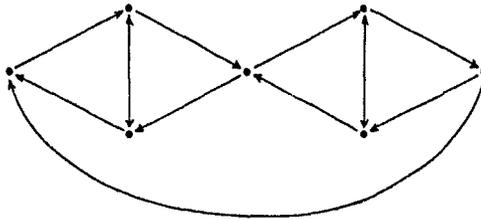
Teorema 5.11 Sea D_1, D_2 y D como en el Lema 5.4. Si D_i es una $R^-(u, v)$ -digráfica para $i = 1, 2$, entonces D es una $R^-(u_1, u_2)$ -digráfica.

Ejemplo 5.1 Sea $D = \overrightarrow{C}_n(1, \pm 2, \dots, \pm r)$, $n \not\equiv 0 \pmod{r+1}$. Por el Teorema 5.4 D es una R^- -digráfica. Sean i, j, k enteros modulus $r+1$ tal que $r = j+i$, $i = 2, \dots, r$. Entonces D no es una $R^-(j, k)$ -digráfica solo en el caso $i = r$, $n \not\equiv r \pmod{r+1}$ y $n \geq 2r+1$.

Demostración. Por simetría podemos asumir $k = 0$; entonces $j = n - i$. Cualquier núcleo N de $D_1 = D - j0 - 0j$ debe contener a 0 y j , de otro modo N sería un núcleo de D . Si $n \equiv i \pmod{r+1}$, $\{k(r+1)/0 \leq k \leq \frac{n-i}{r+1}\}$ es un núcleo de D_1 y por el Teorema 5.3, D_1 es una R^- -digráfica. Si $n \not\equiv i \pmod{r+1}$ y $i \neq r$, tomamos $A = \{r+1, r+2, \dots, n-i-r-1\}$ cuando $n \geq 2(r+1)+i$ y en otro caso $A = \emptyset$, y sea $N(D[A])$ un núcleo de $D[A]$. Es fácil ver que $N(D[A]) \cup \{0, n-i\}$ es un núcleo de D_1 . En el caso $n \not\equiv i \pmod{r+1}$ y $i = r$:

- (a) Si $n \geq 2r+1$ se procede como en la demostración del Teorema 5.11 para concluir que D_1 es una R^- -digráfica.
 (b) Si $n = 2r$, $\{0, r\}$ es un núcleo de D_1 . \square

Ejemplo 5.2 Tomando $D_1 \sim D_2 \sim \overrightarrow{C}_4(1, \pm 2)$, aplicando el Lema 5.4 obtenemos la digráfica de la siguiente figura:



(u, v, vu, v son las flechas correspondientes a la diagonal de \overrightarrow{C}_4). Usando el Teorema 5.11 y la demostración anterior concluimos que D es una R^- -digráfica. Más aún, D es un ejemplo de una no Hamiltoniana R^- -digráfica.

Comenzando con D y usando repetidamente la operación $\alpha(G, v)$, podemos obtener ejemplos de no Hamiltonianas R^- -gráficas orientadas, donde $\alpha(G, v)$ denota la digráfica obtenida a partir de G sustituyendo el vértice v de G y las flechas incidentes en v por tres nuevos vértices v^-, v^0, v^+ y las nuevas flechas:

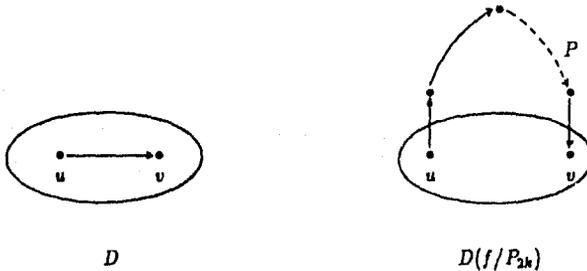
- (i) wv^- si $wv \in F(G)$
- (ii) v^-v^0
- (iii) v^0v^+
- (iv) v^+w si $vw \in F(G)$.

5.3 Número dicromático y Quasi R-digráficas

5.3.1 Algunas construcciones

Las construcciones dadas en esta sección son usuales para agrandar la clase de R-digráficas y R^- -digráficas conocidas.

Definición 5.2 Si $f = uv \in F(D)$, $D(f/P_n)$ denotará cualquier digráfica D' tal que $D' = (D - f) \cup P_n(u, v)$ donde $P_n(u, v)$ es una uv -trayectoria dirigida de longitud $n - 1$ que satisface $V(P_n(u, v) \cap D) = \{u, v\}$.



Los Teoremas 5.12 y 5.13 fueron encontrados independientemente por Galeana-Sánchez y Neumann-Lara [22] y Duchet y Meyniel [19].

Teorema 5.12 $D(f/P_{2k})$ tiene núcleo si y solo si D tiene núcleo.

Demostración. Cualquier núcleo de D puede ser extendido a un núcleo de $D(f/P_{2k})$. Si N' es un núcleo de $D(f/P_{2k})$, $N' \cap V(D)$ es un núcleo de D . \square

Usando los Teoremas 5.8 y 5.12 podemos probar

Teorema 5.13 Supongamos que $D - f$ es una R -digráfica. Entonces $D(f/P_{2k})$ es una R -digráfica (resp. R^- -digráfica) si y solo si D es una R -digráfica (resp. R^- -digráfica).

Observación 5.1 Por el Teorema 5.12 es suficiente demostrar que la digráfica $D(f/P_{2k})$ es una quasi- R^- -digráfica si y solo si D es quasi- R -digráfica.

Omitimos la demostración del Teorema 5.14 la cual es una simple generalización del Teorema 5.13.

Teorema 5.14 Sea $\emptyset \neq F_0 \subset F(D)$ y D' una digráfica obtenida a partir de D reemplazando cada $uv \in F_0$ por una uv -trayectoria dirigida $P(u, v)$ de longitud impar tal que $V(D \cap P(u, v)) = \{u, v\} \cap \{u', v'\}$ cuando $uv \neq u'v'$, $uv, u'v' \in F_0$. Supongamos además que $D - F'$ es una R -digráfica con $\emptyset \neq F' \subset F_0$. Entonces D' es una R -digráfica (resp. R^- -digráfica) si y solo si D es una R -digráfica (resp. R^- -digráfica).

Definición 5.3 Sea D una digráfica y $\alpha = (\alpha_u)_{u \in V(D)}$ una familia de digráficas no vacías mutuamente ajenas. La digráfica $\sigma(D, \alpha)$ está definida por:

$$(i) \quad V(\sigma(D, \alpha)) = \bigcup_{u \in V(D)} V(\alpha_u);$$

(ii) $w_1, w_2 \in F(\sigma(D, \alpha))$ si y solo si

(1) $w_1, w_2 \in V(\alpha_u)$ y $w_1 w_2 \in F(\alpha_u)$ para alguna $u \in V(D)$ o

(2) $w_1 \in V(\alpha_u)$, $w_2 \in V(\alpha_v)$ y $uv \in F(D)$ para alguna $u, v \in V(D)$.

Observación 5.2 Note que si α_u es isomorfa a α^0 para toda $u \in V(D)$, $\sigma(D, \alpha)$ es isomorfa al producto lexicográfico $D[\alpha^0]$. Además si D y las α_u 's son gráficas orientadas, $\sigma(D, \alpha)$ es una gráfica orientada.

Teorema 5.15 $\sigma(D, \alpha)$ es una R -digráfica si y solo si D y toda α_u son R -digráficas.

Demostración. Como α_u y D son subdigráficas inducidas de $\sigma(D, \alpha)$ se sigue que D y α_u son R -digráficas si $\sigma(D, \alpha)$ es una R -digráfica. El inverso se sigue de la observación de que toda subdigráfica inducida de $\sigma(D, \alpha)$ tiene la forma $\sigma(D', \alpha')$, donde $D' \subset^* D$ y $\alpha'_u \subset^* \alpha_u$ para $u \in V(D')$, y además $\bigcup_{u \in K} Q_u$ es un núcleo de D' cuando K es un núcleo de D' y Q_u es un núcleo de α_u para cada $u \in V(D')$. \square

Corolario 5.4 $D[\alpha^0]$ es una R -digráfica si y solo si D y α^0 son R -digráficas.

5.3.2 El número dicromático y la Teoría de Núcleos

El número dicromático $d_k(D)$ de D fué definido por V. Neumann Lara en [38] (ver también P. Erdős, [21]), e independientemente en [34] como el mínimo número de colores requeridos para colorear los vértices de D de tal forma que las clases dicromáticas inducen subdigráficas acíclicas de D . Claramente $d_k(D) \leq \chi(D)$, donde $\chi(D)$ = número cromático de D definido análogamente pero con la condición de que las clases cromáticas sean conjuntos independientes. El número dicromático es una generalización del número cromático. En particular éstos coinciden para digráficas simétricas. Está probado en [38] que $d_k(D) \leq 2$ para cualquier digráfica D que no tiene ciclos dirigidos de longitud impar. Además el Teorema de Richardson se aplica solo para digráficas con número dicromático menor o igual que 2. De acuerdo con el Corolario 5.2 existen R^- -digráficas (y obviamente R -digráficas) con número dicromático arbitrariamente grande; más precisamente $d_k(\vec{C}_n(1, \pm 2, \dots, \pm[\frac{1}{2}n])) = \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$.

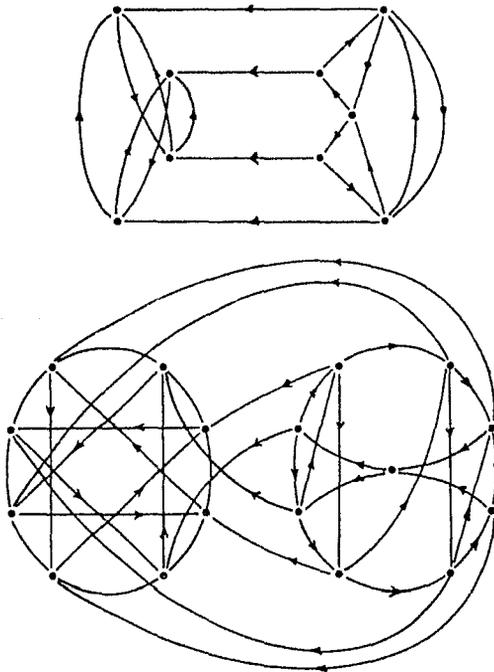
Para gráficas orientadas la situación es más complicada: el único torneo que es una R^- -digráfica es el triángulo (ciclo dirigido de longitud 3); además un torneo T es una R -digráfica si y solo si es acíclico o equivalentemente, $d_k(T) = 1$. Está probado en [38] que $d_k(D[\alpha]) \geq d_k(D) + d_k(\alpha) - 1$. Entonces $d_k(D[\vec{C}_4]) \geq d_k(D) + 1$ ya que $d_k(\vec{C}_4) = 2$. A partir de ésta desigualdad y la Observación 5.2, obtenemos que R -digráficas orientadas con número dicromático arbitrariamente grande pueden ser construídas. En [25] H. Galeana Sánchez y V. Neumann Lara prueban el siguiente resultado.

Teorema 5.16 Para toda R -digráfica (resp. R -gráfica orientada) D_0 existe una R^- -digráfica (resp. R^- -gráfica orientada) D tal que $D_0 \subset^* D$.

Este Teorema implica que existen R^- -gráficas orientadas con número dicromático arbitrariamente grande y consecuentemente con número cromático arbitrariamente grande.

En 1981, P. Duchet y H. Meyniel [19], plantearon lo siguiente: "Una digráfica núcleo crítica es fuertemente conexa". Después dieron el siguiente contraejemplo.

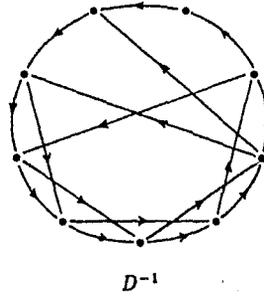
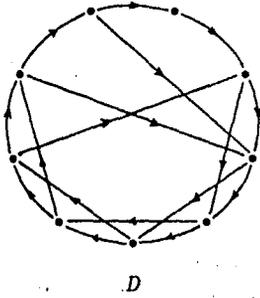
Contraejemplo 5.1 (P. Duchet, H. Meyniel, [19], 1981). Las siguientes figuras muestran una digráfica y una digráfica asimétrica (resp.) núcleo crítica y que no es fuertemente conexa.



Hasta 1981 todos los ejemplos conocidos de R^- -digráficas y de digráficas núcleo críticas tenían una inversa D^{-1} (la digráfica obtenida a partir de D invirtiendo cada flecha) con la misma propiedad. Planteando así V.

Chvátal y C. Berge en [19] lo siguiente: "Si D es R -digráfica entonces D^{-1} es R -digráfica".

Contraejemplo 5.2 ([19], 1981). La siguiente figura muestra una R^{-} -digráfica cuya inversa D^{-1} es R -digráfica.



**6. UNA CONDICION SUFICIENTE PARA QUE UNA
DIGRAFICA SEA R-DIGRAFICA
(P.Duchet, [14], 1987)**

Un resultado poderoso de Hortensia Galeana Sánchez y Victor Neumann Lara expuesto en la sección 4 (Corolario 4.8) puede ser establecido como sigue:

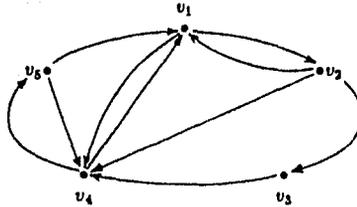
Teorema 6.1 Una condición suficiente para que una digráfica D sea R -digráfica es la siguiente propiedad (P): Todo ciclo de longitud impar $(v_1, v_2, \dots, v_{2n+1}, v_1)$ ($n \geq 1$) tiene al menos dos polos consecutivos.

En [17] una clase no trivial de digráficas con la propiedad (P) es expuesta. En [22] Hortensia Galeana Sánchez enuncia el siguiente resultado.

Teorema 6.2 Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud tres. Si todo ciclo de longitud impar posee dos cuerdas cortas, entonces D es R -digráfica.

Aquí se prueba la siguiente generalización de este resultado, que tiene como una consecuencia que las digráficas que satisfacen la condición de H. Galeana Sánchez cumplen la propiedad (P).

Vale la pena repetir que la condición sobre los ciclos dirigidos de longitud tres en el Teorema 6.3 no puede ser eliminada. Consideremos el ciclo dirigido de longitud cinco $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$ con las cuerdas $v_2v_1, v_4v_1, v_2v_4, v_1v_4$ y v_5v_4 que constituye una R -digráfica y no satisface la propiedad (P), pero en la cual todo ciclo de longitud impar posee dos cuerdas cortas.



Lo anterior sugiere la siguiente conjetura:

Conjetura 6.1 Si todo ciclo de longitud impar de una digráfica D tiene dos cuerdas cortas, entonces D es R -digráfica.

Teorema 6.3 Sea D una digráfica en la cual todos los ciclos de longitud tres son simétricos. Si todo ciclo de longitud impar de D posee dos cuerdas cortas, entonces D satisface la propiedad (P), y por lo tanto D es R -digráfica.

Demostración. Se procederá por contradicción. Sea $D = (X, V)$ un contraejemplo. Supongamos que todo ciclo dirigido de longitud impar de D tiene al menos dos cuerdas cortas y que los ciclos de longitud tres son simétricos, pero que no se satisface la propiedad (P). Entonces existe en D un ciclo de longitud impar γ que no tiene polos consecutivos.

En el resto de la demostración, $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_{2n+1}, v_1)$ es fijo. El hecho de que $k \geq 3$ vértices x_1, x_2, \dots, x_k de γ están en el orden correcto con respecto al orden cíclico de γ lo denotaremos por $x_1 < x_2 < \dots < x_k$.

Definimos recursivamente una clase especial de flechas de D , las flechas γ -normales, como sigue:

- (1) Las flechas de γ son flechas γ -normales.
- (2) Si $a < b < c$, (a, b) y (b, c) son flechas γ -normales y si (a, c) es una flecha de D , entonces (a, c) es una flecha γ -normal de D .

Todas las flechas γ -normales son entonces, flechas o cuerdas de γ . Indicaremos la propiedad requerida en el paso (2) de la construcción de una flecha γ -normal (a, c) por la notación $(a, c) = (a, b) \wedge (b, c)$.

El peso $w(\epsilon)$ de una flecha γ -normal ϵ es definido recursivamente por medio de lo siguiente:

(3) $w(\epsilon) = 1$ si ϵ es una flecha de γ .

(4) $w(\epsilon) = w(f) + w(g)$ si $\epsilon = f \wedge g$.

Es fácil checar la validez de esta definición.

La noción de un ciclo γ -normal es también definida recursivamente

(5) γ es un ciclo γ -normal.

(6) Si $(x_1, x_2, \dots, x_p, x_1)$ es un ciclo γ -normal π , con $p \geq 3$, y si (x_{p-1}, x_1) es una cuerda corta de π , entonces $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_1)$ es un ciclo γ -normal.

Los vértices de un ciclo γ -normal son vértices de γ en el mismo orden cíclico, y las flechas de un ciclo γ -normal son flechas γ -normales (sin embargo un ciclo constituido por flechas γ -normales no siempre es un ciclo γ -normal).

Diremos que un ciclo π es un ciclo γ -normal mínimo cuando no existe un ciclo γ -normal menor que π . Notemos que un ciclo γ -normal mínimo tiene longitud par puesto que no puede tener cuerdas cortas.

La demostración se descompone en tres lemas.

Lema 6.1 Sea $\pi = (y_1, \dots, y_p, y_1)$ un ciclo γ -normal mínimo. Para toda flecha (y_i, y_{i+1}) de π que es una cuerda de γ , el vértice y_{i+2} de π es un polo de γ .

Lema 6.2 Los vértices de un ciclo γ -normal mínimo son polos de γ .

Lema 6.3 Existe un ciclo γ -normal mínimo que contiene al menos una flecha de γ .

Claramente, los Lemas 6.2 y 6.3 implican que γ tiene dos polos consecutivos, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto D satisface la propiedad (P) y en consecuencia es R -digráfica. \square

Demostración. Del Lema 6.1 Procederemos por contradicción. Supongamos que el Lema es falso, supongamos sin pérdida de generalidad que (y_p, y_1) es una cuerda de γ y que y_2 no es un polo de γ .

Por las definiciones de ciclo γ -normales y flechas γ -normales existe una sucesión (z_0, z_1, \dots, z_q) con las siguientes propiedades

- (7) $z_0 = y_p < z_1 < z_2 < \dots < z_q < y_1$
 (8) $(z_k, y_1) = (z_k, z_{k+1}) \wedge (z_{k+1}, y_1)$ para $0 \leq k < q$
 (9) (z_q, y_1) es una flecha de γ

Estas condiciones implican que todos los vértices $y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_q$ son distintos.

Entonces, $(y_p, z_1, y_1, y_2, \dots, y_p)$ es un ciclo γ -normal impar π_1 . Por hipótesis, π_1 tiene al menos dos cuerdas cortas y una de ellas es (y_p, y_1) . Como π es mínimo y como y_2 no es un polo de γ , (y_{p-1}, z_1) debe ser otra cuerda corta de π_1 . Ahora mostraremos que

- (10) (y_{p-1}, z_k) es una cuerda de γ para $1 \leq k \leq q$

La afirmación, es cierta para $k = 1$, procederemos por inducción. Si (y_{p-1}, z_k) es una flecha de D , con $k < q$, entonces $(y_{p-1}, z_k, z_{k+1}, y_1, y_2, \dots, y_{p-1})$ es un ciclo γ -normal π' ; si $p = 2$, entonces π' es un ciclo de longitud tres, el cual es simétrico por hipótesis y por lo tanto (y_{p-1}, z_{k+1}) es una flecha de D . Si $p > 2$, π' debe tener una cuerda diferente de (z_k, y_1) . Como el ciclo $\pi'' = (y_{p-1}, z_k, y_1, \dots, y_{p-1})$ es γ -normal de longitud p , no tiene cuerdas cortas. Además, $(z_{k+1}, y_2) \notin U$, ya que y_2 no es un polo de γ . Por lo tanto, (y_{p-1}, z_{k+1}) debe ser una cuerda corta de π' ; esto prueba a (10).

La afirmación (10) implica que z_q es un polo de γ . Entonces, por (9), z_q y y_1 son polos consecutivos de γ . Esta contradicción completa la prueba del Lema 6.1. \square

Demostración. Del Lema 6.2 Sea $\pi = (y_1, \dots, y_p, y_1)$ un ciclo γ -normal. Alguna flecha de π , digamos (y_1, y_2) es una cuerda de γ . Entonces, y_2 es un polo de γ y por el Lema 6.1 y_3 es también un polo de γ . Como γ no tiene polos consecutivos, entonces (y_2, y_3) es una cuerda de γ , y podemos aplicar el Lema 6.1 otra vez: y_4 es un polo de γ . Se sigue que y_i es un polo de γ , para toda $1 \leq i \leq p$. \square

Demostración. Del Lema 6.3 De los ciclos mínimos γ -normales, escogamos uno, digamos π_0 , con una flecha e de peso mínimo. Supongamos que $w(e) > 1$, podemos asumir sin pérdida de generalidad, que $\pi_0 = (y_1, y_2, \dots, y_p, y_1)$ y $e = (y_p, y_1)$. Para algún vértice z , tenemos $(y_p, y_1) = (y_p, z) \wedge (z, y_1)$ y $w((z, y_1)) < w(e)$.

El ciclo $\pi' = (y_1, y_2, \dots, y_p, z, y_1)$ es un ciclo γ -normal de longitud impar y tiene a (y_p, y_1) como una cuerda corta; otra cuerda corta debe ser (y_{p-1}, z) o (z, y_2) .

Si (y_{p-1}, z) es una flecha de D , entonces $\pi'' = (y_1, y_2, \dots, y_{p-1}, z, y_1)$ es

un ciclo γ -normal de longitud p , y por lo tanto es también mínimo. Pero $w((z, y_1)) < w(e)$, contradiciendo nuestra elección de π_0 . Una contradicción similar ocurre si (z, y_2) es una flecha de D . Por lo tanto, debemos tener que $w(e) = 1$, que es la conclusión requerida. \square

Este resultado es un caso particular de un interesante problema planteado por H. Meyniel [15]: "Si D es una digráfica tal que todo ciclo dirigido de longitud impar posee al menos dos diagonales, entonces D es R -digráfica".

Esta proposición resultó ser falsa, lo cual se muestra en el siguiente Teorema.

Teorema 6.4 (H. Galeana Sánchez [22], 1982). Para todo $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, existe una digráfica sin núcleo tal que todo ciclo de longitud impar tiene al menos k diagonales.

Demostración. En lo que sigue todas las sumas están escritas módulo $8k + 4$.

Sea D la digráfica con $V(D) = \{0, 1, \dots, 8k + 3\}$ como conjunto de vértices y con flechas $(i, i + 1)$, $(i_0 + 2i, 4k + 2 + i_0)$ para toda $0 \leq i \leq k$ y para toda $i_0 \in \{0, 2k + 1, 4k + 2, 6k + 3\}$.

Sea $C = (0, 1, 2, \dots, 8k + 3)$ el ciclo dirigido de longitud par generador de D ; es fácil ver que todos los ciclos dirigidos de longitud impar de D son:

$(4k + 2 + i_0, C, i_0 + 2i) \cup (i_0 + 2i, 4k + 2 + i_0)$ para toda $0 \leq i \leq k$ y para toda $i_0 \in \{0, 2k + 1, 4k + 2, 6k + 3\}$.

Claramente el ciclo dirigido de longitud impar $(4k + 2 + i_0, C, i_0 + 2i) \cup (i_0 + 2i, 4k + 2 + i_0)$ tiene las cuerdas $(4k + 2 + i_0 + 2j, i_0)$ para toda $0 \leq j \leq k$.

D no tiene núcleo: de otro modo, supongamos que N es un núcleo de D . Entonces

$$0 \in N \Rightarrow (4k + 2 \notin N, 2k + 1 \notin N, 6k + 3 \notin N)$$

$$6k + 3 \notin N \text{ y } 4k + 2 \notin N \Rightarrow 2k + 2 \notin N.$$

Entonces $0 \in N \Rightarrow (2k + 1 \notin N, 2k + 2 \notin N \text{ y } 6k + 3 \notin N)$. Esto es imposible, y concluimos $0 \notin N$. Similarmente, podemos probar que $2k + 1 \notin N$, $4k + 2 \notin N$ y $6k + 3 \notin N$.

También $0 \notin N$ y $4k + 2 \notin N \Rightarrow 2k \notin N$. Entonces $2k \notin N$, $2k + 1 \notin N$ y $4k + 2 \notin N$, lo cual tampoco es posible.

Concluimos que D no tiene núcleo. \square

7. UNA DIGRAFICA DE PARIDAD ES R-DIGRAFICA

En [9], M. Blidia prueba que toda digráfica de paridad es R -digráfica. En esta parte doy la demostración de un resultado sobre la estructura de este tipo de digráficas (Teorema 7.2). Con éste y aplicando un teorema de V. Neumann Lara y H. Galeana Sánchez (Teorema 4.12) se obtiene una prueba más simple del resultado mencionado al principio.

Definición 7.1 Una trayectoria dirigida $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$ es una uv -trayectoria minimal si $(u_i, u_j) \notin F(D)$ para $i < j$, $i \neq j - 1$.

Definición 7.2 Una digráfica D es de paridad, si para cada par de vértices x y y , $x \neq y$, todas las trayectorias dirigidas minimales de x a y y de y a x son pares ó todas impares.

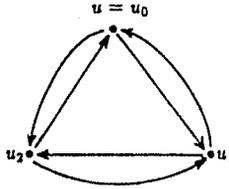
Teorema 7.1 Una digráfica de paridad es R -digráfica.

Demostración. Es consecuencia inmediata del siguiente teorema y del Teorema 4.12. \square

Teorema 7.2 Sea D una digráfica de paridad. Si C es un ciclo de longitud impar de D , $C = (u = u_0, u_1, \dots, u_{2n}, u_0 = u)$, entonces C tiene al menos una $V(C)(C_u^1 \cup \{u\})$ -seudodiagonal.

Demostración. (R. Rojas Monroy, 1988) Se procederá por inducción sobre la longitud de C , $l(C)$.

Para $l(C) = 3$, $C = (u = u_0, u_1, u_2)$, como D es de paridad, entonces (u_1, u_0) , (u_2, u_1) y (u_0, u_2) deben ser flechas de D y (u_2, u_1) es una $V(C)(C_u^1 \cup \{u\})$ -seudodiagonal.

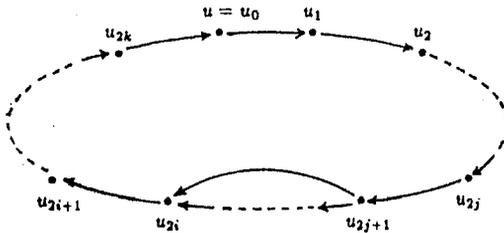


Supongamos ahora que si $C = (u = u_0, u_1, \dots, u_{2n}, u_0 = u)$ es un ciclo de D de longitud impar tal que $l(C) < 2k + 1$, entonces C tiene al menos una $V(C)(C_u^1 \cup \{u\})$ -seudodiagonal.

Sea $C = (u = u_0, u_1, \dots, u_{2k}, u_0 = u)$ un ciclo de D de longitud $2k + 1$.

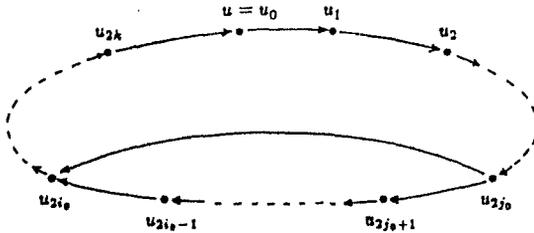
Como $(u = u_0, u_1)$ es una u_1 -trayectoria minimal de longitud impar, entonces la trayectoria $T = (u_1, u_2, \dots, u_{2k}, u_0 = u)$ debe inducir una u_1 -trayectoria minimal de longitud impar, es decir, en esta parte del ciclo debe haber diagonales que recorten a T , ó debiera existir la flecha (u_1, u_0) pero en tal caso ya tendríamos una $V(C)(C_u^1 \cup \{u\})$ -seudodiagonal.

- (a) Supongamos que C contiene alguna (u_{2j+1}, u_{2i}) -seudodiagonal $2j + 1 < 2i$ entonces $C_1 = (u = u_0, u_1, \dots, u_{2j+1}, u_{2i}, \dots, u_{2k}, u_0 = u)$ es un ciclo de longitud impar tal que $l(C_1) < l(C) = 2k + 1$, por hipótesis de inducción, C_1 tiene al menos una $V(C_1)((C_1)_u^1 \cup \{u\})$ -seudodiagonal la cual es también una $V(C)(C_u^1 \cup \{u\})$ -seudodiagonal pues $(C_1)_u^1 \subset C_u^1$.



Supongamos que C no tiene $V(C)(C_u^1 \cup \{u\})$ -seudodiagonales ni del tipo (u_{2j+1}, u_{2i}) con $2j + 1 < 2i$ y tratemos de llegar a una contradicción.

- (b) Si C contiene alguna (u_{2j}, u_{2i}) -seudodiagonal con $j < i$. Sean $i_0 = \min\{i / (u_{2j}, u_{2i}) \in F(D), \text{ para alguna } j < i\}$ y $j_0 = \min\{j / (u_{2j}, u_{2i_0}) \in F(D), j < i_0\}$. Entonces $T_1 = (u = u_0, u_1, \dots, u_{2i_0-1})$ es una $u u_{2i_0-1}$ -trayectoria minimal de longitud impar lo cual implica que $T_2 = (u_{2i_0-1}, u_{2i_0}, u_{2i_0+1}, \dots, u_{2k}, u_0 = u)$ debe inducir una trayectoria minimal T_3 de u_{2i_0-1} a $u = u_0$ de longitud impar, pero T_3 debe pasar por u_{2i_0} , entonces $T_4 = T_3 - \{u_{2i_0-1}\}$ es una u_{2i_0} - u -trayectoria minimal de longitud par, pero $T_5 = (u = u_0, u_1, \dots, u_{2j_0}, u_{2i_0})$ es una $u u_{2i_0}$ -trayectoria minimal de longitud impar, lo cual contradice a la paridad de D .



Por lo tanto C no tiene $u_{2j}u_{2i}$ -seudodiagonales. Esto implica que $T = (u_1, u_2, \dots, u_{2k}, u_0 = u)$ es una $u_1 u$ -trayectoria minimal de longitud par, lo que contradice a la paridad de D . Con esta última contradicción se concluye la demostración. \square

8. LAS GRAFICAS DE PARIDAD SON NUCLEO-M-SOLUBLES (Pierre Duchet,[17],1987)

En esta sección se prueba una forma más débil del problema: "Toda orientación normal de una gráfica de paridad es R -dígrafa". Esto corresponde a un caso particular de la conjetura de C. Berge y P. Duchet sobre la caracterización de la clase de gráficas perfectas.

Para una gráfica $G = (V, U)$, sea

$\alpha(G)$ el número de independencia, definido como la máxima cardinalidad de un conjunto independiente de G .

$\theta(G)$ el mínimo número de clanes que conforman una partición de V , donde un clan es una subgráfica completa.

$\chi(G)$ el número cromático, definido en la sección 5.3.2.

$\omega(G)$ la máxima cardinalidad de un clan.

Claramente, $\alpha(G) \leq \omega(G)$ ya que un conjunto independiente S de G puede tener a lo más un vértice en cada clan de la partición. Similarmente, $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Una gráfica G es definida α -perfecta si $\alpha(G[A]) = \theta(G[A])$ para todo $A \subseteq V$

Una gráfica G es definida χ -perfecta si $\chi(G[A]) = \omega(G[A])$ para todo $A \subseteq V$

Se ha probado que las definiciones α -perfecta y χ -perfecta son equivalentes, siendo éste el "Teorema de la gráfica perfecta".

Teorema 8.1 Una gráfica G es α -perfecta si y solo si, su complemento \bar{G} es χ -perfecta.

Demostración. Claramente $\alpha(G[A]) = \omega(\bar{G}[A])$ y $\theta(G[A]) = \chi(\bar{G}[A])$. Entonces $\alpha(G[A]) = \theta(G[A])$ es equivalente a $\omega(\bar{G}[A]) = \chi(\bar{G}[A])$. \square

Corolario 8.1 Si una gráfica G ó su complemento \bar{G} contiene un ciclo de longitud impar > 3 sin cuerdas, entonces G no es α -perfecta ni χ -perfecta.

Demostración. Sea A un conjunto de vértices que induce un ciclo de

longitud impar en G , entonces $\alpha(G[A]) = k$, $\theta(G[A]) = k + 1$, $\chi(G[A]) = 3$, $\omega(G[A]) = 2$, por lo tanto G no es α -perfecta ni χ -perfecta.

Si el complemento \bar{G} contiene un ciclo de longitud impar, entonces no es α -perfecta ni χ -perfecta, y por el Teorema anterior, G no es α -perfecta ni χ -perfecta. \square

Este resultado y el estudio de varias clases de gráficas perfectas (Berge [1963], [1967], [1969]) sugirieron la siguiente conjetura:

Conjetura 8.1 Conjetura de la gráfica fuerte perfecta (Conjetura de Berge). Para una gráfica G , las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) G es α -perfecta
- (2) G es χ -perfecta
- (3) G no contiene un conjunto A tal que $G[A]$ o $\bar{G}[A]$ es un ciclo impar de longitud > 3 sin cuerdas.

Hemos mostrado anteriormente que (1) \Rightarrow (3), (2) \Rightarrow (3), lo que dá una prueba parcial de la conjetura.

Mientras la famosa conjetura de Berge de la Gráfica fuerte perfecta remite un problema mayor en Teoría de Gráficas, una caracterización de Gráficas Perfectas fue conjeturada en 1982 por Berge y Duchet [8]. Esta segunda conjetura asegura la existencia de núcleos para cierto tipo de orientaciones de gráficas perfectas. Aquí se debilitan las hipótesis de la conjetura y se prueba para una clase especial bien conocida de gráficas perfectas, la cual generaliza gráficas bipartitas llamadas gráficas de paridad.

En esta sección, toda digráfica D es vista como una orientación de su gráfica subyacente denotada por D_0 . En particular, una orientación de una gráfica puede contener flechas simétricas.

Una gráfica D_0 es llamada (núcleo)-soluble si toda orientación normal de D_0 es R -digráfica, donde D es una orientación normal si satisface que toda subdigráfica inducida completa de D tiene núcleo. La conjetura de Berge y Duchet puede ser establecida como sigue:

Conjetura 8.2 (C. Berge, P. Duchet [8]) Una gráfica es perfecta si y solo si es núcleo soluble.

Un tipo simple de orientación normal consiste en lo que llamamos una M -orientación, es decir una orientación que satisface la propiedad:

(M) Todo triángulo dirigido posee al menos dos flechas simétricas.

Diremos que una gráfica G es (núcleo)- M -soluble cuando toda M -orientación (orientación de Meyniel) de G es R -digráfica. Entonces, una forma más débil de la Conjetura 8.2 es:

Conjetura 8.3 Toda gráfica perfecta es núcleo- M -soluble.

En esta sección se probará la Conjetura 8.3 para gráficas de paridad. Usaremos la definición original de gráficas de paridad de Olaru y Sachs [43]: todo ciclo de longitud impar ≥ 5 tiene dos cuerdas que se cruzan.

Teorema 8.2 Toda gráficas de paridad es núcleo- M -soluble.

Se probará aquí una versión más fuerte del Teorema 8.2, basado en un resultado de H. Galeana Sánchez y V. Neumann Lara:

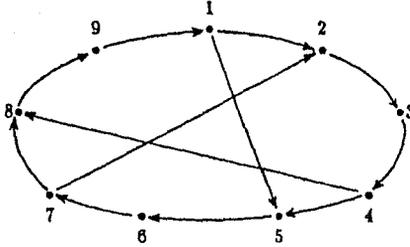
Teorema 8.3 ([28], Sección 4). Una condición suficiente para que una digráfica sea R -digráfica es la siguiente:

(P) Todo ciclo C de longitud impar tiene dos cuerdas cuyos vértices terminales son consecutivos en C .

Nuestro resultado principal puede ser obtenido probando:

Teorema 8.4 Toda M -orientación de una gráfica de paridad satisface la condición (P).

En la sección 7 se probó que las digráficas de paridad son R -digráficas. La digráfica con nueve vértices $1, \dots, 9$, con flechas $(1, 5)$, $(4, 8)$, $(7, 2)$, y $(i, i+1) \pmod{9}$ es una digráfica de paridad, en la cual el único ciclo dirigido de longitud impar tiene tres cuerdas cuyos vértices terminales son $5, 8, 2$; entonces no satisface la propiedad (P). Este ejemplo puede obviamente ser generalizado. Además, notemos que M -orientaciones de cualquier gráfica de paridad no necesariamente son digráficas de paridad.



8.1 Terminología y notación

Dada una digráfica $D = (X, U)$, denotaremos por D_0 a la gráfica subyacente de D , $[x, y]$ es una arista de D_0 si y solo si $(x, y) \in U$ ó $(y, x) \in U$. Un ciclo de D será considerado como un ciclo de D_0 , es decir, como una "sucesión cíclica" de $p \geq 2$ vértices distintos, se denota de la siguiente forma $C(1), C(2), \dots, C(i), C(i+1), \dots, C(j), C(j+1), \dots, C(p)$, $C(1)$ donde la variable i es tomada módulo p . Las aristas de la $[C(i), C(i+1)]$ son llamadas aristas de C : dos vértices unidos por una arista de C se dice que son consecutivos en C . El vértice $C(i+1)$ es el sucesor de $C(i)$ en C y $C(i)$ es el predecesor de $C(i+1)$. La longitud p de C se denotará por $|C|$. Una cuerda de C es una arista de D_0 de la forma $[C(i), C(j)]$ donde $|i - j| \neq 1$. Dos cuerdas $[x, y]$ y $[z, t]$ de C se cruzan si los vértices x, y, z, t están en este orden en el ciclo.

Una cuerda $e = [C(i), C(j)]$ de C determina dos ciclos más cortos teniendo a e como arista. Uno es $C(i), C(j), C(j+1), \dots, C(i-1), C(i)$, el otro es $C(j), C(i), C(i+1), \dots, C(j-1), C(j)$. Cuando C es impar, exactamente uno de estos dos ciclos es impar y lo denotamos por C_e . Cuando $|C_e| = 3$, e es llamada una *cuerda triangular*.

Un *polo* de un ciclo C es un vértice terminal y de una flecha $(x, y) \in U$ tal que $[x, y]$ es una cuerda de C .

Una trayectoria L de D será considerada como una trayectoria de D_0 , denotada por $L(1), L(2), \dots, L(i), L(p)$. Aristas y cuerdas de trayectorias están definidas análogamente que para ciclos. Una cuerda e de L únicamente determina un ciclo $L(i), L(i+1), \dots, L(j), L(i)$ donde $L(i)$ y $L(j)$ son

los respectivos vértices de e , en el orden que L induce en sus vértices. Este ciclo es denotado por L_e . Si L_e es impar, e es llamado una *cuerda impar* de L . Una *trayectoria minimal* es una trayectoria que no tiene cuerdas.

Ciclos dirigidos de D están definidos similarmente y denotados por letras griegas. Un ciclo dirigido $\gamma(1) \dots, \gamma(p), \gamma(1)$ tiene flechas $(\gamma(i), \gamma(i+1)) \in U$. Las cuerdas dirigidas de γ son flechas de D de las forma $(\gamma(i), \gamma(j))$ donde $j \neq i+1$ (módulo p). Los vértices finales de cuerdas dirigidas de γ son llamados los polos de γ . Note que un ciclo dirigido γ puede tener más polos que su ciclo subyacente. Por ejemplo un triángulo dirigido tiene tantos polos como flechas simétricas. Con esta terminología la propiedad (P) puede ser establecida como sigue:

(P) Todo ciclo dirigido de longitud impar tiene al menos dos polos consecutivos.

8.2 La demostración

El Teorema 8.4 será probado como una consecuencia del siguiente Teorema:

Teorema 8.5 Sea D una M -orientación de una gráfica de paridad D_0 . Entonces todo ciclo dirigido C de D de longitud ≥ 5 admite dos polos consecutivos ó tiene dos cuerdas triangulares cruzadas.

Demostración. del Teorema 8.4 asumiendo el Teorema 8.5. Supongamos que $D = (X, U)$ es una digráfica que satisface las hipótesis del Teorema 8.4 y D no satisface la propiedad (P). Entonces D tiene un ciclo dirigido γ de longitud impar y sin polos consecutivos. Por nuestra hipótesis, γ tiene longitud ≥ 5 , y dos cuerdas triangulares cruzadas. Entonces tenemos cuatro vértices a, b, c, d en γ tal que $(a, b), (b, c), (c, d)$ son flechas de γ y $[a, c], [b, d]$ son aristas de D_0 . Si $(a, c) \notin U$, entonces $(c, a) \in U$, entonces $(c, a) \in U$ y a, b, c, a es un triángulo dirigido; esto implica que (a, b) y (b, c) son flechas reversibles de D , entonces a y b son polos consecutivos de γ lo cual es una contradicción. Entonces tenemos $(a, c) \in U$. El mismo razonamiento para la arista $[b, d]$ muestra que $(b, d) \in U$. Entonces c y d son polos consecutivos de γ lo que contradice nuestra suposición. Por lo tanto toda M -orientación de una gráfica de paridad satisface la condición (P). \square

Demostración. del Teorema 8.5. Consideremos una digráfica $D = (X, U)$

que satisface las hipótesis del Teorema. Por definición de gráficas de paridad todo ciclo de longitud impar de D_0 con longitud ≥ 5 tiene dos cuerdas que se cruzan [43]. Usaremos la caracterización de gráficas de paridad de Burlet-Uhry [13]: todas las trayectorias minimales que unen dos vértices de D_0 tienen la misma paridad. Sea C un ciclo de longitud impar de D que contradice el Teorema 8.5, con longitud mínima. Claramente tenemos $|C| \geq 7$. Consideremos tres casos:

Caso 1. C no tiene cuerdas triangulares. Sea ϵ una cuerda de C tal que C_ϵ sea lo más corto posible. Sean x, y los vértices de ϵ ; sean x' y y' los respectivos vecinos de x y y en $C - \{x, y\}$.

Por minimalidad de C :

- (a) C_ϵ posee dos polos consecutivos ó
- (b) C_ϵ tiene dos cuerdas triangulares que se cruzan.

Subcaso 1(a). Los polos de C_ϵ son polos de C . Como C no tiene polos consecutivos, los polos consecutivos de C_ϵ deben ser x y y . Si $\{x, y'\}$ no es una arista de D_0 , x y y' es una trayectoria minimal de longitud 2 que une a x y y' . Como D_0 es una gráfica de paridad, la trayectoria de longitud impar L , inducida por C_ϵ y que une a y' con x no es minimal: alguna cuerda minimal ϵ' de L debe existir; el ciclo $L_{\epsilon'}$ que es igual que C_ϵ y es más corto que C_ϵ , es una contradicción con nuestra elección de ϵ . Entonces $\{x, y'\}$ es una arista de D_0 .

Sea $f = \{x, y'\}$. Como $|C_\epsilon| \geq 5$, f es una cuerda de C y tenemos $5 \leq |C_f| < |C|$. Por minimalidad de $|C|$, C_f tiene dos polos consecutivos ó tiene dos cuerdas triangulares cruzadas. En el primer caso, los polos están forzados a ser los vértices de f (de otro modo C tendría polos consecutivos). Entonces x, y y y' son polos de C con y y y' consecutivos, lo que contradice nuestra suposición. Entonces estamos en el segundo caso: C_f tiene dos cuerdas triangulares cruzadas. Como C no tiene cuerdas triangulares, estas cuerdas son necesariamente $\{x, y\} = \epsilon$ y $\{x'', y'\}$ donde x'' denota el vértice de C_f adyacente a x y diferente de y' . Entonces x'' ó y' es un polo de C . Pero x y y son polos de C , entonces C tiene dos polos consecutivos contradiciendo nuestra suposición: por lo tanto el subcaso 1(a) es imposible.

Subcaso 1(b). C_ϵ tiene dos cuerdas triangulares cruzadas. Como C no tiene cuerdas triangulares cruzadas, $\{x, y'\}$ y $\{x', y\}$ deben ser cuerdas de C_ϵ y por lo tanto lo son de C . Ahora, x ó y es un polo de C . Si x es un polo de C , x' no es un polo; entonces $(x', y) \in U$ y y es un polo. Entonces x y y son polos de C y caemos en el subcaso 1(a). Por lo tanto el Caso 1 no es posible.

Caso 2. C tiene una cuerda triangular e cruzada por otra cuerda f . Sea $e = [x, y]$ y $f = [v, w]$, donde x, v, y son vértices consecutivos de C , en ese orden. Uno de los vértices x, y es un polo de C ; entonces v no es un polo de C y $(v, w) \in U$. Por hipótesis C contradice al Teorema 8.5, entonces f no es una cuerda triangular por lo que tenemos $5 \leq |C_f| < |C|$, entonces

- (a) C_f tiene dos polos consecutivos ó
- (b) C_f tiene dos cuerdas triangulares cruzadas.

Subcaso 2(a). Los polos de C_f son polos de C . Como C no tiene polos consecutivos, los polos consecutivos de C_f deben ser v y w , pero esto es imposible ya que v no es polo de C .

Subcaso 2(b). C_f tiene dos cuerdas triangulares g y h . Como C no tiene cuerdas triangulares cruzadas, ninguna cuerda triangular de C puede contener a v . Entonces g ó h es la arista $[v, w']$ donde w' es un vecino de w en C_f . Como v no es un polo de C , $(v, w') \in U$; entonces w y w' son dos polos consecutivos de C . Pero esto es una contradicción. Por lo tanto el Caso 2 es imposible.

Caso 3. C tiene una cuerda triangular e y ninguna cuerda triangular de C se cruza con alguna otra. Sean x, v, y los tres vértices de C en este orden en C tales que $e = [x, y]$. Sean x' y y' los respectivos vecinos de x y y en $C - \{x, y\}$. Como $|C| \geq 7$, x, x', y, y' son todos distintos. Mostraremos que $[x', y]$ y $[x, y']$ son aristas de D_0 . La trayectoria v, x, x' es minimal de longitud 2. El ciclo C induce una trayectoria L de longitud impar de v a x' , que pasa por y . Como no hay cuerdas de C que contengan a v , una trayectoria minimal L' contenida en L de v a x' debe pasar por y . Como D_0 es una gráfica de paridad, L' es de longitud par. Entonces la parte de L' que va de y a x' es minimal y de longitud impar. Por lo tanto la trayectoria y, x, x' de longitud 2 no es minimal y $[y, x']$ es una arista de D_0 . Por simetría, $[x, y']$ es una arista de D_0 .

Sea $f = [x, y']$ y $g = [x', y]$. Como $|C| \geq 7$, tenemos $5 \leq |C_f| = |C_g| < |C|$. Por nuestra hipótesis referente a C , C_f tiene dos polos consecutivos o tiene dos cuerdas triangulares cruzadas.

En el primer caso, x y y' son polos de C . Entonces x' no es un polo de C y por lo tanto $(x', y) \in U$. Entonces y y y' son polos consecutivos de C , lo cual es una contradicción. En el otro caso, C_f tiene dos cuerdas triangulares cruzadas, pero C no. Entonces $[x', y']$ es necesariamente una cuerda de C_f . Por simetría, podemos suponer que $(x', y') \in U$; y' es un polo de C . Como y no puede ser polo entonces $(y, x) \in U$ y $(y, x') \in U$, por lo tanto x y x' son polos consecutivos de C . Esta contradicción prueba que el caso 3 no es posible y concluimos la prueba del Teorema 8.5. \square

9. Núcleos en gráficas *i*-trianguladas (F. Maffray, [33], 1986)

Una condición necesaria para que una digráfica sea *R*-digráfica es que toda subdigráfica completa K tenga un vértice absorbente (es decir, un sucesor de todos los vértices de K), de manera análoga se puede ver que tiene un vértice dominante. En esta sección, mostraremos que esta condición es suficiente para gráficas *i*-trianguladas, donde todo ciclo impar tiene dos cuerdas que no se cruzan.

Nótese que este resultado es un caso especial de la Conjetura de Berge referente a *R*-digráficas y gráficas perfectas.

Consideremos gráficas finitas, sin lazos y sin aristas múltiples. Dos cuerdas $[x_i, x_j]$ y $[x_k, x_m]$ de un ciclo, donde $0 \leq i < j \leq p-1$ y $0 \leq k < m \leq p-1$, son cuerdas que se cruzan si $i < k < j < m$ ó $k < i < m < j$.

Una gráfica se dice que es *i*-triangulada si todo ciclo de longitud impar (por lo menos cinco) tiene dos cuerdas que no se cruzan. Esta noción, introducida por Gallai [29] es una generalización común de gráficas trianguladas (donde todo ciclo tiene una cuerda) y gráficas bipartitas. Esto es una parte de una clase de gráficas perfectas definidas por Meyniel [35], donde todo ciclo de longitud impar tiene dos cuerdas. Podemos considerar de manera natural las llamadas gráficas de paridad (donde todo ciclo de longitud impar tiene dos cuerdas que se cruzan) definidas por Olaru y Sachs en [43].

Si $D = (V, U)$ es una digráfica, denotaremos por D_0 la gráfica subyacente de D . La digráfica D o el conjunto de flechas U es llamado una orientación de D_0 .

Una digráfica D es una orientación normal de D_0 si toda subdigráfica completa de D tiene un vértice absorbente (o equivalentemente un vértice dominante).

9.1 Resultados

En la sección 8 se prueba un caso particular de la Conjetura 8.2. En lo que se refiere a gráficas *i*-trianguladas, en esta parte se demuestra el siguiente resultado: Si G es una gráfica *i*-triangulada, entonces una orientación de G es *R*-digráfica si y solo si es una orientación normal.

La necesidad de la condición resulta de la siguiente observación: Una *R*-digráfica es una orientación normal de su gráfica subyacente. Para la suficiencia se usarán tres resultados obtenidos por Gallai, Jacob y Richardson. Recordemos que la suma G de n gráficas G_1, G_2, \dots, G_n se obtiene como sigue: el conjunto de vértices de G es la unión ajena de los conjuntos de vértices de las G_i 's; dos vértices de G son adyacentes en G si están en diferentes G_i 's ó si son adyacentes en una G_i .

Teorema 9.1 (T. Gallai [29]) Si G es una gráfica conexa *i*-triangulada, una de las siguientes tres propiedades es satisfecha:

- (i) G tiene un conjunto de corte A que induce una subgráfica completa de G .
- (ii) G es la suma de una gráfica completa y una gráfica bipartita.
- (iii) G es la suma de varios conjuntos independientes (es decir es una gráfica multipartita completa).

Teorema 9.2 (H. Jacob [32]) Si una digráfica D tiene un conjunto de corte A , el cual induce una subdigráfica completa de D , y tal que la digráfica $D - A$ tiene p componentes conexas B_1, B_2, \dots, B_p . Entonces D es *R*-digráfica si y solo si todas las subdigráficas inducidas por $A \cup B_1, A \cup B_2, \dots, A \cup B_p$ son *R*-digráficas.

Teorema 9.3 (M. Richardson [41], demostración corta en la sección 3). Una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar es *R*-digráfica.

Denotaremos por $P(x, y)$ una trayectoria dirigida de x a y , si $P(x, y)$ y $Q(y, z)$ son trayectorias disjuntas, $P(x, y) + Q(y, z)$ denota la trayectoria de

x a z , pasando por $P(x, y)$ y $Q(y, z)$, respectivamente.

Teorema 9.4 Sea G una gráfica i -triangulada. Entonces una orientación de G es R -digráfica si y solo si es una orientación normal.

Demostración. Procederemos por inducción sobre n el número de vértices de G . El resultado es obvio para $n = 1$ o $n = 2$. Supongamos cierta la propiedad para gráficas con a lo más $n - 1$ vértices. Ahora consideremos una gráfica G i -triangulada con n vértices y una orientación normal D . Por hipótesis de inducción, las subdigráficas inducidas propias de D tienen núcleo. Así que basta con demostrar que D tiene núcleo. Si G es no conexa, obtenemos un núcleo uniendo los núcleos de cada componente conexa de D . Si G es conexa, aplicamos el Teorema de Gallai y analizamos los casos siguientes para completar la demostración:

1. G tiene un conjunto de corte de A , el cual induce una subdigráfica completa de G . Por hipótesis de inducción, las componentes de A en D inducen R -digráficas y por el Teorema de Jacob (Teorema 9.3), D es R -digráfica.

2. G es la suma de una gráfica bipartita B y una gráfica completa C . Haremos una segunda inducción sobre el número de flechas simétricas de B en D .

En el caso de que B no tenga flechas simétricas junto con la hipótesis de que B no tiene ciclos de longitud impar, obtenemos que no tiene ciclos dirigidos de longitud impar, y por el Teorema de Richardson tiene un núcleo N . Si N no es un núcleo de D , existe un vértice x de C tal que $\Gamma^+(x) \cap N = \emptyset$. Entonces $N \subset \Gamma^-(x)$.

Sea $P(x, w)$ una trayectoria dirigida maximal de C , con origen x , que no usa flechas simétricas de C . Mostraremos que su extremo w es un núcleo de D .

Sabemos que w es vecino de cualquier otro vértice de D , puesto que C es completa y D es la suma de C con B .

Si $\{w\}$ no es un núcleo de D , existe un vértice u tal que $(w, u) \in F(D)$ y $(u, w) \notin F(D)$. Lo cual no es posible ya que:

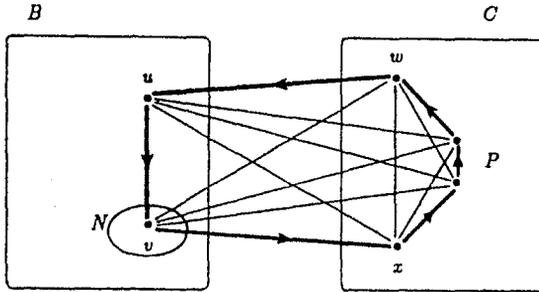
Si $u \in C - P$, esto contradice la maximalidad de P .

Si $u \in P$, sea $P'(u, w)$ la parte de P de u a w . Entonces $P'(u, w) + (w, u)$ es un ciclo asimétrico de C .

Si $u \in N$, entonces $(u, x) + P(x, w) + (w, u)$ es un ciclo asimétrico en la subdigráfica completa inducida por $C \cup \{u\}$.

Si $u \in B - N$, entonces por definición de N , u tiene un sucesor $v \in N$. Por hipótesis, la flecha (u, v) no es simétrica, y $(u, v) + (v, x) + P(x, w) + (w, u)$ es un ciclo asimétrico en la subdigráfica completa inducida por $C \cup \{u, v\}$.

Estos tres casos contradicen la condición de orientación normal.



Supongamos ahora que B posee flechas simétricas y que D tiene núcleo si el número de éstas es a lo más $k - 1$.

Sean B con k flechas simétricas, (a, b) y (b, a) un par de ellas. En la subdigráfica completa inducida por $C_0 = C \cup \{a, b\}$, consideremos x_j un vértice absorbente de $C_0 - \{x_1, x_2, \dots, x_{j-1}\}$ para $j = 1, \dots, |V(C_0)|$. Tenemos $a = x_i$, $b = x_j$ para $i, j \leq |V(C_0)|$, $i \neq j$. Si $i < j$, podemos borrar $(x_i, x_j) = (a, b)$ de D . De esta forma obtenemos una digráfica D' la cual es la suma de una gráfica bipartita $B' = B - (a, b)$ y una completa C . Mostraremos que D' sigue siendo una orientación normal.

Sea C' una subdigráfica completa de D' .

Si C' no contiene a cualquiera de los vértices $\{a, b\}$. Entonces C' no ha sido modificada al eliminar la flecha (a, b) ; y de aquí que posee un vértice absorbente.

En caso contrario, como B' no contiene triángulos, en C' no hay otro vértice de B' , y $C' \subset C_0 - (a, b)$. Entonces x_k , donde $k = \min\{i; x_i \in C'\}$ es un vértice absorbente de C' y por lo tanto D' es una orientación normal.

Como B' tiene menos flechas simétricas que B , por hipótesis de inducción la digráfica D' tiene un núcleo N .

Para concluir con esta parte, consideramos necesario reafirmar que añadiendo la flecha (a, b) la propiedad de que N sea un conjunto independiente y absorbente se sigue cumpliendo. De aquí que N es un núcleo de D .

3. Por último consideramos a G como la suma de p conjuntos independientes, sean éstos S_1, S_2, \dots, S_p , y $x_i \in S_i, i = 1, 2, \dots, p$.

Observemos que $C = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ es una subgráfica completa de G . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que x_1 es un vértice dominante de C y por hipótesis de inducción, la digráfica $D' = D - \{x_1\}$ tiene un núcleo N .

De lo anterior tenemos que $S_1 - \{x_1\}$ o S_i ($i \geq 2$) debe ser un núcleo.

Con esto concluimos la demostración. \square

El resultado es además cierto para la clase de gráficas que pueden ser contruídas por medio de operaciones iteradas de subgráficas completas de gráficas básicas: (1) gráficas completas multipartitas, (2) la suma de gráficas completas con una gráfica bipartita.

REFERENCIAS

- [1] M. Behzad, G. Chartrand, L. Lesniak-Foster., Graphs and Digraphs, Prindle, Weber and Schmidt, 1970.
- [2] C. Berge, A Combinatorial Problem in Logic, Discrete Mathematics, 17, 1977, 23-26.
- [3] C. Berge, Graphs, North Holland Amsterdam, 1985, second revised edition.
- [4] C. Berge, Graphs and Hypergraphs, North Holland Amsterdam, 1976.
- [5] C. Berge, Séminaire du lundi, P. Rosenstiehl, Paris, 1982.
- [6] C. Berge, The Theory of Graphs, Chapter 3, Methven-Wiley, 1962.
- [7] C. Berge, P. Duchet, A perfect graph conjecture, Discrete Math., Problem Section, to appear.
- [8] C. Berge, P. Duchet, Problème, Séminaire du Lundi, M. S. H. 54 Bd Raspail 75006 Paris, Janvier 1983.
- [9] M. Blidia, A Parity Digraph has a Kernel, Combinatorica 6(1)(1986), 23-27.
- [10] M. Blidia, Parity graphs with an orientation condition of Meyniel have a kernel, submitted.
- [11] M. Blidia, Tèse de 3ème cycle, Paris, 1984.
- [12] M. Blidia, P. Duchet, Maffray F., On orientation of perfect graphs, submitted.
- [13] M. Burlet, J. P. Uhry, On Parity Graphs, in Ann. Discrete Math. Vol. 21, p.p. 253-277, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [14] P. Duchet, A Sufficient Condition for a Digraph to be Kernel-Perfect, Journal of Graph Theory, Vol 11, No. 1, 81-85 (1987).
- [15] P. Duchet, Graphes Noyau-parfaits, Annals of Discrete Mathematics, 9, 1980, 93-101.
- [16] P. Duchet, On Parity graph, submitted.
- [17] P. Duchet, Parity Graphs are Kernel M -Solvable, Journal of Combinatorial Theory, Series B 43, 121-126 (1987).

- [18] P. Duchet, Representation; noyaux en theorie des graphes et hypergraphes, These, Paris, 1979.
- [19] P. Duchet, H. Meyniel, A note on kernel-critical graphs, *Discrete Mathematics*, 33, 1981, 103-105.
- [20] P. Duchet, H. Meyniel, Une generalization du Theoreme de Richardson sur l'existence de noyaux dans les graphes orientes, *Discrete Mathematics*, 43, 1983, 21-27.
- [21] P. Erdős, Problems and results in Number Theory and Graph Theory, Proc. Ninth Manitoba Conference on Numerical Math. and Computing (1979) 3-21.
- [22] H. Galeana Sánchez, A counterexample to a conjecture of Meyniel on kernel perfect-graphs, *Discrete Mathematics*, 41, 1982, 105-107.
- [23] H. Galeana Sánchez, A theorem about a conjecture of H. Meyniel on kernel-perfect graphs, *Discrete Mathematics*, 59, 1986, 35-41.
- [24] H. Galeana Sánchez, Núcleos y Seminúcleos en digráficas, Tesis Profesional, Universidad Nacional Autónoma de México, 1980.
- [25] H. Galeana Sánchez, V. Neumann-Lara, Extending kernel-perfect digraphs to kernel-perfect critical digraphs, preprint, 1985.
- [26] H. Galeana Sánchez, V. Neumann-Lara, On kernel-perfect critical digraphs, *Discrete Mathematics*, 59, 1986, 257-265.
- [27] H. Galeana Sánchez, V. Neumann-Lara, On kernel-perfect critical digraphs whose asymmetrical part has a prescribed block cutpoint tree, preprint, 1985.
- [28] H. Galeana Sánchez, V. Neumann-Lara, On kernels and semikernels of digraphs, *Discrete Mathematics*, 48, 1984, 67-76.
- [29] T. Gallai, Graphen mit triangulierbaren ungeraden Vielecken, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* 7 (1962) 3-36.
- [30] Harary, *Graph Theory*, Addison Wesley, 3a. edición, 1975.
- [31] H. Jacob, Etude théorique du Noyau d'un graphe, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1979.
- [32] H. Jacob, Thèse de 3ème cycle, Paris, 1979.
- [33] F. Maffray, On Kernels in i -triangulated graphs, *Discrete Mathematics* 61, 1986, 247-251.
- [34] H. Meyniel, Extension du nombre chromatique et du nombre de stabilité, preprint.

- [35] H. Meyniel, On the perfect graph conjecture, *Discrete Math.* 16 (1976) 339-342.
- [36] J. Von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.
- [37] V. Neumann-Lara, Seminúcleos de una digráfica, *Anales del Instituto de Matemáticas II*, UNAM, 1971.
- [38] V. Neumann-Lara, The dicromatic number of a digraph, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol. 33, Num 3, 1982, 265-270.
- [39] M. Richardson, Extension theorems for solutions of irreflexive relations, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, 39, 1953, 649.
- [40] M. Richardson, On weakly ordered systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52, 1946, 113.
- [41] M. Richardson, Solutions of irreflexive relations, *Ann. Math. (2)*, 58, 1953, 573.
- [42] Romanowicz, Zbigniew, A note on the theorem of Richardson, Polish, English and Russian Summaries, 1975.
- [43] A. Sachs, On the Berge conjecture concerning Perfect Graphs in "Combinatorial Structures and Their Applications" (Gordon and Breach, New York, 1970) 377- 384.