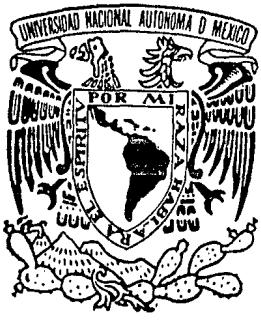
2ej. 97



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO Y APLICACIONES DE UNA APROXIMACION AL PUNTO FIJO DE BROUWER

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

JOSE RAUL RUBALCAVA MEDINA

México, D. F. **1 9 8 8**

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

Introducción

I.- El Teorema de Brouwer 1

1.- Lema de Sperner 4

2.- El Teorema de Brouwer se cumple para el n-simplex unitario 11

3.- Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ compacto, convexo y de interior no vacío es homeomorfo a la bola unitaria de la misma dimensión (D^n) 17

4.- Todo conjunto compacto, convexo y no vacío es homeomorfo a la bola unitaria de su misma dimensión 25

5.- El n-simplex unitario es un conjunto compacto, convexo y no vacío 26

6.- Dos conjuntos homeomorfos a un tercero, son homeomorfos entre sí 27

7.- Si el Teorema de Brouwer es válido para el n-simplex unitario, entonces también lo es para todo conjunto compacto, convexo y no vacío de la misma dimensión 28

II.- Aproximación a un Punto Fijo de Brouwer 30

1.- Conceptos preliminares 32

2.- El algoritmo de Scarf 47

3.- Aproximación al punto fijo 53

III.- Algunas Aplicaciones 61

1.- Juegos bimatriciales no-cooperativos 63

2.- Generalización a juegos finitos 68

3.- Programación no-lineal 75

IV.- El Teorema de Punto Fijo en el Equilibrio Económico 82

1.- Modelo Neoclásico (exceso de demanda) 84

2.- Un modelo de Intercambio Puro 89

3.- Un ejemplo de Intercambio Puro 95

Conclusiones

III.- Algunas Aplicaciones 61

1.- Juegos bimatriciales no-cooperativos 63

2.- Generalización a juegos finitos 68

3.- Programación no-lineal 75

IV.- El Teorema de Punto Fijo en el Equilibrio Económico 82

1.- Modelo Neoclásico (exceso de demanda) 84

2.- Un modelo de Intercambio Puro 89

3.- Un ejemplo de Intercambio Puro 95

Conclusiones

Introducción

En cursos como los de Investigación de Operaciones, Economía Matemática y Análisis Matemático que tomé durante mis estudios en la Universidad, se mencionó o utilizó el teorema de punto fijo de Brouwer: para resolver juegos bimatriciales, para encontrar un equilibrio de un modelo económico, etc. Es de ahi que surge la idea de elaborar este trabajo. Se presenta un desarrollo formal y comprensible de este teorema y del algoritmo de Scarf que es uno de los algoritmos propuestos para encontrar una aproximación a un punto fijo. Además, se desarrollan algunas de las aplicaciones que dicho teorema y algoritmo pueden tener en otros campos de la Matemática.

En el primer capítulo del presente trabajo se demuestra el Teorema de Brouwer para cualquier conjunto compacto, convexo y no vacío. Para ello, hubo necesidad de auxiliarse de varios resultados, enumerados como secciones del capítulo. Como se dijo, se trata de que esta demostración sea comprensible para estudiantes a nivel licenciatura, pero cuidando siempre el aspecto formal de la misma.

Una vez demostrada la existencia de un punto fijo, surgirían las siguientes preguntas: ¿cómo encuentro dicho punto fijo? , y ¿cuáles son las aplicaciones de este teorema? El segundo capítulo se ocupa de la pri

mera de estas interrogantes; los dos últimos tratan sobre la utilidad de este resultado y de sus aplicaciones.

Varios han sido los algoritmos propuestos para determinar el punto fijo de una función. En este trabajo hablaremos del algoritmo propuesto por Herbert Scarf, que encuentra una aproximación a uno de los puntos fijos de la función. Entre las ventajas de este algoritmo cabe señalar la factibilidad de su desarrollo mediante programas computacionales. Se demuestra además, en el capítulo II, que la citada aproximación al punto fijo puede hacerse tan exacta como se desee. Finalmente, se presentan dos ejemplos con el objeto de fijar ideas sobre el algoritmo de Scarf.

Como ya se mencionó, en los capítulos III y IV se tratan algunas de las aplicaciones del Teorema de Brouwer y del algoritmo de Scarf. Tres son los campos a los que nos referiremos: Teoría de Juegos, Programación no-lineal y Economía Matemática. Dentro de Teoría de Juegos, se estudiarán los juegos bimatriciales no cooperativos, y se hará una generalización a juegos finitos. En ambos casos, el resultado de Brouwer juega un papel crucial para probar la existencia de una solución o punto en equilibrio. Dentro de programación no-lineal, un problema particular bajo ciertas condiciones puede ser resuelto si nos auxiliamos del algoritmo de Scarf.

El último capítulo de este trabajo plantea dos modelos económicos y cita un ejemplo numérico del segundo. Tanto en el Modelo Neoclásico como en el de Intercambio Puro se demuestra la existencia de al menos un equi-

librio económico utilizando el Teorema de Punto Fijo. El ejemplo de Intercambio puro que se presenta fue resuelto a través del algoritmo de Scarf, y nos lleva a encontrar un vector de precios bastante próximo a un equilibrio económico.

En síntesis, podríamos dividir este trabajo en una parte teórica y una parte 'práctica', de aplicaciones. La primera presenta y demuestra el Teorema de Punto Fijo de Brouwer y el algoritmo de Scarf para encontrar una aproximación a dicho punto fijo. La segunda estudia algunas de las varias aplicaciones que dichos resultados tienen.

I.- EL TEOREMA DE BROUWER

El teorema de punto fijo de Brouwer, demostrado por primera vez para los simplex en 1910 , afirma lo siguiente:
cualquier función continua de un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$, compacto y convexo, en él mismo, deja al menos un punto fijo. Es decir, si $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, convexo y no vacío, y $f: K \to K$ es continua, entonces existe $p \in K$ tal que $f(p) = p$.

Para la demostración de este teorema, utilizaremos los siguientes resultados por demostrar:

1.- Lema de Sperner.

2.- El teorema de Brouwer se cumple para el n-simplex unitario.

3.- Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ compacto, convexo y de interior no vacío es homeomorfo a la bola unitaria de la misma dimensión (D^n) .

4.- Todo conjunto compacto, convexo y no vacío es homeomorfoa la bola unitaria de su misma dimensión.

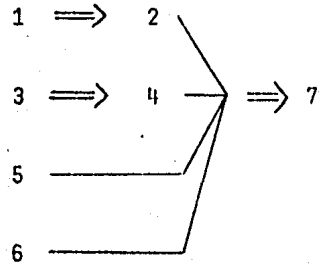
5.- El n-simplex unitario es un conjunto compacto, convexo y no vacío.

6.- Dos conjuntoshomeomorfos a un tercero sonhomeomorfos entre sí.

7.- Si el teorema de Brouwer es válido para el n-simplex unitario, entonces también lo es para todo conjunto compacto, convexo y no vacío de la misma dimensión.

Demostrar el teorema de Brouwer equivale a demostrar los resultados

2 y 7. Por lo tanto, se procederá a demostrar estos resultados auxiliándonos de los demás; bajo la siguiente secuencia:



4 y 5 implican que el n-simplex unitario es homeomorfo a la bola unitaria de su misma dimensión. Por 6 y 4, dicho simplex unitario será también homeomorfo a cualquier otro conjunto compacto, convexo y no vacío de su dimensión; hecho que será crucial para demostrar 7.

1.- Lema de Sperner

El lema de Sperner puede ser ilustrado en la figura 1. El de la izquierda, es un triángulo cualquiera con sus vértices etiquetados con 0,1,2. A la derecha aparece el mismo triángulo pero subdividido en pequeños triángulos. Los vértices del triángulo original mantienen sus anteriores etiquetas. Los

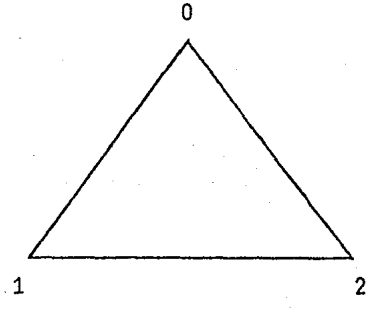
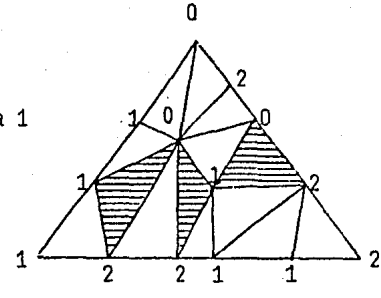


figura 1



vértices aumentados, si están sobre un lado del triángulo grande, deberán llevar la etiqueta de uno de los extremos de dicho lado; vértices en el interior del triángulo original pueden llevar cualquiera de las tres etiquetas (0,1,2).

El lema establece que, siguiendo sólo la regla anterior , al menos uno de los triángulos pequeños tiene etiquetación completa (diferentes eti

quetas en sus vértices). En la figura 1, los triángulos sombreados tienen etiquetación completa.

Este resultado no es aplicable sólo a triángulos, sino también a poliedros en otras dimensiones llamados n-simplex.

+ Definición

un n-simplex o simplex n-dimensional es la región convexa más pequeña en $\mathbb{R}^{n+1}$ que contiene a (n+1) vértices dados. Es decir, si $x^0, x^1, \ldots, x^n$ son los vértices,

$$\text{n-simplex} = \left\{ x \;/\; x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \;,\; \sum \lambda_i = 1 \;,\; \lambda_i \geq 0 \right\}$$

Ilustrando la anterior definición tenemos que

-1 - simplex. . . conjunto vacío

0 - simplex . . . un punto

1 - simplex . . . par de puntos y el segmento de recta que los une

2 - simplex . . . vértices, lados e interior de un triángulo

3 - simplex . . . vértices, aristas, caras e interior de un tetraedro

.

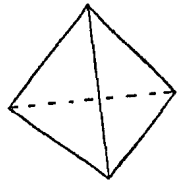
.

.

+ Definición

los simplex naturalmente asociados con un n-simplex S son los simplex de cualquier dimensión (desde -1 hasta n) que tienen vértices que también lo son de S. Por ejemplo, en un 3-simplex

los simplex naturalmente asociados con él son:



conjunto vacío (-1 - simplex)

los 4 vértices (0 - simplex)

las 6 aristas (1 - simplex)

las 4 caras (2 - simplex)

el tetraedro (3 - simplex)

+ Definición

un conjunto de puntos de un simplex S es un conjunto con etiquetación propia si

i) contiene a los (n+1) vértices de S $(x^0, x^1, \ldots, x^n)$

ii) las etiquetas de estos vértices son $0, 1, \ldots, n$ (sin importar el orden)

iii) $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \in S$, tiene por etiqueta alguna j , $\lambda_j > 0$.

+ Definición

una subdivisión simplicial de un n-simplex S es un conjunto finito de n-simplex $\{S_i\}$ tal que

i) $S_i \subset S$

ii) $\bigcup_i S_i = S$

iii) $S_j \cap S_k = \begin{cases} \text{conjunto vacío} \\ \text{un simplex naturalmente asociado a ambos} \end{cases}$

+ Lema de Sperner

si el conjunto de los vértices correspondientes a una subdivisión simplicial de un n-simplex S es un conjunto con etiquetación propia, entonces existe al menos un n-simplex

S; de la subdivisión que tiene etiquetación completa.

Demostración.- se hará por inducción sobre la dimensión del simplex; demostrándose un resultado más fuerte: el número de simplex de la subdivisión con etiquetación completa es impar.

(i) n = 1

Con el objeto de obtener una etiquetación propia, este segmento se subdivide con un número finito de puntos. Cada uno de los cuales se etiqueta con 0 ó 1 arbitrariamente.

Tomemos los "subsegmentos" con al menos un extremo etiquetado con 0; hay dos tipos: ambas etiquetas 0, ó una etiqueta 0 y la otra 1.

Consideremos por separado estos "subsegmentos"; sea a el número de ellos con dos etiquetas 0: contamos 2a extremos con etiqueta 0. Sea b el número de "subsegmentos" con una etiqueta 0 y otra 1: contamos b extremos con etiqueta 0. Así, el número de extremos de los "subsegmentos" con etiqueta 0 es $2a + b$.

Ahora tomemos el segmento de recta como un todo. Existe una sola etiqueta 0 en un extremo del segmento original, pues, si existiera otra etiqueta 0, estaría en el interior del segmento y, por lo tanto, a ella inciden 2 simplex de la subdivisión. Es decir, estos extremos son contados dos

veces como extremos con etiqueta 0. Así, el total de extremos contados con etiqueta 0 (2a + b) debe ser dos veces el número de etiquetas 0 en el interior del segmento más 1 (correspondiente al vértice original etiquetado con 0); por tanto, 2a + b es impar, entonces b es impar.

Pero b = número de simplex con etiquetación completa. ✓

(ii) n = 2 (aunque formalmente este paso no es necesario, se presenta por considerar que puede aclarar el procedimiento seguido en (iii))

Tomemos los simplex de la subdivisión que tengan etiquetas 0 y 1, exclusivamente, en sus vértices. Hay dos casos:

- con dos etiquetas 0 y una etiqueta 1,
- con dos etiquetas 1 y una etiqueta 0,

en cualquiera de los dos casos, el simplex tendrá dos lados con etiquetas 1 y 0.

Sea a_1 el número de simplex que cumplen el primer caso y a_2 el número de simplex del segundo caso. Entonces $a = a_1 + a_2$ es el número de simplex de la subdivisión que llevan etiquetas 0 y 1 pero no etiqueta 2. Sea b el número de simplex que llevan las tres etiquetas. De aquí, el número de lados con una etiqueta 0 y la otra etiqueta 1 es $2a + b$.

Considerando como un todo el 2-simplex original, tenemos que los lados con etiquetas 0 y 1 del interior son contados dos veces; y los lados que estén sobre la "frontera" del 2-simplex, estarán sobre el lado con etiquetas 0 y 1 por definición de etiquetación propia. Pero este lado es un 1-simplex, y, por (i), contiene un número impar de 1-simplex con etiquetas 0 y 1.

Por tanto, el número de lados con etiquetas 0 y 1 que hemos contado es este número impar más dos veces el número de lados "internos" con etiquetas 0 y 1; es decir, $2a + b$ es impar, entonces b es impar y es, precisamente, el número de 2-simplex con etiquetación completa. ✓

(iii) Supongamos que para un k-simplex toda subdivisión simplicial nos da un número impar de k-simplex con etiquetación completa.

Consideremos una subdivisión simplicial de un (k+1)-simplex con una etiquetación propia. Sea a el número de (k+1)-simplex de la subdivisión con vértices llevando todas las etiquetas de 0 a k, pero no (k+1); como estos simplex tienen (k+2) vértices, alguna de las etiquetas aparece dos veces y las demás una sóla vez.

De aquí que haya dos formas, en cada uno de estos (k+1)-simplex, de que un k-simplex naturalmente asociado a él tenga las etiquetas 0,1,..,k Por lo tanto, el número de k-caras con etiquetas de 0 a k es 2a. Sea b el número de (k+1)-simplex de la subdivisión con etiquetas 0, 1, . .,k+1, entonces cada uno de éstos contiene una sóla k-cara con etiquetas de 0 a k, y así, el número total de k-caras de los simplex de la subdivisión con etiquetas 0, 1, . . . ,k es $2a + b$.

De las k-caras anteriores, algunas están en el interior del (k+1)-simplex original y otras en su"frontera". Las interiores son incidentes a dos (k+1)-simplex y se cuentan dos veces. Las que están en la "frontera" inciden sólo en el k-simplex, naturalmente asociado al (k+1)-simplex original, que lleva etiquetas de 0 a k; pero por hipótesis de inducción este número será impar.

El total de k-caras contadas con etiquetas 0, 1, . . . ,k será el número impar anterior más el doble de las k-caras interiores, es decir, 2a + b es impar, entonces b = número de (k+1)-simplex con etiquetación completa es impar. ✓

2.- El teorema de Brouwer se cumple para el n-simplex unitario.

+ Definición

$$S^n = \text{n-simplex unitario} = \left\{ x = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \Big/ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 ,\ \lambda_i \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

+ Notación

$x^0 = (1,0,0,\ldots,0)$

$x^1 = (0,1,0,\ldots,0)$

$\vdots$

$x^n = (0,0,0,\ldots,1)$

$x^i \in S^n \quad i=0,1,\ldots,n$

$x^0, x^1, \ldots, x^n$ serán los vértices del simplex S^n.

+ Definición

el diámetro de un conjunto convexo es el máximo de las distancias entre dos puntos del conjunto.

+ Teorema

$$f: S^n \longrightarrow S^n \text{ continua} \implies \exists\ \bar{x} \in S^n \ /\ f(\bar{x}) = \bar{x}$$

Demostración.-

Sea $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in S^n$, denotamos $f(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n) \in S^n$

Definamos la siguiente etiquetación propia l:

$l(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = i$ donde i es el índice más pequeño tal que $\delta_i \leq \lambda_i \neq 0$; esta i existe, pues de lo contrario

$$1 = \sum \delta_i > \sum \lambda_i = 1 \quad \forall$$

Las etiquetas de los vértices serán $l(x^0) = 0,\ l(x^1) = 1, \ldots,\ l(x^n) = n$

Consideremos ahora una sucesión de subdivisiones simpliciales $\{\mathcal{A}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$

tal que $\sup_{s_i \in \mathcal{S}^n} \left\{ \text{diámetro de } s_i \right\} \longrightarrow_{n \to \infty} 0$

De cada subdivisión simplicial $\mathcal{S}^i$ escogemos un simplex con etiquetación completa s_i ; dicho simplex existe por el Lema de Sperner.

Tomemos ahora un punto cualquiera $x^i \in s^i$. $\left\{ x^i \right\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión infinita de puntos en un compacto S^n , entonces podemos extraer de ella una subsucesión $\left\{ x^{j_i} \right\}_{i \in \mathbb{N}}$ que converge a $\bar{x} = (\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n) \in S^n$

Sea $s_{j_i} = \left\{ x \,/\, x = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k x^{j_i k} , \ \sum \varepsilon_k = 1, \ \varepsilon_k \geq 0 \right\}$ el simplex que contiene a x^{j_i} , donde:

$$x^{j_i 0} = \left(\lambda_0^{j_i 0}, \lambda_1^{j_i 0}, \ldots, \lambda_n^{j_i 0} \right)$$
$$x^{j_i 1} = \left(\lambda_0^{j_i 1}, \lambda_1^{j_i 1}, \ldots, \lambda_n^{j_i 1} \right)$$
$$\vdots$$
$$x^{j_i n} = \left(\lambda_0^{j_i n}, \lambda_1^{j_i n}, \ldots, \lambda_n^{j_i n} \right)$$

Como el diámetro de s_{j_i} tiende a cero si $i \to \infty$, tenemos:

$$\left\{ x^{j_i 0} \right\}_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow \bar{x} \quad \ldots\ldots (1)$$
$$\left\{ x^{j_i 1} \right\}_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow \bar{x} \quad \ldots\ldots (2)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\left\{ x^{j_i n} \right\}_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow \bar{x} \quad \ldots\ldots (n+1)$$

estas sucesiones son las de los vértices de los simplex, con etiquetas 0, 1, . . . ,n respectivamente.

Sean $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$ las proyecciones sobre la 1ª , 2ª , . . . , (n+1)-ésima coordenada. Por ser f y estas proyecciones continuas, la composición $\pi_i - \pi_i \circ f$ es continua para $i=0,1,\ldots,n$

Por (1) $(\tilde{\pi}_0 - \tilde{\pi}_0 \circ f)(x^{\lambda,0}) \xrightarrow[i \to \infty]{} (\tilde{\pi}_0 - \tilde{\pi}_0 \circ f)(\bar{x})$

$$\lambda_0^{\lambda,0} - \delta_0^{\lambda,0} \longrightarrow \bar{\lambda}_0 - \bar{\delta}_0$$

donde $f(\bar{x}) = f(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n) = (\bar{\delta}_0, \ldots, \bar{\delta}_n)$; pero según la etiquetación definida,

$\delta_0^{\lambda,0} \leq \lambda_0^{\lambda,0} \implies \lambda_0^{\lambda,0} - \delta_0^{\lambda,0} \geq 0 \quad \forall i \implies \bar{\lambda}_0 - \bar{\delta}_0 \geq 0 \ldots (a_1)$

Por (2) $(\tilde{\pi}_1 - \tilde{\pi}_1 \circ f)(x^{\lambda,1}) \xrightarrow[i \to \infty]{} (\pi_1 - \pi_1 \circ f)(\bar{x})$

$$\lambda_1^{\lambda,1} - \delta_1^{\lambda,1} \longrightarrow \bar{\lambda}_1 - \bar{\delta}_1$$

pero según la etiquetación definida,

$\delta_1^{\lambda,1} \leq \lambda_1^{\lambda,1} \implies \lambda_1^{\lambda,1} - \delta_1^{\lambda,1} \geq 0 \quad \forall i \implies \bar{\lambda}_1 - \bar{\delta}_1 \geq 0 \ldots (a_2)$

$\vdots$

Por (n+1) $(\tilde{\pi}_n - \tilde{\pi}_n \circ f)(x^{\lambda,n}) \xrightarrow[i \to \infty]{} (\pi_n - \pi_n \circ f)(\bar{x})$

$$\lambda_n^{\lambda,n} - \delta_n^{\lambda,n} \longrightarrow \bar{\lambda}_n - \bar{\delta}_n$$

pero según la etiquetación definida,

$\delta_n^{\lambda,n} \leq \lambda_n^{\lambda,n} \implies \lambda_n^{\lambda,n} - \delta_n^{\lambda,n} \geq 0 \quad \forall i \implies \bar{\lambda}_n - \bar{\delta}_n \geq 0 \ldots (a_{n+1})$

Por $(a_1), (a_2), \ldots, (a_{n+1})$ $\bar{\lambda}_i \geq \bar{\delta}_i \quad \forall i$, pero $\sum \bar{\lambda}_i = \sum \bar{\delta}_i = 1$

$\implies \bar{\lambda}_i = \bar{\delta}_i \quad \forall i$, es decir, $f(\bar{x}) = \bar{x}$ ✓

Ejemplo

Siguiendo el procedimiento usado en la demostración del teorema de Brouwer, encontraremos un punto fijo de una función específica.

Sea f una función del 1-simplex unitario en él mismo, es decir,

$$f: S' \longrightarrow S' \qquad \text{con } S' = \left\{ (x_0,x_1) \;/\; x_0 + x_1 = 1 \;;\; x_0,x_1 \geq 0 \right\}$$

definida de la siguiente manera: $f(x_0,x_1) = (1-x_1^2 \;,\; x_1^2)$

Claramente, f es continua y su imagen está contenida en S'.

La etiquetación propia será:

$$l(x^0) = l(1,0) = 0$$

$$l(x') = l(0,1) = 1$$

$$l(x_0, x_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 - x_1^2 \leq x_0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Consideremos la siguiente sucesión de subdivisiones simpliciales $\left\{\mathcal{A}^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$\mathcal{A}^1 = \left\{ \text{1-simplex de vértices } (0,1) \text{ y } (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),\ \text{1-simplex de vértices } (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \text{ y } (1,0) \right\}$

$\mathcal{A}^2 = \left\{ \text{1-simplex de vértices } (0,1) \text{ y } (\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}),\ \text{de vértices } (\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}) \text{ y } (\tfrac{2}{4},\tfrac{2}{4}),\ (\tfrac{1}{4},\tfrac{2}{4}) \text{ y } (\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{4}),\ (\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{4}) \text{ y } (1,0) \right\}$

$\mathcal{A}^3 = \left\{ \text{1-simplex de } (0,1) \text{ a } (\tfrac{1}{8},\tfrac{3}{8}),\ \text{de } (\tfrac{1}{8},\tfrac{3}{8}) \text{ a } (\tfrac{2}{8},\tfrac{6}{8}),\ \text{de } (\tfrac{2}{8},\tfrac{6}{8}) \text{ a } (\tfrac{3}{8},\tfrac{5}{8}),\ \ldots \right.$
$\left. \ldots,\ \text{de } (\tfrac{7}{8},\tfrac{1}{8}) \text{ a } (1,0) \right\}$

$\vdots$

$\mathcal{A}^n = \left\{ \text{1-simplex de } (0,1) \text{ a } (\tfrac{1}{2^n}, \tfrac{2^n-1}{2^n}),\ \text{de } (\tfrac{1}{2^n}, \tfrac{2^n-1}{2^n}) \text{ a } (\tfrac{2}{2^n}, \tfrac{2^n-2}{2^n}),\ \ldots \right.$
$\left. \ldots,\ \text{de } (\tfrac{2^n-1}{2^n}, \tfrac{1}{2^n}) \text{ a } (1,0) \right\}$

Por ser de igual "tamaño" todos los 1-simplex pertenecientes a la subdivisión $\mathcal{A}^n$, el diámetro de cualquiera de ellos será

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2^n} - 0\right)^2 + \left(\frac{2^n - 1}{2^n} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2^{2n}} + \left(1 - \frac{1}{2^n} - 1\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{2^{2n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \left[\sup_{s_i \in \Delta^n} \{\text{diámetro de } s_i\}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{2^n} = 0$$

De acuerdo a los pasos seguidos en la demostración, debemos escoger un 1-simplex con etiquetación completa de cada subdivisión simplicial Δ^n. Veremos que este simplex siempre será el de vértices $\left(\frac{2^n - 1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right)$ y $(1,0)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Sea $k \in \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\} \Longrightarrow k < 2^n$

$$2k < 2^{n+1}$$

$$\frac{k}{2^{n+1}} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{k}{2^{n+1}} > 0$$

Por otro lado, $\frac{k}{2^{n-1}} > 0 \Longrightarrow \frac{k}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2^{n+1}}\right) > 0$

$$\frac{k}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{k}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}\right) > 0$$

$$\frac{k}{2^{n-1}} - \frac{k^2}{2^{2n}} > \frac{k}{2^n}$$

$$1 - \left[1 - \frac{2k}{2^n} + \frac{k^2}{2^{2n}}\right] > \frac{k}{2^n}$$

$$1 - \left(\frac{2^n - k}{2^n}\right)^2 > \frac{k}{2^n} \quad \ldots\ldots (*)$$

Por ser $k \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$, cualquier vértice de un simplex $s_i \in \Delta^n$ (excluyendo (0,1) y (1,0)) puede representarse como

$$(x_0 , x_1) = \left(\frac{k}{2^n} , \frac{2^n - k}{2^n} \right)$$

pero entonces, por (*), tenemos que $1 - x_1^2 > x_0$, lo cual es el criterio para que $l(x_0, x_1) = 1$. Por lo tanto, todos los vértices de los simplex pertenecientes a Δ^n tendrán etiqueta 1 , excepto (1,0) que estará etiquetado con 0.

El único $s_i \in \Delta^n$ con etiquetación completa será entonces el de vértices $\left(\frac{2^n - 1}{2^n} , \frac{1}{2^n} \right)$ y (1, 0) ; consideremos el punto $\left(\frac{2^n - 1}{2^n} , \frac{1}{2^n} \right)$ de ese simplex. Tenemos pues la sucesión de puntos $\left\{ \left(\frac{2^n - 1}{2^n} , \frac{1}{2^n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ En este caso, no será necesario extraer una subsucesión convergente, ya que la misma sucesión converge a (1, 0).

En la demostración se probó que este punto de convergencia era un punto fijo, lo cual es directo en este caso ya que

$$f(1, 0) = (1 - 0^2, 0^2) = (1, 0) \quad \checkmark$$

De la unicidad del punto fijo no podemos afirmar nada. En este caso, por ejemplo, (0, 1) también es un punto fijo.

3.- Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ compacto, convexo y de interior no vacío es homeomorfo a la bola unitaria de la misma dimensión (D^n)

+ Definición

un mapeo f de un conjunto A en un conjunto B es un homeomorfismo si (i) f es una biyección,

(ii) f y el mapeo inverso f^{-1} son continuos.

+ Definición

dos conjuntos A y B son homeomorfos si existe un homeomorfismo de A en B.

+ Proposición

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, convexo y de interior no vacío. Sea $\hat{x}_0 \in \text{Int } K$ y $\hat{u} \in \mathbb{R}^n, \|\hat{u}\| = 1$. Entonces existe un único $t^{\hat{u}} \in \mathbb{R}$, $t^{\hat{u}} > 0$ tal que $\hat{y}_0 = \hat{x}_0 + t^{\hat{u}}\hat{u} \in \text{Fr } K$

Demostración.-

Por ser K acotado, existe $M > 0$, $K \subset B_M(\hat{x}_0)$

Sea $A = \left\{ t \in \mathbb{R} / t > 0 , (\hat{x}_0 + t\hat{u}) \in K \right\}$. $A \neq \emptyset$ pues $\hat{x}_0 \in \text{Int } K$

$t \in A \Longrightarrow t < M + 1$, es decir, A está acotado superiormente, por lo que existe su supremo $t^{\hat{u}} > 0$.

Ahora demostraremos que $\hat{y}_0 = \hat{x}_0 + t^{\hat{u}}\hat{u} \in \text{Fr } K$, es decir, dado r tal que $0 < r < 2t^{\hat{u}}$, (i) $B_r(\hat{y}_0) \cap K \neq \emptyset$,

(ii) $B_r(\hat{y}_0) \cap K^c \neq \emptyset$

(i) Como $t^{\hat{u}} = \sup A$, $\left(t^{\hat{u}} - \frac{r}{2} \right) \in A$ no es supremo de A, por lo que

$\exists\, t_1 \in A \;/\; t^{\hat{u}} - \frac{r}{2} < t_1 \leq t^{\hat{u}}$ . . . . . (1)

$t_1 \in A \Longrightarrow \hat{y}_1 = \hat{x}_0 + t_1\hat{u} \in K$ . . . . . (a)

$\|\hat{y}_0 - \hat{y}_1\| = \|(t^{\hat{u}} - t_1)\,\hat{u}\| = |t^{\hat{u}} - t_1|\,\|\hat{u}\| = (t^{\hat{u}} - t_1)(1)$

$= t^{\hat{u}} - t_1 \leq \frac{r}{2} < r$

por (1)

$\Longrightarrow \hat{y}_1 \in B_r(\hat{y}_0)$ . . . . . (b)

(a) y (b) $\Longrightarrow B_r(\hat{y}_0) \cap K \neq \emptyset$ ✓

(ii) Sea $t_2 = t^{\hat{u}} + \frac{r}{2}$, $t_2 > t^{\hat{u}} = \sup A \Longrightarrow \hat{y}_2 = \hat{x}_0 + t_2\hat{u} \notin K$

$\Longrightarrow \hat{y}_2 \in K^c$ . . . . . (c)

$\|\hat{y}_2 - \hat{y}_0\| = \|(t_2 - t^{\hat{u}})\,\hat{u}\| = t_2 - t^{\hat{u}} = \frac{r}{2} < r \Longrightarrow \hat{y}_2 \in B_r(\hat{y}_0)$ . . . (d)

(c) y (d) $\Longrightarrow B_r(\hat{y}_0) \cap K^c \neq \emptyset$ ✓

Queda pues probado que $\hat{y}_0 \in \text{Fr } K$, es decir, existe $t^{\hat{u}} \in \mathbb{R}$ tal que $\hat{x}_0 + t^{\hat{u}}\hat{u} \in \text{Fr } K$. Falta demostrar que este $t^{\hat{u}}$ es único.

(I) $t > t^{\hat{u}} = \sup A \Longrightarrow \hat{x}_0 + t\hat{u} \notin K \Longrightarrow$, por ser K cerrado,

$\hat{x}_0 + t\hat{u} \notin \text{Fr } K$ ✓

(II) $t < t^{\hat{u}}$, P.D. $\hat{y} = \hat{x}_0 + t\hat{u} \in \text{Int } K$

Por ser $\hat{x}_0$ un punto interior de K, existe $r > 0$ tal que $B_r(\hat{x}_0) \subset K$.

Tomemos ahora una bola de centro en $\hat{y}$ y radio r' tal que

$$0 < r' < r\left(\frac{t^{\hat{u}} - t}{t^{\hat{u}}}\right)$$

sea z cualquier punto de esta bola, entonces $\|z - \hat{y}\| \leq r'$

Sea $\hat{h} = \frac{t^{\hat{u}}}{t^{\hat{u}} - t} (z - \hat{y}) + \hat{x}_o$

$\Rightarrow \|\hat{h} - \hat{x}_o\| = \frac{t^{\hat{u}}}{t^{\hat{u}} - t} \|z - \hat{y}\| \leq \frac{t^{\hat{u}}}{t^{\hat{u}} - t} r' < \frac{t^{\hat{u}}}{t^{\hat{u}} - t} \left(\frac{t^{\hat{u}} - t}{t^{\hat{u}}} r \right) = r$

$\Rightarrow \hat{h} \in B_r(\hat{x}_o) \Rightarrow \hat{h} \in K$ . . . . . (*)

Por otro lado: $\frac{t^{\hat{u}} - t}{t^{\hat{u}}} (\hat{h} - \hat{y}_o) = \frac{t^{\hat{u}} - t}{t^{\hat{u}}} \left[\frac{t^{\hat{u}}}{t^{\hat{u}} - t} (z - \hat{y}) + \hat{x}_o - \hat{y}_o \right]$

$= z - \hat{y} + \frac{t^{\hat{u}} - t}{t^{\hat{u}}} (\hat{x}_o - \hat{y}_o)$

$= z - \hat{y} + \hat{x}_o - \hat{y}_o - \frac{t}{t^{\hat{u}}} (\hat{x}_o - \hat{y}_o)$

$= z - \hat{y} + \hat{x}_o - \hat{y}_o + t \frac{\hat{y}_o - \hat{x}_o}{t^{\hat{u}}}$

pero $\hat{y}_o = \hat{x}_o + t^{\hat{u}} \hat{u} \Rightarrow \hat{u} = \frac{\hat{y}_o - \hat{x}_o}{t^{\hat{u}}}$

entonces $\frac{t^{\hat{u}} - t}{t^{\hat{u}}} (\hat{h} - \hat{y}_o) = z - \hat{y} - \hat{y}_o + \hat{x}_o + t\hat{u}$

$= z - \hat{y} - \hat{y}_o + \hat{y}$

$= z - \hat{y}_o$

$\Rightarrow z = \hat{y}_o + \frac{t^{\hat{u}} - t}{t^{\hat{u}}} (\hat{h} - \hat{y}_o)$

$= \frac{t^{\hat{u}} - t}{t^{\hat{u}}} \hat{h} + \left(1 - \frac{t^{\hat{u}} - t}{t^{\hat{u}}} \right) \hat{y}_o$ con $0 < \frac{t^{\hat{u}} - t}{t^{\hat{u}}} < 1$, es decir, z es combinación convexa de $\hat{h}$, $\hat{y}_o \in K$ (por (*)) $\Rightarrow z \in K$; de aquí que, al ser z cualquier punto de $B_{r'}(\hat{y})$, $\hat{y} \in \text{Int } K$ ✓

Demostrada la proposición anterior, definamos la función f tal que

$$f : D^n = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n / \ \|\bar{x}\| \leq 1 \right\} \longrightarrow K$$

de la siguiente manera:

+ $f(\hat{0}) = \hat{x}_o \in \text{Int } K$

+ $f(\hat{x}) = \hat{x}_o + t' t^{\hat{u}} \hat{u}$ para $\hat{0} \neq \hat{x} \in D^{\wedge}$; donde $t' \in \mathbb{R}$ $(0 < t' \leq 1)$ y $\hat{u} \in \mathbb{R}^{\wedge}$ $(\|\hat{u}\| = 1)$ son tales que $\hat{x} = t'\hat{u}$. $t^{\hat{u}}$ es el supremo manejado en la proposición anterior.

La función f será una biyección por (a) y (b) que se demuestran a continuación:

(a) Sean $\hat{x}_1 , \hat{x}_2 \in D^{\wedge}$, $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2 \Longrightarrow t'_1 \hat{u}_1 \neq t'_2 \hat{u}_2$

i) Si $\hat{u}_1 \neq \hat{u}_2$,
$$t'_1 t^{\hat{u}_1} \hat{u}_1 \neq t'_2 t^{\hat{u}_2} \hat{u}_2$$
$$\hat{x}_o + t'_1 t^{\hat{u}_1} \hat{u}_1 \neq \hat{x}_o + t'_2 t^{\hat{u}_2} \hat{u}_2$$
$$f(\hat{x}_1) \neq f(\hat{x}_2) \quad \checkmark$$

ii) Si $\hat{u}_1 = \hat{u}_2$, la $t^{\hat{u}}$ correspondiente será la misma, o sea que $t^{\hat{u}_1} = t^{\hat{u}_2}$. Pero $t'_1 \hat{u}_1 \neq t'_2 \hat{u}_2 \Longrightarrow t'_1 \neq t'_2$
$$t'_1 t^{\hat{u}_1} \hat{u}_1 \neq t'_2 t^{\hat{u}_2} \hat{u}_2$$
$$\hat{x}_o + t'_1 t^{\hat{u}_1} \hat{u}_1 \neq \hat{x}_o + t'_2 t^{\hat{u}_2} \hat{u}_2$$
$$f(\hat{x}_1) \neq f(\hat{x}_2) \quad \checkmark$$

Queda pues demostrado que f es inyectiva porque

$$\hat{x}_1 , \hat{x}_2 \in D^{\wedge} \ , \ \hat{x}_1 \neq \hat{x}_2 \Longrightarrow f(\hat{x}_1) \neq f(\hat{x}_2)$$

(b) Sea $\hat{y} \in K$. Por ser $\hat{x}_o \in \text{Int } K$, $\exists\, s \in \mathbb{R}$ $(s \geq 0)$, $\hat{u} \in \mathbb{R}^{\wedge}$ $(\|\hat{u}\| = 1)$ tales que $\hat{y} = \hat{x}_o + s\hat{u}$.

Por otro lado, $\hat{y}_o = \hat{x}_o + t^{\hat{u}} \hat{u} \in \text{Fr } K$, de donde, por ser K compacto, $\hat{y}$ se encuentra en el segmento de recta que une $\hat{x}_o$ y $\hat{y}_o$; es decir, $\hat{y}$ se puede representar como $\hat{y} = \hat{x}_o + t' t^{\hat{u}} \hat{u}$ con $0 \leq t' \leq 1$
$$= f(t'\hat{u}) \quad \text{con } t'\hat{u} \in D^{\wedge}$$

Queda pues demostrado que dado $\hat{y} \in K$, $\exists\, \hat{x} = t'\hat{u} \in D^{\wedge}$, $f(\hat{x}) = \hat{y}$. Es

decir, f es suprayectiva.

Dado que f es una biyección, su inversa $f^{-1} : K \longrightarrow D^{\wedge}$ existe y queda dada por

+ $f^{-1}(\hat{x}_o) = \hat{0}$ $\qquad \hat{x}_o \in \text{Int } K$

+ $f^{-1}(\hat{y}) = \dfrac{\hat{y} - \hat{x}_o}{t^{\hat{u}}}$ para $\hat{x}_o \neq \hat{y} \in K$; donde $t^{\hat{u}}$ es el supremo manejado en la proposición anterior y que corresponde a la $\hat{u}$ tal que $\hat{y} = \hat{x}_o + t' t^{\hat{u}} \hat{u}$ $\quad (t' \in \mathbb{R}, \ 0 < t' \leq 1)$.

Chequemos que f y f^{-1} son realmente funciones inversas:

- $f\left(f^{-1}(\hat{y})\right) = f\left(\dfrac{\hat{y} - \hat{x}_o}{t^{\hat{u}}}\right) = \hat{x}_o + t^{\hat{u}}\left(\dfrac{\hat{y} - \hat{x}_o}{t^{\hat{u}}}\right) = \hat{y}$ ✓

- $f^{-1}\left(f(\hat{x})\right) = f^{-1}\left(\hat{x}_o + t^{\hat{u}} \hat{x}\right) = \dfrac{\hat{x}_o + t^{\hat{u}} \hat{x} - \hat{x}_o}{t^{\hat{u}}} = \hat{x}$ ✓

Para demostrar la continuidad de f , consideraremos el caso de $\widehat{\mathbb{R}}^2$. Para otras dimensiones, el razonamiento sería análogo.

i) $\lim\limits_{\hat{x} \to \hat{0}} f(\hat{x}) = \lim\limits_{\hat{x} \to \hat{0}} (\hat{x}_o + t' t^{\hat{u}} \hat{u})$

$= \lim\limits_{\hat{x} \to \hat{0}} (\hat{x}_o + t^{\hat{u}} \hat{x})$

$= \hat{x}_o$ ✓ $\qquad \therefore$ f es continua en $\hat{0}$

ii) Sea $\hat{0} \neq \hat{x}_1 \in D^{\wedge}$. P.D. $\lim\limits_{\hat{x} \to \hat{x}_1} f(\hat{x}) = f(\hat{x}_1)$

$\lim\limits_{\hat{x} \to \hat{x}_1} f(\hat{x}) = \lim\limits_{\hat{x} \to \hat{x}_1} (\hat{x}_o + t^{\hat{u}} \hat{x})$

$= \hat{x}_o + \hat{x}_1 \lim\limits_{\hat{x} \to \hat{x}_1} t^{\hat{u}}$

Basta pues demostrar que $\lim\limits_{\hat{x} \to \hat{x}_1} t^{\hat{u}} = t_1^{\hat{u}_1}$

Sabemos que $\hat{x} = t' \hat{u}$, $\hat{x}_1 = t_1' \hat{u}_1$ con t' , $t_1' \in \mathbb{R}$, $0 < t'$, $t_1' \leq 1$

y $\| \hat{u} \| = \| \hat{u}_1 \| = 1$.

Ahora, por ser $\hat{x}_0 \in \text{Int } K$, $\exists\ B_\varepsilon(\hat{x}_0) \subset K$. Consideremos los puntos

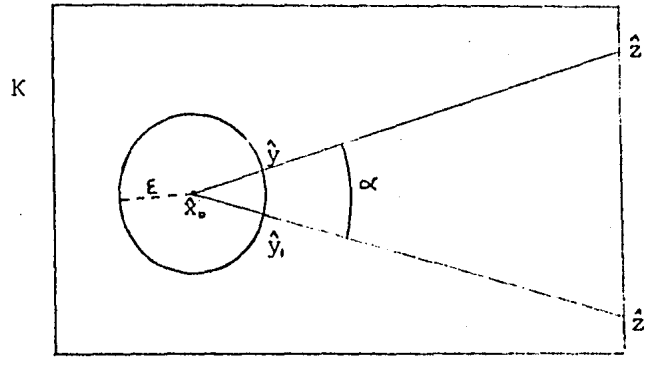
$$\hat{y} = \hat{x}_0 + \varepsilon t' \hat{u} = \hat{x}_0 + \varepsilon \hat{x}$$

$$\hat{y}_1 = \hat{x}_0 + \varepsilon t_1' \hat{u}_1 = \hat{x}_0 + \varepsilon \hat{x}_1$$

elementos de esta bola. Por ser $\hat{x}_0$ y ε constantes,

$$\hat{x} \longrightarrow \hat{x}_1 \iff \hat{y} \longrightarrow \hat{y}_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

Tratemos de "visualizar" el problema:



Por la proposición demostrada, los segmentos de recta que parten de $\hat{x}_0$ y que pasan por $\hat{y}$ y $\hat{y}_1$ respectivamente, "tocarán" a la frontera de K en un sólo punto. Sean $\hat{z}$ y $\hat{z}_1$ estos puntos de la frontera.

Sabemos, también por la proposición, que

$$\hat{z} = \hat{x}_0 + t^{\hat{A}}\, \hat{u}$$

$$\hat{z}_1 = \hat{x}_0 + t_1^{\hat{A}}\, \hat{u}_1$$

Si hacemos tender $\hat{y}$ a $\hat{y}_1$, en el límite $\alpha = 0°$; es decir, el triángulo de vértices $\hat{x}_0$, $\hat{z}$ y $\hat{z}_1$ será un segmento de recta. Por otro lado, si en ese límite $\hat{z} \neq \hat{z}_1$, tendríamos que el segmento de recta que

parte de $\hat{x}_0$ y pasa por $\hat{z} \in \text{Fr } K$, también pasa por $\hat{z}_1 \in \text{Fr } K$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$\lim_{\hat{y} \to \hat{y}_1} \hat{z} = \hat{z}_1 \equiv \lim_{\hat{y} \to \hat{y}_1} (\hat{x}_0 + t^{\hat{u}}\hat{u}) = \hat{x}_0 + t_1^{\hat{u}_1}\hat{u}_1$$

$$\Rightarrow \lim_{\hat{y} \to \hat{y}_1} t^{\hat{u}}\hat{u} = t_1^{\hat{u}_1}\hat{u}_1$$

en este último límite $t^{\hat{u}}$ y $t_1^{\hat{u}_1}$ determinan el tamaño de los vectores, mientras que $\hat{u}$ y $\hat{u}_1$ determinan su dirección. De donde, para que se de la igualdad:

$$\lim_{\hat{y} \to \hat{y}_1} t^{\hat{u}} = t_1^{\hat{u}} \quad \ldots\ldots \quad (**)$$

$$\lim_{\hat{y} \to \hat{y}_1} \hat{u} = \hat{u}_1$$

Por (*) y (**) concluimos que $\lim_{\hat{y} \to \hat{y}_1} t^{\hat{u}} = \lim_{\hat{x} \to \hat{x}_1} t^{\hat{u}} = t_1^{\hat{u}}$. Que es precisamente lo que necesitábamos para terminar de demostrar que f es continua. ✓

Demostraremos ahora que f^{-1} es también continua:

i) $$\lim_{\hat{y} \to \hat{x}_0} f(\hat{y}) = \lim_{\hat{y} \to \hat{x}_0} \frac{\hat{y} - \hat{x}_0}{t^{\hat{u}}}$$

$$= \hat{0} \qquad \therefore f^{-1} \text{ es continua en } \hat{x}_0 \quad ✓$$

ii) Sea $\hat{x}_0 \neq \hat{y}_1 \in K$. P.D. $\lim_{\hat{y} \to \hat{y}_1} f^{-1}(\hat{y}) = f^{-1}(\hat{y}_1)$

$$\lim_{\hat{y} \to \hat{y}_1} f^{-1}(\hat{y}) = \lim_{\hat{y} \to \hat{y}_1} \frac{\hat{y} - \hat{x}_0}{t^{\hat{u}}}$$

$$= \frac{\hat{y}_1 - \hat{x}_0}{t_1^{\hat{u}}} \qquad \text{por (**)}$$

$$= f^{-1}(\hat{y}_1) \quad ✓$$

El mapeo f, por ser una biyección y por ser f y f^{-1} continuas, es

un homeomorfismo de D^n en K. Y al ser $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto, convexo y de interior no vacío cualquiera, queda demostrada la afirmación de la presente sección:

todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ compacto, convexo y de interior no vacío (K) es homeomorfo a la bola unitaria de la misma dimensión (D^n) .

4.- Todo conjunto compacto, convexo y no vacío es homeomorfo a la bola unitaria de su misma dimensión.

Demostración.-

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, convexo y no vacío. Sea $m \leq n$ la dimensión de K.

(i) Si $m = n$, $\text{Int } K \neq \emptyset$ y, por el resultado 3, K es homeomorfo a D^n.

(ii) Si $m < n$, mediante una transformación continua y biyectiva T se puede mapear el conjunto K en otro $K' \subset \mathbb{R}^m$ tal que K' es compacto, convexo y de interior no vacío.

Por 3, K' es homeomorfo a D^m, es decir, $\exists\ f: K' \longrightarrow D^m$ tal que f es una biyección y f y f^{-1} son continuas.

Tenemos pues que

$$K \xrightarrow{T} K' \xrightarrow{f} D^m \quad , \quad f \circ T : K \longrightarrow D^m$$

$$D^m \xrightarrow{f^{-1}} K' \xrightarrow{T^{-1}} K \quad , \quad T^{-1} \circ f^{-1} : D^m \longrightarrow K$$

por ser f y T biyecciones, estas composiciones también lo son, y, por ser continuas, las composiciones son continuas.

Pero $(f \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ f^{-1}$ pues

$$x \in D^m \Longrightarrow (f \circ T) \circ (T^{-1} \circ f^{-1})(x) = f(T(T^{-1}(f^{-1}(x)))) = f(f^{-1}(x)) = x \ \checkmark$$

$$y \in K \Longrightarrow (T^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ T)(y) = T^{-1}(f^{-1}(f(T(y)))) = T^{-1}(T(y)) = y \ \checkmark$$

$\therefore$ $f \circ T : K \longrightarrow D^m$ es un homeomorfismo o, equivalentemente, K es homeomorfo a D^m. //

5.- El n-simplex unitario es un conjunto compacto, convexo y no vacío.

Demostración.-

Habiendo definido el n-simplex unitario como

$S^n = \left\{ x = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \;/\; \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \;,\; \lambda_i \geq 0 \right\}$ tenemos que:

i) S^n es cerrado pues su frontera pertenece al conjunto por pedirse las λ_i mayores o iguales a cero.

ii) S^n es acotado porque $0 \leq \lambda_i \leq 1 \;\; \forall i \implies S^n \subset B_1(\hat{0})$

iii) Sean $x_1 = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$, $x_2 = (\delta_0, \ldots, \delta_n) \in S^n$; $0 \leq t \leq 1$

$\overset{\circ}{x} = tx_1 + (1 - t)\, x_2$, es decir, $\overset{\circ}{x}$ es combinación convexa de x_1 y x_2

$= t\,(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) + (1 - t)\,(\delta_0, \ldots, \delta_n)$

$= (t\lambda_0 + (1 - t)\delta_0 , \ldots\ldots , t\lambda_n + (1 - t)\delta_n) \implies$ por ser $t,\ \lambda_i ,\ (1 - t),\ \delta_i \geq 0$, cada componente de $\overset{\circ}{x}$ es ≥ 0

$= (t(\lambda_0 - \delta_0) + \delta_0 , \ldots\ldots , t(\lambda_n - \delta_n) + \delta_n)$

la suma de las componentes de $\overset{\circ}{x}$ será

$$\sum_{i=0}^{n} t(\lambda_i - \delta_i) + \delta_i = t \sum_{i=0}^{n} (\lambda_i - \delta_i) + \sum_{i=0}^{n} \delta_i$$
$$= t\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i - \sum_{i=0}^{n} \delta_i\right) + 1$$
$$= 1$$

$\therefore \;\; \overset{\circ}{x} \in S^n$ y S^n es un conjunto convexo.

iv) S^n es no vacío pues, al menos, $\left(\frac{1}{n+1} , \frac{1}{n+1} , \ldots\ldots , \frac{1}{n+1}\right)$ pertenece a S^n .

6.- Dos conjuntos homeomorfos a un tercero son homeomorfos entre sí.

Demostración.-

Sean A y B dos conjuntos tales que

(i) A es homeomorfo al conjunto C ,

(ii) B es homeomorfo al conjunto C .

Por (i), existe una biyección $f : A \longrightarrow C$ tal que f y f^{-1} son continuas; por (ii), existe una biyección $g : B \longrightarrow C$ tal que g y g^{-1} son continuas.

Ahora, consideremos la siguiente composición de funciones:

$$A \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g^{-1}} B \quad , \quad g^{-1} \circ f : A \longrightarrow B$$

$$B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f^{-1}} A \quad , \quad f^{-1} \circ g : B \longrightarrow A$$

por ser f y g biyecciones, estas composiciones también lo son, y por ser f y g continuas, las dos composiciones de funciones también son continuas.

Chequemos que $(g^{-1} \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g$

- $(g^{-1} \circ f) \circ (f^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(f(f^{-1}(g(x)))) = g^{-1}(g(x)) = x$ ✓

- $(f^{-1} \circ g) \circ (g^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(g(g^{-1}(f(x)))) = f^{-1}(f(x)) = x$ ✓

$\therefore$ $g^{-1} \circ f$ es un homeomorfismo de A en B , es decir, A y B son homeomorfos.

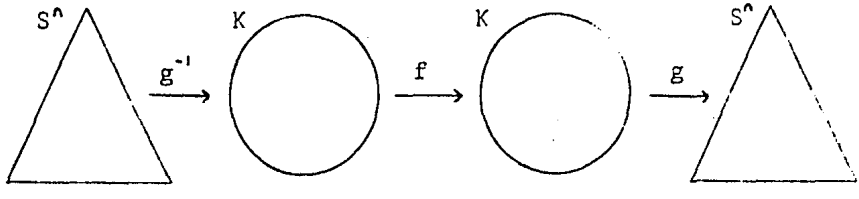
7.- Si el teorema de Brouwer es válido para el n-simplex unitario, entonces también lo es para todo conjunto compacto, convexo y no vacío de la misma dimensión.

Demostración.-

Sea $f : K \longrightarrow K$ una función continua de un compacto, convexo y no vacío en él mismo.

Sea n la dimensión de K, entonces, por 4, K es homeomorfo a la bola unitaria D^n. Por otro lado, el simplex n-dimensional unitario S^n es también homeomorfo a D^n, por 4 y 5; de aquí que, usando 6, tenemos que K y S^n son hiperomorfos.

Sea $g : K \longrightarrow S^n$ la biyección tal que g y g^{-1} son continuas,



por ser composición de continuas, $g \circ f \circ g^{-1} : S^n \longrightarrow S^n$ es continua y, por el teorema de Brouwer demostrado en 2,

$$\exists\ \bar{x} \in S^n \ ,\quad g\,(\,f\,(\,g^{-1}(\bar{x})\,)\,) = \bar{x}$$

Ahora, por ser g biyectiva, existe una única $\bar{y} \in K$, $g(\bar{y}) = \bar{x}$, entonces, aplicando g^{-1} , $\bar{y} = g^{-1}(\bar{x})$ . . . . . (a)

Teníamos que $g\,(\,f\,(\,g^{-1}(\bar{x})\,)\,) = \bar{x}$ entonces, por la unicidad de $\bar{y}$, $\bar{y} = f\,(\,g^{-1}(\bar{x})\,)$ . . . . . (b)

Finalmente, de (a) y (b), $f\,(\,g^{-1}(\vec{x})\,) = g^{-1}(\vec{x})$, es decir, $g^{-1}(\vec{x}) \in K$ es un punto fijo bajo la función f . //

Bibliografía

Cárdenas, Lluis, Raggi, Tomás
ALGEBRA SUPERIOR
Editorial Trillas
México, 1978

Dieudonné J.
FOUNDATIONS OF MODERN ANALYSIS
Academic Press, 1969

Kuhn H.W.
ALGORITHMS FOR SPERNER'S LEMMA BY SISTEMATIC SEARCH
Tavistak Publications
London, 1970

Kuhn H.W.
SIMPLICIAL APPROXIMATION OF FIXED POINTS
Proc. N.A.S., 60, 1968

Scarf Herbert, Terje Hansen
THE COMPUTATION OF ECONOMIC EQUILIBRIA
Yale University Press
New Haven and London, 1973

Tompkins C.B.
SPERNER'S LEMMA AND SOME EXTENSIONS
Applied Combinatorial Math. (Ed. E.F. Beckenback)
John Wiley & sons, 1964

II.- APROXIMACION A UN PUNTO FIJO DE BROUWER

A partir de este capítulo, referiremos el Teorema de Punto Fijo a los simplex exclusivamente; en especial, al simplex unitario. La razón de ésto es que las aplicaciones prácticas del Teorema de Brouwer, que se verán más adelante, se refieren a este tipo de conjuntos. Además, el simplex unitario es homeomorfo a todo simplex, por lo que "sus" resultados se pueden generalizar a los demás simplex.

1.- Conceptos preliminares.

+ Definición

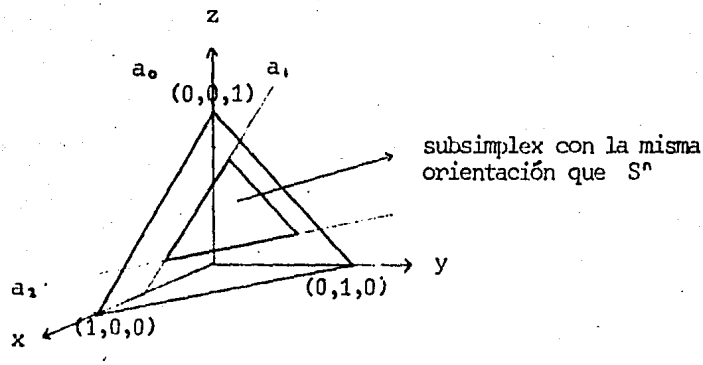
sea S^n el n-simplex unitario, es decir,

$$S^n = \left\{ x = (x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n) \;/\; x_i \geq 0 \;,\; \hat{\sum_0^n} x_i = 1 \right\} .$$

Un subsimplex de S^n que tiene la misma orientación que él es el que está definido por las siguientes desigualdades:

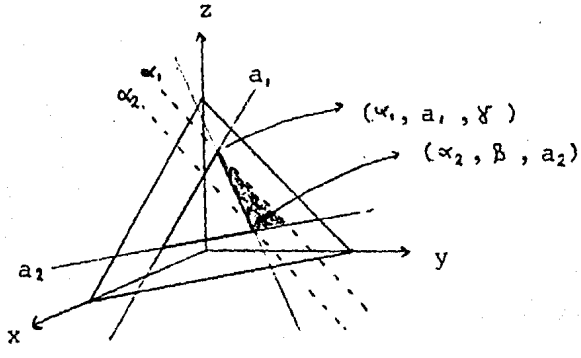
$$\begin{aligned} x_0 &\geq a_0 \\ x_1 &\geq a_1 \\ &\vdots \\ x_n &\geq a_n \end{aligned} \qquad \text{con } a_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \hat{\sum_0^n} a_i < 1$$

Geométricamente, considerando el 2-simplex unitario, tendríamos



En contraste, en la siguiente figura el subsimplex no tiene la misma

orientación que S^n pues el lado correspondiente a la primera coordenada no está "alineado" al del simplex.



Formalmente hablando, tenemos que $\alpha_2 > \alpha_1$. El subsimplex no puede quedar definido por

$$x_0 \geq \alpha$$
$$x_1 \geq a_1 \qquad \text{con} \quad \alpha > \alpha_1$$
$$x_2 \geq a_2$$

porque el punto (α_1, a_1, γ) no cumpliría las desigualdades. Por otro lado, tampoco es posible que $\alpha \leq \alpha_1$ pues los puntos de la zona sombreada, que no pertenecen al subsimplex, cumplirían todas las desigualdades.

Hipótesis de no degeneración

Consideremos ahora una lista finita de vectores $x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots, x^k$ que pertenecen al simplex y tales que

i) ningún vector en la lista tiene alguna componente cero, y

ii) no hay dos vectores que tengan la misma i-ésima componente.

Seleccionemos arbitrariamente $n + 1$ vectores de la lista anterior, ¿ será posible construír un subsimplex, con la misma orientación que S^n,

tal que cada uno de sus lados pase por uno y sólo uno de los $n+1$ vectores de la lista ?

+ Lema

dados $n+1$ vectores de la lista anterior, $x^{j_0}, x^{j_1}, \ldots, x^{j_n}$, habrá un subsimplex con la misma orientación que S^n tal que cada lado pase exactamente por uno de los $n+1$ vectores, si y sólo si, en la matriz X, el menor elemento de los diferentes renglones aparece en diferentes columnas.

Donde

$$X = \begin{pmatrix} x_0^{j_0} & x_0^{j_1} & \ldots & x_0^{j_n} \\ x_1^{j_0} & x_1^{j_1} & \ldots & x_1^{j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{j_0} & x_n^{j_1} & \ldots & x_n^{j_n} \end{pmatrix}$$

Demostración.-

$\Rightarrow$) Para cada coordenada i ($i = 0, 1, \ldots, n$), uno de los $n+1$ vectores debe estar en el lado $x_i = a_i$, digamos que es x^{j_α}, entonces $x_i^{j_\alpha} = a_i$.

Como no pueden tener dos vectores igual componente i-ésima y como los restantes n vectores x^{j_β} pertenecen al subsimplex, se cumple que $x_i^{j_\beta} > a_i$ (con $\beta \neq \alpha$). De aquí se sigue que

$$x_i^{j_\alpha} = \min \left\{ x_i^{j_0}, x_i^{j_1}, \ldots, x_i^{j_n} \right\}$$

es decir, es el mínimo de su renglón en la matriz X.

Ahora, como cada uno de los vectores está sobre uno de los lados

a_i , se sigue que cada vector (columnas de la matriz X) tendrá un mínimo único de su renglón, es decir, el mínimo de los diferentes renglones está en columnas distintas. ✓

$\Leftarrow$) La condición de que los mínimos por renglón aparezcan en diferentes columnas implica la construcción del subsimplex requerido, pues éste estaría dado por el conjunto de puntos (x_0 , x_1 , . . . , x_n) tales que $\sum_0^n x_i = 1$, y

$$x_0 \geq \min \left\{ x_0^{j_0} , x_0^{j_1} , \ldots , x_0^{j_n} \right\}$$

$$\vdots$$

$$x_n \geq \min \left\{ x_n^{j_0} , x_n^{j_1} , \ldots , x_n^{j_n} \right\}$$

Como todas las componentes de los vectores son no negativas, los mínimos lo serán también. Por otro lado,

$$\sum_{i=0}^{n} \min \left\{ x_i^{j_0} , x_i^{j_1} , \ldots , x_i^{j_n} \right\} < \sum_{i=0}^{n} x_i^{j_0} = 1$$

pues la columna j_0 sólo tiene uno de esos mínimos, digamos que es $x_\alpha^{j_0}$; por lo que $x_\beta^{j_0} > \min \left\{ x_\beta^{j_0} , x_\beta^{j_1} , \ldots , x_\beta^{j_n} \right\}$ para $\beta \neq \alpha$.

Queda pues completamente definido el subsimplex con la misma orientación que S^n . El hecho de que cada lado pase exactamente por uno de los n+1 vectores se sigue de que dada $i = 0, 1, \ldots, n$ existe una única $k \in \overline{0,n}$ tal que

$$x_i^{j_k} = \min \left\{ x_i^{j_0} , \ldots , x_i^{j_n} \right\} \quad ✓$$

+ Definición

los $n+1$ vectores $x^{j_0}, \ldots, x^{j_n}$ se definen como un conjunto primitivo de vectores si

i) un subsimplex que satisface las condiciones del lema anterior se puede obtener, y

ii) ningún vector en la lista $x^{n+1}, \ldots, x^{k}$ es interior a este subsimplex, es decir, ningún vector satisface estrictamente las $n+1$ desigualdades que definen al subsimplex.

+ Definición extendida

los $n-m+1$ vectores $x^{j_0}, \ldots, x^{j_{n-m}}$ junto con los m lados $l^{i_1}, \ldots, l^{i_m}$ forman un conjunto primitivo si ningún vector $x^{n+1}, \ldots, x^{k}$ es interior al simplex definido por

$$\left.\begin{array}{l} x_{i_1} \geq 0 \\ \vdots \\ x_{i_m} \geq 0 \end{array}\right\} \quad \text{(el lado } l^{i_p} \text{ es aquel en que la coordenada } i_p = 0 \text{)}$$

$$x_i \geq \min \left\{ x_i^{j_0}, \ldots, x_i^{j_{n-m}} \right\} \quad \text{para} \quad i \neq i_1, \ldots, i_m$$

Ahora, si a los $n+1$ lados los representamos como vectores,

$$l^0 = x^0 = (0, M_0, M_0, \ldots, M_0)$$

$$l^1 = x^1 = (M_1, 0, M_1, \ldots, M_1)$$

$$\vdots$$

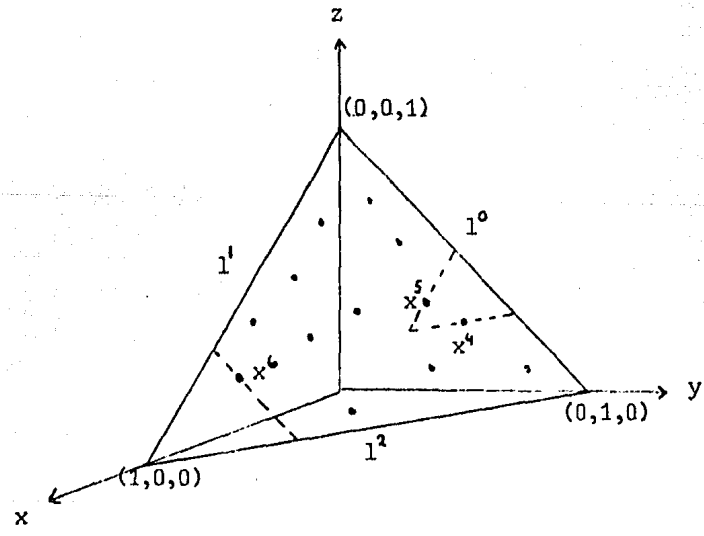
$$\vdots$$

$$l^n = x^n = (M_n, M_n, \ldots, 0)$$

donde $M_0, M_1, \ldots, M_n > 1$ y $M_i \neq M_j$ si $i \neq j$ (para mantener la suposición de que no hay dos vectores con igual componente i-ésima); decimos que los n+1 vectores $x^{j_0}, \ldots, x^{j_n}$ forman un conjunto primitivo si y sólo si no hay vectores en la lista $x^{n+1}, \ldots, x^k$ interiores al subsimplex definido por

$$x_0 \geq \min \{ x_0^{j_0}, \ldots, x_0^{j_n} \}$$
$$\vdots$$
$$x_n \geq \min \{ x_n^{j_0}, \ldots, x_n^{j_n} \}$$

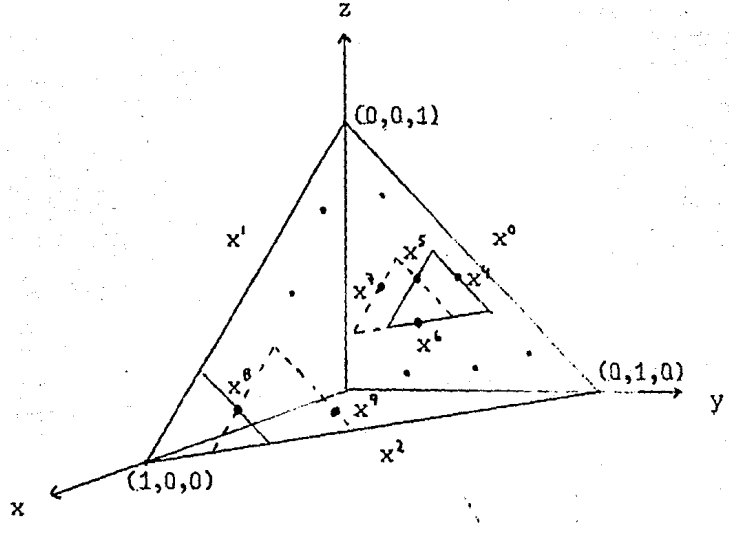
Geométricamente (en $\mathbb{R}^3$) :



los vectores x^4 y x^5 y el lado l^0 forman un conjunto primitivo, así como el vector x^6 y los lados l^2 y l^1 .

En el algoritmo que se describirá para lograr una aproximación a un punto fijo de un mapeo continuo será de gran importancia el "desplazamiento" de un conjunto primitivo a otro; es decir, si $x^{j_0}, x^{j_1}, \ldots, x^{j_n}$ forman un conjunto primitivo, ¿existirá alguna x^{j_α} que reemplace a una x^{j_i} específica tal que el nuevo conjunto $x^{j_0}, \ldots, x^{j_{i-1}}, x^{j_\alpha}, x^{j_{i+1}}, \ldots, x^{j_n}$ sea también primitivo?

Veamos en una gráfica qué sucede:



consideremos el conjunto primitivo formado por x^4, x^5 y x^6 y supongamos que se quiere reemplazar x^4. Tomamos el lado del pequeño simplex sobre el que está x^4 y lo movemos paralelamente hacia el interior del simplex, hasta encontrar otro elemento del conjunto primitivo (x^5 en este caso). En el conjunto primitivo original, x^4 está en el lado del

simplex de primera coordenada constante; en el nuevo conjunto primitivo, este papel lo toma x^5. Buscamos entonces en el cono definido por $x_0 \geq x_0^5$, $x_1 \geq x_1^6$ el vector en la lista $x^3, x^4, \ldots, x^K$ con la mayor segunda coordenada (x^7 en este caso), por lo que x^5, x^6 y x^7 forman el nuevo conjunto primitivo. Si no hay vector alguno en el cono descrito, el lado $1'$ (denotado por x') reemplaza a x^4.

Otro conjunto primitivo está dado por los vectores x', x^2 y x^8; si se quiere eliminar x', sería reemplazado por x^9 de acuerdo al procedimiento descrito. Pero si quisiéramos reemplazar a x^8 del conjunto $\{x', x^2, x^8\}$, tendríamos que no es posible tal reemplazo.

Generalizando lo anterior, tenemos la siguiente

+ Regla de reemplazo

sea $\{x^{j_0}, \ldots, x^{j_n}\}$ un conjunto primitivo con el subsimplex asociado

$$\begin{aligned} x_0 &\geq a_0 = \min \{x_0^{j_0}, \ldots, x_0^{j_n}\} \\ &\vdots \\ x_n &\geq a_n = \min \{x_n^{j_0}, \ldots, x_n^{j_n}\}. \end{aligned}$$

Para reemplazar un vector dado, encontrar la cara del subsimplex que lo contiene, digamos que es aquella en que la coordenada i^* es constante. Ahora, encontrar x^{j_M} en el conjunto primitivo con la segunda menor coordenada i^*-ésima. Si x^{j_M} originalmente es

taba en la cara de coordenada i constante, el vector de reemplazo x debe satisfacer las desigualdades

$$x_j > a_j \qquad \text{para } j \neq i^*, i$$

$$x_{i^*} > x_{i^*}^{j_k}$$

y, además, tener la mayor coordenada i-ésima de entre todos aquellos miembros de $x^0, x^1, \ldots, x^k$ que satisfacen las desigualdades.

A continuación, se demuestra la factibilidad y unicidad de esta regla de reemplazo.

+ Teorema

sea $\{x^{j_0}, \ldots, x^{j_n}\}$ un conjunto primitivo. Si un vector es removido, siempre hay uno que lo reemplaza para formar un nuevo conjunto primitivo; excepto cuando los restantes n vectores sean lados del simplex S^n.

Demostración.-

$$X = \begin{bmatrix} x_0^{j_0} & x_0^{j_1} & \cdots & x_0^{j_n} \\ x_1^{j_0} & x_1^{j_1} & \cdots & x_1^{j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{j_0} & x_n^{j_1} & \cdots & x_n^{j_n} \end{bmatrix}$$

Supongamos que los vectores se acomodaron, en la matriz X, de manera tal que el menor elemento del renglón i aparece en la i-ésima columna.

Es decir, el vector x^{j_α} está en el lado del subsimplex cuya $(i+1)$-ésima coordenada es constante.

Supongamos que el vector x^{j_β} será eliminado del conjunto primitivo. El vector está en el lado cuya $(\beta + 1)$-ésima coordenada es constante. Busquemos el vector en el conjunto primitivo que tenga la segunda menor $(\beta + 1)$-ésima coordenada, digamos que es x^{j_α} ($x^{j_\alpha}_\beta < 1$) . Un vector con tales características siempre existirá a menos que los n vectores del conjunto primitivo restantes sean lados del simplex, pues en este caso tal segunda menor $(\beta + 1)$-ésima coordenada sería mayor que 1 .

En el nuevo subsimplex, x^{j_α} estará en la cara de $(\beta + 1)$-ésima coordenada constante; debemos entonces encontrar un reemplazo que esté en la cara del nuevo subsimplex cuya $(\alpha + 1)$-ésima coordenada será constante. Este vector será el que satisfaga

$$x_m > x^{j_m}_m \qquad \text{para } m \neq \alpha \text{ , } \beta$$

$$x_\beta > x^{j_\alpha}_\beta$$

y tenga la mayor $(\alpha + 1)$-ésima coordenada. Siempre existirá, pues en el "peor" de los casos sería el lado del simplex

$$1^\alpha = x^\alpha = (M_\alpha , M_\alpha , \ldots , \underset{\text{lugar } (\alpha+1)}{0} , \ldots , M_\alpha) \quad \text{por ser } M_\alpha > 1 .$$

+ Teorema (unicidad del reemplazo)

el único reemplazo de un vector dado, para que resulte un nuevo conjunto primitivo, es el descrito por la regla de reemplazo.

Demostración.-

$$X = \begin{pmatrix} x_0^{j_0} & x_0^{j_1} & \cdots & x_0^{j_n} \\ x_1^{j_0} & x_1^{j_1} & \cdots & x_1^{j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{j_0} & x_n^{j_1} & \cdots & x_n^{j_n} \end{pmatrix}$$

Sea la matriz X como en la demostración del teorema anterior. Entonces el subsimplex determinado por el conjunto primitivo estará definido por

$$\begin{aligned} x_0 &\geq a_0 = x_0^{j_0} \\ x_1 &\geq a_1 = x_1^{j_1} \\ &\vdots \\ x_n &\geq a_n = x_n^{j_n} \end{aligned}$$

Supongamos que se quiere remover el vector x^{j_0} (para otro vector, el razonamiento sería totalmente análogo), y que el reemplazo es posible. Sea x^{j_β} el vector que tiene el segundo menor elemento del primer renglón.

Si el vector x^{j_*} es el que reemplaza a x^{j_0}, el nuevo conjunto primitivo estaría descrito por la matriz

$$X^* = \begin{pmatrix} x_0^{j_*} & x_0^{j_1} & \cdots & x_0^{j_n} \\ x_1^{j_0} & x_1^{j_1} & \cdots & x_1^{j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{j_*} & x_n^{j_1} & \cdots & x_n^{j_n} \end{pmatrix}$$

y, por el lema de la página 34, cada columna de X^* debe contener uno y sólo un mínimo de renglón.

Si $x_1^{j_*} < x_1^{j_1}$, la columna 2 no tendría mínimo de renglón pues

$$
\begin{aligned}
x_0^{j_\beta} &< x_0^{j_1} \\
x_1^{j_\alpha} &< x_1^{j_1} \\
x_2^{j_2} &< x_2^{j_2} \\
&\vdots \\
x_n^{j_n} &< x_n^{j_1}
\end{aligned}
$$

entonces $x_1^{j_\alpha} > x_1^{j_1}$. Análogamente $x_1^{j_\alpha} > x_2^{j_2}$, . . . , $x_{\beta-1}^{j_\alpha} > x_{\beta-1}^{j_{\beta-1}}$, $x_{\beta+1}^{j_\alpha} > x_{\beta+1}^{j_{\beta+1}}$, . . . , $x_n^{j_\alpha} > x_n^{j_n}$.

Esto indica que n-1 de las desigualdades propuestas para que x^{j_α} sea reemplazo se satisfacen. Dos posibilidades restan para la localización de los mínimos en los renglones 1 y $\beta+1$:

a) $x_0^{j_\alpha}$ es el mínimo del primer renglón y $x_\beta^{j_\beta}$ del renglón $\beta+1$, ó

b) $x_0^{j_\beta}$ es el mínimo del primer renglón y $x_\beta^{j_\alpha}$ del renglón $\beta+1$.

Si se cumpliera a) , el nuevo subsimplex quedaría dado por

$$
\begin{aligned}
x_0 &\geq x_0^{j_\alpha} \\
x_1 &\geq a_1 = x_1^{j_1} \\
&\vdots \\
x_n &\geq a_n = x_n^{j_n} ,
\end{aligned}
$$

y como se tiene un conjunto primitivo, x^{j_α} no puede ser interior a este subsimplex; pero $x_1^{j_0} > a_1$, . . . , $x_n^{j_n} > a_n$, entonces $x_0^{j_0} \leq x_0^{j_\alpha}$. Por otro lado, como x^{j_α} no es interior al subsimplex original y como $x_1^{j_\alpha} > a_1$, . . . , $x_n^{j_\alpha} > a_n$, tendríamos que $x_0^{j_\alpha} \leq x_0^{j_0}$. Es decir, $x_0^{j_0} = x_0^{j_\alpha}$, pero por no poder tener dos vectores igual alguna componente, se debe dar que $x^{j_0} = x^{j_\alpha}$, o sea que no hubo reemplazo.

Dado que a) no implica reemplazo, éste es único y se debe cumplir

b) , por lo que el vector x^{j*} satisface

$$x_i^{j*} > a_i \quad \text{para } i = 1,2,\ldots,\beta-1,\beta+1,\ldots,n$$
$$x_o^{j*} > x_o^{j_\beta}$$

que son las desigualdades que estipula la regla de reemplazo. De aquí que el nuevo subsimplex está dado por

$$x_o \geq x_o^{j_\beta}$$
$$x_1 \geq a_1$$
$$\vdots$$
$$x_{\beta-1} \geq a_{\beta-1}$$
$$x_\beta \geq x_\beta^{j*}$$
$$x_{\beta+1} \geq a_{\beta+1}$$
$$\vdots$$
$$x_n \geq a_n$$

Por último, x^{j*} debe tener la mayor $(\beta+1)$ coordenada de todos los vectores que satisfacen las n desigualdades estrictas, pues de lo contrario el que tuviera dicha mayor coordenada sería interior al nuevo subsimplex, lo cual no es posible. √√

Analicemos ahora un ejemplo numérico para tratar de fijar ideas. Estamos en $\mathbb{R}^4$, y las columnas de la matriz nos representan la colección de vectores en el simplex (las primeras cuatro columnas son los lados del simplex) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 19 & 18 & 17 & .7 & .6 & .2 & .1 & .21 & .5 & .3 \\ 20 & 0 & 18 & 17 & .1 & .2 & .4 & .3 & .39 & .01 & .15 \\ 20 & 19 & 0 & 17 & .1 & .09 & .2 & .41 & .31 & .19 & .15 \\ 20 & 19 & 18 & 0 & .1 & .11 & .2 & .19 & .09 & .3 & .4 \end{pmatrix}$$

$$x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4 \quad x^5 \quad x^6 \quad x^7 \quad x^8 \quad x^9 \quad x^{10}$$

Los vectores x^1 , x^2 , x^3 y x^4 forman un conjunto primitivo pues ningún vector de la lista es interior al subsimplex

$$x_0 \geq 0.7 = \min \left\{ x_0^1 , x_0^2 , x_0^3 , x_0^4 \right\}$$
$$x_1 \geq 0 = \min \left\{ x_1^1 , x_1^2 , x_1^3 , x_1^4 \right\}$$
$$x_2 \geq 0 = \min \left\{ x_2^1 , x_2^2 , x_2^3 , x_2^4 \right\}$$
$$x_3 \geq 0 = \min \left\{ x_3^1 , x_3^2 , x_3^3 , x_3^4 \right\}$$

Supongamos que queremos remover x^1 del conjunto primitivo. Vemos que el segundo renglón es en el que el mínimo pertenece a x^1 , por lo tanto, buscamos el segundo menor elemento de este renglón* que es 0.1 (de x^4) . En el subsimplex asociado al nuevo conjunto primitivo, el vector x^2 permanece en la cara de tercera coordenada constante, y x^3 en la de cuarta coordenada constante; x^4 , ahora, estará en la cara de segunda coordenada constante. Por último, se busca el reemplazo de x^1 que será el vector de la lista que cumpla $x_1 > .1$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, y que además tenga la mayor de las primeras coordenadas (en este caso es x^5) . El nuevo conjunto primitivo será entonces $\left\{ x^2 , x^3 , x^4 , x^5 \right\}$, que genera el subsimplex

$$x_0 \geq 0.6$$
$$x_1 \geq 0.1$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$

* en las columnas pertenecientes al conjunto primitivo

puesto que los mínimos por renglón serían (los subrayados) :

$$\begin{bmatrix} 18 & 17 & .7 & \underline{.6} \\ 18 & 17 & \underline{.1} & .2 \\ \underline{0} & 17 & .1 & .09 \\ 18 & \underline{0} & .1 & .11 \end{bmatrix}$$
$$x^2 \quad x^3 \quad x^4 \quad x^5$$

Quitemos ahora x^2 . Como tiene el mínimo del tercer renglón, buscamos el segundo menor elemento que es .09 (de x^5). Ahora, el vector de mayor primera coordenada que cumple $x_1 > .1$, $x_2 > .09$, $x_3 > 0$ es x^{10} ; por lo que el nuevo conjunto primitivo sería

$$\{ x^3 , x^4 , x^5 , x^{10} \}$$

$$\begin{bmatrix} 17 & .7 & .6 & \underline{.3} \\ 17 & \underline{.1} & .2 & .15 \\ 17 & .1 & \underline{.09} & .15 \\ \underline{0} & .1 & .11 & .4 \end{bmatrix}$$
$$x^3 \quad x^4 \quad x^5 \quad x^{10}$$

generándose el subsimplex

$$x_6 \geq 0.3$$
$$x_1 \geq 0.1$$
$$x_2 \geq .09$$
$$x_3 \geq 0$$

Se puede verificar que efectuando una operación de reemplazo cada vez, llegaríamos a los siguientes conjuntos primitivos (partiendo de $\{ x^1 , x^2 , x^3 , x^4 \}$) :

$$\{ x^1 , x^2 , x^3 , x^4 \}$$
$$\{ x^5 , x^2 , x^3 , x^4 \}$$
$$\{ x^5 , x^{10} , x^3 , x^4 \}$$
$$\{ x^5 , x^{10} , x^9 , x^4 \}$$
$$\{ x^5 , x^{10} , x^7 , x^2 \}$$
$$\{ x^5 , x^1 , x^9 , x^2 \}$$
$$\vdots$$

2.- El algoritmo de Scarf.

+ Teorema

si a cada vector de la lista $x^0, x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^k$ se le asigna un número o etiqueta $0, 1, 2, \ldots, n$; de tal forma que a x^i se le asigne i ($i = 0,1,\ldots,n$) . Entonces existe un conjunto primitivo tal que cada uno de sus vectores tiene etiqueta diferente.

Demostración.-

Se construirá una sucesión de conjuntos primitivos, cada uno obtenido del anterior reemplazando alguno de sus vectores. La sucesión empieza con el conjunto primitivo que consta de $x^1, x^2, \ldots, x^n$ y un vector x^j ($j \in \overline{n+1,k}$), el de mayor primera coordenada.

i) Si la etiqueta de x^j es 0 , $l(x^j) = 0$, ya tenemos el conjunto primitivo deseado. ✓

ii) Si $l(x^j) \neq 0$, reemplazaremos del conjunto primitivo el vector (lado) con etiqueta $l(x^j)$. Digamos que lo sustituye $x^{j'}$.

i) Si $l(x^{j'}) = 0$ ✓

ii) Si $l(x^{j'}) \neq 0$, en el siguiente reemplazo "movemos" el otro vector (no $x^{j'}$) de etiqueta $l(x^{j'})$.

En general, en cada iteración el algoritmo presentará un conjunto primi

tivo $\{x^{j_0}, x^{j_1}, \ldots, x^{j_n}\}$ cuyas etiquetas asociadas tienen las siguientes propiedades:

1.- ningún vector tiene etiqueta 0 ,

2.- todos los vectores tienen distinta etiqueta, excepto un par de ellos que tienen la misma, y

3.- uno de los dos vectores con iguales etiquetas es el que acaba de "entrar" al conjunto primitivo.

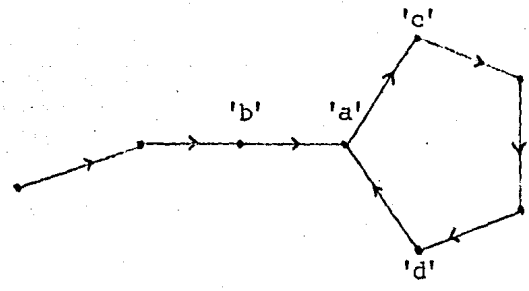
El algoritmo elimina del conjunto primitivo a aquel vector, de los dos de etiqueta igual, que no acaba de "entrar" al conjunto primitivo, y encuentra su reemplazo único. Si el nuevo vector tiene etiqueta 0 , el algoritmo termina; en caso contrario, se cumplen las propiedades 1, 2 y 3 y el algoritmo continúa.

Por ser k un número finito, hay un número finito de posibles conjuntos primitivos que pueden formarse de la lista $x^0, x^1, \ldots, x^K$, entonces el algoritmo terminará en un número finito de pasos (encontrando un conjunto con etiquetación completa) si demostramos que:

A.- El algoritmo no puede regresar a una posición (conjunto primitivo) por la que ya pasó, es decir, el algoritmo no admite ciclos; y

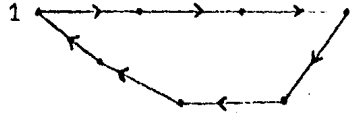
B.- Todo reemplazo que "ordene" el algoritmo puede efectuarse (no se "atora") .

A.- El algoritmo no admite ciclos (Lemke)



La gráfica representa las posiciones por las que pasa el algoritmo, y suponemos que éste "regresa" a la posición 'a' que ya visitó. Supongamos, además, que la etiqueta que aparece dos veces en la posición 'a' es l_a, en la posición 'b' es l_b, etc.

Al ir de 'd' a 'a', uno de los dos vectores con etiqueta l_d es reemplazado por uno con etiqueta l_a. Sin embargo, por la unicidad del reemplazo, al remover de la posición 'a' alguno de los dos vectores con etiqueta l_a, podríamos llegar sólo a dos conjuntos primitivos "adyacentes", y no a tres como aparece en la gráfica ('b', 'c' y 'd'). Por lo tanto, si el algoritmo presenta un ciclo, el primer conjunto primitivo "revisitado" debe ser el inicial, que consta de los vectores $x^1, x^2, \ldots, x^n$ y un x^j. Gráficamente:



Pero éste último es también imposible pues, de acuerdo a la regla de reemplazo, en la posición inicial sólo uno de los dos vectores con igual

etiqueta (el otro de x^j) puede reemplazarse, es decir, la posición inicial es "adyacente" a un sólo conjunto primitivo y no a dos. Por lo tanto, el algoritmo no admite ciclos. ✓✓

B.- Todo reemplazo que "ordene" el algoritmo puede efectuarse.

Demostramos que la operación de reemplazo no puede efectuarse sólamente si el conjunto primitivo consta de n lados del simplex y de otro vector, el cual quiere reemplazarse. Pero este conjunto primitivo no puede ser aquel en que el algoritmo comienza (por lo demostrado en A) , por lo tanto, debería contener al lado x^0 que tiene etiqueta 0 ; es decir, el algoritmo hubiera terminado pues ésto sucede en la primera posición en que uno de los vectores del conjunto primitivo tiene etiqueta 0 . De aquí que el algoritmo no se"detiene" a menos que encuentre un conjunto primitivo de etiquetación completa. ✓✓

Retomemos el ejemplo de la sección anterior (páginas 44 y 45) y asignemos las siguientes etiquetas a los vectores

x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
0	1	2	3	1	2	1	3	0	1	3

La sucesión de conjuntos primitivos que induce el algoritmo es

$\{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ cuyas etiquetas son 1, 2, 3, 1

$\{x^5, x^2, x^3, x^4\}$ " " " 2, 2, 3, 1

$\{x^5, x^{10}, x^3, x^4\}$	cuyas etiquetas son			2, 3, 3, 1
$\{x^5, x^{10}, x^7, x^4\}$	"	"	"	2, 3, 1, 1
$\{x^5, x^{10}, x^9, x^2\}$	"	"	"	2, 3, 1, 2
$\{x^1, x^{10}, x^9, x^2\}$	"	"	"	1, 3, 1, 2
$\{x^1, x^{10}, x^0, x^2\}$	"	"	"	1, 3, 0, 2 ✓

En este ejemplo, se cumple que también $\{x^5, x^6, x^8, x^{10}\}$ es un conjunto primitivo con etiquetación completa; es decir, no hay siempre unicidad. Aún más, se puede demostrar que

+ Teorema

existe un número impar de conjuntos primitivos con etiquetas distintas.

Demostración.-

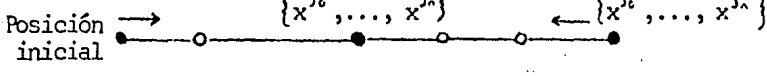
Un conjunto primitivo con etiquetas distintas es el que se obtiene con el algoritmo a partir de $\{x^1, x^2, \ldots, x^n, x^j\}$; digamos que es $\{x^{j_0}, x^{j_1}, \ldots, x^{j_n}\}$. Hay dos casos:

i) $\{x^{j_0}, \ldots, x^{j_n}\}$ es el único conjunto primitivo con marcaje completo; por lo tanto, es impar el número de dichos conjuntos. ✓

ii) Supongamos que existe otro conjunto con marcaje completo, sea éste $\{x^{j_0^*}, x^{j_1^*}, \ldots, x^{j_n^*}\}$. Iniciemos el algoritmo en este último conjunto primitivo, reemplazando el vector con etiqueta 0 ($x^{j_0^*}$); digamos

que su reemplazo único es $x^{\bar{j}}$. Si $l(x^{\bar{j}}) = 0$, ha sido encontrado otro conjunto primitivo con marcaje completo; en otro caso, el nuevo conjunto primitivo $\{x^{\bar{j}}, x^{j_1^*}, \ldots, x^{j_\lambda^*}\}$ tiene las propiedades 1, 2 y 3 de la página 48 y el algoritmo puede continuar.

Como se vió, el algoritmo no retornará a la misma posición y debe, por ello, terminar en un conjunto primitivo de etiquetación completa, o alcanzar una posición en que no se pueda efectuar el reemplazo. Pero és to último no puede ocurrir pues la posición indicada sería la que contiene los vectores-lados del simplex $x^1, x^2, \ldots, x^n$, y para llegar a ella tendríamos que pasar por $\{x^{j_0}, x^{j_1}, \ldots, x^{j_\lambda}\}$, es decir,



Lo cual significa que al "quitar" de $\{x^{j_0}, \ldots, x^{j_\lambda}\}$ el vector con etiqueta 0 podríamos llegar a dos distintos conjuntos primitivos "adyacentes", lo cual no es posible por la unicidad del reemplazo. Por lo tanto, el algoritmo debe terminar (partiendo de $\{x^{j_0^*}, \ldots, x^{j_\lambda^*}\}$) en un nuevo conjunto primitivo con etiquetación completa.

Concluyendo, habrá un conjunto primitivo con etiquetación completa obtenido a partir de $\{x^1, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1}\}$ y, si existen más, se presentarán por parejas. Es decir, hay un número impar de conjuntos primitivos con etiquetas distintas. //

3.- Aproximación al punto fijo.

En las aplicaciones del Teorema de Brouwer nos interesará, muchas veces, encontrar un vector que sea "casi" un punto fijo, es decir, que sea muy parecido a su imagen. Más adelante veremos que si los vectores $x^{n+1}, \ldots, x^k$ están lo "suficientemente cercanos" unos de otros, cualquier vector que pertenezca a alguno de los subsimplex con etiquetas distintas se "parece" a su imagen.

Definamos la norma de un vector $y = (y_0 , \ldots , y_n)$ como el máximo de los valores absolutos de sus componentes, es decir,

$$|y| = \max \left\{ |y_0| , |y_1| , \ldots , |y_n| \right\}$$

Sea $f : S^n \longrightarrow S^n$ una función continua del n-simplex unitario en él mismo. Sean $x, x' \in S^n$. Por ser f continua y el simplex un conjunto cerrado y acotado,

$$\text{dada } \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 \quad / \quad \underset{(1)}{|x'-x| \leq \delta} \Rightarrow \underset{(2)}{|f(x') - f(x)| \leq \varepsilon}$$

Consideremos ahora los vectores $x^{n+1}, \ldots, x^k \in S^n$ lo "suficientemente cercanos" para que dados dos puntos x y x' en el mismo conjunto primitivo, se cumpla que $|x' - x| \leq \delta$.

Etiquetemos los vectores $x^0 , \ldots , x^n , x^{n+1}, \ldots , x^k$ de la siguiente manera:

.) $l(x^j) = j$ para $j = 0, 1, \ldots, n$

..) $l(x^j) = \min \left\{ i \;/\; f_i(x^j) - x_i^j \geq 0 \right\}$ para $j = n+1, \ldots, k$.

Es decir, la etiqueta será el menor índice para el cual $f_i(x^j) - x_i^j \geq 0$.

Esta etiquetación siempre será factible pues

$$\sum_{k=0}^{n} (f_k(x^j) - x_k^j) = 0 \implies \exists\, i \,,\; f_i(x^j) - x_i^j \geq 0 \;.$$

Por el teorema enunciado en la página 47, existe al menos un conjunto primitivo con distintas etiquetas; es decir, dada i ($i = 0,1,\ldots,n$), existe x' en el subsimplex definido por el conjunto primitivo con distintas etiquetas tal que

$$f_i(x') - x_i' \geq 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

Sea $x \in$ subsimplex con marcaje completo,

por (2) (pag.53) $\quad f_i(x') - f_i(x) \leq |f_i(x') - f_i(x)| \leq \varepsilon$

por (1) " $\quad x_i - x_i' \leq |x_i' - x_i| \leq \delta$

$$f_i(x') - (f_i(x) - x_i) - x_i' \leq \varepsilon + \delta$$

$$- (f_i(x) - x_i) \leq \varepsilon + \delta - (f_i(x') - x_i')$$

y por (3) : $\quad - (f_i(x) - x_i) \leq \varepsilon + \delta \quad \ldots\ldots (4)$

Por otro lado,

$$\sum_{k=0}^{n} (f_k(x) - x_k) = 0 \implies f_i(x) - x_i = -\sum_{k \neq i} (f_k(x) - x_k) \qquad \forall\, i$$

$$f_i(x) - x_i \leq n\,(\varepsilon + \delta) \qquad \text{por (4)}$$

y como $|f(x) - x| = \max \left\{ |f_0(x) - x_0| \,, \ldots, |f_n(x) - x_n| \right\}$

se sigue que $\quad |f(x) - x| \leq n\,(\varepsilon + \delta) \quad //$

Esta cota dependerá directamente de la distribución de los vectores

$x^{n+1}, \ldots, x^k$ en el interior del simplex, o sea que la diferencia entre un vector que pertenece a un subsimplex con etiquetación completa y su imagen, bajo la función, puede hacerse tan pequeña como se desee.

Ejemplo 1 :

Sea S^1 el 1-simplex unitario, es decir,

$$S^1 = \left\{ (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x_0 + x_1 = 1 \;\; ; \;\; x_0, x_i \geq 0 \right\} .$$

Sea $f : S^1 \longrightarrow S^1$ una función continua tal que

$$f(x_0, x_1) = \left(\frac{1 + x_0}{2} , \frac{x_1}{2} \right)$$

Los lados del simplex estarán representados por los vectores $x^0 = (0, M_0)$ y $x^1 = (M_1 , 0)$. Y sean

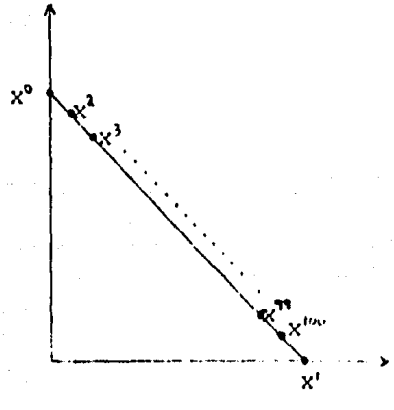
$$x^2 = \left(\frac{1}{100} , \frac{99}{100} \right)$$

$$x^3 = \left(\frac{2}{100} , \frac{98}{100} \right)$$

$$\vdots$$

$$x^{99} = \left(\frac{98}{100} , \frac{2}{100} \right)$$

$$x^{100} = \left(\frac{99}{100} , \frac{1}{100} \right)$$



Etiquetando los vectores tendríamos:

.) $l(x^j) = j$ para $j = 0, 1$

..) $l(x^j) = 0$ para $j = 2,\ldots,100$, puesto que

$$f(x^j) = f\left(\frac{j-1}{100}, \frac{100-j+1}{100}\right)$$

$$= \left(\frac{1 + \frac{j-1}{100}}{2}, \frac{1}{2}\,\frac{100 - j + 1}{100}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{j-1}{200}, \frac{1}{2}\,\frac{100-j+1}{100}\right)$$

en donde

$$\frac{j-1}{100} = \frac{j-1}{200} + \frac{j-1}{200} < \frac{j-1}{200} + \frac{1}{2} \qquad \text{pues} \quad 2 \leq j \leq 100$$

es decir

$$f_0(x^j) - x_0^j = \left(\frac{1}{2} + \frac{j-1}{200}\right) - \frac{j-1}{100} > 0$$

y por otro lado

$$f_1(x^j) - x_1^j = \frac{1}{2}\left(\frac{100-j+1}{100}\right) - \frac{100-j+1}{100} < 0 \quad .$$

Siguiendo el algoritmo de Scarf, partimos del conjunto primitivo $\left\{x^1, x^{100}\right\}$, que es el buscado pues sus etiquetas son distintas.

Ahora, sean $x, x' \in S^1$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$|x' - x| \leq 2\varepsilon \Longrightarrow \frac{1}{2}|x' - x| \leq \varepsilon$$

$$\frac{1}{2}\max\left\{|x_0' - x_0|, |x_1' - x_1|\right\} \leq \varepsilon$$

$$\max\left\{\left|\frac{x_0' - x_0}{2}\right|, \left|\frac{x_1' - x_1}{2}\right|\right\} \leq \varepsilon$$

$$\max\left\{\left|\frac{1 + x_0'}{2} - \frac{1 + x_0}{2}\right|, \left|\frac{x_1'}{2} - \frac{x_1}{2}\right|\right\} \leq \varepsilon$$

$$\left| \left(\frac{1 + x'_0}{2} - \frac{1 + x_0}{2} \;,\; \frac{x'_1}{2} - \frac{x_1}{2} \right) \right| \leq \varepsilon$$

$$\left| f(x') - f(x) \right| \leq \varepsilon \quad \checkmark$$

es decir, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = 2\varepsilon$ tal que

$$|x' - x| \leq \delta = 2\varepsilon \implies |f(x') - f(x)| \leq \varepsilon$$

Por la forma de definir los vectores $x^2, \ldots, x^{100}$, los conjuntos primitivos que podremos formar son $\{x^0, x^1\}$, $\{x^2, x^3\}$, $\{x^3, x^4\}$, ... , $\{x^{99}, x^{100}\}$ y $\{x^{100}, x^1\}$. Y si tomamos dos puntos de un mismo conjunto primitivo, x y x' , tendremos que

$$|x' - x| \leq |x^0 - x^2| = |x^2 - x^3| = \ldots = |x^{100} - x'|$$

$$\leq |x^1 - x^3| = \left| \left(\frac{1}{100} - \frac{2}{100} \;,\; \frac{99}{100} - \frac{98}{100} \right) \right|$$

$$= \left| \left(-\frac{1}{100} \;,\; \frac{1}{100} \right) \right| = \frac{1}{100}$$

por lo cual, podemos considerar $\delta = \frac{1}{100}$, y como $\delta = 2\varepsilon$, $\varepsilon = \frac{1}{200}$

Por la cota encontrada en la página 54, tenemos que si x es un elemento cualquiera de un subsimplex con marcaje completo (en este caso el subsimplex limitado por x^{100} y x') ,

$$\left| f(x) - x \right| \leq n\,(\varepsilon + \delta)$$

$$\leq 1 \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{100} \right) = \frac{3}{200}$$

De haberse deseado una mayor aproximación, hubiese sido necesario aumentar vectores a la lista $x^2, \ldots, x^{100}$. En este ejemplo en particular,

se puede checar que un punto fijo es $(1, 0)$ ya que $f(1, 0) = (1, 0)$; sin embargo, no siempre será posible "deducirlo" y nos conformaremos con una aproximación a dicho punto fijo.

Ejemplo 2 :

Sea $\bar{S} = \left\{ (\pi_0, \pi_1) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \pi_0 + \pi_1 = \pi \ ; \ \pi_0, \pi_1 \geq 0 \right\}$ un 1-simplex (Si quisiéramos trabajar con el simplex unitario correspondiente, bastaría normalizar dividiendo cada componente de los elementos de $\bar{S}$ entre π).

Sea $g : \bar{S} \longrightarrow \bar{S}$ la función continua definida por

$$g(\pi_0, \pi_1) = \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \pi_0 \ , \ \pi \left(1 - \frac{\operatorname{sen} \pi_0}{2} \right) \right)$$

Como anteriormente, los lados del simplex serán $x^0 = (0, M_0)$ y $x^1 = (M_1, 0)$. Y los demás vectores:

$$x^2 = \left(\frac{\pi}{n} , \frac{n-1}{n} \pi \right)$$

$$x^3 = \left(\frac{2\pi}{n} , \frac{n-2}{n} \pi \right)$$

$$\vdots$$

$$x^{n-1} = \left(\frac{n-2}{n} \pi , \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$x^n = \left(\frac{n-1}{n} \pi , \frac{\pi}{n} \right)$$

donde n es un entero positivo par que puede tomarse tan grande como se

desee: a mayor n , mayor grado de aproximación.

Los extremos tendrían etiquetas 0 y 1 :

$$1\,(x^0) = 0$$

$$1\,(x^1) = 1 \quad ;$$

y los vectores "de la segunda mitad" etiqueta 1 :

$1\,(x^j) = 1$ para $j = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 3, \ldots, n$ porque en estos casos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{j-1}{n}\pi\right) < 1 \implies g_o(x^j) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{j-1}{n}\pi\right) < \frac{\pi}{2} < \frac{j-1}{n}\pi = x_o^j$$

$$\implies g_o(x^j) - x_o^j < 0 \quad , \text{ condición que implica que dichos vectores no pueden tener etiqueta 0 .}$$

El siguiente vector en orden descendente sería $\frac{n}{2} + 1$, y para etiquetarlo:

$$g_o(x^{\frac{n}{2}+1}) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\frac{n}{2}}{n}\pi = \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2} = x_o^{\frac{n}{2}+1}$$

es decir, $g_o(x^{\frac{n}{2}+1}) - x_o^{\frac{n}{2}+1} \geq 0$, por lo que su etiqueta será

$$1\,(x^{\frac{n}{2}+1}) = 0$$

Al seguir el algoritmo de Scarf, partimos del conjunto primitivo

$\{x^1 , x^n\}$ de etiquetas 1 y 1 , y obtendremos la siguiente sucesión de conjuntos primitivos

$$\left\{ x^{n} \ , x^{n-1} \right\} \quad \text{de etiquetas } 1 \text{ y } 1 ,$$

$$\left\{ x^{n-1} , x^{n-2} \right\} \quad \text{de etiquetas } 1 \text{ y } 1 ,$$

$$\vdots$$

$$\left\{ x^{\frac{n}{2}+3} , x^{\frac{n}{2}+2} \right\} \quad \text{de etiquetas } 1 \text{ y } 1 ,$$

$$\left\{ x^{\frac{n}{2}+2} , x^{\frac{n}{2}+1} \right\} \quad \text{de etiquetas } 1 \text{ y } 0 .$$

De donde $\left\{ x^{\frac{n}{2}+2} , x^{\frac{n}{2}+1} \right\}$ es el conjunto buscado de etiquetas distintas, por lo que cualquier punto que sea combinación convexa de sus elementos es una aproximación a un punto fijo de la función.

Tenemos que

$$x^{\frac{n}{2}+2} = \left(\frac{\frac{n}{2}+1}{n} \pi , \frac{\frac{n}{2}-1}{n} \pi \right)$$

$$x^{\frac{n}{2}+1} = \left(\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2} \right)$$

Tomemos ahora de cada conjunto primitivo con etiquetación completa el elemento $x^{\frac{n}{2}+2}$, y consideremos la sucesión que dichos elementos forman al variar n:

$$\left\{ \left(\frac{\frac{n}{2}+1}{n} \pi , \frac{\frac{n}{2}-1}{n} \pi \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \left(\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2} \right)$$

donde $\left(\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2} \right)$ es precisamente el punto fijo a que nos condujo en este caso el algoritmo pues

$$g \left(\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2} \right) = \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} , \pi \left(1 - \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{2} \right) \right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2} \right) \quad \checkmark$$

Bibliografía

Kuhn H.W.
SIMPLICIAL APPROXIMATION OF FIXED POINTS
Proc. N.A.S., 60, 1968

Scarf Herbert
THE APPROXIMATION OF FIXED POINTS OF A CONTINUOUS MAPPING
SIAM Journal Applied Mathematics, 15, 1967

Scarf Herbert, Terje Hansen
THE COMPUTATION OF ECONOMIC EQUILIBRIA
Yale University Press
New Haven and London, 1973

III.- ALGUNAS APLICACIONES

El teorema de Brouwer del punto fijo es muy utilizado en diversas ramas de las matemáticas para pruebas de existencia. Sin embargo, no es sólo un instrumento teórico, para demostraciones; sino que es, también, un resultado a través del cual es posible obtener resultados concretos, numéricos. Citemos, por ejemplo, un punto de equilibrio en un modelo económico.

En el presente capítulo, aparecerá en primera instancia una "aplicación" del Teorema en la teoría matemática de los juegos. Y, posteriormente, se demostrará que, utilizando el algoritmo de Scarf, una aproximación a la solución de un problema de programación no-lineal puede ser encontrada.

1.- Juegos bimatriciales no-cooperativos.

Un juego finito entre dos personas de suma general (los intereses de ambos jugadores no son forzosamente opuestos) puede expresarse como un par de matrices de $m \times n$, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, o, equivalentemente, como una matriz (A, B) de $m \times n$ en la que cada entrada es un par ordenado (a_{ij}, b_{ij}) donde

a_{ij} es el pago al jugador I si I juega su estrategia i y II juega su estrategia j , y

b_{ij} es el pago al jugador II si I juega su estrategia i y II su estrategia j .

Un juego con las características anteriores se llama bimatricial, y consideraremos el caso no-cooperativo, es decir, aquel en que cualquier tipo de acuerdo entre los dos jugadores está prohibido.

Definimos las estrategias mixtas para I y II como un m-vector y un n-vector respectivamente:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad , \quad x_i \geq 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \quad , \quad y_j \geq 0 \quad , \quad \sum_{j=1}^{m} y_j = 1$$

Las esperanzas de pago para I y II , dado que I sigue su estrategia mixta x y II la estrategia y , son:

$$E_I(x, y) = x A y^t$$

$$E_{II}(x, y) = x B y^t$$

Diremos que un par de estrategias mixtas, $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$, para el juego bimatricial (A, B) está en <u>equilibrio</u> si para cualquier otra estrategia mixta (x, y)

$$E_I(x, \overset{*}{y}) \leq E_I(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$$

$$E_{II}(\overset{*}{x}, y) \leq E_{II}(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$$

+ Teorema

todo juego bimatricial tiene, al menos, un punto o par de estrategias en equilibrio.

Demostración.-

Sea (x, y) un par de estrategias mixtas para el juego bimatricial (A, B). Definimos

$$c_i = \max\left\{A_i\, y^t - x\, A\, y^t\ ,\ 0\right\} \qquad d_j = \max\left\{x\, B_j - x\, B\, y^t\ ,\ 0\right\}$$

donde A_i = renglón i de la matriz A; B_j = columna j de la matriz B.

$$x_i' = \frac{x_i + c_i}{1 + \sum_k c_k} \qquad y_j' = \frac{y_j + d_j}{1 + \sum_k d_k}$$

es decir, si alguna estrategia pura mejora la esperanza de pago del jugador, éste la usará más.

La transformación $T(x,y) = (x',y')$ será continua por ser composición de continuas. Por otro lado, x' y y' son estrategias mixtas pues

i) $$x_i' = \frac{x_i + c_i}{1 + \sum_k c_k} \geq 0\ , \qquad \sum_i x_i' = \sum_i \frac{x_i + c_i}{1 + \sum_k c_k}$$

$$\sum_i x_i' = \frac{\sum_i x_i + \sum_i c_i}{1 + \sum_k c_k} = \frac{1 + \sum_i c_i}{1 + \sum_k c_k} = 1 \quad \checkmark$$

ii) $y_j' = \dfrac{y_j + d_j}{1 + \sum_k d_k} \geq 0$, $\sum_j y_j' = \sum_j \dfrac{y_j + d_j}{1 + \sum_k d_k} = \dfrac{\sum_j y_j + \sum_j d_j}{1 + \sum_k d_k} = \dfrac{1 + \sum_j d_j}{1 + \sum_k d_k} = 1 \quad \checkmark$

Sean $X = \{ x / x$ es una estrategia mixta de I$\}$ - es el (m-1)-simplex unitario - ,

$Y = \{ y / y$ es una estrategia mixta de II$\}$ - es el (n-1)-simplex unitario - ;

entonces, siendo $T : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ continua y $X \times Y$ un conjunto compacto, convexo y no vacío, por el teorema de Brouwer

$$\exists\ (\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}) \in X \times Y \quad \text{tal que} \quad T(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}) = (\overset{\circ}{x}', \overset{\circ}{y}') = (\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$$

Basta ahora demostrar que precisamente este punto $(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ está en equilibrio. De hecho, se da la doble implicación; es decir,

$$T(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}) = (\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}) \iff (\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}) \text{ está en equilibrio}$$

$\Rightarrow$) Supongamos que $(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ no está en equilibrio, entonces

$$\exists\ \bar{x} \ ,\ \bar{x} A \overset{\circ}{y}^t > \overset{\circ}{x} A \overset{\circ}{y}^t \text{ , o bien}$$

$$\exists\ \bar{y} \ ,\ \overset{\circ}{x} B \bar{y}^t > \overset{\circ}{x} B \overset{\circ}{y}^t$$

1.- Si $\exists\ \bar{x} \in X$, $\bar{x} A \overset{\circ}{y}^t > \overset{\circ}{x} A \overset{\circ}{y}^t$

a) $\bar{x} A \overset{\circ}{y}^t$ es un promedio ponderado de los términos $A_i \overset{\circ}{y}^t$, por lo que existe i tal que $A_i \overset{\circ}{y}^t > \overset{\circ}{x} A \overset{\circ}{y}^t$

$$\Rightarrow c_i = A_i \overset{\circ}{y}^t - \overset{\circ}{x} A \overset{\circ}{y}^t > 0$$

$$\Rightarrow \sum_k c_k > 0$$

b) $\overset{\circ}{x} A \overset{\circ}{y}^t$ es también un promedio ponderado de los términos $A_i \overset{\circ}{y}^t$, por lo que existe j tal que

$$A_j \overset{\circ}{y}^t \leq \overset{\circ}{x} A \overset{\circ}{y}^t$$

$$\Rightarrow A_j \overset{\circ}{y}^t - \overset{\circ}{x} A \overset{\circ}{y}^t \leq 0 \Rightarrow c_j = 0$$

de donde $\overset{\circ}{x}'_j = \dfrac{\overset{\circ}{x}_j}{1 + \sum c_k} < \overset{\circ}{x}_j \Rightarrow \overset{\circ}{x} \neq \overset{\circ}{x}'$ ▽

2.- Si $\exists\ \bar{y} \in Y$, $\overset{\circ}{x} B \bar{y}^t > \overset{\circ}{x} B \overset{\circ}{y}^t$

a) $\overset{\circ}{x} B \bar{y}^t$ es un promedio ponderado de los términos $\overset{\circ}{x} B_j$, por lo que existe j tal que $\overset{\circ}{x} B_j > \overset{\circ}{x} B \overset{\circ}{y}^t$

$$\Rightarrow d_j = \overset{\circ}{x} B_j - \overset{\circ}{x} B \overset{\circ}{y}^t > 0$$

$$\Rightarrow \sum_k d_k > 0$$

b) $\overset{\circ}{x} B \overset{\circ}{y}^t$ es también un promedio ponderado de los términos $\overset{\circ}{x} B_j$, por lo que existe i tal que

$$\overset{\circ}{x} B_i \leq \overset{\circ}{x} B \overset{\circ}{y}^t$$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{x} B_i - \overset{\circ}{x} B \overset{\circ}{y}^t \leq 0 \Rightarrow d_i = 0$$

de donde $\overset{\circ}{y}'_i = \dfrac{\overset{\circ}{y}_i}{1 + \sum d_k} < \overset{\circ}{y}_i \Rightarrow \overset{\circ}{y} \neq \overset{\circ}{y}'$ ▽

Se concluye, por lo tanto, que $(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ es un par en equilibrio. ✓

$\Leftarrow$) Por ser $(\mathring{x}, \mathring{y})$ un par en equilibrio,

$$E_1\ (\ (1,0,\ldots,0),\ \mathring{y}\ ) = A_1\,\mathring{y}^t \leqslant \mathring{x}\,A\,\mathring{y}^t$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$E_m\ (\ (0,0,\ldots,1),\ \mathring{y}\ ) = A_m\,\mathring{y}^t \leqslant \mathring{x}\,A\,\mathring{y}^t$$

es decir, $A_i\,\mathring{y}^t \leqslant \mathring{x}\,A\,\mathring{y}^t \quad \forall i \Rightarrow A_i\,\mathring{y}^t - \mathring{x}\,A\,\mathring{y}^t \leqslant 0 \quad \forall i$

$$\Rightarrow c_i = 0 \qquad \forall i$$
$$\Rightarrow \mathring{x}'_i = \mathring{x}_i \qquad \forall i$$
$$\Rightarrow \mathring{x}' = \mathring{x}$$

Análogamente, por ser $(\mathring{x}, \mathring{y})$ un par en equilibrio,

$$\mathring{x}\,B_j \leqslant \mathring{x}\,B\,\mathring{y}^t \quad \forall j \Rightarrow \mathring{x}\,B_j - \mathring{x}\,B\,\mathring{y}^t \leqslant 0 \quad \forall j$$
$$\Rightarrow d_j = 0 \qquad \forall j$$
$$\Rightarrow \mathring{y}'_j = \mathring{y}_j \qquad \forall j$$
$$\Rightarrow \mathring{y}' = \mathring{y}$$

Por lo tanto, $T(\mathring{x}, \mathring{y}) = (\mathring{x}, \mathring{y})$ $\surd\surd$

2.- Generalización a juegos finitos.

En la sección anterior de este capítulo analizamos la existencia de un par en equilibrio para juegos bimatriciales no-cooperativos. Obtendremos, ahora, resultados equivalentes para juegos finitos n-personales.

+ Definición

un juego finito n-personal es un conjunto de n jugadores, cada uno de los cuales tiene asociado un conjunto finito de estrategias puras y una función de pago p_i .

Nótese que los juegos bimatriciales son un caso particular de los juegos finitos n-personales. Sin embargo, se consideraron por separado para facilitar la interpretación de conceptos y los procedimientos de demostración.

+ Definición

una estrategia mixta s_i del jugador i es un vector cuyas componentes son números no negativos que suman 1 , y que son correspondientes uno a uno con sus estrategias puras:

$$s_i = \sum_{\alpha} c_{i\alpha} \pi_{i\alpha} \quad \text{con} \quad c_{i\alpha} \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{\alpha} c_{i\alpha} = 1$$

donde las $\pi_{i\alpha}$ son las estrategias puras del jugador i , $(1,0,\ldots,0)$, . . . , $(0,0,\ldots,1)$.

Nótese, antes de continuar, que una estrategia pura cumple la definición de estrategia mixta.

El conjunto de las estrategias mixtas $\{s_i\}$ puede verse como el simplex unitario cuyos vértices son las estrategias puras $\pi_{i\alpha}$. Ejemplificando en $\mathbb{R}^3$, las estrategias puras posibles del jugador i serían

$$\pi_{i1} = (1, 0, 0) \quad , \quad \pi_{i2} = (0, 1, 0) \quad \text{y} \quad \pi_{i3} = (0, 0, 1) \quad ;$$

y las estrategias mixtas tendrían la forma

$$s_i = \sum_{\alpha=1}^{3} c_{i\alpha}\pi_{i\alpha} = c_{i1}(1,0,0) + c_{i1}(0,1,0) + c_{i3}(0,0,1)$$
$$= (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}) \qquad \text{con } c_{i\alpha} \geq 0 \ , \ \sum_{\alpha=1}^{3} c_{i\alpha} = 1$$

Las letras i, j, k serán usadas para jugadores; α , β , γ para indicar las diversas estrategias puras de un jugador. Los símbolos s_i , t_i , r_i indicarán estrategias mixtas; mientras que $\pi_{i\alpha}$ indicará la α-ésima estrategia pura del jugador i .

+ Definición

la <u>función de pago</u> p_i es una función lineal de las n-adas de estrategias mixtas en los reales:

$p_i(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}$ será el pago esperado al jugador i si el jugador 1 sigue su estrategia mixta s_1 , el jugador 2 sigue s_2 , etc.

La n-ada de estrategias mixtas $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ será denotada por $\vec{s}$; de donde

$$p_i (s_1 , \ldots , s_n) = p_i (\delta)$$

Se usará $(\delta ; t_i)$ para representar $(s_1 , \ldots , s_{i-1} , t_i , s_{i+1} , \ldots , s_n)$.

+ Definición

una n-ada de estrategias mixtas δ es un punto en equilibrio si y sólo si $p_i (\delta) = \max_{r_i} (p_i (\delta ; r_i)) \quad \forall i$

es decir, un punto en equilibrio es una estrategia que maximiza el pago a cada uno de los jugadores si las estrategias de los otros permanecen fijas.

Diremos que una estrategia mixta s_i del jugador i usa la estrategia pura $\pi_{i\alpha}$ si, siendo $s_i = \sum_{\beta} c_{i\beta} \pi_{i\beta} \quad , \quad c_{i\alpha} > 0$.

Generalizando, diremos que la n-ada de estrategias $\delta = (s_1 , \ldots , s_i , \ldots , s_n)$ usa $\pi_{i\alpha}$ bajo el mismo criterio.

+ Lema

$$\max_{r_i} (p_i (\delta ; r_i)) = \max_{\alpha} (p_i (\delta ; \pi_{i\alpha}))$$

Demostración.-

Sea $r_i = \sum_{\alpha} c_{i\alpha} \pi_{i\alpha}$ y

$$\begin{aligned} p_i (\delta ; r_i) &= p_i (s_1 , \ldots , s_{i-1} , r_i , s_{i+1} , \ldots , s_n) \\ &= p_i (s_1 , \ldots , s_{i-1} , \sum_{\alpha} c_{i\alpha} \pi_{i\alpha} , s_{i+1} , \ldots , s_n) \\ &= p_i (\sum_{\alpha} c_{i\alpha} (\delta ; \pi_{i\alpha})) \\ &= \sum_{\alpha} c_{i\alpha} \; p_i (\delta ; \pi_{i\alpha}) \quad \text{por ser } p_i \text{ lineal} \\ &\leq \sum_{\alpha} c_{i\alpha} \max_{\alpha} (p_i (\delta ; \pi_{i\alpha})) \end{aligned}$$

$$p_i(\delta ; r_i) \leq \max_{\alpha} (p_i(\delta ; \pi_{i\alpha})) \quad \text{pues} \quad \sum_{\alpha} c_{i\alpha} = 1$$

es decir, $p_i(\delta ; r_i) \leq \max_{\alpha} (p_i(\delta ; \pi_{i\alpha})) \quad \forall r_i \ldots (*)$

Por otro lado, $\pi_{i\alpha}$ puede ser expresado de la "forma r_i" :

$$\pi_{i\alpha} = \sum_{\beta} c_{i\beta} \pi_{i\beta} \qquad \text{con} \begin{cases} c_{i\alpha} = 1 \\ c_{i\beta} = 0 \quad \beta \neq \alpha \end{cases}$$

Por lo tanto, siendo $\{\pi_{i\alpha}\} \subset \{r_i\}$ y por (*), se concluye que

$$\max_{r_i} (p_i(\delta ; r_i)) = \max_{\alpha} (p_i(\delta ; \pi_{i\alpha})) \; //$$

Denotando $p_i(\delta ; \pi_{i\alpha})$ como $p_{i\alpha}(\delta)$, tendremos que una condición necesaria y suficiente para que δ sea un punto en equilibrio es que

$$p_i(\delta) = \max_{\alpha} p_{i\alpha}(\delta)$$

+ Teorema

todo juego finito tiene un punto en equilibrio.

Demostración.-

Sea δ una n-ada de estrategias mixtas; $p_i(\delta)$ la correspondiente función de pago del jugador i ; y $p_{i\alpha}(\delta)$ la función de pago del jugador i si él cambia a su α-ésima estrategia pura $\pi_{i\alpha}$ y los otros continúan usando sus respectivas estrategias mixtas de δ .

Definimos un conjunto de funciones continuas $\varphi_{i\alpha}$ de la siguiente manera:

$$\varphi_{i\alpha}(\sigma) = \max\ (\,0\,,\ p_{i\alpha}(\sigma) - p_i(\sigma)\,)\ ;$$

y para cada componente s_i de σ definimos una transformación $T_i\ (s_i) = s_i'$ donde

$$s_i' = \frac{s_i + \sum_\alpha \varphi_{i\alpha}(\sigma)\,\pi_{i\alpha}}{1 + \sum_\alpha \varphi_{i\alpha}(\sigma)}$$

s_i' es un vector estrategia mixta

A la n-ada $(s_1', s_2', \ldots, s_n')$ la denotaremos σ' .

T_i será una función continua por ser composición de continuas, e irá del simplex de estrategias mixtas del jugador i al mismo simplex,

$$T_i : \{s_i\} \longrightarrow \{s_i\} \quad , \text{ pues}$$

i) $$s_i' = \frac{s_i + \sum_\alpha \varphi_{i\alpha}(\sigma)\pi_{i\alpha}}{1 + \sum_\alpha \varphi_{i\alpha}(\sigma)} = \frac{\sum_\alpha c_{i\alpha}\pi_{i\alpha} + \sum_\alpha \varphi_{i\alpha}(\sigma)\,\pi_{i\alpha}}{1 + \sum_\alpha \varphi_{i\alpha}(\sigma)}$$

$$= \frac{\sum_\alpha \pi_{i\alpha}\,(\,c_{i\alpha} + \varphi_{i\alpha}(\sigma)\,)}{1 + \sum_\alpha \varphi_{i\alpha}(\sigma)} = \sum_\alpha \frac{c_{i\alpha} + \varphi_{i\alpha}(\sigma)}{1 + \sum_\alpha \varphi_{i\alpha}(\sigma)}\,\pi_{i\alpha}$$

con $$\frac{c_{i\alpha} + \varphi_{i\alpha}(\sigma)}{1 + \sum_\alpha \varphi_{i\alpha}(\sigma)} \geqslant 0 \quad \forall \alpha \ \checkmark$$

ii) $$\sum_\alpha \frac{c_{i\alpha} + \varphi_{i\alpha}(\sigma)}{1 + \sum_\alpha \varphi_{i\alpha}(\sigma)} = \frac{\sum_\alpha \left[c_{i\alpha} + \varphi_{i\alpha}(\sigma)\right]}{1 + \sum_\alpha \varphi_{i\alpha}(\sigma)} = \frac{1 + \sum_\alpha \varphi_{i\alpha}(\sigma)}{1 + \sum_\alpha \varphi_{i\alpha}(\sigma)} = 1 \ \checkmark$$

Entonces, por el teorema de Brouwer, existe una estrategia mixta s_i tal que $T_i\,(s_i) = s_i = s_i'$ $\forall\, i$. Sea $T \rightarrow T : \sigma \to \sigma'$. Mostraremos que los puntos fijos de la función T son los puntos en equilibrio.

Primero consideremos cualquier n-ada σ . En σ , la estrategia mixta s_i del jugador i usará algunas de sus estrategias puras. Al me-

nos una de estas estrategias puras, sea $\pi_{i\beta}$, será "menos preferible", ésto es,

$$p_{i\beta}(\Delta) \leq p_i(\Delta)$$

$$\Rightarrow p_{i\beta}(\Delta) - p_i(\Delta) \leq 0$$

$$\Rightarrow \varphi_{i\beta}(\Delta) = 0$$

Ahora si esta n-ada Δ es el punto fijo bajo T ,

$$s_i = s_i' = \sum_{\alpha} \frac{c_{i\alpha} + \varphi_{i\alpha}(\Delta)}{1 + \sum_{\alpha} \varphi_{i\alpha}(\Delta)} \pi_{i\alpha}$$

de donde, por ser s_i y s_i' iguales, sus β-ésimas coordenadas son también iguales, es decir,

$$c_{i\beta} = s_i^{\beta} = s_i'^{\beta} = \frac{c_{i\beta} + \varphi_{i\beta}(\Delta)}{1 + \sum_{\alpha} \varphi_{i\alpha}(\Delta)} = \frac{c_{i\beta}}{1 + \sum_{\alpha} \varphi_{i\alpha}(\Delta)}$$

$$\Rightarrow \sum_{\alpha} \varphi_{i\alpha}(\Delta) = 0$$

$$\therefore \quad \varphi_{i\alpha}(\Delta) = 0 \quad \forall \alpha \quad \text{si } \Delta \text{ es un punto fijo bajo T.}$$

Lo anterior significa, por como $\varphi_{i\alpha}(\Delta)$ fue definida, que ningún jugador puede mejorar su pago cambiando a una estrategia pura $\pi_{i\alpha}$. En particular

$$p_i(\Delta) \geq \max_{\alpha} \left(p_i(\Delta ; \pi_{i\alpha}) \right) \overset{\text{por lema pag. 70}}{=} \max_{r_i} \left(p_i(\Delta ; r_i) \right)$$

y como en Δ i sigue su estrategia $s_i \in \{r_i\}$, $p_i(\Delta) = \max_{r_i} (p_i(\Delta ; r_i))$

Pero ésto es justamente la condición necesaria y suficiente establecida para que Δ fuera un punto en equilibrio. $\surd\surd$

Recíprocamente, si Δ es un punto en equilibrio, tendremos que

$$\forall\, i\,, \forall \alpha \quad p_{i\alpha}(\Delta) \leq p_i(\Delta)$$

$$\Rightarrow \quad p_{i\alpha}(\Delta) - p_i(\Delta) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{i\alpha}(\Delta) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad s_i' = \sum_{\alpha} \frac{c_{i\alpha} + \varphi_{i\alpha}(\Delta)}{1 + \sum_{\alpha} \varphi_{i\alpha}(\Delta)} \pi_{i\alpha} = \sum_{\alpha} c_{i\alpha} \pi_{i\alpha} = s_i \quad \surd\surd$$

Por lo tanto queda demostrado que Δ es punto en equilibrio si y sólo si $T(\Delta) = \Delta$, es decir, Δ es punto fijo bajo T. Y como se encontró tal punto fijo por el teorema de Brouwer, entonces existe un punto en equilibrio para todo juego finito n-personal.

3.- Programación no-lineal

Como ya se mencionó, trataremos ahora la resolución de un problema de programación no-lineal, para ello necesitaremos el siguiente

+ Teorema

sean $C_0, C_1, \ldots, C_n$ conjuntos cerrados en el n-simplex unitario S^n, tales que

i) todo vector en S^n pertenece a al menos un C_i ($\bigcup C_i = S^n$),

ii) todo vector en el lado $x_i = 0$ pertenece a C_i, $i \in \overline{0,n}$;

entonces $\bigcap_0^n C_i \neq \emptyset$

Demostración.-

Consideremos una lista de vectores $x^0, x^1, \ldots, x^k$ en el simplex S^n tal que cada C_j contiene a al menos uno de estos vectores, y que están etiquetados de la siguiente manera:

$$l(x^j) = i \quad \text{si} \quad x^j \in C_i$$

entonces, aplicando el algoritmo de Scarf, obtendremos un conjunto primitivo P_ℓ tal que sus elementos tengan distintas etiquetas, es decir,

$$P_\ell \cap C_i \neq \emptyset \quad \text{para} \quad i = 0,1,\ldots,n$$

Incrementemos cada vez más la lista de vectores, de tal manera que la distancia entre dos vectores cualesquiera de un mismo conjunto primitivo sea cada vez menor. Entonces, la sucesión de conjuntos primitivos P_ℓ converge a un punto límite P con la propiedad de pertenecer a cada uno de

los C_i , es decir, $P \in \hat{\bigcap_0} C_i \Rightarrow \hat{\bigcap_0} C_i \neq \emptyset$ ✓

Una vez demostrado el teorema anterior, podemos considerar ahora el problema de programación convexa:

$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & g_1(x) & \\ \text{sujeto a} & g_1(x) \leq 0 & g_1 \text{ cóncava} \\ & \vdots & g_2, \ldots, g_n \text{ convexas} \\ & g_n(x) \leq 0 & \\ & x \geq 0 & \end{array}$$

Definimos $G(x) = \bar{\pi}_1 g_1(x) - \hat{\sum_2} \bar{\pi}_i g_i(x)$

con $\bar{\pi} \in S^{n-1} = \left\{ (\bar{\pi}_1, \ldots, \bar{\pi}_n) \,/\, \bar{\pi}_i \geq 0 \,,\, \hat{\sum_1} \bar{\pi}_i = 1 \right\}$ (*)

y supondremos que dado un $\bar{\pi} = (\bar{\pi}_1, \ldots, \bar{\pi}_n) \in S^{n-1}$ particular, el valor de $x \geq 0$ que maximiza la función $G(x)$ es finito, único, es función continua de $\bar{\pi}$ (denotada por $X(\bar{\pi})$) y, además, $X(\bar{\pi})$ se puede encontrar en forma explícita. Aunque se trata de una suposición fuerte, no entraremos en detalles por ser solamente el objetivo de esta sección mencionar una posible aplicación del algoritmo propuesto por Scarf. La aplicación que haremos del algoritmo será sobre el simplex S^{n-1}.

Definimos los n conjuntos cerrados $C_1, \ldots, C_n$ en el simplex S^{n-1}:

$$C_1 = \left\{ \bar{\pi} \,/\, \bar{\pi}_1 = 0 \;\text{ó}\; g_i(X(\bar{\pi})) \leq 0 \quad \text{para } i=2,\ldots,n \right\}$$

$$C_i = \left\{ \bar{\pi} \,/\, \bar{\pi}_i = 0 \;\text{ó}\; g_i(X(\bar{\pi})) \geq 0 \right\} \qquad i=2,\ldots,n$$

(*) Nótese el cambio de notación: la primera coordenada tiene subíndice 1 en lugar de 0 para facilitar su manejo.

Cada uno de estos conjuntos es cerrado y satisface las dos condiciones del teorema de la página 75, por lo que

$$\hat{\bigcap}_i C_i \neq \emptyset \quad \text{, es decir,} \quad \exists\, \pi^* \in \hat{\bigcap}_i C_i$$

A continuación se verá que esta π^* nos llevará a encontrar una aproximación a la solución del problema de maximizar $g_1(x)$. Dicha aproximación será precisamente $X(\pi^*)$.

+ Proposición

si existe un vector no negativo x tal que $g_i(x) < 0 \quad i=2,..,n$ (satisface estrictamente las restricciones del problema de programación convexa), entonces $\pi^* \in \hat{\bigcap}_i C_i \Rightarrow \pi_i^* > 0$

Demostración.-

$\pi^* \in S^{n-1} \Rightarrow \pi_i^* \geq 0$. Supongamos que $\pi_i^* = 0$

$\pi^* \in \hat{\bigcap}_i C_i \Rightarrow \pi^* \in C_i \quad i=2,\ldots,n \Rightarrow \pi_i^* = 0$ ó $g_i(X(\pi^*)) \geq 0$

$$\Rightarrow \hat{\sum}_i \pi_i^* \, g_i(X(\pi^*)) \geq 0$$

Por otro lado, $\exists\ x \geq 0$, $g_i(x) < 0 \quad i=2,\ldots,n \Rightarrow \hat{\sum}_i \pi_i^* \, g_i(x) < 0$

de donde $-\hat{\sum}_i \pi_i^* \, g_i(x) > 0 \geq -\hat{\sum}_i \pi_i^* \, g_i(X(\pi^*))$; y como $\pi_1^* = 0$

$$G^*(x) = \pi_1^* \, g_1(x) - \hat{\sum}_i \pi_i^* \, g_i(x) > \pi_1^* \, g_1(X(\pi^*)) - \hat{\sum}_i \pi_i^* \, g_i(X(\pi^*)) = G^*(X(\pi^*))$$

Lo cual es una contradicción puesto que $X(\pi^*)$ maximiza la función G^* .

Por lo tanto, $\pi_1^* > 0$ ✓

Retomemos a $\pi^* \in \bigcap_1^{\hat{n}} C_i$,

$\pi^* \in C_i$ y $\pi_i^* > 0 \Rightarrow g_i(X(\pi^*)) \leq 0$ para $i=2,\ldots,n$

así que las restricciones del problema original son cumplidas por $X(\pi^*)$.

Además, $\pi^* \in C_i$ $i=2,\ldots,n \Rightarrow \pi_i^* = 0$ ó $g_i(X(\pi^*)) \geq 0$,

pero teníamos que $g_i(X(\pi^*)) \leq 0$, por lo que

$$\pi_i^* = 0 \quad \text{ó} \quad g_i(X(\pi^*)) = 0$$

de donde $$\sum_2^{\hat{n}} \pi_i^* g_i(X(\pi^*)) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (*)$$

Dado $\pi^* \in S^{\hat{n-1}}$, $X(\pi^*)$ maximiza la función $G^*(x)$ correspondiente. De aquí que si otro vector $x \geq 0$ satisface las restricciones

$$g_i(x) \leq 0 \qquad i=2,\ldots,n$$

tendríamos $$G^*(X(\pi^*)) = \pi_1^* g_1(X(\pi^*)) - \sum_2^{\hat{n}} \pi_i^* g_i(X(\pi^*))$$

$$\geq \pi_1^* g_1(x) - \sum_2^{\hat{n}} \pi_i^* g_i(x) = G^*(x)$$

por (*) y porque $g_i(x) \leq 0 \Rightarrow \sum_2^{\hat{n}} \pi_i^* g_i(x) \leq 0 \Rightarrow -\sum_2^{\hat{n}} \pi_i^* g_i(x) \geq 0$

resulta que $\pi_1^* g_1(X(\pi^*)) \geq \pi_1^* g_1(x) - \sum_2^{\hat{n}} \pi_i^* g_i(x) \geq \pi_1^* g_1(x)$

$$g_1(X(\pi^*)) \geq g_1(x)$$

es decir, $X(\pi^*)$ resuelve el problema de maximizar $g_1(x)$ sujeto a las restricciones dadas.

En base a lo anterior, mediante el algoritmo de Scarf podemos encontrar una aproximación a π^*, y, una vez obtenida ésta, se puede calcular

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

$X(\pi^*)$ que será una aproximación a la solución del problema de programación no-lineal propuesto en la página 76.

Veamos un ejemplo:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && g_1(x) = 2x_1x_2 \\ &\text{sujeto a} && g_2(x) = \tfrac{1}{3}x_1 + x_2 - 1 \leq 0 \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

entonces

$$G(x) = \pi_1 g_1(x) - \pi_2 g_2(x)$$

$$= 2\pi_1 x_1x_2 - \pi_2\left(\tfrac{1}{3}x_1 + x_2 - 1\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_1} &= 2\pi_1 x_2 - \tfrac{1}{3}\pi_2 = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x_2} &= 2\pi_1 x_1 - \pi_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} X_1(\pi) &= \frac{1}{2}\frac{\pi_2}{\pi_1} \\ X_2(\pi) &= \frac{1}{6}\frac{\pi_2}{\pi_1} \end{aligned}$$

es decir

$$X(\pi) = \left(\frac{1}{2}\frac{\pi_1}{\pi_1}, \frac{1}{6}\frac{\pi_2}{\pi_1}\right)$$

$$C_1 = \left\{(\pi_1, \pi_2) \;/\; \pi_1 = 0 \text{ ó } g_2(X(\pi)) \leq 0\right\}$$

$$= \left\{(\pi_1, \pi_2) \;/\; \pi_1 = 0 \text{ ó } \frac{1}{6}\frac{\pi_1}{\pi_1} + \frac{1}{6}\frac{\pi_2}{\pi_1} - 1 \leq 0\right\}$$

$$= \left\{(\pi_1, \pi_2) \;/\; \pi_1 = 0 \text{ ó } \frac{1}{3}\frac{\pi_2}{\pi_1} - 1 \leq 0\right\}$$

$$C_2 = \left\{(\pi_1, \pi_2) \;/\; \pi_1 = 0 \text{ ó } g_2(X(\pi)) \geq 0\right\}$$

$$= \left\{(\pi_1, \pi_2) \;/\; \pi_2 = 0 \text{ ó } \frac{1}{3}\frac{\pi_2}{\pi_1} - 1 \geq 0\right\}$$

En este caso, siguiendo el algoritmo de Scarf, llegaríamos a que un elemento π^* que pertenece a la intersección de C_1 y C_2 es aquel que

satisface $\frac{1}{3}\frac{\pi_2^*}{\pi_1^*} - 1 = 0$, El otro elemento de $C_1 \cap C_2$ es $(1,0)$ que no se considera pues

$$X(1,0) = \left(\frac{1}{2}\frac{0}{1}, \frac{1}{6}\frac{0}{1}\right) = (0,0) \Rightarrow g_1(X(1,0)) = 0$$

Tenemos entonces que $\frac{1}{3}\frac{\pi_2^*}{\pi_1^*} - 1 = 0$

y $$\pi_2^* = 3\pi_1^*$$

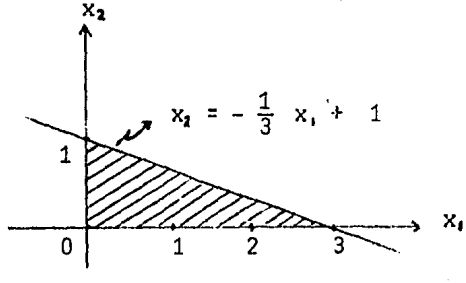
por lo que $$X(\pi^*) = \left(\frac{1}{2}\frac{\pi_1^*}{\pi_1^*}, \frac{1}{6}\frac{\pi_2^*}{\pi_1^*}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

es el valor de x que maximiza la función $2x_1x_2$ con las restricciones señaladas. De aquí que el valor máximo de la función será

$$2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

Veamos otra manera de obtener este resultado. La región de soluciones factibles sería:



donde el vector que maximiza la función $g_1(x) = 2x_1x_2$ debe estar sobre la recta $x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + 1$, pues para cualquier punto interior existe sobre

la recta otro punto con al menos una coordenada mayor (y por lo tanto imagen bajo g, mayor) ; y para algún punto sobre un eje, la función valdría cero.

Entonces, la función a maximizar se puede expresar como

$$g(x_1) = 2x_1\left(-\frac{1}{3}x_1 + 1\right) \qquad \text{con } 0 < x_1 < 3$$

$$= -\frac{2}{3}x_1^2 + 2x_1$$

$$\frac{dg}{dx_1} = -\frac{4}{3}x_1 + 2 = 0 \implies x_1 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{d^2g}{dx_1^2} = -\frac{4}{3} < 0 \qquad \text{por lo que es un máximo.}$$

Y, finalmente, como

$$x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + 1$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

tendríamos que $g(x) = 2x_1x_2$ se maximiza si $x = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, como lo habíamos obtenido. ✓

B i b l i o g r a f í a

Lemke C.E.
BIMATRIX EQUILIBRIUM POINTS AND MATHEMATICAL PROGRAMMING
Management Science, 11, 1965

Nash J.
NON-COOPERATIVE GAMES
Annals of Mathematics, 54, N° 2, Sept. 1951

Owen G.
GAME THEORY
W.B. Saunders Company,1968

Scarf Herbert,Terje Hansen
THE COMPUTATION OF ECONOMIC EQUILIBRIA
Yale University Press
New Haven and London, 1973

Stoer J.,Witzgall C.
CONVEXITY AND OPTIMIZATION IN FINITE DIMENSIONS
Springer - Verlag
Berlín - Heidelberg - New York , 1970

IV.- EL TEOREMA DE PUNTO FIJO EN EL EQUILIBRIO ECONOMICO

Los tres problemas centrales de la teoría del equilibrio económico general son los de existencia, unicidad y estabilidad. Para probar la existencia de dicho equilibrio económico, varias son las teorías que en su desarrollo han utilizado el teorema de punto fijo de Brouwer.

En este capítulo final se presentará una visión general del Modelo Neoclásico y de un modelo de intercambio puro, que son dos modelos económicos que se auxilian del teorema de punto fijo de Brouwer para probar la existencia de un equilibrio económico. Además, se cita un ejemplo numérico del modelo de intercambio puro resuelto a través del algoritmo de Scarf descrito en el segundo capítulo.

1.- Modelo Neoclásico (exceso de demanda)

Consideremos una economía compuesta por consumidores (familias, individuos) y por productores (empresas, comercios). Existen n bienes:

$$x_1 , x_2 , \ldots , x_n$$

Los precios de estos bienes quedan dados por el vector $p = (p_1 , p_2 , \ldots , p_n)$

A cada vector de precios corresponde una función global de demanda del bien j :

$$X_j^d = X_j^d(p) \quad ; \quad X_j^d : P \longrightarrow \mathbb{R}$$

obtenida de "juntar" las demandas de consumidores y productores. Análogamente,

$$X_j^o = X_j^o(p) \quad ; \quad X_j^o : P \longrightarrow \mathbb{R}$$

es la función oferta global del bien j .

El exceso de demanda del bien j será

$$E_j(p) = X_j^d(p) - X_j^o(p) \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

y los n excesos de demanda serán agrupados en el vector

$$E(p) = (E_1(p), \ldots , E_n(p))$$

+ Definición

un equilibrio es un vector precio p^* tal que todos los excesos de demanda son no positivos, y el precio de un bien es cero si

el exceso de demanda correspondiente es negativo. Es decir,

$p^* \geq 0$ es un equilibrio si

$$\text{i)} \quad E(p^*) \leq 0 \qquad \text{(componente a componente)}$$

$$\text{ii)} \quad E_j(p^*) < 0 \implies p_j^* = 0$$

En otras palabras, dado un equilibrio, no hay ningún bien cuya demanda supere a la oferta; y si la oferta de un bien es mayor que la demanda, el precio del bien caerá a cero.

La existencia del vector precio en equilibrio estará sujeta a ciertas suposiciones que haremos sobre las funciones exceso de demanda:

i) Son continuas: al variar poco el precio, varía poco la demanda.

ii) Están inferiormente acotadas; es decir, $E(p) \geq b \quad \forall\, p$, con b un vector cuyas componentes son finitas. Esta restricción implica que la oferta de todo bien es limitada.

iii) Son homogéneas de grado cero para cualquier precio; es decir,

$$E(\propto p) = E(p) \qquad \forall\, p$$

Esto implica que sólo precios relativos y no absolutos serán de importancia para el análisis.

iv) Satisfacen la Ley de Walras: el valor en el mercado del exceso de demanda es cero,

$$p\,E(p) = \sum_{j=1}^{n} p_j E_j(p) = 0 \qquad \forall\, p \geq 0 \quad ;$$

o sea que el valor de la demanda en el mercado es igual al valor de la oferta para cualquier vector de precios dado.

+ Teorema

suponiendo las cuatro restricciones anteriores sobre las funciones exceso de demanda, existirá siempre un vector de precios en equilibrio para una economía dada.

Demostración.-

Usando la suposición de homogeneidad (iii), es posible normalizar los precios de tal manera que su suma sea uno. Hecho ésto, todo vector precio pertenecerá al simplex unitario $S^{n-1} = \left\{ p \in \mathbb{R}^n \;/\; \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \;,\; p_j \geq 0 \quad \forall j \right\}$

Considerando ahora las funciones exceso de demanda, podemos definir, para cada precio p, un nuevo vector precio $\bar{p}$ de la siguiente manera:

1) $\bar{p}_j = p_j$ si $E_j(p) = 0$

2) $\bar{p}_j = p_j + \Delta$ si $E_j(p) > 0$

3) $\bar{p}_j = \max(0, p_j - \Delta)$ si $E_j(p) < 0$

$j = 1, \ldots, n$

Δ una constante positiva pequeña.

Podemos "ajustar" Δ para que las coordenadas de los precios $\bar{p}$ sumen uno y pertenezcan, por tanto, al simplex S^{n-1}. Tendríamos, entonces, una transformación T del simplex unitario en él mismo:

$$T : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1} \;, \qquad T(p) = \bar{p}$$

donde $\bar{p}$ es obtenida de acuerdo al valor de $E(p)$: dejando el precio inalterable si el exceso de demanda es cero, incrementando el precio si el exce

so de demanda es positivo, y disminuyendo el precio (nunca menor que cero) si el exceso de demanda es negativo. Esto tiene una explicación económica:

1) si se consume todo lo que se produce de un bien, no hay porque cambiar su precio;
2) si se demanda más de lo que se produce, hay que aumentar el precio para que baje la demanda; y
3) si se produce más de lo que se demanda, hay que disminuír el precio para que haya más demanda.

El hecho de que el precio sea no negativo significa que nunca se va a pagar al comprador por obtener un bien.

Por las suposiciones de continuidad (i) y cota inferior (ii) de las funciones exceso de demanda, la transformación T es una transformación continua del simplex unitario en él mismo. De donde, por el teorema de punto fijo de Brouwer, existe un punto fijo bajo la transformación $T \downarrow T(p^*) = \bar{p}^* = p^*$ demostraremos que este punto fijo es precisamente el equilibrio.

Ahora, tendremos que $E_j(p^*) \leq 0 \quad \forall\, j$, pues de lo contrario,

existiría $j \downarrow E_j(p^*) > 0 \Rightarrow \bar{p}_j^* = p_j^* + \Delta > p_j^*$ ∇

Por otro lado, si $E_j(p^*) < 0$ tendríamos que tener

$$\bar{p}_j^* = \max(0, p_j^* - \Delta) = p_j^*$$

lo cual implica que $\bar{p}_j^* = 0 = p_j^*$

Pero .) $E_j(p^*) \leq 0 \quad \forall\, j \;;\; y$

..) $E_j(p^*) < 0 \Rightarrow p_j^* = 0$

son precisamente las condiciones para que p^* sea un vector de precios en equilibrio.

Así queda demostrado que el equilibrio económico en el Modelo Neoclásico existe si se cumplen las condiciones establecidas. ✓

2.- Un Modelo de Intercambio Puro

El modelo de intercambio puro considera que todos los agentes económicos son consumidores; sea k su número. Cada consumidor posee inicialmente n mercancías. El vector W_i, con n componentes, es la cantidad de cada mercancía que el consumidor i posee inicialmente. A base de intercambios (trueques) los consumidores tratan de obtener las cantidades deseadas de cada mercancía.

Los precios de las mercancías están dados y no serán afectados por el comportamiento de los consumidores; sea $p = (p_1, \ldots, p_n)$ el vector de precios. Una canasta de consumo pretendida por el consumidor i será X_i, un vector de n componentes que representa la cantidad de cada mercancía o bien que desea tener i. X_i^j será la cantidad del bien j que desea tener i. W_i, entonces, puede considerarse como la canasta inicial de consumo de i.

Una asignación $X = (X_1, \ldots, X_k)$ es una colección de k canastas de consumo que describe lo que pretende obtener cada uno de los k consumidores. Una asignación factible es la que cumple

$$\sum_{i=1}^{k} X_i = \sum_{i=1}^{k} W_i$$

es decir, sólo los bienes que poseían inicialmente los consumidores son considerados para el intercambio. Esta suposición implica que todo bien "forma

parte" del intercambio; de otra manera, bastaría suponer que

$$\sum X_i \leq \sum W_i$$

A cada canasta X_i corresponde una preferencia o utilidad del consumidor i, llamada la función de utilidad $u_i(X_i)$. Por lo tanto, cada consumidor i trata de resolver el problema de

$$\max \quad u_i(X_i)$$
$$\text{s.a.} \quad p X_i = p W_i$$

Cada canasta X_i será posible de obtener para el consumidor i dependiendo de los precios p en el mercado, y de los bienes W_i que posea inicialmente para el trueque. Podemos entonces representar a tal canasta como

$$X_i (p, p W_i) \qquad \text{(función de demanda del consumidor } i\text{)}$$

donde $p W_i$ sería el valor en el mercado de lo que inicialmente tiene i. A partir de ahora, supondremos que toda demanda X_i que pretenda obtener el consumidor i está sujeta exactamente a su presupuesto inicial, es decir,

$$p X_i = p W_i$$

Cabe señalarse que, dadas ciertas canastas deseadas por los consumidores, puede haber valores de p donde no sea posible efectuar las transacciones pretendidas, pues la demanda total no sería igual a la oferta total:

$$\sum_i X_i (p, p W_i) \neq \sum_i W_i$$

+ Definición

un vector de precios p^* es un equilibrio walrasiano si

$$\sum_i X_i(p^*, p^* W_i) \leq \sum_i W_i$$

o sea que $E(p^*) = \sum_i X_i(p^*, p^* W_i) - \sum_i W_i \leq 0$

es decir, no existe exceso de demanda positivo de ninguno de los bienes.

Análogamente al modelo neoclásico, el exceso de demanda estará en función de los precios y dado por

$$E(p) = \sum X_i(p, p W_i) - \sum_i W_i$$

Notar que E se considera independiente de W_i, pues las dotaciones iniciales permanecen constantes independientemente de los precios.

Como los precios son dados de antemano y afectan tanto a los bienes iniciales de los consumidores (W_i) como a los bienes demandados $(X_i(p, p W_i))$, el valor relativo de los precios es el que nos interesa, y no el absoluto. Es decir, cada precio absoluto p_i' lo podemos normalizar obteniendo un p_i tal que

$$p_i = \frac{p_i'}{\sum_{j=1}^{n} p_j'}$$

Tendremos así que la suma de los precios relativos (p_i) ha de ser siempre igual a 1. Por lo tanto, nos centraremos en vectores de precios pertenecientes al simplex unitario (n-1)-dimensional:

$$S^{n-1} = \left\{ p \in \mathbb{R}^n \;/\; p_i \geq 0 \;,\; \sum_{i}^{n} p_i = 1 \right\}$$

+ Proposición (Ley de Walras)

para cualquier precio $p \in S^{n-1}$ se cumple que $p \cdot E(p) = 0$, es decir, el valor del exceso de demanda es cero.

Demostración.-

$$\begin{aligned} p \cdot E(p) &= p \left(\sum X_i(p \,,\, p \cdot W_i) - \sum W_i \right) \\ &= \sum \left(p \cdot X_i(p \,,\, p \cdot W_i) - p \cdot W_i \right) \\ &= 0 \qquad \text{pues } p \cdot X_i = p \cdot W_i \quad \forall\, i \quad \checkmark \end{aligned}$$

En realidad, al suponer que cada consumidor se ajusta a su presupuesto de modo que el valor de su exceso de demanda ($p \cdot X_i - p \cdot W_i$) es nulo; la Ley de Walras (el valor de la suma de los excesos de demanda es nulo) resulta obvia.

+ Teorema

si la función exceso de demanda $E: S^{n-1} \to \mathbb{R}$ es continua y se cumple la Ley de Walras, entonces existe un equilibrio walrasiano.

Demostración.-

$$\sum_i p_i^* E_i(p^*) \sum_j \max(0, E_j(p^*)) = \sum_i E_i(p^*) \max(0, E_i(p^*))$$

$$\sum_j \max(0, E_j(p^*)) \sum_i p_i^* E_i(p^*) = \sum_i E_i(p^*) \max(0, E_i(p^*))$$

pero, por la Ley de Walras, $\sum_i p_i^* E_i(p^*) = 0$,

de donde ambos lados de la igualdad serán cero. En particular

$$\sum_i E_i(p^*) \max(0, E_i(p^*)) = 0 .$$

Cada término de esta suma es mayor o igual que cero, puesto que es cero ó es $(E_i(p^*))^2$. Pero si alguno fuera estrictamente mayor que cero, la suma también lo sería; por lo tanto, cada sumando es nulo, es decir,

$$E_i(p^*) \max(0, E_i(p^*)) = 0$$

$$\Rightarrow \quad E_i(p^*) \leq 0 \qquad i=1,\ldots,n$$

que es precisamente la definición de equilibrio walrasiano. ✓

Nótese que a diferencia del Modelo Neoclásico (pag. 84) en que se hace un ajuste de precios para lograr el equilibrio económico, el modelo de intercambio puro "ajusta" la repartición de bienes manteniendo los precios fijos. En ambos modelos, sin embargo, el teorema de Brouwer es igualmente útil para las demostraciones de existencia de los equilibrios respectivos.

Definamos la función $g : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ de la siguiente manera:

$$g_i(p) = \frac{p_i + \max(0, E_i(p))}{1 + \sum_{j=1}^{n} \max(0, E_j(p))} \qquad i=1,\ldots,n$$

g será continua por ser composición de continuas, y $g(p) \in S^{n-1}$ pues

$$g_i(p) \geq 0 \quad \forall i$$

$$\sum g_i(p) = 1$$

Notar la analogía entre esta función g y la usada en la demostración de juegos bimatriciales no cooperativos (pag. 64).

La explicación "económica" de esta función es que al existir exceso de demanda de algún bien ($E_i(p) > 0$) , aumentaría el precio $g_i(p)$ de dicho bien,

Por el teorema de punto fijo de Brouwer, existe un vector de precios p^* tal que $p^* = g(p^*)$, es decir,

$$p_i^* = g_i(p^*) = \frac{p_i^* + \max(0, E_i(p^*))}{1 + \sum_{j} \max(0, E_j(p^*))} \qquad i=1,\ldots,n$$

Queda por demostrar que p^* es precisamente el equilibrio walrasiano buscado.

De la anterior expresión se sigue que

$$p_i^* + p_i^* \sum_j \max(0, E_j(p^*)) = p_i^* + \max(0, E_i(p^*)) \qquad i=1,\ldots,n$$

$$E_i(p^*)\, p_i^* \sum_j \max(0, E_j(p^*)) = E_i(p^*) \max(0, E_i(p^*))$$

3.- Un Ejemplo de Intercambio Puro

Quedó demostrado en la sección anterior que si la función exceso de demanda E es continua y se cumple la ley de Walras, entonces los puntos fijos de

$$g_i(p) = \frac{p_i + \max(0, E_i(p))}{1 + \sum_{j=1}^{n} \max(0, E_j(p))}$$

serán precios en equilibrio.

Siguiendo el algoritmo de Scarf, tendremos que los primeros n precios, $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,\ldots,0)$, $\ldots$, $(0,0,\ldots,1)$, llevarán las etiquetas $1,2,\ldots,n$ respectivamente. Notar que una vez más los subíndices se han incrementado en una unidad, es decir, el subíndice correspondiente al lado (o vector) de primera coordenada nula es 1 y no 0 como se había manejado. La razón de este cambio es facilitar el manejo de índices al elaborar el diagrama de flujo del algoritmo. Los demás precios tendrán la etiqueta i tal que

$$g_i(p) \geq p_i \neq 0 \quad ;$$

la cual es una etiquetación propia pues todos estos precios serán puntos interiores del simplex y cualquier índice i podría ser la etiqueta. Para evitar ambigüedades, la etiqueta será el menor índice que cumpla la mencionada desigualdad.

Para proceder con el algoritmo de Scarf, necesitamos definir las funciones exceso de demanda individuales $E_i^j(p)$, que serán el incremento neto

del bien i deseado por el consumidor ℓ al precio p. Por ejemplo, si $E_i^\ell(p) < 0$, el ℓ-ésimo agente económico desea disminuír la cantidad del bien i que posee actualmente para poder obtener los bienes cuyo exceso de demanda es positivo ($E_j^\ell(p) > 0$). (Recordar que el sistema funciona en base a intercambios).

Las siguientes funciones exceso de demanda son un ejemplo de las muchas que han sido descritas en la literatura económica:

$$E_i^\ell(p) = \frac{a_{\ell i} \sum_i W_{\ell i} p_i}{p_i^{b_i} \sum_j a_{\ell j} p_j^{1-b_j}} - W_{\ell i}$$

donde $W = (W_{\ell j})_{k \times n}$ y $A = (a_{\ell j})_{k \times n}$ son dos matrices estrictamente positivas con k renglones (uno por cada consumidor) y n columnas (una por cada bien). Por otro lado, $(b_1, \ldots, b_k)$ es un vector estrictamente positivo.

Al no ser un análisis económico el objeto del presente trabajo, baste decir que estos excesos de demanda fueron tomados de un modelo de intercambio puro en el que el consumidor ℓ posee inicialmente $W_{\ell j}$ unidades del bien j. Notar que al exigir a $W_{\ell j}$ ser estrictamente positivo, una condición más está implícita: todos los consumidores poseen inicialmente "algo" de cada uno de los bienes.

Consideremos en nuestro ejemplo 5 bienes y 3 consumidores. Los parámetros de las funciones exceso de demanda son:

$$W = \begin{pmatrix} 1.0 & 3.0 & 10.0 & 1.0 & 2.0 \\ 0.1 & 2.0 & 20.0 & 5.0 & 6.0 \\ 1.5 & 5.0 & 15.0 & 5.0 & 10.8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.8 & 1.5 & 1.0 \\ 3.0 & 0.5 & 1.2 & 1.6 & 1.8 \\ 0.9 & 0.8 & 2.0 & 1.0 & 1.8 \end{pmatrix}$$

$$b^t = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.3 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

El conjunto de vectores P que consideraremos es

$$\left\{ \frac{k_1}{160}, \frac{k_2}{160}, \ldots, \frac{k_5}{160} \;/\; k_i > 0 \;,\; \sum_{i=1}^{5} k_i = 160 \right\}$$

P tendrá alrededor de 26 millones de elementos. Sin embargo, esta forma de considerar P evita que, al reemplazar un vector de un conjunto primitivo, se necesite buscar entre todos los elementos restantes de P el vector que cumpla las condiciones de la regla de reemplazo (página 39) ; debido a que dicho vector se puede generar directamente en cada paso.

Un problema surge aquí: hay elementos de P que tienen la misma i-ésima coordenada, lo cual viola la suposición de no degeneración hecha en la página 33 del capítulo II. Sin embargo, para evitar este problema, se puede construír en cada paso del algoritmo una matriz

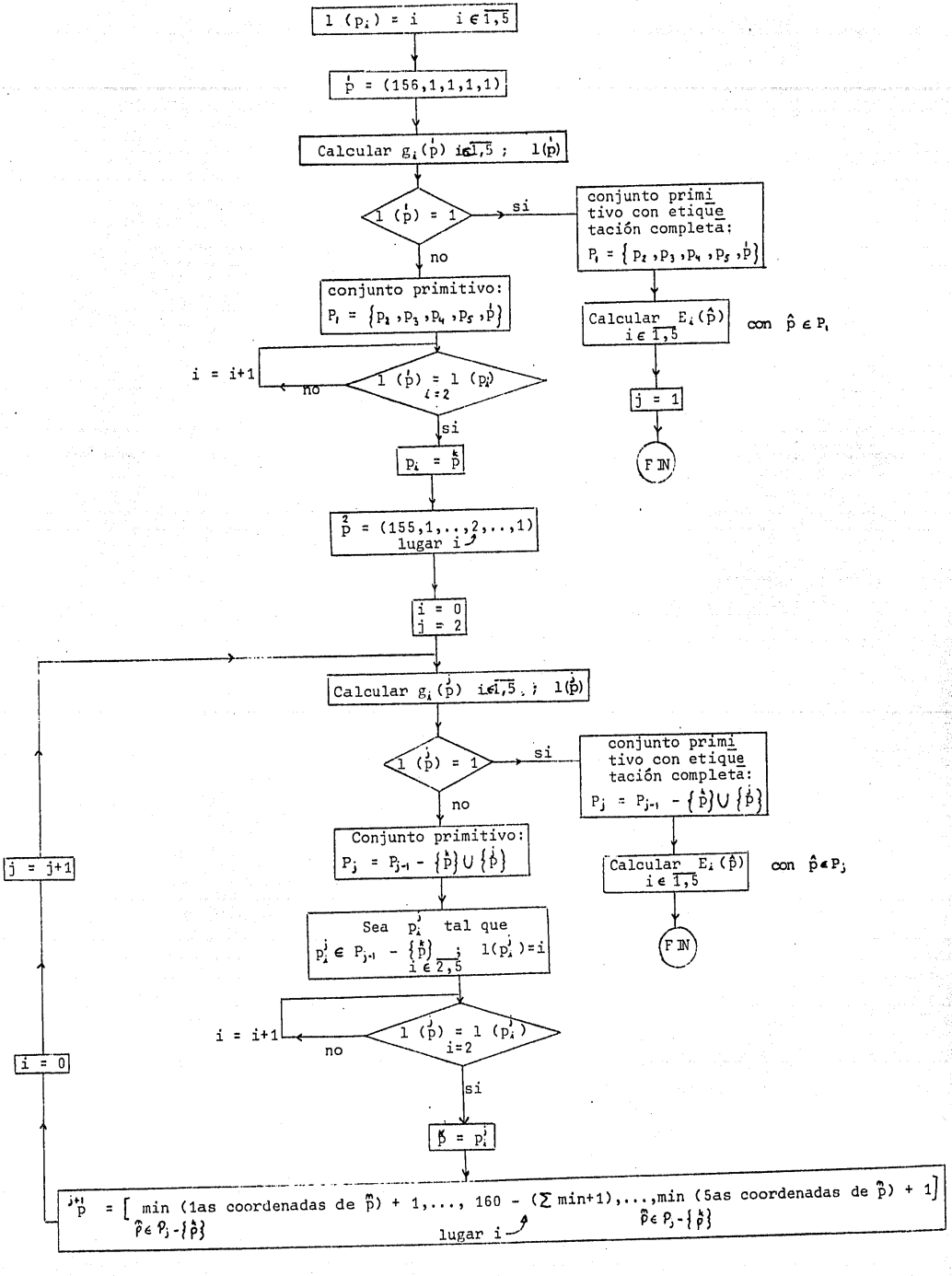
$$\begin{pmatrix} 0 & 2{,}000 & \cdots & 5{,}000 & p_1^i & \cdots & p_4^1 \\ 1{,}000 & 0 & \cdots & 5{,}000 & \cdot & & \cdot \\ 1{,}000 & 2{,}000 & \cdots & 5{,}000 & \cdot & & \cdot \\ 1{,}000 & 2{,}000 & \cdots & 5{,}000 & \cdot & & \cdot \\ 1{,}000 & 2{,}000 & \cdots & 0 & p_5^i & \cdots & p_5^1 \end{pmatrix}$$

formada por los primeros 5 vectores de P (los lados del simplex de acuerdo a la definición extendida de conjunto primitivo -página 36-) y todos los demás vectores que han formado parte de un conjunto primitivo, en el orden en que fueron entrando. Entonces, si dos columnas de la matriz tienen el mismo renglón i-ésimo,el primero se considerará mayor; y si un vector de la matriz tiene el mismo renglón i que otro que no está en la matriz, el primero de ellos se considerará mayor. Puede demostrarse que este procedimiento para resolver empates también conduce a un algoritmo finito.

De manera igual a la que se procedió con los subíndices de los vectores, las coordenadas de p son representadas a partir de p^1 , o sea, $p = (p^1, p^2, p^3, p^4, p^5)$, y no $p = (p^0, p^1, p^2, p^3, p^4)$ como se había hecho. Estos cambios simplificarían el manejo de índices para progra-

mar el algoritmo.

A continuación se presenta el diagrama de flujo del algoritmo, diagrama que de hecho es el programa a través del cual se resolvería nuestro ejemplo.


l (p_i) = i i ∈ 1,5
p¹ = (156,1,1,1,1)
Calcular g_i(p¹) i∈1,5 ; l(p¹)
l (p¹) = 1
si
no
conjunto primitivo con etiquetación completa:
P_1 = { p_2 , p_3 , p_4 , p_5 , p¹ }
conjunto primitivo:
P_1 = { p_1 , p_3 , p_4 , p_5 , p¹ }
Calcular E_i(p̂) i∈1,5
con p̂ ∈ P_1
j = 1
FIN
i = i+1
l (p¹) = l (p_i) i=2
p_1 = p¹
p² = (155,1,..,2,..,1) lugar i
i = 0
j = 2
Calcular g_i(p^j) i∈1,5 ; l(p^j)
l (p^j) = 1
si
no
conjunto primitivo con etiquetación completa:
P_j = P_j-1 - { p^k } ∪ { p^j }
Conjunto primitivo:
P_j = P_j-1 - { p^k } ∪ { p^j }
Calcular E_i(p̂) i∈1,5
con p̂ ∉ P_j
FIN
j = j+1
Sea p_i^j tal que p_i^j ∈ P_j-1 - { p^k } i∈2,5 ; l(p_i^j) = i
i = i+1
l (p^j) = l (p_i^j) i=2
i = 0
p^k = p_i^j
p^j+1 = [min (1as coordenadas de p̂) + 1,..., 160 - (Σ min+1),...,min (5as coordenadas de p̂) + 1]
p̂∈P_j-{p^k} p̂∈P_j-{p^k}
lugar i

Finalizando el algoritmo, el subsimplex generado por los precios del conjunto primitivo con etiquetación completa contendrá precios que aproximan a un equilibrio: cualquier elemento $\hat{p}$ de este subsimplex sería una aproximación (demostrado en las páginas 53 y 54). Las funciones exceso de demanda ($E_i(\hat{p})$) serán las que corresponden a este "casi" equilibrio. Por último, el índice final j nos dirá el número de reemplazos que debieron efectuarse para encontrar un conjunto primitivo con etiquetación completa.

Señala Scarf que el algoritmo, en una IBM 7094 , termina después de 158 iteraciones (j=158) con el siguiente conjunto primitivo

$$\begin{array}{ccccc} \overset{j_0}{p} & \overset{j_1}{p} & \overset{j_2}{p} & \overset{j_3}{p} & \overset{j_4}{p} \\ \left[\begin{array}{ccccc} \frac{101}{160} & \frac{102}{160} & \frac{103}{160} & \frac{102}{160} & \frac{103}{160} \\ \frac{13}{160} & \frac{12}{160} & \frac{13}{160} & \frac{13}{160} & \frac{12}{160} \\ \frac{6}{160} & \frac{6}{160} & \frac{5}{160} & \frac{6}{160} & \frac{6}{160} \\ \frac{25}{160} & \frac{25}{160} & \frac{25}{160} & \frac{24}{160} & \frac{25}{160} \\ \frac{15}{160} & \frac{15}{160} & \frac{14}{160} & \frac{15}{160} & \frac{14}{160} \end{array}\right] \end{array}$$

Un elemento de este conjunto primitivo sería

$$\hat{p} = \left(\frac{104.4}{160} , \frac{12.3}{160} , \frac{5.2}{160} , \frac{24}{160} , \frac{14.1}{160} \right) \quad ;$$

y las funciones exceso de demanda correspondientes son:

$$E(\hat{p}) = (0.1 , 0.4 , 2.3 , -1.8 , 0.9)$$

Aunque sólo $E_4(p) \leq 0$, los excesos de demanda positivos representan una pequeña fracción del total de la oferta (suma por columnas de W), y ésto es importante pues prácticamente todos los bienes se reparten "satisfactoriamente" entre los consumidores.

B i b l i o g r a f í a

Intrilligator M.
MATHEMATICAL OPTIMIZATION AND ECONOMIC THEORY
Prentice Hall

Scarf Herbert
THE APROXIMATION OF FIXED POINTS OF A CONTINUOUS MAPPING
SIAM Journal Applied Mathematics, 15, 1967

Scarf Herbert,Terje Hansen
THE COMPUTATION OF ECONOMIC EQUILIBRIA
Yale University Press
New Haven and London,1973

Varian H.R.
ANALISIS MICROECONOMICO
Bosch Casa Editorial S.A. , 1980

Conclusiones

Como se mencionó en un principio los objetivos fundamentales de este trabajo fueron:

1) Presentar un estudio comprensible y formal del teorema de punto fijo de Brouwer en general, así como un desarrollo del algoritmo de Scarf.

2) Mencionar y ejemplificar algunas de las aplicaciones que el Teorema de Brouwer y el algoritmo de Scarf tienen en diversos campos de las matemáticas.

La primera conclusión que obtuve, tratando de alcanzar estos objetivos, fue que un resultado aparentemente simple (el Teorema de Brouwer) en realidad no lo es tanto. Prácticamente todo el primer capítulo en conjunto se refiere a su demostración; habiéndose tenido que recurrir a conceptos y resultados de diversas áreas como el Algebra Lineal y el Análisis Matemático. Buscando formas de demostración más cortas o directas, me encontré con que eran menos comprensibles a mi modo de ver, por lo que decidí mantener la que se presenta.

Una vez demostrado el teorema, se estudia el algoritmo de Scarf. Dos son los aspectos de este algoritmo que más me llamaron la atención: lo ingenioso y "entretenido", y las ventajas que presenta para manejarlo por computadora. Habiéndolo comentado con alumnos de nivel medio superior, a

pesar de no entender ellos la base teórica, lo encontraban muy ingenioso y muy "atractivo" para utilizarlo. Una vez pasada la teoría formal del primer capítulo, esta siguiente parte se siente como una especie de juego matemático. Además, la factibilidad de programar este algoritmo en lenguajes computacionales lo hacen práctico y útil. Se presentaron resultados obtenidos por Scarf, sin ahondar mayormente en el campo computacional.

Haciendo una revisión bibliográfica, encontré varias aplicaciones del teorema de punto fijo y del algoritmo de Scarf, por lo que decidí estudiar aquellas que me llamaron la atención particularmente: Teoría de Juegos, Programación No-lineal y Economía Matemática. En todas ellas se mantuvo siempre el aspecto teórico formal, incluyendo ejemplos en los casos en que lo consideré conveniente y aclaratorio.

En términos generales, podríamos decir que el Teorema de Brouwer se aplicó para demostraciones de existencia, ya sea de un punto en equilibrio de un juego n-personal, ó de un equilibrio económico en un modelo dado. Mientras que el Algoritmo de Scarf, a través de una búsqueda sistemática, nos lleva a la obtención de resultados concretos como el vector solución de un problema de programación convexa, ó un equilibrio económico

en el ejemplo de Intercambio Puro.

Queda la puerta abierta a posibles extensiones de esta investigación: ¿qué otras demostraciones existen para el Teorema de Brouwer? ; ¿qué tan eficiente es el algoritmo de Scarf comparado con otros propuestos para obtener aproximaciones a puntos fijos? ; ¿en qué otros campos de la matemática aplicada tendría cabida el teorema de punto fijo ó el algoritmo estudiado? ; ¿cuáles serían las limitaciones de "nuestro" algoritmo al aplicarlo a un modelo económico que considerara millones de agentes (productores-consumidores) y miles de bienes de consumo? . . .

Como se ve, muchas son las interrogantes sin responder. Espero, sin embargo, haber alcanzado los objetivos propuestos y que este trabajo pueda para alguien, algún día, ser de utilidad.