Lej. 93

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

ANALISIS MODAL Y RESPUESTA DINAMICA DE ROTORES FLEXIBLES

T E S I S

Que para obtener el Título de
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

p r e s e n t a

PABLO RAFAEL REYES GONZALEZ

Director: DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO

México, D. F. 1988

CONTENIDO

NOMENCLATURA

y_i	desplazamiento lateral en la estación i
θ_i	rotación angular en la estación i
M_i	momento flexionante en la estación i
V_i	fuerza cortante en la estación i
I, D	superíndices para identificar una variable a la izquierda o derecha de una estación
L	longitud de un segmento de flecha definido entre dos estaciones
E	módulo elástico del material de la flecha.
I	momento de inercia de la sección transversal de la flecha.
m	masa concentrada en una estación del sistema.
ω	frecuencia natural de oscilación.
$\{ z \}_i$	vector de estado en la estación i con las variables $-y, \theta, M, V$
$[T]$	matriz de transferencia entre dos estaciones.
k	constante de rigidez de un soporte elástico
$[K]$	matriz de rigidez del sistema.
$[K^*]$	matriz de rigidez reducida.
$[m]$	matriz de masa diagonal.
$\{ x \}$	vector de desplazamientos o amplitudes de vibración
$[\Phi]$	matriz modal
$\{ \phi \}$	vector modal
$\{ F(t) \}$	vector de fuerzas de exitación del sistema.
e	excentricidad asociada a cada masa.
Ω	velocidad angular de operación

RESUMEN

En éste trabajo se presenta un programa de computadora para el cálculo de velocidades criticas y respuesta dinámica para un sistema rotatorio simple.
La formulación del problema comprende únicamente vibraciones flexionantes en la flecha. Para el cálculo de las caracteristicas modales del sistema se emplean matrices de tranferencia para el cálculo de los vectores de estado en cada estación.
Se calculan únicamente las velocidades criticas que están dentro del rango de velocidades de interés. La respuesta dinámica se calcula mediante el método de superposición modal, considerando como fuente de exitación el desbalanceo de los elementos ligados a la flecha.

I INTRODUCCION

Toda máquina que transforma energía en alguna de sus formas generalmente tiene elementos rotatorios como partes fundamentales en su funcionamiento. La velocidad de operación de éstas máquinas varia de acuerdo con su aplicación, pero es frecuente encontrar sistemas rotatorios que operan a velocidades bastante altas para satisfacer las necesidades de la industria moderna, por lo cual es necesario contar con herramientas que permitan realizar la simulación del sistema de manera eficiente para lograr diseños mas racionales, así como también realizar estudios de diagnóstico y prevensión.

En el análisis de maquinaria rotatoria tres aspectos generales son de gran importancia; 1).- el aspecto elastodinámico, el cual comprende la relación de propiedades elásticas e inerciales de los componentes del sistema, 2).- el aspecto hidrodinámico, que comprende los efectos de la lubricación en las chumaceras y su infleuencia en la dinámica del sistema y, 3).- la distribución de esfuerzos en los elementos giratorios debidos a las altas velocidades angulares de operación.

En el aspecto elastodinámico las áreas básicas de interés son por ejemplo la determinación de las velocidades críticas, la respuesta dinámica con respecto a la velocidad de operación (ésto se refiere a la amplitud de las vibraciones como función de la velocidad de operación), modos de vibración efectos giroscópicos, etc.

Un sistema rotatorio típico se muestra en la figura (1.1), en el cual se distinguen sus elementos básicos como lo son : la flecha, discos, chumaceras y soportes. Algunos ejemplos de sistemas rotatorios son : el rotor de un motor eléctrico, el rotor de una turbina de vapor o gas, turbogeneradores, el cigueñal de un motor de combustión interna y otros sistemas que también trasnmiten potencia através de del movimiento rotatorio de la flecha.

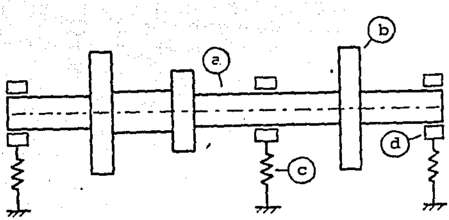


Fig. 1.1 Modelo de un sistema rotatorio.
a) flecha; b) disco; c) soporte
d) chumacera.

Un problema fundamental en el diseño de maquinaria rotatoria lo constituyen las vibraciones, aunque es imposible de eleminar, si se puede reducir y además pueden establecerse rangos de velocidad en los que se sabe no causará efectos graves. La causa principal de vibración en equipo rotatorio es el desbalanceo de las partes giratorias, que produce una fuerza de exitación cuya frecuencia es igual a la velocidad de operación de la máquina. La vibración puede ser producida por otras fuerzas, por ejemplo fuerzas eléctricas, magnéticas, fuerzas que provienen de equipos y estructuras adyacentes, fuerzas producidas por la turbulencia del fluido de trabajo, etc. Cuando la frecuencia de estas fuerzas coincide con alguna de las frecuencias naturales del sistema se presenta un fenómeno conocido como resonancia que físicamente se manifiesta como un aumento en las amplitudes de vibración que causa graves daños a la máquina así como a la estructura en que se encuentra montada. El exceso de vibración generalmente es causa de desgaste prematuro en algunos componentes como lo son chumaceras, cojinetes, coples, engranes, etc., además del ruido y los movimientos que crean un ambiente de incomodidad e inseguridad en el personal que labora cerca de estos equipos.

Se han desarrollado varios métodos para el análisis de éste tipo de sistemas, Holzer [1][1] propuso un método para el cálculo de velocidades críticas en sistemas sujetos a vibraciones torsionales. Myklestad [2], realizó una extensión del método de Holzer al análisis de vibraciones en vigas y posteriormente Prohl [3] lo aplicó al cálculo de velocidades críticas en ejes rotatorios.

Trabajos más recientes consisten en modelos más elaborados que los anteriores, incluyendo más grados de libertad en los segmentos para el modelado de la flecha del rotor, así como otros efectos como es el de la influencia de las chumaceras chumaceras lubricadas hidrodinámicamente. Eshleman [4], realizó una recopilación de los autores que han contribuido de manera significante en area de velocidades críticas y respuesta dinámica de rotores flexibles.

En general todos las trabajos mencionados anteriormente utilizan una formulación basada en matrices de transferencia, que conceptualmente es similar al método propuesto por Holzer en 1921, que consiste en un proceso iterativo que permite el análisis de sistemas muy complejos de manera relativamente sencilla.

---

1 Números entre parentesis cuadrados indican referencias al final de éste trabajo.

II MODELADO DE UN SISTEMA ROTATORIO

Para establecer el modelo matematico del sistema mostrado en la figura (1.1), es necesario partir de ciertas hipótesis que ayudaran a simplificar el análisis de acuerdo al objetivo que se persigue en éste trabajo, y básicamente se pueden enumerar como las siguientes :

1.- Solamente se consideran las vibraciones flexionantes que ocurren en un plano, despreciando las vibraciones torsionales y las que ocurren en sentido axial.

2.- Se desprecia todo tipo de amortiguamiento en los elementos del sistema.

3.- Los discos y otros elementos que se encuentran empotrados a la flecha se consideran como masas concentradas en un punto, es decir se desprecia su tamaño y por consiguiente se desprecian los efectos que produce la inercia rotatoria como son los momentos giroscópicos.

4.- La deformación de los segmentos de flecha es ocacionada solamente por los momentos flexionantes, despreciando totalmente la deformación producida por la fuerza cortante.

En base a las suposiciones mencionadas, el sistema se discretiza en segmentos de flecha definidos por dos nodos localizados en sus extremos, a estos nodos se les da el nombre de estaciones, y se úbican en donde existe un disco, una chumacera o un cambio en la sección transversal de la flecha.

Los segmentos de flecha se modelan matemáticamente como elementos sin masa y de sección transversal constante con una masa concentrada en su extremo derecho, figura (2.1)

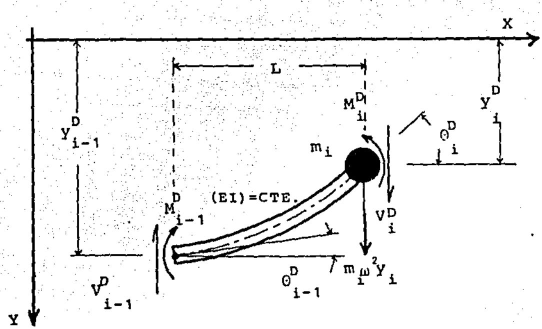


Fig. 2.1 Segmento de flecha con una masa concentrada en un extremo.

En la figura anterior se muestran las fuerzas y los desplazamientos que actuan en las estaciones que definen al elemento.

En éste trabajo se utiliza la sistematización hecha por Pestel y Leckie [5] al aplicar las matrices de transferencia al análisis de vigas que en esencia es el método de Holzer-Prohl-Myklestad.

En este trabajo el análisis se hace utilizando la técnica de matriz de transferencia o también conocido como método de Prohl-Myklestad, en el cual se emplea como elemento fundamental el mostrado en la figura (2.1), cuya representación matricial está dada mediante la siguiente expresión :

$$\begin{Bmatrix} -y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}^D_i = \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & L \\ m\omega^2 & m\omega^2 L & \frac{m\omega^2 L^2}{2EI} & \frac{m\omega^2 L^3}{6EI} + 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}^D_{i-1} \quad (2.1)$$

En la ecuación (2.1) se relacionan los desplazamientos y fuerzas que actuan en la estación (i) con las correspondientes en la estación (i-1), tomadas del lado derecho. A las componentes de desplazamientos y fuerzas en cada estación se les conoce como variables de estado, y al conjunto de estas variables se les conoce como vector de estado, y puede calcularse en función del vector de estado de la estación anterior mediante una matriz de transferencia .

La obtensión de la matriz de transferencia , ecuacón (2.1) se realiza tomando el segmento en equilibrio y evaluando las fuerzas y desplazamientos en un extremo en función de las fuerzas y desplazamientos en el otro extremo con la ayuda de coeficientes de flexibilidad.

Utilizando el segmento compuesto de la figura (2.1) es posible modelar todo el sistema, con excepción de los soportes, ya que la masa concentrada puede ser tanto la masa parcial del segmento de flecha, o bién la masa de un disco o cualquier otro elemento que se encuentre empotrado, ya que se esta despreciando el tamaño de dichos elementos.

El modelado de las chumaceras y los soportes se hace tomando una rigidez equivalente de la pelicula de aceite lubricante más la del soporte, con ésto se están despreciando los efectos hidrodinámicos de las chumaceras, así como el amortiguamiento en los soportes. En la figura (2.2) se muestra el diagrama de fuerzas que actúan en el soporte, el momento flexionante, la deflexión y el ángulo de giro son continuos, mientras que la fuerza cortante no lo es debido a la presencia del soporte elástico que tiene una deflexión y_i que produce una fuerza de reacción $k_i y_i$, donde k_i es la rigidez del soporte .
Los elementos del vector de estado del lado derecho están relacionados con los del lado izquierdo del resorte como

$$y_i^D = y_i^I \qquad \theta_i^D = \theta_i^I \qquad M_i^D = M_i^I \qquad V_i^D = V_i^I + k_i y_i$$

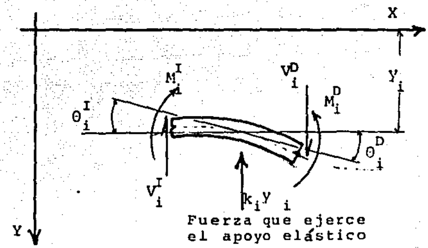


Fig. 2.2 Fuerzas y desplazamientos de la flecha en un punto de apoyo.

que expresandolos en notación matricial se tiene

$$\begin{Bmatrix} -y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^I \qquad (2.2)$$

Hasta el momento se ha descrito la forma que en este trabajo se modelará un sistema rotatorio, pasando de un modelo como el de la figura (1.1) a uno aún mas simple similar al mostrado en la figura (2.3).

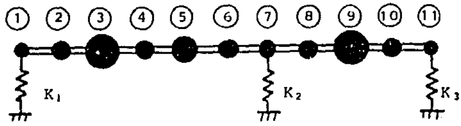


Fig. 2.3 Modelo simplificado de un sistema rotatorio consiste de masas concentradas, segmentos de flecha sin masa y resortes.

Como se observa, es posible analizar sistemas en los que la flecha puede ser de sección variable, discretizandola en segmentos pequeños cuya masa se divide en dos partes y se concentra en las estaciones de sus extremos, y en los lugares en donde existe un disco o cualquier otro elemento que tenga masa. simplemente se le suma a la ya existente en la estación correspondiente.

III EXTRACCION MODAL

3.1 Método de Prohl-Myklestad.

Holzer [1] desarrolló un método para calcular las frecuencias naturales de sistemas sujetos a vibraciones torsionales, éste método consiste básicamente en asumir una frecuencia y un ángulo de giro unitario y calcular através de todo el sistema el par y el desplazamiento angular hasta llegar al extremo opuesto, éste proceso se repite hasta que un valor de frecuencia cumple con la condición de par y desplazamiento impuesto en cada uno de los extremos, entonces éste valor corresponderá a una frecuencia natural del sistema.

Myklestad [2] extendió éste método al análisis de vigas y posteriormente Prohl [3] lo aplicó para sistemas rotatorios.
Para describir el procedimiento de análisis supongase que se tiene el modelo simplificado de la figura (3.1), que consiste de de siete estaciones y tres apoyos.

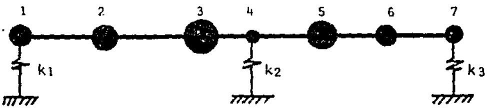


FIG. (3.1) Modelo simplificado de un sistema rotatorio con tres apoyos elásticos.

En este sistema se evalúa estación por estación el vector de estado utilizando la matriz de transferencia para un elemento simple, ecuación (2.1), que al aplicarla en la estación (1) se simplifica al no haber un segmento de flecha al lado izquierdo, y queda de la forma siguiente

$$\begin{Bmatrix} -y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_1^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_1^I \qquad (3.1a)$$

Que en notación compacta se expresa como

$$\{ z \}_1^D = [T]_1 \{ z \}_1^I \qquad (3.1b)$$

ahora, dado que en la estación (1) se encuentra un soporte, entonces el vector de estado será

$$\{ z \}_1^D = [k]_1 [T]_1 \{ z \}_1^I \qquad (3.1c)$$

y en las estaciones 2 a 4 los vectores de estado son

$$\begin{aligned} \{ z \}_2 &= [T]_2 \{ z \}_1 \\ \{ z \}_3 &= [T]_3 \{ z \}_2 \\ \{ z \}_4^I &= [T]_4 \{ z \}_3 \\ \{ z \}_4^D &= [T]_2 \{ z \}_4^I \end{aligned} \qquad (3.2)$$

o bién

$$\{ z \}_4^D = [k]_2 [T]_4 [T]_3 [T]_2 [k]_1 [T]_1 \{ z \}_1^I \qquad (3.3)$$

de manera similar, pasando hasta el extremo derecho del sistema, se tiene

$$\langle z \rangle_7^D = [k]_8 [T]_7 \ldots [T]_2 [k]_1 [T]_1 \langle z \rangle_1^I \qquad (3.4)$$

si se define la matriz [A] como el producto de

$$[k]_8 [T]_7 \ldots [T]_2 [k]_1 [T]_1 = [A]$$

finalmente se puede escribir que

$$\langle z \rangle_7 = [A] \langle z \rangle_1^I \qquad (3.5)$$

En la ecuación (3.5) se tiene el vector de estado del extremo derecho relacionado con el vector de estado del lado izquierdo mediante la matriz de transferencia global [A], en este caso, en ambos extremos se conoce M = 0 , V = 0 , que vienen a ser las condiciones de frontera en los extremos.

En el caso general es posible tener diferentes condiciones en los extremos del sistema, en la tabla (3.1) se muestran algunos tipos de extremos y las variables que intervienen en el determinante de frecuencia.
Al aplicar las condiciones de los extremos, a la ecuación (3.5), queda un sistema de ecuaciones lineal homogéneo con dos incognitas, el cual tendrá solución diferente de la trivial si se cumple que el determinante de la matriz de coeficientes sea cero, y ésta es precisamente la condición ya que al ser nulo el determinante, se garantiza que cumple con las condiciones de los extremos, es decir, que del determinante se obtiene un polinomio de grado (n) en el que las raíces corresponden a las

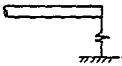
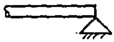
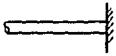
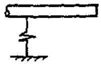
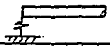
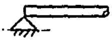
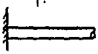
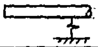
	EXTREMO DERECHO			
EXTREMO IZQUIERDO	FLEXIBLE  $V_n=0$ $M_n=0$	SIMPLE  $Y_n=0$ $M_n=0$	EMPOTRADO  $Y_n=0$ $\theta_n=0$	LIBRE  $V_n=0$ $M_n=0$
FLEXIBLE $V_1=0$ $M_1=0$ 	$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$
SIMPLE $Y_1=0$ $M_1=0$ 	$\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$
EMPOTRADO $Y_1=0$ $\theta_1=0$ 	$\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$
LIBRE $V_1=0$ $M_1=0$ 	$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$

TABLA 3.1

frecuencias naturales del sistema.

El cálculo de las frecuencias se hace proponiendo un valor de velocidad angular omega, con el que se calcula el valor del determinante, el proceso se repite para diferentes valores de velocidad, hasta cubrir el rango deseado. La velocidad que proporcione un valor de determinante cero, entonces corresponderá a una frecuencia natural del sistema.

Si se traza en una gráfica el valor del determinante para cada incremento de velocidad, se observa cuando un valor de frecuencia proporciona el determinante cero. Figura (3.2)

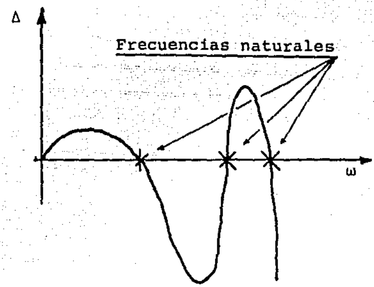


Fig. 3.2

Numericamente es casi imposible que al calcular el valor del determinante de frecuencia para los incrementos de velocidad preestablecidos se obtengan directamente las frecuencias, por lo que se recurre a un proceso de interpolación el cual se describe con detalle en la descripción del algoritmo computacional.

3.2 DIFICULTADES DEL METODO DE PROHL-MYKLESTAD.

De las dificultades que presenta éste método, no puede decirse que sean propias, ya que todo método numérico las tiene y por lo tanto no puede juzgarse a primera vista si es bueno o es malo comparandolo con otros métodos numéricos. A continuación se mencionan algunas de las dificultades que se tienen al hacer el análisis, el orden en que aparecen no significa que sean las más importantes.

Para encontrar las frecuencias naturales en un rango de velocidad especifico, se parte de un valor inicial de velocidad el cual se va incrementando, pero no puede realizarse un número de incrementos demasiado grande, ya que ésto representa un tiempo excesivo en el cálculo. Lo que se hace es dar un número relativamente pequeño de incrementos, y ésto se hace a juicio del analista, con lo que se obtiene graficamente un resultado similar al de la figura (3.2), entonces el primer problema que se presenta es el de encontrar el valor de la frecuencia que haga el determinante nulo mediante algun método de interpolación.

Otro problema de gran importancia es el error por truncamiento que se acarrea al evaluar el vector de estado en cada estación, ya que ésto se logra al multiplicar sucesivamente las matrices de transferencia, acresentandose cuando se tiene un número grande de estaciones.

Otra dificultad semejante a la anterior, que de hecho está muy relacionada con el orden del sistema, es cuando se tienen soportes elásticos cuya rigidez es muy alta comparada con la rigidez a la flexión de los elementos. Esto influye de tal manera que si se multiplica un número muy grande por uno que en téoria deberia ser cero, se introduce un error ya considerable que aumenta aún mas si se tratan de encontrar los modos de vibración más altos del sistema.

Se han desarrollado métodos para reducir el error por redondeo, como por ejemplo la segmentación [5], en el que una estructura grande se divide en segmentos cortos, utilizando un esquema de integración ya sea análitico o númerico para relacionar las variables de estado en cada extremo del segmento corto. Las soluciones para cada segmento corto se colocan en una super matriz y el sistema de ecuaciones resultante se resuelve utilizando el método de eliminación de Gauss.

El método de las matrices delta [5] se utiliza para reducir el error por redondeo en estructuras grandes, en el cálculo de los valores característicos, sin embargo para el cálculo de los modos de vibración no es muy recomendable su uso.

3.3 TRATAMIENTO DE SOPORTES INTERMEDIOS

En ésta sección se mostrara la forma en que se trata la dificultad numérica que se presenta al tener apoyos con una rigidez bastante alta. El tratamiento consiste en considerar los puntos de apoyo totalmente rigidos, es decir, que el desplazamiento en los soportes es cero.
El proceso es relativamente sencillo, la única diferencia que existe comparado con el método de la sección anterior es que ahora se tienen como incognitas las reacciones de los apoyos, así que se tendra una incognita más en los vectores de estado. Debido al modelo del soporte rigido es posible eliminar una variable, entonces al final del sistema se tienen dos variables en el vector de estado. Para el cálculo de los modos de vibración el vector de estado va cambiando una variable a medida que pasa por un apoyo intermedio.

Para ilustrar lo anterior supongase que se tiene un sistema como el mostrado en la figura (3.3)

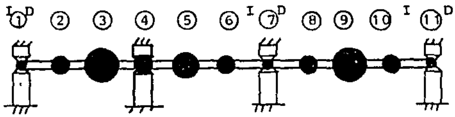


Fig. 3.3 Modelo simplificado de un sistema rotatorio con soportes rigidos.

el sistema de la figura (3.3) consta de 11 estaciones, 10 segmentos de flecha y cuatro soportes que se consideran rigidos, para el cual se tiene que sus matrices de transferencia entre soportes son :

$$
\begin{aligned}
[\,A\,] &= [\,T\,]_4\,[\,T\,]_3\,[\,T\,]_2\,[\,T\,]_1 \\
[\,B\,] &= [\,T\,]_7\,[\,T\,]_6\,[\,T\,]_5 \qquad\qquad (3.6) \\
[\,C\,] &= [\,T\,]_{11}\,[\,T\,]_{10}\,[\,T\,]_9\,[\,T\,]_8
\end{aligned}
$$

para mayor claridad en la exposición de éste método, la reducción de las matrices de transferencia no se hará desde la primera estación sino que se hará hasta la estación en que se encuentre el primer soporte intermedio.

El vector de estado en la estación (4-I) es

$$\{\,z\,\}_4^I = [\,A\,]\,\{\,z\,\}_1^I \qquad (3.7a)$$

expresando la ecuación (3.7a) en forma extendida, se tiene

$$\begin{Bmatrix} -y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_4^I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_1^I \qquad (3.7b)$$

en la estación uno, por ser la del extremo se pueden aplicar las condiciones de frontera con lo que se reduce la matriz [A], ésto es, si en el extremo izquierdo se tiene un apoyo simple, la condicion de frontera en éste caso es $y_1 = 0$, $M_1 = 0$, con lo que la ecuación (3.7b) se transforma en

$$\begin{Bmatrix} -y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_4^I = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ V \end{Bmatrix}_1 \qquad (3.7c)$$

Ahora el problema que se presenta es pasar al lado derecho de la estación (4), ésto se facilita si se toman las consideraciones siguientes en el apoyo cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura (3.4).

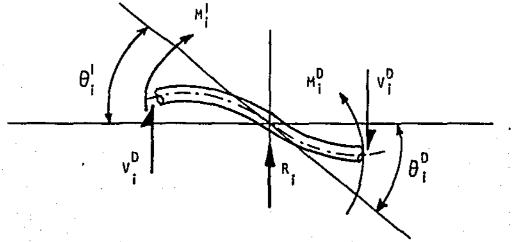


FIG. (3.4) Diagrama de cuerpo libre de la sección de una flecha sobre un apoyo rígido.

En el apoyo rígido de la figura (3.4) no existe deflexión alguna por lo que $y_i^D = y_i^I = 0$, por otro lado se supone que el momento flexionante y la rotación son continuos através del segmento de flecha, ésto es, $M_i^D = M_i^I$ y $\theta_i^D = \theta_i^I$, pero en la fuerza cortante existe una discontinuidad producida por la reacción R_i ,siendo la suma $V_i^D = V_i^I + R_i$.

Como $y_i^D = y_i^I = 0$, de la ecuacion (3.7c) se puede escribir

$$a_{12}\,\theta_1 + a_{14}\,V_1 = 0$$

de donde

$$V_1 = -\frac{a_{12}}{a_{14}}\,\theta_1$$

que sustituyendo en la ecuación (3.7.c), se transforma en

$$\begin{Bmatrix} -y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_4^I = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \left\{ \theta \right\}_1 \qquad (3.8a)$$

donde :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= -\frac{a_{12}}{a_{14}} a_{24} + a_{22} \\ \alpha_3 &= -\frac{a_{12}}{a_{14}} a_{34} + a_{32} \\ \alpha_4 &= -\frac{a_{12}}{a_{14}} a_{44} + a_{42} \end{aligned} \qquad (3.8b)$$

ahora ya que se ha reducido la matriz y eliminado una variable, se incluye la reacción como una nueva incognita, quedando el vector al lado derecho de la estación (4) de la siguiente manera

$$\begin{Bmatrix} -y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_4^D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 \\ \alpha_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ R_1 \end{Bmatrix} \qquad (3.8c)$$

para los siguientes soportes el tratamiento es similar, se tiene que el vector de estado en la estación (7) es

$$\{ z \}_7^I = [B] \{ z \}_4^D \qquad (3.8d)$$

desarrollando ésta última expresión y expresandola como sumatorias, se tiene donde

$$\beta_1 = 0$$

$$\beta_2 = -\frac{\sum_{i=1}^{4} b_{2i}\alpha_i}{b_{14}} b_{24} + \sum_{i=1}^{4} b_{2i}\alpha_i \qquad (3.11b)$$

$$\beta_3 = -\frac{\sum_{i=1}^{4} b_{3i}\alpha_i}{b_{14}} b_{34} + \sum_{i=1}^{4} b_{3i}\alpha_i$$

$$\beta_4 = -\frac{\sum_{i=1}^{4} b_{4i}\alpha_i}{b_{14}} b_{44} + \sum_{i=1}^{4} b_{4i}\alpha_i$$

introduciendo nuevamente la reacción del soporte como incognita, se tiene

$$\begin{Bmatrix} -y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_7^D = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ \beta_3 & 0 \\ \beta_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \qquad (3.11c)$$

finalmente en el extremo derecho del sistema se tiene que el vector de estado es

$$\{ z \}_{11}^I = [C] \{ z \}_7^D \qquad (3.12a)$$

desarrollando el producto queda

$$\begin{Bmatrix} -y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_{11}^I = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} c_{1i}\beta_i & c_{14} \\ \sum_{i=1}^{4} c_{2i}\beta_i & c_{24} \\ \sum_{i=1}^{4} c_{3i}\beta_i & c_{34} \\ \sum_{i=1}^{4} c_{4i}\beta_i & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \qquad (3.12b)$$

con la ecuación (3.12b), se aplican las condiciones de frontera del extremo derecho, que en éste caso son $-y_{11} = 0$, $M_{11} = 0$, quedando finalmente

$$\begin{Bmatrix} -y \\ M \end{Bmatrix}_{11} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} c_{1i}\beta_i & c_{14} \\ \sum_{i=1}^{4} c_{3i}\beta_i & c_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.12c)$$

la ecuación (3.12c) representa un sistema de ecuaciones algebraico homógeneo en el que solamente hay solución diferente de la trivial si el determinante de la matriz es nulo. En la tabla (3.2) se muestran los diferentes tipos de apoyo, así como las condiciones de frontera y el determinante de frecuencia.
El cálculo de frecuencias se realiza de manera similar a como se describió en la sección anterior.
Para el cálculo de los modos de vibración se sigue un proceso inverso al descrito anteriormente, con la diferencia de que ahora el vector de incognitas cambia al pasar atraves de los soportes intermedios. El primer vector de incognitas esta dado en la tabla (3.2) , y depende del tipo de apoyo que se tenga en el extremo izquierdo. Para este caso, se tiene que para el primer tramo entre soportes el vector es

$$\left\{ z \right\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\dfrac{a_{12}}{a_{14}} \end{Bmatrix} \theta_1 \quad (3.13a)$$

y se calculará la deflexión en cada punto por medio de las multiplicaciones correspondientes, por ejemplo

$$\{z\}_2 = [T]_2 [T]_1 \{z\}_1$$
$$\{z\}_3 = [T]_3 \{z\}_2$$

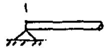
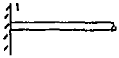
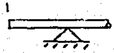
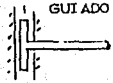
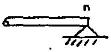
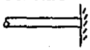
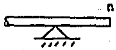
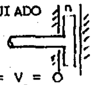
TIPO DE APOYO EXTREMO IZQUIERDO			
SIMPLE  $y_1 = M_1 = 0$	EMPOTRADO  $y_1 = \theta_1 = 0$	LIBRE  $M_1 = V_1 = 0$	GUIADO  $\theta_1 = V_1 = 0$
Matriz de Transferencia (EC. 3.8a) Antes del Primer Apoyo Intermedio			
$\alpha_j = a_{j2} - \frac{a_{12}}{a_{14}} a_{j4}$	$\alpha_j = a_{j3} - \frac{a_{13}}{a_{14}} a_{j4}$	$\alpha_j = a_{j1} - \frac{a_{11}}{a_{12}} a_{j2}$	$\alpha_j = a_{j1} - \frac{a_{11}}{a_{13}} a_{j3}$
Vector de incognitas antes del primer apoyo intermedio			
$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ -\frac{a_{12}}{a_{14}} \end{matrix} \right\} \theta_1$	$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ -\frac{a_{13}}{a_{14}} \end{matrix} \right\} M_1$	$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ -\frac{a_{11}}{a_{12}} \end{matrix} \right\} y_1$	$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ -\frac{a_{11}}{a_{13}} \end{matrix} \right\} y_1$
TIPO DE APOYO EXTREMO DERECHO			
SIMPLE  $y_n = M_n = 0$	EMPOTRADO  $y_n = \theta_n = 0$	LIBRE  $M_n = V_n = 0$	GUIADO  $\theta_n = V_n = 0$
Determinante de Frecuencia			
$\begin{vmatrix} \Sigma p_{1i}\phi_i & p_{14} \\ \Sigma p_{3i}\phi_i & p_{34} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \Sigma p_{1i}\phi_i & p_{14} \\ \Sigma p_{2i}\phi_i & p_{24} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \Sigma p_{3i}\phi_i & p_{34} \\ \Sigma p_{4i}\phi_i & p_{44} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \Sigma p_{2i}\phi_i & p_{24} \\ \Sigma p_{4i}\phi_i & p_{44} \end{vmatrix}$

Tabla 3.2 Tipos de Apoyo en los extremos.

Las sumatorias son de $i=1,4$; los indices j son de 1 a 4, En el determinante de frecuencia ϕ_i son los componentes de la matriz de transferencia antes del último soporte intermedio y p son los componentes de la matriz de transferencia del último tramo entre soportes.

al pasar por el primer soporte intermedio, el vector de incognitas $\{ z \}_1$ se convierte en

$$\left\{ z \right\}_1 = \left\{ \begin{matrix} \theta_1 \\ \\ R_1 \end{matrix} \right\}$$

en donde R_1 es la reacción calculada mediante la ecuación (3.10).

Los vectores de estado en las estaciones (5) y (6) serán

$$\{ z \}_5 = [T]_5 \{ z \}_4^D$$
$$\{ z \}_6 = [T]_6 \{ z \}_5$$

donde el vector $\{ z \}_4^D$ está dado en la ecuación (3.8.c).

Calculando para las estaciones (8) y (9)

$$\{ z \}_8 = [T]_8 \{ z \}_7^D$$
$$\{ z \}_9 = [T]_9 \{ z \}_8$$

donde $\{ z \}_7^D$ está dado en la ecuación (3.11c) .

Este proceso de cálculo se sigue para cada valor de frecuencia que cumple con las condiciones de los apoyos, es decir, aquel valor de omega que hace que el determinante se anule. Cada vector modal está compuesto por el valor de la deflexión en cada una de las estaciones.

3.4 ALGORITMO PARA EL CALCULO DE FRECUENCIAS Y MODOS NATURALES DE VIBRACION PARA UN SISTEMA ROTATORIO CON SOPORTES RIGIDOS.

Para obtener las características modales del sistema utilizando el método de la sección anterior, se desarrolló un algoritmo que describe los pasos principales que se realizan en la computadora, y básicamente son los siguientes :

1.- Entrada de datos y calculos iniciales.

  1.a.- Entrada de datos del sistema : rango de velocidades, geometría, propiedades de los materiales y tipos de apoyo.
  1.b.- Calculos iniciales como son : momentos de inercia, masas y rigideces.
  1.c.- Cálculo de incrementos en la velocidad angular.
  1.d.- Establece los índices para la reducción de las matrices de transferencia en función del tipo de apoyo en los extremos.

2.- Calcula el determinante de frecuencia para cada uno de los incrementos de velocidad angular, para ésto realiza los siguientes pasos :

  2.a.- Ensambla la matriz en la estación uno y la reduce.
  2.b.- Calcula los vectores de estado hata llegar al primer soporte intermedio.
  2.c.- Calcula la matriz definida en la ecuación (3.8c).
  2.d.- Sigue calculando estación por estación hasta llegar al extremo derecho no importando cuantos soportes intermedios existan, ya que para cada soporte intermedio calculará la matriz de la ecuación (3.8c).

2.e.- Aplica condiciones de frontera en el extremo derecho y calcula el valor del determinante de frecuencia.

3.- Inicia un proceso de interpolación para calcular el valor de la frecuencia que haga que el determinante es cero.

En el paso (2.e) se crea un arreglo de parejas de velocidad y valor del determinante, como es dificil que haya un valor de velocidad que haga que el determinante sea exactamente igual a cero, lo que se hace es detectar dos valores de velocidad en los que hubo un cambio de signo en el valor del determinante.

En la figura (3.5) se muestra en forma gráfica el proceso de interpolación

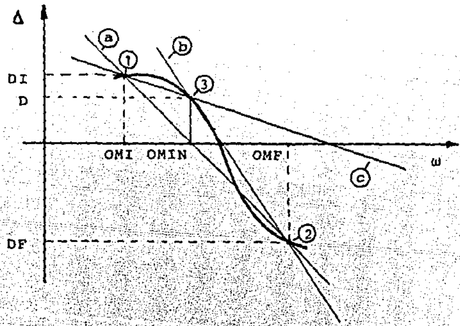


Fig. 3.5 Interpolación entre dos valores de velocidad.

La primera aproximación se hace con los puntos (1) y (2), calculando la primer frecuencia interpolada, que es

OMIN = OMI - DI*(OMF - OMI) / (DF - DI) (3.15)

3.1.- Con este valor, se calcula nuevamente el valor del determinante de frecuencia y se encuentra el punto (3).

3.2.- Con estos tres puntos se calcula la pendiente de las rectas b y c, tomando como pivote uno de los puntos iniciales (1 ó 2) se toma la pareja de puntos que proporcione la pendiente mas alta.

3.3.- Con los puntos de la pendiente más alta, vuelve a interpolar con la ecuación (3.15).

3.4.- Repite el paso 3.1 .

3.5.- Repite los pasos 3.1 a 3.3 hasta que en dos iteraciones sucesivas el valor de la frecuencia interpolada difiere una cantidad "ε" definida previamente, o hasta realizar un número N de iteraciones también predefinido (10 máximo).

3.6.- Vuelve a calcular el valor del determinante de frecuencia con el valor definitivo de velocidad.

4.- Con la frecuencia encontrada en el paso 3 se calcula el modo natural de vibración.

4.1.- Repite el paso 2.1 .

4.2.- Repite el paso 2.2 y multiplica el primer renglón de cada matriz de transferencia por el vector de incognitas, dando como resultado la deflexión en cada estación .

4.3.- Repite el paso 2.3 y cambia el vector de incognitas.

4.4.- Repite el paso 2.4 y va evaluando el valor de la deflexión de manera similar a como se hizo en el paso 4.2.

5.- Repite los pasos 2 y 3 hasta cubrir todo el rango de velocidades.

3.5.- DESCRIPCION DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA

El algoritmo mencionado en la sección anterior se programó en en lenguaje FORTRAN IV . Este programa se desarrolló utilizando todas las ventajas que ofrece el método de Prohl-Myklestad, como lo es el uso de matrices de orden muy bajo razón por la que puede implementarse en computadoras de baja capacidad de memoria.

El programa está escrito de la forma más clara posible utilizando módulos o subrutinas que ubican inmediatamente y sin confución la tarea que realizan. Los datos requeridos son muy pocos y la forma en que se le suministran es por medio de un archivo en disco, esto se hizo por la versatilidad que se tiene de modificar los datos y conservarlos por si se desea volver a procesar la información. Los datos que requiere el programa son los siguientes.

1.- Datos de control e inicialización .

   1.a.- Titulo del problema (para identificación) 72 caracteres.

   1.b.- Número de estaciones (NE)

   1.c.- Número de discos (ND)

   1.d.- Clase de soportes (ITISO)

   1.e.- Número de soportes (NS)

   1.f.- Rango de velocidades de interés (OM1,OM2)

2.- Datos de la geometría y propiedades de los materiales

2.a.- Datos de los discos, un registro por cada disco con :

Diametro (DD), Espesor (ED), Densidad (DEND), Localización (LOCD), Excentricidad (EXCD).

2.b.- Datos de los segmentos de flecha, un registro por cada segmento con la siguiente información :

Diámetro (DF), Longitud (FL), Densidad (DENF), Módulo Elástico (MOEL).

2.c.- Datos de los soportes.

Número de soporte (IS), Localización (IDS), Rigidez (RIGS).

2.d.- Tipo de apoyo en los extremos :

Extremo izquierdo (6 caracteres).
Extremo derecho (6 caracteres).

Estos datos deberan estar en un archivo gravado en disco para su acceso por el programa, ya que al correr el único dato que debe suministrarse es el nombre del archivo de datos.
Los resultados del programa son desplegados en pantalla o impresos en papel, ademas el programa prepara un archivo, cuyo nombre es a voluntad del usuario para utilizarse posteriormente en las fases de respuesta dinámica y graficación de resultados.

IV RESPUESTA DINAMICA

El cálculo de la respuesta dinámica es una parte muy importante dentro de la fase de simulación de un sistema rotatorio ya que permite conocer las amplitudes de vibración en diferentes puntos del rotor para incrementos preestablecidos de tiempo. En éste trabajo la respuesta dinámica se calcula utilizando el método de superposición modal, el cual asume que el sistema es lineal y la fuerza exitadora es armónica, con lo que se llega a una expresión que obtiene las amplitudes de vibración en función de la velocidad de operación de la máquina.

4.1.- Técnicas de condensación .-

Los métodos aproximados para el análisis de sistemas rotatorios, generalmente se busca que la eficiencia operacional sea lo más alta posible y aunado a ésto, en el desarrollo para llegar a la expresión de la respuesta dinámica se hace necesario manipular las matrices de masa y rigidez reducidas. Las ecuaciones de de movimiento para un sistema de segundo están dadas por la siguiente expresión :

$$[\,M\,]\,\{\,\ddot{x}\,\} + [\,K\,]\,\{\,x\,\} = \{\,F(t)\,\} \qquad (4.1)$$

la solución al problema de valores característicos se tiene si el termino del lado derecho es nulo, pero surge el problema de que la matriz de masa contiene elementos nulos en su diagonal principal impidiendo con esto su inversión, es por ésta razón que se necesitan eliminar los grados de libertad que no tienen masa asociada, o sea los grados de libertad rotacionales. Esto puede realizarse de la siguiente manera : en primer lugar se necesitan reordenar los elementos de las matrices de masa y rigidez tal que quede de la siguiente forma :

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} \qquad (4.2)$$

en donde el vector $\{ x_1 \}$ contiene los grados de libertad asociados a las masas concentradas en cada estación, es decir, a los desplazamientos de cada una de éstas masas, y $\{ x_2 \}$ a los grados de libertad restantes, o sea, a los grados de libertad rotacionales que en éste caso son los que se eliminan, de tal forma que los elementos de las submatrices $[M_{12}]$, $[M_{21}]$ son todos nulos. Lo único que falta ahora es reducir la matriz de rigidez $[K]$, ésto se hace mediante la técnica conocida como " Condensación tipo GUYAN " [6] en la que se expresa el vector $\{ x_2 \}$ en términos de $\{ x_1 \}$ de tal maera que la matriz de rigidez reducida queda

$$[K^*] = [K_{11}] - [K_{12}] [K_{22}]^{-1} [K_{21}] \tag{4.3}$$

en donde ésta matriz de rigidez es ahora del mismo orden que el vector de desplazamientos $\{ x_1 \}$, ésto se puede realizar siempre y cuando los terminos del vector $\{ F_2(t) \}$ sean nulos.

4.2.- Normalización de la matriz modal.

En el capítulo anterior se mencionó la forma en que se obtienen las características modales de un sistema rotatorio, es decir, sus valores y vectores característicos, también se vio que éstos vectores se obtienen a partir de suponer un valor arbitrario en una de las variables del vector de estado, lo que proporciona que estos vectores contengan amplitudes de vibración relativas entre cada una de las estaciones. Una propiedad de los vectores modales es que son ortogonales entre sí, y ésto se puede comprobar si se efectúa el producto escalar de dos vectores.

El tener a éstos vectores, o bién a la matriz modal normalizada, resulta muy ventajoso ya que simplifica mucho el desarrollo del modelo matemático para la respuesta a la frecuencia. Generalmente la normalización se realiza con respecto a la masa de todo el sistema y la condición de ortogonalidad tiene que cumplir con la siguiente expresión :

$$[\ \Phi\ ]^T[\!\!-\ m\ \!\!-] \ [\ \Phi\ ] = [\!\!-\ I\ \!\!-] \qquad (4.4a)$$

o bién para cada vector :

$$\{\ \phi\ \}^T[-\ m\ -]\ \{\ \phi\ \} = 1 \qquad (4.4b)$$

dado que la matriz de masa es una matriz diagonal, el producto de la ecuación (4.4.b) se puede expresar como una suma, de la siguiente forma

$$S = \sum_{i=1}^{n}(\ \phi_i\ )^2 m_i \qquad (4.4c)$$

Entonces la normalización de la matriz modal se lleva a cabo simplemente dividiendo cada componente de un vector entre la suma obtenida en la expresión (4.4.c) , de tal manera que :

$$\{\ \phi\ \} = \{\ \phi\ \} \,/\, S \qquad (4.5)$$

4.3.- Modelo matemático para respuesta dinámica

Como ya se mencionó, la respuesta dinámica se calculará en base al método de superposición modal, ésto quiere decir que se resuelve el problema de vibraciones forzadas en el que las ecuaciones de movimiento del sistema son de la siguiente forma :

$$[-\ m\ -]\ \{\ \ddot{x}\ \} + [\ K^*\ ]\ \{\ x\ \} = \{\ F(t)\ \} \qquad (4.6)$$

en donde las frecuencias de resonancia del sistema se encuntran resolviendo el problema de vibraciones libres, es decir, cuando $\{ F(t) \} = \{ 0 \}$ y corresponde a resolver el problema de valores y vectores característicos que fue el objetivo del capítulo III de este trabajo.

Para el caso en que el sistema se encuentre vibrando a una de sus frecuencias naturales, todos los puntos del sistema se moveran en fase y se puede asumir que los desplazamientos son de la forma siguiente

$$\{ x \} = \{ x_o \} \, sen \, (\Omega t) \tag{4.7}$$

por otra parte, la fuerza exitadora se supone que proviene del desbalanceo de los discos y ésta representada por la siguiente expresión

$$\{ F(t) \} = \{ F_o \} \, sen \, (\Omega t) \tag{4.8a}$$

donde

$$\{ F_o \} = \{ m_i e_i \Omega^2 \} \tag{4.8a}$$

el vector de desplazamientos $\{ x \}$ puede calcularse mediante una combinación lineal de los modos de vibración $\{ \phi \}_i$, de tal forma que

$$\{ x \} = [\{ \phi \}_1 \{ \phi \}_2 \ldots \{ \phi \}_n] \{ C \} = [\Phi] \{ C \} \tag{4.9}$$

donde el vector $\{ C \}$ contiene los factores de la combinación y dependen del tiempo básicamente.

Sustituyendo la ecuación (4.9) en (4.6) se obtiene

$$[\neg m \lrcorner] [\Phi] \{ \ddot{C} \} + [K^*] [\Phi] \{ C \} = \{ F(t) \} \qquad (4.10)$$

Premultiplicando ambos miembros de (4.10) por la transpuesta de $[\Phi]$, se obtiene

$$[\Phi]^T [\neg m \lrcorner] [\Phi] \{ \ddot{C} \} + [\Phi]^T [K^*] [\Phi] \{ C \} = [\Phi]^T \{F(t)\} \qquad (4.11)$$

de las propiedades de ortogonalidad de los modos de vibración se tiene que

$$[\Phi]^T [\neg m \lrcorner] [\Phi] = [\neg I \lrcorner]$$
$$[\Phi]^T [K^*] [\Phi] = [\neg \omega^2 \lrcorner]$$

que sustituyendo en la ecuación (4.11) queda

$$[\neg I \lrcorner] \{ \ddot{C} \} + [\neg \omega^2 \lrcorner] \{ C \} = [\Phi]^T \{ F(t) \} \qquad (4.12)$$

si la fuerza F(t) es armónica, se asume que el vector $\{ C \}$ es también armónico y puede simplificarse el modelo calculando la respuesta solamente en función de la velocidad angular, sin necesidad de integrar la ecuación (4.12), ésto es, si

$$\{ C \} = \{ C_o \} \text{ sen } \Omega t$$

entonces

$$\{ \ddot{C} \} = - \Omega^2 \{ C_o \} \text{ sen } \Omega t \qquad (4.13)$$

sustituyendo en la ecuación (4.12) queda

$$-[\lceil I \rfloor]\Omega^2\{C_o\}sen(\Omega t)+[\lceil \omega^2 \rfloor]\{C_o\}sen(\Omega t)=[\,\Phi\,]^T\{F_o\}sen(\Omega t) \qquad (4.14)$$

de donde

$$\{\,C_o\,\} = [\lceil(\,\omega^2-\Omega^2\,)^{-1}\rfloor][\,\Phi\,]^T\{\,F_o\,\} \qquad (4.15)$$

sustituyendo (4.15) en (4.9), se obtiene

$$\{\,x\,\} = [\,\Phi\,][\lceil(\,\omega^2-\Omega^2\,)^{-1}\rfloor][\,\Phi\,]^T\{\,F_o\,\} \qquad (4.16)$$

ahora, sustituyendo (4.8a) en (4.16) y desarrollando, se obtiene

$$x_i(\,\Omega\,) = \sum_{j=1}^{m}\phi_{ij}(\,\omega_j^2-\Omega^2)^{-1}\sum_{k=1}^{n}\phi_{kj}(\,e_k m_k\Omega^2\,) \qquad (4.17)$$

ésta es la expresión que permite calcular el desplazamiento en cada estación del sistema, para cada incremento de velocidad.

4.4.- Algoritmo para respuesta dinámica.

Para el cálculo de la respuesta dinámica se sigue un algoritmo que es muy sencillo y a la vez eficiente y por lo tanto puede ser empleado en la simulación de sistemas rotatorios en tiempo real. Esto quiere decir que para un incremento de tiempo t el calculo se realiza en un tiempo menor. Como ya se mencionó anteriormente, en este trabajo se calcula la respuesta para cada incrmento de velocidad, lo cual hace suponer que corresponde a un incremento de tiempo.

Una vez que se ha realizado la extracción modal del sistema, es decir, ya que se han encontrado los valores y vectores caracteristicos ya normalizados, el algoritmo que se aplica es el siguiente :

1.- Se da el valor de las excentricidades de cada una de las masas concentrada del sistema.
2.- Se establece un rango de velocidades y se toma un incremento de velocidad .
3.- Se calcula el vector de amplitudes de vibración mediante la ecuación (4.17).
4.- Se repite el paso 3 hasta cubrir el rango de velocidades establecido.

4.5.- Programa de computadora para Respuesta Dinámica.

El algoritmo desarrollado en la sección anterior se programó en lenguaje fortran y funciona de la siguiente manera :
El programa desarrollado en el capitulo III, genera un archivo de datos en disco que contiene las velocidades criticas del sistema y la matriz modal ya normalizada asi como el valor de las excentricidades de las masas que se leyeron con el conjunto de datos generales del rotor. Al inicializar la corrida del programa, los datos que hay que suministrar son :

1.- Nombre del archivo de datos .
2.- Nuevos valores de excentricidad de las masas.
3.- Rango de velocidades
4.- Nombre del archivo para resultados.

Con estos datos se calcula el vector de desplazamientos para cada uno de los incrementos de velocidad, estos resultados no aparecen en forma númerica, sino que se guardan en un archivo para que posteriormente se puedan graficar. El programa es totalmente interactivo y no tiene problema en cuanto al formato en que se suministran los datos, y puede hacer tantos calculos como se deseen con solo dar nuevos valores de excentricidad de las masas, o bien en el rango de velocidad , así como también en el número de incrementos de velocidad. El rango de velocidades debe estar comprendido en el rango con el que se obtuvo la extracción modal.

V APLICACIONES

En el capítulo I se mencionaron algunas de las aplicaciones que puede tener el algoritmo presentado en éste trabajo. Para fines de comprobación de su funcionalidad, se resolvieron dos problemas cuyos resultados son conocidos. En primer lugar se analizó una flecha continua con dos apoyos simples en sus extremos, con los siguientes datos :

Longitud	254.0000	cm
Diámetro	12.7	cm
Módulo Elástico	2.0394 E+06	Kg/cm^2
Densidad	7.8610 E-03	Kg/cm^3

Las frecuencias naturales para éste sistema pueden calcularse con la siguiente ecuación[7]

$$\omega_n = \pi^2 n^2 \sqrt{EI/\gamma L} \qquad (5.1)$$

donde

γ es la masa por unidad de longitud de la flecha.
n es la frecuencia que se desea calcular.

Con el programa de computadora desarrollado en éste trabajo, se calcularon las primeras cuatro frecuencias naturales, variando el número de elementos en que se discretizó la flecha.
Los resultados de velocidades críticas se muestran en la tabla (5.1) y figura (5.1), y los modos de vibración se muestran en forma gráfica en las figuras (5.2) a (5.4) (las frecuencias y los modos de vibración de las gráficas se calcularon dividiendo a la flecha en 100 elementos).

TABLA 5.1 Comparación de las frecuencias calculadas con el programa de éste trabajo y las calculadas con la ec. 5.1						
ω RAD/s	EC. 5.1	5 ELEM	10 ELEM	20 ELEM	50 ELEM	100 ELEM
ω_1	245.08	245.08	245.08	245.08	245.08	245.08
ω_2	980.32	977.81	977.91	980.23	980.23	980.23
ω_3	2205.72	2164.59	2164.59	2205.45	2205.53	2205.53
ω_4	3921.28	3564.43	3564.43	3920.47	3920.92	3920.93

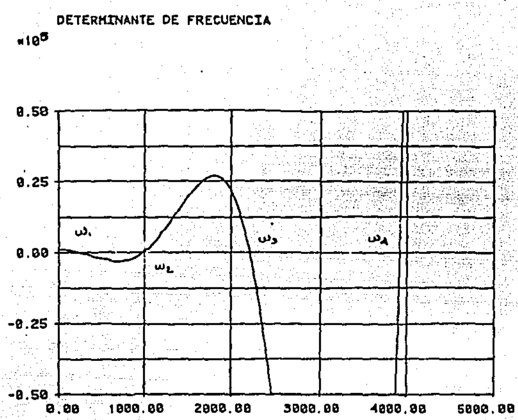


Fig. 5.1 FLECHA CON DOS APOYOS RIGIDOS (NF = 100)

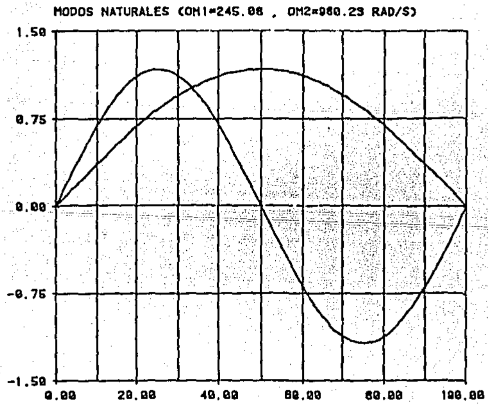


Fig. 5.2 FLECHA CON DOS APOYOS RIGIDOS (NF = 100)

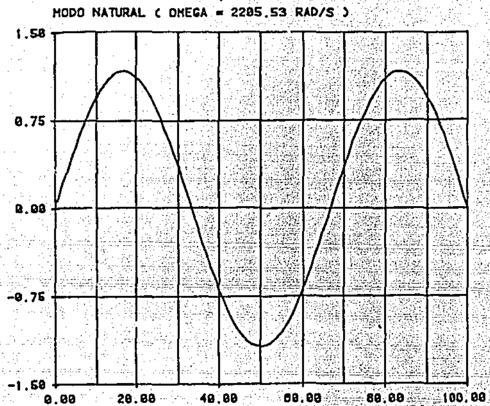


Fig. 5.3

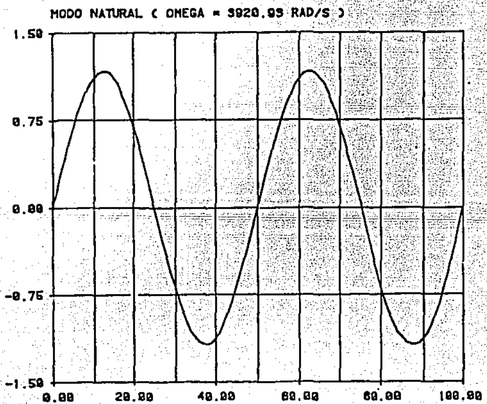


Fig. 5.4 FLECHA CON DOS APOYOS RIGIDOS (NF = 100)

Para demostrar la aproximación numérica del método de la matriz de transferencia, se calcularon las primeras cuatro velocidades críticas de una flecha hueca.

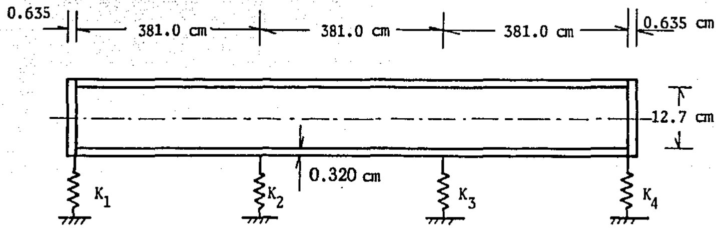
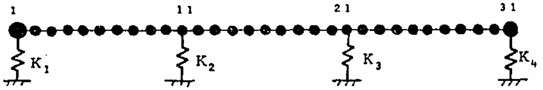


Fig. 5.5 FLECHA HUECA CON CUATRO SOPORTES ELASTICOS

La flecha se muestra en la figura (5.5), es una flecha hueca de aluminio con los extremos cerrados con discos, y está apoyada sobre cuatro chumaceras igualmente espaciadas. La flecha se dividió en 30 segmentos iguales, donde la mitad de la masa de cada segmento se concentra en los extremos. Los datos generales de la flecha se muestran en la tabla 5.2 .
Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 5.3, en donde se muestran también los obtenidos por G.C. Horner y W.D. Pinkley [8], que utilizan el método de la matriz de transferencia de Riccati para eliminar la inestabilidad numérica que se genera en el cálculo de los modos más altos, y además en su análisis consideran la deformación por cortante así como también la inercia rotatoria y los momentos giroscópicos de los discos. En las figuras (5.6) y (5.7) se muestra en forma gráfica el comportamiento del determinante de frecuencia, y en las figuras (5.8) a (5.10) se muestran las formas modales correspondientes a las frecuencias naturales calculadas.



Modelo simplificado de la flecha hueca

Número de segmentos	=	30
Número de discos	=	2
Número de soportes	=	4

DATOS DE LOS DISCOS

Nº	Diámetro (cm)	Espesor (cm)	Densidad $Kg\text{-}s^2/cm^4 \times 10^{-6}$
1	13.3400	0.6350	2.8542
2	13.3400	0.6350	2.8542

DATOS DE LOS SEGMENTOS DE FLECHA

Nº	Diámetro (cm)	Longitud (cm)	Densidad $Kg\text{-}s^2/cm^4 \times 10^{-8}$	M. Elástico $Kg/cm^2 \times 10^6$
1	8.6713	38.10	63.261	0.7030
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
30	8.6713	38.10	63.261	0.7030

DATOS DE LOS SOPORTES

Nº	Rigidez (Kg/cm)	Estación	Tipo de apoyo en los extremos
1	35929.00	1	Simple
2	35929.00	11	
3	35929.00	21	
4	35929.00	31	Simple

Tabla 5.2

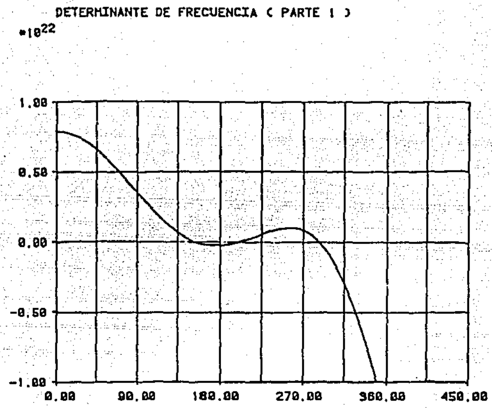


Fig. 5. 6 FLECHA HUECA CON CUATRO APOYOS FLEXIBLES (NF = 30)

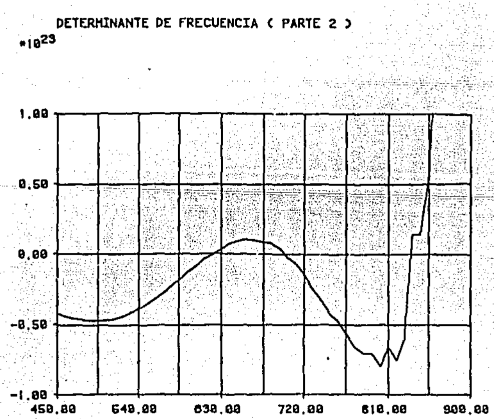
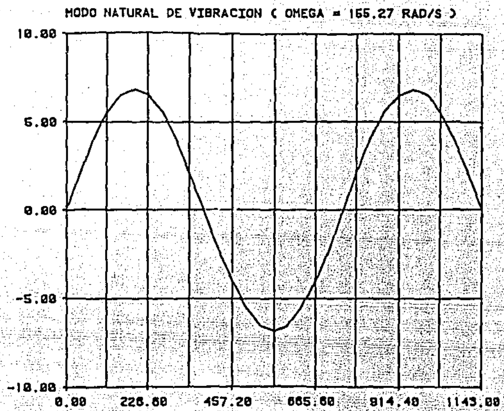


Fig.5.7 FLECHA HUECA CON CUATRO APOYOS FLEXIBLES (NF = 30)



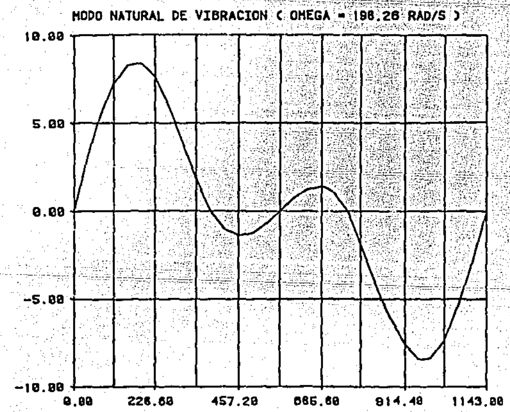


Fig. 5.8 FLECHA HUECA CON CUATRO APOYOS ELASTICOS

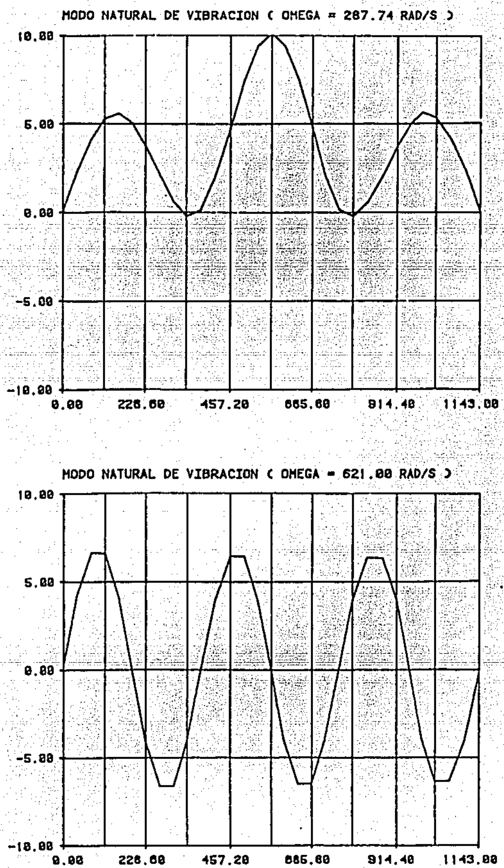
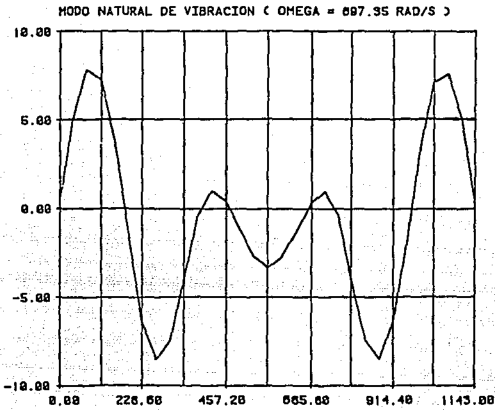


Fig. 5.9 FLECHA HUECA CON CUATRO APOYOS ELASTICOS



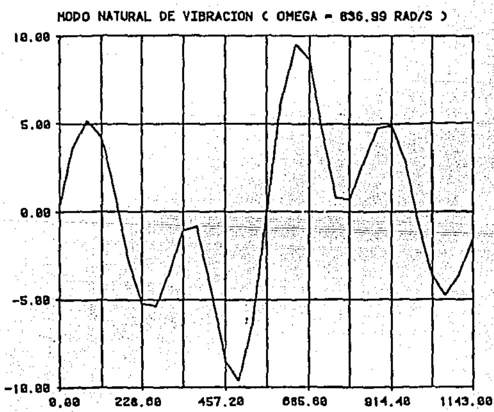


Fig.5.10 FLECHA HUECA CON CUATRO APOYOS ELASTICOS

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
HORNER	154.56	196.47	284.06	611.41	683.61	817.44
PROGRAMA	155.27	198.26	287.74	621.00	697.35	836.99

Tabla 5.3 Comparación de los resultados obtenidos mediante el programa VELCRI y los publicados por Horner. (valores en Rad/seg)

ω_1	155.37	ω_7	1398.37
ω_2	199.11	ω_8	1527.03
ω_3	290.76	ω_9	1759.34
ω_4	621.50	ω_{10}	2485.97
ω_5	708.30	ω_{11}	2656.57
ω_6	868.974	ω_{12}	2960.35

Tabla 5.4 Valor de las primeras doce frecuencias naturales considerando los apoyos rígidos. (valores en Rad/s)

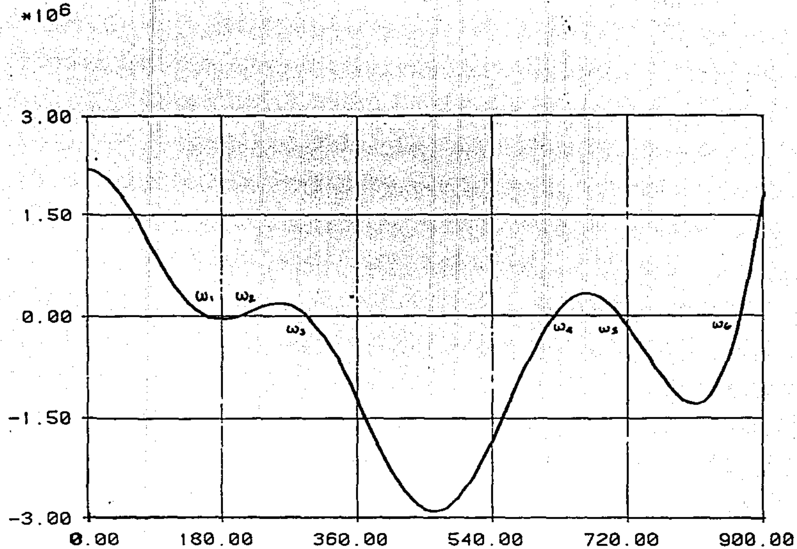
Este ejemplo se analizó también, cambiando la forma de modelado de los soportes, considerandolos rigidos para observar la variación en el valor de las frecuencias al introducir valores muy altos de las constantes de rigidez.

El comportamiento del detrminante de frecuencia se muestra en la figura (5.11) y los valores numéricos de las frecuencias se muestran en la tabla (5.4), las formas modales a estas frecuencias se muestran en las figuras (5.12) a (5.17).

El algoritmo para respuesta dinámica se aplicó para calcular la respuesta en este mismo sistema, analizando solamante un rango de velocidades de 0 a 500 rad/s (4775 R.P.M.) y considerando una excentricidad uniforme en todas las masas concentradas de .001 cm El resultado de éste análisis se muestra en la figura (5.18), en la cual se grafica el valor del desplazamiento para aquellas estaciones que se encuentran a la mitad de cada tramo entre soportes.

Fig. 5.11

DETERMINANTE DE FRECUENCIA



FLECHA HUECA CON CUATRO APOYOS RIGIDOS (NF = 90)

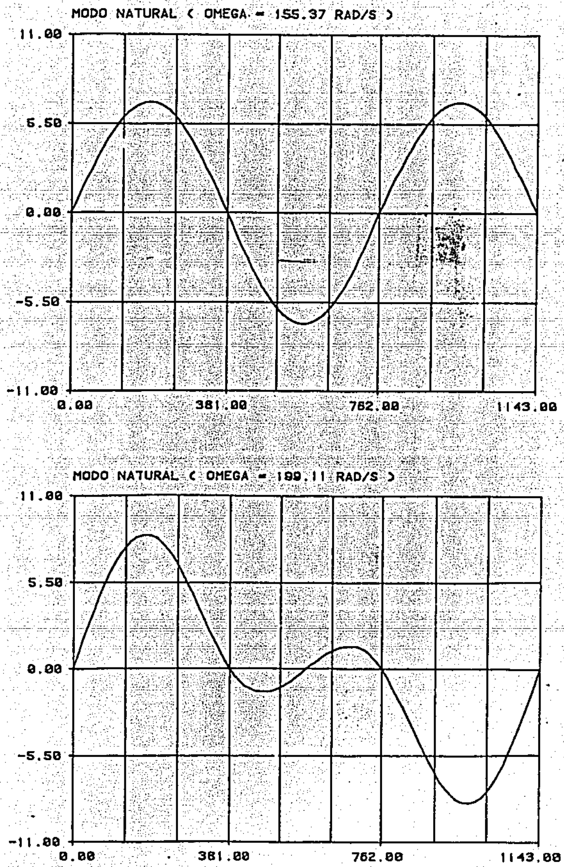
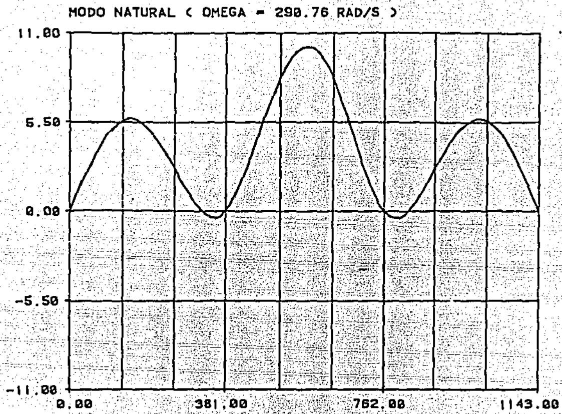


Fig. 5.12 FLECHA HUECA CON CUATRO APOYOS RIGIDOS (NF = 90)



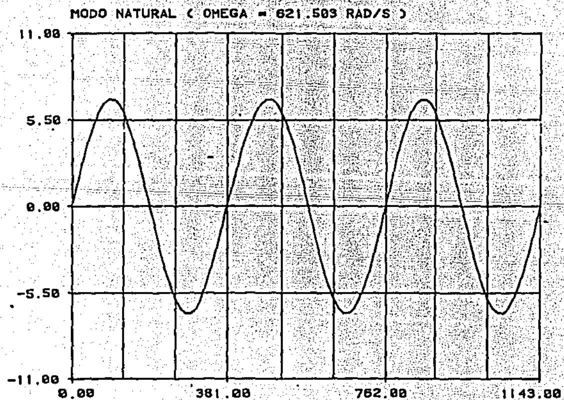
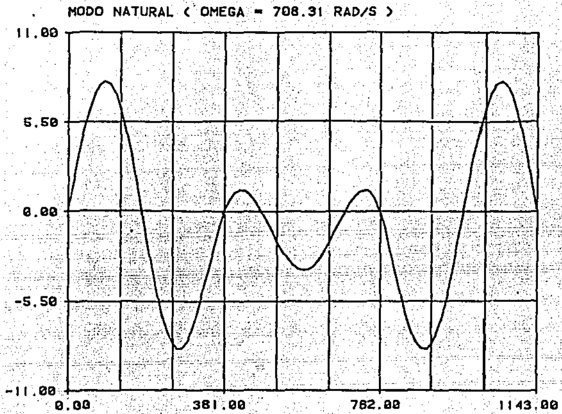


Fig. 5.13 FLECHA HUECA CON CUATRO APOYOS RIGIDOS (NF = 90)



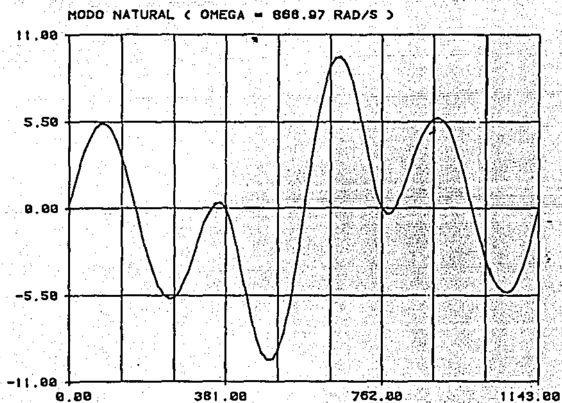


Fig. 5.14 FLECHA HUECA CON CUATRO APOYOS RIGIDOS (NF = 90)

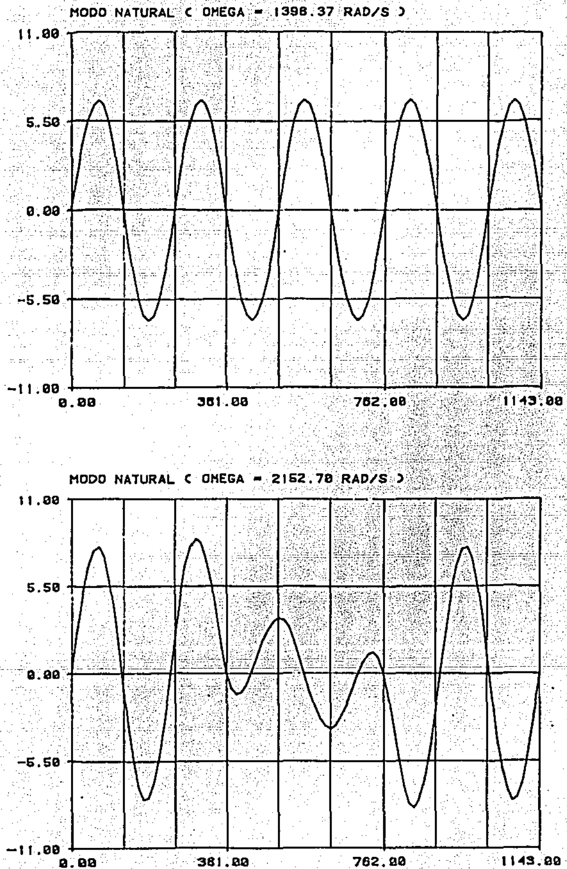


Fig.5.15 FLECHA HUECA CON CUATRO APOYOS RIGIDOS (NF = 90)

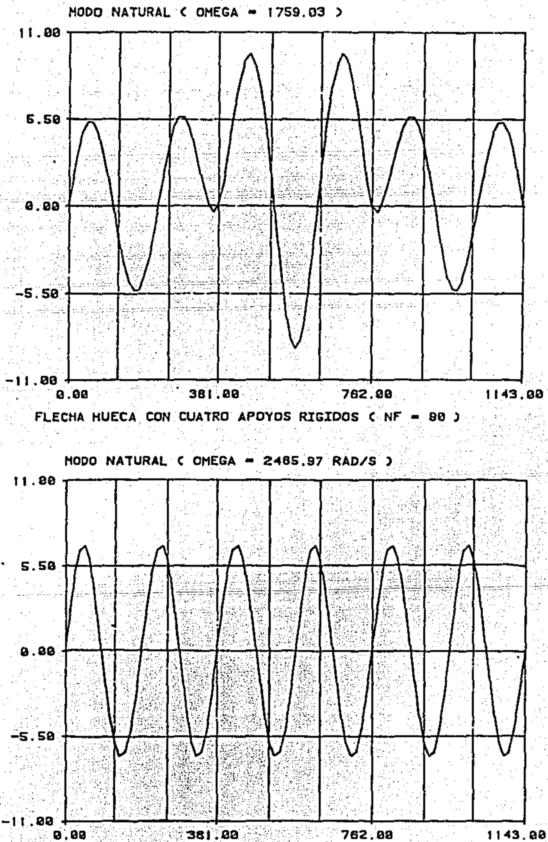
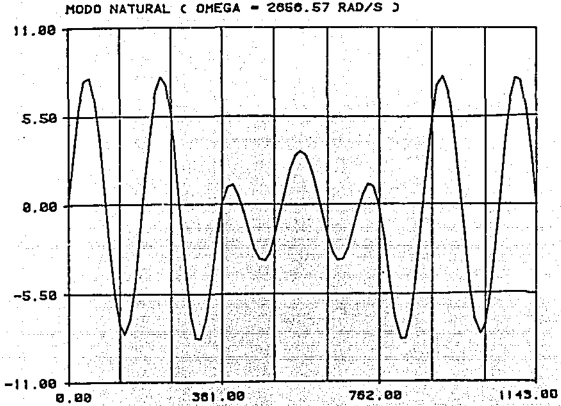


Fig. 5.16 FLECHA HUECA CON CUATRO APOYOS RIGIDOS (NF = 80)



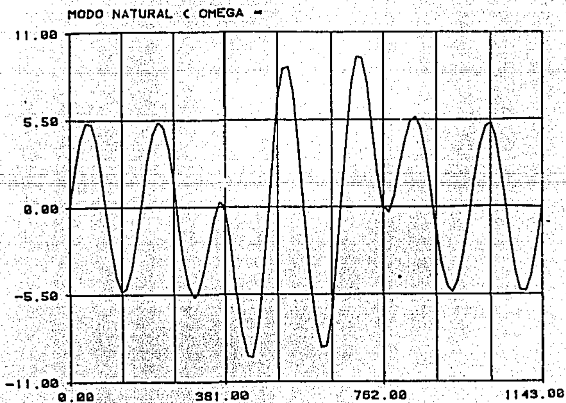
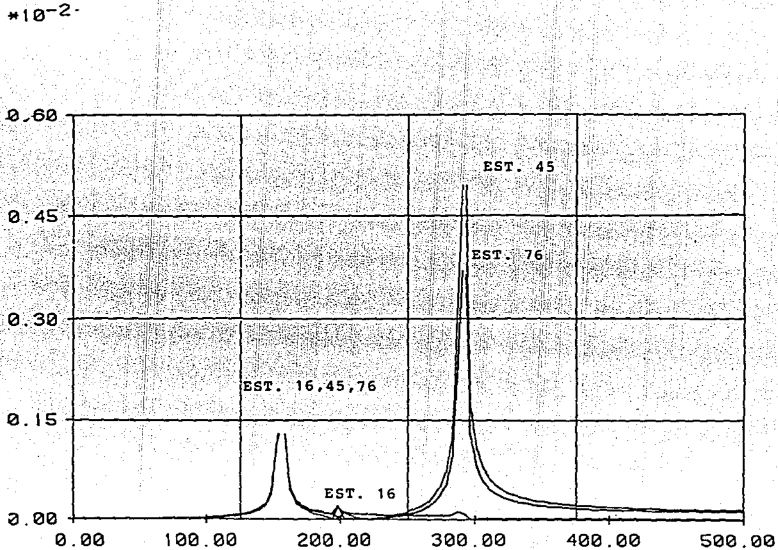


Fig. 5.17 FLECHA HUECA CON CUATRO APOYOS RIGIDOS (NF = 90)

Fig. 5.18

RESPUESTA DINAMICA (ESTACIONES 16 , 45 , 76)



FLECHA HUECA CON CUATRO APOYOS RIGIDOS (NF = 90)

VI DISCUSION DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos utilizando los algoritmos de éste trabajo son valores aproximados a los reales, ya que el modelo que se está usando es bastante sencillo, sin embargo permiten conocer en terminos generales el comportamiento de un sistema rotatorio que en la realidad es bastante complicado, la aproximación que proporciona está principalmente en la vecindad de las velocidades criticas, como puede verse en la tabla (5.3) en donde se compara los valores de las seis primeras frecuencias con los valores calculados por Horner que utiliza un modelo más complicado del sistema.

El considerar los soportes totalmente rigidos tiene la ventaja de calcular los modos más altos del sistema sin tener el problema de la inestabilidad numérica, proporcionando también una buena aproximación en los resultados.

La ventaja del modelo utilizado es que es muy simplificado y por lo tanto son pocos los datos que hay que suministrar para realizar el analisis a un costo muy bajo, ya que el tiempo de procesamiento es muy reducido. Esto lo hace también ideal para realizar la simulación en tiempo real del sistema.

El modelo empleado en este trabajo permite al diseñador o al usuario de equipo rotatorio conocer en una forma aproximada el comportamiento de la máquina principalmente en la proximidad de las velocidades criticas, proporcionando la magnitud de los desplazamientos ocasionados por el desbalanceo de la masa de los discos.

El modelo de respuesta dinámica, por el número tan reducido de operaciones que realiza, puede utilizarse para simulación de sistemas en tiempo real, pudiendose aplicar en la simulación de plantas de potencia, para simular el comportamiento del sistema turbogenerador para fines de entrenamiento de operadores o bién para realizar tareas de diagnóstico y prevención.

REFERENCIAS

1.- Holzer, H., *Die Berechnung der Drehschwingungen*, Springer-Verlag OHG, Berlin, 1921, Republished by J.W. Edwards, Publisher, Inc., Ann Arbor, Mich.

2.- Myklestad, N.O., *A New Method for Calculating Natural Modes of Uncoupled Bending Vibrations of Airplane Wings and Other Types of Beams*, Journal of Aeronautic Sciences 11, 153-162 1944.

3.- Prohl, M.A., *A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors* , Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics vol. 12 no. 3, Sept. 1945, pp A142-A148.

4.- Eshleman, R.L., *Flexible Rotor-Bearing System Dynamics*, I. Critical Speeds and Response of Flexible Rotor Systems, ASME publication , New York N.Y. 1972.

5.- Pestel, E. C., and F.A. Leckie, *Matrix Methods in Elastomechanics*, McGraw-Hill, New York, 1963.

6.- Guyan, R.J., *Reduction of Stiffness and Mass Matrices*, AIAA Journal, Vol. 3, no. 2, Feb. 1965 p 380.

7.- Thomson, W.T., *Theory of Vibrations whith Applications*, Prentice-Hall, N.J. 2nd edition 1981 p 220.

8.- Horner, G.C., and W.D. Pilkey, *The Riccati Transfer Matrix Method*, Journal of Mechanical Desing, April 1978, vol. 100 pp 297-302.

APENDICE

LISTADO DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA

```
$RESET FREE
$SET LIMIT=10
FILE  4=ENTRADA,UNIT=DISK,RECORD=14,BLOCKING=30
FILE  7=SALIDA,UNIT=DISK,RECORD=14,BLOCKING=30
FILE  8(KIND=REMOTE,MAXRECSIZE=22)
FILE  1(KIND=PRINTER,MAXRECSIZE=22)
C*********************************************************************
      DIMENSION DD(10),ED(10),LOCD(10),DEND(10)
      DIMENSION DF(100),FL(100),DENF(100),MOEL(100)
      DIMENSION RIGF(100),AMCO(101),EXCD(101)
      DIMENSION RIGS(4),IDS(4),ICFROT(2,2),CFROT(2)
      DIMENSION INDIC(10),ROTLON(101),OMCR(6),MODO(101,6)
      DIMENSION TITEN(4),TITUL(12),TITSAL(4),GRA(101,2),KI(2)
      REAL MOEL,MODO
C*********************************************************************
      DATA ASTER,ASTERS,IFISAL/1H*,4H****,1/
      PRINT */,' QUIERE LOS RESULTADOS POR: IMPRESORA=1',
     1' O TERMINAL = RET ? '
      READ(5,10)IOPSAL
      IF(IOPSAL.NE.1H1)IFISAL=8
      WRITE(IFISAL,1)
    1 FORMAT(1H1)
      WRITE(IFISAL,2)(ASTERS,J=1,18)
    2 FORMAT(1X,17A4,1A3)
      WRITE(IFISAL,3)
    3 FORMAT(2H *,10X,' PROGRAMA DE ANALISIS MODAL Y ',
     1'RESPUESTA DINAMICA ',
     210X,1H*,/,1X,1H*,19X,'DE ROTORES FLEXIBLES',30X,1H*)
      WRITE(IFISAL,2)(ASTERS,J=1,18)
      PRINT */,'  NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS  '
      READ(5,4)TITEN(1),TITEN(2),TITEN(3)
    4 FORMAT(4A6)
      TITEN(4)='.'
      OPEN(4,TITLE=TITEN)
      READ(4,5)TITUL
      READ(4,/)NE,ND,ITISO,NS,OM1,OM2
    5 FORMAT(12A6)
      NF=NE-1
      NI=100
      NII=NI+1
      NNVC=3
      CALL PROCE(DD,ED,LOCD,DEND,EXCD,DF,FL,DENF,
     1MOEL,RIGF,AMCO,RIGS,IDS,ICFROT,CFROT,GRA,
     2INDIC,ROTLON,OMCR,MODO,KI,TITEN,TITUL,TITSAL,NE,
     3ND,NS,NII,NNVC,NVCR,NF,OM1,OM2,ITISO,IFISAL)
   10 FORMAT(1A1)
      STOP
      END

C     SUBRUTINA PRINCIPAL, REALIZA LA EXTRACCION
C     MODAL DE UN SISTEMA ROTATORIO

      SUBROUTINE PROCE(DD,ED,LOCD,DEND,EXCD,DF,FL,DENF,
     1MOEL,RIGF,AMCO,RIGS,IDS,ICFROT,CFROT,GRA,INDIC,
     2ROTLON,OMCR,MODO,KI,TITEN,TITUL,TITSAL,NE,ND,
     3NS,NII,NNVC,NVCR,NF,OM1,OM2,ITISO,IFISAL)
      DIMENSION DD(ND),ED(ND),LOCD(ND),DEND(ND),EXCD(ND),
     1DF(NF),FL(NF),DENF(NF),MOEL(NF),RIGF(NF),AMCO(NE),
     2RIGS(NS),IDS(NS),  ICFROT(2,2),CFROT(2),GRA(NII,2),
     3INDIC(NNVC),ROTLON(NE), OMCR(NNVC),MODO(NE,NNVC),
     4KI(1),TITEN(4),TITUL(12), TITSAL(4),VINDU(3)
      REAL MODO,MOEL
      OM=OM1
      DELTOM=(OM2-OM1)/(NII-1)
      CALL LECDAT(DD,ED,LOCD,DEND,EXCD,DF,FL,DENF,MOEL,RIGS,
     1CFROT,NF,NE,ND,NS,ITISO,IDS)
      CALL PRGEIN(DD,ED,LOCD,DEND,DF,FL,DENF,MOEL,RIGF,AMCO,
     1NF,NE,ND)
      CALL CONFRO(CFROT,ICFROT,ITISO)
      PRINT */,' ARCHIVO PARA DATOS DE SALIDA ? (MAX. 6 CARS.) '
      READ(5,7)TITSAL(1)
    7 FORMAT(1A6)
      TITSAL(2)='.'
      TITSAL(3)='DF'
```

```
      TITSAL(3)='.'
      OPEN(7,TITLE=TITSAL,NEWFILE=.TRUE.)
      IF(ITISO.EQ.2)GO TO 30
      DO 20 I=1,NII
      CALL DFSRI(RIGF,AMCO,FL,NE,NF,OM,IDS,
     1ICFROT,NS,DET,NINTFC,KI,VINCO)
      GRA(I,1)=OM
      GRA(I,2)=DET
      WRITE(7,/)GRA(I,1),GRA(I,2),0
   20 OM=OM+DELTOM
      GO TO 50
   30 DO 40 I=1,NII
      CALL DFSFL(RIGS,ICFROT,NE,NS,IDS,
     1AMCO,FL,RIGF,NF,AVINC,DET,OM)
      GRA(I,1)=OM
      GRA(I,2)=DET
      WRITE(7,/)GRA(I,1),GRA(I,2),0
   40 OM=OM+DELTOM
   50 CONTINUE
      LOCK 7
      CALL INTER(GRA,OMCR,NII,RIGF,AMCO,FL,ICFROT,
     1RIGS,IDS,NS,NE,NF,ITISO,NVCR,MODO,NNVC)
      WRITE(IFISAL,120)TITUL
  120 FORMAT(,1X,12A6)
      WRITE(IFISAL,121)
  121 FORMAT(  //,10X,'LAS VELOCIDADES CRITICAS DEL ROTOR SON
     1 :',//,11X,'    RAD/SEG   ',4X,' CICLOS/SEG',4X,
     2'      RPM      ')
      DO 130 I=1,NVCR
  130 WRITE(IFISAL,140)I,OMCR(I),0.1592*OMCR(I),9.5493*OMCR(I)
  140 FORMAT(/,1X,'OMEGA',I2,3X,3(E12.6,4X))
      DO 145 I=1,NVCR
  145 INDIC(I)=I
      WRITE(IFISAL,147)
  147 FORMAT(//,1X,'LOS MODOS DE VIBRACION SON  :'//)
      WRITE(IFISAL,150)NVCR,(INDIC(I),I=1,NVCR)
  150 FORMAT(1X,*(1X,'OMEGA ',I2,2X))
      DO 160 I=1,NE
  160 WRITE(IFISAL,170)NVCR,(MODO(I,J),J=1,NVCR)
  170 FORMAT(1X,*(E10.3,1X))
      ROTLON(1)=0.0
      DO 180 I=2,NE
  180 ROTLON(I)=ROTLON(I-1)+FL(I-1)
      CALL NORMAL(MODO,AMCO,NE,NVCR)
      TITSAL(3)='MODOS'
      OPEN(7,TITLE=TITSAL,NEWFILE=.TRUE.)
      WRITE(7,/)0.0,ROTLON(NE),-1.0,1.0,1
      WRITE(7,/)ROTLON(1),(MODO(1,J),J=1,NVCR),1
      DO 300 I=2,NE
  300 WRITE(7,/)ROTLON(I),(MODO(I,J),J=1,NVCR),0
      LOCK 7
      PRINT */,' DESEA RESPUESTA A LA FRECUENCIA ? ',
     1'(SI=1 , NO=RET) '
      READ(5,310)IOPT
  310 FORMAT(1A1)
      IF(IOPT.NE.1H1) STOP
      TITSAL(3)='RESPTA'
      OPEN(7,TITLE=TITSAL,NEWFILE=.TRUE.)
      WRITE(7,/)NE,NVCR,(OMCR(I),I=1,NVCR)
      DO 320 I=1,NE
  320 WRITE(7,/)(MODO(I,J),J=1,NVCR)
      WRITE(7,/)(AMCO(I),I=1,NE)
      WRITE(7,/)(EXCD(I),I=1,NE)
      LOCK 7
      RETURN
      END
```

```
C      SUBRUTINA PARA LECTURA DE DATOS :  DISCOS  Y  FLECHAS

       SUBROUTINE LECDAT(DD,ED,LOCD,DEND,EXCD,DF,FL,DENF,
      1MOEL,RIGS,CFROT,NF,NE,ND,NS,ITISO,IDS)
       DIMENSION DD(ND),ED(ND),LOCD(ND),DEND(ND),DF(NF),FL(NF),
      1DENF(NF),MOEL(NF),RIGS(NS),CFROT(2),IDS(NS),EXCD(NE)
       REAL MOEL
       IF(ND.EQ.0)GO TO 5
       DO 5 I=1,ND
       READ(4,/) DD(I),ED(I),DEND(I),LOCD(I)
       IF(N.EQ.1)GO TO 5
       IF(DEND(I).EQ.0.)DEND(N)=DEND(N-1)
     5 CONTINUE
       DO 20 I=1,NF
       READ(4,/)DF(I),FL(I),DENF(I),MOEL(I)
       IF(I.EQ.1)GO TO 20
       IF(DENF(I).EQ.0.)DENF(I)=DENF(I-1)
       IF(MOEL(I).EQ.0.)MOEL(I)=MOEL(I-1)
    20 CONTINUE
       DO 30 I=1,NS
       READ(4,/) N,IDS(I),RIGS(I)
       IF(I.EQ.1)GO TO 30
       IF(RIGS(I).EQ.0.)RIGS(I)=RIGS(I-1)
    30 CONTINUE
       READ(4,1040)CFROT(1)
       READ(4,1040)CFROT(2)
    50 CONTINUE
  1040 FORMAT(A6)
       READ(4,/)(EXCD(I),I=1,NE)
       LOCK 4
       RETURN
       END

C      SUBRUTINA QUE CALCULA LA MASA Y LA RIGIDEZ DE LOS
C      SEGMENTOS DE FLECHA

       SUBROUTINE PRGEIN(DD,ED,LOCD,DEND,DF,
      1FL,DENF,MOEL,RIGF,AMCO,NF,NE,ND)
       DIMENSION DD(ND),ED(ND),LOCD(ND),DEND(ND),DF(NF),
      1FL(NF),DENF(NF),MOEL(NF),AMCO(NE),RIGF(NF)
       REAL MOEL
       PI=3.1416
       DO 5 I=1,NE
     5 AMCO(I)=0.0
       DO 20 I=1,NF
       AMFL=PI*DF(I)**2*FL(I)*DENF(I)/4.0
       AMCO(I)=AMCO(I)+0.5*AMFL
       AMCO(I+1)=AMCO(I+1)+0.5*AMFL
       RIGF(I)=(64.0*FL(I))/(PI*DF(I)**4*MOEL(I))
    20 CONTINUE
       IF(ND.EQ.0)GO TO 25
       DO 25 I=1,ND
       AMDI=PI*DD(I)**2*ED(I)*DEND(I)/4.0
       LOC=LOCD(I)
       AMCO(LOC)=AMCO(LOC)+AMDI
    25 CONTINUE
       RETURN
       END
```

```
C     SUBRUTINA PARA SELECCIONAR LOS INDICES PARA
C     LA REDUCCION DE LAS MATRICES
      SUBROUTINE CONFRO(CFROT,ICFROT,ITISO)
      DIMENSION CFROT(2),ICFROT(2,2)
      IF(ITISO.EQ.2)GO TO 75
      DO 70 I=1,2
      IF(CFROT(I).EQ.6HSIMPLE)GO TO 10
      IF(CFROT(I).EQ.6HEMPOTR)GO TO 20
      IF(CFROT(I).EQ.6HLIBRE )GO TO 30
      IF(CFROT(I).EQ.6HGUIADO)GO TO 40
   10 K=2
      L=4
      K1=1
      L1=3
      GO TO 50
   20 K=3
      L=4
      K1=1
      L1=2
      GO TO 50
   30 K=1
      L=2
      K1=3
      L1=4
      GO TO 50
   40 K=1
      L=3
      K1=2
      L1=4
   50 IF(I.EQ.2)GO TO 60
      ICFROT(1,1)=K
      ICFROT(1,2)=L
      GO TO 70
   60 ICFROT(2,1)=K1
      ICFROT(2,2)=L1
   70 CONTINUE
      GO TO 150
   75 DO 150 I=1,2
      IF(CFROT(I).EQ.6HSIMPLE)GO TO 100
      IF(CFROT(I).EQ.6HEMPOTR)GO TO 110
      IF(CFROT(I).EQ.6HLIBRE )GO TO 100
      IF(CFROT(I).EQ.6HLIBGUI)GO TO 120
      IF(CFROT(I).EQ.6HGUISOP)GO TO 120
  100 K=1
      L=2
      K1=3
      L1=4
      GO TO 130
  110 K=3
      L=4
      K1=1
      L1=2
      GO TO 130
  120 K=1
      L=3
      K1=2
      L1=4
  130 IF(I.EQ.2) GO TO 140
      ICFROT(1,1)=K
      ICFROT(1,2)=L
      GO TO 150
  140 ICFROT(2,1)=K1
      ICFROT(2,2)=L1
  150 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
C       SUBRUTINA PARA EL CALCULO DEL DETERMINANTE DE
C       FRECUENCIA PARA SOPORTES FLEXIBLES

        SUBROUTINE DFSFL(RIGS,ICFROT,NE,NS,
       1IDS,AMCO,FL,RIGF,NF,AVINC,DET,OM)
        DIMENSION RIGS(NS),ICFROT(2,2),IDS(NS),AMCO(NE)
        DIMENSION FL(NF),RIGF(NF),T(4,4),TE(4,2)
        REAL MODO
        IE=1
        CALL MATRE(IE,OM,T,AMCO,FL,RIGF,NE,NF)
        IF(IE.NE.IDS(1)) GO TO 10
        DO 5 I=1,4
     5  T(4,I)=T(4,I)-RIGS(1)*T(1,I)
    10  DO 15 I=1,4
        DO 15 J=1,2
    15  TE(I,J)=T(I,ICFROT(1,J))
        JJ=2
        DO 30 IE=2,NE
        CALL MATRE(IE,OM,T,AMCO,FL,RIGF,NE,NF)
        CALL MULTI(T,TE)
        IF(IE.NE.IDS(JJ)) GO TO 30
        DO 20 I=1,2
    20  TE(4,I)=TE(4,I)-RIGS(JJ)*TE(1,I)
        IF(JJ.LT.NS) JJ=JJ+1
    30  CONTINUE
        DET=TE(ICFROT(2,1),1)*TE(ICFROT(2,2),2)-
       1     TE(ICFROT(2,2),1)*TE(ICFROT(2,1),2)
        AVINC=-TE(ICFROT(2,1),1)/TE(ICFROT(2,1),2)
        RETURN
        END

C       SUBRUTINA PARA CALCULAR EL DETERMINANTE DE FRECUENCIA
C       PARA SOPORTES RIGIDOS

        SUBROUTINE DFSRI(RIGF,AMCO,FL,NE,NF,
       1OM,IDS,ICFROT,NS,DET,NINTFC,KI,VINCO)
        DIMENSION T(4,4),TE(4,2),AMCO(NE),FL(NF),RIGF(NF)
        DIMENSION IDS(NS),ICFROT(2,2),KI(2),VINCO(3)
        L=1
        M=NS
        IF(IDS(1).EQ.1)L=2
        IF(IDS(NS).EQ.NE)M=NS-1
        J=0
        DO 30 I=L,M
        J=J+1
    30  KI(J)=IDS(I)
        NINTFC=J
        IE=1
        CALL MATRE(IE,OM,T,AMCO,FL,RIGF,NE,NF)
        DO 35 I=1,4
        DO 35 J=1,2
    35  TE(I,J)=T(I,ICFROT(1,J))
        JJ=1
        DO 40 IE=2,NE
        IF(IE.EQ.(KI(JJ)+1))GO TO 50
        CALL MATRE(IE,OM,T,AMCO,FL,RIGF,NE,NF)
        CALL MULTI(T,TE)
        IF(IE.EQ.KI(JJ))VINCO(JJ)=-TE(1,1)/TE(1,2)
        GO TO 40
    50  CALL MATRE(IE,OM,T,AMCO,FL,RIGF,NE,NF)
        CALL INTFC(T,TE)
        IF(JJ.LT.NINTFC)JJ=JJ+1
    40  CONTINUE
@       VINCO(JJ+1)=-TE(1,1)/TE(1,2)
        DET=TE(ICFROT(2,1),1)*TE(ICFROT(2,2),2)-
       1     TE(ICFROT(2,2),1)*TE(ICFROT(2,1),2)
        RETURN
        END
```

```
C      SUBRUTINA PARA ENCONTRAR LAS FRECUENCIAS
C      NATURALES POR MEDIO DE INTERPOLACION

       SUBROUTINE INTER(GRA,OMCR,NII,RIGF,AMCO,FL,
      1ICFROT,RIGS,IDS,NS,NE,NF,ITISO,NVCR,MODO,NNVC)
       DIMENSION GRA(101,2),OMCR(NNVC),RIGF(NF),AMCO(NE),FL(NF)
       DIMENSION IDS(NS),ICFROT(2,2),RIGS(NS),MODO(NE,NNVC),KI(2)
       DIMENSION VINCO(3)
       REAL MODO
       EPS=1.C
       EPS1=0.01
       NVCR=0
       DO 90 I=1,NII-1
       IF(ABS(GRA(I,2)).LE.EPS)GO TO 80
       IF(GRA(I,2).LE.0..AND.GRA(I+1,2).LE.0.)GO TO 90
       IF(GRA(I,2).GE.0..AND.GRA(I+1,2).GE.0.)GO TO 90
       OMI=GRA(I,1)
       OMF=GRA(I+1,1)
       DI=GRA(I,2)
       DF=GRA(I+1,2)
       OMIN=OMI-DI*(OMF-OMI)/(DF-DI)
       GO TO (10,15),ITISO
    10 CALL DFSRI(RIGF,AMCO,FL,NE,NF,OMIN,IDS,ICFROT,
      1NS,D,NINTFC,KI,VINCO)
       GO TO 20
    15 CALL DFSFL(RIGS,ICFROT,NE,NS,IDS,
      1AMCO,FL,RIGF,NF,AVINC,D,OMIN)
    20 PEN1=(D-DI)/(OMIN-OMI)
       PEN2=(DF-D)/(OMF-OMIN)
       IF(PEN2-PEN1)25,25,30
    25 OMF=OMIN
       DF=D
       II=1
       GO TO 35
    30 OMI=OMIN
       DI=D
       II=2
    35 DO 60 K=1,10
       IF((DF-DI).EQ.0.) GO TO 70
       OMIN=OMI-DI*(OMF-OMI)/(DF-DI)
       IF (ITISO.EQ.2) GO TO 40
       CALL DFSRI(RIGF,AMCO,FL,NE,NF,OMIN,
      1IDS,ICFROT,NS,D,NINTFC,KI,VINCO)
       GO TO 50
    40 CALL DFSFL(RIGS,ICFROT,NE,NS,IDS,
      1AMCO,FL,RIGF,NF,AVINC,D,OMIN)
    50 IF(II.EQ.2) GO TO 55
       OMF=OMIN
       DF=D
       IF(ABS(OMIN-OMF).LE.EPS1) GO TO 70
       GO TO 60
    55 OMI=OMIN
       DI=D
       IF(ABS(OMIN-OMF).LE.EPS1) GO TO 70
    60 CONTINUE
    70 NVCR=NVCR+1
       GO TO(78,75),ITISO
    75 CALL DFSFL(RIGS,ICFROT,NE,NS,IDS,AMCO,
      1FL,RIGF,NF,AVINC,D,OMIN)
       CALL MOVIBR(RIGS,ICFROT,NE,NS,IDS,AMCO,
      1FL,RIGF,NF,AVINC,MODO,OMIN,NVCR,NNVC)
       GO TO 79
    78 CALL DFSRI(RIGF,AMCO,FL,NE,NF,OMIN,IDS,
      1ICFROT,NS,D,NINTFC,KI,VINCO)
       CALL MOVISR(OMIN,MODO,NVCR,KI,NINTFC,AMCO,
      1RIGF,FL,NE,NF,ICFROT,NNVC,VINCO)
    79 OMCR(NVCR)=OMIN
       GO TO 90
    80 NVCR=NVCR+1
       OMCR(NVCR)=GRA(I,1)
       OMIN=GRA(I,1)
       GO TO (95,100),ITISO
```

```
   95 CALL DFSRI(RIGF,AMCO,FL,NE,NF,OMIN,IDS,
     1ICFROT,NS,D,NINTFC,KI,VINCO)
      CALL MOVISR(OMIN,MODO,NVCR,KI,NINTFC,AMCO,
     1RIGF,FL,NE,NF,ICFROT,NNVC,VINCO)
      GO TO 90
  100 CALL DFSFL(RIGS,ICFROT,NE,NS,IDS,
     1AMCO,FL,RIGF,NF,AVINC,D,OMIN)
      CALL MOVIBR(RIGS,ICFROT,NE,NS,IDS,AMCO,
     1FL,RIGF,NF,AVINC,MODO,OMIN,NVCR,NNVC)
   90 CONTINUE
      RETURN
      END

C     SUBRUTINA PARA NORMALIZACION DE LA MATRIZ MODAL

      SUBROUTINE NORMAL(A,AMCO,NE,NVCR)
      DIMENSION A(NE,NVCR),AMCO(NE)
      DO 5 K=1,NVCR
      S=0.0
      DO 10 I=1,NE
   10 S=S+AMCO(I)*A(I,K)*A(I,K)
      DO 5 I=1,NE
    5 A(I,K)=A(I,K)/SQRT(S)
      RETURN
      END

C     SUBRUTINA PARA ENSAMBLAR LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA
C     PARA UN SEGMENTO COMPUESTO

      SUBROUTINE MATRE(IE,OM,T,AMCO,FL,RIGF,NE,NF)
      DIMENSION T(4,4),AMCO(NE),FL(NF),RIGF(NF)
      DO 10 I=1,4
      DO 10 J=1,4
   10 T(I,J)=0.0
      IF(IE.EQ.1) GO TO 20
      T(1,1)=1.0
      T(1,2)=FL(IE-1)
      T(1,3)=RIGF(IE-1)*FL(IE-1)/2.0
      T(1,4)=RIGF(IE-1)*FL(IE-1)**2/6.0
      T(2,2)=1.0
      T(2,3)=RIGF(IE-1)
      T(2,4)=T(1,3)
      T(3,3)=1.0
      T(3,4)=T(1,2)
      T(4,1)=AMCO(IE)*OM*OM
      T(4,2)=T(4,1)*FL(IE-1)
      T(4,3)=T(4,2)*RIGF(IE-1)/2.0
      T(4,4)=1.0+T(4,3)*FL(IE-1)/3.0
      RETURN
   20 T(4,1)=AMCO(1)*OM*OM
      DO 25 I=1,4
   25 T(I,I)=1.0
      RETURN
      END
```

```
C       SUBRUTINA PARA CALCULAR EL  ESTADO AL LADO DERECHO
C       DE UNA ESTACION EN QUE SE ENCUENTRA UN SOPORTE

        SUBROUTINE INTFC(T,TE)
        DIMENSION T(4,4),TE(4,2),ALFA(4)
        COCI=-TE(1,1)/TE(1,2)
        DO 5 I=1,4
      5 ALFA(I)=TE(I,1)+TE(I,2)*COCI
        DO 20 I=1,4
        SUM=0.0
        DO 10 K=1,4
     10 SUM=SUM+T(I,K)*ALFA(K)
        TE(I,1)=SUM
     20 TE(I,2)=T(I,4)
        RETURN
        END

C       SUBRUTINA PARA MULTIPLICACION DE MATRICES DE TRANSFERENCIA

        SUBROUTINE MULTI(T,TE)
        DIMENSION T(4,4),TE(4,2),TEMP(4,2)
        DO 10 I=1,4
        DO 10 J=1,2
     10 TEMP(I,J)=0.0
        DO 5 I=1,4
        DO 5 J=1,2
        DO 5 K=1,4
      5 TEMP(I,J)=TEMP(I,J)+T(I,K)*TE(K,J)
        DO 15 I=1,4
        DO 15 J=1,2
     15 TE(I,J)=TEMP(I,J)
        RETURN
        END

C       SUBRUTINA PARA CALCULAR LOS MODOS DE VIBRACION
C       PARA SOPORTES FLEXIBLES

        SUBROUTINE MOVIBR(RIGS,ICFROT,NE,NS,IDS,
       1AMCO,FL,RIGF,NF,AVINC,MODO,OMIN,IVCR,NNVC)
        DIMENSION RIGS(NS),ICFROT(2,2),IDS(NS),AMCO(NE)
        DIMENSION RIGF(NF),FL(NF),MODO(NE,NNVC),T(4,4),TE(4,2)
        REAL MODO
        IE=1
        CALL MATRE(IE,OMIN,T,AMCO,FL,RIGF,NE,NF)
        IF(IE.NE.IDS(1)) GO TO 10
        DO 5 I=1,4
      5 T(4,I)=T(4,I)-RIGS(1)*T(1,I)
     10 DO 15 I=1,4
        DO 15 J=1,2
     15 TE(I,J)=T(I,ICFROT(1,J))
        MODO(IE,IVCR)=TE(1,1)+TE(1,2)*AVINC
        JJ=2
        DO 35 IE=2,NE
        CALL MATRE(IE,OMIN,T,AMCO,FL,RIGF,NE,NF)
        CALL MULTI(T,TE)
        IF(IE.NE.IDS(JJ)) GO TO 30
        DO 20 I=1,2
     20 TE(4,I)=TE(4,I)-RIGS(JJ)*TE(1,I)
        IF(JJ.LT.NS) JJ=JJ+1
     30 CONTINUE
        MODO(IE,IVCR)=TE(1,1)+TE(1,2)*AVINC
     35 CONTINUE
        RETURN
        END
```

```
C     SUBRUTINA PARA CALCULAR LOS MODOS DE VIBRACION
C     SOPORTES RIGIDOS
      SUBROUTINE MOVISR(OMIN,MODO,IVCR,KI,NINTFC,
     1AMCO,RIGF,FL,NE,NF,ICFROT,NNVC,VINCO)
      DIMENSION KI(NINTFC),T(4,4),TE(4,2),VINCO(2),AMCO(NE),
     1FL(NF),RIGF(NF),MODO(NE,NNVC),ICFROT(2,2)
      REAL MODO
      IE=1
      CALL MATRE(IE,OMIN,T,AMCO,FL,RIGF,NE,NF)
      DO 5 I=1,4
      DO 5 J=1,2
    5 TE(I,J)=T(I,ICFROT(1,J))
      JJ=1
      KK=1
      MODO(IE,IVCR)=TE(1,1)+TE(1,2)*VINCO(KK)
      DO 40 IE=2,NE
      IF(IE.EQ.(KI(JJ)+1))GO TO 50
      CALL MATRE(IE,OMIN,T,AMCO,FL,RIGF,NE,NF)
      CALL MULTI(T,TE)
      GO TO 40
   50 CALL MATRE(IE,OMIN,T,AMCO,FL,RIGF,NE,NF)
      CALL INTFC(T,TE)
      IF(JJ.LT.NINTFC)JJ=JJ+1
      KK=KK+1
   40 MODO(IE,IVCR)=TE(1,1)+TE(1,2)*VINCO(KK)
      RETURN
      END
*
```

```
$RESET FREE
FILE  4=ENTRADA,UNIT=DISK,RECORD=14,BLOCKING=30
FILE  7=SALIDA ,UNIT=DISK,RECORD=14,BLOCKING=30
      DIMENSION MODO(91,6),OMCR(6),AMCO(91),EXCD(91)
      DIMENSION A(91,6),PROD(91,91),X(91),THETA(6),FUER(91)
      DIMENSION TITEN(4),TITSAL(4)
      REAL MODO
      PRINT */,' NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS DE ENTRADA ? '
      READ(5,2)TITEN(1),TITEN(2),TITEN(3)
    2 FORMAT(4A6)
      TITEN(4)='.'
      OPEN(4,TITLE=TITEN)
      READ(4,/)NE,NVCR,(OMCR(I),I=1,NVCR)
      DO 10 I=1,NE
   10 READ(4,/)(MODO(I,J),J=1,NVCR)
      READ(4,/)(AMCO(I),I=1,NE)
      READ(4,/)(EXCD(I),I=1,NE)
      LOCK 4
      CALL RESPTA(MODO,AMCO,NE,NVCR,EXCD,OMCR,TITSAL,
     1A,PROD,X,THETA,FUER)
      STOP
      END
      SUBROUTINE RESPTA(MODO,AMCO,NE,NVCR,EXCD,OMCR,TITSAL,
     1A,PROD,X,THETA,FUER)
      DIMENSION MODO(NE,NVCR),AMCO(NE),OMCR(NVCR),EXCD(NE)
      DIMENSION A(NE,NVCR),PROD(NE,NE),X(NE),THETA(NVCR),FUER(NE),TITSAL
     1(4)
      REAL MODO
      ISALT=5
    2 PRINT */,'DESEA CAMBIAR LOS VALORES DE LAS EXCENTRICIDADES ? (SI=1
     1,NO=RET) '
      READ(5,4)IOPT
    4 FORMAT(1A1)
      IF(IOPT.NE.1H1) GO TO 10
      PRINT */,' DAR NUEVOS VALORES DE LA EXCENTRICIDAD '
      READ(5,/)(EXCD(I),I=1,NE)
   10 PRINT */,'RANGO DE VELOCIDADES , NUM. DE INCREMENTOS ? '
      READ(5,/)OM1,OM2,NI
      DELTOM=(OM2-OM1)/NI
      OM=OM1
      PRINT */,' NOMBRE DEL ARCHIVO PARA DATOS DE SALIDA ? '
      READ(5,100)TITSAL(1),TITSAL(2),TITSAL(3)
  100 FORMAT(4A6)
      TITSAL(4)='.'
      OPEN(7,TITLE=TITSAL,NEWFILE=.TRUE.)
      DO 80 II=1,NI+1
      OMC=OM*OM
      DO 25 I=1,NVCR
   25 THETA(I)=1.0/(OMCR(I)*OMCR(I)-OMC+0.001)
      DO 30 I=1,NE
   30 FUER(I)=AMCO(I)*EXCD(I)*OMC
      DO 110 I=1,NE
      DO 110 J=1,NVCR
  110 A(I,J)=MODO(I,J)*THETA(J)
      DO 120 I=1,NE
      DO 120 J=1,NE
      PROD(I,J)=0.0
      DO 120 K=1,NVCR
  120 PROD(I,J)=PROD(I,J)+A(I,K)*MODO(J,K)
      DO 130 I=1,NE
      X(I)=0.0
      DO 130 K=1,NE
  130 X(I)=X(I)+PROD(I,K)*FUER(K)
      DO 140 I=1,NE
  140 X(I)=ABS(X(I))
      WRITE(7,/)OM,(X(I),I=1,NE,ISALT),0
   80 OM=OM+DELTOM
      LOCK 7
      PRINT */,' DESEA CONTINUAR ? (SI=1,NO=RET) '
      READ(5,4)IOPT1
      IF(IOPT1.NE.1H1) RETURN
      GO TO 2
      END
$
```