4
2ej

# UNIVERSIDAD ANAHUAC

ESCUELA DE INGENIERIA

CON ESTUDIOS INCORPORADOS A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

VINCE IN BONO MALUM

# TRANSFORMACION CONFORME APLICADA A LA DETERMINACION DE LA DISTRIBUCION DE PRESIONES EN UN DISIPADOR DE ENERGIA DE TIPO SALTO DE ESQUI



T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A

HILDA MARIA LOPEZ ROBLES

MEXICO, D. F. 1988

# I N D I C E


| | | PAGINA |
|---|---|---|
| INTRODUCCION | | 1 |
| CAPITULO I | DISIPACION DE ENERGIA | 4 |
| I.1. | Aspectos generales | 4 |
| I.1.1. | Estructuras terminales | 6 |
| I.2. | Estructuras deflectoras | 9 |
| CAPITULO II | DETERMINACION DE PRESIONES EN ESTRUCTURAS DEFLECTORAS | 25 |
| II.1. | Generalidades | 25 |
| II.2. | Métodos de cálculo | 26 |
| II.2.1. | Criterios propuestos | 26 |
| CAPITULO III | PROBLEMA DE APLICACION | 39 |
| III.1. | Introducción | 39 |
| III.2. | Aspectos generales | 40 |
| III.2.1 | Datos del proyecto | 41 |
| III.3. | Planteamiento del problema | 45 |
| III.4. | Método de solución | 47 |

PAGINA


| | | |
|---|---|---|
| III.5. | Comparación de resultados teóricos con experimentales | 58 |
| III.5.1 | Resultados obtenidos por el método propuesto | 58 |
| III.5.2 | Resultados obtenidos por el método de Douma | 61 |
| III.5.3 | Comparación de resultados | 63 |

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 64

APENDICES

Notación utilizada 67

Teoría básica de Representacion Conforme 69

Referencias 80

# I N T R O D U C C I O N

El desarrollo de técnicas aplicables en la explicación de fenómenos naturales, es una de las principales preocupaciones de los investigadores en ingeniería. La falta de experimentación en algunos de estos fenómenos conducen, en el mejor de los casos, al diseño en exceso de las estructuras, en lo que a su trabajo real se refiere. Ahora bién, la falta de herramientas adecuadas en el cálculo de los requerimientos a que está sujeta una estructura conduce a la suposición de algunos aspectos que llevan al ingeniero a incertidumbres importantes en el comportamiento de las mismas.

Como principal objetivo en el desarrollo de este trabajo se considera la utilización de herramientas matemáticas que pueden simular el comportamiento de un disipador de energía al pie de un vertedor, idealizando el medio sobre el que actúa.

Investigaciones realizadas al respecto por TIO-CHUN CHEN[1] y YUN-SHEN YU[2], en el desarrollo de un método de análisis bidimensional para calcular la distribución de la presión y el perfil del flujo que ocurre en una cubeta deflectora al pie de un vertedor, han conducido a la aplicación del potencial complejo del flujo y, mediante el uso de ténicas de transformación conforme, a una aproximación del comportamiento hidráulico de la estructura.

Se persigue, como finalidad primordial, proporcionar a los interesados en este tipo de actividades una visión general de la importancia que tienen estas investigaciones sumadas a otras y los resultados en el quehacer práctico.

El presente trabajo se divide en los siguientes capítulos:

En el primer capítulo se dá un enfoque global de la importancia de disipar la energía de un flujo en presas con cortina de altura considerable, describiendo características generales de los tipos de estructuras deflectoras que se utilizan en la actualidad.

En el segundo capítulo se mencionan los criterios propuestos por diferentes investigadores, que ayudan al cálculo de la presión de fondo cuando el flujo del fluído es desviado por una curva vertical.

En el tercer capítulo se mencionan las características principales y la ubicación de la presa del problema de apli cación, resolviéndose por el método desarrollado por[3] Tio-Chun Chen y Yun Shen Yu, haciendo la comparación de los resultados obtenidos por los mismos en el deflector de la presa Hartwell[4] con uno de los criterios expuestos en el segundo capítulo utilizados para el mismo fín.

Así mismo, se presentan las conclusiones y recomendaciones de dicho estudio y los apéndices, que contienen la notación utilizada, la teoría de transformación conforme y las referencias.

Por último, se hace un agradecimiento a todas aquellas personas e instituciones que ofrecieron su tiempo y sus conocimientos para el logro de este trabajo.

# C A P I T U L O   I

# I. DISPACION DE ENERGIA

## I.1. ASPECTOS GENERALES

Cuando se eleva el tirante del agua en un embalse y la - corriente se derrama sobre el muro vertedor, el agua adquiere una energía de posición que se transforma en energía de velocidad o energía cinética, cuya magnitud depende de la altura de la caída y consecuentemente de la altura de la cortina.

La socavación y erosión del agua al pie de las estructu-- ras son los perjuicios que llega a ocasionar el escurrimiento debido a una alta velocidad, que obviamente ponen en peligro la estabilidad de la estructura y la llegan a dañar parcial-- mente.

En la figura No. 1 se muestra la socavación del agua debido a una fuerte velocidad, al pie de una cortina cimentada en terreno poco resistente.

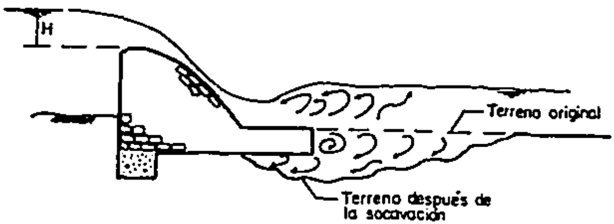



**Fig. 1 Socavación al pie de una cortina.**

En las presas de derivación muchas veces es necesario diseñar un dispositivo, ya sea adosado al cuerpo de la cortina o formando parte de ella, con el fín de disipar la energía de velocidad del escurrimiento en el vertedor y no deteriorar las estructuras que forman la derivación.

La función de la disipación de la energía de las descargas del vertedor se cumple con una selección adecuada de la estructura terminal.

## I.1.1 ESTRUCTURAS TERMINALES

La selección del tipo de estructura terminal depende de la posición relativa de las elevaciones del final del canal de descarga y del nivel del agua del río en el punto de desfogue; es por esto que, cuando existe, debe determinarse el efecto del remanso en la zona de descarga.

Cuando la obra de excedencias descarga al río en forma directa, sin empleo de una estructura disipadora de energía, se realiza mediante una cubeta de lanzamiento o salto de esquí, figura No.2

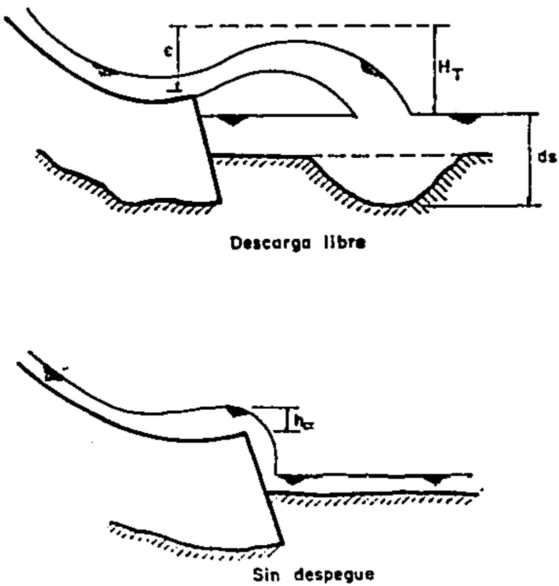



**Fig.2 Cubeta de lanzamiento.**

Si es necesario disipar la energía del escurrimiento antes de efectuar la descarga al río, se empleará un tanque amortiguador o una cubeta deflectora como estructura disipadora de energía. La selección requiere un estudio de las condiciones del remanso en la descarga, mediante una comparación entre la curva de tirantes en el río-gastos en la zona de la descarga y la curva [5] de tirantes conjugados mayores-gastos.

Dentro del problema de disipación de energía [6] al pie de las estructuras vertedoras, existen cuatro casos fundamentales definidos por la relación entre las curvas de tirantes río-gastos y conjugados mayores-gastos que se necesitaría para formar un resalto claro al pie de la estructura, cualquiera que fuese la condición de escurrimiento de las ilustradas en la figura No. 3.

La condición indicada en la figura (a) se presenta usualmente en ríos caudalosos de planicies y la disipación se hace normalmente con cubetas deflectoras.

Siempre se deberá revisar la necesidad de proteger la zona de descarga porque puede haber velocidades erosivas, al variar los anchos de plantilla del tanque, el nivel de la plantilla y el gasto que lo determina, en consecuencia la selección de ancho y elevación de la plantilla se basa en consideraciones de tipo económico.

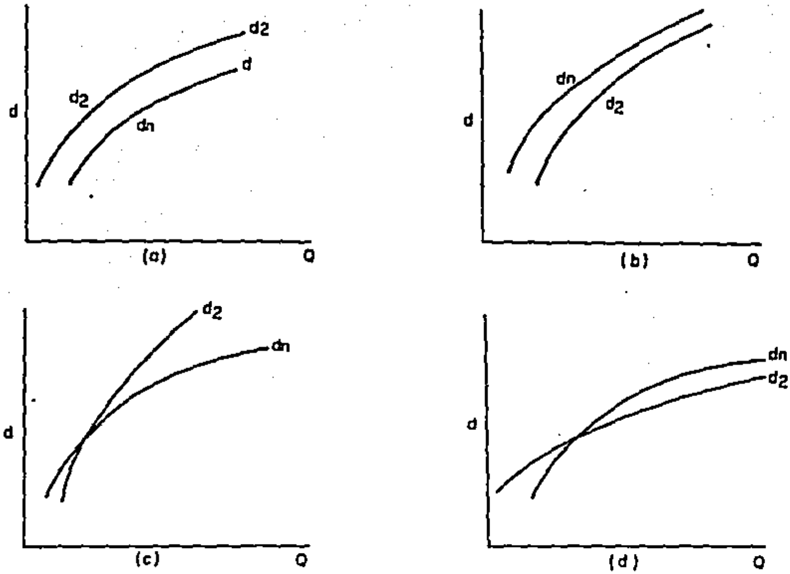



**Fig. 3 Curva tirante-gasto (d-Q) típicas, en las descargas (dn, tirante normal en el río; $d_2$ tirante mayor del salto)**

(a) La curva de tirantes del río queda siempre sobre la de conjugados.

(b) La curva de tirantes queda siempre bajo la de conjugados

(c) Las curvas se cruzan y la curva de tirantes del río tiene mayor curvatura que la de conjugados.

(d) Las curvas se cruzan y la curva de tirantes del río tiene menos curvatura que la de conjugados.

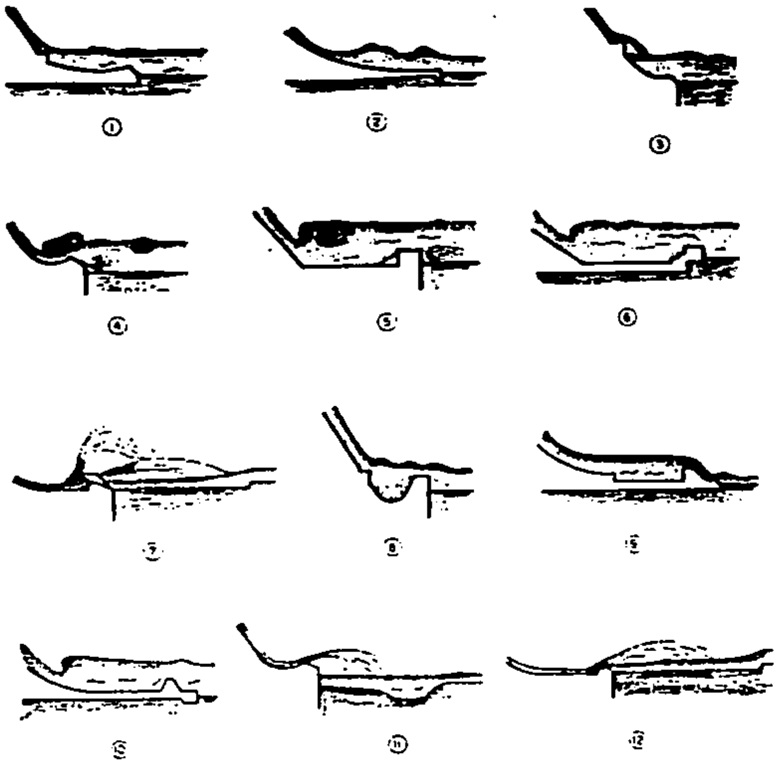
## I.2. ESTRUCTURAS DEFLECTORAS

La utilización de estructuras deflectoras[7], como una al-- ternativa de los tanques amortiguadores, ha tenido limitaciones por la incertidumbre de su comportamiento y efecto hidráulico en la erosión del suelo, siendo necesario calcular con - la mayor exactitud los valores que puede alcanzar la energía- cinética de la corriente dentro de la estructura y en los límites de la obra.

El sitio donde se pretende construír la derivadora debe presentar condiciones favorables de permeabilidad y resistencia, para que la descarga del agua se controle mediante este tipo de estructuras construidas al pie de la cortina.

El fin de estos dispositivos es alejar de la estructura el agua de descarga hasta un sitio en el que sus efectos de - erosión y socavación no sean peligrosos para la estabilidad - de la misma estructura, o de otras que estén cercanas, y de - igual modo disipar la energía del agua.

Las estructuras más empleadas en la República Mexicana - son el trampolín sumergido como cubeta disipadora de energía- y el salto de esquí como cubeta de lanzamiento.



- ALGUNOS EJEMPLOS DE ESTRUCTURAS DEFLECTORAS

Fig. 4

Trampolín sumergido

Este dispositivo es adecuado cuando los tirantes en el cauce son grandes, de manera que un salto hidráulico sería poco efectivo y proporcionaría una solución antieconómica, por la necesidad de un tanque amortiguador grande. Su funcionamiento consiste en el lanzamiento del agua con determinado ángulo, y la formación de dos remolinos $R_1$ y $R_2$, Figura 5.

Dentro de este tipo de trampolines o cubetas deflectoras, se distinguen fundamentalmente dos clases: la cubeta lisa tipo Lievi-Chertousov y la dentada tipo U.S.B.R., figuras 7 y 9, respectivamente.

La diferencia de efectividad en ambas se debe a que la corriente de agua que sale del deflector en la cubeta lisa está animada de alta velocidad y por la dirección hacia arriba se mezcla menos con el agua de descarga, dando por resultado que el remolino aguas abajo y la turbulencia de la superficie sean fuertes y por lo tanto su efecto se deja sentir en una mayor longitud aguas abajo. En cambio, en el trampolín con dientes, debido a éstos unicamente parte de la corriente de alta velocidad se dirige a la superficie del agua con lo cual las turbulencias casi se eliminan, observándose un remolino menos violento aguas abajo.

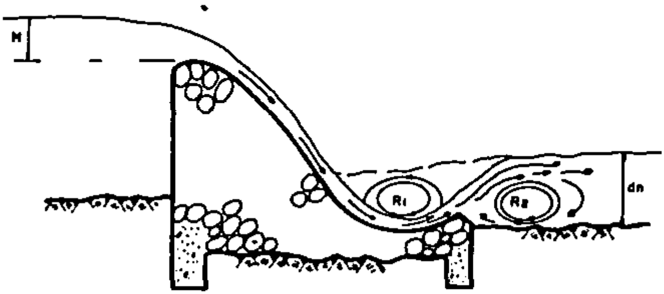



Fig. 5 TRAMPOLIN SUMERGIDO

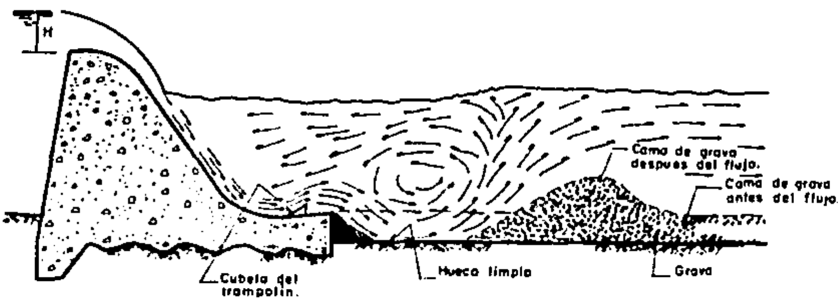



Fig. 6 ESQUEMA DE FUNCIONAMIENTO DEL TRAMPOLIN SUMERGIDO

$H_o$ diferencia entre el nivel de agua en el embalse y la cota del fondo, en m.

h tirante a la salida del deflector.

p elevación respecto al fondo del labio del deflector, en m.

q gasto unitario del gasto mínimo considerado $Q_{mín}$, en $m^3/s/m$.

t tirante en el río para el gasto $Q_{mín}$ reducido en un 10%, en m.

$\alpha$ ángulo de salida seleccionado, en grados.

$\varphi$ coeficiente que toma en cuenta la pérdida de carga hasta el extremo del deflector. El valor se obtiene aplicando Bernoulli para evaluar el extremo la pérdida de carga.

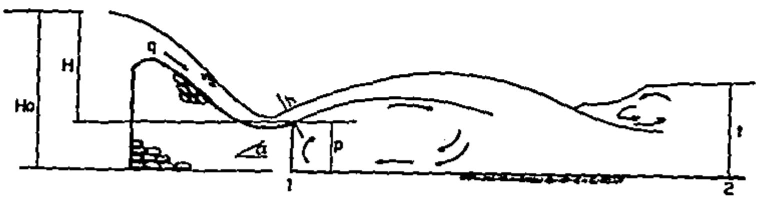
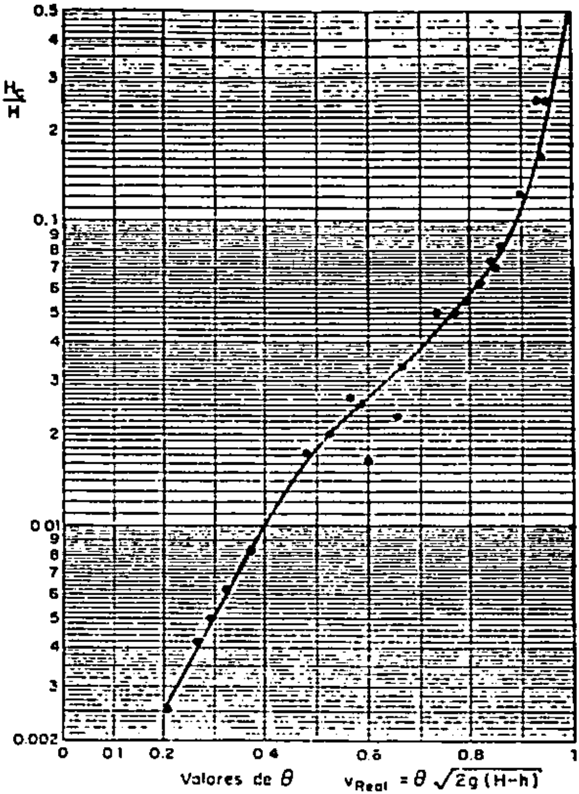
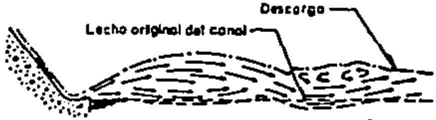



**Fig. 7 Cubeta disipadora tipo Liavi—Chertousov.**



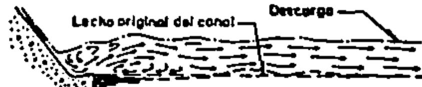

Nota: $H_c$ = energía sobre la cresta. Las demás variables se definen en la fig 7

**CUBETA TIPO LIEVI-CHERTOUSOV**



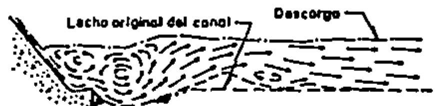

Nivel de la descarga inferior al mínimo

Etapa (A)



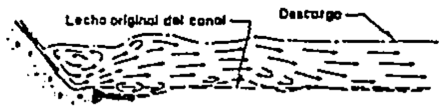

Nivel de la descarga inferior al promedio, pero arriba del mínimo

Etapa (B)




Nivel de la descarga arriba del máximo. El escurrimiento ahogado desde el zampeado socava el canal

Etapa (C)




Nivel de la descarga igual que en C. El escurrimiento ahogado la levanta en remolino de fondo. El agujero socavado se rellena en la misma forma que en B. El ciclo se repite

Etapa (D)

**Fig. 8**

**CARACTERISTICAS DEL FUNCIONAMIENTO HIDRAULICO DE UNA CUBETA ESTRIADA**

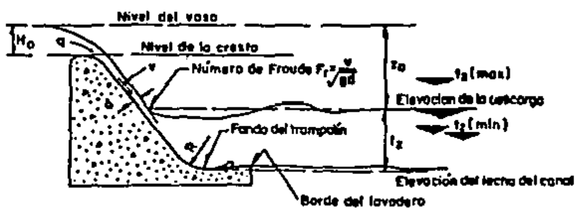
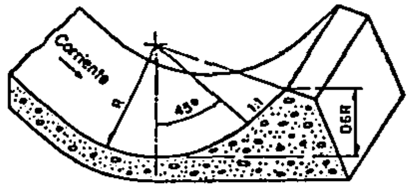
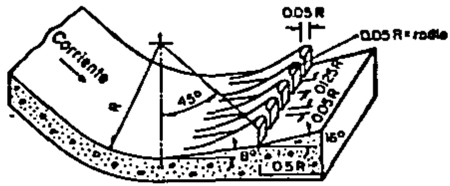



**Fig. 9 NOMENCLATURA DE LAS CUBETAS ESTRIADAS**

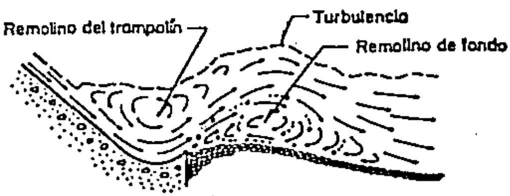



(A) Trampolin liso

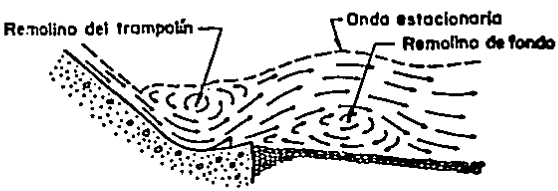



(B) Trampolín estriado

**Fig.10 CUBETA DE LANZAMIENTO AHOGADOS**




A) Trampolín del tipo liso




B) Trampolín del tipo estriado

**Fig. 11**

**FUNCIONAMIENTO HIDRAULICO DE LAS CUBETAS LISAS Y ESTRIADAS**

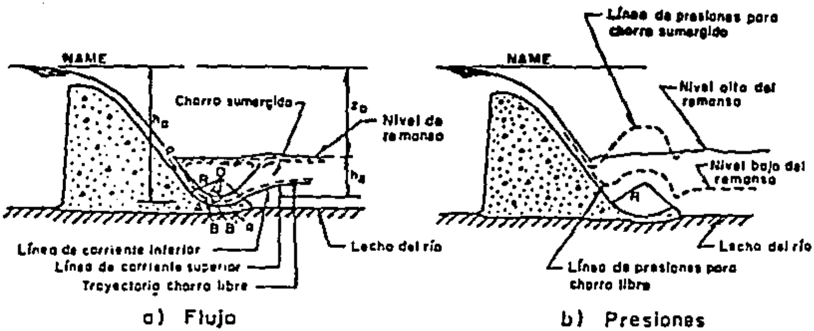



**Fig. 12**

CARACTERISTICAS DEL FUNCIONAMIENTO HIDRAULICO DE UNA CUBETA LISA

En la Dirección General de Obras Hidráulicas para el Desarrollo Rural, se ha ensayado y empleado un tipo de disipador, que en este medio se conoce con el nombre de deflector tipo Tenaxco,[7] porque se empleó para el vertedor de la presa Tenaxco, Jal. La figura No.13 muestra este tipo de disipador que consiste fundamentalmente en una cubeta amortiguadora con fondo de cierta profundidad; este tipo de deflector trabaja ahogado debiendo quedar su nariz a una elevación igual a la superficie del agua del tirante del río. Económicamente compite con un tanque amortiguador pero se recomienda hacer un estudio comparativo para definir su empleo.

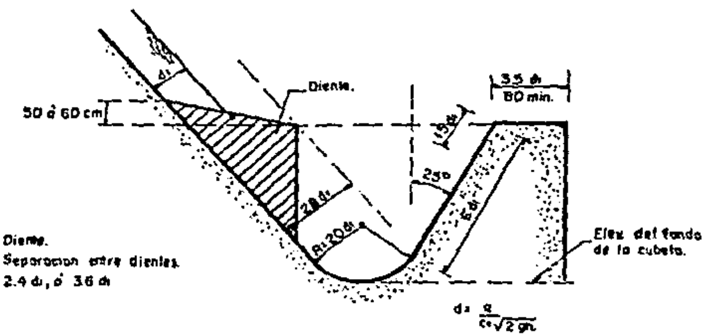



**Fig. 13 Deflector tipo tenaxco.**

Los datos que indica la figura No. 13 son los recomendados para el diseño de este deflector que son el resultado de ensayos hechos.[7]

Trampolín libre o salto de esquí.

Este tipo de deflector se emplea cuando el terreno es muy resistente, la cortina es mas o menos alta y los tirantes en el río no resultan ser muy grandes. La figura No.14 señala la forma de la trayectoria del agua que se tendría durante su funcionamiento.

La disipación de energía que se consigue, se debe a las turbulencias y casi pulverización de la corriente, por la fricción con el aire originada por su lanzamiento desde el trampolín y a lo largo de su recorrido. Además se logra alejar la caída del pie de la cortina de suerte que su efecto ya no sea peligroso para dicha estructura.

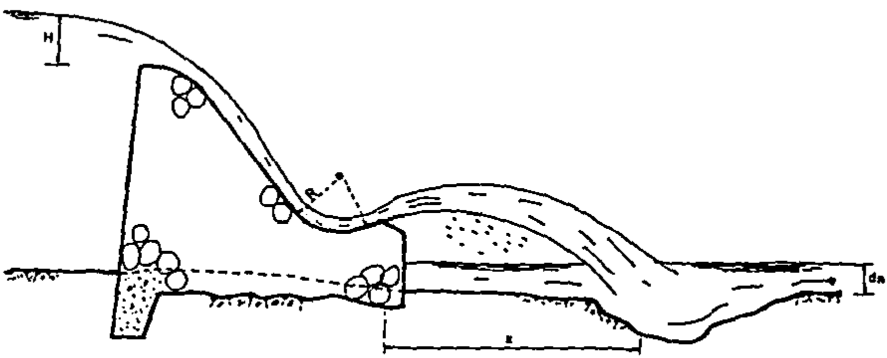



Fig. 14 Trampolin libre o salto de esqui.

Una de las condiciones que se debe cumplir para que el salto de esquí funcione correctamente es que el nivel del agua correspondiente al tirante del río para máxima descarga debe ser inferior a la elevación de la naríz del deflector; esto es, para que no haya posibilidad de ahogamiento y deje de funcionar como tal.

Por otra parte, es muy ventajoso colocar la naríz del deflector a un nivel lo más bajo que sea posible, siempre y cuando se cumpla con el requisito señalado, pues se logra un mayor lanzamiento de la caída del manto de agua. La distancia $X$, figura No. 15 puede calcularse aproximadamente con la fórmula que dá la distancia de caída de un móvil lanzado con una velocidad inicial y con cierto ángulo de tiro. [7]

$$y = x \tan \theta - \frac{x^2}{K\, 4(d + h_v) \cos\theta}$$

donde

$\theta$ ángulo de salida de chorro, con respecto a la horizontal

K es igual a 1.0 para el chorro teórico y 0.9 para considerar la pérdida de energía en el lanzamiento, turbulencias

d tirante a la entrada del trampolín, en m.

v velocidad a la entrada del trampolín, en m/s.

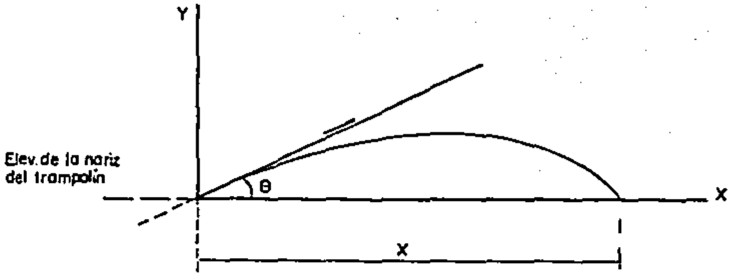



**Fig. 15 Trayectoria aproximada del salto de esquí.**

El alcance horizontal del chorro al nivel de la salida se encuentra para $y=0$ en la ec.(1) [7]

$$X = 4\ k(d + h_v)\ \tan\theta\cos^2\theta$$

Como $\qquad 2\tan\theta\ \cos^2\theta = \operatorname{sen} 2\theta$ , se tiene que

$$X = 2\ k(d + h_v)\ \operatorname{sen} 2\theta .$$

$X$ máxima se obtiene para = 45°.

Sin embargo, por influír el radio del trampolín en el valor del ángulo de salida, así como la elevación de la naríz con relación al fondo de la cubeta, $\theta$ generalmente adquiere un valor práctico alrededor de 30° a 45° [7].

Existe una probabilidad muy alta de que se produzca el fenómeno de cavitación en la zona inferior del manto de agua que puede dañar a las paredes de la estructura. Esto puede suceder porque el aire en dicha zona es arrastrado por la corriente y no se sustituye suficientemente, de manera que la presión en ese sitio puede deprimirse hasta un valor que propicie el fenómeno de cavitación.

Por lo anterior, es indispensable proporcionar abajo del manto aireación suficiente, que se consigue en forma natural no pegando los límites del deflector a las laderas del cauce a fin de propiciar la entrada de aire. Cuando esto no es posible, la aireación se puede lograr de manera artificial, mediante tuberías instaladas en tal forma que se propicie una circulación de aire entre el exterior y la zona confinada abajo del manto.

En ocasiones, la longitud de este deflector puede disminuirse con relación a la longitud de cresta vertedora mediante la convergencia de los muros guias laterales, figura No.16. Esta convergencia se emplea con el fín de adaptar más el disipador a las laderas, tanto por conveniencias topográficas y geológicas, como para no confinar la zona abajo del manto.
El ángulo máximo de convergencia recomendado es de $\alpha = 10°$, con el fín de impedir interferencias entre los líquidos del escurrimiento.[7]

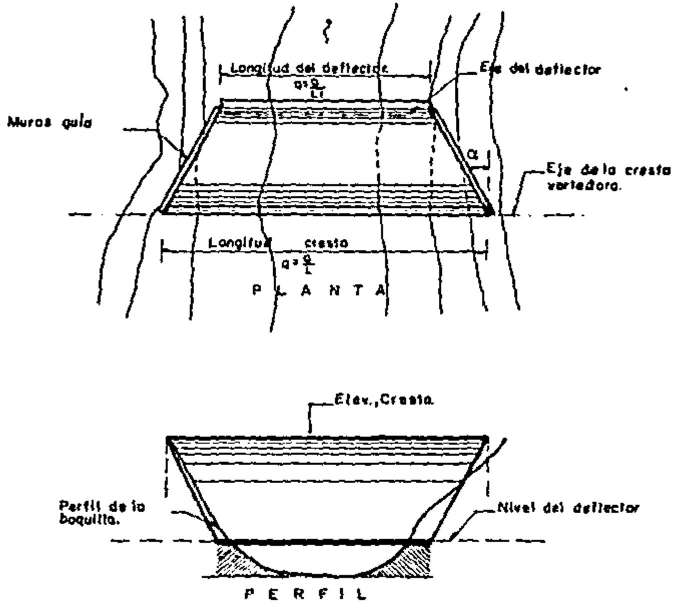



**Fig. 16 Convergencia de muros guía**

No existe hasta la fecha un método bien definido para diseñar la geometría del salto de esquí, que esencialmente consiste en la determinación del radio de la cubeta deflectora y del ángulo de salida que se le debe dar al chorro.

Desde luego, lo recomendable para el proyecto de un salto de esquí es ensayar en un laboratorio el problema en cuestión, pero esto no siempre es justificable, dada la magnitud de la obra.

Los resultados que se han obtenido de la experiencia en el laboratorio de la Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos de las obras construídas han sido satisfactorias. La figura No. 17 indica las dimensiones mínimas recomendadas para los saltos de esquí.[7]

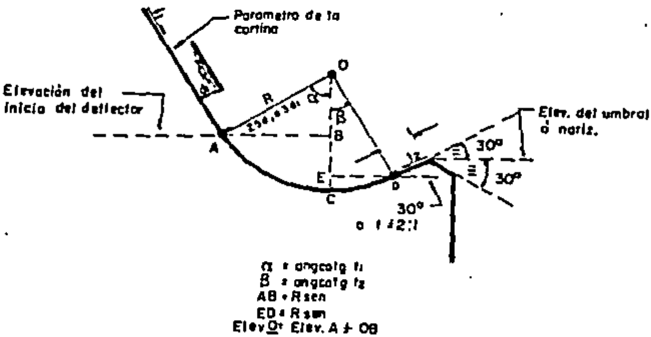



Fig. 17 Geometría del salto de esquí.

Esta forma de determinar la geometría no contempla la revisión de los esfuerzos a los que se encuentra sujeta la estructura, por lo que en el siguiente capítulo se presentan los métodos más comunes en su determinación.

# C A P I T U L O   II

# II. DETERMINACION DE PRESIONES EN ESTRUCTURAS DEFLECTORAS

## II.1. GENERALIDADES

Las fuerzas que se presentan al pasar el agua sobre el deflector son de interés para el diseño estructural del mismo. Esta fuerza se debe a la presión de fondo que cambia continuamente, provocada por el radio de curvatura de la cubeta de lanzamiento.

Debido a su geometría, la fuerza centrífuga incrementa la presión sobre las paredes y fondo del canal provocando que la presión sea mayor a la hidrostática en cualquier punto de la curva. El conocimiento del valor real más aproximado de las presiones que se desarrollan dentro de la curva ayudará a tener un diseño estructural más adecuado, tanto de la plantilla como de las paredes de la obra, que van a ser función de las solicitaciones a que estén sujetas las diferentes partes que forman la obra.

Existen varios criterios propuestos por diferentes investigadores, que ayudan al cálculo de la presión de fondo cuando la vena líquida es desviada por una curva vertical. Ellos van desde los más simples, en los que se considera a la presión como una función de la velocidad del agua y su tirante, hasta los teóricos más elaborados.

## II.2. METODOS DE CALCULO

### II.2.1. CRITERIOS PROPUESTOS

Criterio de D.B. Gumensky [8] (1954)

Supone que la velocidad angular del agua sobre el deflector debe permanecer constante para el tirante total y el incremento de presión debe ser el mismo en todas direcciones.

(1) $$h_{pc} = \frac{p}{\gamma} = \frac{dv^2}{gR}$$

donde $h_{pc}$ es la presión producida por la aceleración centrífuga; p es la presión, en $kgf/m^2$; $\gamma$ peso específico, en $kgf/m^3$; d tirante de agua, en m; v velocidad media del flujo, en m/s; $v^2/R$ es la aceleración centrífuga.

En base a ésto, la presión total sobre cualquier punto de la curva es

(2) $$h_p = d \cos\alpha + h_{pc}$$

$\alpha$ es el ángulo que forma la tangente con la horizontal.

Criterio de J.H. Douma[8] (1954)

El investigador supone que la distribución de la velocidad en el deflector debe seguir el modelo del vórtice irrotacional y por consiguiente las líneas de corriente son circulares y concentricas con el deflector. Entonces la presión debida a la fuerza centrífuga se puede calcular de

(3) $$h_{pc} = \frac{p}{\gamma} = \frac{q}{R}\frac{2h_1}{g}$$

donde $h_1$ es la diferencia entre la elevación del agua en el embalse y un punto cualquiera sobre la curva. La ventaja de esta teoría radica en el hecho de que se obtiene la variación de la presión centrífuga a lo largo de la curva, siendo mínima al inicio y máxima en un punto cercano a la parte media de la curva, considerando que no existe pérdida de energía entre el nivel del embalse y un punto cualquiera sobre la curva. La ecuación (3) considera que las líneas de corriente desde que entran a la curva son paralelas a ésta lo cual no es totalmente cierto ya que ellas sufren modificaciones aguas arriba del punto de tangencia a la entrada de la curva y lo mismo ocurre aguas abajo de la terminación de ella. Debido a ésto, considerando la teoría del vórtice irrotacional y si el escurrimiento ocurre entre dos fronteras circulares cuyos radios son $r_1$ y $r_2$ ($r_1 < r_2$) se tiene que

(4) $$hp = \frac{p}{\gamma} = h_1 - \frac{v_A^2}{2g} = h_1 - \frac{q^2}{2gr_2^2}\left(\frac{1}{\ln (r_2/r_1)}\right)^2$$

$$(5) \qquad h_1 = (r2-r1)\cos\alpha + \frac{v_B^2}{2g} = (r_2-r_1)\cos\alpha + \frac{q^2}{2gr_1^2}\left(\frac{1}{\ln\,(r_2/r_1)}\right)^2$$

Si los valores de $h_1$, $\alpha$, $q$ y $r_2=R$ son conocidos con la ecuación (5) se calcula el valor de $r_1$ y la presión sobre la curva con la ec.(4)

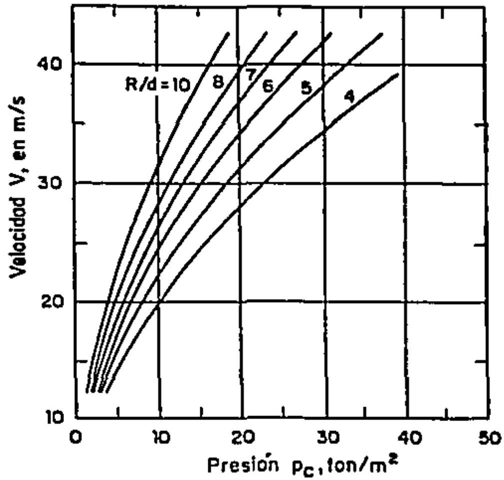
## Criterio del Corps of Engineers (1964)[8]

Estudios realizados, tanto en modelos como en prototipos, indican que la presión de fondo cambia a lo largo de la curva y su valor está en función del radio de curvatura, carga total y gasto unitario. La presión máxima que ocurre en la parte más baja de la cubeta se obtiene con la ecuación de la presión que produce la fuerza centrífuga, la carga de presión se expresa

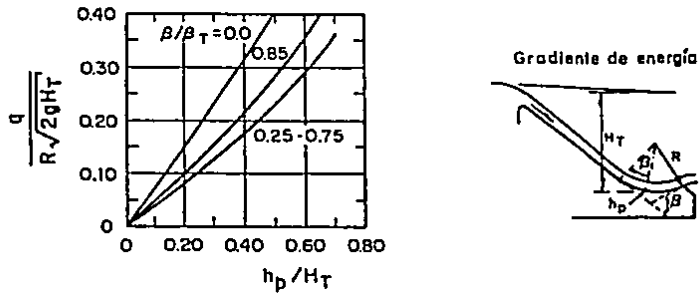
(6) $$\frac{hp}{H_T} = f\left(\frac{q}{R\ 2g\ H_T},\ \frac{\alpha}{\alpha_T}\right)$$

(7) $$H_T = h_p + \frac{v^2}{2g}$$

donde $\alpha$ es el ángulo desde el inicio de la curva hasta donde se desee valuar $h_p$ y $\alpha_T$ es la delfexión total de la curva. El valor de la presión en cada punto de la cubeta se obtiene al multiplicar $h_p$ por $\gamma$. El método señala que las pérdidas de energía en el cálculo de la carga total, $H_T$, deben tomarse en cuenta.




(a)




(b)

Fig. 18

CALCULO DE LAS PRESIONES EN CUBETAS DE LANZAMIENTO
CUERPO DE INGENIEROS

Criterio de F.M. Henderson[8] (1966)

El investigador señala que la presión centrífuga se puede calcular de igual modo que el anterior, pero con resultados aproximados, ya que la velocidad promedio debe ser menor a la velocidad media aguas arriba de la curva, y el tirante dentro de la curva es mayor que el de la entrada; por lo tanto sugiere utilizar la teoría del vórtice irrotacional para el cálculo de la presión centrífuga a lo largo de la curva. - De acuerdo a esto, él plantea lo siguiente

(8) $$\frac{d_1}{R} = \ln \frac{R}{R_1}$$

(9) $$\frac{2g\ p}{\gamma\ v_1{}^2} = \{ 1 - \frac{R_1}{R} \}$$

(10) $$R_1 = R - d_1$$

(11) $$d_1 = q/\sqrt{2gh_1}$$

donde p es la presión centrífuga, $kgf/m^2$; $d_1$ tirante de agua enel punto considerado, en m.

Sánchez B. J. L. y Franco V. (1985) [9]

Los investigadores presentan un desarrollo teórico sobre las características correspondientes al funcionamiento hidráulico de codos verticales, también aplicable a cubetas de lanzamiento.

Aplicando el principio de Bernoulli a un elemento diferencial dentro de una vena líquida con curvatura llegan a establecer que

$$h_p = \frac{\gamma v^2}{g} \{R\,[\ln(R)-1]-(R-d)[\ln(R-d)-1] - d\,\ln(R-d)\} + d\cos\alpha \tag{12}$$

Se debe plantear la ecuación de la energía entre dos secciones, para utilizar esta expresión; en una de ellas se deben conocer todas las características hidráulicas y geométricas, y en la otra son desconocidas las hidráulicas; entonces, hay que calcular el perfil del agua desde el cimacio hasta la entrada de la curva.

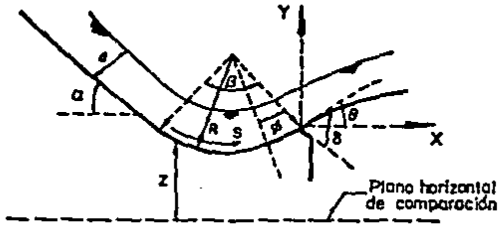



**Fig. 19**

**NOMENCLATURA DE LA CUBETA DE LANZAMIENTO**
**SANCHEZ B.J.L. Y FRANCO V.**

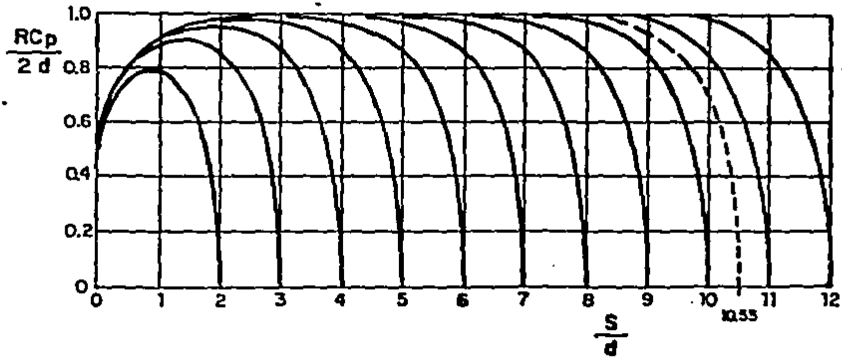



**Fig. 20**

**RELACION ENTRE RCp / 2d y S / d**

Criterio de Lenau CH.W. y J.J. Cassidy [9]

Presentan un método analítico para predecir el perfil de la superficie libre y las presiones en la plantilla de la cubeta de lanzamiento. Consideran que el flujo es no viscoso - irrotacional y en dos dimensiones; la superficie libre de la vena, referida a un sistema X,Y, y la presión del flujo $p_t$ - serán función del radio de curvatura R, ángulo de llegada $\alpha$, de la deflexión $\beta$, carga total H, gasto por unidad de ancho, densidad del fluido $\rho$, y peso específico $\gamma$. También consideran que la velocidad del flujo en la cubeta corresponde a - la de un vórtice irrotacional descrito a través de un potencial de velocidades ($X$) y de la función de corriente ($\Phi$); - llamada potencial complejo, $W = \Phi + i\,\psi$.

Los resultados de la solución numérica en cuanto a la - presión que se produce en la cubeta se muestran en la fig.20 al relacionar los parámetros adimensionales $C_pR/2d$ y $S/d$, - que permite conocer la presión que el flujo ejerce en la cubeta de lanzamiento.

Una vez que se tiene la información geométrico-hidráulica, q, R, $\beta$, y H se obtienen las relaciones para la sección - donde el flujo despega

$$d = \frac{q}{2gH} \quad ; \qquad \frac{S}{d} = \frac{\beta R}{d} \quad ; \qquad \frac{RC_D}{2d} = 0$$

A partir de los valores calculados de la fig.20se obtiene un punto por donde pasa la curva a partir de la cual se valúan los coeficientes de presión. Con el valor de S/d correspondiente a cada sección y con la curva seleccionada, se determina el valor correspondiente de RCp/2d y como $Cp=p_t/YH$ , es posible obtener la presión en el punto deseado,figura 21.

S es la distancia medida a lo largo de la corriente

R es el radio de la cubeta

Cp es el coeficiente de presión

d es el tirante.

Criterio de A. Balloffet (1961) [10]

El autor considera que la presión máxima de un vertedor con un deflector al pie de éste, puede calcularse por la suposición de un flujo con vórtice irrotacional y la distribución de presiones sobre el deflector puede ser determinado - en forma aproximada por un simple procedimiento gráfico.

$$h = \frac{P2}{\gamma} \text{ máx.} = d + \frac{v1^2}{2g} \left(1 - \frac{R-d}{R}\right)^2 \tag{13}$$

Criterio del Bureau of Reclamation of the Unites States (USBR) [9]

Los investigadores T.J. Rhone y A.J. Peterka reportan - los resultados de estudios realizados por el USBR en obras de excedencias en túnel cuya estructura terminal es una cubeta - de lanzamiento, fig.22.En la fig.23. presenta la relación entre las presiones reales y las teóricas a lo largo del fondo-de la cubeta. Las curvas envolventes limitan una zona en que-los ángulos de salida están comprendidos entre 15° y 35° y - números de Froude entre 6.8 y 10.30. En la fig.24muestra la - variación entre px/pt y el ángulo de salida, $\delta$ . La curva indica que para un ángulo de lanzamiento, $\theta$, el ángulo de salida $\delta$ deberá ser igual o mayor a 39° con lo que se asegura que la - presión que se obtenga sea mayor a la atmosférica.

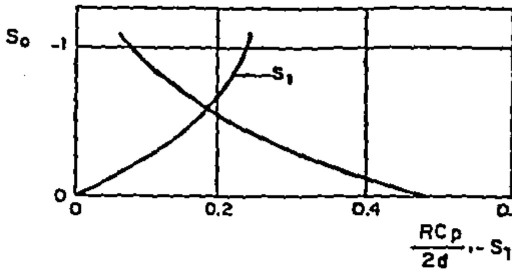



Fig.21 RELACION ENTRE S con RCp/2d y $S_1$

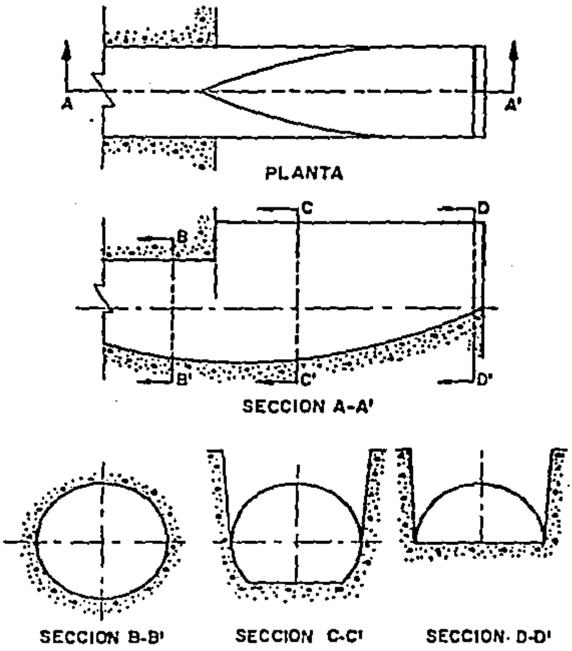
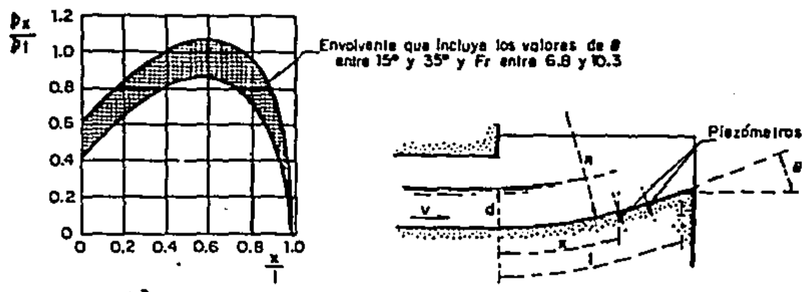



Fig.22 GEOMETRIA DE LA CUBETA USBR




$$p_1 = \left(1.94\ \frac{V^2}{R^2} + 62.5\right) d \qquad (S.1)$$

Corte longitudinal

**Fig. 23**

**PRESIONES EN LA CUBETA DE LANZAMIENTO USBR**

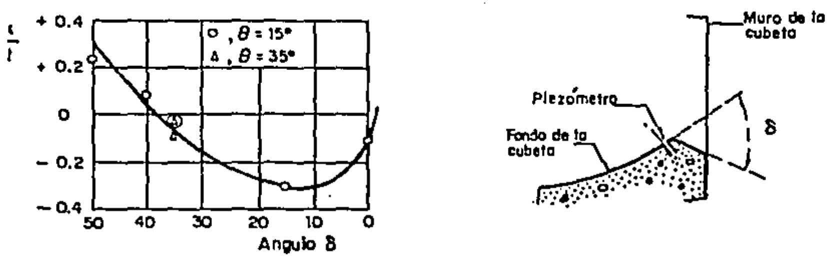



**Fig.24 PRESIONES EN LA PARTE FINAL DE LA CUBETA TIPO USBR**

# C A P I T U L O   III

## III. PROBLEMA DE APLICACION

### III.1. INTRODUCCION

El motivo de este capítulo es mostrar un método más - para predecir la distribución de velocidades y el perfil - de la superficie libre al paso de un gasto y geometría dada de una cubeta deflectora, y como consecuencia de esta - distribución de velocidades valuar las presiones que se - ejercen sobre la misma.

El método desarrollado por Tio-Chun Chen y Yu-Shen Yu, está basado en la teoríade flujo potencial y dichas características hidráulicas se obtienen a partir de la solución de una ecuación integral no lineal, considerando un flujo uniforme en dos dimensiones y despreciable el efecto de la gravedad.

El método se aplicó en la determinación de la distribución de la presión y el perfil libre de la superficie de la cubeta deflectora de la presa Hartwell.[4]

## III.2 ASPECTOS GENERALES

La presa Hartwell,[4] localizada aguas arriba del río - Savannah, en el estado de Georgia, EE.UU., es el segundo - de once proyectos construídos en la cuenca del río Savannah; la presa tiene como propósitos principales el de control - de avenidas, generación de energía eléctrica y como recreación en general.

La construcción del proyecto se inició en Octubre de 1955; en 1962 se llenó el vaso y para Diciembre de 1963 se dió por concluída la obra. La presa pertenece al U.S. Corps of Engineers (Cpo. de Ingenieros de los Estados Unidos).

La estructura es una combinación de tierra y concreto, con una altura de 207 m sobre nivel del mar y una capacidad total de almacenaje de $3.5 \times 10^9$ $m^3$. Como estructuras principales, la presa cuenta con una cortina de tipo gravedad, un vertedor de concreto con cresta de control, cinco compuertas de descarga con rejillas, un deflector tipo salto de esquí al pie del vertedor y una casa de máquinas con 9 unidades, dando una potencia instalada de 594 000 KW.

### III.2.1 DATOS DEL PROYECTO

Area de la cuenca ........................... 5408 $km^2$

Presa

Tipo de cortina ...................... concreto-gravedad

Longitud de la cortina ........................ 4,664 m

Altura máxima de la cortina .................. 73.15 m

Longitud del vertedor .................. 173 m

diámetro de los túneles de descarga .......... 8.0 m

Planta generadora

Número de unidades instaladas ................ 9

Capacidad de generadores c/u ................ 66,000 KW

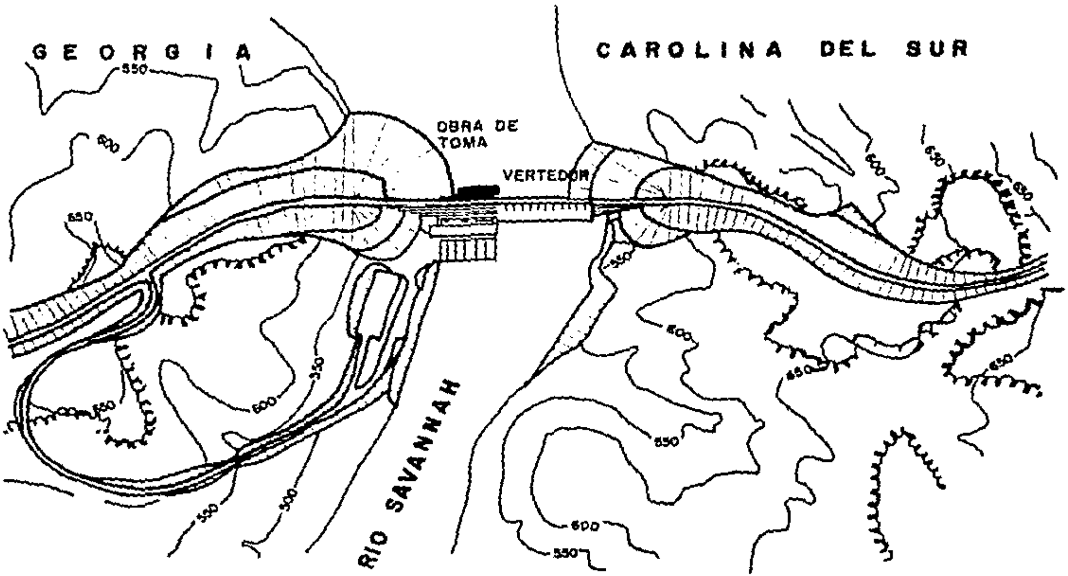
Volúmen del vaso ................................ 3'823,000 $m^3$

Capacidad del embalse ........................ $3.5 \times 10^9$ $m^3$

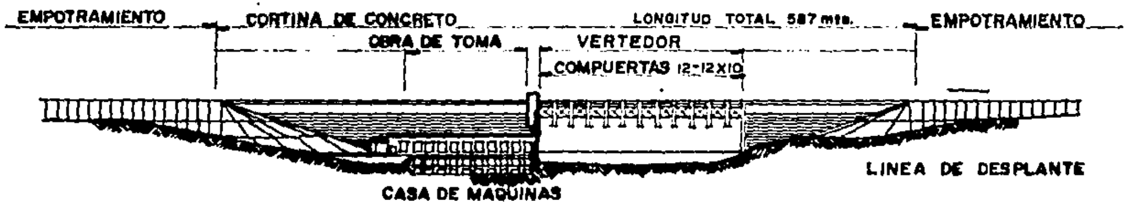
El vertedor tiene un gasto máximo de 16,000 $m^3/s$; se utilizó el deflector tipo salto de esquí para disipar la energía dadas las condiciones propicias del suelo, y económicamente fué factible tanto en el diseño hidráulico como estructural.

El deflector cuenta con un radio de 9.15m, el ángulo que se forma entre la superficie del vertedor y la horizontal es de 55°, el ángulo de giro es de 95° ($\beta$), el valor de R' es de 3.0 y el número de Froude es de 6.5 .

CAROLINA DEL NORTE
RIO SENECA
PICKENS
GREENVILLE
RIO TUGALOO
TOCCOA
CAROLINA DEL SUR
ANDERSON
RIO SAVANNAH
HARTWELL
PRESA HARTWELL
RIO LITTLE
GREENWOOD
RIO BROAD
ATHENS
NORTE
GEORGIA
PRESA CLARK HILL
AUGUSTA
WARRENTON
COMISION DE ENERGIA ATOMICA


GEORGIA
CAROLINA DEL SUR
OBRA DE TOMA
VERTEDOR
RIO SAVANNAH
550
600
650
500

PLANTA




**ELEVACION AGUAS ABAJO**

## III.3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la figura 25 se muestra el flujo potencial que pasa por una pared sólida de 2 secciones rectas, AB y DE unidas por una curva BCD, en un plano cartesiano o plano z de dos dimensiones.

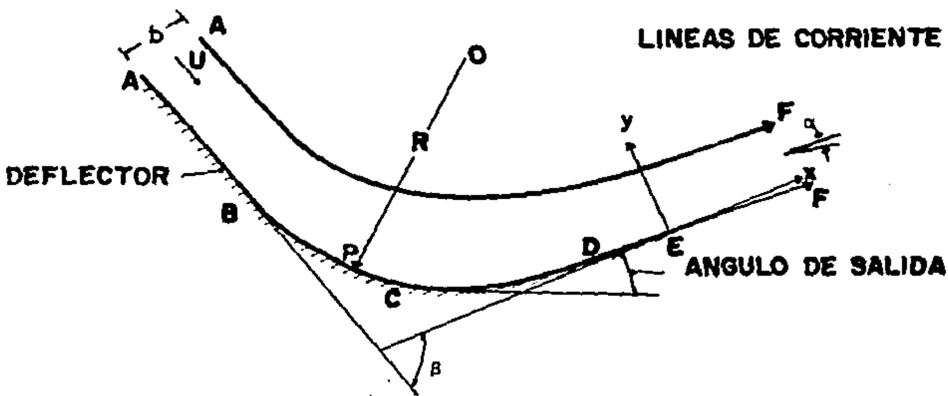



FIG. 25

Donde U y b son la velocidad y el tirante a la entrada, respectivamente; R es el radio de curvatura en el punto P - sobre la pared; en general R puede variar a lo largo de la - pared, pero en trampolines libres o salto de esquí usualmente BCD se considera como un arco circular, por lo tanto R - es constante.

AF y EF son las líneas de corriente desconocidas y re-- presentan el ángulo de desvío total desde B hasta D. La mínima velocidad ocurre en C.

El problema es entonces, determinar la distribución de presiones a lo largo de la pared y la forma de las líneas de corriente cuando la geometría del vertedor y el flujo de entrada están dados.

En el análisis del problema, el efecto de la gravedad - se desprecia.

Utilizando el método de transformación conforme* y el - teorema de Wood[11], se obtiene una ecuación integral para la velocidad compleja; la ecuación se resuelve numericamente ha-- ciendo un esquema de iteraciones para determinar la distribución de velocidad y por lo tanto la distribución de presiones y las líneas de corriente.



* Ver apéndice

## III.4 METODO DE SOLUCION

Teorema de Wood.-[11] El teorema de Wood para una función $T(\tau)$ que es analítica a lo largo de una franja en un plano complejo, $\tau = \xi + i\eta$, se establece como sigue:

Si $t(\tau) = \Omega + i\theta$ es analítica en una franja, $-\infty < \xi < \infty$ y $0 < \eta < h$ en el plano $\tau$ tal que

$$\lim_{\rho \to \infty} T(\pm \rho, \eta) \exp\left(-\frac{\pi\rho}{2h}\right) = 0 \tag{1}$$

y $T(\tau)$ tiene, casi en su totalidad singularidades logarítmicas en un número finito de puntos $\eta = 0$ y $\eta = h$; entonces el valor de $T(\tau)$ dentro de la franja está dado por

$$T(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \theta_o(\xi) \operatorname{cosec} h\left[\frac{\pi(\xi' - \tau)}{2h}\right] + \Omega_h(\xi') \sec h\left[\frac{\pi(\xi' - \tau)}{2h}\right] \right\} d\xi' \tag{2}$$ [15]

donde los subíndices 0 y h simbolizan valores en $\eta = 0$ y $\eta = h$, respectivamente.

ECUACION INTEGRAL PARA LA VELOCIDAD COMPLEJA

Utilizando el teorema de Wood para resolver el problema la función T, se define como la velocidad compleja

3a $$T = \ln \left(U \frac{dz}{d}\right) = \ln \frac{U}{q} + i\theta$$

3b $$\Omega = \ln \frac{U}{q} .$$

donde $w = \phi + i\psi$ es el potencial complejo, q y $\theta$ representan la magnitud y el ángulo del vector velocidad, respectivamente y U es la velocidad del flujo de entrada; el ángulo es medido a partir del eje positivo real en el plano z, $z = x + iy$.

PLANOS DE TRANSFORMACION

En el plano z el flujo es mapeado sobre una franja infinita en el plano w, figura 2G. Se aprecia que la línea de corriente $\psi = 0$ consiste en parte de la pared sólida, AE, y $\phi$ - en parte de la línea de corriente EF.

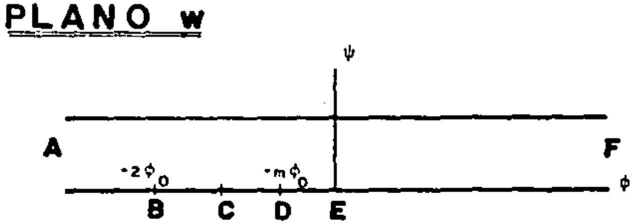



FIG. 26

A lo largo de AE, $\Omega$ es desconocida, y a lo largo de EF, $\theta$ es desconocido. Por lo tanto la Ec. (2) no se puede aplicar directamente. La franja infinita en el plano $w$ es transformado sobre una franja infinita en el plano $\tau$, figura 27. en donde de un lado se encuentra la pared sólida y en el otro las líneas de corriente.

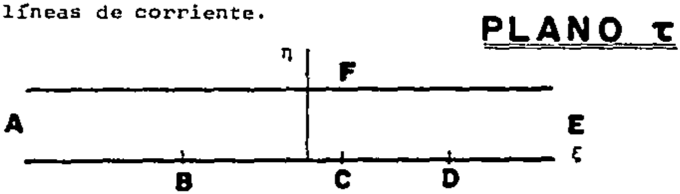



FIG. 27

La transformación se completa utilizando la transformación de Schwarz-Christoffel [12]

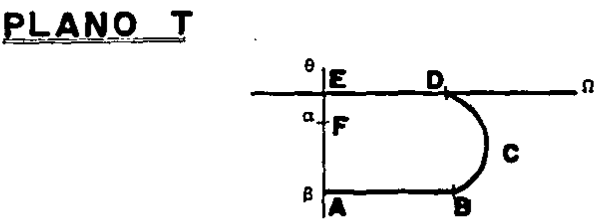



FIG. 28

[13]

Después de una serie de cálculos la ecuación final está dada por

$$\exp\left( -2\,\tau \right) = \exp\left( -\frac{\pi w}{h}\right) - 1 \tag{4}$$

donde h = bU; siendo b la profundidad o tirante y U la velocidad del flujo a la entrada; es la descarga por unidad de longitud del vertedor.

A lo largo de AE, en la figura 27, $\eta = 0$ y de (4)

$$\exp(\xi') = \left[ \exp\left( \frac{\pi\phi'}{h} \right) - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

multiplicando (5) por (4) la ecuación queda

$$\exp\left( \xi' - \tau \right) = \left\{ \left[ \frac{\exp(-\frac{\pi w}{h}) - 1}{\exp(-\frac{\pi\phi'}{h}) - 1} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

Sustituyendo (6) en (2), integrando la ecuación resultante por partes y utilizando las condiciones en el punto B, resulta

$$T(w) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tan h^{-1} \left[ \frac{\exp(-\frac{\pi w}{h}) - 1}{\exp(-\frac{\pi\phi'}{h}) - 1} \right]^{\frac{1}{2}} d\theta_o(\phi') + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \tan h^{-1} \left[ \frac{\exp(-\frac{\pi w}{h}) - 1}{\exp(-\frac{\pi\phi}{h}) - 1} \right]^{\frac{1}{2}} d\Omega_o(\phi')$$
$$- \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tan h^{-1} \left[ \frac{\exp(-\frac{\pi w}{h}) - 1}{\exp(-\frac{\pi\phi'}{h}) - 1} \right]^{\frac{1}{2}} d\Omega_h(\phi') \tag{7}$$

Y porque $\Omega = 0$ para $0 < \phi' < \infty$, y $\Omega_h = 0$ para $-\infty < \phi < \infty$ todos los términos excepto el primero en la derecha de la ec. (7) desaparecen. En consecuencia, la ec. (7) queda

$$(8) \qquad T(w) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tan h^{-1} \left[\frac{\exp(-\frac{\pi w}{h})-1}{\exp(-\frac{\pi \phi'}{h})-1}\right]^{\frac{1}{2}} d\theta_h(\phi')$$

La integración de (8) se realiza a lo largo de la pared desde A hasta E. Y expresándose en términos de velocidad potencial

$$(9) \qquad d\theta_o = \frac{d\theta_o}{ds}\frac{ds}{d\phi'}\, d\phi' = -\frac{d\phi'}{Rq}$$

en donde s es la distancia medida a lo largo de la pared a partir de E.

Sustituyendo (9) en (8) resulta

$$(10) \qquad T(w) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{2\phi_o} \frac{1}{Rq}\tanh^{-1}\left[\frac{\exp(-\frac{\pi w}{h})-1}{\exp(-\frac{\pi\phi'}{h})-1}\right]^{\frac{1}{2}} d\phi'$$

$$- \frac{2}{\pi}\int_{-2\phi_o}^{-m\phi_o} \frac{1}{Rq}\tanh^{-1}\left[\frac{\exp(-\frac{\pi w}{h})-1}{\exp(-\frac{\pi\phi'}{h})-1}\right]^{\frac{1}{2}} d\phi'$$

$$- \frac{2}{\pi}\int_{-m\phi_o}^{0} \frac{1}{Rq}\tanh^{-1}\left[\frac{\exp(-\frac{\pi w}{h})-1}{\exp(-\frac{\pi\phi'}{h})-1}\right]^{\frac{1}{2}} d\phi'$$

donde el valor de m depende de la longitud de DE en la fig. 25 y $0 \leq m < 2$.

Porque $R \to \infty$ para $-\infty < \phi < -2$ y $-m\phi < \phi < 0$, el primer y tercer término del lado derecho desaparecen y la ec.(10) queda

$$(11) \qquad T(w) = -\frac{2}{\pi}\int_{-2\phi_o}^{-m\phi_o} \frac{1}{Rq}\tanh^{-1}\left[\frac{\exp(-\frac{\pi w}{h})-1}{\exp(-\frac{\pi\phi'}{h})-1}\right]^{\frac{1}{2}} d\phi'$$

Por conveniencia, la Ec.(11) se transforma en la siguiente forma adimensional

$$(12) \qquad \Omega + \theta i = -\frac{2}{\pi^2}\int_{-2}^{-m} \frac{M}{R'q'} \tan h^{-1} \left\{\frac{\exp[-M(t'-if)]-1}{\exp(-M\,t'_o)-1}\right\}^{\frac{1}{2}} dt'_o$$

donde $R' = R/b$, $t'_o = \phi_1/\phi_o$, $M = \pi\phi_o/bU$, $q' = q/U$, $t' = \phi/\phi_o$ y $f = \psi/\phi_o$

Entonces la ec. (12) es basicamente la ecuación integral para la velocidad compleja T.

Para deflectores tipo salto de esquí o curvas de salidas, la sección en curva BCD, es un arco circular y R' es constante para un flujo dado; también M es constante para un flujo dado y forma de la pared determinada. Sin embargo, el valor correcto de M no se conoce 'a priori' porque el valor correspondiente de $\phi$ para un valor dado de $\theta$ no es conocido y se debe suponer al comienzo del cálculo.

La ec. (12) toma las siguientes formas para el flujo a lo largo de la pared AE y las líneas de corriente EF y AF:

1.- A lo largo de AE, $\psi = 0$ y

$$(13) \qquad \Omega + i\,\theta = -\frac{2M}{\pi^2 R'}\int_{-2}^{0} \frac{1}{q'} \tan h^{-1}\left[\frac{\exp(-Mt')-1}{\exp(-Mt'_o)-1}\right]^{\frac{1}{2}} dt'_o$$

donde $-\infty < t' \leq 0$.

2.- A lo largo de la línea de corriente inferior EF, $\Omega = 0$ y $\psi = 0$, entonces

$$(14) \qquad \theta = \frac{2M}{\pi^2 R'} \int_{-2}^{-m} \frac{1}{q'} \tan h^{-1} \left[\frac{1-\exp(-Mt')}{\exp(-Mt'_o)-1}\right]^{\frac{1}{2}} dt'_o$$

donde $0 \leq t' < \infty$ .

3.- A lo largo de la línea de corriente superior AF, $f = h/\phi$ ,

$$(15) \qquad \theta = \frac{2M}{\pi^2 R'} \int_{-2}^{m} \frac{1}{q'} \tan h^{-1} \left[\frac{\exp(-Mt') + 1}{\exp(-Mt'_o) - 1}\right]^{\frac{1}{2}} dt'_o$$

donde $-\infty < t' < \infty$ .

Para deflectores con Salto de esquí, E y D coinciden y $m = 0$; los límites superiores de las integrales de las ecs.(13), (14) y (15) deben reemplazarse por cero.

Una vez que es conocida la relación entre la velocidad y velocidad potencial, los puntos correspondientes donde la velocidad es determinada se encuentra con $q = \frac{d\phi}{ds}$ o expresado en forma adimensional

$$(16) \qquad \int_0^{t'} dt' = \frac{\pi}{M} \int_0^{s} q' ds$$

donde $s' = s/b$.

La ec.(9) también se puede expresar en una integral adimensional como

$$(17) \qquad \int_0^{\theta} d\,\theta = -\frac{M}{\pi R'} \int_0^{t'} \frac{1}{q'} dt'$$

Obviamente, por la ec. (17) el ángulo $\beta$ de giro total del deflector queda

$$\beta = -\frac{M}{\pi R'} \int_{-m}^{-2} \frac{1}{q'}\, dt' \tag{18}$$

A lo largo de las líneas de corriente q' = 1 y la ec.(16) resulta

$$t' = s' \frac{\pi}{M} . \tag{19}$$

## DETERMINACION DE LA DISTRIBUCION DE VELOCIDADES

Para los valores asignados de R', M y m la distribución de velocidades a lo largo del tramo en curva, BCD se puede - obtener por la solución a través de iteraciones de la ec.(13).

La parte real de la integral dá la magnitud de la velocidad y la parte imaginaria , el ángulo. (La variación del ángulo del vector velocidad a lo largo de la pared puede ser determinada también con la ec.(17) como comprobación).

La iteración procede como sigue:

En el rango de la integración (i.e., $-2 \leq t_o' \leq -m$), $t_o'$ se divide entre un número igual de divisiones. La velocidad adimensional en el punto medio de cada intervalo se supone la - unidad para el primer tanteo.

La ec.(13) se integra entonces numéricamente para obte-- ner un conjunto de valores nuevos para la velocidad. Estos valores se utilizan como los nuevos valores de ensaye. ( Se hace notar que, a lo largo del tramo en la curva, t' toma los - mismos valores asignados a $t_o'$ en la integración numérica).

El proceso iterativo se repite hasta que la diferencia - entre el valor de ensaye y el valor obtenido está dentro de - la precisión requerida.

Debe hacerse notar que el integrando de la ec.(13) se va al infinito cuando $t_o' = t'$.

Como una primera aproximación para $(t' - \varepsilon) < t_o' < (t' + \varepsilon)$ la integral puede ser evaluada como[13]

$$(2) \quad \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \tan h^{-1} \left[\frac{\exp(-Mt') - 1}{\exp(-Mt'_o) - 1}\right]^{\frac{1}{2}} dt'_o \approx 1 - \exp(Mt')$$

donde $\varepsilon$ es un número positivo muy pequeño.

La ec.(20) se utilizó en la integración numérica cuando $t_o' = t'$.

En este punto, la ec.(18) y la distribución de velocidad a lo largo de la pared puede ser utilizado para el cálculo de $\beta$. Si el valor calculado de $\beta$ concuerda con un cierto límite con el valor dado, entonces el valor asignado de $M$ es correcto y el cálculo puede proceder al siguiente paso; de otra manera, un nuevo valor para $M$ debe tratarse hasta que la condición establecida quede satisfecha.

Con la distribución de velocidad en el tramo en curva ya conocida, la distribución de velocidad en las paredes rectilíneas AB y DE, se pueden obtener integrando la ec,(13) numérica para valores asignados de $t'$.

Los rangos de t' son:

1.- Para AB, $-2 \geq t' > -\infty$ y $\theta = -\beta$

2.- Para DE, $-m \leq t' \leq 0$ y $\theta = 0$ .

Los puntos correspondientes pueden ser determinados con la ec.(16). Para valores asignados de m, la ec.(16) también - cálcula la longitud total de DE.

Finalmente, el coeficiente de presión se define por

$$Cp = \frac{2 \Delta p}{\rho U} \tag{21}$$

donde $\rho U^2$ se obtiene con la Ecuación de Bernoulli,

$$Cp = 1 - \left( \frac{q}{U} \right)^2$$

reiterando que q es la magnitud del vector velocidad y U es la velocidad del flujo de entrada .

PERFILES DE SUPERFICIE LIBRE

Las líneas de corriente inferiores EF se evalúan con las ecs.(14) y (19). Para un valor dado de t', la ec.(14) calcula el ángulo $\theta$ y la ec. (19) dá el valor correspondiente de la distancia adimensional medida desde E.

Similarmente, las líneas de corriente superiores AF, se calculan con las ecs. (15) y (19).

La dirección del vector velocidad en un punto lejano aguas abajo, se obtiene aproximadamente por cualquiera de las ecs.(14) o (15) para valores grandes de t'.

## III.5. COMPARACION DE RESULTADOS TEORICOS CON EXPERIMENTALES

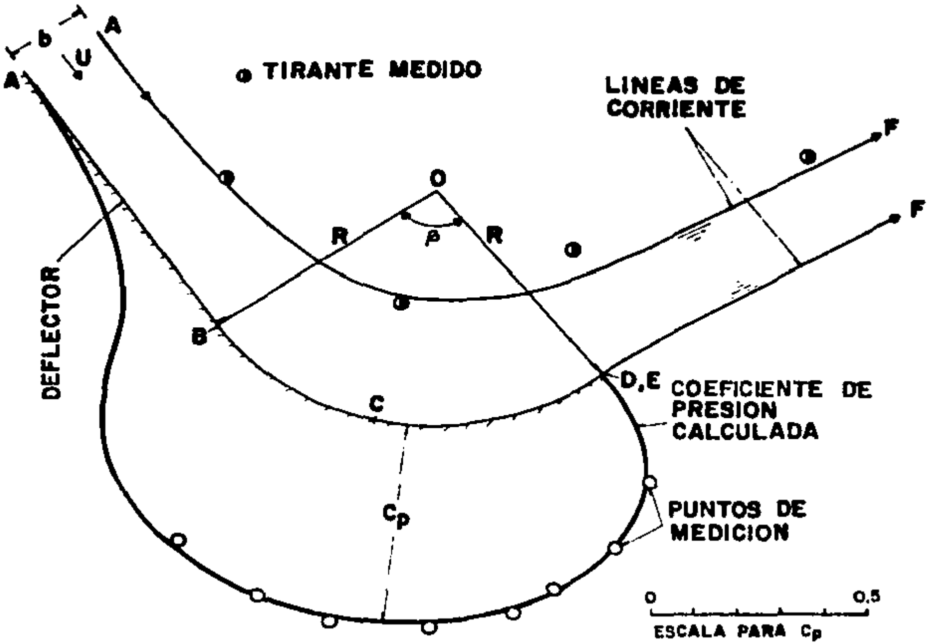
### III.5.1. RESULTADOS OBTENIDOS POR EL METODO PROPUESTO

Con el objeto de verificar la teoría, el método que se desarrolló anteriormente fué utilizado en la obtención de la distribución de la presión en la cubeta deflectora de la presa Hartwell; los valores calculados por medio de la computadora de la distribución de la presión y el perfil del flujo del modelo se encuentran graficados en la fig. 29

Para calcular la distribución de la presión se debe conocer de antemano el tirante del agua y la velocidad media del flujo de entrada.

El tirante se obtuvo de la medida del perfil del flujo en el vertedor donde éste no tiene cambios significativos. La velocidad media del flujo de entrada se determinó para valores de la descarga, longitud del vertedor y el tirante del agua ya conocidos; la velocidad se utilizó para convertir la medida de presión en el coeficiente de presión adimensional.

La distribución de presiones obtenida en el modelo de la cubeta deflectora con ángulo de salida de 40°, se enlista en la Tabla No. 1. Los puntos de medida están representados en la fig. 29 al igual que la distribución de la presión y las líneas de corriente. El coeficiente de presión está medido radialmente desde la pared de la cubeta.




LINEAS DE CORRIENTE Y DISTRIBUCION DE LA PRESION EN LA CUBETA CON ANGULO DE SALIDA DE 40°, SEGUN EL METODO PROPUESTO.

FIG. No. 29

TABLA 1. VELOCIDAD Y DISTRIBUCION DE PRESIONES CALCULADAS EN EL DEFLECTOR.

a: Angulo central en grados medido desde el radio OD, en la figura No. 29

B: Coeficiente de presión a lo largo de la pared recta BA.

| s/b | 0 (a) | q/U | Cp |
|---|---|---|---|
| 0.000 | 0.00 | 1.000 | 0.000 |
| 0.183 | 3.49 | 0.911 | 0.171 |
| 0.421 | 8.04 | 0.843 | 0.290 |
| 0.654 | 12.5 | 0.799 | 0.363 |
| 0.890 | 17.0 | 0.768 | 0.410 |
| 1.142 | 21.8 | 0.745 | 0.445 |
| 1.392 | 26.6 | 0.728 | 0.470 |
| 1.650 | 31.5 | 0.715 | 0.487 |
| 1.911 | 36.5 | 0.706 | 0.502 |
| 2.175 | 41.5 | 0.700 | 0.510 |
| 2.452 | 46.7 | 0.696 | 0.516 |
| 2.705 | 51.6 | 0.695 | 0.516 |
| 2.960 | 56.5 | 0.695 | 0.516 |
| 3.218 | 61.4 | 0.698 | 0.513 |
| 3.500 | 66.8 | 0.702 | 0.510 |
| 3.821 | 73.0 | 0.710 | 0.496 |
| 4.010 | 76.5 | 0.720 | 0.481 |
| 4.275 | 81.6 | 0.734 | 0.461 |
| 4.520 | 86.2 | 0.754 | 0.431 |
| 4.750 | 90.6 | 0.781 | 0.390 |
| 4.975 | 95.0 | 0.821 | 0.326 |
| 5.270 | | 0.844 | 0.290 (B) |
| 5.550 | | 0.867 | 0.215 (B) |
| 5.822 | | 0.916 | 0.161 (B) |
| 6.087 | | 0.937 | 0.120 (B) |
| 6.348 | | 0.953 | 0.092 (B) |
| 6.606 | | 0.965 | 0.071 (B) |
| 6.861 | | 0.973 | 0.051 (B) |
| 7.114 | | 0.980 | 0.042 (B) |
| 7.366 | | 0.985 | 0.030 (B) |
| 7.617 | | 0.989 | 0.022 (B) |
| 7.867 | | 0.992 | 0.020 (B) |
| 8.116 | | 0.994 | 0.010 (B) |

Donde s/b es la distancia medida a lo largo de la línea de corriente;

q/U es la velocidad compleja y

Cp es el coeficiente de presión.

## III.5.2 RESULTADOS OBTENIDOS POR EL METODO DE DOUMA

TABLA No. 2

| PUNTOS | ELEV. | $\alpha$ ° | $h_1$ m | $r_1$ m | $p/\gamma$ m | P kg/cm$^2$ | $C_p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 516.00 | 28.10 | 50.0 | 4.878 | 36.858 | 3.685 | 0.510 |
| 2 | 514.29 | 18.88 | 50.5 | 4.900 | 37.168 | 3.716 | 0.516 |
| 3 | 513.20 | 9.70 | 50.8 | 4.913 | 37.358 | 3.735 | 0.519 |
| 4 | 513.00 | 0.00 | 50.9 | 4.917 | 37.424 | 3.742 | 0.520 |
| 5 | 513.40 | 9,70 | 50.8 | 4.913 | 37.358 | 3.735 | 0.519 |
| 6 | 513.80 | 15.00 | 50.7 | 4.911 | 37.270 | 3.727 | 0.518 |
| 7 | 514.80 | 23.03 | 50.4 | 4.901 | 37.059 | 3.705 | 0.516 |
| 8 | 516.40 | 29.58 | 49.9 | 4.874 | 36.796 | 3.679 | 0.5095 |

n.a.m.e. 674.00 pies s.n.m. tirante$_{\text{entrada}}$ 3.048m

247.00 m

gasto unitario, q 994.718 p$^3$/s/p

92.405 m$^3$/s/m

$\alpha$ ángulo o deflexión que se va girando para calcular la presión

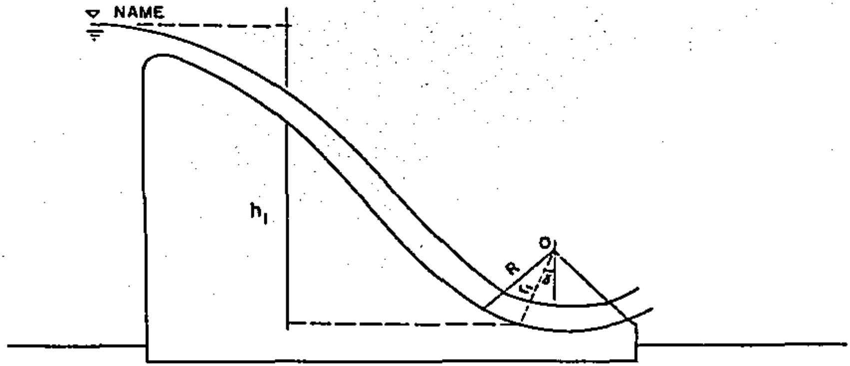
$h_1$ carga desde el nivel máximo del agua en la presa hasta el punto considerado sobre el deflector

$r_1$ radio de la línea de corriente superior

$p/\gamma$ carga de presión

P presión

$C_p$ coeficiente de presión




FLUJO SOBRE EL DEFLECTOR

FIG. 30

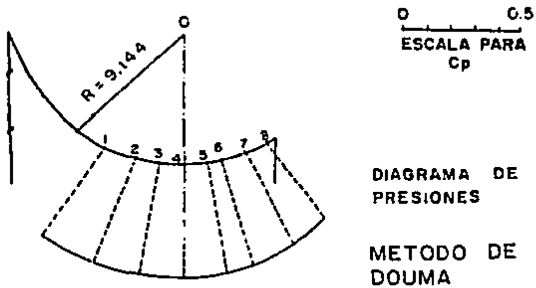



DIAGRAMA DE PRESIONES

FIG. 31

III.5.3. COMPARACION DE RESULTADOS -

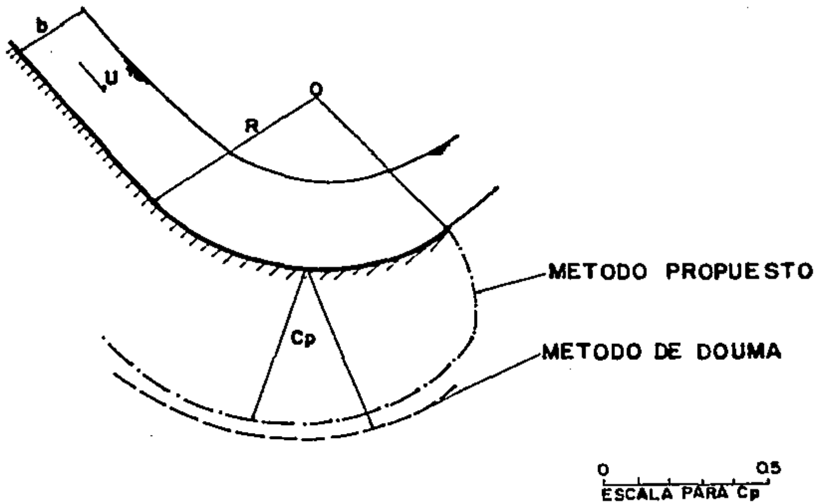



FIG. 32 DIAGRAMA DE PRESIONES

# CONCLUSIONES
# Y
# RECOMENDACIONES

# C O N C L U S I O N E S  Y  R E C O M E N D A C I O N E S

La distribución de las presiones y el perfil del flujo que pasa a través de cubetas deflectoras o curvas verticales cóncavas, se pueden determinar mediante la solución de una ecuación integral no lineal, cuyo desarrollo se basa en la teoría del potencial complejo si el efecto de la gravedad es despreciable.

Los resultados teóricos coinciden perfectamente con los obtenidos en las mediciones realizadas de las presiones en la cubeta deflectora con ángulo de salida de 40°.

El acierto entre la teoría y la medición de la distribución de las presiones de la cubeta deflectora de la presa Hartwell, indica que el método es aplicable en la predicción de la distribución de velocidades y consecuentemente, de las presiones en deflectores salto de esquí con números de Froude altos.

Para tener puntos de comparación se valuaron las presiones por el método de Douma, encontrándose diferencias del orden del 10% entre los resultados del método propuesto y este último. Las presiones obtenidas mediante el método de

Douma resultan ser mayores, lo que quiere decir que se consideran como más conservadoras, ya que el tipo de refuerzo o resistencia que debe ofrecer la estructura tendría que ser mayor. Por otro lado, con los cálculos realizados por los autores, se concluye que es más acertado considerar este método ya que sus resultados son más aproximados con las mediciones que los que se obtuvieron por el método de Douma.

Lo anterior deberá tomarse en cuenta en forma puntual, ya que estas consideraciones se desprenden especificamente del comportamiento de la cubeta deflectora con ángulo de salida de 40° que fué en la que se tuvo mayor aproximación entre el cálculo y las mediciones.

Con el objeto de lograr establecer si este método puede aplicarse al diseño en forma general, se recomienda que las determinaciones de las presiones en las diferentes estructuras sean comparadas con las obtenidas por el método y de esta manera llegar a valorar el peso de cada consideración y obtener a futuro coeficientes que lo corrijan y lo hagan más aplicable.

Al tener conocimiento de los diferentes criterios brevemente expuestos y disponibles en la literatura especializada dependiendo de la importancia de la obra, el proyectista puede elegir el método que permita verificar a bajo costo y en corto tiempo la solución preliminar de su problema.

Aún cuando los diseños cumplan con las normas de proyecto se recomienda realizar ensayos en modelos hidráulicos y si es posible posteriormente en prototipos para comparar la teoría que se está aplicando, y de esta manera, encontrar relaciones entre ámbos y proponer modificaciones al método teórico elegido.

Con toda la información obtenida, el proyectista tendrá entonces un conocimiento más real del comportamiento de la estructura y así podrá tomar decisiones más acertadas en lo que se refiere al método a utilizar.

# A P E N D I C E S

# 1. N O T A C I O N

Simbología utilizada en el desarrollo del método.

b = tirante del flujo a la entrada;

Cp = coeficiente de presión adimensional definido por

$$Cp = 2\left(\frac{q}{U}\right)^2$$

$\dot{h}$ = descarga por unidad de longitud del vertedor;

i = $\sqrt{-1}$

M = $\pi\phi$ /bU;

m = constante dependiente de la longitud del delantal en la curva de salida, m = 0 para deflectores tipo salto de esquí;

$\Delta p$ = incremento de presión;

q = magnitud del vector velocidad;

q' = q/U;

R = radio de curvatura o radio del deflector;

R' = R/b;

s = distancia medida a lo largo de la línea de corriente;

s'= s/b;

T = $\ln(U\frac{dz}{dw}) = \Omega + i\,\theta$ , velocidad compleja;

$t' = \phi / \phi_o$;

$U$ = velocidad del flujo de entrada o velocidad de la líneas de corriente;

$w = \phi + i\psi$, potencial complejo;

$z = x + iy$, variable compleja;

$\alpha$ = ángulo de chorro;

$\beta$ = ángulo de giro total del deflector;

$\eta$ = variable;

$\theta$ = ángulo del vector velocidad con respecto al eje positivo x;

$\xi$ = variable;

$\pi$ = 3.1415...;

$\rho$ = variable o densidad del flujo;

$\tau = \xi - i\eta$, variable compleja;

$\phi$ = velocidad potencial;

$\psi$ = función de flujo y

$\Omega = \ln\left(\frac{U}{q}\right)$.

[14]

# REPRESENTACION CONFORME

## REPRESENTACIONES GEOMETRICAS DE FUNCIONES z

En el campo real, las gráficas de las figuras 1 y 2, representan una función; en el primer caso una curva en dos-dimensiones y en el segundo caso en tres dimensiones.

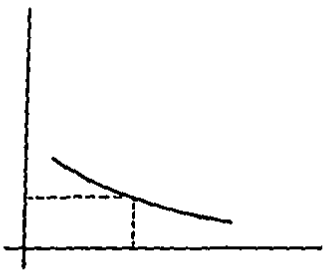


Figura 1

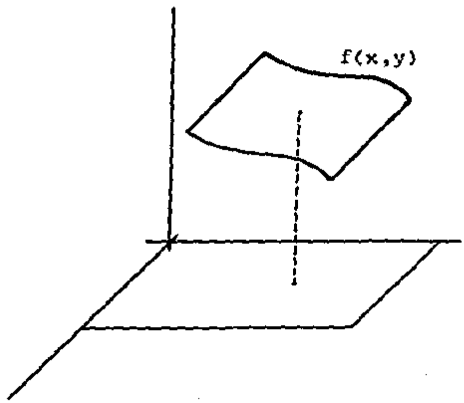



Figura 2

Para funciones complejas

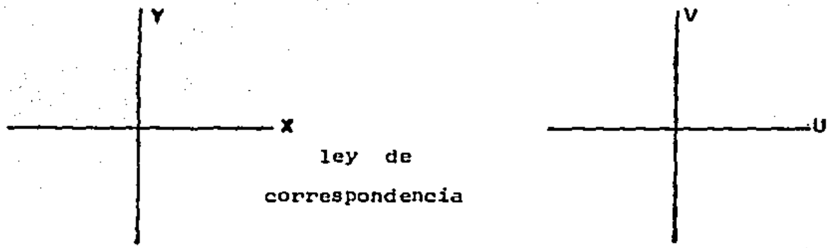
$$w = f(x + iy)$$

$$u + iv = f(x,y)$$

$$u = f(x,y)$$

$$v = f(x,y)$$

donde u,v,x,y son cuatro variables de las cuales u y v son dependientes de x,y que son independientes; existiendo una ley de correspondencia entre ellas.




Plano z — Plano w

Ejemplo.- Para la ley de correspondencia

$$\omega = z^2$$

$$u + iv = (x + iy)^2$$

$$u = x^2 - y^2 + 2xy$$

donde

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{array}\right\} \text{ leyes de correspondencia.}$$

Existen 4 transformaciones generales:

1.- TRASLACION. $= z + \beta$

Figuras en el plano z se desplazan o trasladan en la dirección del vector $\beta$ .

2.- ROTACION $\omega = e^{i\theta_0 z}$

Figuras en el plano z se rotan un ángulo $\theta_0$ .

3.- DILATACION $\omega = az$

Figuras en el plano z se dilatan ( o contraen) en la dirección z si $a > 1$ ( o $0 < a < 1$).

4.- INVERSION $\omega = 1/z$.

Aplicando la transformacion (1) a la variable $\beta$ en la ecuación (3), se obtiene la forma general de la transformacion lineal

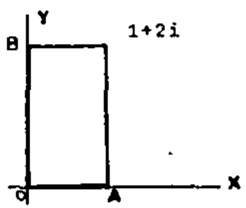
(1) $$\omega = az + C$$

que consiste en una rotación y una expansión o contracción seguida por una traslación..

Ejemplo.- La transformación $w = (1 + i)z + 2 - i$ representa la región rectangular mostrada en el plano z de la figura 3 , sobre la región rectangular mostrada en el plano w.

Se hace notar que la transformacion es la composición de las transformaciones $Z = (1 + i)z$ y $w = Z + 2 - i$.

Como $1 + i = \sqrt{2} \exp (i\, \pi/4)$, la primera de estas transformaciones es una rotación sobre el ángulo $\pi/4$ junto con una expansión por el factor $\sqrt{2}$ . La segunda es una traslación representada por el vector $2 - i$.



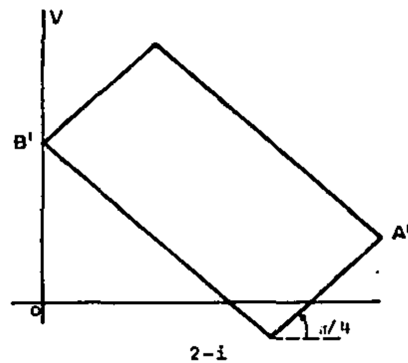




Figura 3

TRANSFORMACION BILINEAL

La transformacion

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad-bc \neq 0) \tag{1}$$

donde a,b,c y d son constantes complejas, es la forma general de la transformacion bilineal; ésta tiene la característica que siempre transforma círculos en círculos y para determinar una - transformación de éste tipo es necesario conocer tres de las - constantes.

## TRANSFORMACION CONFORME

### Propiedades básicas

Se examinará los cambios de dirección de las curvas a través de un punto $z$ bajo la transformación $w = f(z)$, donde la función $f$ es analítica en ese punto y $f'(z_0) \neq 0$.

Suponiendo que $C$ es un arco uniforme atravezando $z_0$; si $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t < b$, es una representación paramétrica de la imagen $\Gamma$ de $C$ bajo la transformación $w = f(z)$, entonces,

(1) $$w'(t) = f'[z(t)]\, z'(t).$$

Sin embargo, cuando un arco $C$ yace en el dominio que contiene el punto $z_0$ siendo $f$ analítica y $f'(z) \neq 0$, la imagen de la curva $\Gamma$ es también un arco uniforme.

De la ecuación (1) se obtiene la relación

(2) $$\arg w'(t) = \arg f'[z(t)] + \arg z'(t).$$

El ángulo de inclinación de una línea tangente dirigida a $C$ al punto $z_0 = z(t_0)$, $a \leq t_0 < b$, es cualquier valor de $\theta_0$ del $\arg z'(t_0)$. Si $\psi$ es un valor de $\arg f'(z_0)$, entonces, de - acuerdo a la ecuación (2) la cantidad

$$\phi_0 = \psi_0 + \theta_0$$

es el valor de $\arg w'(t_0)$ y así entonces el angulo de inclinación de una línea tangente dirigida a $\Gamma$ al punto $W_0 = f(Z_0)$, figura 4.

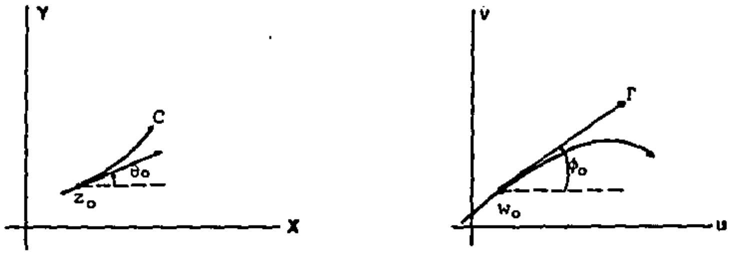



Figura 4

Suponiendo que $C_1$ y $C_2$ sean dos arcos uniformes que pasan a través del punto $z_0$ y sean $\theta_1$ y $\theta_2$ los ángulos de inclinación de las líneas tangentes dirigidas a $C_1$ y $C_2$, respectivamente, a $z_0$, entonces las cantidades

$$\phi_1 = \psi_0 + \theta_1 \qquad \text{y} \qquad \phi_2 = \psi_0 + \theta_2$$

son los ángulos de inclinación de las líneas tangentes dirigidas a la imagen de las curvas $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$, respectivamente, al punto $w_0 = f(z_0)$. Pero, $\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1$; significa que el ángulo $\phi_2 - \phi_1$ de $\Gamma_1$ a $\Gamma_2$ es el mismo en magnitud y sentido al ángulo - $\theta_2 - \theta_1$ de $C_1$ a $C_2$, figura 5.

Teorema.-

En cada punto $z$ donde una función $f$ es analítica y $f'(z) \neq 0$, la representación $w = f(z)$ es conforme.

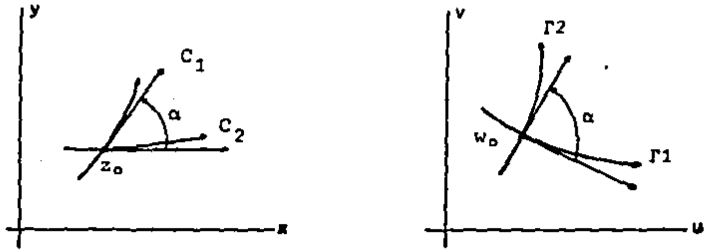



Figura 5

Una transformación que mantenga la magnitud de cada ángulo pero no necesariamente el sentido, se le llama transformación isogonal, si se preservan en magnitud y sentido se le llama transformación conforme.

La transformación $w = \bar{z}$ , es un reflejo en el eje real; es isogonal pero no conforme. Si a ésto le sigue una transformación conforme el resultado de la transformación $w = f(z)$ también es isogonal pero no conforme.

Suponiendo que $f$ no es una función constante pero es analítica en el punto $z_o$. Si $f'(z_o) = 0$, $z_o$ es llamado un punto crítico. El punto $z = 0$es, por ejemplo, un punto crítico de la transformación $w = z^2$.

## TRANSFORMACION DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL.

### Transformación del eje real a un polígono.

Se representa el vector unitario tangente a un arco uniforme dirigido C al punto $z_0$ por el número complejo t. Sea el número $\tau$ el vector unitario tangente a la imagen $\Gamma$ de C al punto co rrrespondiente $W_0$ bajo la transformación $w = f(z)$. Se asume que f es analítica en el punto $z_0$ y $f'(z_0) \neq 0$; entonces

(1) $$\arg \tau = \arg t + \arg f'(z_0).$$

En particular, si C es un segmento del eje real x con sentido positivo, $t = 1$ y $\arg t = 0$ sobre cada punto $z_0 = x$ en C. La ecuación (1) se convierte en

(2) $$\arg \tau = \arg f'(x).$$

Si $f'(z)$ tiene un argumento constante a lo largo del segmento, entonces el arg $\tau$ es constante, esto es, la imagen $\Gamma$ de C es tambien un segmento de línea recta.

Se construye la transformación $w = f(z)$ que representa el eje x a un polígono de n lados donde $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ y $z = \infty$ son los puntos en el eje cuyas imágenes son los vértices del polígono donde $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$.

Los vértices son los puntos $w_j = f(x_j)$ $(j = 1,2,\ldots,n-1)$ y $w_n = f(\infty)$. La función f debe ser tal que el arg $f'(z)$ salte de un valor constante a otro en los puntos $z = x_j$ como el punto z vaya trazando el eje x.

La función escogida es

$$(3) \qquad f'(z) = A\,(z-x\ )^{-k_1}\,(z-x\ )^{-k_2}\ \ldots(z-x_{n-1})^{-k_{n-1}},$$

donde $A$ es una constante compleja y cada $k_j$ es constante real el argumento de $f'(z)$ cambia en la manera como $z$ describe el eje real; por el argumento de (3) se escribe

$$(4) \qquad \arg f'(z) = \arg A - k_1 \arg(z-x_1) - k_2 \arg(z-x_2) - \ldots - k_{n-1} \arg (z- x_{n-1}).$$

De acuerdo a la ecuación (4) y el arg $f'(z)$ se incrementa bruscamente por el ángulo $k_1\pi$, y $z$ se mueve hacia la derecha a través del punto $z = x_1$. Cambiando de nuevo por la cantidad $-k_2\pi$, como $z$ va pasando por el punto $z_2$, etc.

Por la ecuación (2), el vector unitario $\tau$ es constante en la dirección como $z$ se va moviendo de $x_{j-1}$ a $x_j$; $w$ se mueve entonces en la dirección a lo largo de la línea recta. La dirección de $\tau$ cambia bruscamente por el ángulo $k_j\pi$, y el punto $w_j$ imagen de $x_j$, figura 6 . Esos ángulos $k_j$ son los ángulos exteriores al polígono descrito por el punto $w$.

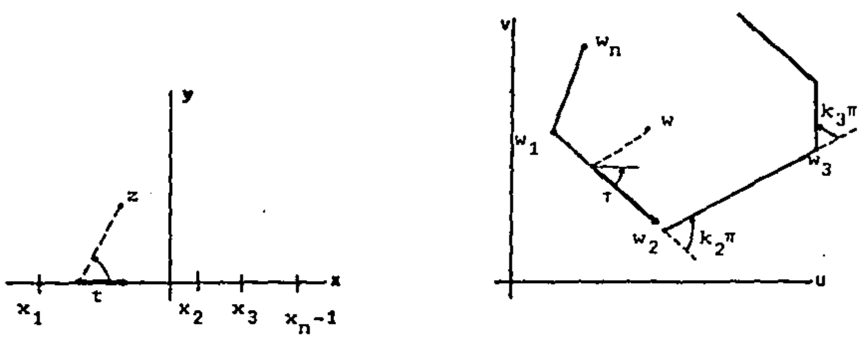



Figura 6

El ángulo exterior puede ser delimitado por los ángulos comprendidos entre $-\pi$ y $\pi$; esto es, $-1 < k_j < 1$. Se asume que los lados del polígono nunca se cruzan y además el polígono da una orientación positiva. La suma de los ángulos exteriores de un polígono cerrado es $2\pi$; y el ángulo exterior vértice $w_n$, la imagen del punto $z = \infty$

$$k_n\pi = 2\pi - (k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1})\pi$$

y los números $kj$ deben satisfacer las condiciones

(5) $$k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1} = 2, \qquad -1 < kj < 1 \qquad (j=1,2\ldots n).$$

Nótese que $k_n = 0$ si

(6) $$k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1} = 2.$$

En este caso la dirección de z no cambia en el punto $w_n$, por lo que $w_n$ no es un vértice y el polígono tiene n-1 lados.

De la fórmula(3), la derivada de una función que mapea el eje x a un polígono y los factores $(z-xj)^{-kj}$ representan las funciones potenciales con ramificaciones extendidas bajo el eje. Especificamente

(7) $$(z-xj)^{-kj} = |z-xj|^{-kj} \exp(-ikj\theta j) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta_j < \frac{3}{2}\pi\right).$$

donde $\theta j = \arg(z-xj)$ y $j = 1,2,\ldots,n-1$. Y como $f'(z)$ es analítica en todo el semiplano superior $y > 0$ en los n-1 puntos de las ramificaciones $xj$.

La función de la representación cuya derivada está dada por la fórmula (3) puede ser escrita como $f(z) = F(z) + B$, - donde B es una constante compleja. La transformación resulttante es

(8) $$w = A \ (s-x_1)^{-k_1} (s-x_2)^{-k_2} \ldots (s-x_{n-1})^{-k_{n-1}} \, ds + B,$$

que es la transformacion de Schwarz-Christoffel.

De acuerdo a lo establecido, el punto z describe el eje x en la dirección positiva y la imagen w también describe un polígono P en sentido positivo existiendo una correspondencia de uno a uno entre los puntos del eje y los de P. De acuerdo a la condición de $\lim_{z \to \infty} F(z) = wn$ cuando $\operatorname{Im} z > 0$, la imagen del punto $z = \infty$ existe cuando $wn = Wn + B$.

Dado un polígono definido P, se examina el número de constantes en la transformacion de Schwarz-Christoffel que deban ser determinadas en virtud de representar el eje x en P. Para el propósito se escribe $z_0 = 0$, $A = 1$ y $B = 0$; se requiere simplemente que el eje x sea representado en el mismo polígono P' similar a P. El tamaño y la posición de P' puede ser ajustada con la apropiada introducción de las constantes A y B para ser igual a P, y 3 de los números xj, o 3 relaciones entre ellos pueden ser escogidos arbitrariamente en la transformación (9) en el eje x del polígono.

(9) $$w = A \int_{z_0}^{z} (s-x_1)^{-k_1} (s-x_2)^{-k_2} \ldots (s-x_n)^{-k_n} \, ds + B.$$

# R E F E R E N C I A S


[1] Research Asst., Dept. of Mech. and Aerospace Engrg., Univ. of Kansas, Lawrence, Kans.

[2] Assoc. Prof., Dept. of Mech. and Aerospace Engrg., Univ. of Kansas, Lawrence,Kans.

[3] CHUN-CHEN,T.& SHEN-YU,Y., "Journal of the Hydraulics Division", Vol.91 No. HY2, Proceeding of the American Society of Civil Engineers, March 1965,pp.51-63

[4] Water Resources Development in Giorgia 1981, U.S. Army Corps of Engineers,South Atlantic Division.pp.60-72

[5] Manual de Diseño de Obras Civiles, hidrotécnia.A.2.10. "Obras de Excedencia",C.F.E., México 1981.

[6] CRUICKSHANK,C., "Funcionamiento de cubetas deflectoras como disipadores de energía en vertedores", Instituto de Ingeniería U.N.A.M., México,Julio 1962

[7] Presas de derivación, Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos, México 1980,pp.153-193

[8] Asociación Mexicana de Hidráulica, " El agua y su uso eficiente", 9º Congreso Nal. de Hidráulica,Tomo II, Noviembre 1986.pp.107-115

[9] FRANCO,V. Y CAMARGO,J., "Análisis de diferentes aspectos del Diseño y Funcionamiento Hidráulico de las cubetas deflectoras", Instituo de Ingeniería U.N.A.M., México 1986

[10] FRANCO,V., "Cálculo de presiones de deflectores" Tesis profesional, Facultad de Ingeniería-U.N.A.M., México 1977.

[11] WOODS,L.C., "CompressibleSubsonic Flow in Two-Dimensional Channels", Aerospace Quarterly, Royal Aeronautical Society London, Vol.6,1955b.

[12] WOODS,L.C., "The Theory of Sobsonic Plane Flow", Cambridge Univ. Press, New York,N.Y., 1961,p.163

[13] CHEN,T.C. " Calculation of Flow Past Spillway Bucket and Toe-Curve by Integral Equation Method", Thesis, University of Kansas, 1964

[14] CHURCHILL,R., BROWN,J. & VERHEY,R., " Complex Variables and Applications", 3rd. Ed. Mc Graw Hill,1974

[15] APPEL,D.,HUBBARD,P.,LANDWEBER,E.,LAURSEN,E.,MCNOWN,J., ROUSE,H., SIAO,T., TOCH,A.,& YIH,C., " Advanced Mechanics of Fluids", John Wiley & Sons, Inc. Iowa City 1959.