24'39

Facultad de Ciencias

CALCULO ACTUARIAL I

Tesis de Licenciatura en Actuaría

PRESENTA

CARLOS ALBERTO OLIVARES VALDIVIA

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INTRODUCCION

En la materia que nos ocupa, uno de los inconvenientes con los que se encuentra el alumno es sin duda, la falta de - libros de texto y publicaciones.

En la poca bibliografía citada al final, debe hacerse notar lo atrasado de las fechas ya que omitiendo las tesis, la publicación mas reciente es el Hooker y data de 1957. - Aunado a lo anterior nos encontramos con la escasez y alto costo, si se llegan a pedir al extranjero, ya que prácticamente no se encuentran en México.

Por lo que respecta a tesis, intentos tales como el de Pedro González Covarrubias en su "Proyecto de texto para un Curso de Cálculo Actuarial I" 1978, UNAM, son por demás - satisfactorios, mas no hay ejemplares en la biblioteca de la Facultad, y en la central aún cuando existe uno de ellos no está disponible para consulta por cuestiones de - tipo administrativo; y así por el estilo con las demás citadas en la bibliografía, tal como la de Mario Arriaga Parra "Elementos de Cálculo Actuarial" 1981 ENEP Acatlán.

El poco material que se tiene, es aportado por el propio maestro,en su gran mayoría fotocopias o bien éstas se ob-

tienen a través de un compañero.
Esta última alternativa con la recopilación de apuntes y notas han servido de base para el presente trabajo por lo que el"Calculo Actuarial I" aquí presentado, refleja aspectos recogidos a través de la clase diaria, esto es, de la experiencia directa entre el maestro y el alumno.

La presentación se inicia con las Funciones Biométricas, las cuales son aquéllas que nos permiten relacionar la edad x con la probabilidad de vida, aspecto fundamental del Cálculo Actuarial.

Siguiendo con anualidades y primas netas únicas, presentando en cada caso el concepto a través de la palabra escrita, el concepto gráfico y finalmente el matemático para ligarlo con relaciones y ejemplos.

Después de establecer lo relativo a la prima neta nivelada, se sigue con la prima de tarifa integrando el concepto de recargos y análisis de primas ya que resulta natural el desarrollo de estos temas, con la exposición del tema central. Finalmente se trata sobre reservas y sistemas modificados de reservas con especial énfasis en los "asset Shares".

Al principio de cada capítulo que lo requiere se presenta la notación utilizada, a efecto de dar mayor claridad y - firmeza en la exposición, ya que evita las confusiones naturales por no contar con la información mínima requerida en esta y en cualquier otra materia.

Se ha procurado que la notación utilizada se acerque lo - más posible a las publicaciones actuariales clásicas.

Por lo anterior considero que el presente trabajo bien podría servir de base para la elaboración de comunicaciones internas o bien ayudar como consulta o guía, más bien - que como libro de texto debido a la variedad y dinamismo que se observa en el campo de aplicaciones del Cálculo Actuarial I. Sin embargo, es conveniente decir, que el material incluido cubre ampliamente lo que se puede estudiar en un semestre, además de que la exposición sencilla matemáticamente hablando ayuda en la comprensión y asimilación de los temas tratados.

I N D I C E

CAPITULO I - FUNCIONES BIOMETRICAS

1.1	Notación	2
1.2	Función de Sobrevivencia	3
1.3	Tabla de Mortalidad	9
1.4	La Fuerza de Mortalidad	14
1.5	Leyes o Modelos de Mortalidad	19

CAPITULO II - ANUALIDADES CONTINGENTES

2.1	Notación	25
2.2	Rentas Contingentes con Pagos Anuales	27
2.3	Rentas Contingentes con Pagos en Fracciones del Año	45

CAPITULO III - SEGUROS

3.1	Notación	69
3.2	Seguros Pagaderos al Final del Año del Fallecimiento	71
3.3	Seguros Pagaderos en el Momento de la Muerte	77
3.4	Planes Variables	80

CAPITULO IV - PRIMAS NETAS NIVELADAS

4.1	Notación	83
4.2	Primas Netas Anuales	85
4.3	Primas Pagaderas en Fracciones del Año.	88

CAPITULO V - RESERVAS

5.1	Notación	101
5.2	Fórmulas Retrospectiva y Prospectiva	102
5.3	Otras Fórmulas para el Cálculo de Reservas	111
5.4	Reservas para Planes con Pagos en Fracciones del Año	119
5.5	Efectos en las Reservas de las Variaciones de las tasas de Interés	121

CAPITULO VI - PRIMAS DE TARIFA

6.1	Prima de Tarifa para Seguros pagaderos en el Momento de la Muerte	124

CAPITULO VII - SISTEMAS MODIFICADOS DE RESERVA

7.1 Asset Shares 132

7.2 Sistemas modificados de Reserva 136

Conclusiones 140

Anexos 1 y 2 142

Anexo 3 144

Bibliografía 154

CAPITULO I

FUNCIONES BIOMETRICAS

1.1 Notación.

$S(x)$ Función de sobrevivencia o probabilidad de que una persona de edad cero llegue a la edad x.

p Probabilidad de Sobrevivencia (Exito).

q Probabilidad de Fallecimiento (Fracaso).

l_x Personas vivas a edad x

d_x Personas muertas a edad x.

p_x Probabilidad de que una persona de edad x sobreviva hasta la edad $x+1$.

q_x Probabilidad de que una persona de edad x muera entre x y $x+1$.

e_x Esperanza de vida

$C_x = v^{x+1} d_x$, con $v=(1+i)^{-1}$

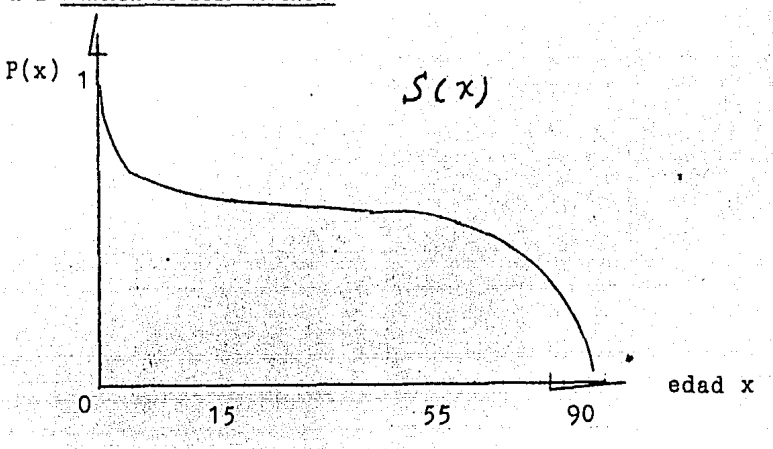
$D_x = v^x l_x$

$M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_w = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$

$N_x = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_w = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}$

$R_x = M_x + M_{x+1} + \ldots + M_w = \sum_{t=0}^{\infty} M_{x+t}$

I. 2 Función de Sobrevivencia



Esta función de sobrevivencia nos muestra en las ordenadas la edad, y en las abscisas la probabilidad de vida para las - diferentes edades, i.e. $p(x) = y \quad \forall \quad x \varepsilon [0,w]$, $y \varepsilon [0,1]$,

El comportamiento normal de mortalidad observado en la vida humana, reflejado gráficamente, resulta familiar ya que al inicio de la vida la pérdida de individuos debido a muertes es bastante grande, especialmente en países económicamente débiles; durante la niñez disminuye, incrementándose durante la adolescencia y la edad madura, acelerándose conforme se llega al final del lapso de vida.

El problema fundamental que se plantea, es considerar la - probabilidad de que una nueva vida de edad cero sobreviva

hasta alcanzar la edad x. Es claro que ésta probabilidad se puede considerar como una función de x, la cual se define como S(x).

Dicha función de supervivencia S(x), de acuerdo al comportamiento normal de mortalidad antes descrito, tiene las siguientes propiedades:

i) Es decreciente, i.e. $\frac{dS(x)}{dx} \leq 0 \quad \forall \quad x\varepsilon[0,w]$
lo cual nos indica que conforme x crece S(x) decrece, de lo cual se infiere que la probabilidad de sobrevivir a la edad x, es mayor que la probabilidad de sobrevivir a la edad x+t , t>0.

ii) Conocemos dos valores específicos de S(x): cuando x=0 entonces S(x)=1, y cuando se toma la cota superior del lapso de vida definido por w, para lo cual S(x)=0.

iii) S(x) es continua en el intervalo [0,w], puesto que estamos considerando patrones normales de mortalidad.

Como ejemplo particular para verificar las propiedades, dada una función, tomemos el siguiente caso:

Sea $S(x) = \frac{1}{10}\sqrt{100-x}$ para $0 \leq x \leq 100$

a) P.D. Que S(x) es decreciente, i.e. $\frac{dS(x)}{dx} \leq 0$

sustituyendo tenemos que:

$$\frac{d(\frac{1}{10}\sqrt{100-x})}{dx} = \frac{1}{10}\,\frac{d(100-x)^{1/2}}{dx} = \frac{1}{10}\left[-\frac{1}{2}(100-x)^{-1/2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{20}\,\frac{1}{\sqrt{100-x}} \leq 0$$

b) P.D. Que S(0)=1 y que S(w)=0, esto es

$$S(0) = \frac{1}{10}\sqrt{100-x} = 1 \qquad \text{y que } S(w) = \frac{1}{10}\sqrt{100-x} = 0$$

Lo cual resulta evidente al hacer la sustitución.

c) P.D. que S(x) es continua, esto es, $\lim_{x\to a} S(x) = S(a)$

El dominio de S es [0,100] y como

$S(a) = \frac{1}{10}\sqrt{100-a}$ entonces $\lim_{x\to a} S(x) = S(a)$

si a es punto de acumulación del dominio de S.

Debido a que la función de supervivencia S(x), representa la probabilidad de que una persona de edad 0 sobreviva a la edad x, dicha función se puede utilizar para encontrar probabilidades de supervivencia y mortalidad dadas, en intervalos de x a x+t $\forall$ x,t > 0.

Ejemplo (1): Utilizando la función anterior, encontrar la probabilidad p de que una persona de edad 19, sobreviva a la edad 51 y la probabilidad q de que muera entre esas edades.

Sustituyendo y resolviendo tenemos que:

$$S(19) = \frac{1}{10}\sqrt{100-19} = \frac{1}{10}\sqrt{81} = \frac{1}{10}(9) = \frac{9}{10}$$

lo cual representa la probabilidad de que una persona de edad 0 sobreviva a la edad 19.

Ahora $S(51) = \frac{1}{10}\sqrt{100-51} = \frac{1}{10}\sqrt{49} = \frac{7}{10}$, lo cual representa la probabilidad de que una persona de edad 0 sobreviva a la edad 51.

La probabilidad de sobrevivir a la edad 51, está compuesta del evento de sobrevivir a la edad 19 y del de sobrevivir después hasta la edad 51, es decir:

$$S(51) = p\,S(19) \Rightarrow p = \frac{S(51)}{S(19)} = \frac{7}{9} \quad \therefore$$

$$q = 1-p = \frac{2}{9}$$

Ejemplo (2): Utilizando la función $S(x) = \sqrt[3]{1-x^2/10^4}$

Para $0 \leq x \leq 100$, encontrar:

a) La probabilidad de que una nueva vida de edad 0 muera entre las edades 16 y 36.

b) La probabilidad de que a edad 16 muera antes de la edad 36.

Primero es necesario verificar, que la función propuesta cumpla con las propiedades i), ii) y iii), esto es que:

$$\frac{d\left(\sqrt[3]{1-x^2/10^4}\right)}{dx} \leq 0, \quad S(0) = 1, \; S(w) = 0, \quad \lim_{x \to a} S(x) = S(a)$$

Para resolver b), sabemos que la probabilidad de que una persona de edad 16 sobreviva a la edad 36, está dada por

$$p = \frac{S(36)}{S(16)} \quad \therefore \quad 1-p = 1 - \frac{S(36)}{S(16)}$$

Esta última expresión representa la probabilidad de que una persona de edad 16 muera antes de la edad 36, sustituyendo tenemos que

$$1 - \frac{S(36)}{S(16)} = 1 - \frac{\sqrt[3]{1-36^2/10^4}}{\sqrt[3]{1-16^2/10^4}} = 1 - \frac{0.9548}{0.9913} = 0.0368$$

Para resolver a) tenemos que:

$$S(16)\left[1-\frac{S(36)}{S(16)}\right] = S(16)-S(36) = \sqrt[3]{0.9744} - \sqrt[3]{0.8704} =$$

$$= 0.0366$$

Por lo que $q=0.9634$

I. 3 Tabla de Mortalidad

La base de la teoría del seguro de vida, es la tabla de mortalidad, que podemos definir como el instrumento técnico que nos permite calcular las probabilidades de vida y muerte. Las tablas de mortalidad, están basadas en datos obtenidos en forma experimental de dos fuentes principalmente:

1.- Las estadísticas generales de población.

2.- Los registros de mortalidad de las compañías de seguros, siendo estas las utilizadas en los cálculos actuariales.

Supongamos que se desea exhibir el efecto de una función de supervivencia $S(x)$, para un grupo de recién nacidos, suficientemente grande.

Sea k el número de recién nacidos.

El número de vivos (l_x) que se espera para cada edad está dado por $l_x = k.S(x)$ y el número de muertos (d_x) está dado por $d_x = l_x - l_{x+1}$.

Las columnas usadas en una tabla de mortalidad son:

$x \quad l_x \quad d_x \quad p_x \quad q_x \qquad e_x \quad C_x \quad D_x \quad M_x \quad N_x \quad R_x$

Teniendo $q_x \quad V_x$ y el radix inicial, se puede construir la tabla, sin embargo su cálculo es más fácil utilizando las fórmulas anteriores.

Ejemplo: Construir la tabla de mortalidad a partir de la función $S(x) = \frac{1}{10}\sqrt{100-x}$, y obtener los valores para $x\varepsilon[0,5]$ y $k = 100{,}000$. Por tanto tenemos que

$$l_0 = 100{,}000.S(0) = 100{,}000$$
$$l_1 = 100{,}000.S(1) = 99{,}499 \text{ , etc.}$$

Si tabulamos para x, l_x y d_x tenemos:

TABLA I

x	l_x	d_x
0	100,000	501
1	99,499	504
2	98,995	506
3	98,489	509
4	97,980	512
5	97,468	514

Las fórmulas usadas son:

$$l_x = k.S(x) \qquad q_x = 1-p_x = \frac{d_x}{l_x}$$
$$d_x = l_x - l_{x+1}$$
$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Además ${}_nq_x$ representa la probabilidad de que la persona x fallezca entre las edades x y x+n.

Por tanto tenemos que:

$$ {}_nq_x = 1 - {}_np_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} $$

y $n|q_x$ es la probabilidad de que x fallezca entre las edades x+n y x+n+1, por tanto

$$ n|q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x} = \frac{d_{x+n}}{l_x} $$

La probabilidad de que x fallezca entre las edades x+n y x+n+m, está dada por

$$ n|_mq_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x} $$

Tabla Selecta de Mortalidad

Cuando se desea adquirir un seguro de vida, además de llenar una solicitud, se presenta un examen médico, con el fin de que la aseguradora decida si el solicitante cumple con ciertas medidas de asegurabilidad. Si el solicitante es aceptado en condiciones normales, entonces se le designa como una vida selecta.

La importancia de elaborar un grupo con "vidas selectas",

estriba en que se puede esperar que en promedio sus miembros sobrevivan más tiempo, que el formado por un grupo elegido al azar.

Una tabla de mortalidad, que proporciona tasas de acuerdo - con la edad de ingreso al seguro y el periodo que ha transcurrido desde entonces, se denomina tabla selecta. Ahora - bien, con base en la experiencia se puede afirmar que con - el transcurso del tiempo, los efectos de la selección disminuyen lo suficiente como para suponer que a los 4 ó 6 años, prácticamente han desaparecido.

Por tanto, las tablas selectas suponen un cierto período - de selección a partir del cual, la mortalidad depende solamente de la edad alcanzada.

En la experiencia mexicana (62-67), se observó la siguiente relación entre grupos selectos y grupos al azar:

$$q_x > q'_x > q_x^{real}$$

donde q_x es el grupo al azar y q'_x el grupo selecto.

En este tipo de tablas se distingue la edad de ingreso por medio de corchetes: [x]; y el número de años transcurridos desde el ingreso es representado por una cifra agregada a -

la edad de ingreso.

Se designa por $q_{[x]+n}$ la tasa de mortalidad, experimentada por un grupo de vidas aseguradas a edad x y edad alcanzada x+n y la podemos expresar matemáticamente por las siguientes desigualdades:

$$q_{[x]} \quad q_{[x-1]+1} \quad q_{[x-2]+2} \quad \cdots\cdots$$

Normalmente la diferencia $q_{[x-n]+n} - q_{[x-n+1]+n-1}$ disminuye rápidamente y se vuelve insignificante después de algunos años, por lo dicho antes con respecto a la disminución del efecto selectivo.

Ejemplo TABLA II Edad: x , k=1000 , n=4

x	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	$q_{[x]+3}$	$q_{[x]+4}$
20	0.5850	0.8330	1.0285	1.1684	1.22
21	0.5949	0.8470	1.0454	1.1590	1.2199
22	0.6049	0.8609	1.0369	1.1590	1.2100
23	0.6150	0.8540	1.0370	1.1590	1.2100

Una tabla que muestra la tasa de mortalidad, para diversas edades después del período de selección, de acuerdo - solamente con la edad alcanzada es conocida como tabla última, es decir, que el período de selección ha sido suprimido.

I . 4 Fuerza de Mortalidad (Tasa instántanea de Mortalidad).

La fuerza de mortalidad "μ_x", es una función que mide la - variación instántanea de la mortalidad esto es, μ_x es la - tasa anual nominal, basada en la suposición de que la intensidad de la mortalidad permanece igual en todo momento durante el año x al $x+1$.

En forma matemática se define así:

$$\mu_x = - \frac{1}{l_x} \cdot \frac{dl_x}{dx} \quad \text{ó}$$

$$\mu_x = - \frac{d \log l_x}{dx}$$

Esta función tiene las siguientes propiedades:

1.- Es una medida de la mortalidad al momento preciso de - alcanzar la edad x.
2.- Expresa la mortalidad en forma de tasa anual.
3.- Es para el cálculo actuarial, lo que la fuerza de interés (δ) es para la teoría del interés compuesto.

Aplicaciones de μ_x :

Se pueden obtener expresiones para calcular l_x en términos

de μ_x. Así, por ejemplo, si reemplazamos x por y e integramos en ambos lados con límites 0 a x, tenemos:

$$\int_o^x \mu_y dy = - \int_o^x \frac{d}{dy} \log l_y \, dy =$$

$$= - \log l_y \Big]_o^x = - \log \frac{l_x}{l_0}$$

sacando antilog en ambos lados queda:

$$e^{-\int_o^x \mu_y \, dy} = \frac{l_x}{l_0} \qquad \therefore$$

$$l_x = l_0 \, e^{-\int_o^x \mu_y \, dy}$$

También podemos encontrar expresiones para las probabilidades de muerte, como ${}_nq_x$, para lo cual efectuamos el mismo cambio de x por y:

$$l_y \mu_y = - \frac{d \, l_y}{dy}$$

integrando entre los límites x y x+n :

$$\int_x^{x+n} l_y \mu_y dy = - \int_x^{x+n} \frac{dl_y}{dy} \, dy =$$

$$= - l_y \int_x^{x+n} = l_x - l_{x+n} \qquad \therefore$$

$$n q_x = \frac{\int_x^{x+n} l_y \mu_y dy}{l_o e^{-\int_o^x \mu_y dy}} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \qquad \text{o bien:}$$

$$n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \int_0^n {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$\text{con} \quad y = x+t \quad \text{y} \quad {}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

De esta fórmula se puede agregar que ${}_t p_x \cdot \mu_{x+t}$, puede ser interpretado como la probabilidad de que x sobreviva durante t años, y muera en el instante en que cumple x+t años de edad.

Además, al integrar esta expresión en el intervalo [0,n], tenemos la probabilidad de muerte correspondiente a ese periodo.

Expresiones del tipo ${}_t p_x \mu_{x+t}$ se utilizan en el cálculo actuarial, para 2 ó más personas, además de que en Cálculo Actuarial II se aplica para probabilidades contingentes y para calcular seguros pagaderos al momento de ocurrir el fallecimiento.

Mortalidad para Edades Fraccionadas

En ocasiones, se presenta el problema de evaluar diferentes probabilidades de vida y de muerte para fracciones de año. Por ejemplo ${}_{1/4}P_{25}$.

Lo anterior, implica tener que obtener valores para l_{x+t}, - con $x \in \mathbb{N}$ y $0 \leq t \leq 1$, para lo cual se requiere de algunos métodos de aproximación, siendo el más sencillo el de interpolación lineal. La utilización de este método nos lleva a la siguiente igualdad:

(A) $l_{x+t} = l_x - t d_x \quad \forall \quad x \in \mathbb{N} \quad y \quad 0 \leq t \leq 1$

lo cual, implica la suposición del principio de la distribución uniforme de muertes, esto es, que el número de muertes se distribuye uniformemente durante el año.

De la igualdad anterior, se deducen directamente las siguientes expresiones:

1) ${}_tp_x = 1 - t.q_x$, la que se obtiene dividiendo (A) entre l_x.
2) ${}_tq_x = t.q_x$

Una aproximación consistente con la fuerza de mortalidad,

para edades fraccionadas se puede obtener de la siguiente relación:

$$\mu_{x+t} = - \frac{1}{l_{x+t}} \frac{dl_{x+t}}{d\ t}$$

si se deriva la expresión (A) con respecto a "t", se obtiene

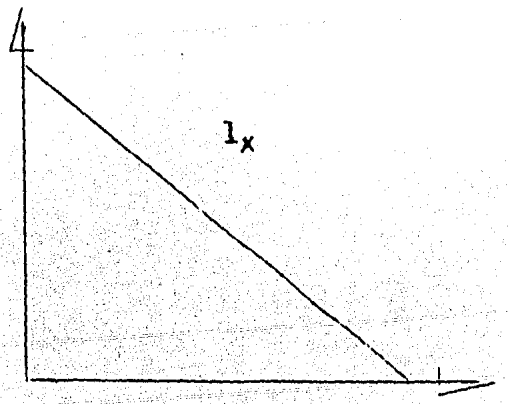
$$\frac{dl_{x+t}}{dt} = - dx \quad \therefore \quad \mu_{x+t} = \frac{q_x}{{}_tp_x} = \frac{q_x}{1-t.q_x}$$

1.5 Leyes o Modelos de Mortalidad

Muchos esfuerzos han sido hechos para encontrar una ley - matemática simple, que reproduzca la mortalidad de cual-- quier grupo de personas, con un grado suficiente de exactitud y que a la vez sea ventajosa en el trabajo actuarial.

Moivre fué probablemente el primero en hacer un estudio serio, sobre el problema de encontrar una ley matemática fundamental, que representara los datos incluidos en la tabla de mortalidad.

Expresó en 1725 su famosa hipótesis de decremento uniforme o número igual de muertes año con año, esto es, que el número de vivos l_x decrecía en forma de una progresión aritmética, de la edad x a la edad w, por lo que l_x se podría entonces graficar como una línea recta:



Esta hipótesis puede ser expresada como:

$$l_x = K(w - x)$$

se recomendaba que se usara para edades comprendidas en el intervalo [12,86].

Debido a que la hipótesis anterior, no fué del todo afortunada, se hizo necesario buscar otra relación que satisfaciera dos condiciones:

1) Un ajuste cercano a la verdadera experiencia.
2) La expresión algebraíca de la ley fuera tal que facilitara los cálculos.

Gompertz en 1825 sugirió una ley que satisfacia las dos condiciones, la cual postuló así:

"Es posible, que la muerte pueda ser la consecuencia de dos causas generales consistentes: una, la casualidad, sin una inclinación previa a la muerte o deterioración, y la otra, una deterioración o creciente incapacidad para resistir la muerte".

Sin embargo, para la deducción de la fórmula, Gompertz solo consideró la segunda causa y supuso que las probabi-

lidades de morir en intervalos infinitesimales sucesivos - de tiempo, crecian en progresión geométrica, esto es, que la fuerza de mortalidad se incrementa en forma geométrica y su fórmula es:

$$\mu_x = BC^x$$

donde x representa la edad en cualquier momento, mientras que B y C son constantes.

A continuación se obtiene una fórmula para l_x según Gompertz:

Sabemos que $l_x = l_o \, e^{-\int_o^x \mu_y dy}$ ∴

$$-\int_o^x \mu_y dy = -\int_o^x BC^y dy =$$

$$= \left[\frac{BC^x}{\log C} - \frac{B}{\log C}\right] = -\frac{B}{\log C} \quad (C^x - 1) =$$

$$= \log g^{C^x - 1} \qquad \text{con } \log g = -\frac{B}{\log C}$$

y como vimos antes $l_x = l_o \, e^{-\int_o^x \mu_y dy}$ entonces:

$$l_x = l_o \, e^{\log g^{C^x - 1}} = lo \, g^{C^x - 1}$$

haciendo $K = \frac{l_o}{g}$, obtenemos finalmente:

$$l_x = KgC^x$$

que es la fórmula de Gompertz para l_x.

Cabe señalar que según Gompertz, esta última expresión da valores aceptables de l_x, desde la edad 20 hasta la edad 60. Teniéndose que modificar las constantes K, g y C para edades mayores.

Basándose en la hipótesis original de Gompertz, Makeham en 1860, sugirió una modificación a la fórmula de la - fuerza de mortalidad, con el fin de incluir en ella la primara causa señalada por Gompertz. De esta forma lo- gró obtener una fórmula que permitía obtener valores de μ_x, con mayor exactitud. Tal fórmula es:

$$\mu_x = A + BC^x$$

En base a la relación anterior, se obtiene una fórmula para l_x así:

$$\int_o^x \mu_y dy = \int_o^x (A+BC^y)dy = AX + \frac{BC^x}{\log C} - \frac{B}{\log C} =$$

$= - \log S^x + \log g^{C^x - 1}$, donde $\log S = -A$ y

$$\log g = -\frac{B}{\log C} .$$

como $l_x = l_o \, e^{-\int_o^x \mu_y dy}$ entonces:

$$l_x = l_o \, e^{\log S^x - \log g^{C^x - 1}}$$

haciendo $K = \frac{l_o}{g}$, tenemos finalmente

$$\underline{l_x = K S^x g^{C^x}}$$

Estas leyes de mortalidad además de ajustarse en forma eficaz para medir la mortalidad, son de gran ayuda para graduar los datos obtenidos de las experiencias de grupos particulares y usarlos en la construcción de tablas de mortalidad.

CAPITULO II

ANUALIDADES CONTINGENTES

2.1 Notación

a_x : Anualidad contingente vitalicia vencida

$\ddot{a}_x$: Anualidad contingente vitalicia anticipada

${}_nE_x$: Seguro Dotal puro

$a_{x:\overline{n}|}$: Anualidad contingente temporal vencida

$S_{x:\overline{n}|}$: Anualidad de Forborne

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$: Anualidad contingente temporal anticipada

${}_n/a_x$: Anualidad contingente vitalicia vencida diferida n años.

${}_n/\ddot{a}_x$: Anualidad contingente vitalicia anticipada diferida n años.

${}_n/{}_m a_x$: Anualidad contingente vencida diferida n años y temporal a m años.

${}_n/{}_m\ddot{a}_x$: Anualidad contingente anticipada diferida n años y temporal a m años.

$a_x^{(m)}$: Anualidad contingente vitalicia vencida pagadera m veces al año.

${}_n/a_x^{(m)}$: Anualidad contingente vitalicia diferida n años pagadera en forma vencida m veces al año.

$a_{x:\overline{n}|}^{(m)}$: Anualidad contingente temporal a n años pagadera m veces al año en forma vencida.

$\bar{a}_x$: Anualidad continua vitalicia

$(Ia)_x$: Anualidad Contingente vitalicia creciente

$(Ia)_{x:\overline{n}|}$: Anualidad Contingente creciente temporal a n años.

$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$: Anualidad Contingente creciente temporal a n años anticipada

$(I_{\overline{n}|}a)_x$: Anualidad contingente vitalicia creciente durante n años.

$(Da)_{x:\overline{n}|}$: Anualidad Contingente decreciente temporal n años

$(Ia)_x^{(m)}$: Anualidad Variable Pagadera en fracciones del año con tasa constante.

$(I^{(m)}a)_x^{(m)}$: Idem anualidad anterior con tasa creciente

$(I\bar{a})_x$: Anualidad variable continua

2.2 Anualidades o Rentas Contingentes con Pagos Anuales

Las anualidades contingentes, son los valores presentes de pagos futuros, supeditados a la supervivencia de una vida determinada.

Las anualidades pueden ser:

a) Vitalicias
b) Temporales
c) Variables
d) Fraccionadas
e) Continuas

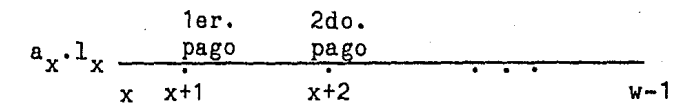
Las dos primeras, son de renta fija y se subdividen en: anticipadas, vencidas y diferidas.

Como ejemplo de anualidades están las pensiones y las jubilaciones.

Anualidad Contingente Vitalicia Vencida

El símbolo usado para esta anualidad es: a_x. Es el valor presente de una renta anual de, $ 1.00, pagadero a la persona x en forma vencida, mientras x esté con vida.

En forma gráfica tendríamos lo siguiente:



En donde $a_x l_x$ representa el importe total de todos los que pagaron el seguro.

El primer pago sería $l_{x+1}.\$1.00$; el segundo $l_{x+2}.\$1.00$ y así sucesivamente hasta llegar al último pago que sería $l_{w-1}.\$1.00$. Tomando el valor presente de las cantidades anteriores tenemos que:

1er. pago: $v.l_{x+1}.\$1.00$

2do. pago: $v^2 l_{x+2}.\$1.00$

.
.
.

último pago $v^{w-x-1}.l_{w-1}.\$1.00$

De lo anterior se sigue que:

$$a_x l_x = vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \ldots + v^{w-x-1} l_{w-1}$$

y consecuentemente el costo para el seguro por una sola persona es:

$$a_x = \frac{vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \ldots + v^{w-x-1} l_{w-1}}{l_x} =$$

$$= \frac{vl_{x+1}}{l_x} + \frac{v^2 l_{x+2}}{l_x} + \ldots\ldots + \frac{v^{w-x-1} l_{w-1}}{l_x} =$$

$$= vp_x + v^2 2p_x + \ldots. + v^{w-x-1} \, (w-x-1)p_x =$$

$$= \sum_{t=1}^{w-x-1} v^t \, {}_tp_x \qquad \text{i.e}$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{w-x-1} v^t \, {}_tp_x$$

Si usamos valores conmutados obtenemos que:

$$a_x l_x = vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \ldots + v^{w-x-1} \, l_{w-1}$$

multiplicando por v^x, tenemos:

$$a_x l_x v^x = v^{x+1} \, l_{x+1} + v^{x+2} l_{x+2} + \ldots + v^{w-1} l_{w-1}$$

y como $D_x = v^x l_x$, y

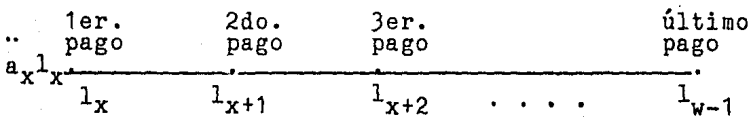
$$N_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} D_{x+t} \qquad \text{finalmente}$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Anualidad Contingente Vitalicia Anticipada: $\ddot{a}_x$

Esta anualidad, es el valor presente de una renta anual - de, $ 1.00 pagadera a la persona x, en forma anticipada mientras esté con vida.

Gráficamente tenemos lo siguiente:



Obteniendo el valor presente de los pagos:

1er. pago : l_x $ 1.00

2do. pago : vl_{x+1} $ 1.00

⋮

último pago: $v^{w-x-1}\ l_{w-1}$ $ 1.00

Siguiendo el mismo procedimiento que con las anualidades contingentes vitalicias vencidas, tenemos:

$$\ddot{a}_x l_x = l_x + vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \ldots\ldots + v^{w-x-1}\ l_{w-1}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{l_x + v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} \ldots + v^{w-x-1} l_{w-1}}{l_x}$$

$$\ddot{a}_x = 1 + \frac{v l_{x+1}}{l_x} + \frac{v^2 l_{x+2}}{l_x} + \ldots\ldots + \frac{v^{w-x-1} l_{w-1}}{l_x}$$

$$\ddot{a}_x = 1 + v_1 p_x + v^2 {}_2p_x + \ldots + v^{w-x-1} {}_{w-x-1}p_x \quad y$$

$$\ddot{a}_x = 1 + \sum_{t=0}^{w-x} v^t \, {}_tp_x$$

tomando valores conmutados, sería:

$$\ddot{a}_x = \frac{v^x l_x + v^{x+1} l_{x+1} + \ldots + v^{w-1} l_{w-1}}{v^x l_x}$$

y finalmente tenemos:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

Relacionando ambas anualidades, tenemos que:

$$\ddot{a}_x = a_x + 1 \qquad \text{ó} \qquad a_x = \ddot{a}_x - 1$$

Estas anualidades, tienen la característica de parecerse

a un seguro dotal puro o seguro de supervivencia, el cual está vigente en el mercado de seguros, denotándose por ${}_nE_x$ y se define como la prima neta única o valor presente de un seguro de $ 1.00, pagadero a la persona x al final del año n, siempre y cuando permanezca con vida.

El pago vendría dado por:

$$l_x \, {}_nE_x = v^n l_{x+n} \quad \text{de donde}$$

$${}_nE_x = \frac{v^n \, l_{x+n}}{l_x} = v^n \, {}_np_x \quad \text{y}$$

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

De lo anterior se puede ver que esta anualidad, no es más que una suma de dotales puros:

$$\ddot{a}_x = 1 + {}_1E_x + {}_2E_x + \cdots + {}_{w-x-1}E_x$$

expresada la ecuación anterior en notación sumatoria

$$\ddot{a}_x = 1 + \sum_{t=0}^{w-x-1} {}_tE_x$$

Anualidad Contingente Temporal Vencida: $a_{x:\overline{n}|}$

Esta anualidad es el valor presente de una renta anual de $1.00, pagadera a la persona x, en forma vencida durante n años, mientras esté con vida.

Gráficamente se representaría así:

$$a_{x:\overline{n}|}\, l_x \qquad v\$1.00 l_{x+1} \qquad v^2\$1.00 l_{x+2} \quad \ldots\ldots \quad v^n\$1.00 l_{x+n}$$

$$l_x \qquad l_{x+1} \qquad l_{x+2} \qquad\qquad l_{x+n}$$

Procediendo igual que en las anualidades anteriores:

$$a_{x:\overline{n}|}\, l_x = v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \ldots\ldots + v^n l_{x+n}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + \ldots\ldots + v^n\frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = v\,{}_1p_x + v^2\,{}_2p_x + \ldots\ldots + v^n\,{}_np_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t\,{}_tp_x$$

Expresada en función del dotal, queda así:

$$a_{x:\overline{n}|} = {}_1E_x + {}_2E_x + \ldots + {}_nE_x = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x$$

y con valores conmutados sería

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{v^{x+1}l_{x+1} + v^{x+2}l_{x+2} + \ldots v^{x+n}l_{x+n}}{v^x l_x} \quad \therefore$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Anualidad Contingente temporal anticipada: $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

Esta anualidad, es el valor presente de una renta anual - de $1.00, pagadera a la persona x en forma anticipada durane n años, si está con vida.

Para este caso, gráficamente, tenemos:

$1.00 l_x

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\, l_x$ $\quad v\$1.00 l_{x+1} \quad v^2\$1.00 l_{x+2} \quad \cdots \quad v^{n-1}\$1.00 l_{x+n-1}$

La relación matemática es:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \cdot l_x = l_x + v\, l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \ldots + v^{n-1} l_{x+n-1}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + v\, {}_1p_x + v^2\, {}_2p_x + \ldots + v^{n-1}\, {}_{n-1}p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + \sum_{t=1}^{n-1} v^t\, {}_tp_x$$

Expresada en función del dotal, es:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + {}_1E_x + {}_2E_x + \ldots + {}_{n-1}E_x \quad \text{ó}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x$$

y con valores conmutados:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

La relación entre estas dos últimas anualidades es:

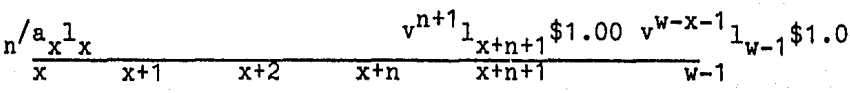
$$\ddot{a}_{x:\overline{n+1}|} = a_{x:\overline{n}|}+1 \qquad \text{ó} \qquad a_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n-1}|}-1$$

ó $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n-1}|}+1$

Anualidad Contingente Vitalicia Vencida Diferida n años: ${}_{n/}a_x$

Esta anualidad es el valor presente de una renta anual de $1.00, pagadera en forma vencida a la persona x, a partir del año n+1 (edad x+n+1) siempre que esté con vida.

Gráficamente tenemos lo siguiente:



Este tipo de anualidad, se puede ejemplificar con el caso de una pensión o jubilación, así pues:

$$n/a_x l_x = v^{n+1} l_{x+n+1} + v^{n+2} l_{x+n+2} + \ldots + v^{w-x-1} l_{w-1}$$

$$n/a_x = v^{n+1} \frac{l_{x+n+1}}{l_x} + v^{n+2} \frac{l_{x+n+2}}{l_x} + \ldots + v^{w-x-1} \frac{l_{w-1}}{l_x}$$

$$n/a_x = v^{n+1}\, {}_{n+1}p_x + v^{n+2}\, {}_{n+2}p_x + \ldots + v^{w-x-1}\, {}_{w-x-1}p_x$$

$$n/a_x = \sum_{t=n+1}^{w-1} v^t\, {}_tp_x$$

Expresada en función del dotal, tenemos:

$$n/a_x = {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + \ldots + {}_{w-x-1}E_x$$

$$n/a_x = \sum_{t=n+1}^{w-1} {}_tE_x$$

y en términos de los valores conmutados:

$$n/a_x = \frac{v^{x+n+1} l_{x+n+1} + v^{x+n+2} l_{x+n+2} + \ldots + v^{w-x} l_{w-1}}{v^x l_x}$$

$$n/a_x = \frac{D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \ldots\ldots + D_{w-1}}{D_x} \quad \text{ó}$$

$$n/a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

Anualidad Contingente Vitalicia Anticipada Diferida n años: $n/\ddot{a}_x$

Esta anualidad, es el valor presente de una renta anual - de, $1.00, pagadera en forma anticipada a la persona x, a partir del año n, esto es, a la edad x+n, siempre y cuando permanezca con vida.

Gráficamente tenemos lo siguiente:

$n/\ddot{a}_x l_x$. $v^n l_{x+n}\$1.00$ $v^{n+1} l_{x+n+1}\$1.00$ $v^{w-x-1} l_{w-1}\$1.00$

x x+1 ... x+n x+n+1 ..... w-1

lo cual expresado en forma de cuación nos queda:

$$n/\ddot{a}_x . l_x = v^n l_{x+n} + v^{n+1} l_{x+n+1} + \ldots + v^{w-x-1} l_{w-1}$$

$$n/\ddot{a}_x = \frac{v^n l_{x+n}}{l_x} + \frac{v^{n+1} l_{x+n+1}}{l_x} + \ldots + \frac{v^{w-x-1} l_{w-1}}{l_x}$$

$$n/\ddot{a}_x = v^n \, {}_np_x + v^{n+1} \, {}_{n+1}p_{x+1} + \ldots + v^{w-x-1} \, {}_{w-1}p_x$$

$$n/\ddot{a}_x = \sum_{t=n}^{w-1} v^t \, {}_tp_x$$

Lo cual expresado en función del dotal tenemos que:

$$n/\ddot{a}_x = \sum_{t=n}^{w-1} {}_tE_x \quad \text{y en función de valores conmutados}$$

$$n/\ddot{a}_x = D_{x+n} + D_{x+n+1} + \ldots + D_{w-1} \quad \text{y} \quad n/\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

Las relaciones que se obtienen de $n/\ddot{a}_x$ y n/a_x son:

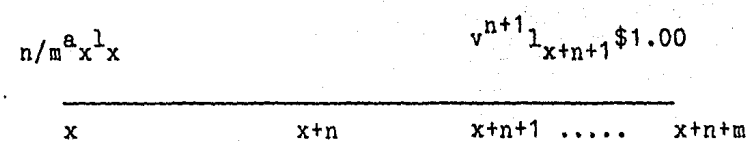
$$n-1/a_x = n/\ddot{a}_x \quad \text{y}$$

$$n/a_x = n+1/\ddot{a}_x$$

Anualidad Contingente Vencida Diferida n años, y temporal a m años: $n/_m a_x$

Esta anualidad se define, como el valor presente de una renta anual de $1.00, pagadera en forma vencida a la persona x, a partir del año n+1, edad x+n+1, y durante m años i.e. hasta la edad x+n+m, siempre que x permanezca vivo.

Gráficamente tenemos:



Donde $_{n/m}a_x l_x$ son todos los que pagaron el seguro; por - tanto matemáticamente tenemos que esta anualidad se obtiene así:

$$n/m^{a}x^{l}x = v^{n+1}l_{x+n+1}+v^{n+2}l_{x+n+2}+\ldots+v^{n+m}l_{x+n+m}$$

$$n/m^{a}x = \frac{v^{n+1}l_{x+n+1}}{l_x}+\ldots+\frac{v^{n+m}l_{x+n+m}}{l_x}$$

$$n/m^{a}x = v^{n+1}\,{}_{n+1}p_x + v^{n+2}\,{}_{n+2}p_x + \ldots + v^{n+m}\,{}_{n+m}p_x$$

La cual nos dá

$$n/m^{a}x = \sum_{t=n+1}^{n+m} v^{t}\,{}_{t}p_x$$

que expresado en función del dotal y de los valores conmutados, queda:

$$n/m^{a}x = \sum_{t=n+1}^{n+m} {}_{t}E_{x}$$

$$n/m^{a}x = \frac{D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \ldots + D_{x+n+m}}{D_{x}}$$

$$n/m^{a}x = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}}{D_{x}}$$

Anualidad Contingente Anticipada diferida n Años y temporal a m años: $n/m\ddot{a}x$

Esta anualidad, es el valor presente de una renta anual de $1.00, pagaderos en forma anticipada a la persona x, a partir del año n, edad x+n, y durante m años, esto es, hasta la edad x+n+m-1. Siempre que x esté con vida.

Gráficamente tenemos:

$$n/m\ddot{a}_x l_x \quad v^n l_{x+m}\$1.00 \quad v^{n+1} l_{x+n+1}\$1.00 \quad v^{n+m-1} l_{x+n+m-1}\$1.00$$

$$x \qquad x+n \qquad x+n+1 \quad . \quad . \quad . \quad x+n+m-1$$

Por lo que:

$$n/m\ddot{a}_x l_x = v^n l_{x+n} + v^{n+1} l_{x+n+1} \ \ldots \ + v^{n+m-1} l_{x+n+m-1}$$

$$n/m\ddot{a}_x = \frac{v^n l_{x+n}}{l_x} + \ldots\ldots + \frac{v^{n+m+1} l_{x+n+m-1}}{l_x}$$

$$n/m\ddot{a}_x = v^n {}_np_x + \ldots + v^{n+m-1} {}_{n+m-1}p_x$$

$$n/m\ddot{a}_x = \sum_{t=n}^{n+m-1} v^t {}_tp_x$$

Expresada en términos del dotal y los valores conmutados, tenemos que:

$$n/m\ddot{a}_x = \sum_{t=n}^{n+m-1} {}_tE_x$$

$$n/m\ddot{a}_x = \frac{D_{x+n} + D_{x+n+1} + \ldots + D_{x+n+m-1}}{D_x}$$

$$n/m\ddot{a}x = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x}$$

Las relaciones que se obtienen, son:

$$n-1/m a x = n/m\ddot{a}x \qquad y$$

$$n/m a x = n+1/m\ddot{a}x$$

Supongamos ahora que en un grupo de personas de edad x, - cada miembro hace pagos de $ 1.00, a un fondo al final del año. Si estos pagos son acumulados durante n años, la por ción del fondo de cada sobreviviente al final de los n a- ños, es conocida como una anualidad de Forborne a n años, la cual se denota por $S_{x:\overline{n}|}$ y su expresión es:

$$S_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{n-t\,E_{x+t}} = \frac{1}{D_{x+n}} \sum_{t=1}^{n} D_{x+t} \quad ó$$

$$S_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x+n}}$$

Multiplicando y dividiendo por D_x:

$$S_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D_{x+n}} \sum_{t=1}^{n} D_{x+t} = \frac{D_x}{D_{x+n}} \sum_{t=1}^{n} \frac{D_{x+t}}{D_x} =$$

$$= \frac{1}{n E_x}\, a_{x:\overline{n}|}$$

De lo anterior, se puede observar que $S_{x:\overline{n}|}$ representa el valor acumulado por intereses y mortalidad, al final de n años, de una serie de pagos para los cuales $a_{x:\overline{n}|}$, representa el valor presente a la edad x, y $S_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}}$ para una anualidad anticipada.

2.3 Anualidades o Rentas Contingentes con Pagos enFracciones del Año.

Anualidad Contingente Vitalicia Vencida Pagadera m veces al año: $a_x^{(m)}$

Esta anualidad es el valor presente de una renta de \$1.00 por año, pagadera en forma vencida durante toda la vida - de (x), con pagos de $\$\frac{1}{m}$ vencidos, cada m-ésimo de año.

Gráficamente se tiene lo siguiente:

$$a_x^{(m)} l_x \quad v^{\frac{1}{m}} l_{x+\frac{1}{m}} \$\frac{1}{m} \quad v l_{x+1} \$\frac{1}{m} \quad v^{1+\frac{1}{m}} l_{x+1+\frac{1}{m}} \quad v^{w-x-\frac{1}{m}} l_{w-\frac{1}{m}} \$\frac{1}{m}$$

$$x \qquad x+\tfrac{1}{m} \cdots x+1=x+\tfrac{m}{m} \qquad x+1+\tfrac{1}{m} \cdots \qquad w-\tfrac{1}{m}$$

y en forma matemática:

$$a_x^{(m)} l_x = \$\frac{1}{m}[v^{\frac{1}{m}} l_{x+\frac{1}{m}} + \ldots + v l_{x+1} + \ldots + v^{w-x-\frac{1}{m}} l_{w-\frac{1}{m}}]$$

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\left[v^{\frac{1}{m}} \frac{l_{x+\frac{1}{m}}}{l_x} + \ldots + v \frac{l_{x+1}}{l_x}\right] + \frac{1}{m}\left[v^{1+\frac{1}{m}} \frac{l_{x+1+\frac{1}{m}}}{l_x} + \ldots\right.$$

$$\left. + v^{1+\frac{m}{m}} \frac{l_{x+1+\frac{m}{m}}}{l_x}\right] + \ldots + \frac{1}{m}\left[v^{w-x-\frac{1}{m}} \frac{l_{w-\frac{1}{m}}}{l_x}\right]$$

multiplicando y dividiendo por v^x:

$$a_x^{(m)} = \frac{\frac{1}{m}[v^{x+\frac{1}{m}} l_{x+\frac{1}{m}} + \ldots v^x l_x] + \frac{1}{m}[v^{x+1+\frac{1}{m}} l_{x+1+\frac{1}{m}} + \ldots + v^{x+2} l_{x+2}] + \ldots + \frac{1}{m}[v^{-w-\frac{1}{m}} l_{w-\frac{1}{m}}]}{v^x l_x}$$

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \frac{D_{x+\frac{1}{m}} + D_{x+\frac{2}{m}} + \ldots\ldots D_{x+1} + D_{x+1+\frac{1}{m}} + \ldots + D_{x+2} + \ldots + D_{w-\frac{1}{m}}}{D_x}$$

Lo cual expresado en notación sumatoria dá:

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \frac{\sum_{t=1}^{(w-x-\frac{1}{m})^m} \frac{t}{m} E_x}{} \quad y$$

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{mD_x} \sum_{t=1}^{w-x-\frac{1}{m}} D_{x+\frac{t}{m}}$$

Es de notarse que estos últimos valores conmutados no se encuentran en tablas cuando $x+\frac{t}{m} \notin \mathbb{N}$.

Ahora, para poder calcular esta serie de pagos, será necesario aproximar la expresión $\sum D_{x+\frac{t}{m}}$, ya que estos valores no están definidos ni tabulados en las tablas de mortalidad.

Tal aproximación, se puede hacer utilizando una fórmula conocida como aproximación de Woolhouse.

Utilizando dicha fórmula, el valor de la anualidad es como sigue:

$$1)\quad a_x^{(m)} = \frac{1}{{}^{m}D_x} \sum_{t=1}^{\infty} D_{x+\frac{t}{m}} = \frac{1}{D_x}\left[\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t} + \frac{m-1}{2m} D_{x+\frac{m^2-1}{12m^2}} \cdot \right.$$

$$\left. \frac{d}{d_x} D_x - \cdots \right]$$

Si consideramos que:

$$2)\quad \frac{d}{d_x} D_x = - D_x(\mu_x + \delta)$$

Dem.- $\frac{d}{d_x} D_x = \frac{d}{d_x}(v^x l_x) = v^x \frac{d}{d_x} l_x + l_x \frac{d}{d_x} v^x$

como $\frac{d}{d_x} l_x = - l_x \mu_x$ y $\mu_x = \frac{1}{l_x} \frac{d}{d_x} l_x$

además $\frac{d}{d_x} v^x = v^x \log v = - v^x \delta$ entonces:

$$\frac{d}{d_x} D_x = -v^x l_x \mu_x - v^x l_x \delta = - D_x(\mu_x + \delta)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$(I)\ a_x^{(m)} \simeq a_x + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12\ m^2}(\mu_x + \delta) \ldots\ldots\ldots$$

En la práctica, esta aproximación es utilizada universalmente considerando solamente los dos primeros términos; ya que del tercero en adelante, son valores muy pequeños. Por lo tanto I se puede expresar como:

$$a_x^{(m)} \simeq a_x + \frac{m-1}{2m}$$

Para el caso de una serie de rentas pagaderas m veces al - año, en forma anticipada, también se hace necesario aproximar una expresión del tipo:

$$\frac{1}{mD_x} \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+\frac{t}{m}}$$

mediante la fórmula de Woolhouse pero cambiando los signos, por lo que la expresión será:

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

Anualidad Contingente Vitalicia Diferida n años.

Pagadera en forma vencida m veces al año: ${}_{n/}a_x^{(m)}$

Es el valor presente de una renta de $ 1.00, por un año - pagadera en forma vencida durante toda la vida de (x), con pagos de $ $\frac{1}{m}$, al final de cada m-ésimo de año y a partir de la edad $x+n+\frac{1}{m}$

Su expresión matemática es:

$$ {}_{n/}a_x^{(m)} = a_{x+n}^{(m)} \cdot {}_nE_x \simeq (a_{x+n} + \frac{m-1}{2m})\,{}_nE_x = $$

$$ = a_{x+n} \cdot {}_nE_x + \frac{m-1}{2m}\,{}_nE_x \quad \text{por tanto} $$

$$ {}_{n/}a_x^{(m)} \simeq {}_{n/}a_x + \frac{m-1}{2m} \cdot {}_nE_x $$

La expresión para la anticipada es:

$$ {}_{n/}\ddot{a}_x^{(m)} \simeq {}_{n/}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\,{}_nE_x $$

Anualidad Contingente Temporal a n años,

Pagadera m veces al año en forma vencida. $a^{(m)}_{x:\overline{n}|}$

Es el valor presente de una renta de \$1.00 por año, pagadera en forma vencida a (x), con pagos de $\$\frac{1}{m}$ al final de cada m-ésimo de año y durante n años, siempre que (x) esté con vida.

Su expresión matemática es como sigue:

$$a^{(m)}_{x:\overline{n}|} = a^{(m)}_{x} - {}_{n}/a^{(m)}_{x} = a_x + \frac{m-1}{2m} - [{}_{n}/a_x + \frac{m-1}{2m} \cdot {}_{n}E_x]$$

$$a^{(m)}_{x:\overline{n}|} = a_x - {}_{n}/a_x + \frac{m-1}{2m} (1 - {}_{n}E_x)$$

$$a^{(m)}_{x:\overline{n}|} = a_{x:n} + \frac{m-1}{2m} (1 - {}_{n}E_x)$$

Para la anticipada es:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m} (1 - {}_{n}E_x)$$

Anualidades Continuas: $\bar{a}_x$

Cuando la frecuencia del pago tienda a infinito, i.e.$m \to \infty$, la anualidad resultante se denomina continua y se define como:

$$\bar{a}_x = \lim_{m \to \infty} a_x^{(m)}$$

con $\bar{a}_x$ como el valor presente de una anualidad continua - vitalicia de \$ 1.00 mientras (x) viva.

Podemos considerar que las anualidades continuas se pagan a cada momento de cada año, de tal manera que el pago anual sea de \$ 1.00. Esto simplemente es un concepto artificial o eminentemente teórico.

Debido a que

$$\bar{a}_x = \lim_{m \to \infty} a_x^{(m)}$$

Podemos escribir:

$$\bar{a}_x = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{\infty} {}_{t/m}E_x$$

y puesto que el lado derecho de la igualdad, es una integral definida, tenemos que:

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty {}_t E_x dt = \frac{1}{D_x} \int_0^\infty D_{x+t}\, dt = \int_0^\infty v^t\, {}_t p_x\, dt$$

Los valores de $\bar{a}_x$ no pueden ser calculados directamente de las fórmulas anteriores, a menos que tengamos una función de supervivencia y utilicemos la tercera expresión. En la práctica esto no es usual y se hace necesario obtener fórmulas de aproximación para este tipo de anualidades.

De las fórmulas derivadas para aproximar $a_x^{(m)}$ podemos obtener una para $\bar{a}_x$. Si hacemos que $m \to \infty$, podemos obtener que:

$$\bar{a}_x \simeq a_x + \frac{1}{2}$$

Desde luego podría expresarse la anualidad continua en valores conmutados, pero habría necesidad de aproximar estos, que no están tabulados en ninguna tabla de mortalidad. Sin embargo nos quedaría: (Ver anexo 1)

$$\bar{a}_x = \frac{\bar{N}_x}{D_x}$$

Finalmente, se podrían expresar los otros tipos de anualidades continuas como integrales definidas y estas a su vez, también habría que aproximarlas como la $\bar{a}_x$, por ejemplo:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \, {}_tp_x \, dt \qquad \text{ó}$$

$$ {}_{n/}\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \, dt$$

todas las anualidades vistas hasta ahora, tienen en común el pago de $1.00 anual fijo. Se ha escogido esta constante por claridad, sin embargo es claro que puede ser sustituida por k-pesos.

Anualidades variables

En las anualidades consideradas hasta ahora, los pagos han sido constantes. Sin embargo, con frecuencia se encuentran tipos de anualidades en las cuales el monto del pago varía conforme transcurre el tiempo.

Normalmente, el valor presente de este tipo de anualidades, se expresa en función de anualidades constantes o niveladas.

Como ejemplo de este tipo de anualidades, consideremos lo siguiente: Una persona recibirá a partir de la edad (x), pagos anuales de $ 1,000 durante n, pero a partir de (n+1) años recibirá $2,000 anuales en forma vitalicia. Expresar en términos de anualidades niveladas, el valor presente del beneficio.

Gráficamente tenemos:

	1000	1000		1000	2000	
x	x+1	x+2	....	x+n	x+n+1	.....

y la expresión matemática del valor presente es:

$$VP = [\ a_{x:n}\ ].1000 + [\ {}_{n/}a_x].\ 2000$$

Otra solución sería:

$$VP = 1000\ a_x + 1000\ {}_{n/}a_x$$

Anualidad Contingente Vitalicia Creciente: $(Ia)_x$

Si denotamos por $(Ia)_x$ el valor presente a edad (x) de una anualidad vitalicia creciente que proporciona pagos de $1.00 a edad x+1, de $2.00 a edad x+2, de $ 3.00 a edad x+3, etc., incrementándose en $ 1.00 para cada año que la

persona (x) sobreviva, tenemos en forma gráfica que:

$(Ia)_x.l_x$ $\quad v\$1.00.l_{x+1}$ $\quad v^2\$2.00.l_{x+2}$ $\quad v^3\$3.00.l_{x+3}$

x $\quad$ x+1 $\quad$ x+2 $\quad$ x+3 ..... w-1

y en forma matemática:

$$(Ia)_x.l_x = vl_{x+1} + 2v^2l_{x+2} + 3v^3l_{x+3} + \ldots\ldots nv^{w-x-1}l_{w-1}$$

si escribimos esta serie en forma de suma horizontal tenemos:

$$(Ia)_x l_x = vl_{x+1}+v^2l_{x+2}+v^3l_{x+3} + \ldots.+v^{w-x-1}l_{w-1}$$

$$v^2l_{x+2}+v^3l_{x+3}+ \ldots\ldots+v^{w-x-1}l_{w-1}$$

$$v^3l_{x+3} + \ldots\ldots+v_{w-x-1}l_{w-1}$$

$$\vdots$$

$$+v^{w-x-1}l_{w-1}$$

$$(Ia)_x = {}_0/a_x + {}_1/a_x + {}_2/a_x + \ldots. + {}_{w-2}/a_x$$

$$(Ia)_x = \sum_{t=0}^{w-2} {}_t/a_x = \sum_{t=0}^{w-2} \frac{N_{x+t+1}}{D_x}$$

Si definimos el valor conmutado $S_x = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t}$

queda finalmente

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x} \qquad y \qquad (I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x}$$

Anualidad Contingente Creciente Temporal a n años: $(Ia)_{x:\overline{n}|}$

En este caso, los pagos crecientes cesan con el n-ésimo pago de $ n y su valor presente será:

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} \cdot l_x \quad v\$1.00l_{x+1} \quad v^2\$2.00l_{x+2} \quad \ldots \quad v^{n-1}\$(n-1)l_{x+n-1} \quad v^n\$n.l_{x+n}$$

$$x \qquad x+1 \qquad x+2 \qquad\qquad x+n-1 \qquad\qquad x+n$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} l_x = vl_{x+1} + 2v^2 l_{x+2} + 3v^3 l_{x+3} + \ldots + nv^n l_{x+n}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \frac{v^{x+1}l_{x+1} + 2v^{x+2}l_{x+2} + \ldots + nv^{x+n}l_{x+n}}{v^x l_x}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D_x}\,[v^{x+1}l_{x+1} + v^{x+2}l_{x+2} + v^{x+3}l_{x+3} + \ldots + v^{x+n}l_{x+n}$$

$$v^{x+2}l_{x+2} + v^{x+3}l_{x+3} + \ldots + v^{x+n}l_{x+n}$$

$$v^{x+3}l_{x+3} + \ldots + v^{x+n}l_{x+n}$$

$$\vdots$$

$$+ v^{x+n}l_{x+n}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = {}_{0/n}a_x + {}_{1/n-1}a_x + {}_{2/n-2}a_x + \cdots + {}_{n-1/n-(n-1)}a_x =$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/n-t}a_x = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{N_{x+t+1} - N_{x+n+1}}{D_x} =$$

$$= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1} + N_{x+2} - N_{x+n+1} + \ldots + N_{x+n-1+1} - N_{x-n+1}}{D_x}$$

y finalmente:

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n.N_{x+n+1}}{D_x}$$

Anualidad Contingente Creciente temporal a n años anticipada: $(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$

En esta anualidad los pagos crecientes acaban con el n-ésimo pago de \$n, en el año n-1 y su valor presente es:

$$\begin{array}{cccc} l_x\$1.00 & v\$2.00l_{x+1} & v^2\$3l_{x+2} & v^{n-1}\$n.l_{x+n-1} \\ \hline x & x+1 & x+2 & x+n-1 \end{array}$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}l_x = l_x+2vl_{x+1}+3v^2l_{x+2}+ \ldots + nv^{n-1}l_{x+n-1}$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{v^xl_x+2v^{x+1}l_{x+1}+3v^{x+2}l_{x+2} + nv^{x+n-1}l_{x+n-1}}{v^xl_x}$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D_x}\,[v^xl_x+v^{x+1}l_{x+1} + \ldots + v^{x+n-1}l_{x+n-1}$$

$$v^{x+1}l_{x+1} + \ldots + v^{x+n-1}l_{x+n-1}$$

$$\vdots$$

$$+ v^{x+n-1}l_{x+n-1}$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = {}_{0/n}\ddot{a}_x + {}_{1/n-1}\ddot{a}_x + {}_{2/n-2}\ddot{a}_x + \ldots + {}_{n-1/n-(n-1)}\ddot{a}_x =$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/n-t}\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_x}$$

y finalmente:

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n} - n.N_{x+n}}{D_x}$$

Anualidad Contingente Vitalicia creciente durante n años:

$(I_{\overline{n}|}a)_x$.

Esta anualidad, tiene la característica de incrementarse $1.00 cada año, hasta que en el n-ésimo pago, los pagos permanecen constantes por el resto de la vida de (x).

Gráficamente tenemos lo siguiente:

$(I_{\overline{n}|}a)_x.l_x$ $v\$1.00l_{x+1}$ $v^2\$2.00l_{x+2}$

x x+1 x+2 ...

$v^n\$nl_{x+n}$ $v^{n+1}\$nl_{x+n+1}$ $v^{w-x-1}\$nl_{w-1}$

... x+n x+n+1 w-1

y la expresión matemática es:

$$(I_{\overline{n}|}a)_x l_x = vl_{x+1} + 2v^2 l_{x+2} + ... + nv^n l_{x+n} + nv^{n+1} lx+n+1 + ..$$

$$.... + nv^{w-x-1} l_{w-1}$$

$$(I_{\overline{n}|}\, a)_x = \frac{v^{x+1}l_{x+1} + 2v^{x+2}l_{x+2} + \ldots + nv^{x+n}l_{x+n} + nv^{x+n+1}l_{x+n+1} + \ldots + nv^{w-1}l_{w-1}}{v^x l_x}$$

$$(I_{\overline{n}|}\, a)_x = \frac{1}{D_x}\left[v^{x+1}l_{x+1} + v^{x+2}l_{x+2} + \ldots + v^{x+n}l_{x+n} + v^{x+n+1}l_{x+n+1} + \ldots + v^{w-1}l_{w-1}\right.$$

$$v^{x+2}l_{x+2} + \ldots + v^{x+n}l_{x+n} + v^{x+n+1}l_{x+n+1} + \ldots + v^{w-1}l_{w-1}$$

$$v^{x+n}l_{x+n} + v^{x+n+1}l_{x+n+1} + \ldots + v^{w-1}l_{w-1}$$

$$(I_{\overline{n}|}\, a)_x = {}_0/a_x + {}_1/a_x + \ldots + {}_{n-1}/a_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t/a_x = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{N_{x+t+1}}{D_x}$$

y $$(I_{\overline{n}|}\, a)_x = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1}}{D_x}$$

Anualidad Contingente Decreciente temporal n años: $(Da)_{x:\overline{n}|}$

Esta anualidad proporciona un pago de $n a edad x+1 y decrece en $1.00 el monto de los pagos sucesivos, terminando con el n-ésimo pago de $ 1.00.

Gráficamente tenemos lo siguiente:

$$(Da)_{x:\overline{n}|}\cdot l_x \qquad v\$n.l_{x+1} \qquad v^2\$(n-1)l_{x+2} \qquad\qquad v^n\$1.00.l_{x+n}$$

$$x \qquad x+1 \qquad x+2 \qquad \ldots \qquad x+n$$

Matemáticamente tenemos que:

$$(Da)_{x:\overline{n}|}\cdot l_x = nvl_{x+1} + (n-1)v^2l_{x+2} + \ldots + v^n l_{x+n}$$

$$(Da)_{x:\overline{n}|} = \frac{nv^{x+1}l_{x+1} + (n-1)v^{x+2}l_{x+2} + (n-2)v^{x+3}l_{x+3} + \ldots + v^n l_{x+n}}{v^x l_x}$$

$$(Da)_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D_x}\,[v^{x+1}l_{x+1} + v^{x+2}l_{x+2} + v^{x+3}l_{x+3} + \ldots + v^{x+n}l_{x+n}$$

$$+ v^{x+1}l_{x+1} + v^{x+2}l_{x+2} + v^{x+3}l_{x+3} + \ldots + v^{x+n-1}l_{x+n-1}$$

$$+ \;\vdots$$

$$+ v^{x+1}l_{x+1} + v^{x+2}l_{x+2} + v^{x+3}l_{x+3}$$

$$+v^{x+1}l_{x+1}+v^{x+2}l_{x+2}$$

$$+v^{x+1}l_{x+1}\,]$$

Lo cual nos dá

$$(Da)_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D_x}\left[a_{x:\overline{n}|} + a_{x:\overline{n-1}|} + a_{x:\overline{n-2}|} + \ldots + a_{x:\overline{n-(n-1)}|}\right]$$

$$(Da)_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D_x}\sum_{t=1}^{n} a_{x:\overline{t}|} = \sum_{t=1}^{n}\frac{N_{x+1} - N_{x+t+1}}{D_x}$$

y finalmente tenemos que:

$$(Da)_{x:\overline{n}|} = \frac{n.N_{x+1} - (S_{x+2} - S_{x+n+2})}{D_x}$$

Como ejemplo consideremos lo siguiente:
Una persona de edad 35, recibe un pago inicial de $1,000.00 al final del 1er. año, decreciendo dicho pago en $ 50.00 - anuales, hasta que el pago se reduzca a $ 500.00, siendo esta cantidad la correspondiente al último pago. Expresar en términos de valores conmutados el valor presente del - beneficio.

En forma gráfica tenemos que:

	$1,000.00	$950.00		$550.00	$500.00
x=35	36	37	. . . .	45	46

Este beneficio, es equivalente a un pago de $ 450.00 durante 11 años, mas un pago inicial de $ 550.00 el 1er. año, el 2do. año de $ 500.00 y así sucesivamente hasta que el pago sea de $ 50.00, i.e.

$$450\ a_{\overline{35:11|}} + 50(Da)_{\overline{35:11|}} =$$

$$= \frac{450(N_{36} - N_{47}) + 50(11.N_{36} - S_{37} + S_{48})}{D_{35}} =$$

$$= \frac{50}{D_{35}} [(20.N_{36} - 9N_{47}) - (S_{37} - S_{48})]$$

Anualidades Variables pagaderas en Fracciones de Año

Si las anualidades variables son pagaderas en fracciones - del año, se presentan 2 casos:

1) Cuando la tasa de pago es constante durante el año, pero el pago anual total es hecho en m pagos iguales ocurriendo los incrementos o decrementos al inicio o final del año: $(I\ddot{a}^{\infty})_x^{(m)}$

2) Cuando la tasa de pago crece: $(I^{(m)}a)_x^{(m)}$.

Para el 1er. caso tenemos que:

$$(I\ddot{a}^{\infty})_x^{(m)} \cdot l_x \quad v^{1/m}\$_{\frac{1}{m}}l_{x+\frac{1}{m}} \quad \cdots \quad v^{\frac{m}{m}}\$_{\frac{1}{m}}l_{x+\frac{m}{m}} \quad \cdots$$

$$\frac{}{x \qquad x+\frac{1}{m} \qquad \cdots\cdots \qquad x+1 \qquad x+1+\frac{1}{m}}$$

$$\cdots \frac{v^{1+\frac{1}{m}}\$_{\frac{2}{m}}l_{x+1+\frac{1}{m}}}{\cdots\cdots \quad x+2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad x+1+\frac{m}{m}}$$

y

$$(I\ddot{a}^{\infty})_x^{(m)} = \frac{1}{D_x}\left[v^{x+\frac{1}{m}}\, l_{x+\frac{1}{m}}\,\frac{1}{m} + v^{x+\frac{2}{m}}\, l_{x+\frac{2}{m}}\,\frac{1}{m} + \cdots + v^{x+\frac{m}{m}} l_{x+\frac{m}{m}}\,\frac{1}{m} + \cdots + v^{x+1+\frac{1}{m}}\, l_{x+1+\frac{1}{m}}\,\frac{2}{m} + \cdots\right] =$$

$$= {}_{0/}a_x^{(m)} + {}_{1/}a_x^{(m)} + \dots + {}_{\infty/}a_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}a_x^{(m)} =$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{N_{x+t+1} - \left(\frac{m-1}{2m}\right) D_{x+t}}{D_x} =$$

$$= \frac{S_{x+1} - \left(\frac{m-1}{2m}\right) N_x}{D_x} = (Ia)_x - \frac{m-1}{2m}\ddot{a}_x$$

Para el segundo caso, consideremos el siguiente ejemplo: tomemos una anualidad creciente que es pagadera a una tasa de crecimiento de $\frac{1}{m}$ por año al final de los primeros $\frac{1}{m}$ años, $\frac{2}{m}$ por año al final de los segundos $\frac{1}{m}$ años y así sucesivamente. Si esta anualidad es emitida a edad $\underline{x}$, el primer pago vencido a edad $x+\frac{1}{m}$ será $\frac{1}{m^2}$. Como este pago cubre un período de $\frac{1}{m}$ de años, y la tasa de pago durante este primer período es de $\frac{1}{m}$ por año, entonces el segundo pago a edad $x+\frac{2}{m}$ será $\frac{2}{m^2}$ y así sucesivamente.

Gráficamente la situación es así:

$$(I^{(m)}a)_x^{(m)} l_x \qquad v^{\frac{1}{m}} l_{x+\frac{1}{m}} \frac{1}{m^2} \qquad v^{\frac{2}{m}} l_{x+\frac{2}{m}} \frac{2}{m^2}$$

$$x \qquad\qquad x+\frac{1}{m} \qquad\qquad x+\frac{2}{m} \qquad\qquad \dots$$

$$\frac{v^{\frac{m}{m}} {}_{\frac{m}{m^2}}l_{x+\frac{m}{m}} \quad v^{1+\frac{1}{m}} {}_{\frac{1}{m}}l_{x+1+\frac{1}{m}(1+\frac{1}{m})\frac{1}{m}} \quad v^{1+\frac{m}{m}} {}_{\frac{1}{m}}l_{x+1+\frac{m}{m}(1+\frac{m}{m})\frac{1}{m}}}{\ldots \quad x+\frac{m}{m} \qquad\qquad x+1+\frac{1}{m} \quad \ldots\ldots \quad x+1+\frac{m}{m} \quad \ldots\ldots}$$

Abreviando tenemos que:

$$(I^{(m)}a)^{(m)}_x = \frac{1}{D_x} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{t}{m^2} D_{x+\frac{t}{m}}$$

Desarrollando la suma de acuerdo a la fórmula de Woolhouse, hasta el término que involucra la primera derivada, se obtiene:

$$(I^{(m)}a_x)^{(m)}_x = (Ia)_x + \frac{m^2 - 1}{12\, m^2}$$

Cuando la frecuencia de los m pagos tiende a infinito, de las fórmulas anteriores, se obtienen las anualidades variables continuas, i.e.

$$(I\bar{a})_x = \lim_{m\to\infty} (Ia)^{(m)}_x \qquad \text{Por lo que}$$

$$(I\bar{a})_x = \sum_{t=0}^{\infty} t/\bar{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\bar{N}_{x+t}}{D_x} = \frac{\bar{S}_x}{D_x}$$

pero como: $(Ia)^{(m)}_x = \dfrac{S_{x+1} + \left(\frac{m-1}{2m}\right)N_x}{D_x}$

Si hacemos que $m \to \infty$ ent. :

$$(I\bar{a})_x \simeq \frac{S_{x+1} + \frac{1}{2} N_x}{D_x} = (Ia)_x + \frac{1}{2} \ddot{a}_x$$

y $(I^{(m)}a)_x^{(m)} \simeq (Ia)_x + \frac{m^2-1}{12m^2}$, por lo que

$$(I\bar{a})_x = \lim_{m \to \infty} (I^{(m)}a)_x^{(m)} \simeq (Ia)_x + \frac{1}{12}$$

CAPITULO III

SEGUROS O PRIMAS NETAS UNICAS

3.1 Notación

A: Seguros Pagaderos al final del año del fallecimiento.

A_x: Valor presente de un seguro de vida entera

$A^{1}_{x:\overline{n}|}$: Valor presente de un seguro temporal a n años.

n/A_x: Valor presente de un seguro de vida entera diferido n años.

$n/_m A_x$: Valor presente de un seguro temporal a m años diferido n años.

$A_{x:\overline{n}}$: Valor presente de un seguro dotal a n años.

$A_x^{(m)}$: Valor presente de un seguro de vida entera - pagadero al final de la m-ésima parte del año en que ocurra la muerte.

$\bar{A}_x$: Valor presente de un seguro de vida entera - pagadero al ocurrir la muerte

$(IA)_x$: Valor presente de un seguro creciente.

$(IA)^{1}_{x:\overline{n}}$: Valor presente de un seguro creciente temporal a n años.

$(DA)^{1}_{x:\overline{n}}$: Valor presente de un seguro decreciente temporal.

$d=(1-v)$, tasa de descuento.

Para el cálculo de cualquier tipo de seguro, se deben de contemplar cinco hipótesis básicas, que son:

1) El número de fallecimientos que ocurrirán, son los que - indica la tabla de mortalidad utilizada (Número de seguros que la aseguradora tendrá que pagar).
2) Los siniestros son pagaderos al final del año póliza - en que ocurran las muertes. (Pagaderos técnicamente).
3) Todas las primas del seguro se cobrarán al inicio del - mismo.
4) Todas las primas del seguro, que se cobran al inicio - del año póliza, son invertidas de inmediato a una cierta tasa de interés i.
5) Todas las primas calculadas son primas netas,i.e. serán suficientes para cubrir las reclamaciones, sin exceder el monto de las mismas.

3.2 Seguros Pagaderos al final del año del fallecimiento

Este tipo de seguros o primas netas únicas se denotarán por el símbolo $\underline{A}$.

$\underline{A}_x$ será por lo tanto, la prima neta única a valor presente de un seguro de vida entera de \$1.00 pagadero al final del año de la muerte de la persona (x).

La representación gráfica es:

$A_x l_x$ $\quad vd_x\$1.00 \quad v^2 d_{x+1}\$1.00 \qquad\qquad v^{w-x-1} d_{w-2}\$1.00$

$x \qquad\qquad x+1 \qquad\qquad x+2 \quad \ldots\ldots \quad w-x-1$

$d_x \qquad\qquad d_{x+1} \qquad\qquad\qquad\qquad d_{w-1}$

$v^{w-x} d_{w-1}\$1.00$

w

Y matemáticamente tenemos:

$$A_x . l_x = vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \ldots\ldots + v^{w-x} d_{w-1}$$

$$3\text{-a)} \quad A_x = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \ldots\ldots + v^{w-x} d_{w-1}}{l_x}$$

$$A_x = vq_x + v^2 {}_1/q_x + v^3 {}_2/q_x + \ldots\ldots + v^{w-x} {}_{w-x-1}/q_x$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} v^{t+1} {}_t/q_x$$

Si en 3-a), multiplicamos y dividimos por v^x, tenemos:

$$A_x = \frac{v^{x+1}d_x + v^{x+2}d_{x+1} + \ldots + v^w d_{w-1}}{v^x l_x}$$

si ahora definimos $Cx = v^{x+1}d_x$ y $M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$

entonces: $A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{w-1}}{D_x}$

y finalmente: $$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

Prima neta única o Valor presente de un seguro temporal a n años: $A^1_{x:\overline{n}|}$

Si consideramos que el pago es de $ 1.00, pagadero al final del año del fallecimiento de la persona (x), siempre y cuando el deceso ocurra dentro de los n años, gráficamente tendremos lo siguiente: (anexo 2)

$A^1_{x:\overline{n}|} \cdot l_x$ $\quad vd_x\$1.00$ $\quad v^2d_{x+1}\$1.00$ $\quad \ldots$ $\quad v^n d_{x+n-1}\$1.00$

x $\quad$ x+1 $\quad$ x+2 $\quad$ . . . $\quad$ x+n

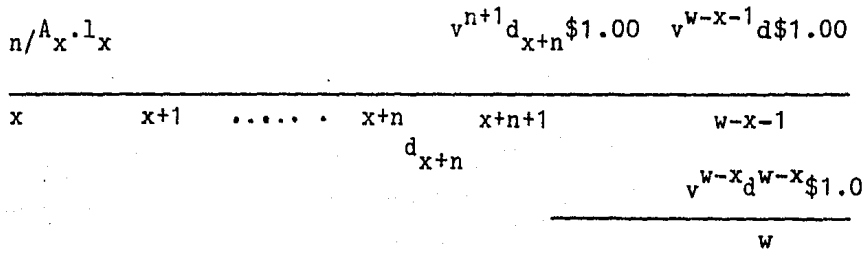
d_x $\quad$ d_{x+1}

y matemáticamente tenemos las relaciones:

$$A'_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \quad y \quad A'_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\, {}_{t/}q_x$$

Prima Neta Unica o Valor Presente de un seguro de vida entera diferido n años: ${}_{n/}A_x$.

Nuevamente, si consideramos el pago de $ 1.00, pagadero al final del año de la muerte de la persona (x), gráficamente tenemos:



El cálculo matemático se hace mediante las siguientes relaciones:

$$n/A_x = \frac{M_{x+n}}{D_x} \quad y \quad n/A_x = \sum_{t=n}^{w-x-1} v^{t+1}\, {}_{t/}q_x$$

Prima Neta Unica o valor presente de un seguro temporal a m años diferido n años: ${}_{n/m}A_x$.

Tomando el pago de $ 1.00, pagadero al final del año de la muerte de la persona (x), siempre que la muerte ocurra dentro de los m años contados a partir de la edad x+n y hasta la edad x+n+m, tenemos las siguientes relaciones:

$$ {}_{n/m}A_x = \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_x} \qquad y \qquad {}_{n/m}A_x = \sum_{t=n}^{n+m-1} v^{t+1}\, {}_{t/}q_x $$

Las relaciones que se presentan en las primas anteriores son:

i) $A_x = A^{1}_{x:\overline{n}|} + {}_{n/}A_x$

Demostración: $\frac{M_x}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{M_{x+n}}{D_x}$

ii) ${}_{n/m}A_x = {}_{n/}A_x - {}_{n+m/}A_x$

Demostración:

$$ \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_x} = \frac{M_{x+n}}{D_x} - \frac{M_{x+n+m}}{D_x} - \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_x} $$

iii) ${}_{n/m}A_x = A^{1}_{x:\overline{n+m}|} - A^{1}_{x:\overline{n}|}$

Demostración:

$$\frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n+m}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Valor presente de un seguro dotal a n años: $A_{x:\overline{n}|}$

Considerando el pago de $ 1.00, para una persona de edad - (x), pagadero al final del año del fallecimiento de x, en caso de que el deceso ocurra en el transcurso de los n - años y en caso de no presentarse el siniestro en este lapso, se pagará la suma asegurada contratada al final de los n años.

Las relaciones matemáticas para el cálculo de esta prima - son:

$$A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} \qquad y$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

Relaciones entre seguros y anualidades

Sabemos que los valores conmutados C_x y M_x, pueden ser expresados de la siguiente forma:

$$C_x = v.D_x - D_{x+1}$$

$$M_x = v.N_x - N_{x+1}$$

Por lo que $\underline{A_x}$ puede expresarse en función de anualidades, así:

1) $A_x = \dfrac{vN_x - N_{x+1}}{D_x} = v\,\ddot{a}_x - a_x$

y como: $a_x = \ddot{a}_x - 1$, entonces

$A_x = v\ddot{a}_x - (\ddot{a}_x - 1) = 1-(1-v)\ddot{a}_x = 1-d\ddot{a}_x$

2) $A'_{x:\overline{n}|} = v\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}$

3.3 Seguros Pagaderos en el momento de la muerte.

En la práctica, los seguros se pagan cuando existen pruebas fehacientes de la muerte del asegurado lo cual induce la modificación de las fórmulas correspondientes. La simbología utilizada para este tipo de seguros es similar a la anterior solo que se agrega una barra horizontal arriba de la A, esto es, $\bar{A}$.

Supongamos que bajo un plan de vida entera, la suma asegurada será pagada al final de la m-ésima parte del año en que la persona (x) muera. De acuerdo con esta suposición la prima neta única puede ser expresada así:

$$A_x^{(m)} = \frac{1}{l_x} \sum_{t=1}^{\infty} v^{t/m} \, \Delta l_{x+\frac{t-1}{m}}$$

donde $$\Delta l_{x+\frac{t-1}{m}} = (l_{x+t-\frac{1}{m}} - l_{x+\frac{t}{m}})$$

tomando a $\frac{1}{m}$ como el intervalo de diferenciación. Si hacemos que $m \to \infty$, la expresión anterior se aproxima a la prima neta única de un seguro de vida entera, pagadera en el momento de ocurrir la muerte y este valor se denota, como anteriormente se señala, por $\bar{A}_x$, por lo que

$$\bar{A}_x = \lim_{m\to\infty} A_x^{(m)} = \frac{1}{l_x}\int_0^\infty v^t l_{x+t}\,\mu_{x+t}dt = \int_0^\infty v^t\,{}_tP_x\mu_{x+t}dt$$

y puesto que

$$\lim_{m\to\infty} a_x^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{\infty} \frac{t}{m}E_x :$$

de donde podemos aproximar el término de la derecha, a una integral definida por lo que nos queda que:

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty {}_tE_x = \frac{1}{D_x}\int_0^\infty D_{x+t}\,dt = \int_0^\infty v^t\,{}_tP_x dt$$

Si ahora definimos ${}_tp_x\cdot\mu_{x+t}$, como la probabilidad de que la persona (x), llegue con vida a la edad x+t y en ese momento fallezca, entonces la integral puede ser valuada mediante el método de integración por partes, por tanto si hacemos

$y=v^t$ y $dz = l_{x+t}\cdot\mu_{x+t}\,dt$, entonces

$dy = v^t \log v = -\delta v^t$ y $z=-l_{x+t}$

$$\therefore\ \bar{A}_x = \frac{1}{l_x}\left[(-v^t l_{x+t})\Big|_0^\infty - \delta\int_0^\infty v^t l_{x+t}\,dt\right]$$

y finalmente tenemos que $\bar{A}_x = 1 - \delta\bar{a}_x$

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Esta última expresión aparte de no ser muy práctica, resulta dificil, por lo que vamos a suponer o a aplicar el principio de la distribución uniforme de muertes, el cual nos dice lo siguiente:

Si las muertes que ocurrieran en un año estuvieran uniformemente distribuidas durante él, podría considerarse que en promedio, las muertes ocurrirán a la mitad del año y si la suma asegurada fuera pagadera en el momento de ocurrir la muerte, en promedio sería pagadero seis meses antes de lo supuesto en los seguros pagaderos al final del año del deceso, i.e.

$$\bar{A}_x \simeq (1+i)^{1/2} . A_x \simeq (1+\tfrac{i}{2}) A_x$$

Existe otra expresión para aproximar $\bar{A}_x$ en términos de A_x y es:

$$\bar{A}_x \simeq \frac{i}{\delta} A_x$$

Para el resto de los planes tales como temporales, dotales y diferidos a $\underline{n}$ años análogamente se expresa la $\bar{A}$ correspondiente en términos de la A.

3.4 Seguros Variables

Un seguro que proporciona por muerte un beneficio creciente o decreciente, es llamado un seguro variable.

El seguro creciente de vida entera proveé un beneficio de $ 1.00 en el 1er. año, $2.00 en el 2do. y así sucesivamente. Si la prima neta única para dicho seguro, emitido a la edad (x), la denotamos por $(IA)_x$, entonces:

$$(IA)_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_t/A_x \quad \text{ó} \quad (IA)_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{M_{x+t}}{D_x}$$

Si definimos el valor conmutado $R_x = \sum_{t=0}^{\infty} M_{x+t}$ entonces:

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}$$

Para el seguro creciente temporal a $\underline{n}$ años la expresión es:

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \frac{R_x - R_{x+n} - n.M_{x+n}}{D_x}$$

Un seguro de vida entera que proporciona el beneficio por muerte, y que se incrementa solamente durante $\underline{n}$ años, permaneciendo constante a partir de $\underline{n}$, tiene como expresión:

$$(I_{\overline{n}}A)_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_t/A_x = \frac{R_x - R_{x+n}}{D_x}$$

El seguro decreciente temporal, proveé de un beneficio inicial de n decreciente en $ 1.00 cada año, sin pago de la suma asegurada si la muerte ocurre despues de n años. Su expresión es:

$$(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} A_{x:\overline{t}|} = \sum_{t=1}^{n} \frac{M_x - M_{x+t}}{D_x} =$$

$$= \frac{n.M_x - (R_{x+1} - R_{x+n+1})}{D_x}$$

CAPITULO IV

PRIMAS NETAS NIVELADAS

4.1 Notación

P_x Prima neta nivelada de un ordinario de vida

$_nP_x$ Prima neta nivelada de un vida pagos limitados a n años.

$P'_{x:\overline{n}|}$ Prima neta nivelada de un temporal a n años.

$P_{x:\overline{n}|}$ Prima neta nivelada de un dotal a n años.

$P^{1}_{x:\overline{n}|}$ Prima neta nivelada de un dotal puro a n años.

$P(\overline{A}_x)$ Prima neta nivelada de un ordinario de vida pagadero al ocurrir el deceso.

$_nP(\overline{A}_x)$ Prima neta nivelada de una vida pagos limitados a n años.

$P[(I\overline{A})_x]$ Prima neta nivelada de un creciente de vida - entera.

$P^{(m)}$ Prima fraccionada real

$P^{[m]}$ Prima fraccionada a plazos

$P^{(m)}$ Prima fraccionada a prorrata

$P_x^{(m)}$ Prima fraccionada real de un ordinario de vida.

${}_nP_x^{(m)}$ Prima fraccionada real de una vida pagos limitados a n años.

$P'^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ Prima fraccionada real de un temporal a n años.

$P^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ Prima fraccionada real de un dotal a n años

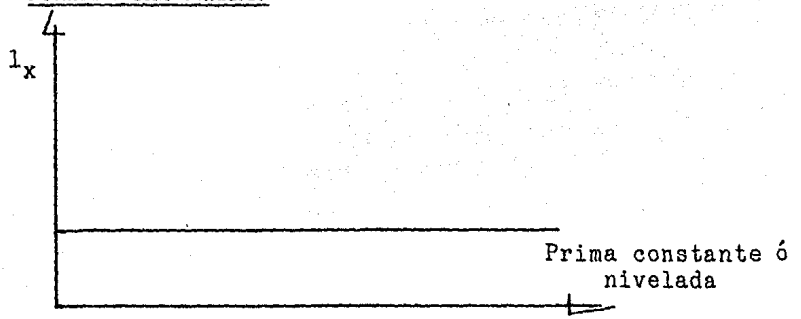
$P_x^{[m]}$ Prima fraccionada a plazos de un ordinario de vida.

${}_nP_x^{[m]}$ Prima fraccionada a plazos de un vida pagos limitados a n años.

$P_x^{\{m\}}$ Prima fraccionada a prorrata de un ordinario de vida.

π Prima de tarifa.

4.2 Primas Netas Anuales



Para calcular una prima neta nivelada de cualquier seguro, se aplica el principio fundamental de que el valor presente de dichas primas debe ser igual al valor presente del seguro.

Hasta el momento las primas calculadas son netas, esto es, suficientes para cubrir las reclamaciones: $A = P.\ddot{a}$.

Generalmente, los solicitantes de seguros los pagan con primas anuales, semestrales, trimestrales o mensuales; mas bien que con primas únicas. Los pagos de tales primas, forman una anualidad anticipada ya que la primera prima es pagada en forma inmediata y las siguientes son pagadas al principio de cada periodo subsecuente, dependiendo estas últimas de la supervivencia del asegurado, esto es: $P = A/\ddot{a}$.

Las relaciones matemáticas para los diferentes planes son:

1) Ordinario de vida entera: $P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{M_x}{N_x}$

2) Vida pagos limitados a n años:

$$ {}_nP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x}{N_x - N_{x+n}} $$

3) Temporal a n años:

$$ P^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

4) Dotal a n años:

$$ P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

5) Dotal puro a n años:

$$ P_{x:\overline{n}|}^{1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

Las fórmulas anteriores, son para seguros pagaderos al - final del año del fallecimiento. Cuando el seguro es pagadero al momento de ocurrir el deceso, se usa una notación diferente para representar la prima neta nivelada -

anual que evita expresiones complicadas. Para ello el símbolo P es usado en union con el símbolo de la prima neta única, lo que indica el pago inmediato de las reclamaciones. Como ejemplo se presentan los siguientes planes:

1) Ordinario de vida: $P(\bar{A}_x) = \dfrac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x}$

2) Un vida pagos limitados a n años:

$$ {}_nP(A_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} $$

3) Creciente de vida entera:

$$ P[(IA)_x] = \frac{(I\bar{A}_x)}{\ddot{a}_x} $$

En ocasiones se emiten pólizas para las cuales la prima anual no es nivelada.

Supongamos que una póliza de vida entera es emitida, con cada prima pagadera durante los primeros k años, igual a la mitad de la prima pagadera posteriormente. Si la prima anual inicial de dicha póliza es representada por P entonces el valor de la misma se determina por la siguiente fórmula:

$$ A_x = P\ddot{a}_{x:\overline{k}|} + 2P_{k/}\ddot{a}_x $$

si despejamos P, obtenemos:

$$P = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|} + {}_k/\ddot{a}_x} = \frac{Mx}{N_x + N_{x+k}}$$

4.3 Primas Pagaderas en fracciones del año.

Anteriormente se ha señalado que, el asegurado generalmente elige pagar el seguro en forma semestral, trimestral, etc. A esto se le llama primas fraccionadas y se presentan tres alternativas de cálculo a las aseguradoras.

1) Considerar que el pago de primas se suspende con el fallecimiento del asegurado. Este tipo de primas es llamada "Primas Fraccionadas Reales" y su notación para los diferentes tipos de seguro es: $P^{(m)}$

2) Deducir de la suma asegurada en la póliza, cualquier parte de la prima anual no pagada al fallecimiento del asegurado. A las de este tipo se les denomina "Primas fraccionadas a plazos" ya que el total de primas pagadas cada año son efecto de una prima anual pagadera a plazos. Se denota por : $P^{[m]}$.

3) Este último caso llamado "Primas fraccionadas a prorrata" se presenta cuando la muerte ocurre después de pa-

gada la prima y antes del final del período cubierto, se reembolsa la parte de la prima no cubierta. Su símbolo es: $P^{\{m\}}$

Estas tres primas cumplen con que:

$$P^{[m]} < P^{(m)} < P^{\{m\}}$$

Relaciones y ejemplos de las Primas Fraccionadas reales.

Para el caso de un ordinario de vida tenemos que:

$$P_x^{(m)} = \frac{A_x}{a_x^{(m)}} \simeq \frac{A_x}{\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}} = \frac{M_x}{N_x - D_x(\frac{m-1}{2m})} \qquad (1)$$

Es clara la conveniencia de poder calcular $P_x^{(m)}$ a partir de los valores de P_x. Si la fórmula anterior es multiplicada dividida por $\ddot{a}_x$ y reemplazando $\frac{A_x}{\ddot{a}_x}$ por P_x se obtiene que:

$$P_x^{(m)} \simeq \frac{P_x}{1 - \frac{m-1}{2m} \times \frac{1}{\ddot{a}_x}}$$

como $\frac{1}{\ddot{a}_x} = P_x + d$ tenemos que

$$A_x = 1 - d\ddot{a}_x \qquad y \qquad P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{1}{\ddot{a}_x} - d$$

Por tanto: $$P_x^{(m)} \simeq \frac{P_x}{1-\frac{m-1}{2m}(P_x+d)} \qquad (2)$$

La relación $P_x^{(m)} > P_x$ se debe a que:

a) La posible pérdida de prima, en el año en que ocurre - la muerte y

b) La pérdida de interés en las porciones de la prima anual cuyo pago es diferido, ya que el pago de las primas - fraccionadas es recibido en fecha posterior a la de la prima anual.

Reescribiendo (2) como sigue:

$$P_x^{(m)} = P_x + \frac{m-1}{2m} P_x^{(m)} P_x + \frac{m-1}{2m} d P_x^{(m)} \qquad (3)$$

Podemos observar que $P_x^{(m)}$ excede a P_x por el valor de 2 - términos de ajuste.

Ejemplo: Hallar la prima neta de un seguro de vida entera, pagadera trimestralmente para una persona de 30 años de - edad. Considerese una suma asegurada de $1,000.00 y una - tasa de interés del 4.5% anual, supuesta en el cálculo de dicha prima.

Datos

$m = 4$

$x = 30$

$SA = 1000$

$i = 0.045$

Fórmulas

$$KP_x^{(m)} = K \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = K \left[\frac{M_x}{N_x - \frac{m-1}{2m} D_x} \right]$$

Substitución y desarrollo:

$$1000\ P_{30}^{(4)} = 1000 \frac{A_{30}}{\ddot{a}_{30}} = 1000 \left[\frac{M_{30}}{N_{30} - \frac{3}{8} D_{30}} \right] =$$

$$= 1000 \left[\frac{502{,}849.771}{48'499{,}416.9 - 0.375(2'591{,}341.5)} \right]$$

$$= 10.58$$

Ahora bien, sabemos que $P_x^{(m)}$ representa la cantidad anual de prima pagadera m veces al año y que la cantidad efectiva de cada pago es $\frac{1}{m} \cdot P_x^{(m)}$ por lo que la prima trimestral es:

$$\frac{1}{4} P_x^{(m)} = \frac{10.58}{4} = 2.645$$

Si utilizamos la expresión (2), tenemos:

$$1000\ P_{30}^{(4)} = \frac{1000\ P_{30}}{1 - \frac{3}{8}(P_{30} - d)}$$

como

$$P_{(30)} = \frac{M_{30}}{N_{30}} = \frac{502,849.771}{48'499,416.9} = 0.01037$$

y d = 0.04306, entonces:

$$1000\ P_{30}^{(4)} = 1000\ [\ \frac{0.01037}{1-0.375(0.01037 + 0.04306}\ ] =$$

$$= 1000\ (0.01058) = 10.58$$

siendo la trimestral, por tanto, 2.645.

De forma análoga, se pueden obtener las tres expresiones - para $P^{(m)}$ del resto de los planes básicos.

Para una vida pagos limitados a $\underline{t}$ años:

i) $$ {}_tP_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|} - \frac{m-1}{2m}\ (1-{}_tE_x)} = $$

$$= \frac{M_x}{N_x - N_{x+t} - \frac{m-1}{2m}\ (D_x - D_{x+t})}$$

ii) $$ {}_tP_x^{(m)} = \frac{{}_tP_x}{1 - \frac{m-1}{2m}\ (P'_{x:\overline{t}|} + d\ )} $$

iii) $$ {}_tP_x^{(m)} = {}_tP_x + \frac{m-1}{2m}\ {}_tP_x^{(m)}\ (P'_{x:\overline{t}|} + d) $$

Para un temporal a n años:

$$i') \quad P'^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{A'_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}} \simeq \frac{A'_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\,(1-{}_nE_x)} =$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}\,(D_x - D_{x+n})}$$

$$ii') \quad P'^{(m)}_{x:\overline{n}|} \simeq \frac{P'_{x:\overline{n}|}}{1 - \frac{m-1}{2m}\,(P'_{x:\overline{n}|} + d)}$$

$$iii') \quad P'^{(m)}_{x:\overline{n}|} \simeq P'_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}\,P'^{(m)}_{x:\overline{n}|}\,(P'_{x:\overline{n}|} + d)$$

Para un seguro dotal a n años:

$$i'') \quad P^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \simeq \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\,(1 - {}_nE_x)} =$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}\,(D_x - D_{x+n})}$$

$$ii'') \quad P^{(m)}_{x:\overline{n}|} \simeq \frac{P_{x:n}}{1 - \frac{m-1}{2m}\,(P'_{x:\overline{n}|} + d)}$$

$$iii'') \quad P^{(m)}_{x:\overline{n}|} \simeq P_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}\,P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\,(P'_{x:\overline{n}|} + d)$$

Primas Fraccionadas a Plazos

Para un plan ordinario de vida entera, con primas fraccionadas a plazos, se determina una cantidad promedio de prima que será deducida de la suma asegurada. Dicha cantidad se define por $\frac{m-1}{2m} P_x^{[m]}$ y el pago neto por parte del asegurado en el año del fallecimiento en promedio es:

$$1 - \frac{m-1}{2m} P_x^{[m]}$$

Bajo esta alternativa la fórmula correspondiente para un ordinario de vida es:

$$P_x^{[m]} \simeq \frac{A_x(1 - \frac{m-1}{2m} P_x^{[m]})}{\ddot{a}_x^{[m]}} = P_x^{(m)}(1 - \frac{m-1}{2m} P_x^{[m]})$$

En este caso también se puede expresar esta prima en términos de las primas anuales:

$$P_x^{[m]} \simeq \frac{P_x}{1 - \frac{m-1}{2m}(P_x + d)} (1 - \frac{m-1}{2m} P_x^{[m]})$$

$$= \frac{P_x - \frac{m-1}{2m} P_x^{[m]} P_x}{1 - \frac{m-1}{2m}(P_x + d)} =$$

$$= \frac{P_x}{1-\frac{m-1}{2m}(P_x + d)} - \frac{\frac{m-1}{2m} P_x^{[m]} P_x}{1 - \frac{m-1}{2m}(P_x + d)} \quad \therefore$$

$$P_x^{[m]} + \frac{\frac{m-1}{2m} P_x^{[m]} P_x}{1 - \frac{m-1}{2m}(P_x + d)} = \frac{P_x}{1 - \frac{m-1}{2m}(P_x + d)} \qquad y$$

$$[\, 1 - \frac{m-1}{2m}(P_x+d)]P_x^{[m]} + \frac{m-1}{2m} P_x^{[m]} P_x = P_x$$

factorizando $P_x^{[m]}$ queda:

$$P_x^{[m]}[\, 1 - \frac{m-1}{2m}(P_x + d) + \frac{m-1}{2m} P_x \,] = P_x$$

y finalmente tenemos que:

$$P_x^{[m]} \simeq \frac{P_x}{1 - \frac{m-1}{2m} d} \qquad (*)$$

Como ejemplo veamos lo siguiente:

Consideremos un seguro de vida entera para una persona de 30 años, con una suma asegurada de $ 1,000.00 y una tasa - del 4.5% anual, encontrar la prima fraccionada a plazos. Sustituyendo los datos en (*) tenemos:

$$1000P_{30}^{[4]} = 1000\,\frac{P_{30}}{1-\frac{3}{8}.d}$$

como $P_{30} = 0.01037$ y $d = 0.04306$, entonces

$$1000P_{30}^{[4]} \simeq \frac{1000 - 0.1037}{1 - 0.375(0.04306)} = 10.54$$

Por lo que el pago trimestral será: $ 2.635.

Análogamente se pueden obtener las fórmulas correspondientes para el resto de los planes básicos, como ejemplo, el seguro de vida pagos limitados a n años sería:

$$t P_x^{[m]} = \frac{t P_x}{1 - \frac{m-1}{2m}\,d}$$

Primas fraccionadas a prorrata.

Para estas primas, el efecto producido por esta suposición, es que el asegurador restituye en promedio una cantidad de $\frac{1}{2m}\,P_x^{\{x\}}$ como parte de la suma asegurada de la póliza. En el caso de un ordinario de vida la expresión matemática es:

$$P_x^{\{m\}} = \frac{A_x \left(1+\frac{1}{2m} P_x^{\{m\}}\right)}{\ddot{a}_x} = P_x^{(m)}\left(1 + \frac{1}{2m} P_x^{\{m\}}\right)$$

Si sustituimos $P_x^{(m)}$ por su valor aproximado, obtenemos:

$$P_x^{\{m\}} \simeq \frac{P_x}{1 - \frac{m-1}{2m} .d - \frac{1}{2} P_x}$$

tomando los datos del ejemplo anterior y sustituyendo tenemos que:

$$1000\ P_{30}^{\{4\}} \simeq 1000\ \frac{P_{30}}{1 - \frac{3}{8}.d - \frac{1}{2} P_{30}}$$

como $P_{30} = 0.01037$ y $d = 0.04306$, entonces

$$1000\ P_{30}^{\{4\}} \simeq \frac{1000(0.01037)}{1-0.375(0.04306) - 0.5(0.01037)} = 10.60$$

Por lo que el pago trimestral será: $ 2.65.

Los valores de las primas $P_x^{(m)}$, $P_x^{[m]}$ y $P_x^{\{m\}}$ son respectivamente: 10.58, 10.54 y 10.60; de donde se observa la aseveración de que $P_x^{[m]} < P_x^{(m)} < P_x^{\{m\}}$.

Veamos ahora un ejemplo de seguro de vida variable, elaborado por una aseguradora, y cuyo crecimiento está basado en el índice nacional de precios al consumidor que edita mensualmente el Banco de México.

Se trata de un plan de vida entera, pagos limitados a 20 años y para una persona de edad 40.

El primer problema que surge, es el de determinar o pronosticar cuánto será el incremento del índice que repercutirá en el costo del seguro.

En este caso la aseguradora supuso un incremento en el índice para efectos del cálculo de la prima. Asímismo se fijó un tope máximo de crecimiento de la suma asegurada, quedando finalmente la siguiente fórmula:

$$ {}_{20}P_{40} = \frac{(1+rh)C_{40+1} + (1+rh)C_{40+2} + \ldots\ldots + (1+rh)C_{40+t-1}}{(1+rh)D_{40+1} + (1+rh)D_{40+2} + \ldots\ldots + (1+rh)D_{40+t-1}} $$

$$ \frac{+ Z(M_{40+t})}{+ Z(N_{40+t} - N_{40+20})} $$

donde Z = nivel máximo que pueden alcanzar la Prima y la suma asegurada (250% de la suma asegurada original).

r = 1,2,3 . . . . .

h = incremento supuesto del índice y por consiguiente de la suma asegurada para efectos del cálculo de primas (10%).

t = 15

$$N = (1.1)C_{41}+(1.2)C_{42}+(1.3)C_{43}+\ldots+(2.4)C_{54}+$$
$$+(2.5)C_{55}+(2.5)C_{56}+\ldots$$
$$(2.5)M_{40}=15$$

$$D = (1.1)D_{41}+(1.2)D_{42}+(1.3)D_{43}+\ldots+(2.4)D_{43}+$$
$$+(2.5)D_{55}+\ldots+(2.5)D_{60}$$
$$(2.5)(N_{55}-N_{60})$$

CAPITULO V

RESERVAS

5.1 Notación

V_{x+t} Reserva matemática al año t

${}_tV_x$ Reserva matemática para un ordinario de vida

${}_tV_x^{\overline{n}|}$ Reserva matemática para un vida pagos limitados a n años.

${}_tV_{x:\overline{n}|}$ Reserva matemática de un dotal a n años

μ_{x+t} , K_{x+t} (constantes de Fackler)

${}_tV_x^{(m)}$ Reserva matemática de un ordinario de vida - con primas fraccionadas reales

5.2 Fórmulas Retrospectiva y Prospectiva

Hasta el momento hemos aplicado el principio fundamental del seguro: "El valor presente del seguro de las obligaciones de la compañia de seguros, es igual al valor presente de las primas o de las obligaciones del asegurado".

Lo anterior se explica para cualquier plan como:

$$A = P.\ddot{a}$$

o equivalentemente: $A - P\ddot{a} = 0$

Sin embargo tal principio sólo es válido al inicio del seguro ya que, conforme transcurre el tiempo el equilibrio se rompe, es decir, esta igualdad no se mantiene a través de la duración del contrato.

Lo anterior significa que, el valor presente de las obligaciones crece a través del tiempo en el caso de los seguros y en las anualidades decrece, y el valor presente de las primas tiene un comportamiento a la inversa. Lo anterior se puede ilustrar como sigue:

Al cabo de t años tenemos que:

$$A_{x+t} \neq P.\ddot{a}_{x+t}$$

lo cual se puede demostrar con lo siguiente:
en la mayoría de los casos, la prima anual para un mismo tipo de seguro crece al aumentar la edad, por lo tanto:

$$P_{x+t} > P_x$$

Si multiplicamos ambos lados por $\ddot{a}_{x+t}$, obtenemos:

$$P_{x+t} \cdot \ddot{a}_{x+t} = A_{x+t} > P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} \quad \therefore$$

$$A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} > 0$$

Esta desigualdad, nos permite afirmar que los compromisos de la aseguradora son mayores que los compromisos del asegurado al momento t.

La diferencia resultante de dicha desigualdad se conoce con el nombre de reserva matemática al año t y se simboliza por V_{x+t}, por lo que

$$V_{x+t} = A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t}$$

En la práctica,cuando se trata de calcular la reserva de un plan (o en algún ejercicio) se hace al año t, es decir, se habla de la reserva terminal al tiempo t, donde t puede ser 1,2,3 .... Si consideramos a t=0, entonces:

$$V_{x+0} = A_{x+0} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+0}$$

o lo que es lo mismo

$$V_x = A_x - P_x \cdot \ddot{a}_x = 0$$

Si t = 5, entonces

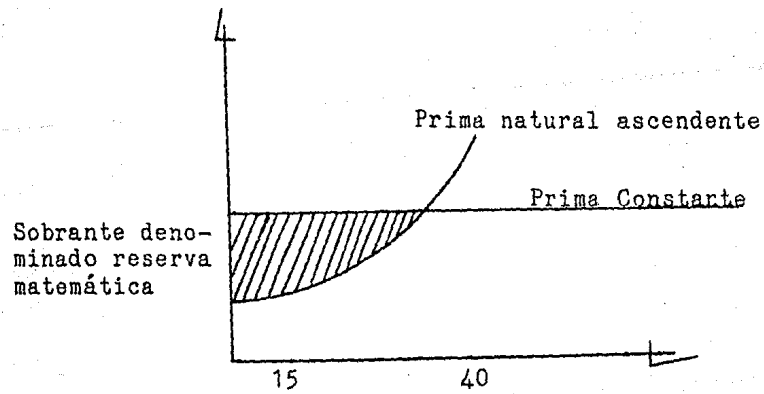
$$V_{x+5} = A_{x+5} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+5}$$

Otra manera de entender el concepto de reserva es a través de lo siguiente:

Supongamos que una persona desea un seguro ordinario de vida y lo pagará durante toda la vida. Sin embargo en lugar de pagar una prima anual constante busca otra combinación, por ejemplo, comprar un seguro temporal a un año y renovarlo anualmente, pagando la prima que de año en año va siendo necesaria según su edad.

La prima que la persona paga en este seguro temporal, si la suma asegurada es de $ 1.00 será de $V.q_x$. Esta prima se conoce con el nombre de prima natural ascendente y es proporcional a la probabilidad de muerte; la prima crece con la edad y para edades altas es muy grande su valor. La prima anual constante en el seguro ordinario de vida, es superior a la prima del seguro temporal durante los primeros años, originándose un excedente que está destinado a cubrir los déficits que necesariamente se producirán cuando la prima constante llegue a ser inferior a la prima natural ascendente del seguro temporal. Por lo anterior se hace necesario guardar los excedentes y capitalizarlos a cierto interés. Estos excedentes se llaman: reserva matemática.

En forma gráfica tenemos lo siguiente:



Métodos de Cálculo

Para calcular las reservas existen diversos métodos. El primero que veremos, parte de la definición que dimos de reserva y se conoce con el nombre de "método prospectivo" o de previsión.

Este método toma en cuenta los compromisos futuros de la aseguradora y del asegurado.

Simplemente, consiste en determinar los valores actuales de estos compromisos y establecer la diferencia.

Para un seguro ordinario de vida, la reserva bajo este método sería:

$$ {}_tV_x = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} $$

Para un plan vida pagos limitados a n años con $t<n$, sería:

$$ {}_tV_x^{n} = A_{x+t} - {}_nP_x \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} $$

Si $t \geq n$:

$$ {}_tV'_{x:\overline{n}|} = A'_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} $$

Para un seguro dotal a n años:

$$ {}_tV_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} $$

Existe otro método llamado retrospectivo. Este método se basa en los compromisos ya cumplidos. Según esto la reserva es la diferencia entre las primas pagadas por los asegurados y los siniestros pagados por la aseguradora.

A fin de ilustrar este método, analizaremos el caso de un plan de vida entera, ordinario de vida, calculando su reserva individual al año t, suponiendo que el plan fuera adquirido por l_x personas.

Al final del año t quedan l_{x+t} asegurados. Para cada uno de ellos la aseguradora debe haber formado una reserva ${}_tV_x$; por lo tanto tendrá $l_{x+t} \cdot {}_tV_x$.

Esta reserva, de acuerdo a la definición de este método será la diferencia entre lo pagado por los asegurados y los siniestros pagados por la aseguradora.

Los pagos efectuados por los asegurados serán:

1er. año: l_x primas de P_x cada una que capitalizadas a

la tasa i durante t años nos dá:

$P_x . l_x (1+i)^t$

2do.año: l_{x+1} primas de P_x cada una, que capitalizadas a la tasa i durante t-1 años da: $P_x \cdot l_{x+1}(1+i)^{t-1}$

t-ésimo año: l_{x+t-1} primas de P_x cada una y capitalizadas un solo año : $P_x \cdot l_{x+t-1}(1+i)$

Los siniestros de $ 1.00 pagados por la aseguradora y suponiendo que se pagaron al final de cada año son:

1er. año: una suma igual a d_x capitalzada por t-1 años: $d_x(1+i)^{t-1}$.

2do. año: una suma igual a d_{x+1} capitalizada t-2 años: $d_x(1+i)^{t-2}$

t-ésimo año: una suma igual a d_{x+t-1}, sin intereses pues se paga al final del año t considerado: d_{x+t-1}

Por lo anterior tenemos que:

$$l_{x+t} \cdot {}_tV_x = P_x \sum_{K=0}^{t-1} l_{x+K} (1+i)^{t-k} - \sum_{K=0}^{t-1} d_{x+K}(1+i)^{t-K-1}$$

Si multiplicamos ambos lados por v^{x+t}:

$$v^{x+t} \cdot l_{x+t} \cdot {}_tV_x = P_x \sum_{K=0}^{t-1} v^{x+K} l_{x+K} - \sum_{K=0}^{t-1} d_{x+K} v^{x+K+1} \therefore$$

$$D_{x+t} \cdot {}_tV_x = P_x \sum_{K=0}^{t-1} D_{x+K} - \sum_{K=0}^{t-1} C_{x+K} =$$

$$= P_x [N_x - N_{x+t}] - [M_x - M_{x+t}]$$

y finalmente:

$${}_tV_x = \frac{P_x(N_x - N_{x+t}) - (M_x - M_{x+t})}{D_{x+t}}$$

La fórmula inmediata anterior, es aplicable al resto de los planes básicos, únicamente cambiando la P_x por la correspondiente.

Es posible demostrar que la fórmula retrospectiva es equivalente a la prospectiva en cualquier plan.

Para esto veremos el caso de un ordinario de vida. Si desarrollamos la fórmula retrospectiva:

$$ {}_tV_x = P_x \frac{N_x}{D_{x+t}} - P_x \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{D_{x+t}} + \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} $$

como $P_x = \frac{M_x}{N_x}$, entonces

$$ {}_tV_x = \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_x}{D_{x+t}} - P_x \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{D_{x+t}} + \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} = $$

$$ = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - P_x \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} $$

y finalmente tenemos que:

$$ {}_tV_x = A_{x+t} - P\ddot{a}_{x+t} $$

5.3 Otras fórmulas para el cálculo de reservas.

Método de Recurrencia o de Fouret

Este método para calcular la reserva terminal de un año en función de la del año anterior, se basa en el razonamiento siguiente: al inicio del año t-ésimo la asegurado ra tiene en su poder para cada asegurado, la reserva - ${}_{t-1}V_x$. Al cobrar la prima P_x tiene en total ${}_{t-1}V_x + P_x$. Por cada asegurado y para los l_{x+t-1} asegurados que teoricamente están con vida tendrá:

$$l_{x+t-1}({}_{t-1}V_x + P_x)$$

Reserva Inicial

lo que al final del año y con los intereses devengados - será:

$$l_{x+t-1}\ ({}_{t-1}V_x + P_x)\ (1+i)$$

Este fondo se utilizará para pagar los seguros de las - d_{x+t-1} muertes que se producen en el año y además se cons truye la reserva final ${}_tV_x$ para cada uno de los l_{x+t} asegurados que sobreviven:

$$l_{x+t-1}({}_{t-1}V_x + P_x)\ (1+i) = d_{x+t-1} + l_{x+t} \cdot {}_tV_x$$

Despejando ${}_tV_x$ obtenemos:

$${}_tV_x = \frac{l_{x+t-1}\ ({}_{t-1}V_x + P_x)\ (1+i) - d_{x+t-1}}{l_{x+t}}$$

Método de reservas terminales sucesivas

Este método, nos servirá para ilustrar un ejemplo de como se calcula un asset-share y que consiste simplemente, en derivar otra fórmula para el cálculo de reservas a partir del método prospectivo.

La primera parte del siguiente desarrollo, nos dará un resultado análogo a la fórmula de recurrencia pero que nos permitirá ver una aplicación sencilla de un asset-share para un seguro dotal y posteriormente, continuando con el desarrollo, llegaremos a una aplicación que se conoce como el método de acumulación de Fackler.

Si a la fórmula retrospectiva le sumamos P_x a ambos lados de la igualdad queda:

$${}_tV_x + P_x = A_{x+t} - P_x\ a_{x+t}$$

si a continuación sustituimos las siguientes igualdades:

$$A_{x+t} = vq_{x+t} + vP_{x+t}A_{x+t+1} \qquad y$$

$$a_{x+t} = vP_{x+t}\,\ddot{a}_{x+t+1}$$

Nos queda:

$${}_tV_x + P_x = (vq_{x+t} + vP_{x+t}\,A_{x+t+1}) - P_x(vP_{x+t}\cdot\ddot{a}_{x+t+1})$$

$${}_tV_x + P_x = vP_{x+t}\,(A_{x+t+1} - P_x a_{x+t+1}) + vq_{x+t}$$

$${}_tV_x + P_x = v(q_{x+t}\cdot {}_{t+1}V_x) \ldots\ldots \qquad (I)$$

Si multiplicamos ambos lados por $(1+i)l_{x+t}$:

$$\underline{({}_tV_x + P_x)l_{x+t}\,(1+i) = d_{x+t} + l_{x+t-1}\cdot {}_{t+1}V_x}$$

que es la fórmula que se aplica para el cálculo del - Asset-Share en México.

Ejemplo de un Asset-Share denominado acumulación de fondos o financiamiento básico para un seguro dotal a 15 años, con pagos de primas durante 10 años emitido a una -

edad (35) por $ 1.00 de suma asegurada.

Tabla de mortalidad: CSO - 1958 al 3% anual

radix inicial: l_{35} = 9'373,807 (# de pólizas emitidas a edad 35).

$$10\,P_{35:\overline{15}|} = \frac{M_{35} - M_{50} + D_{50}}{N_{35} - N_{45}} = 0.074905 \text{ por } \$1 \text{ de S.A.}$$

Por tanto el monto total de primas pagadas el 1er. año - por los l_{35} es:

$$(9'373,807)\ (0.074905) = \$\ 702,145$$

A continuación se anota la tabulación de los datos en forma abreviada:

(1) Año	(2) total de primas cobradas	(3) fondo total al principio del año	(4) fondo con Intereses
1	702,145	702,145	723,209
2	700,383	1'400,064	1'442,066
3	698,534	2'115,915	2'179,392
⋮	⋮	⋮	⋮
10	681,167	7'635,450	7'864,514

11	- - -	7'819,773	8'054,366
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
15	- - -	8'572,243	8'829,410
	$l_{35+t-1}(P)$	$(t-1)+t$ (6) + (2)	(3) x 1.03
(5)	(6)	(7)	(8)
Reclamos por muerte	Fondo al final del año	# de Sobrevivientes	Fondo por Sobreviviente
23,528	699,681	9'350,279	0.07483
24,685	1'417,381	9'325,594	0.15199
26.112	2'153,280	9'299,482	0.23155
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
44,741	7'819,773	9'048,999	0.86416
48,412	8'005,954	9'000,587	0.88949
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
67,104	8'762,306	8'762,306	1 $\sum$ (8)=1
d_{35+t-1}	(4)-(5)	l_{35+t}	${}_tV_{35:\overline{15}|} = \frac{(6)}{(7)}$

A continuación, si sustituimos en (I), P_{x+t} por $1-q_{x+t}$, - tenemos:

$$({}_tV_x + P_x)(1+i) = {}_{t+1}V_x + q_{x+t}(1-{}_{t+1}V_x)$$

y multiplicando por l_{x+t} queda:

$$l_{x+t}({}_tV_x+P_x)(1+i) = l_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_x + d_{x+t}\,(1 - {}_{t+1}V_x)$$

En la primera ecuación al término: $q_{x+t}\,(1 - {}_{t+1}V_x)$, se le identifica con el costo del seguro basado en la cantidad neta en riesgo; y al factor: $(1-{}_{t+1}V_x)$ de la segunda ecuación, con la cantidad neta en riesgo para el (t+1)-ésimo año.

Las dos anteriores ecuaciones, se pueden aplicar a las demás formas del seguro, las que al generalizarlas, obtenemos:

$$({}_tV+P)(1+i) = q_{x+t} + P_{x+t} \cdot {}_{t+1}V \qquad \text{(II)}$$

$$({}_tV+P)(1+i) = {}_{t+1}V + q_{x+t}(1 - {}_{t+1}V)$$

Finalmente, como aplicación de estas fórmulas de reservas sucesivas terminales, tenemos la fórmula de acumulación de Fackler, mediante lo siguiente:

Si despejamos ${}_{t+1}V$ de (II), obtenemos:

$$_{t+1}V = \frac{(_tV + P)(1+i) - q_{x+t}}{P_{x+t}}$$

y si definimos a:

$$\mu_{x+t} = \frac{1+i}{P_{x+t}} = \frac{D_x}{D_{x+1}} \quad ; \quad K_{x+t} = \frac{q_{x+t}}{P_{x+t}} = \frac{C_x}{D_{x+1}}$$

conocidas como las constantes de Fackler, nos queda que:

$$_{t+1}V = (_tV+P)\mu_{x+t} - K_{x+t}$$

donde, como se puede observar, K_x es una función de mortalidad indepediente de la tasa de interés.

Comentarios adicionales sobre los métodos Prospectivos y Retrospectivo.

Es importante, poder tener un criterio a fin de poder escoger el método más adecuado, para valuar reservas terminales. Con este propósito se enuncian los siguientes principios:

1) El método prospectivo, es más conveniente para duraciones más allá del período de pago de primas; ya que la reserva es la prima neta nivelada para los beneficios futuros a la edad alcanzada.

2) El método retrospectivo, es más conveniente durante el período de diferimiento, cuando los beneficios todavia no han sido proporcionados, ya que la reserva es simplemente la acumulación de las primas pasadas.

Finalmente, la mayoría de los planes de seguro involucran un riesgo creciente, por medio de primas anuales niveladas; las cuales en los primeros años son mas que suficientes para cubrir los riesgos en curso.

5.4 Reservas para planes con pagos en fracciones del año.

Cuando un seguro es pagado con primas fraccionadas reales $P^{(m)}$, la reserva al final de $\underline{t}$ años se denota por ${}_tV^{(m)}$. Si utilizamos el método prospectivo para un ordinario de - vida, se tiene que:

$$ {}_tV_x^{(m)} = A_{x+t} - P_x^{(m)}\, \ddot{a}_{x+t}^{(m)} $$

Es importante poder estimar que tanto difiere ${}_tV_x^{(m)}$ de ${}_tV_x$, para lo cual haremos lo siguiente:
Si en la expresión anterior sustituimos $P_x^{(m)}$ y a $\ddot{a}_{x+t}^{(m)}$, - por las expresiones vistas antes y que son:

$$ P_x^{(m)} \doteq P_x + \frac{m-1}{2m} P_x^{(m)}(P_x+d) \qquad y $$

$$ \ddot{a}_{x+t}^{(m)} \doteq \ddot{a}_{x+t} - \frac{m-1}{2m} $$

obtenemos:

$$ {}_tV_x^{(m)} \doteq A_{x+t} - P_x^{(m)} \left[\ddot{a}_{x+t} - \frac{m-1}{2m}\right] $$

$$ \doteq A_{x+t} - \left[P_x + \frac{m-1}{2m} P_x^{(m)}(P_x+d)\right]\left(\ddot{a}_{x+t} - \frac{m-1}{2m}\right) $$

$$ = A_{x+t} - P_x\ddot{a}_{x+t} + \frac{m-1}{2m} P_x^{(m)}[1-(P_x+d)\ddot{a}_{x+t}] $$

Ahora bien, si recordamos que:

$$ {}_tV_x = A_{x+t} - P_x\ddot{a}_{x+t} = 1 - (P_x+d)\ddot{a}_{x+t} $$

nos queda finalmente:

$$ {}_tV_x^{(m)} = {}_tV_x \left(1 - \frac{m-1}{2m} P_x^{(m)} \right) $$

Como se ve, la reserva es mayor cuando se pagan primas fraccionadas reales, ya que habrá una pérdida de primas en el año del fallecimiento, si este ocurre antes de que todas las primas fraccionadas estén vencidas.

El promedio de pérdida es aproximadamente $\frac{m-1}{2m} P_x^{(m)}$ y la reserva con primas fraccionadas reales es aproximadamente igual a la reserva con primas anuales para un seguro de $1.00 más el procentaje promedio de dicha pérdida de primas.

5.5 Efectos en las reservas de las variaciones de las tasas de interés

De acuerdo a las tablas que a continuación se muestran, es claro que el incremento en la tasa de interés produce un - decremento en la prima neta y en la reserva.

Una compañía con una tasa de interés del 3%, tiene una reserva mayor que las que operan con tasas del 3 1/2% ó 4%. Se puede observar también que la variación relativa en las primas, originada por los cambios en la tasa, es mayor a edades pequeñas que en grandes

PRIMA NETA NIVELADA

EXPERIENCIA AMERICANA

$ 1000

	3%	3 1/2%	4 %
Ordinario de Vida Edad 20	$ 14.41	$ 13.48	$ 12.67
Ordinario de Vida Edad 40	24.75	23.50	22.35
Ordinario de Vida Edad 60	58.27	56.83	55.45
Temporal 20 años Edad 20	23.13	20.72	18.73
Temporal 20 años Edad 40	33.14	30.75	28.63
Temporal 20 años Edad 60	61.62	59.85	58.18

La diferencia porcentual en la reserva, debido al cambio en la tasa de interés, se encuentra que es mayor para los primeros años-póliza. La siguiente tabla muestra las reservas netas de una pólizade un ordinario de vida emitida a edad 25 por $ 1,000 de suma asegurada y de acuerdo a la tabla - de la experiencia americana.

AÑOS EN VIGOR	3%	3 1/2%	4 %
5	$ 45.76	$40.91	$36.59
10	98.94	89.42	80.82
20	230.50	213.04	196.87
30	394.11	372.38	351.75
40	570.12	549.00	528.49
50	728.07	711.36	694.83
60	859.44	849.23	838.96
70	954.76	951.08	947.33

CAPITULO VI

PRIMAS DE TARIFA

6.1 Prima de tarifa para Seguros pagaderos en el momento de la muerte

Supongamos que se trata de emitir un plan temporal a n - años. Los dos aspectos fundamentales que se requieren para la elaboración son:

1.- Bases técnicas
2.- Bases contractuales

Las Bases técnicas o nota técnica, son los cálculos actuariales que dan orígen a la determinación de las primas y recargos que aplicará la aseguradora, así como la justificación de los gastos de gestión y administración.

Su realización debe ser llevada a cabo por actuarios y su aprobación corresponde a los organismos oficiales de control de seguros.

Las Bases Contractuales corresponden a la descripción del plan a través de la póliza.

Como ejemplo de lo anterior, veamos la nota técnica de un seguro temporal a n años.

I Base demográfica: tabla de mortalidad. (En México se debe usar la experiencia mexicana 1962-1967).

Base financiera: tasa financiera del 4.5% anual.

II Primas netas:

a) Prima neta única $A'_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$

b) Prima neta nivelada $P'_{x:\overline{n}|} = \frac{A'_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$

III Prima de tarifa

Las primas consideradas hasta ahora se han calculado sin tomar en cuenta los gastos que se originan en la operación de una compañía de seguros.

Estos gastos se dividen en dos grandes grupos:

a) Gastos de administración, que se refieren a los gastos generales de la compañía por conceptos tales como:
   - Papelería
   - Sueldos a empleados
   - Renta del edificio
   - Teléfono
   - Luz
   - Comisiones y honorarios a accionistas y representantes.
   - Honorarios al Consejo de Admon., Comisarios y Auditores.

- Correo, telégrafo y gastos de escritorio.
- Gastos judiciales y honorarios a abogados.

b) Gastos de adquisición, que se refieren a los gastos por la contratación de la póliza como son:

_-Comisiones a los agentes.
- Honorarios al médico examinador
- Publicidad y Propaganda
- Gastos de inspección de riesgos
- Gastos de agencias de los agentes de grupo
- Impuestos sobre pólizas
- Otros gastos de administración.

Cuando se incluyen estos gastos en el cálculo de la prima, se obtiene la prima de tarifa, que es la que realmente se le cobra al asegurado.

Estos gastos se pueden cobrar como proporción de la suma asegurada.

Generalmente, los gastos de administración, se reparten - fácilmente a través de la duración del seguro.

En cambio los gastos de adquisición se efectúan al principio y tienen que distribuirse en toda la vigencia del seguro.

Además, los recargos ya sea de administración o de adquisición pueden ser fijos, es decir, independientemente de la suma asegurada o de la prima que se cobre. Puede ser también variable, o sea, como proporción de la suma asegurada o de la prima.

Fórmula agregada para la prima de tarifa:

$$\pi = \text{Prima neta} + \text{Recargos}$$

$$\pi = PN + r\pi + R$$

$$\pi - r\pi = PN + R$$

$$\pi = \frac{PN + R}{1 - r}$$

Una expresión para la fórmula desagregada de la prima de tarifa, sería:

$$\pi = P + S + r\pi + K\ddot{a} + Z\pi\ddot{a}$$

Donde:

π = Prima de tarifa anual

PN = Prima neta anual

S = Gasto proporcional a la suma asegurada y efectuado al principio del seguro.

r = Gasto proporcional de la prima de tarifa y hecho al principio del seguro.

R = Recargos

$\ddot{a}$ = Valor presente de una renta anticipada

K = Gasto proporcional de la suma asegurada y pagado año con año durante el tiempo del seguro.

Z = Gasto proporcional de la prima de tarifa y pagado año con año durante el tiempo del seguro.

Si despejamos π, tenemos:

$$\pi(1 - ra - Z) = PN + S\ddot{a} + K$$

$$\pi = \frac{PN + S\,\ddot{a} + K}{1 - r\,a - Z}$$

Regresando al caso de calcular las bases técnicas de un plan temporal a $\underline{n}$ años, tenemos que la "Prima de tarifa" citada en el punto III, quedaría integrada de la siguiente forma:

a) Gastos de administración de $ 2.25 anuales por 0/00 de suma asegurada.

b) Recargo fijo por expedición de póliza por $ 500.00.

c) Descuentos por volúmenes de suma asegurada.

Suma Asegurada		Descuento por millar
De	Hasta	
150,000	249,999	0.5
250,000	499,999	1.0
500,000	999,999	1.5
1,000,000 en adelante		2.0

d) Gastos de adquisición

	1er.Año	2do. Año	3er.Año	4to.Año en adelante
Agente	30%	30%	5%	3%
Supervisor	10%	5%	2.5%	- -
Otros	5%	3%	- -	- -
	45%	38%	7.5%	3%

Estos gastos como proporción a la prima de tarifa y con - las siguientes características:

Las comisiones a los agentes son decrecientes porque la - auténtica labor de venta está en el primer año. Además no decrece drásticamente en el segundo año para evitar una ca ducidad alta de pólizas. Tomando en cuenta los porcentajes anteriores y si los sustituimos para el cálculo de la prima, tenemos que:

$$\pi'_{x:\overline{n}|} = \frac{A'_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + 2.5\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \pi'_{x:\overline{n}|}\,[0.45\ \ddot{a}_{x:\overline{1}|} +$$

$$+ 0.38(\ddot{a}_{x:\overline{2}|} - \ddot{a}_{x:\overline{1}|}) + 0.075\ (\ddot{a}_{x:\overline{3}|} - \ddot{a}_{x:\overline{2}|} +$$

$$+ 0.03(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{3}|})\,] + 500$$

Si ahora reagrupamos lo que se encuentra entre corchetes - nos queda:

$$\pi'_{x:\overline{n}|} = \frac{A'_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + 2.5\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \pi'_{x:\overline{n}|}\,[0.07\ \ddot{a}_{x:\overline{1}|} + 0.305\ \ddot{a}_{x:\overline{2}|} +$$

$$+ 0.045\ \ddot{a}_{x:\overline{3}|} + 0.03\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}\,] + 500$$

y finalmente tenemos que:

$$\pi'_{x:\overline{n}|} = \frac{A'_{x:\overline{n}|} + 2.5\ a_{x:\overline{n}|}}{1-[0.07\ \ddot{a}_{x:\overline{1}|} + 0.305\ \ddot{a}_{x:\overline{2}|} + 0.045\ \ddot{a}_{x:\overline{3}|} + 0.03\ddot{a}_{x:\overline{n}|}]} +$$

$$+ 500$$

Cantidad por 0/00 de suma asegurada

CAPITULO VII

SISTEMAS MODIFICADOS DE RESERVA

7.1 Asset Shares

Supongamos que se ha emitido una póliza a 10 años para una persona de edad 35. La prima de tarifa es de $91.21, suponiendo ciertos aspectos de mortalidad, interés y gastos. - El importe del seguro es de $ 1,000.00 y la reserva legal está basada en el sistema modificado de la "Illinois Standard" y la tabla de la experiencia americana del 3 1/2% - (American Experience 3 1/2% table). Puesto que la prima de tarifa, no se basa en la misma tabla de mortalidad y tasa de interés que la prima neta y las reservas terminales, se requiere una investigación adicional para verificar si esta prima de tarifa es suficiente para cubrir los requerimientos legales de los valores garantizados.

Los gastos que tiene que pagar la compañía el primer año son $3.00 más 43% de la prima de tarifa, lo cual nos da - un total de $ 42.21. Si deducimos este último monto de la prima de tarifa obtenemos lo que se llama "Prima efectiva", la cual para nuestro caso asciende a $ 48.99.

Al acumular los beneficios por intereses y sobrevivencia a la prima de tarifa y deducir el costo acumulado del seguro, se obtiene:

$$48.99\ \mu[35] - (1022.5)K_{[35]} =$$

$$= (48.99)\ (1.048317) - 3.24\ 543 = 48.112$$

Este monto, representa el exceso acumulado de la prima de tarifa sobre gastos y costos del seguro y recibe el nombre de "asset share" o reserva natural, al final del primer - año póliza.

Los gastos que pagará la compañía en el segundo año-póliza, ascienden a $ 1.00 mas 6% de la prima de tarifa,lo cual dá un total de $ 6.473. La prima efectiva para este año es - de $ 84.738, por lo que el segundo "asset share" será:

$$(48.112+84.738)(1.049503)-4.40583 = 135.021$$

Este proceso se repite para los diez años. Una comparación de las reservas naturales, con las reservas terminales correspondientes, de la experiencia americana al 3 1/2% de "Illinois Standard" se muestra a continuación:

Seguro a diez años. Prima de tarifa: $ 91.21

Edad a la emisión: 35 años

Primas Netas Illinois Standard 1er. año: $ 69.22 Siguientes: 89.47		Primas Efectivas 1er. año: $ 48.99 Siguientes: 84.74	
Año	Reserva Terminal Illinois Standard Exp. Americana 3 1/2	Reserva Natural A.M.S.y U 4 1/2%	Diferencia
1	$ 63.26	$ 48.11	$ 15.15
2	150.35	135.02	15.33
3	241.20	226.01	15.19
4	335.99	321.36	14.63
5	434.93	421.23	13.70
6	538.23	525.83	12.40
7	646.12	635.66	10.46
8	758.86	751.05	7.81
9	876.72	872.35	4.37
10	1000.00	1,000.00	0.00

De lo anterior, se puede observar que la reserva terminal, excede a la reserva natural en todos los años excepto en - el último en el que es igual.

Aquí es conveniente hacer notar, que los valores garantizados usualmente se basan en la reserva legal, menos un cargo por redención. Si examinamos la tabla anterior podremos observar qué cargo puede ser razonablemente hecho. El valor de redención al final de cada año-póliza, no deberá ser mayor que el monto acumulado mostrado en la columna de los "asset share". Las diferencias que se tienen en la última columna de la tabla son los mínimos cargos de redención, los cuales pueden ser usados por la compañía en calcular opciones de redención. Puesto que estas diferencias nunca exceden los $ 25.00, el máximo cargo legal, es evidente que en esta ilustración la prima de tarifa mínima, es adecuada para encontrar los requerimientos legales para los valores en efectivo.

Es práctica común, tomar una prima de tarifa ligeramente mayor que la mínima prima calculada P'. Los "asset shares" calculados en base a esta prima incrementada serán mas grandes que los que se muestran en la tabla y excederán a la reserva legal antes del vencimiento de la póliza. Hay varias prácticas en uso común, variando el período de tiempo a transcurrir antes de que el "asset share" sea mayor que la reserva legal. Una investigación acerca de las primas de tarifa cargadas por varias compañías, dió por resultado que este período varía de 4 a 5 años para pólizas de corto plazo, o de 15 a 20 años en el caso de pólizas de vida entera.

7.2 Sistemas modificados de reserva

Los métodos que se han visto para el cálculo de las reservas, se conocen en general como métodos o sistemas de prima neta nivelada completa y están calculados bajo el supuesto de que únicamente interviene la mortalidad y la tasa de interés, es decir, no se aplica ningún otro supuesto como por ejemplo, los gastos en que incurre una aseguradora.

Si se calcula la reserva, considerando exclusivamente, los factores de mortalidad e interés estariamos suponiendo que los recargos considerados en la prima de tarifa son suficientes para la aseguradora.

Sin embargo, como en los primeros años de vigencia de una póliza, sobre todo en el primer año, los gastos que efectúa una aseguradora son muy altos, desde hace varios años se ha permitido que se modifique el sistema de cálculo de reservas que la aseguradora haya escogido.

Dicha modificación, está basada en la hipótesis de que, los recargos son insuficientes para pagar los gastos que tiene que hacer una compañía durante los primeros años del seguro.

La modificación que se aplique siempre consistirá en hacer uso ("tomar prestado") parte de las primas netas para hacer frente a las obligaciones que tiene la compañía, tales como comisiones a los agentes y supervisores, honorarios médicos y emisión de póliza principalmente.

Entre los sistemas modificados de reservas, los más usuales son dos:

1) Sistema año temporal preliminar completo (ATPC)
2) Sistema año temporal preliminar modificado (ATPM)

En el primer caso la modificación consiste en considerar el plan de seguro de vida durante el primer año, como si se tratara de un seguro temporal a n años. Consecuentemente, su reserva terminal al final del primer año es cero.

$$ {}_1V_x = A_{x+1} - P_x \ddot{a}_{x+1} > 0 $$

$$ {}_1V_x = {}_1V'_{x:\overline{1}|} = 0 $$

Para la renovación, lo que se hace es considerar al plan de seguro de vida como emitido a una edad más y por un período menos; lo anterior significa obtener una reserva mayor, es decir por el método tradicional completo tenemos:

$$ {}_2V_x = A_{x+2} - P_x \ddot{a}_{x+2} $$

y para el (ATPC) ${}_2V_x = {}_1V_{x+1}$

Este sistema se aplicará solamente para planes con duración mayor o igual a 20 años, ya que en plazos menores, como sería el de un dotal a corto plazo o un vida pagos limitados a corto plazo, se fomentarían gastos innecesarios o sea suponer más gastos que los reales.

Para planes menores de 20 años, se permite modificar el cálculo de las reservas mediante el sistema (ATPM). El sistema que está contemplado en la Ley General de Institucional de Seguros, consiste en que la reserva terminal del primer año, será la que resulte de comparar la correspondiente al plan de que se trate con la de un dotal a 20 años y de las dos, la que resulte menor será la que se constituirá para el primer año. Como ejemplo veamos lo siguiente:

$$ {}_1V^{10}_{40} = A_{40+1} - {}_{10}P_{40}\ \ddot{a}_{40+1:\overline{10-1}} $$

$$ {}_1V_{40:\overline{20}|} = A_{40+1:\overline{20-1}|} - P_{40:\overline{20}|}\ \ddot{a}_{40+1:\overline{20+1}|} $$

Lo que al obtener los valores numéricos nos dará la reserva a escoger para el primer año.

CONCLUSIONES

El trabajo presentado si bien es cierto que cubre los temas centrales, no incluye aspectos tales como la comparación entre el rendimiento de un seguro visto como inversión y una inversión propiamente dicha ya sea de renta fija o renta variable. Sobre esto hay coincidencia entre algunos maestros en cuanto a la realidad del mercado y su inminente trato en clase, por lo que su integración definitiva al plan de de estudios no se ve lejana.

Se omite lo relativo a los efectos en las anualidades de las variaciones en interes por tocarse poco, siendo que por el punto anterior resulta interesante profundizar en tales efectos.

Así como los casos anteriores, se podrían citar más ejemplos, lo cual dá idea de lo rico y extenso de los temas, por lo que de acuerdo al programa actual se omiten algunos y se agregan otros, haciendo real el plantear la necesidad de revisar los programas vigentes.

Finalmente, deseo expresar que tanto en esta materia como

en algunos otras de la carrera, es deseable la elaboración de tesis enfocadas a mejorar e incrementar la bibliografía, ya que por ejemplo en la guía de las carreras de Matemáticas y Actuario, editada por la Dirección General de Orientación Vocacional (1979), no se anota bibliografía - ni en Cálculo Actuarial II ni III, aún cuando se cuenta - con el libro "Lecciones de Técnica Actuarial de los Seguros contra los Daños" de Luigi Molinaro y traducido al español por el Dr. Antonio Minzoni Consorti, como tampoco - en la materia de Cálculo Actuarial de Modelos Dinámicos.

Es claro que en otro ámbito las publicaciones, si bien no son nulas si bastente exiguas.

Así las cosas entonces, considero que el presente trabajo bien podrá ser de alguna utilidad para el alumno que en esta materia se inicie, siendo éste en última instancia el objetivo último de la presente tesis.

En los anexos, se muestran como guías, los planes de estudio vigentes de Cálculo Actuarial I, II y III, así como el de Cálculo Actuarial de Modelos Dinámicos.

ANEXO 1
(Ver página 52)

Si suponemos que D_{x+t} es una función lineal para $0 \leq t \leq 1$ entonces $\overline{D}_x = \int_0^1 D_{x+t}\, dt \simeq D_x + \frac{1}{2} \simeq \frac{1}{2}(D_x + D_{x+1})$ y

$$\overline{N}_x \simeq \frac{1}{2}(N_x + N_{x+1}) = N_x - \frac{1}{2} D_x = N_{x+1} + \frac{1}{2} D_x$$

ANEXO 2
(Ver página 72)

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Sabemos que $A^1_{x:\overline{n}|} = \dfrac{vd_x + v^2 d_{x+1} + \ldots + v^n d_{x+n-1}}{l_x}$

Si multiplicamos numerador y denominador por v^x e incluimos valores conmutados, obtenemos:

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{x+n-1}}{D_x}$$

y puesto que: $M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{x+n-1} + C_{x+n} + \ldots + C_w$

y que: $M_{x+n} = C_{x+n} + \ldots + C_w$

tenemos, efectuando la resta que:

$$M_x - M_{x+n} = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+n-1}$$

de donde:

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

ANEXO 3

CALCULO ACTUARIAL I

CAPITULO I

Funciones Biométricas

1.- Notación

2.- Función de Sobrevivencia

3.- Tasa Central de Mortalidad

4.- Tabla de Mortalidad

5.- La Fuerza de Mortalidad

6.- Leyes o Modelos de Mortalidad

CAPITULO II

Anualidades Contingentes

1.- Notación

2.- Rentas Contingentes con Pagos Anuales

3.- Rentas Contingentes con Pagos Anuales en Fracciones - del Año.

4.- Efectos en las Anualidades de las Variaciones en Interés y Mortalidad.

CAPITULO III

Seguros

1.- Notación

2.- Terminología

3.- Seguros Pagaderos al Final del Año del Fallecimiento

4.- Seguros Pagaderos en el Momento de la Muerte

5.- Elaboración de Planes Combinados

CAPITULO IV

Primas Netas

1.- Notación

2.- Terminología

3.- Primas Netas Anuales

4.- Primas Pagaderas en Fracciones del Año

5.- Análisis de Primas

6.- Primas de Planes Combinados

CAPITULO V

Reservas

1.- Notación

2.- Terminología

3.- Fórmulas Retrospectiva y Prospectiva

4.- Otras Fórmulas para el Cálculo de Reservas

5.- Reservas para Planes con Pagos en Fracciones del Año

6.- Efectos en las Reservas de las Variaciones de las Tasas de Interés y Mortalidad

7.- Reservas para Planes Combinados.

CAPITULO VI

Primas de Tarifa

1.- Notación

2.- Terminología

3.- Recargos

4.- Prima de Tarifa para Seguros Pagaderos en el momento de la Muerte.

5.- Primas de Tarifa para Planes combinados

CAPITULO VII

Sistemas Modificados de Reserva

1.- Notación

2.- Terminología

3.- "Asset Shares"

4.- Sistemas Modificados de Reserva

5.- Valores de Rescate

6.- Seguros Saldados

CALCULO ACTUARIAL II

CAPITULO I

Probabilidades

1.- Notación

2.- Terminología

3.- Probabilidades de Vida Conjunta

4.- Leyes o Modelos de Mortalidad Aplicados a las Probabilidades de Vida Conjunta

5.- Ley de Envejecimiento Uniforme

6.- Probabilidad del Grupo del último superviviente.

7.- Probabilidades del Grupo Generalizado.

8.- Método Z para el Cálculo de Probabilidades

9.- Evaluación de las Probabilidades Contingentes

10.- Probabilidades Contingentes Compuestas

CAPITULO II

Anualidades

1.- Notación

2.- Terminología

3.- Anualidades del último sobreviviente

4.- Anualidades del Grupo Generalizado

5.- Método Z para el Cálculo de Anualidades

6.- Anualidades de Reversión

7.- Anualidades de Reversión Compuesta

CAPITULO III

Seguros

1.- Notación

2.- Terminología

3.- Seguros de Vida Conjunta

4.- Seguros del último sobreviviente

5.- Seguros del Grupo Generalizado

6.- Seguros contingentes

7.- Evaluación de Seguros Contingentes

8.- Seguros Contingentes Compuestos

CAPITULO IV

Primas y Reservas

1.- Notación

2.- Terminología

3.- Primas Anuales y Reserva de los Seguros Contingentes

CAPITULO V

Tablas de Decremento Múltiple

1.- Notación

2.- Terminología

3.- Tasas de Decremento

4.- Fuerzas de Decremento

5.- Construcción de Tablas de Decremento

6.- Analogía con las Funciones de Vida Conjunta

CALCULO ACTUARIAL DE MODELOS DINAMICOS

CAPITULO PRIMERO

Estudio de la Ley del Seguro Social

1.- Sujetos del Régimen del Seguro Social Obligatorio

   a) Asegurado Directo

   b) Beneficiario

   c) Derechohabiente

2.- Seguros que comprende la Ley del Seguro Social

   a) Enfermedades Generales y Maternidad (EGM)

   b) Riesgos Profesionales (RP)

   c) Invalidez, vejez, cesantía en edad avanzada y muerte (IVCM)

3.- Prestaciones a Corto y a Largo Plazo en:

   a) El Ramo de Enfermedades Generales y Maternidad - (EGM)

   b) Riesgos Profesionales (RP)

   c) Invalidez, Vejez, Cesantía en edad avanzada y muerte (IVCM)

4.- Requisitos y Limitaciones para obtener el Derecho dentro de cada ramo de Seguro a las:

   a) Prestaciones en especie

   b) Prestaciones en Dinero.

5.- Procedimiento para calcular las cuantias de las prestaciones en dinero, dentro de cada ramo de seguro

CALCULO ACTUARIAL III

El Proceso de riesgo

1.- Fundamentos

1.1 Modelos Matemáticos Aplicables

1.2 El Proceso del Número de Reclamaciones

1.3 El Proceso del Monto Total de Reclamaciones

El Riesgo de la Colectividad

1.- El Proceso de Riesgo con Probabilidades Básica Variables.

Cálculo de Primas

1.- Principios de Cálculo de Primas

2.- La Prima de Riesgo y la Prima Colectiva

3.- La Prima Confiable

Retención y Reservas

1.- Idem.

6.- Grupos de Cotización y formas de contribución en cada ramo de Seguro para:

a) Los Asalariados Permanentes Urbanos y del Campo.

b) Los Independientes del Campo

c) Los Miembros de Sociedades Cooperativas y de credito Ejidal

d) Los Productores de Caña de Azúcar y sus Trabajadores Estacionales.

e) Otros.

CAPITULO SEGUNDO

Teoría del Seguro Social

1.- Síntesis Histórica del Nacimiento del Seguro Social

2.- Objetivos del Seguro Social

3.- Principales diferencias entre el Seguro Privado y el Social.

4.- Sistemas Financieros aplicados en los Seguros Sociales y su elección.

5.- Grupos Abiertos en la operación de los seguros sociales

CAPITULO TERCERO

Calculo Actuarial

1.- Grupos Símbolos y definiciones

2.- Frecuencias y Relaciones Importantes

3.- Tablas de Decremento Múltiple: Ordenes de Invalidez y Actividad.

4.- Influencia de la Reactividad en la Invalidez y Actividad

5.- Rentas de Invalidez y de Actividad

6.- Influencia de los Salarios en las funciones de Conmutación.

7.- Carga Financiera de Vejez

8.- Carga Financiera de Invalidez

9.- Carga Financiera de Viudez

10.- Carga Financiera de Orfandad

11.- Carga Financiera de Asignaciones Familiares

12.- Carga Financiera por Servicios Médicos

13.- Carga Financiera por Incapacidades Médicas

14.- Carga Financiera por Maternidad

15.- El Concepto de las Generaciones Futuras

16.- Expectativas del Salario y Cotización

17.- Obtención de la Prima Media General

CAPITULO CUARTO

Situación Financiera de los Sistemas de Pensiones

1.- Estructura del Balance Actuarial

2.- Finalidades del Balance Actuarial

3.- Valuación de la Reserva Técnica por el Método Retrospectivo

4.- Cálculo de la suficiencia de la Prima de Financiamiento.

5.- Análisis Actuarial de Resultados

BIBLIOGRAFIA

1.- Jordan, Ch. N.
Society of Actuaries
Text Book on Life Contingencies
The Society of Actuaries, 1952.

2.- Spurgeon, D.F.
Life Contingencies
3a. Edición
Cambridge University Press, 1932

3.- Hooker, P.F. y
Longley-Cook, L.H.
Life and other Contingencies
Cambridge University Press, 1957.

4.- King, G.
Institute of Actuaries
Text Book, Part II
2da. Edición
London
Charles and Edwin Layton, 1902

5.- Haycocks, H. W. y
Perks, W.
Mortality and other Investigations
Cambridge University Press.

6.- Menge, Walter Otto y
Waterman Glover, James
An Introduction to the

Mathematics of Life Insurances
New York, MacMillan Co. 1940.

7.- Tesis - José Cosío Rodríguez
Proyecto de Texto de la Materia
de Introducción al Seguro de vida
Ciencias, Actuaría
Facultad de Ciencias
Biblioteca Central, 1980.

8.- Tesis - Arriaga Parra, Mario y
Sánchez Chibraz, José Antonio
Elementos de Calculo Actuarial
Acatlán, Actuaria
Biblioteca Central, UNAM, 1981

9.- Tesis - Covarrubias González, Pedro
Proyecto de texto para un curso
de Cálculo actuarial I.
Actuaria
Biblioteca Central, UNAM
1978.

10.- González Gali
Elementos de Cálculo Actuarial
Argentina.