31
2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCION A LA GEOMETRIA ANALITICA EN EL BACHILLERATO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

SANTA SOLEDAD RODRIGUEZ DE ITA

JUNIO 1988.

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A MANERA DE INTRODUCCION.

El presente trabajo está dirigido a estudiantes del quinto grado de bachillerato de la Escuela Nacional Preparatoria, con el fin de presentarles, en forma por demás intuitiva, los primeros conceptos de la Geometría Analítica como son: la distancia entre dos puntos y la pendiente y la ecuación de la línea recta en el plano; tomando como punto de partida los conocimientos del Álgebra y de la Geometría elementales, que el alumno de este nivel debe poseer.

Para tal efecto, se organiza este escrito en cinco capítulos; de los cuales el II y el V se centran en los temas propios de una introducción a la mencionada Geometría Analítica. En los capítulos restantes, se hace un breve y somero repaso de los conocimientos que, reitero, debe tener el alumno y que son necesarios como antecedentes para abordar los primeros temas de la materia que nos ocupa. Por esto, se da por cierto que el aspirante a bachiller está familiarizado con las operaciones básicas y las propiedades de éstas, al menos, con números racionales; y que además conoce y maneja los teoremas relativos a semejanza de triángulos.

Así, el primer capítulo, lejos de constituirse en un estudio formal y detallado de los fundamentos matemáticos y filosóficos en los que se sustenta la existencia de los números reales, se presenta como una mera reseña de la forma en que -

el alumno de este nivel, al través de sus estudios anteriores, se ha adentrado en el conocimiento de tales números; a fin de dejar implícita la idea, nada intuitiva, de la correspondencia biunívoca que se establece entre los puntos de una recta y los mencionados números reales.

El siguiente capítulo, "La distancia entre dos puntos", se presenta al estudiante, a la manera de preguntas y respuestas, con el objeto de que éste participe en forma un tanto más reflexiva en su propio proceso de aprendizaje. De esta manera se introducen una serie de problemas que pudieran parecer cotidianos, o al menos forzados a serlo, al través de los cuales se pretende que el lector obtenga, "por sí mismo", la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, primero en la recta real y después en el plano cartesiano.

A partir de las reformas educativas de los años setenta, en educación primaria y secundaria, se implanta el estudio de los principios básicos de la Teoría de los Conjuntos, por lo mismo, se supone al estudiante familiarizado con los conceptos de conjunto finito, infinito, vacío y unitario, así como de las operaciones unión e intersección entre dos conjuntos dados; por lo que después de hacer una breve revisión de tales conceptos, en el capítulo III, se exhiben algunos conjuntos de puntos con una "característica especial" en el eje real y en plano cartesiano; en particular, se trata a la línea recta como uno de estos conjuntos.

En el capítulo IV se muestran como elementos básicos de la Trigonometría Plana, a las razones trigonométricas de los ángulos positivos menores que 360°. Resalto el hecho de que las nombro "razones trigonométricas" y no "funciones trigono-

métricas", puesto que, hasta el momento no se define en este trabajo, el concepto de función, y de hecho, no lo considero necesario para continuar con el desarrollo del mismo. También se dejan fuera los ángulos negativos, porque he observado que el solo concepto de segmento dirigido ya presenta una seria dificultad para el alumno de este nivel, qué decir del concepto de ángulo dirigido; además en este primer estudio de la Geometría Analítica, solamente se manejan ángulos entre 0° y 180°. Nuevamente, bajo el sistema de preguntas y respuestas, se pretende que el alumno obtenga la fórmula para calcular la pendiente de una recta que pasa por dos puntos dados.

En el último capítulo, "La ecuación de la línea recta", se introducen las formas: pendiente y ordenada en el origen, simétrica, general y normal de la ecuación de la recta en el plano cartesiano, haciéndose hincapié en que éstas son tan solo, como su nombre lo indica, formas o maneras distintas de describir el mismo conjunto de puntos. Se presentan además, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad; la distancia de un punto a una recta; y, dado que lo considero como fundamental en nuestro estudio, se da una demostración del Teorema de Pitágoras y de su recíproco.

Por último, preciso aclarar que en todo momento prefiero "sacrificar" una formal demostración matemática en beneficio de lo que yo, con base en mi experiencia, pudiera considerar como una buena presentación didáctica. Esto se debe, entre otras cosas, a que bajo el supuesto de que esta "Introducción a la Geometría Analítica en el Bachillerato" llegase a manos de estudiantes de este nivel, no pretendo que después de leer la todos se conviertan en aspirantes a las carreras físico-ma

temáticas, ni siquiera espero que algunos se dediquen al área de las económico-administrativas; únicamente deseo que al menos uno se "reconcilie" con las Matemáticas.

> Se cuenta que un astrónomo, un físico y un matemático estaban de vacaciones en Escocia. Al echar una ojeada por la ventanilla del tren, vieron una oveja negra en medio del campo. "¡Qué interesante!", observó el astrónomo, "todas las ovejas escocesas son negras". A lo que respondió el físico: "¡No, no! ¡Algunas ovejas escocesas son negras!" el matemático alzó suplicante la mirada al cielo y entonó: "En Escocia existe al menos un campo que contiene una oveja, uno de cuyos lados, al menos, es negro".
>
> Ian Atewart. (1)

(1) ROBLEDO, Felipe, et. al. Matemática uno. Pág. 10.

I N D I C E.

CAPITULO I. LOS NUMEROS REALES.

A. ACERCA DE LOS NUMEROS RACIONALES..... 11.

B. ACERCA DE LOS NUMEROS IRRACIONALES..... 29.

C. ACERCA DE LA EXPRESION DECIMAL DE LOS NUMEROS REALES..... 39.

D. ACERCA DE LA REPRESENTACION GEOMETRICA DE ALGUNOS NUMEROS REALES..... 45.

CAPITULO II. LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

A. EN LA RECTA REAL..... 57.

B. EN EL PLANO CARTESIANO..... 67.

CAPITULO III. LOS CONJUNTOS.

A. QUE ENTENDEMOS POR CONJUNTO..... 90.

B. ALGUNOS CONJUNTOS DE PUNTOS EN LA RECTA REAL..... 98.

C. ALGUNOS CONJUNTOS DE PUNTOS EN EL PLANO CARTESIANO..... 106.

CAPITULO IV. LA PENDIENTE DE UNA RECTA.

A. LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO AGUDO..... 124.

B. LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO ENTRE 0° Y 360°..... 137.

C. LA TANGENTE DEL ANGULO DE INCLINACION DE UNA LINEA RECTA..... 149.

CAPITULO V. LA ECUACION DE LA LINEA RECTA.

A. LA FORMA PENDIENTE Y ORDENADA EN EL ORIGEN..... 161.

B. LOS CASOS ESPECIALES Y LA FORMA SIMETRICA..... 174.

C. LAS CONDICIONES DE PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO..... 185.

D. LA DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA Y LA FORMA NORMAL..... 203.

BIBLIOGRAFIA..... 215.

CAPITULO I.

LOS NUMEROS REALES.

A. ACERCA DE LOS NUMEROS RACIONALES.

> Unos alumnos muy racionales:
> En una clase de Matemáticas, el maestro llevó consigo un utensilio cortante y una manzana para explicar sobre las fracciones comunes. Al partir supuestamente en partes iguales la manzana, los alumnos iban contestando el nombre de las partes formadas: mitades, cuartos, octavos, dieciseisavos. Finalmente les dice a sus alumnos: Si parto la manzana en 32 partes ¿qué tendré ahora?.
> Los alumnos respondieron en coro: PICADILLO, MAESTRO. (1)

¡Qué problema!

Durante nuestros primeros años, en la escuela elemental, dividir es sinónimo de repartir equitativamente, problemas como: Juanito tiene dieciocho canicas y quiere "repartirlas" entre sus tres hermanitos, dándole igual cantidad a cada uno de ellos; no dejan más opción que dividir el número 18 entre 3, así es que tomamos nuestro lápiz y escribimos algo como:

$$3\overline{)18}\quad 6$$
$$0$$

y obtenemos la respuesta a: ¿cuántas canicas le corresponden a cada uno?.

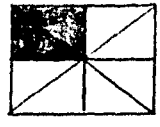
(1) ARAGON, Misael y VALIENTE, Santiago. En el amable mundo de la matemática. Pág. 149.

Pero qué sucedía cuando Juanito tenía veinte canicas, en lugar de dieciocho, y continuaba con la "mala" idea de repartírselas a sus hermanitos, teníamos entonces que:

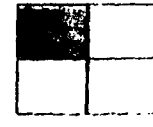
$$3\overline{)20}\quad 6,\ 2$$

y la respuesta: les tocan seis a cada uno, pero sobran dos. - Menudo lío era resolver qué hacer con esas canicas sobrantes: ¿se las queda Juan?, ¿se las entrega al más pequeño?, ¿les - concede siete a los dos mayores y seis al pequeño?. No, la respuesta a las tres preguntas es no, puesto que convenimos en que Juan quiere repartir sus canicas entre sus hermanos, y repartirlas a partes iguales. Entonces, el tan mencionado Juanito, tendrá que hacer "picadillo" sus canicas sobrantes. ¡Qué problema!.

Sin embargo, conforme pasa el tiempo, esta primera idea - de dividir se va extendiendo de tal manera que partir un pastel en ocho pedazos y tomar dos, o una manzana en cuatro y tomar una parte, es cuestión cotidiana que conduce a expresiones como 2/8 y 1/4 para indicar que hemos tomado dos partes de - ocho y una de cuatro, respectivamente, y las leemos: dos octavos y un cuarto. Más adelante, haciendo abstracción de pasteles y manzanas y basándonos únicamente en dibujos como los siguientes:



2/8



1/4

quedamos convencidos de que ambos representan la misma cantidad, es decir, dos octavos es equivalente a un cuarto, -- simbólicamente: 2/8 = 1/4. A expresiones como éstas las llamamos fracciones comunes o "quebrados". De pronto percibimos que

algunas de ellas se encuentran integradas a nuestro vocabulario cotidiano: "compré tres kilos y medio de tortillas", "son las diez y cuarto", "el salón tiene seis metros y medio de largo". Es entonces cuando estamos dando un sentido más amplio a la palabra dividir, ahora significa comparar dos cantidades entre sí, una de las cuales es considerada como unidad. En las expresiones anteriores las unidades son el kilogramo, la hora y el metro.

A manera de ejercicio toma como unidad el largo de tu pluma y mide cuántas veces cabe en el largo de tu cuaderno, de tu libro, de alguna mesa, etc.. Dependiendo, claro está, de las longitudes de tu pluma y de los objetos con los que la compares, encontrarás respuestas como: "cabe dos veces y un pedazo", "una vez y un pedacito", "cabe diez veces más otro tanto, casi una pluma más". Al efectuar estas mediciones lo que estamos haciendo es contar cuántas veces tenemos que colocar a lo largo del objeto, nuestra pluma, para cubrir la longitud del mismo. Difícilmente obtendremos respuestas como: "exactamente cabe tres veces la pluma"; en la mayoría de los casos tendremos pedazos que conducen a subdividir la longitud de nuestra pluma en partes teóricamente iguales, digamos en cuatro, cinco, seis, diez, en n partes, lo cual simbolizamos como: 1/4, 1/5, 1/6, 1/10, 1/n y dependiendo de cuantas de estas partes necesitamos llegamos a fracciones como: 3/4, 2/5, 4/6, 7/10, m/n, etc..

De alguna forma parecería que estamos retomando nuestros pasteles y manzanas de un principio, pero esta vez no se trata de hacer "picadillo" nuestra pluma por mera casualidad, sino de dar solución más satisfactoria al problema de medir con la

mayor exactitud posible, y éste no es en manera alguna un problema nuevo, ni fácil de resolver, para la humanidad, ya que le ha tomado siglos el llegar a la convención del uso de unidades prácticas de medida tales como: el metro, el gramo, el segundo, el metro cuadrado, el litro, la yarda, etc.. Pero por el momento, lo que nos preocupa es destacar el hecho de que los números de forma m/n aparecen como una respuesta a la necesidad práctica, que poseé el hombre, de medir.

Así, en un primer momento, la expresión m/n indica que la unidad ha sido subdividida en n partes iguales, de las cuales se han tomado m, a este hecho en matemáticas se le llama razón, de ahí el nombre de racionales que reciben estos números. Por ejemplo el racional 3/4 indica la razón 3 a 4 (tres partes de cuatro), lo cual graficamos como:

3/4

en ocasiones utilizamos el símbolo 3:4 que leemos como: tres es a cuatro; y el racional 5/8 indica la razón 5 a 8, gráficamente:

5/8

Más adelante dejamos que m y n, que por cierto llamamos numerador y denominador, respectivamente, tomen cualquier valor dentro del conjunto de los números naturales, aceptando inclusive, que m sea igual o mayor que n, por ejemplo:

7/7 indica la razón 7 a 7,

9/3 indica la razón 9 a 3,

5/1 indica la razón 5 a 1 y

8/5 indica la razón 8 a 5.

Observemos que al tomar siete partes de siete, como lo señala el racional 7/7, se obtiene la unidad, es decir, 7/7 = 1, gráficamente:

7/7 = 1;

en forma análoga, 2/2 = 1, 3/3 = 1, 4/4 = 1, etc.,

2/2 = 1

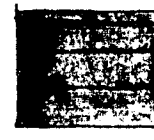
3/3 = 1

4/4 = 1

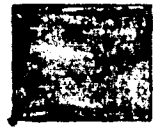
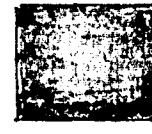
en general, aseguramos que a/a = 1, para cualquier número natural a. En el caso de que el numerador sea mayor que el denominador, se obtiene un número mayor que la unidad; en nuestro ejemplo, 9/3 = 3, 5/1 = 5 y 8/5 = 1+3/5 (2); y aceptamos como representación gráfica de los mismos a:

---

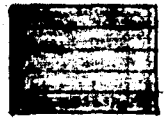
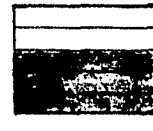
(2) Por razones que ignoramos, a las llamadas fracciones mixtas, como es el caso de 1+3/5, se acostumbra denotarlas sin el signo de suma intermedio, es decir, 1+3/5 se denota como 1 3/5, lo cual he observado que conduce a errores al operar con las mismas. En el presente trabajo se incluye, en lo sucesivo, al mencionado signo intermedio.



para 9/3

para 5/1 y

para 8/5;

en general, si m es un número natural mayor que el número natural n, se tiene que, m/n = E+r/n; donde E representa a un número natural que llamaremos la parte entera del racional; y r representa a otro número natural que puede ser menor que n, o igual a cero, a este número r lo llamaremos residuo.Pero, independientemente de la representación gráfica que hemos aceptado para los racionales 9/3, 5/1 y 8/5, ¿cómo hemos obtenido las igualdades 9/3 = 3, 5/1 = 5 y 8/5 = 1+3/5?. Sencillamente, efectuando la división indicada:

$$9/3 = 3 \quad \text{porque} \quad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ \hline 0 & \end{array}\ , \text{ o bien, } 9 = (3\times3) + 0,$$

$5/1 = 5$ porque $1\overline{)\begin{matrix}5\\5\\0\end{matrix}}$, o bien, $5 = (5x1) + 0$ y

$8/5 = 1+3/5$ porque $5\overline{)\begin{matrix}1\\8\\3\end{matrix}}$, o bien, $8 = (1x5) + 3$;

en general, $m/n = E+r/n$ porque $n\overline{)\begin{matrix}E\\m\\r\end{matrix}}$, o bien, $m = En + r$.

Habrás notado que los racionales 7/7, 9/3 y 5/1 presentan como residuo al cero, es decir r = 0, si fuésemos estrictos - deberíamos escribirlos como:

7/7 = 1+0/7, 9/3 = 3+0/3 y 5/1 = 5+0/1,

pero esto no es de uso práctico; sin embargo, nos permite apreciar, el porque se considera a los números naturales como números racionales con denominador igual a la unidad y residuo igual a cero; es decir, si s es un número natural cualquiera, entonces, s/1 = s+0/1.

Ahora bien, si generalizamos, estas ideas, para el caso - en que el numerador sea menor que el denominador, se tiene que la parte entera del racional es igual a cero y el residuo toma el valor del denominador, por lo que, si m es menor que n, se tiene que, m/n = 0+m/n, ejemplos:

5/6 = 0+5/6 porque 5 = (0x6) + 5 y

3/4 = 0+3/4 porque 3 = (0x4) + 3;

pero, nuevamente esto no es de uso práctico, ni común. En el caso especial de que el numerador sea igual a cero y el denominador distinto de cero, se tiene que, 0/n = 0+0/n, o lo que es - lo mismo, 0/n = 0, debido a que 0 = (0xn) + 0; por todo esto, el cero es considerado como un número racional. Pero, ¿podremos encontrar alguna fracción con denominador igual a cero, es decir, expresiones como 2/0, 3/0, 4/0, etc., representan núme-

ros racionales? Observemos, si 2/0 fuese un racional entonces:

$$2/0 = E+r/0, \text{ siempre que } \quad 0 \overline{)} \begin{matrix} E \\ 2 \\ r \end{matrix} ,$$

pero, puesto que Ex0 = 0, para cualquier número natural **E**, se tiene que r = 2, es decir,

$0 \overline{)} \begin{matrix} E \\ 2 \\ r \end{matrix}$ queda expresada como $0 \overline{)} \begin{matrix} E \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$ y las divisiones,

$0 \overline{)} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$, $0 \overline{)} \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$, $0 \overline{)} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$, $0 \overline{)} \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$, etc, etc, son

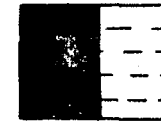
equivalentes. Esto es, estamos ante un racional que tiene "muchas" partes enteras distintas y cuyo residuo es mayor que el propio denominador, lo cual es inaceptable. De hecho decimos - que la división entre cero no esta determinada; y las expresiones como 2/0, o m/0, no representan a ningún número racional. (Moraleja, no hay "ceroavos").

En resumen, sobre el numerador m, no tenemos ninguna restricción hasta el momento, éste puede ser igual a cero, o bien, cualquier número natural mayor o igual que el propio denominador n, pero este último debe ser forzozamente distinto de cero. Pero, por el momento, para facilitar nuestro estudio, consideramos solamente racionales cuyo numerador sea menor que el denominador, es decir, racionales con parte entera igual a cero, pero los resultados que obtengamos son generalizables a cualquier número racional.

Mencionamos unos párrafos antes que al hacer abstracción de pasteles y manzanas, basándonos únicamente en dibujos llegamos a la conclusión de que 2/8 = 1/4, observemos ahora otros - ejemplos; tomemos 1/2 y dividámoslo en dos partes iguales, así obtenemos 2/4, por lo mismo, 1/2 = 2/4, gráficamente,

1/2 2/4

si el mismo medio lo dividimos en tres partes iguales obtenemos 3/6; si en cinco, 5/10; y, obviamente, 1/2 = 3/6 y - - - 1/2 = 5/10, gráficamente,

1/2 3/6  5/10.

Observarás que al obtener 2/4 se han multiplicado el numerador y el denominador por dos:

1/2 = 1x2/2x2 = 2/4;

y al dividir entre tres, se han multiplicado ambos números por tres,

1/2 = 1x3/2x3 = 2/6;

y para 5/10, por cinco,

1/2 = 1x5/2x5 = 5/10;

de igual forma podemos dividir 1/2 entre seis, diez, k partes iguales y obtener,

1/2 = 1x6/2x6 = 6/12,

1/2 = 1x10/2x10 = 10/20, o bien,

1/2 = 1xk/2xk = k/2k, donde k es un número natural - cualquiera.

De tal suerte, es posible afirmar que:

2/5 = 14/35 porque 2x7/5x7 = 14/35,

4/7 = 16/28 porque 4x4/7x4 = 16/28,

3/10 = 30/100 porque 3x10/10x10 = 30/100,

11/13= 22/26 porque 11x2/13x2 = 22/26,

en general, a/b = ak/bk, no lo olvides, b y k representan número distintos de cero.

Siguiendo esta idea, ¿podemos decir que 3/9 = 5/15?. La respuesta no es inmediata, ya que no hay un número natural k, que cumpla con:

3k/9k = 5/15,

pero estarás de acuerdo en que:

3/9 = 45/135 puesto que 3x15/9x15 = 45/135 y

5/15 = 45/135 puesto que 5x9/15x9 = 45/135

entonces, es obvio que efectivamente, 3/9 = 5/15.

En forma similar, 4/10 = 12/30 ya que:

4/10 = 4x30/10x30 = 120/300 y

12/30 = 12x10/30x10 = 120/300.

Un ejemplo más es 15/20 = 6/8, donde tenemos:

15/20 = 15x8/20x8= 120/160 y

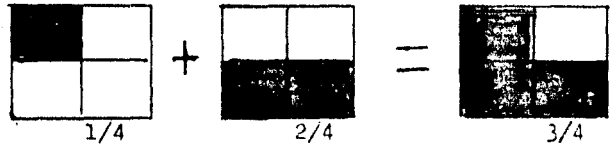
6/8 = 6x20/8x20 = 120/160;

en general, a/b = ad/bd y c/d = cb/db, por lo que si los numeradores ad y cb son iguales se cumple que, ad/bd = cb/db, puesto que los denominadores bd y db son iguales; y por lo mismo, a/b = c/b. Y recíprocamente, si se verifica la igualdad a/b = c/b, entonces, ad/bd = cb/db y ad = cb. Todo esto lo simplificamos diciendo:

a/b = c/d, sí y solamente sí, ad = bc.

Sumar dos números racionales con igual denominador no presenta mayor problema, puesto que, nos basta con sumar los numeradores, en general , a/b + c/b = (a + c)/b. Ejemplo:

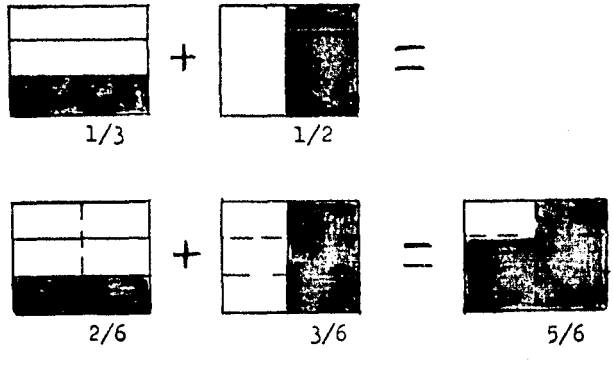
1/4 + 2/4 = (1 + 2)/ 4 = 3/4, gráficamente,



Sin embargo, la idea de hacer "picadillo" nuestras manzanas y pasteles, cobra fuerza cuando intentamos sumar dos números racionales con distinto denominador. Observemos,

1/3 + 1/2 = 1x2/3x2 + 1x3/2x3 = 2/6 + 3/6, por lo que,

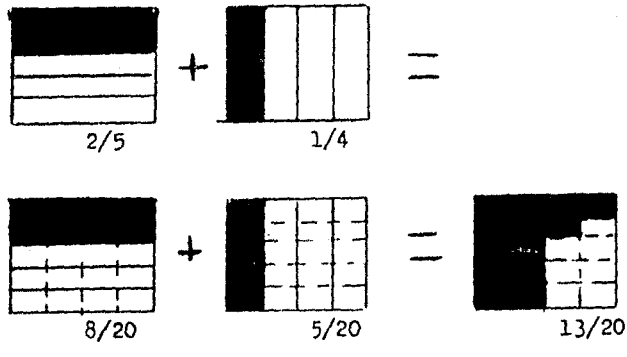
1/3 + 1/2 = (2 + 3)/6 = 5/6, gráficamente,



Otro ejemplo,

$2/5 + 1/4 = 2x4/5x4 + 1x5/4x5 = 8/20 + 5/20$, entonces,

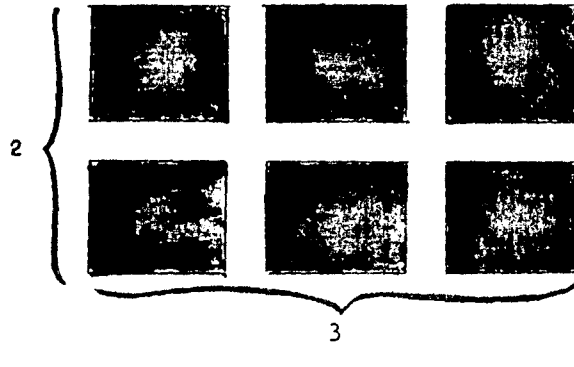
$2/5 + 1/4 = (8 + 5)/20 = 13/20$, gráficamente,



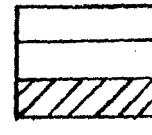
En general, $a/b + c/d = ad/bd + cb/db$, o bien,

$a/b + c/d = (ad + cb)/bd$.

Al multiplicar los números 2 y 3 obtenemos como resultado al número 6, es decir, $2x3 = 6$; donde evidentemente, el 6 es mayor que 2 y 3. Esto lo representamos gráficamente, de la siguiente manera:

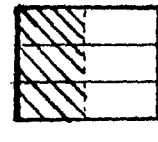


Sin embargo, al multiplicar 1/2 por 1/3, obtenemos como resultado al número 1/6, el cual, a diferencia del ejemplo anterior, es menor que 1/2 y 1/3. Por supuesto, que ambos resultados son correctos, lo que sucede es que en el primer caso, 2x3 = 6, - calculamos el doble de tres: "dos veces tres es igual a seis"; y en el segundo, 1/2 x 1/3 = 1/6 , obtenemos la mitad de un -- tercio: "media vez un tercio es igual a un sexto". Esto es, al multiplicar estas dos fracciones, llevamos implícita la idea - intuitiva de división; pero esto no es ni misterioso, ni mágico (al menos no debe serlo), porque como sabemos, un racional es la "división de dos números naturales". Gráficamente tenemos un entero dividido de antemano en tres partes iguales, una de las cuales ha sido tomada,



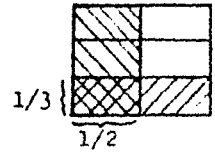
1/3

al multiplicar por 1/2, volvemos a dividir el mismo entero en dos partes iguales (esta vez lo dibujamos en forma vertical para facilitar la figura), esto es, nuestro entero incial queda "partido" es seis partes iguales,



1/2

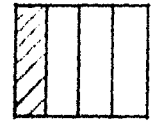
al sobreponer estas figuras tenemos,

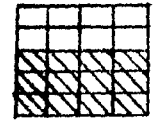


1/2 x 1/3 = 1/6

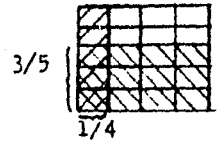
y la zona doblemente rayada represente 1/6, es decir, 1/2 x 1/3.

Otro ejemplo es, 3/5 x 1/4 = 3/20, observemos:



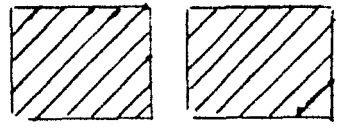


"tres quintas partes de un cuarto son iguales a tres veintia-- vos",



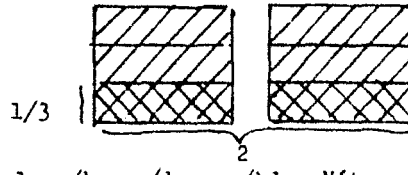
3/5 x 1/4 = 3/20

Un ejemplo más, 1/3 x 2 = 2/3, "la tercera parte de dos - es igual a dos tercios". En esta ocasión tenemos dos enteros,



2

dividimos ambos en tres partes iguales y tomamos una de cada - entero para obtener 2/3,



1/3 x 2 = 2/3.

En general, a/b x c/d = ac/bd. Nótese que en el ejemplo anterior se hace uso del hecho de que 2 = 2/1, por lo que, - - - - 1/3 x 2 = 1/3 x 2/1 = 1x2/3x1 = 2/3.

Como sabemos, la operación inversa de la adición es la - sustracción,

4/5 - 3/5 = 1/5 puesto que 1/5 + 3/5 = 4/5,

5/7 - 2/7 = 3/7 puesto que 3/7 + 2/7 = 5/7,

1/2 - 1/3 = 1/6 puesto que 1/6 + 1/3 = 1/2,

en general, a/b - c/d = (ad - bc)/bd, puesto que, - - - - - - (ad - bc)/bd + c/d = a/b. He aquí otros ejemplos,

3/5 - 1/4 = (12 - 5)/20 = 7/20,

puesto que 7/20 + 1/4 = 3/5,

2/9 - 7/40 = (80 - 63)/360 = 17/360,

puesto que 17/360 + 7/40 = 2/9,

7/10 - 4/10 = (7 - 4)/10 = 3/10

puesto que 3/10 + 4/10 = 7/10.

Observemos detenidamente, la siguiente sustracción:

$$1/5 - 1/3 = (3 - 5)/15$$

evidentemente, aparece en el numerador la operación 3 - 5 y ésta, como sabemos, tiene como resultado a un número entero negativo, a -2; esto es, 3 - 5 = -2 (3). Aparecen así, como una respuesta a este tipo especial de sustracción, los racionales negativos; por todo esto,

$$1/5 - 1/3 = (3 - 5)/15 = -2/15,$$

puesto que $-2/15 + 1/3 = 1/5$.

Otros ejemplos:

$$3/7 - 5/9 = (27 - 35)/63 = -8/63,$$

puesto que $-8/63 + 5/9 = 3/7$,

$$3/13 - 3/10 = (30 - 39)/130 = -9/130,$$

puesto que $-9/130 + 3/10 = 3/13$.

Y obviamente, tenemos tantos racionales negativos, como racionales positivos haya, esto es, si a/b es un número racional, también lo es -a/b. Y además se verifica que:

$$(a/b) + (-a/b) = 0.$$

Así, la primera idea que tenemos de un número racional como la división de dos números naturales, sufre una modificación; puesto que dadas las leyes de los signos de la división con números enteros, definimos, a partir de este momento, a un número racional como la división de dos números enteros. Esto es, a/b es un número racional si a y b son dos números enteros y $b \neq 0$. Y operar con racionales (positivos y negativos) se hace siguiendo las mismas leyes de las operaciones con números enteros. Al finalizar esta sección encontrarás algunos ejerci-

(3) Estamos dando por descontado que el lector sabe operar con números enteros, tanto negativos como positivos, por lo mismo, no nos detendremos en la explicación de dichas operaciones y leyes de los signos que involucran.

cios donde aparecen este tipo de operaciones.

La división 1/3 : 2/5, como operación inversa de la multiplicación consiste en encontrar un número racional que multiplicado por 2/5 de 1/3. Esto es:

1/3 : 2/5 = 5/6 puesto que 5/6 x 2/5 = 1/3,

donde estarás de acuerdo en que, 5/6 se obtiene al multiplicar 1/3 por 5/2, es decir,

1/3 : 2/5 = 1/3 x 5/2 = 5/6.

He aquí otro ejemplo,

7/9 : 9/10 = 70/81 puesto que 70/81 x 9/10 = 7/9,

donde 70/81, lo obtenemos al multiplicar 7/9 por 10/9, por lo que,

7/9 : 9/10 = 7/9 x 10/9 = 70/81.

En general, a/b : c/d = a/b x d/c = ad/bc. Al racional d/c lo llamamos, recíproco del racional c/d y se verifica que d/c x c/d = 1; para $c \neq 0$ y $d \neq 0$.

Resumiendo, para dos números racionales a/b y c/d, se tiene que:

a/b + c/d = (ad + bc)/bd,

a/b x c/d = ac/bd,

a/b - c/d = (ad - bc)/bd y

a/b : c/d = a/b x d/c = ad/bc,

donde a, b, c y d son números enteros cualesquiera, con $b \neq 0$ y $d \neq 0$ (para la división también es preciso que $c \neq 0$).

EJERCICIO.

Resolver las siguientes operaciones.

a) $5/7 + 2/5 =$

b) $(-1/3) + (-3/10) =$

c) $(-7/10) - (37/100) =$

d) $(-3/4)(-5/6) =$

e) $(2+2/5)(-1/9) =$

f) $(-(5+1/7)):(-(2+1/4)) =$

SOLUCION.

a) $25/35 + 14/35 = 39/35$

b) $(-10/30) + (-9/30) = -19/30$

c) $(-70/100) + (-37/100) = -107/100 = -(1+7/100)$

d) $15/24 = 5/8$

e) $(12/5)(-1/9) = -12/45 = -4/15$

f) $(-36/7):(-9/4) = (-36/7)(-4/9) = 144/63 = 16/7 = 2+2/7$

B. ACERCA DE LOS NUMEROS IRRACIONALES.

Después de agotar el tema sobre los números racionales, el maestro indica a sus alumnos que al día siguiente entrará con los irracionales.

Al día siguiente el maestro no se explica la ausencia de sus racionales alumnos. (4)

Racionales o irracionales, pero no ambos.

Como mencionamos en la sección anterior, al comparar las longitudes de dos objetos, tomando una de éstas como la unidad, nos encontramos , con la particularidad de que difícilmente dicha unidad cabe un número entero de veces en la longitud del otro objeto; tal situación nos condujo a dividir, al menos teóricamente, tal unidad en n partes iguales, de las cuales se tomaron m, para efectuar dicha medición. Por tal motivo, definimos a un número racional como aquel que se puede expresar como la división de dos números enteros.

Sin embargo, hay algunos objetos, cuyas longitudes al compararse, por más divisiones y subdivisiones que se haga de la longitud del objeto que se tome como unidad, no es posible encontrar dos números enteros m y n ($n \neq 0$), de manera que se pueda efectuar dicha medición. Esto es, hay números reales que no pueden ser expresados como la división de dos números enteros, tal es el caso de $\sqrt{2}$ y π, entre otros muchos. A tales números los llamamos irracionales.

(4) ARAGON, op. cit., Pág. 149.

Desde el siglo IV A. C., los griegos tienen conocimiento de los números irracionales, específicamente, obtienen la raíz cuadrada de dos al aplicar el Teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen por medida a la unidad. - Como sabemos, el mencionado teorema asegura que: en un triángulo rectángulo el área del cuadrado construído sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construídos sobre los catetos. (5) Observemos la siguiente figura:

en ésta, aparece un triángulo rectángulo con vértices en los - puntos A, B y C, cuyos catetos son los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, consideremos que éstos tienen por longitud a la unidad, es decir,

$$\overline{AC} = 1 \quad y \quad \overline{BC} = 1,$$

entonces, al aplicar el Teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2, \text{ o bien,}$$

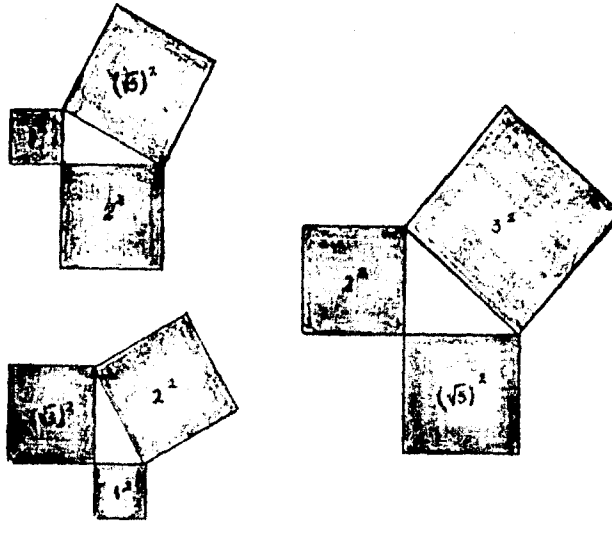
$$\overline{AB}^2 = 1 + 1 \text{ , por lo que,}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{2}\ .$$

Y como éste tenemos otros triángulos rectángulos cuyos catetos o hipotenusas no tienen por longitud a un número cuya raíz sea exacta; he aquí algunos:

---

(5) El recíproco de este teorema garantiza que: si la suma de las áreas de los cuadrados construídos sobre dos lados - de un triángulo es igual al área del cuadrado construído sobre el tercer lado entonces, el triángulo es un triángulo rectángulo. Una demostración de ambos teoremas aparece en el capítulo V de este trabajo.



(a este tipo de triángulos rectángulos los griegos los llama-- ron imperfectos).

Calculemos una aproximación de la raíz cuadrada de dos, por el método, por demás laborioso, que conocemos:

$\sqrt{2.000000}$	1.414
1 00	24
400	281
11900	2824
604	

si nos detenemos en este momento, pudiera parecer que los dígitos 1 y 4 se fuesen a repetir en forma indefinida, es decir, - $\sqrt{2}$ = 1.4141414... (6) pero no es así, ya que si continuamos -

(6) Los tres puntos que aparecen después del cuatro denotan que las cifras 1 y 4 se repiten tantas veces como sea necesario, es decir, 1.4141414... = 1.414... = 1.41414141414141..., etc. Estos puntos (...) deben leerse: "y así sucesivamente".

el proceso hasta ocho dígitos obtenemos que $\sqrt{2}$ = 1.4142135, sin embargo, al elevar este número al cuadrado no obtenemos - exáctamente al dos como resultado, sino únicamente a un número muy cercamo, 1.4142135^2 = 1.99999982358225. Así, este proceso puede continuar hasta obtener un número infinito de ci-- fras (teóricamente hablando), sin que al elevar al cuadrado - tal resultado, se obtenga al número dos; esto se debe al he-- cho de que $\sqrt{2}$ no es un número racional, lo cual, demostramos a través de razonamientos matemáticos; pero, para lograrlo es necesario tener presentes los siguientes tres puntos:

1). Aceptamos que un número entero k es par si, - k = 2s y es non si, k = 2s + 1, donde s es un número entero - cualquiera, ejemplos:

30 es par, puesto que 30 = 2x15,
20 es par, puesto que 20 = 2x10,
18 es par, puesto que 18 = 2x9,
35 es impar, puesto que 35 = (2x17) + 1,
41 es impar, puesto que 41 = (2x20) + 1,
33 es impar, puesto que 33 = (2x16) + 1, etc.

2). El cuadrado de un número impar es otro número - impar, ejemplos:

35^2 = 1225, donde 35 y 2225 son impares,
41^2 = 1681, donde 41 y 1681 son impares,
33^2 = 1089, donde 33 y 1089 sin impares, etc., en general, si k es un número impar entonces,

$k = 2s + 1$, elevando al cuadrado tenemos,

$k^2 = 4s^2 + 4s + 1$, o bien,

$k^2 = 2(2s^2 + 2s) + 1$, el cual es un número impar. El que un número impar tenga por cuadrado a otro número impar, es equivalente a decir que un número par no puede ser -

el cuadrado de un número impar.

3). Todo número racional puede ser reducido a la división de dos números enteros sin factores comunes, ejemplos:

40/120 = 1x40/3x40 = 1/3, donde los números 1 y 3 no tienen factores comunes,

33/44 = 3x11/4x11 = 3/4, donde los números 3 y 4 no tienen factores comunes, etc.,

en general, si a y b son dos números enteros distintos de cero, con algún factor común, digamos w ($w \neq 0$), esto es, si a = wp y b = wq, donde p y q son dos números enteros sin factores comunes, entonces debido a que, a/b = wp/wq se tiene, por los resultados de la sección anterior que, awq = bwp , por lo mismo al dividir entre w, aq = bp, es decir, a/b = p/q.

Demostremos ahora que $\sqrt{2}$ no es un número racional; supongamos que sí es un número racional y lleguemos a una contradicción. Si $\sqrt{2}$ es un número racional entonces, $\sqrt{2} = p/q$ donde p y q son dos números enteros ($q \neq 0$), los cuales podemos suponer, por el inciso tres, no tienen factores comunes. Entonces,

$\sqrt{2} = p/q$, o bien,

$2 = p^2/q^2$, por lo que,

$2q^2 = p^2$, lo que significa que p^2 es un número par y, por lo mismo, de acuerdo con el inciso dos, p también es un número par; entonces,

$p = 2s$, donde s es cualquier número entero y

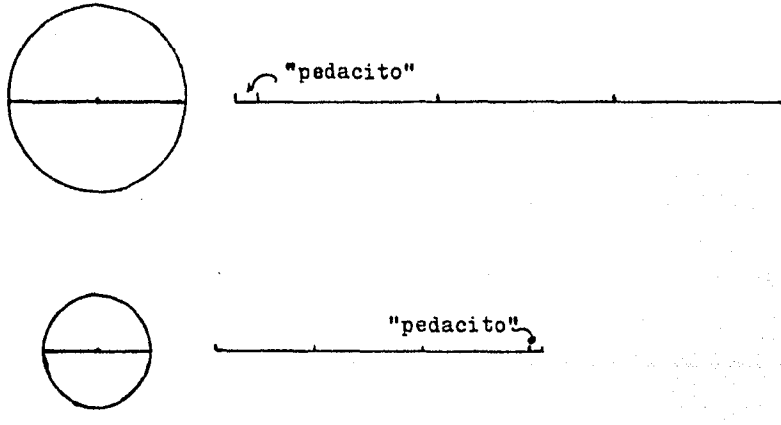
$p^2 = 4s^2$, que al sustituir en la tercera igualdad de este procedimiento, se tiene,

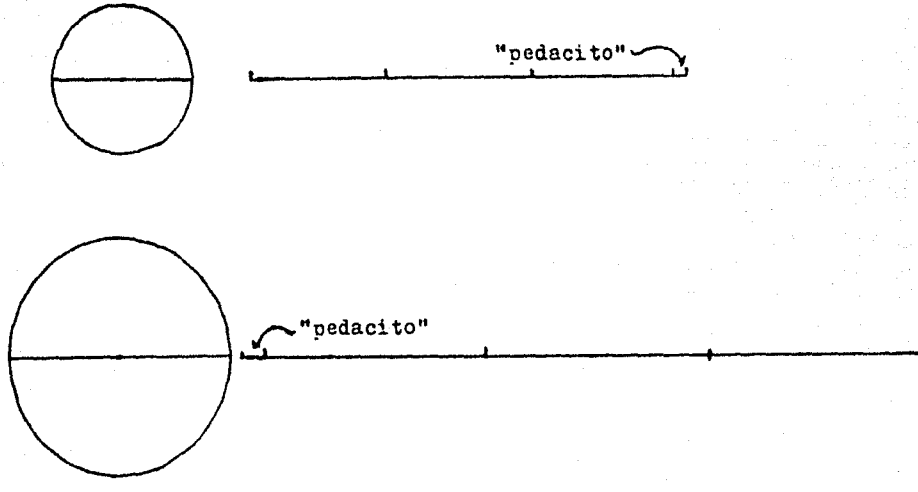
$2q^2 = 4s^2$, o equivalentemente,

$q^2 = 2s^2$, lo que significa que q^2 es par y tam

bién lo es q, esto de acuerdo con el resultado del inciso dos. Y, ésta es precisamente, la contradicción; ya que estamos concluyendo que tanto p como q son pares, es decir, ambos tienen como factor común al número dos y justamente, partimos de que p y q no tenían factores comunes; en consecuencia, $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Otro número irracional que merece especial atención, por su importancia y aplicación, es π (Pi), el cual queda determinado por la relación que guardan la circunferencia y el diámetro de todo círculo. Calculémoslo: auxiliándonos con un compás, trazamos tres o cuatro círculos de distinto radio cada - uno, o lo que es lo mismo, de distinto diámetro; con sumo cuidado colocamos un trozo de hilo sobre la circunferencia de los mismos, de manera que no sobre ni falte hilo, lo extendemos y comparamos con la longitud del diámetro correspondiente.





Seguramente, obtendremos que la longitud del diámetro de cada círculo, cabe tres veces y un "pedacito" en su circunferencia. Igual sucederá si dibujamos un centenar o un millar de círculos. Esta relación que guarda el diámetro con su circunferencia es constante: "tres veces y un pedacito". Esta manera que hemos adoptado para "calcular" a π no es, ni con mucho, exacta pero sí ilustrativa. Sin embargo los cálculos que actualmente se han hecho de π, basados en métodos fuera de nuestro alcance, han llevado a ese "pedacito" a una cifra de más de cien mil dígitos, sin que alguno, o un grupo, de éstos, se repitiera en forma indefinida. Como mera curiosidad anotaremos el valor de π con cincuenta cifras decimales:

π = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510... (7). Pero, para fines prácticos π = 3.1416 es una muy buena aproximación, al igual que para $\sqrt{2}$ es 1.4142 .

Todos los múltiplos de π , tales como 2π , 3π , ..., $n\pi$, son también números irracionales; aunados éstos a las raíces inexactas y a los múltiplos de las mismas, estaremos ante un número infinito de irracionales, pero aún así, no los habremos agotado, ya que para cada dos números irracionales que encontremos, tendremos otro número irracional, pero ya es mucho, ¿no te parece?. Sin embargo, algo similar sucede con los números racionales, es decir, siempre que encontremos dos de éstos tendremos otro número irracional entre los mismos. Esto no significa que se tengan tantos números irracionales como racionales haya, en estudios posteriores podrás percatarte de este hecho; pero por el momento, lo que deseamos es puntualizar que hay una infinidad de números racionales y una infinidad de números irracionales y, por lo mismo, hay una infinidad de números reales. (8)

Resumiendo, al reunir todos los números racionales y todos los números irracionales tendremos a los números reales; en otras palabras, un número real o es un racional o es un irracional, pero no ambos. Desde el punto de vista algebráico se definen a los reales como una colección de números en la cual las operaciones de suma (+) y producto (.) cumplen con las siguientes propiedades:

---

(7) BERGAMINI, David. Matemáticas. Pág. 122.

(8) Demostraciones formales de estos hechos aparecen en los libros ¿Qué es la matemática? de COURANT, Richard y Análisis matemático de APOSTOL, Tom M. Pero obviamente, pertenecen a cursos superiores.

1. Cerradura: a + b es un número real; ab es un número real.

2. Asociativa: (a + b) + c = a + (b + c); (ab)c = a(bc).

3. Conmutativa: a + b = b + a; ab = ba.

4. Elemento neutro: a + 0 = a; a1 = a.

5. Elemento inverso: a + (-a) = 0; a(1/a) = 1, $a \neq 0$.

6. Distributiva: c(a + b) = ca + cb.

Donde a, b y c, son tres números reales cualesquiera. El estudio detallado de dichas propiedades no resulta fundamental para el seguimiento de este trabajo, por lo que no nos detendremos en ello; además te suponemos familiarizado con las mismas.

EJERCICIO.

1. De acuerdo con el listado: $\sqrt{3}$, 2, -1, $-\sqrt{5}$, 0, $\pi/2$, $\sqrt{9}$, 2/5, $-\pi$, 9/10, $\sqrt{26}$, -7/2; contestar las siguientes preguntas. (9)

a) ¿Cuáles de estos números son racionales?.

b) ¿Cuáles son irracionales?.

c) ¿Cuáles números reales?.

2. Encontrar la solución de las siguientes ecuaciones, indicando cuales de éstas son números racionales.

d) $1 + y^2 = 3$

e) $3y - 1 = 6\pi$

f) $2 = \sqrt{y - 9}$

g) $8 + 2y^2 = 8$.

---

(9) Aún cuando estamos ciertos de que $\sqrt{a} = \pm b$, donde a es un número mayor o igual a cero y se cumple que: $b^2 = a$ y $(-b)^2 = a$; en este texto adoptaremos el símbolo $\sqrt{a}$ para referirnos a la raíz positiva de a y $-\sqrt{a}$ para la raíz negativa de a, es decir, $\sqrt{a} = b$ y $-\sqrt{a} = -b$.

SOLUCION.

a) 2, -1, 0, $\sqrt{9}$, 2/5, 9/10, -7/2.

b) $\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$, $\pi/2$, $-\pi$, $\sqrt{26}$.

c) Todos.

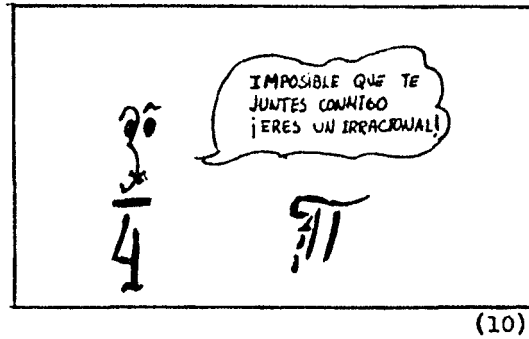
d) $y = \sqrt{2}$ (irracional)

e) $y = (6\pi + 1)/3$ (irracional)

f) y = 13 (racional)

g) y = 0 (racional).

C. ACERCA DE LA EXPRESION DECIMAL DE LOS NUMEROS REALES.



(10)

Una buena forma de distinguir los números racionales de - los irracionales es al través de su expresión decimal, por esto mismo, resulta de especial interés el estudio de las fracciones cuyo denominador es un múltiplo de diez, puesto que podemos escribirlas de distinta forma a la conocida m/n, usando notación decimal. Por ejemplo,

3/10 lo escribimos como 0.3
37/100 lo escribimos como 0.37
28/10000 lo escribimos como 0.0028

igual hacemos con las fracciones equivalentes a ellas, como:

9/30 = 3/10 entonces, 9/30 = 0.3
185/500 = 37/100 entonces, 185/500 = 0.37
7/2500 = 28/10000 entonces, 7/2500 = 0.0028,

(10) ARAGON, op. cit., Pág. 142.

Sabemos que para convertir cualquier fracción común a una expresión decimal es necesario dividir el numerador entre el denominador y aproximar utilizando tantos ceros como sea necesario a la derecha del punto. Así, en nuestros ejemplos podemos decir que:

3/10 = 0.3 porque $\begin{array}{r} 0.3 \\ 10\overline{)3.0} \\ 0 \end{array}$,

9/30 = 0.3 porque $\begin{array}{r} 0.3 \\ 30\overline{)9.0} \\ 0 \end{array}$,

7/2500 = 0.0028 porque $\begin{array}{r} 0.0028 \\ 2500\overline{)7.0000} \\ 2\ 0000 \\ 0 \end{array}$, etc.

He aquí otros ejemplos de uso frecuente:

1/2 = 0.5 puesto que $\begin{array}{r} 0.5 \\ 2\overline{)1.0} \\ 0 \end{array}$,

3/4 = 0.75 puesto que $\begin{array}{r} 0.75 \\ 4\overline{)3.00} \\ 20 \\ 0 \end{array}$,

5/8 = 0.625 puesto que $\begin{array}{r} 0.625 \\ 8\overline{)5.000} \\ 20 \\ 40 \\ 0 \end{array}$,

1/25 = 0.04 puesto que $\begin{array}{r} 0.04 \\ 25\overline{)1.00} \\ 0 \end{array}$,

observemos que después de hacer un número finito de cálculos hemos obtenido un residuo igual a cero.

Ahora bien, cuando tenemos una expresión decimal y queremos obtener una fracción común, por ejemplo, si tenemos 0.5 y queremos llegar a 1/2, procedemos de la siguiente forma: sabemos que 0.5 = 5/10 y como 5/10 = 1x5/2x5 = 1/2 entonces, podemos asegurar que 0.5 = 1/2, que es la fracción que deseábamos. Similarmente,

$0.75 = 75/100 = 3x25/4x25 = 3/4,$

$0.625 = 625/1000 = 5x125/8x125 = 5/8$ y

$0.04 = 4/100 = 1x4/25x4 = 1/25.$

Pero, observemos detenidamente el siguiente ejemplo:

$1/3 = 0.33...$ porque

$$\begin{array}{r|l} & 0.33... \\ \hline 3 & 1.00... \\ & \quad 10... \\ & \quad\quad 1... \end{array}$$

el residuo siempre será igual a uno, no importa cuántos cálculos hagamos, además para obtener 1/3 partiendo de 0.33... , no es posible detenernos en la primera cifra y decir que:

$0.33... \neq 3/10$ porque $3/10 \neq 1/3$, tampoco podemos detenernos en la segunda cifra, en la tercera o cuarta, etc.,

$0.33... \neq 33/100$ porque $33/100 \neq 1/3$,

$0.33... \neq 333/1000$ porque $333/1000 \neq 1/3$, etc.

Entonces proponemos el siguiente procedimiento: (11)

1). Hagamos $w = 0.33...$ y $10w = 3.33...$

2). Restemos $\begin{cases} 10w = 3.33... \\ w = 0.33... \end{cases}$

$9w = 3$, o lo que es lo mismo, $w = 3/9$

y como $3/9 = 1/3$, hemos obtenido 1/3 a partir de 0.33... .

---

(11) Este procedimiento encuentra su sustento teórico en el conocimiento de series geométricas infinitas, las cuales no serán tratadas en este escrito. Se remite al lector interesado, al libro Algebra de REES, Paul K., o bien, al libro Análisis Matemático de APOSTOL, Tom M.

Demos otros ejemplos:

$5/9 = 0.55...$ porque

$$\begin{array}{r|l} & 0.55... \\ 9 & 5.00... \\ & 50 \\ & 5... \end{array}$$

y, en sentido inverso, para obtener 5/9 a partir de 0.55... procedemos:

1). $w = 0.55...$ y $10w = 5.55...$

2).
$$\left.\begin{array}{l} 10w = 5.55... \\ -\ \ w = 0.55... \end{array}\right\}$$
$$9w = 5 \quad \text{o bien, } w = 5/9.$$

Y como $7/11 = 0.6363...$ porque

$$\begin{array}{r|l} & 0.6363... \\ 11 & 7.0000... \\ & 40 \\ & 40 \\ & 7... \end{array}$$

observamos que los residuos siete y cuatro se alternan indefinidamente. - Obtengamos ahora la fracción 7/11 partiendo de 0.6363...:

1). $w = 0.6363...$

2).
$$\left.\begin{array}{l} 100w = 63.6363... \\ -\ \ w = 0.6363... \end{array}\right\}$$
$$99w = 63 \quad \text{o bien, } w = 63/99 = 7x9/11x9 = 7/11,$$

nota que hemos multiplicado por cien, esto es debido a que tenemos dos dígitos repitiéndose indefinidamente: el seis y el - tres.

Un ejemplo más, encontremos una fracción común para la expresión decimal 0.285714285714... :

1). $w = 0.285714285714...$

puesto que tenemos seis dígitos repitiéndose multiplicaremos por 1 000 000, un cero por cada dígito repetido,

2).
$$\left.\begin{array}{l} 1\ 000\ 000w = 285714.285714285714... \\ -\qquad\quad w = \qquad 0.285714285714... \end{array}\right\}$$
$$999\ 999w = 285714$$

o bien, w = 285714/999999 = 2x142857/7x142857 = 2/7, es decir, 0.285714285714... = 2/7, lo cual puedes verificar efectuando el cociente indicado.

En general, si w = 0.abcdefgabcdefg..., se tiene que:

$$-\begin{cases} 10000000w = abcdefg.abcdefg... \\ \quad\quad w = \quad\quad 0.abcdefg... \end{cases}$$

$$9999999w = abcdefg$$

En realidad, al multiplicar por algún múltiplo de diez y restar, lo que hacemos es "desaparecer" esos dígitos que se están repitiendo, para trabajar con números enteros.

Para fracciones como 1/6, cuya expresión decimal es — 1.66... (verifícalo), observamos que se repite el número seis pero no el uno, entonces proponemos el siguiente proceso:

1). w = 0.166...

2). $-\begin{cases} 100w = 16.66... \\ \quad 10w = \quad 1.66... \end{cases}$

$$90w = 15, \text{ es decir, } w = 15/90 = 1/6.$$

La fracción común equivalente a 0.535656... la encontramos de la siguiente manera:

1). w = 0.535656...

2). $-\begin{cases} 10000w = 5356.56... \\ \quad 100w = \quad 53.56... \end{cases}$

$$9900w = 5303 \text{ entonces, } w = 5303/9900.$$

Un ejemplo más lo proporciona la fracción 7/330 cuya expresión decimal es, 0.02121... entonces,

$$-\begin{cases} 1000w = 21.21... \\ \quad 10w = \quad 0.21... \end{cases}$$

$$990w = 21 \text{ , por lo que, } w = 21/990 = 7/330.$$

En general, si w = 0.abcdefgefg..., se tiene que:

w = (abcdefg - abcd)/9990000 (verifícalo).

De acuerdo con los resultados obtenidos en estos ejemplos podemos afirmar que todo número racional tiene una representación decimal, la cual puede contener a un número finito de cifras o presentar algún dígito, o grupo de dígitos, repitiéndose indefinidamente, en cuyo caso la llamamos decimal periódica. Esto no ocurre con los números irracionales, como observamos en la sección anterior $\sqrt{2}$ y $\sqrt{11}$ no presentan periodicidad alguna en su expresión decimal, la cual tiene un número infinito de cifras. Igual sucede para $\sqrt{5}, -\sqrt{7}, \sqrt{8}$, $1/\sqrt{2}$, etc.,etc. Es decir, un número irracional es aquel cuya expresión decimal no es finita,ni periódica.

EJERCICIO.

Decir cuáles de las siguientes parejas de racionales son equivalentes y cuáles no lo son.

a) 2/3 y 4/6

b) 7/6 y 1.66...

c) -1/5 y -2/10

d) -0.77... y -7/10

e) 1073/500 y 2.147

f) 2/6 y 3/8.

SOLUCION.

a) $2/3 = 4/6$

b) $7/6 = 1.166...$

c) $-1/5 = -2/10$

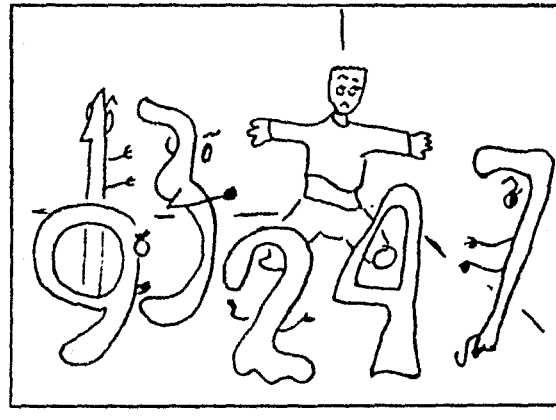
d) $-0.77... \neq -7/10$

e) $1073/500 \neq 2.147$

f) $2/6 \neq 3/8$

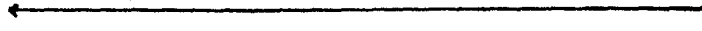
D. ACERCA DE LA REPRESENTACION GEOMETRICA DE ALGUNOS NUMEROS REALES.

ATRAPADO SIN SALIDA. (12)

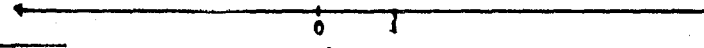


Ordenaditos y en línea recta.

Dibujemos una línea recta, auxiliándonos de una regla, de preferencia que no esté graduada, y convengamos que dicha línea es prolongable indefinidamente en ambos sentidos.

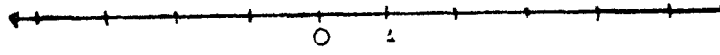


Tomemos dos puntos sobre la recta y asociemos el cero con el punto que está a la izquierda y el uno con el punto que quedó a la derecha.



(12) ARAGON, op. cit., Pág. 137.

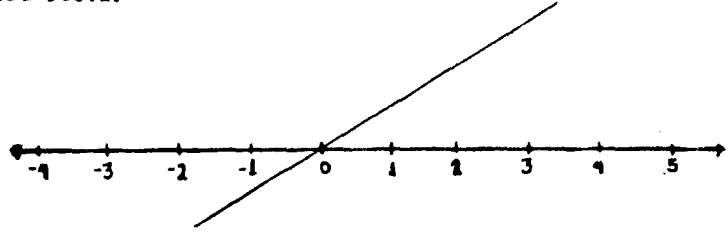
Con esta distancia como unidad y auxiliándonos con un compás hagamos marcas sucesivas hacia la derecha del uno e izquierda del cero.



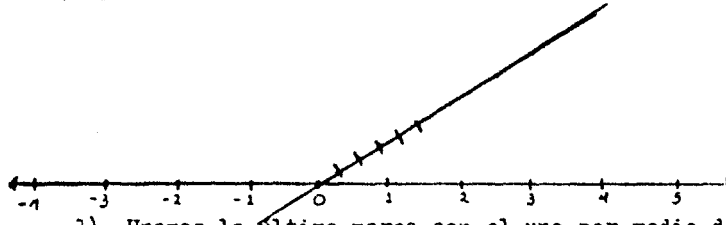
A las marcas que hemos hecho a la derecha del uno les asociamos los números 2, 3, 4, 5, 6, ..., en este orden; y a las que están a la izquierda del cero los números -1, -2, -3, ...

Como hemos convenido que esta recta es prolongable indefinidamente, en ambos sentidos, es posible encontrar tantos puntos como números enteros conocemos, mediante este procedimiento de hacer marcas sucesivas equidistantes. Sin embargo, para encontar puntos que podamos asociar con números racionales como son 1/2, -3/2, 1/4, -3/5, etc.; es necesario emplear otros trazos basados en la semejanza de triángulos. Por ejemplo, para encontrar el punto correspondiente a 3/5 es necesario dividir el segmento comprendido entre el cero y el uno en cinco partes iguales y después contar tres a partir del cero, hacia la derecha, procediendo de la siguiente manera:

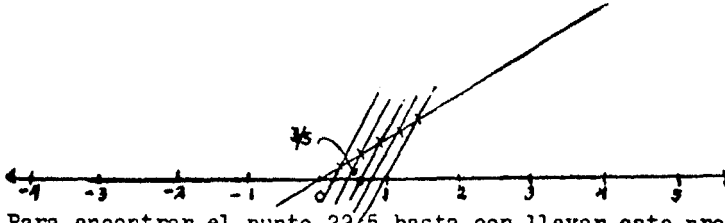
1). Por el cero pasemos una línea oblicua a nuestra primera recta.



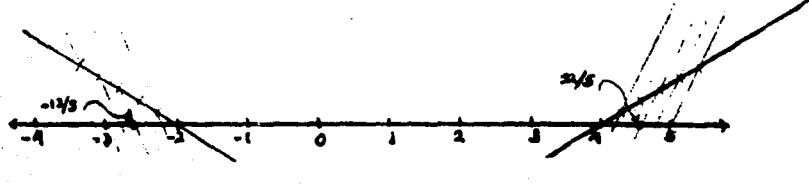
2). Hagamos en esta recta auxiliar cinco marcas equi distantes, ayudándonos con un compás, a partir del cero.



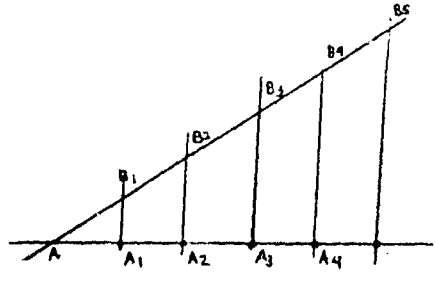
3). Unamos la última marca con el uno por medio de - una línea recta; y por las otras marcas restantes tracemos paralelas a ésta, que corten al segmento cero, uno. Así, hemos encontrado los puntos correspondientes a 1/5, 2/5, 3/5 y 4/5, en particular nos interesa el 3/5, que es el que señalamos en la figura siguiente:



Para encontrar el punto 22/5 basta con llevar este procedimiento hasta el segmento con extremos cuatro y cinco, y después contar dos a partir del cuatro, a la derecha, puesto que como sabemos 22/5 = 4+2/5. Y para -13/5 el trazo se hará en - el segmento comprendido entre negativo tres y negativo dos, pero en esta ocasión la recta auxiliar la dibujamos sobre el extremo derecho, es decir, sobre el negativo dos, y a partir de este número contamos tres submarcas hacia la izquierda. He - - aquí la figura correspondiente:



En forma semejante procederíamos para encontrar todas las fracciones con denominador igual a cinco. En general, para dividir un segmento cualquiera $\overline{AB}$ en cinco partes iguales trazamos la línea oblicua, las cinco marcas equidistantes sobre ésta, unimos los extremos y finalmente trazamos rectas paralelas que pasen por estas marcas:



donde,

$\overline{AA_1} = 1/5\ \overline{AB}$,

$\overline{AA_2} = 2/5\ \overline{AB}$,

$\overline{AA_3} = 3/5\ \overline{AB}$,

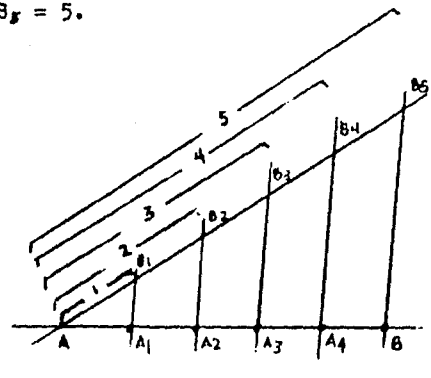
$\overline{AA_4} = 4/5\ \overline{AB}$ y,

obviamente,

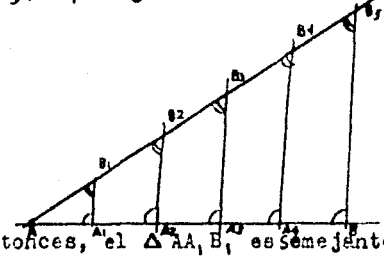
$\overline{AB} = 5/5\ \overline{AB}$.

Pero, ¿podemos estar seguros de que efectivamente, el segmento $\overline{AA}$ corresponde a 1/5 de $\overline{AB}$?. La respuesta es: si. Y para darla basta con aplicar las propiedades de los triángulos semejantes implicados en el trazo. Observemos:

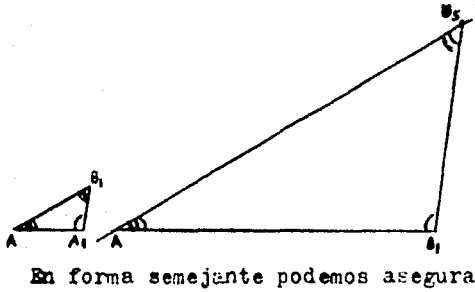
1). Puesto que las marcas son equidistantes se tiene que $\overline{AB_1} = \overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3} = \overline{B_3B_4} = \overline{B_4B_5}$. Tomemos el segmento $\overline{AB_1}$ como unidad, es decir, $\overline{AB_1} = 1$, para obtener, $\overline{AB_2} = 2$, $\overline{AB_3} = 3$, $\overline{AB_4} = 4$ y $\overline{AB_5} = 5$.



2). Los ángulos con vértices en los puntos A_1, A_2, A_3, A_4 y B son iguales, debido a que trazamos paralelas entre sí a las rectas que contienen a los segmentos $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$, $\overline{A_4B_4}$ y $\overline{BB_5}$. Por esto mismo, los ángulos con vértices en los puntos B_1, B_2, B_3, B_4 y B_5 también resultan ser iguales.

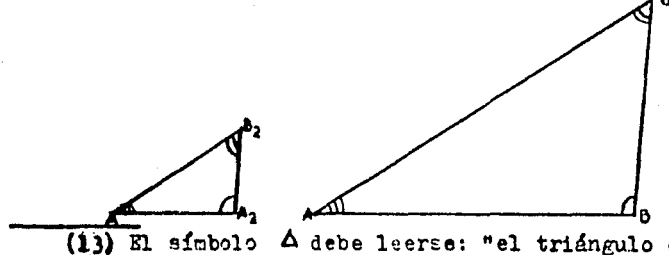


3) Entonces, el ΔAA_1B_1 es semejante al ΔABB_5, lo que significa que sus lados correspondientes son proporcionales. (13)



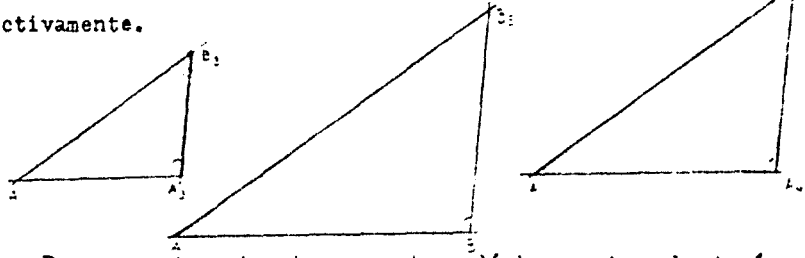
De donde:
$\overline{AA_1}/\overline{AB} = \overline{AB_1}/\overline{AB_5}$ y como $\overline{AB_1} = 1$ y $\overline{AB_5} = 5$, se tiene que, $\overline{AA_1}/\overline{AB} = 1/5$, o equivalentemente, $\overline{AA_1} = 1/5\ \overline{AB}$.

En forma semejante podemos asegurar que $\overline{AA_2} = 2/5\ \overline{AB}$, basta con tomar los triángulos semejantes: ΔAA_2B_2 y ΔABB_5.

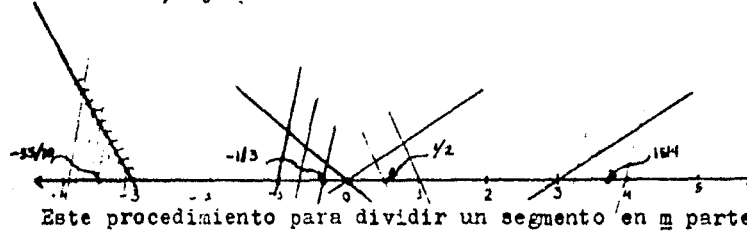


(13) El símbolo Δ debe leerse: "el triángulo que tiene por vértices a los puntos...".

Y para $\overline{AA_3} = 3/5\ \overline{AB}$ y $\overline{AA_4} = 4/5\ \overline{AB}$ debemos tomar los triángulos semejantes: $\Delta\ AA_3B_3$, ΔABB_5 y ΔAA_4B_4, ΔABB_5, respectivamente.



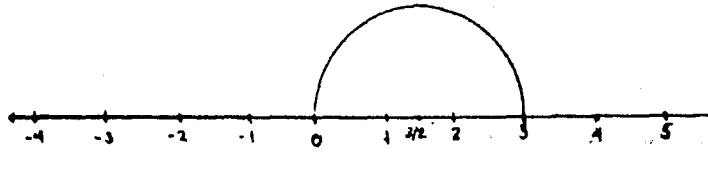
Para encontrar tercios, cuartos, décimos, etc., bastaría con hacer tres, cuatro, diez, m, marcas equidistantes sobre la línea auxiliar, ejemplos:



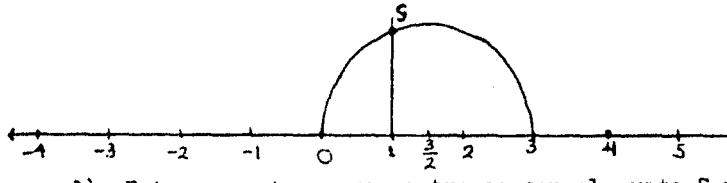
Este procedimiento para dividir un segmento en m partes iguales nos permite encontrar todos los puntos sobre esta línea recta, a los que les podemos asociar un número racional, al menos teóricamente, ya que estamos ciertos de que dividir un segmento "sencillamente" en cien partes iguales, en la práctica resulta sumamente difícil, pero no imposible.

Localicemos algunos puntos para asociarlos con números irracionales, comencemos con la raíz de dos:

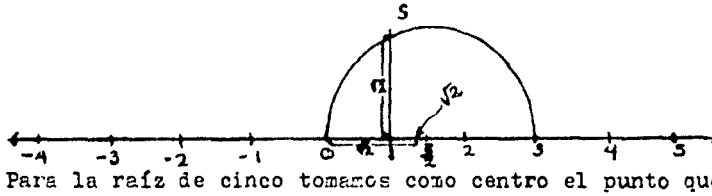
1). Tomando como centro el punto correspondiente a -3/2 tracemos un semicírculo de radio igual a 3/2.



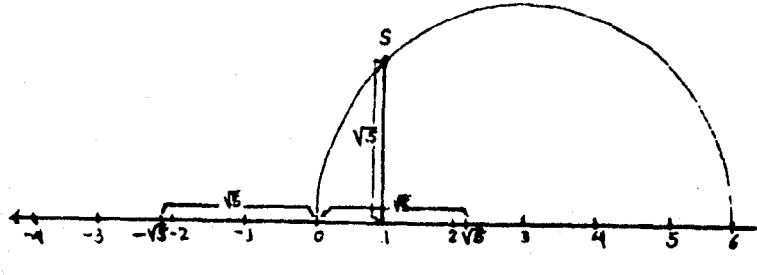
2). Trazamos la perpendicular sobre el punto que corresponde al número uno, intersectando con ésta al círculo en el punto S.



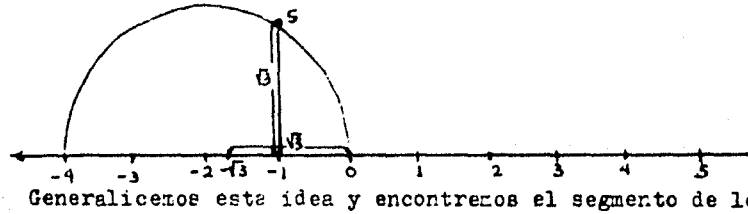
3). Este segmento, cuyos extremos son el punto S y el correspondiente al número uno, tiene longitud igual a raíz de dos. Basta entonces con tomar esta longitud y trasladarla a partir del cero, auxiliándonos con un compás, para obtener el punto correspondiente a $\sqrt{2}$.



Para la raíz de cinco tomamos como centro el punto que corresponde al número tres, y con este radio dibujamos el semicírculo. La perpendicular nuevamente la trazamos sobre el punto correspondiente al uno, intersectamos al semicírculo en S y tenemos el segmento cuya longitud es la $\sqrt{5}$.

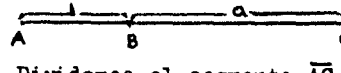


Observa que una vez obtenida la $\sqrt{5}$, puedes fácilmente encontrar a $-\sqrt{5}$, ya que estos puntos son simétricos, es decir, están a la misma distancia del punto correspondiente al cero. - Sin embargo, a manera de ilustración para encontrar las raíces negativas, obtengamos el punto correspondiente a $-\sqrt{3}$. ¿Qué punto consideras que debe ser el centro de nuestro semicírculo?. - Efectivamente, el -2. ¿Y el radio?, si pensaste en un radio -- igual a dos unidades, acertaste. Y claro, la perpendicular debe trazarse sobre el punto correspondiente a -1. He aquí la figura:

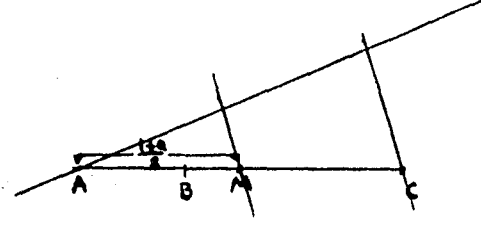


Generalicemos esta idea y encontremos el segmento de longitud igual a $\sqrt{a}$:

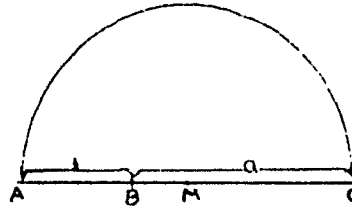
1). Tomemos un segmento $\overline{AB}$ como unidad, es decir tomemos $\overline{AB} = 1$; y prolonaguemos hasta el punto C, de tal manera - que $\overline{BC} = a$.



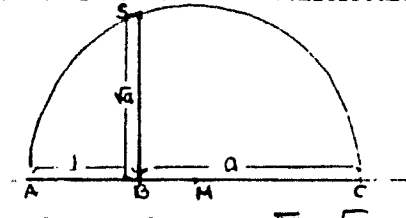
2). Dividamos el segmento $\overline{AC}$ en dos partes iguales, para encontrar el punto M, el cual cumple con la igualdad: $M = (1 + a) / 2$.



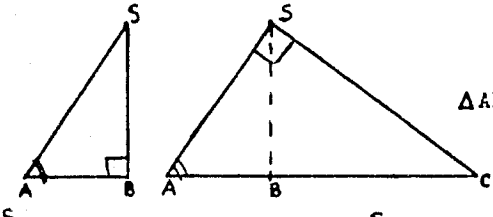
3). Con centro en M trazamos el semicírculo que pase por los puntos A y C.



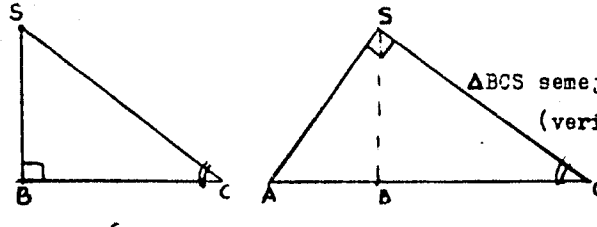
4). Trazamos la perpendicular a $\overline{AC}$ que pasa por B, prolongándola hasta intersectar al semicírculo en el punto S.



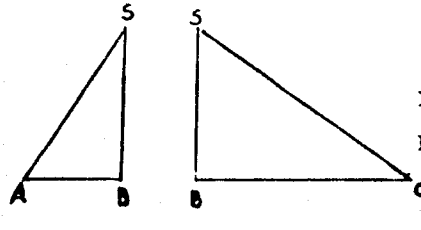
Estaremos de acuerdo en que $\overline{BS} = \sqrt{a}$, porque nuevamente tenemos triángulos semejantes:



ΔABS semejante al ΔACS (verifícalo).

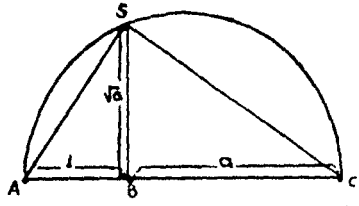


ΔBCS semejante al ΔACS (verifícalo).



Los triángulos: ΔABS y ΔBCS son semejantes por ser semejantes ambos al ΔACS.

Por esta última semejanza, se tiene que:



$\overline{BS}/\overline{AB} = \overline{BC}/\overline{BS}$, por lo que,

$\overline{BS}/1 = a/\overline{BS}$, de donde,

$\overline{BS}^2 = a$, o lo que es lo mismo,

$\overline{BS} = \sqrt{a}$.

Para encontrar puntos sobre la recta con el fin de asociar los π y sus múltiplos, no tenemos un buen método geométrico, como los vistos en esta sección; entonces, pudiésemos usar el ya mencionado del hilo colocado en el contorno del círculo de radio igual a la unidad, pero éste nos proporciona solamente una buena aproximación para π, los múltiplos se tomarían a partir de esta longitud transladándola sucesivamente sobre la recta. - Otro método consiste en considerar puntos racionales cercanos a π, por ejemplo, sabemos que 3.1410 es menor que 3.1415... y - este último menor que 3.1420; entonces podemos localizar en la recta a los racionales 3.1410 y 3.1420 y establecer que π queda localizado entre los mismos. Esto funciona también para todos - los números irracionales; por ejemplo,

2.10100100010000... quedaría entre 2.100 y 2.102, o entre 2.1009 y 2.1011, o bien, entre 2.101000 y 2.101002, dependiendo de que tan "cerca" desees estar de 2.10100100010000..., donde "quedar entre" no significa en el "punto medio de", solamente estamos dando aproximaciones.

Resumiendo, para todos los números reales es posible encontrar un punto sobre una recta al cual asociarlo; y para cada -- punto solamente podemos dar un único número real; a la recta - así tomada la llamamos recta real o eje real.

Por último, aceptamos que todos los números positivos son mayores que el cero, por ejemplo,

5 es mayor que 0,

7 es mayor que 0,

1/4 es mayor que 0, etc.,

lo cual simbolizamos como:

$5 > 0$, $7 > 0$ y $1/4 > 0$, respectivamente.

Y decimos que un número real a es mayor que un número real b si, su diferencia (a - b) es mayor que cero, con símbolos:

$a > b$ si $(a - b) > 0$.

Ejemplos:

$3 > 2$ puesto que $3 - 2 = 1$ y $1 > 0$,

$1/5 > 1/8$ puesto que $1/5 - 1/8 = 3/40$ y $3/40 > 0$,

$1 > -12$ puesto que $1 - (-12) = 13$ y $13 > 0$,

$-4 > -10$ puesto que $-4 - (-10) = 6$ y $6 > 0$, etc.

En forma semejante, si aceptamos que todos los números reales negativos son menores que el cero entonces, decimos que un número real a es menor que un número real b, si su diferencia es menor que cero; simbólicamente,

$a < b$ si $(a - b) < 0$.

Ejemplos:

$4 < 7$ puesto que $4 - 7 = -3$ y $-3 < 0$,

$-1 < 1$ puesto que $-1 - 1 = -2$ y $-2 < 0$, etc.

Ahora, si observas, en la recta real hemos colocado:

al -3 a la izquierda del -2 y $-3 < -2$,

al -2 a la izquierda del -1 y $-2 < -1$,

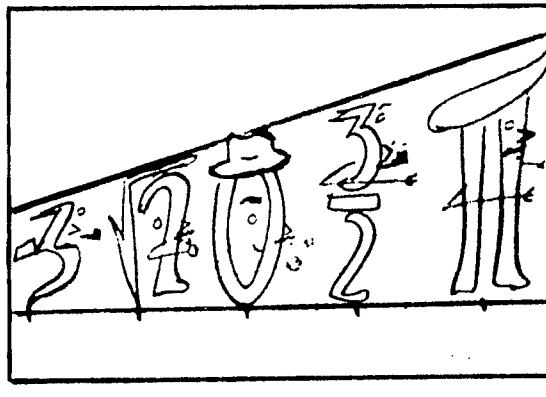
al -1 a la izquierda del 0 y $-1 < 0$,

al 0 a la izquierda del 1 y $0 < 1$,

al 1 a la izquierda del 2 y $1 < 2$, etc.,

en general, en la recta real, si un número a está colocado a la

izquierda de un número b entonces, a es menor que b, simbólicamente: $a < b$. Tenemos así, a los números reales: ordenaditos y en línea recta.



EJERCICIO.

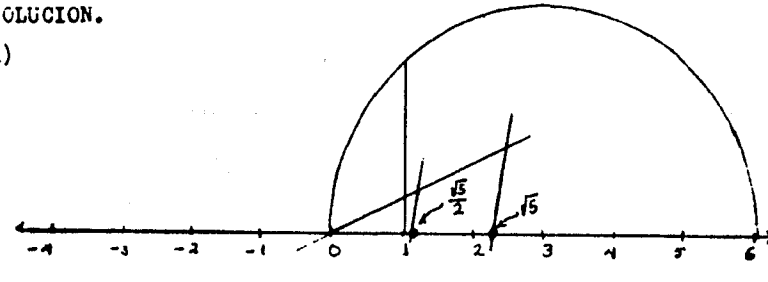
Efectuar los trazos necesarios, a fin de localizar en la recta real, el punto correspondiente al número:

a) $\sqrt{5}/2$.

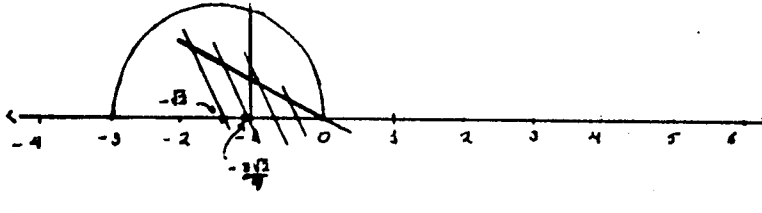
b) $-3\sqrt{2}/4$.

SOLUCION.

a)



b)



CAPITULO II.

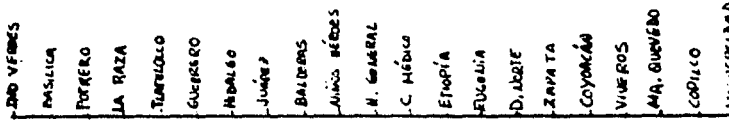
LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

A. EN LA RECTA REAL.

El maestro le preguntó a Pepito:
Si tomo un camión y voy a la Villa, luego al - Estadio Azteca, posteriormente al Aeropuerto y por último a Chapultepec, ¿cuántos años tengo?.
- 38, maestro, - respondió Pepito.
- Muy bien Pepito, pero ¿cómo lo supiste?.
- Muy fácil. Tengo un amigo que tiene 19 años y está medio loco. (1)

En una línea que no es recta.

En la ciudad de México existe un transporte colectivo -- llamado Metro, en la actualidad (1988) cuenta con nueve rutas o líneas para satisfacer las necesidades del usuario, en particular la línea 3 cruza la ciudad de Norte a Sur a través de veintiún estaciones:



entonces, si deseas viajar de Indios Verdes a Universidad, -- después de abordar, pasarás veinte estaciones antes de descender, estamos dando por descontada la estación de abordaje. -

(1) ARAGON, op. cit. Pág. 148.

Obviamente estas paradas o estaciones no están a la misma distancia, ni el Metro hace exactamente el mismo tiempo para ir de una a otra, pero para nuestros fines vamos a considerar -- tiempos y distancias, entre las estaciones, como iguales; bajo estas condiciones resolvamos los siguientes problemas:

Problema 1. Rubén, un joven que aborda por primera vez el Metro, ha decidido transportarse de Hidalgo a Etiopía, se acerca y nos pregunta: ¿ cúantas estaciones debo viajar?.

Respuesta: Seis estaciones.

Problema 2. Desafortunadamente, después de contar - seis estaciones, Rubén no baja en Etiopía sino en Indios Verdes. ¿ Qué hizo mal Rubén?.

Respuesta: Rubén ha contado bien, no tomó en cuenta la estación de abordaje y esperó seis estaciones para descender, los que hemos fallado somos nosotros puesto que no le indicamos la dirección en que debía desplazarse; la respuesta - correcta al problema anterior es: seis estaciones en dirección a Universidad.

Problema 3. Rubén desea regresar a Hidalgo, abordando en Etiopía, ¿cuántas estaciones debe viajar?.

Respuesta: Seis estaciones, en dirección a Indios - Verdes.

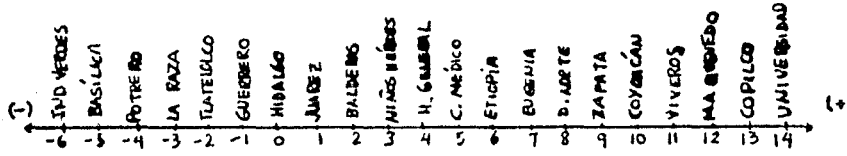
Problema 4. Rubén viaja ahora de Hidalgo a La Raza. ¿Cuántas estaciones permanece en el Metro?.

Respuesta: Tres, dirección Indios Verdes.

Problema 5. ¿Y, para regresar de La Raza a Hidalgo?

Respuesta: Tres, dirección Universidad.

Por alguna razón Rubén siente predilección por Hidalgo, puesto que la toma como punto de partida o referencia para ir y venir a lo largo de esta línea 3, que por cierto no es recta y está en un Metro que no mide un metro ; y dado que, desde un principio convenimos en considerar las distancias entre las estaciones como iguales, podemos relacionar éstas con algunos números enteros sobre la recta real. En atención a Rubén, a Hidalgo le haremos corresponder el cero, y viajar en dirección a Universidad, el sentido positivo, y hacia Indios Verdes, el sentido negativo:



Observamos que a Etiopía le corresponde el número 6, y a Indios verdes el -6, puesto que ambos se encuentran a seis estaciones de Hidalgo, una en sentido positivo, la otra en sentido negativo; pues bien, a estos números los llamaremos coordenadas de Etiopía e Indios Verdes, respectivamente; en otras palabras, la coordenada de Etiopía es 6 y la coordenada de Indios Verdes es -6; de igual forma afirmamos que: la coordenada de Universidad es 14, la coordenada de Juárez es 1, etc., En resumen, para determinar la coordenada de cada estación es necesario considerar dos aspectos:

1. El número de estaciones que debemos viajar a partir de Hidalgo.

2. La dirección en que viajamos: Universidad (+) o Indios Verdes (-).

Sin embargo, cuando Rubén "va y regresa", digamos de Hidalgo a Etiopía y de Etiopía a Hidalgo, el número de estaciones es el mismo: seis, no importa el sentido en que viaje, -- Universidad-> Indios Verdes o Indios Verdes-> Universidad, a este número de estaciones le llamaremos distancia. Entonces, la distancia de Hidalgo a La Raza es 3, de Hidalgo a Universidad es 14, de Zapata a Hidalgo es 9 y, ¡claro!., de Hidalgo a Zapata también es 9.

Problema 6. ¿Cuál es la distancia de Potrero a Eugenia?.

Respuesta: Sabemos que la distancia de Potrero a Hidalgo es 4 y de Hidalgo a Eugenia es 7, entonces la distancia total es: $4 \blacklozenge 7 = 11$; puesto que para ir de Potrero a Eugenia pasamos por Hidalgo.

Problema 7. ¿Cuál es la distancia de Zapata a Copilco?.

Respuesta: Sabemos que la distancia de Hidalgo a Zapata es 9 y de Hidalgo a Copilco es 13, entonces la distancia total es: $13 - 9 = 4$; puesto que al abordar en Zapata para -- llegar a Copilco nos estamos "ahorrando" las nueve estaciones que hay de Hidalgo a Zapata.

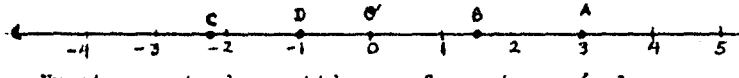
Problema 8. ¿Cuál es la distancia entre las estaciones de Potrero y Guerrero?.

Respuesta: Nuevamente tomemos en consideración las distancias de Hidalgo a Potrero y de Hidalgo a Guerrero, en el primer caso la distancia es 4 y en el segundo es 1, restemos $4 - 1 = 3$, y tenemos la respuesta.

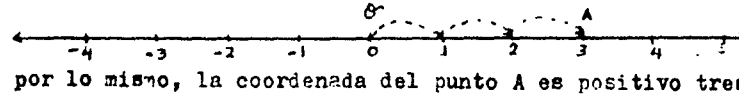
Ciertamente, resulta sumamente difícil, bajo condiciones normales, el bajarse del Metro entre las estaciones de Hidalgo

y Juárez, o entre Copilco y Universidad, puesto que no tenemos la estación "Hidalgo un medio", o "Copilco tres cuartos", aún cuando existen calles intermedias de estación a estación. Equiparando esta línea 3 del Metro con la recta real podemos considerar un punto en continuo movimiento sobre la misma y establecer en los números reales "estaciones" que nos permitan hablar de coordenadas y distancias en forma un tanto parecida a como lo hemos venido desarrollando. Es obvio que en la recta real si podemos hablar de paradas "intermedias" entre las correspondientes a las de los números enteros, tales como "estación un entero un medio", "estación $-\pi$", "estación $\sqrt{2}$", etc.. De tal forma, que la palabra estación puede ser sustituída por la palabra punto.

En la siguiente recta hemos localizado las estaciones o puntos: A, B, C, D y O.

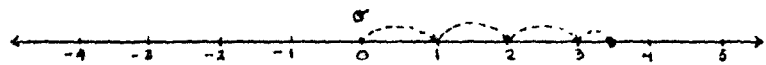


Nuestro punto de partida o referencia será el correspondiente al cero, lo llamaremos origen y lo denotaremos con la letra O; nuevamente, al avanzar hacia la izquierda lo hacemos en sentido negativo y hacia la derecha en sentido positivo. Para llegar del origen al punto A, hemos de "caminar" tres unidades en sentido positivo:



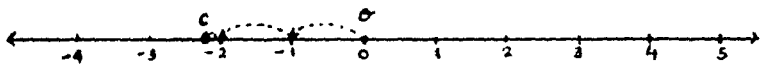
y, por lo mismo, la coordenada del punto A es positivo tres, lo cual denotamos como: $x_A = 3$.

Para encontrar al punto B "caminamos" tres medias unidades, es decir, una y media unided, en sentido positivo, a partir del origen:

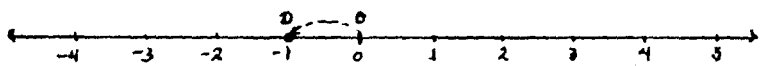


por lo que, su coordenada es positivo tres medios: $x_B = 3/2$.

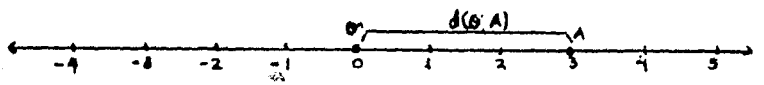
Para el punto C, "caminamos" o "nos movemos", en sentido negativo, a partir del cero, dos unidades y cuarto, por lo que su coordenada será: $x_C = -(2+1/4)$, o bien, $x_C = -9/4$.



Por último, para localizar al punto D, nos movemos una unidad en sentido negativo, a partir del origen, lo que ocasiona que: $x_D = -1$.



Ahora bien, la distancia del origen al punto A es tres, y será la misma que la distancia del punto A al origen, esto lo denotamos como: $d(0, A) = |3|$, que se leé, la distancia del origen al punto A es igual al valor absoluto del número tres.



Para los puntos B, C y D sus respectivas distancias al - origen son:

$d(O, B) = |3/2| = 3/2,$

$d(O, C) = |-(2+1/4)| = 2+1/4$ y

$d(O, D) = |-1| = 1.$

Donde, entendemos como valor absoluto de un número real $\underline{k}$ a:

$-k$ si k es negativo,

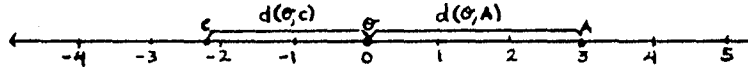
k si k es positivo y

0 si k es cero.

Para obtener la distancia entre dos puntos distintos del origen, por ejemplo, los puntos C y A, tenemos que:

$d(C, A) = d(C, 0) + d(0, A) = (2+1/4) + 3 = 5+1/4,$

puesto que el origen se encuentra entre estos dos puntos. Verifiquemos gráficamente:



Este mismo resultado lo obtenemos empleando coordenadas, de - la siguiente manera:

$d(C, A) = |-(2+1/4) - 3| = |-(5+1/4)| = 5+1/4,$

que no es otra cosa que el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas de ambos puntos, en símbolos:

$d(C, A) = |x_C - x_A|.$

Y como, para efectos de distancia, es lo mismo ir de C a A, - que de A a C, observamos que:

$d(C, A) = d(A, C)$, o lo que es lo mismo,

$|x_C - x_A| = |x_A - x_C|$, verifiquemos:

$d(A, C) = |3 - (-(2+1/4))| = |5+1/4| = 5+1/4.$

Problema 9. ¿Cuál es la distancia entre los puntos A y B?.

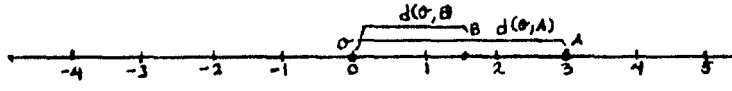
Respuesta: Este caso es similar al del problema 7 - de esta sección, ambos puntos están a la derecha del origen, por lo mismo calculamos la d(A, B) efectuando la diferencia: d(0, A) - d(0, B), y obtenemos que , d(A, B) = 3/2. Pero también llegamos a este resultado empleando coordenadas:

$$d(A, B) = | x_A - x_B | = | 3 - 3/2 | = | 3/2 | = 3/2;$$

y verificamos que d(A, B) = d(B, A) calculando,

$$d(B, A) = | x_B - x_A | = | 3/2 - 3 | = | -3/2 | = 3/2,$$

gráficamente,



Problema 10. ¿Cuál es la distancia entre los puntos C y D?.

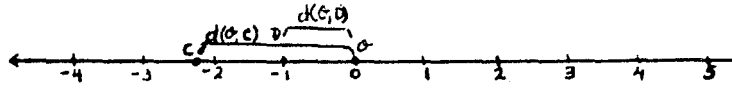
Respuesta: Tenemos que d(0, C) = 2+1/4 y d(0, D) = 1 entonces, d(C, D) = d(0, C) - d(0, D) = (2+1/4) - 1 = 9/4 - 4/4 = 5/4, en coordenadas:

$$d(C, D) = | x_C - x_D | = | -(2+1/4) - (-1) | = | -5/4 | = 5/4,$$

o lo que es lo mismo,

$$d(D, C) = | x_D - x_C | = | -1 - (-(2+1/4)) | = | 5/4 | = 5/4,$$

gráficamente,



Por último, si aceptamos que la coordenada del origen es cero, obtendremos:

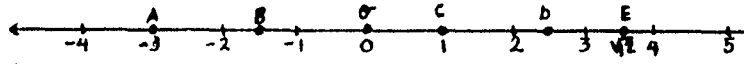
$d(\mathcal{O}, A) = |x_{\mathcal{O}} - x_A| = |0 - 3| = |-3| = 3$, o bien,

$d(A, \mathcal{O}) = |x_A - x_{\mathcal{O}}| = |3 - 0| = |3| = 3$, que coincide con el resultado obtenido anteriormente.

Resumiendo, los conceptos de coordenada y distancia al origen están intimamente ligados, diferenciándose únicamente en que para dar la coordenada es preciso considerar el sentido en que nos estamos desplazando, y para la distancia no.

EJERCICIO.

De acuerdo con la siguiente recta real obtener las coordenadas y distancias que se solicitan.



a) $x_B =$

b) $x_C =$

c) $x_E =$

d) $x_A =$

e) $d(A, B) =$

f) $d(B, C) =$

g) $d(D, E) =$

h) $d(O, A) =$

SOLUCION.

a) $x_B = -3/2$

b) $x_C = 1$

c) $x_E = \sqrt{12}$

d) $x_A = -3$

e) $d(A, B) = |-(1+1/2)| = 1+1/2$

f) $d(B, C) = |-(2+1/2)| = 2+1/2$

g) $d(D, E) = |(2+1/2) - \sqrt{12}|$

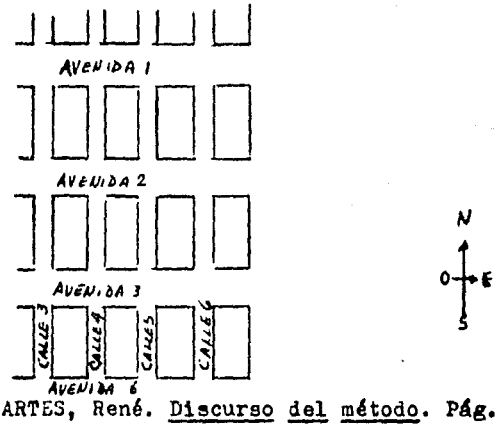
h) $d(O, A) = |-3| = 3.$

B. EN EL PLANO CARTESIANO.

> Esas largas cadenas de razonamientos, tan sencillos y fáciles, de que se sirven los geómetras para sus demostraciones más difíciles, me hicieron -- pensar que todas las cosas susceptibles de ser conocidas se relacionaban como aquellos razonamientos, y que con tal no se reciba como verdadero lo que no lo sea y se guarde el orden necesario para las deducciones, no hay cosa tan lejana que a ella no pueda llegarse ni tan oculta que no pueda ser descubierta. (2)

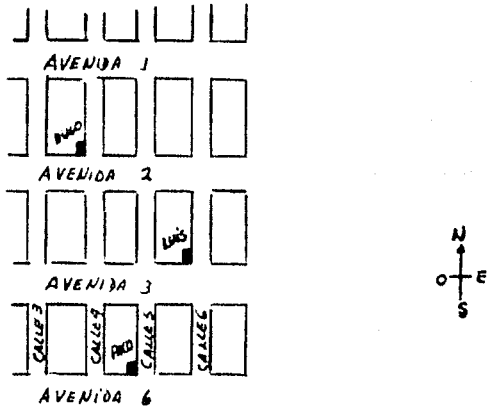
Una colonia con un número infinito de calles.

Tal vez, localizar estaciones en el Metro resulte más -- sencillo que localizar calles dentro de alguna colonia o barrio. Tenemos como ejemplo, un fragmento de la colonia El Sol, ubicada en Ciudad Netzahualcoyolt, Estado de México:



(2) DESCARTES, René. Discurso del método. Pág. 16.

Supongamos que en esta colonia viven Hugo, Paco y Luis, y que sus casas se localizan "casualmente" en las esquinas señaladas en el siguiente croquis:



Hugo y Paco deciden visitar a Luis, pero no conocen la dirección exacta de éste, únicamente saben que Luis vive en la Calle 6, a tres calles de la casa de Hugo y a dos de la de Paco.

Problema 11. Después de caminar tres calles, Hugo se encuentra en el cruce de Calle 6 y Avenida 1, obviamente no está en el sitio correcto, ¿en qué se equivocó?.

Respuesta: Hugo vive en el cruce de Calle 4 y Avenida 2, ha caminado correctamente dos calles de Oeste a Este sobre la Avenida 2, hasta encontrar la Calle 6, pero al llegar a ésta se dirige hacia el Norte y no hacia el Sur que era lo correcto.

Problema 12. Después de caminar dos calles Paco sí encontró la casa de Luis. ¿Puedes decir qué camino ha tomado?.

Respuesta: En realidad Paco tiene dos opciones,

a) Caminar de Oeste a Este hasta la Calle 6 y

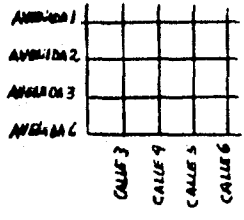
después de Sur a Norte, hasta la Avenida 3.

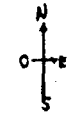
b) Caminar de Sur a Norte hasta la Avenida 3 y después de Oeste a Este hasta la Calle 6.

Sin embargo, puesto que Paco sabe que Luis vive en la Calle 6, es más lógico pensar que toma el primer camino: - buscar primero la Calle 6 y después elegir entre "subir" o -- "bajar", es decir, entre Norte o Sur.

Observarás que para localizar la casa de Luis es preciso caminar primero de Oeste a Este y después en dirección Norte para Paco y Sur para Hugo, en otras palabras después de caminar de izquierda a derecha "cambian" de dirección para bajar o subir, según el caso; situación que no se presenta cuando - localizamos estaciones en el Metro, ya que basta con considerar dirección izquierda->derecha o viceversa. Entonces, para encontrar la casa del tan mencionado Luis es necesario conocer el nombre de dos calles: una que nos sitúe horizontalmente y otra verticalmente.

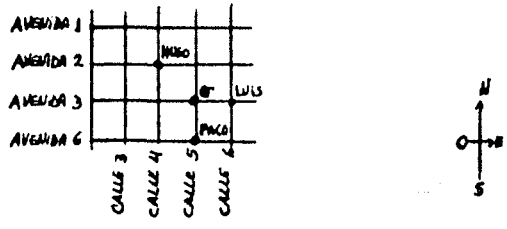
Angostemos avenidas y aceras de tal forma que podamos identificar nuestro croquis original con el siguiente plano:





Observemos que Avenidas y Calles quedan representadas -- por líneas rectas perpendiculares entre sí, que cada manzana tiene forma de un cuadrado y que las casas de Hugo, Paco y - Luis quedan localizadas en el cruce de dos líneas.

Convengamos en considerar como punto de referencia u origen al cruce de Calle 5 y Avenida 3, el cual hemos designado con la letra O en el dibujo:



Además aceptemos que caminar a la derecha o hacia arriba corresponde a hacerlo en sentido positivo, y obviamente, caminar hacia la izquierda o hacia abajo como sentido negativo. - Entonces, podemos ubicar los domicilios de Hugo, Paco y Luis sin necesidad de mencionar el nombre de las calles donde viven, observa:

1. Para llegar a casa de Hugo, saliendo del origen, es necesario caminar una calle a la izquierda y otra hacia arriba, lo cual podemos escribir como: (-1, 1).

2. Para ir a la casa de Paco, a partir del origen, no es necesario caminar calle alguna hacia la derecha o izquierda, basta con bajar una calle, esto lo denotamos como: (0, -1).

3. Por último, para llegar a casa de Luis, partiendo nuevamente desde el origen, únicamente se camina una calle hacia la derecha del mismo, escribimos entonces: (1, 0).

A esta parejas de números, que hemos encerrado entre los paréntesis, las llamamos coordenadas de las casas de Hugo, Paco y Luis, respectivamente. Es de suma importancia el orden en que están dados estos dos números, el primero se refiere a la cantidad de calles que hemos de caminar de izquierda a derecha, o viceversa, a partir del origen; y, el segundo número se refiere a las calles que hemos de caminar hacia arriba (norte) o hacia abajo (sur); en otras palabras, las coordenadas (-1, 1) y (1, -1) son distintas, las primeras nos indican el domicilio de Hugo, las segundas, el cruce de Calle 4 y Avenida 6.

Problema 13. ¿Cuál es el cruce que corresponde a cada una de las coordenadas: (-2, 1), (1, 1), (0, 2) y (-1, -1)?.

Respuesta: (-2, 1) cruce de Calle 3 y Avenida 2, (1, 1) cruce de Calle 6 y Avenida 2, (0, 2) cruce de Calle 5 y Avenida 1 y (-1, -1) cruce de Calle 4 y Avenida 6.

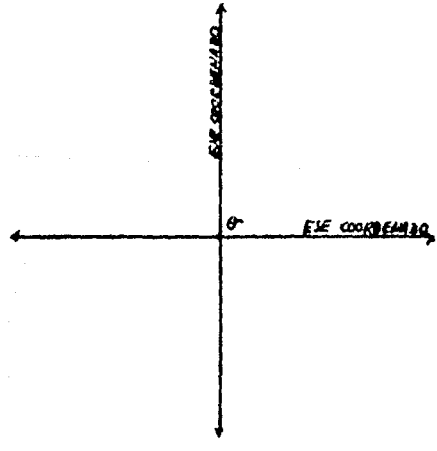
Problema 14. ¿Qué coordenadas corresponden a cada uno de los siguientes cruces o esquinas: Calle 5 y Avenida 1, Calle 3 y Avenida 6 y Calle 5 y Avenida 4?.

Respuesta: (0, 2), (-2, -1) y (0, 0), en ese orden.

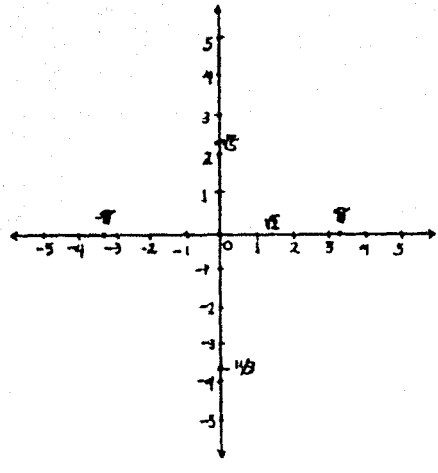
Por supuesto, que una calle tiene solamente un número finito de casas, y cada colonia tiene a su vez un número finito de calles y avenidas, y no muy bien trazadas por cierto; pero, si por un momento, imaginamos una colonia con un número infinito de calles, las cuales a su vez contienen un número infinito de casas, nuestro plano se extendería de tal manera que para cada pareja ordenada de números reales que demos encon--

traremos una "casa", que bien podemos llamar punto; y para cada punto que esté en el plano podemos dar una pareja ordenada de números reales; tal plano fue concebido por primera vez - por René Descartes, de ahí que le demos el nombre de plano - Cartesiano.

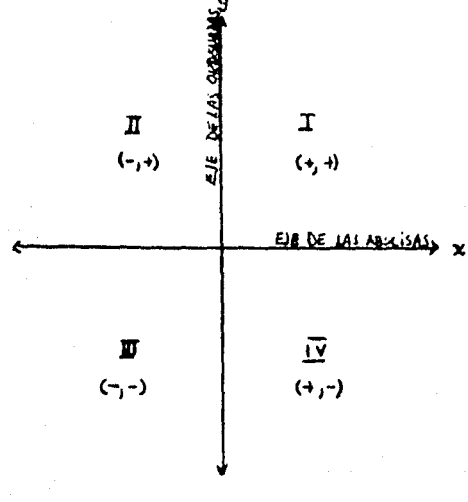
Así, el plano Cartesiano queda conformado por una infinidad de puntos, cada uno, en el cruce de dos líneas perpendiculares. Nuevamente se hace necesario tomar uno de estos puntos como referencia u origen, denotémosle con $\mathcal{O}$, y al par de rectas perpendiculares que se cortan en él llamémoslas ejes coordenados.



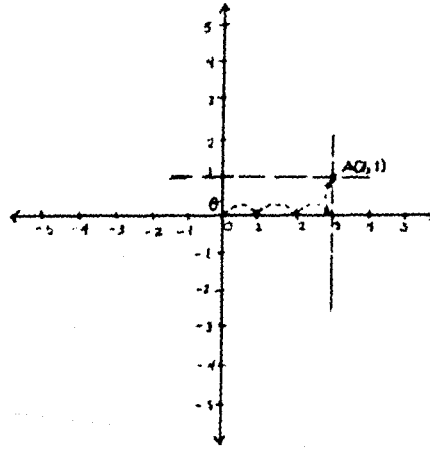
Ambos ejes coordenados son prolongables indefinidamente en los dos sentidos: positivo (hacia arriba y hacia la derecha) y negativo (hacia abajo y hacia la izquierda). Sobre estos - ejes hemos de localizar, como lo hicimos en la sección anterior, a los números reales, he aquí algunos de éstos:



En particular al eje horizontal lo llamamos eje de las abscisas, o eje de las "x"; al eje vertical, el eje de las ordenadas, o eje de las "y". Estos dos ejes delimitan en el plano cuatro zonas llamadas cuadrantes, que se numeran de la siguiente forma:

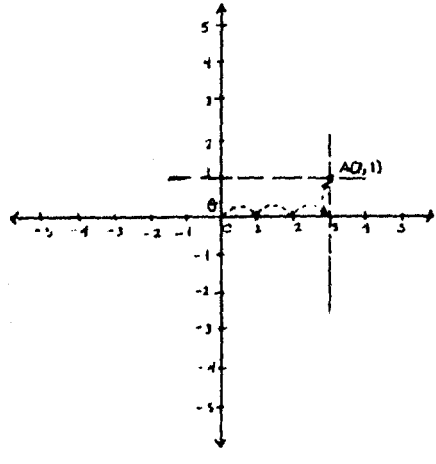


Localicemos la "casa", perdón, el punto A de coordenadas (3, 1). Esta pareja ordenada de números reales indica que, a partir del origen, hemos de caminar sobre el eje de las abscisas tres unidades hacia la derecha, y una más hacia arriba.

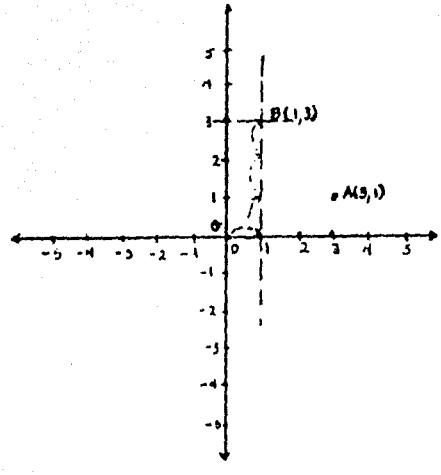


En este caso particular al número tres lo llamamos abscisa del punto A, y al número uno, ordenada del mismo. Ambos indican la distancia y el sentido en que se debe "caminar" para localizar al punto A, a partir de los ejes coordenados. Obseva que el punto A es por completo distinto del punto, que llamaremos B, de coordenadas (1, 3), puesto que para localizar a éste debemos caminar una unidad a la derecha del origen y tres más hacia arriba.

Localicemos la "casa", perdón, el punto A de coordenadas (3, 1). Esta pareja ordenada de números reales indica que, a partir del origen, hemos de caminar sobre el eje de las abscisas tres unidades hacia la derecha, y una más hacia arriba.



En este caso particular al número tres lo llamamos abscisa del punto A, y al número uno, ordenada del mismo. Ambos indican la distancia y el sentido en que se debe "caminar" para localizar al punto A, a partir de los ejes coordenados. Obseva que el punto A es por completo distinto del punto, que llamaremos B, de coordenadas (1, 3), puesto que para localizar a éste debemos caminar una unidad a la derecha del origen y tres más hacia arriba.



Resulta entonces de suma importancia el orden en que está dada la pareja de números reales que determina las coordenadas del punto. En general, decimos que el punto $P(x_p, y_p)$ (3), es distinto del punto $Q(x_Q, y_Q)$, aún cuando éstos solamente tengan intercambiado el orden de sus coordenadas, es decir,

$P(x_p, y_p) \neq Q(x_Q, y_Q)$, aún cuado suceda que,

$x_p = y_Q$ y $y_p = x_Q$.

Y aceptamos que el punto $P(x_p, y_p)$ coincide con el punto $R(x_R, y_R)$, siempre que tengan igual abscisa e igual ordenada, simbólicamente:

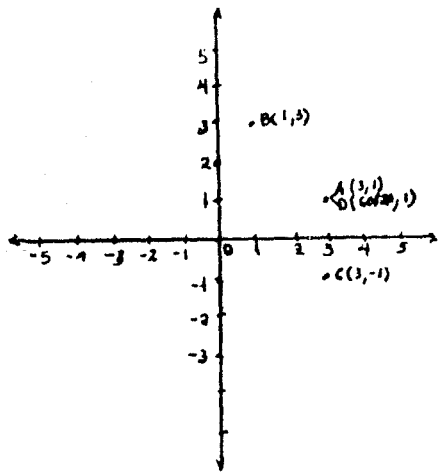
$P(x_p, y_p) = R(x_R, y_R)$, siempre que,

$x_p = x_R$ y $y_p = y_R$.

---

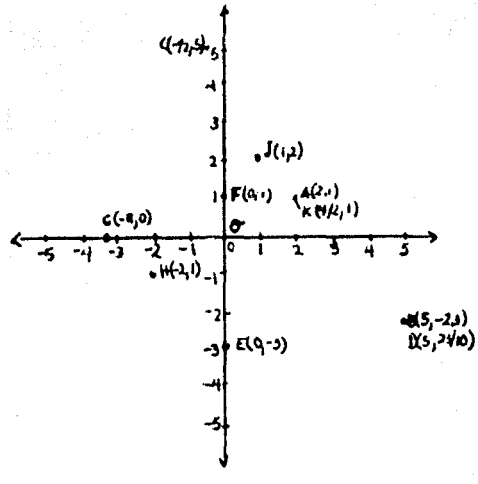
(3) $P(x_p, y_p)$ señala al punto de abscisa x_p y ordenada y_p y debe leerse: "el punto cuyas coordenadas son los números reales equis p coma ye p". O simplemente, "el punto P de coordenadas equis p, ye p".

En nuestro ejemplo, para que A(3, 1) = B(1, 3) es necesario que 3 = 1, lo cual es absurdo, por lo mismo, decimos que A(3, 1) ≠ B(1, 3). El punto C(3, -1) tampoco coincide con el punto A(3, 1), puesto que sus ordenadas son distintas, 1 ≠ -1. Pero el punto D(6/2, 1) si coincide con el punto A(3, 1) puesto que 6/2 = 3 y 1 = 1, es decir, ambos puntos tienen igual abscisa e igual ordenada. Representémoslos en el plano Cartesiano.

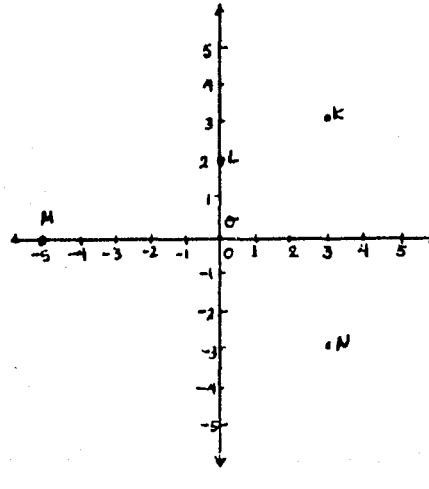


Problema 15. Localizar en el plano Cartesiano los puntos: A(2, 1), B(5, -2.3), C(-1/2, 5), D(5, 23/10), E(0, -3), F(0, 1), G(-π, 0), H(-2, 1), J(1, 2) y K(4/2, 1).

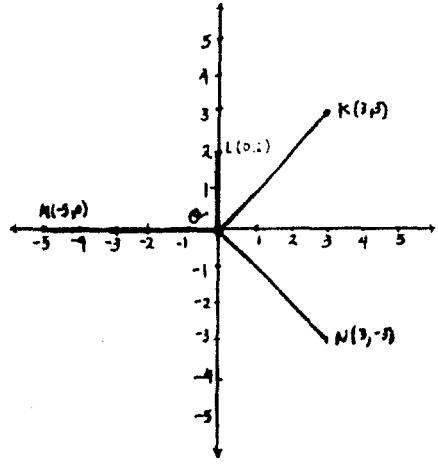
Respuesta: Observamos que los puntos E(0, -3) y F(0, 1) están sobre el eje de las abscisas; el punto G(-π, 0) está sobre el eje de las ordenadas; y se cumple que: A(2, 1) = K(4/2, 1) y B(5, -2.3) = D(5, 23/10). He aquí la gráfica correspondiente:



Problema 16. Determinar las coordenadas de los puntos K, L, M y N, señalados en la siguiente figura. ¿Qué tan - "cercanos" están éstos del origen?



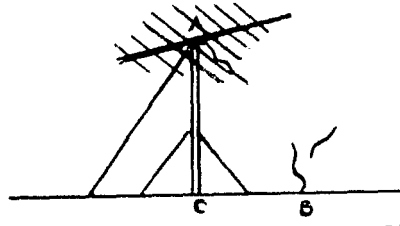
Respuesta: Las coordenadas de los puntos son: - - - K(3, 3), L(0, 2), M(-5, 0) y N(3, -3). Ahora bien, por geometría elemental sabemos que, la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta; por lo mismo, unamos cada uno de estos cuatro puntos con el origen por medio de sendos segmentos:



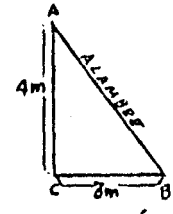
A simple vista, observamos que los segmentos $\overline{OL}$ y $\overline{OM}$ son, respectivamente, los de menor y mayor longitud entonces, decimos que el punto L(0, 2) es el más "cercano" al origen; y el punto M(-5, 0) el más "lejano" al mismo origen. Aún cuando pudiera resultar no tan evidente, los puntos K(3, 3) y N(3, -3) se encuentran a la misma distancia del tan mencionado origen, es decir, $\overline{OK} = \overline{ON}$. Sin embargo, es posible calcular la distancia entre un par de puntos en el plano Cartesiano en base a sus coordenadas; observemos el desarrollo del siguiente problema.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Problema 17. Uno de los alambres, que sotienen la - antena del televisor de César, ha sido destruído y es imposible medir directamente su longitud:



Sabiendo que el poste mide cuatro metros, César efectúa una - medición y dibuja el siguiente croquis:



Entonces, decide comprar un poco más de cinco metros de alambre, para unir los puntos A y B. ¿Es correcta la decisión que ha tomado César?.

Respuesta: Evidentemente, el croquis muestra un triángulo rectángulo, al aplicar el Teorema de Pitágoras obtenemos que,

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2}, \text{ o lo que es lo mismo,}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{16 + 9}, \text{ es decir,}$$

$$\overline{AB} = 5,$$

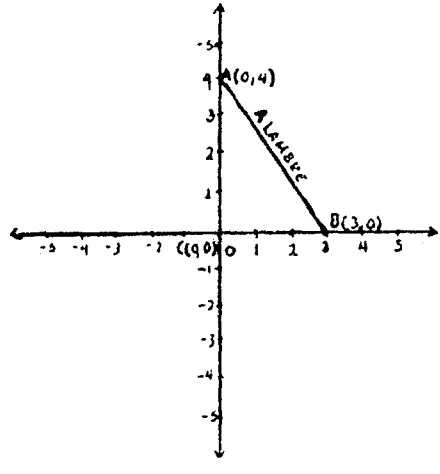
entonces, César ha actuado correctamente, puesto que la distancia entre los puntos A y B es de cinco metros y él necesita - un poco más para fijar el alambre.

Llevemos este problema al plano Cartesiano (4), para esto necesitamos elegir tres puntos: $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ y $C(x_C, y_C)$; de tal manera que,

1). Sean los vértices de un triángulo rectángulo y

2). La $d(C, B) = 3$ y la $d(C, A) = 4$.

Tomemos $x_A = 0$, $y_A = 4$, $x_B = 3$, $y_B = 0$, $x_C = 0$ y $y_C = 0$, es decir, A(0, 4), B(3, 0) y C(0, 0); para mayor claridad, localicémoslos en el plano:



Es obvio que los puntos A, B y C así elegidos, son los vertices de un triángulo rectángulo, pues en C se cortan perpendicularmente los ejes coordenados (el punto C no es otro que el mismo origen). Verifiquemos que la $d(C, B) = 3$ y que la $d(C, A) = 4$; dado que los puntos C(0, 0) y B(3, 0) están sobre el eje de las abscisas, obtenemos la d(C, B) aplicando la fórmula de la distancia sobre la recta real:

---

(4) Al plano Cartesiano, se le dan entre otros nombres, los de: Sistema Coordenado Rectángular, Plano XY o simplemente, plano. En adelante nos referiremos a él con el nombre de plano.

$d(C, B) = |x_C - x_B|$, de donde,

$d(C, B) = |0 - 3|$

$d(C, B) = 3$;

de igual forma como C(0, 0) y A(0, 4) están sobre el eje de las ordenadas tnemos que,

$d(C, A) = |y_C - y_A|$, o bien,

$d(C, A) = |0 - 4|$

$d(C, A) = 4$.

Nos resta únicamente comprobar que la $d(A, B) = 5$, al igual que César, debemos aplicar el Teorema de Pitágoras:

$d(A, B) = \sqrt{d(C, B)^2 + d(C, A)^2}$, que es lo mismo a,

$d(A, B) = \sqrt{|x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2}$ (5)

$d(A, B) = \sqrt{3^2 + 4^2}$

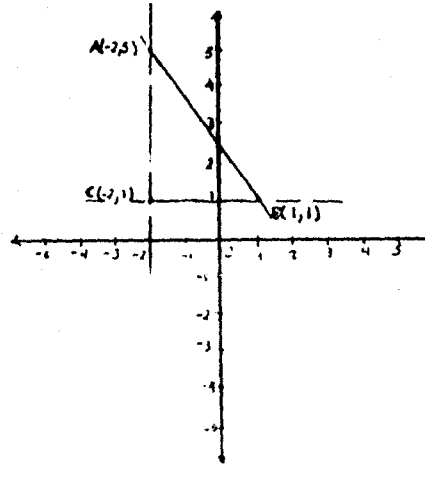
$d(A, B) = \sqrt{9 + 16}$

$d(A, B) = 5$.

Los valores que hemos elegido para las coordenadas de los puntos A, B y C no son los únicos que cumplen con las condiciones de este problema, he aquí otros tres puntos de coordenadas distintas que lo verifican: A(-2, 5), B(1, 1) y C(-2, 1). Localicémoslos en el plano y comprobemos que la $d(A, B) = 5$.

---

(5) Notemos que el valor absoluto sale sobrando si elevamos al cuadrado los valores, por lo mismo, en ejercicios posteriores suprimiremos las barras de valor absoluto, y en su lugar escribiremos paréntesis.



Observamos que los puntos C(-2, 1) y A(-2, 5) tienen la misma abscisa y se encuentran en una recta paralela al eje de las - "x" (verifícalo usando tus escuadras); entonces, al aplicar - la fórmula para la distancia en la recta real, tomamos en consideración únicamente, las ordenadas de estos puntos, es de-- cir,

$$d(C, A) = |y_C - y_A| = |1 - 5| = |-4| = 4.$$

Y como los puntos C(-2, 1) y B(1, 1) están sobre una recta paralela al eje de las "y", aplicamos nuestros cálculos a los - valores de las abscisas:

$$d(C, B) = |x_C - x_B| = |-2 - 1| = |-3| = 3.$$

Es claro que el ángulo con vértice en C(-2, 1) es recto, por lo que,

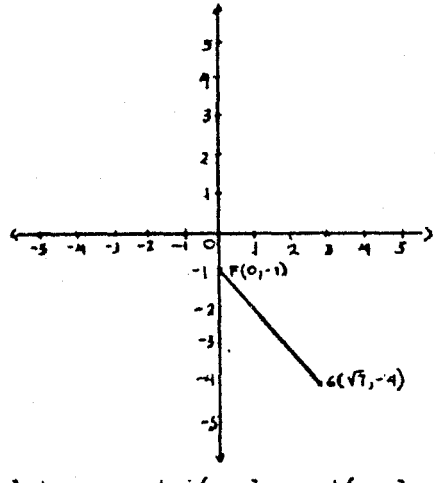
$$d(A, B) = \sqrt{d(C, B)^2 + d(C, A)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

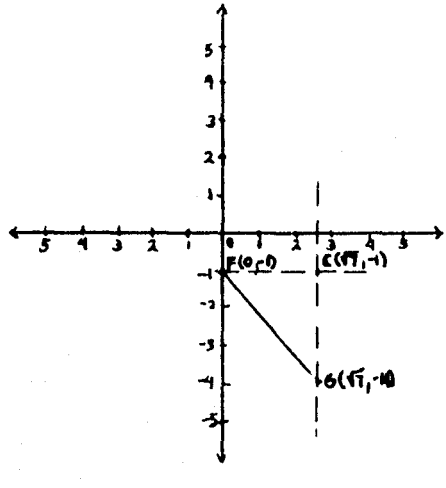
$$d(A, B) = 5.$$

Problema 18. ¿Cuál es la distancia entre los puntos $F(0, -1)$ y $G(\sqrt{7}, -4)$?.

Respuesta: Primeramente los localizamos en el plano.



Después completamos un triángulo rectángulo trazando una recta paralela al eje de las ordenadas que pase por el punto $G(\sqrt{7}, -4)$ y otra paralela al eje de las abscisas que pase por el punto $F(0, -1)$. Al punto donde se cortan estas rectas lo llamamos C.



Observamos que el punto C tiene igual abscisa que el punto G($\sqrt{7}$, -4) e igual ordenada que F(0, -1), es decir, C($\sqrt{7}$, -1). Calculamos las distancias requeridas:

$$d(C, F) = |x_C - x_F| = |\sqrt{7} - 0| = \sqrt{7},$$

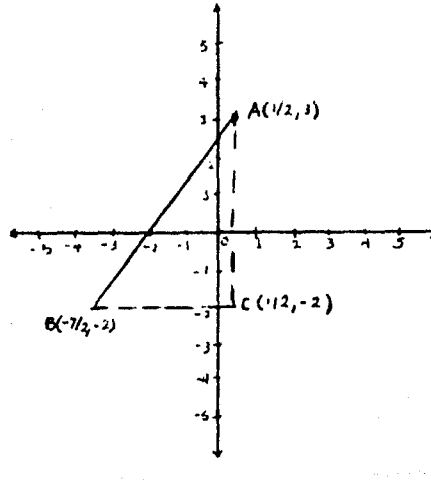
$$d(C, G) = |y_C - y_G| = |-1 - (-4)| = 3,$$

y por lo mismo, la distancia que buscamos es:

$$d(F, G) = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + 3^2} = 4.$$

Problema 19. Encontrar la distancia entre los puntos A(1/2, 3) y B(-7/2, -2).

Respuesta: Localizamos ambos puntos en el plano y, como en el problema anterior, trazamos las rectas paralelas a los ejes que pasen por éstos, para encontrar un tercer punto C, de manera que A(1/2, 3), B(-7/2, -2) y C(1/2, -2) son los vértices de un triángulo rectángulo.



Efectivamente, C(1/2, -2) tiene la misma abscisa que el punto A(1/2, 3) y la misma ordenada que B(-7/2, -2), es decir,

$x_C = x_A$ y $y_C = y_B$, puesto que,

$1/2 = 1/2$ y $-2 = -2$.

Entonces, podemos hacer las siguientes sustituciones:

$$d(C, B) = |x_C - x_B| = |x_A - x_B|$$

$$d(C, A) = |y_C - y_A| = |y_B - y_A| = |y_A - y_B|$$

y prescindir de las coordenadas del punto C(1/2, -2), para -- trabajar únicamente con las coordenadas de los puntos en cuestión, A(1/2, 3) y B(-7/2, -2) y obtener:

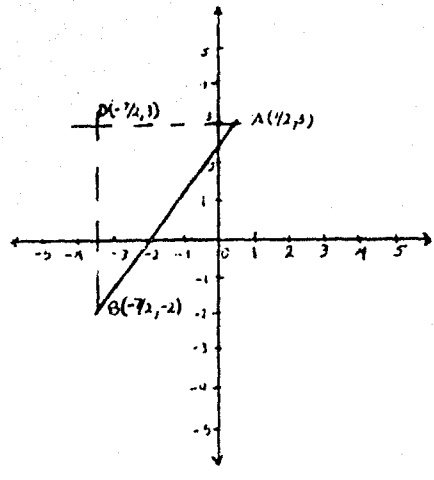
$$d(A, B) = \sqrt{|x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(-7/2 - 1/2)^2 + (-2 - 3)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{41}.$$

Observa que el punto D(-7/2, 3) también se encuentra en el -- cruce de dos rectas paralelas a los ejes coordenados que pa-- san por los puntos A(1/2, 3) y B(-7/2, -2), solamente se in-- vierte el orden: si antes, pasamos la paralela al eje de las abscisas por el punto B, ahora la pasamos por el puntoB, y la paralela al eje de las ordenadas, primero pasó por A y ahora pasa por B, he aquí la figura correspondiente:



Este punto D(-7/2, 3) sirve, al igual que C(1/2, -2), a nuestros propósitos, puesto que,

$$x_D = x_B \quad y \quad y_D = y_A,$$

sustituyendo tenemos,

$$d(D, A) = |x_D - x_A| = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$$

$$d(D, B) = |y_D - y_A| = |y_A - y_B|$$

y, obviamente,

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{41}.$$

Entonces, en la práctica, no es necesario encontrar a los puntos C(1/2, -2) o D(-7/2, 3), puesto que nos basta con trabajar con las coordenadas de los puntos A(1/2, 3) y B(-7/2, -2).

En resumen, la distancia entre los puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ es:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

EJERCICIO.

En cada uno de los siguientes incisos, dibujar la figura co-- rrespondiente.

a) Determinar la distancia entre los puntos A(5, 2) y B(0, -1).

b) Obtener el perímetro del triángulo cuyos vértices son los puntos: A(3, 2), B(5, 1) y C(-2, 3).

c) Mostrar que el triángulo cuyos vértices son: A(1, -1), - B(-2, 6) y C(-5, -1), es un triángulo isósceles.

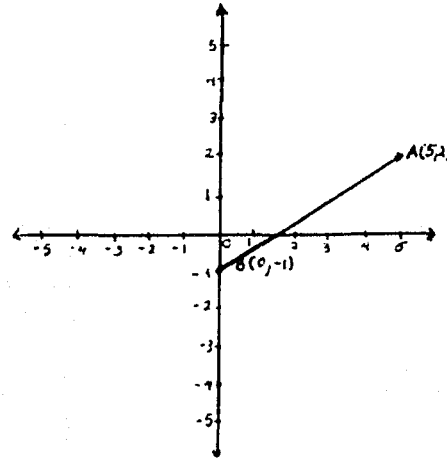
d) El cuadrilátero cuyos vértices son: A(0, 0), B(0, 3), - C(3, 0) y D(3, 4), ¿es un cuadrado?.

e) Obtener el área del trapecio cuyos vértices son: A(-1, 2), B(-1, 5), C(2, 5) y D(3, 2).

SOLUCION.

a) $d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

$d(A, B) = \sqrt{34}.$

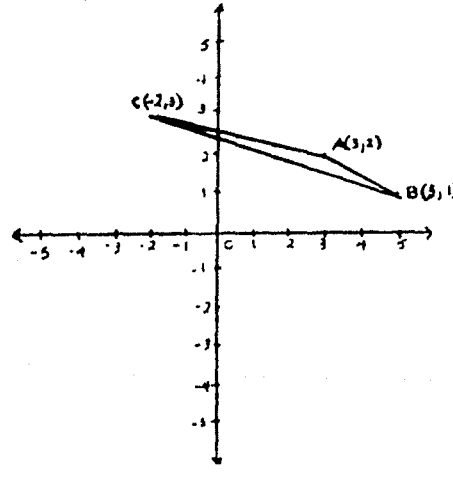


b) $d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{5}$,

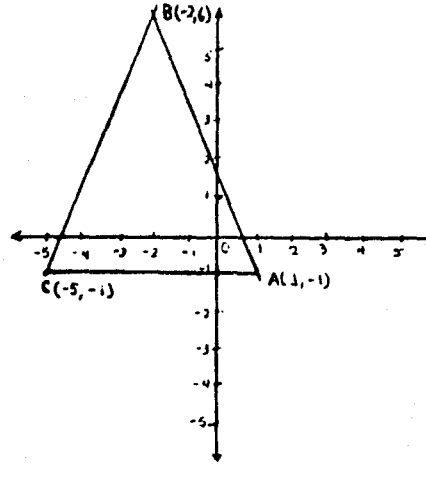
$d(B, C) = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{53}$ y

$d(C, A) = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{26}$, por lo mismo,

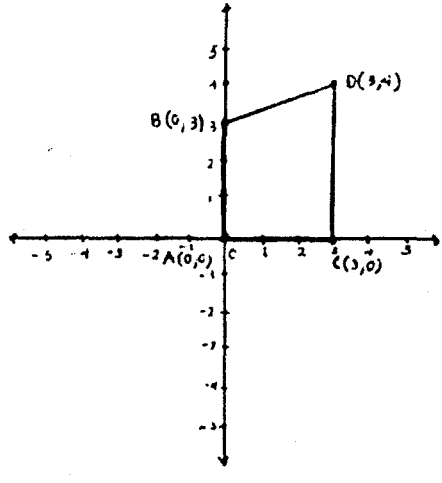
el perímetro $P = \sqrt{5} + \sqrt{53} + \sqrt{26}$.



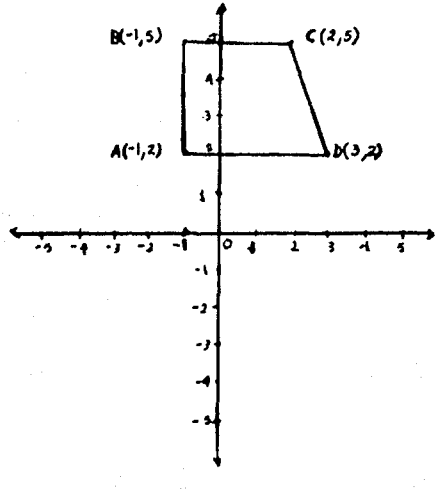
c) Efectivamente, el ΔABC es un triángulo isósceles, puesto que, $d(C, B) = \sqrt{58}$ y $d(B, A) = \sqrt{58}$.



d) El cuadrilátero no es un cuadrado, puesto que aún cuando sucede que, d(B, A) = d(A, C) = 3, se tiene que d(C, D) = 4.



e) d(B, C) = 3 (base menor), d(A, D) = 4 (base mayor) y - - - d(B, A) = 3 (altura). Por lo que el área A =3(3 + 4)/2 = 21/2 de unidades cuadradas.

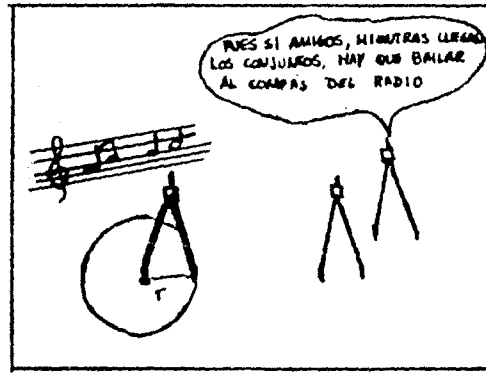


CAPITULO III.

LOS CONJUNTOS.

A. QUE ENTENDEMOS POR CONJUNTO.

(1)

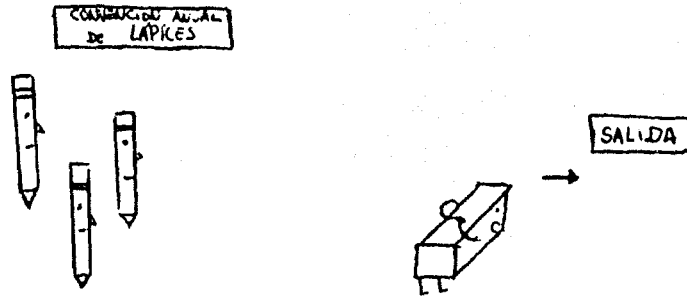


Una goma no estaría invitada.

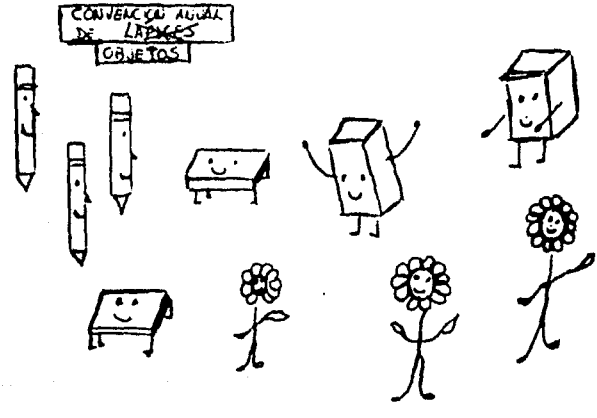
Intuitivamente, somos capaces de distinguir entre uno y varios objetos, lo cual nos conduce a las ideas primitivas de unidad y conjunto. Así, al referirnos a un conjunto de lápices estaremos ciertos de que se trata de una colección, agrupación, reunión, etc., de lápices, es decir, estamos ante varios lápices, pero solamente lápices, una goma no estaría invitada a la reunión, no estaría en el conjunto.

---

(1) ARAGON, op. cit., Pág. 141.



En matemáticas esta primera idea de conjunto, dada como una colección de objetos con una característica común (en nuestro ejemplo la característica es: ser lápiz), resultó un tanto estrecha conforme se avanzaba en el estudio de la propia naturaleza, de manera que fue necesario, aceptar como conjunto a toda colección de objetos, siempre que sea posible precisar, con toda seguridad, que objetos pertenecen o no al conjunto; de tal manera, que podemos hablar de un conjunto formado por lápices, gomas, margaritas y mesas.



El conjunto formado por los días de la semana determina la lista: lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado y domingo. Frecuentemente, empleamos letras mayúsculas para designar conjuntos y, en lugar de escribir las palabras: es el conjunto formado por, anotamos los símbolos: = { }; escribiendo dentro de las llaves la lista de los objetos que formen el conjunto en cuestión, presciendiendo de los artículos y separándolos por una coma. Así, si tomamos la letra A para el conjunto formado por los días de la semana, éste queda descrito como:

$$A = \{ \text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo} \}.$$

Como el lunes es un día de la semana, decimos que el lunes es un elemento del conjunto A, y lo denotamos como:

$$\text{lunes} \in A ;$$

y para especificar que el mes de marzo no es un elemento del conjunto A, empleamos los símbolos:

$$\text{marzo} \notin A.$$

Otros ejemplos de conjuntos son:

$$B = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

$$C = \{ a, e, i, o, u \}$$

$$D = \{ 5, 10, 15, 20, 25, \ldots \}$$

Es claro que el conjunto B está formado por los números dígitos, el conjunto C tiene por elementos a las vocales y el conjunto D contiene a los múltiplos positivos de cinco.

Decimos que los conjuntos A, B y C son finitos, puesto - que, el proceso de contar sus elementos termina; es claro que el conjunto A contiene siete elementos, el conjunto B tiene - diez y el conjunto C, cinco elementos. Esto no sucede para el conjunto D, es imposible terminar de contar sus elementos, ya que por muy grande que sea un múltiplo de cinco, siempre en-- contramos otro agregando cinco unidades, es decir, si x es un múltiplo de cinco, y = x + 5, también lo es. Por esto mismo, decimos que D es un conjunto infinito y los tres puntos que - utilizamos al lister sus elementos, D = { 5, 10, 15, 20, 25,...} deben leerse:"y así sucesivamente". Sin embargo, éste es tan so lo un ejemplo, quizá de los más sencillos, de conjunto infini to. En general, decimos que un conjunto infinito es aquel que no tiene fin. Otros ejemplos de conjuntos infinitos los ten-- dremos en la siguiente sección.

Otro tipo de notación que resulta un tanto más cómoda pa ra describir estos conjuntos es:

$A = \{ x \mid x \text{ es día de la semana} \}$

$B = \{ x \mid x \text{ es número dígito} \}$

$C = \{ x \mid x \text{ es vocal} \}$

$D = \{ x \mid x \text{ es múltiplo de cinco mayor que cero} \}$

donde el símbolo | se leé:"tales que". Específicamente, para el conjunto B leemos:"B es el conjunto formado por todas las - equis tales que equis es un número dígito".

Problema 1. Determinar si los conjuntos F, G, H y J son finitos o infinitos, donde,

$F = \{ x \mid x \text{ es un número entero mayor que } 3 \}$

$G = \{ x \mid x \text{ es un número entero mayor que } 5/4 \text{ y menor que } 7/3 \}$

$H = \{ x \mid x$ es un número entero mayor que 6 y menor que 7 $\}$

$J = \{ x \mid x$ es entero mayor que 5 y menor que 10 $\}$

Respuesta: El conjunto F es infinito y los conjuntos G, H y J son finitos. Merecen especial atención los conjuntos G y H, puesto que G contiene un solo elemento: el número dos; y H no contiene elementos. Entonces, es necesario llegar a una nueva convención: aún cuando conjunto provoca la idea intuitiva de "varios", aceptamos la existencia de conjuntos con un solo elmento y conjuntos sin elementos. En el primer caso los llamamos conjuntos unitarios, en el segundo, conjuntos vacíos. El conjunto G es un conjunto unitario y H un conjunto vacío, simbólicamente,

$G = \{2\}$ y $H = \emptyset$.

Observamos además que todos los elementos del conjunto J pertenecen también al conjunto F, entonces decimos que el conjunto J es un subconjunto del conjunto F y lo simbolizamos como: $J \subset F$. Otro ejemplo es,

$A = \{ \bigstar, \bullet \}$ y $B = \{ \blacktriangle, \bullet, \blacksquare, \bigstar, \blacklozenge \}$

Obviamente, $\bigstar \in A$ y $\bigstar \in B$; $\bullet \in A$ y $\bullet \in B$, entonces $A \subset B$.

Ahora, es posible, que todos los elementos de un conjunto A pertenezcan a un conjunto B y, que también, todos los elementos del conjunto B pertenezcan al conjunto A, entonces decimos que los conjuntos A y B son iguales. Esto es, si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces, $A = B$. Ejemplo,

$A = \{ \blacktriangle, \blacktriangle, / \}$ y $B = \{ /, \blacktriangle, \blacktriangle \}$,

donde es claro que, $A \subset B$, $B \subset A$ y $A = B$.

Cuando dos conjuntos A y B tienen elementos en común, decimos que se intersectan; y con los elementos que están

en ambos conjuntos formamos un tercero llamado: conjunto intersección de A y B, y lo simbolizamos como $A \cap B$. Ejemplo,

$A = \{$, , , $\}$ y $B = \{$, , , $\}$

y como $\in A$ y $\in B$; $\in A$ y $\in B$ entonces, $A \cap B = \{$, $\}$

Nótese que la intersección de A y B es un subconjunto tanto de A como de B, esto es, $(A \cap B) \subset A$ y $(A \cap B) \subset B$.

La unión de los conjuntos A y B, es un conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B; y lo simbolizamos como $A \cup B$. Ejemplo,

$A = \{$, , , , $\}$ y $B = \{$, , , $\}$

$A \cup B = \{$, , , , , , $\}$

Obviamente, $A \subset (A \cup B)$ y $B \subset (A \cup B)$

EJERCICIO.

Dados los conjuntos:

$A = \{10, -1, 0, 1\}$

$B = \{1, 2, -1, -2, 0\}$

$C = \{x \mid x$ es múltiplo de 10, mayor que 9 y menor que $15\}$

$D = \{0, -1, -2, -3, -4, \ldots\}$

$F = \{-1, 0, 1\}$

$G = \{1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots\}$

$H = \{x \mid x$ es entero mayor que $1/2$ y menor que $3/4\}$

$J = \{2, 4, 6, \ldots\}$

$K = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Cuáles de estos conjuntos son finitos?.

b) ¿Cuáles de estos conjuntos son infinitos?.

c) ¿Contiene el conjunto G un elemento que sea menor que todos sus demás elementos?.

d) ¿Hay en el conjunto D algún elemento que sea mayor que todos los demás?, ¿uno que sea menor que todos?.

e) ¿Qué sucede con los elementos de los conjuntos F y K?.

f) ¿Qué sucede con los elementos de los conjuntos B y D?.

g) ¿Y de los elementos de los conjuntos B y K que podemos decir?.

h) ¿Los elementos de los conjuntos C y F tiene alguna relación con los del conjunto A?.

i) ¿Los conjuntos A y G tienen algún elemento en común?.

SOLUCION.

a) Conjuntos finitos: A, B, C, F, H y K. En particular C es un conjunto unitario y el conjunto H es vacío.

b) Infinitos: D, G y J.

c) Conforme crece el denominador la fracción se hace cada vez más pequeña, se acerca a cero, sin embargo, $0 \notin G$.

d) El cero es mayor que todos los números enteros negativos y $0 \in D$. Pero no hay ningún entero que sea menor que todos los demás ya que: $0 > -1 > -2 > -3 > -4 > -5 > -6 > \ldots$, donde el signo $>$ debe leerse: mayor que.

e) Todos los elementos del conjunto F son elementos del conjunto K, pero no todos los elementos del conjunto K lo son de F, por ejemplo, $-2 \in K$ pero $-2 \notin F$; entonces, decimos que F es un subconjunto del conjunto K, simbólicamente, $F \subset K$.

f) Algunos elementos pertenecen a ambos conjuntos: $0 \in B$ y $0 \in D$, $-1 \in B$ y $-1 \in D$, $-2 \in B$ y $-2 \in D$. Con estos tres elementos formamos un nuevo conjunto $M = \{ 0, -1, -2 \}$, al cual llamamos: conjunto intersección de los conjuntos B y D. Simbólicamente, $M = B \cap D$, donde obviamente, $M \subset B$ y $M \subset D$.

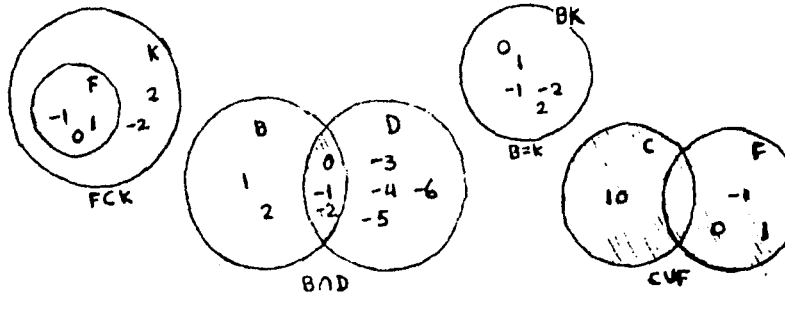
g) Todos los elementos del conjunto B también pertenecen al conjunto K y, recíprocamente, todos los elementos del conjunto K también lo son de B, es decir, se cumple que $B \subset K$ y $K \subset B$. Entonces, los conjuntos B y K son iguales. Simbólicamente, $B = K$.

h) Todos los elementos de los conjuntos C y F pertenecen también al conjunto A, es decir, todos los elementos del conjunto A están en el conjunto C o en el conjunto F, por lo que A recibe el nombre de: conjunto unión de los conjuntos C y F. Simbólicamente, $A = C \cup F$, donde $C \subset A$ y $F \subset A$. (2)

i) Los conjuntos A y G no tienen elementos en común, es decir, $A \cap G = \emptyset$, por lo que reciben el nombre de conjuntos ajenos.

---

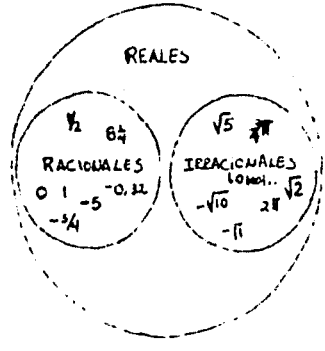
(2) En 1880 el inglés John Venn desarrolla la idea de representar gráficamente a los conjuntos por medio de círculos, estas representaciones han llegado hasta nuestros días con el nombre de diagramas de Venn. Situaciones como las de las preguntas e, f, g y h son representables de la siguiente manera:



B. ALGUNOS CONJUNTOS DE PUNTOS EN LA RECTA REAL.

Conjuntos, pero de reales.

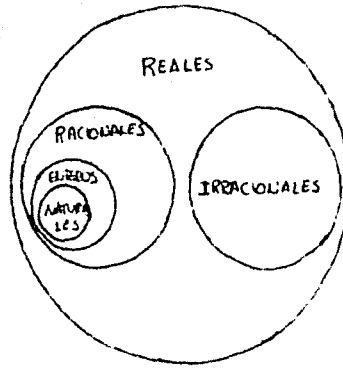
Sabemos que un número real o es un número racional, o es un número irracional, pero no ambas cosas a la vez. (3) Entonces, si aceptamos que todos los números reales forman un conjunto infinito, éste debe contener, al menos, a dos subconjuntos ajenos e infinitos: el conjunto de los números irracionales y el conjunto de los números racionales.



Dentro del conjunto de los números racionales tenemos al conjunto, infinito también, de los números enteros y dentro de este último al conjunto infinito de los números naturales.

---

(3) Revisa el capítulo I.



Acostumbramos denotar al conjunto de los números reales con la letra $\mathbb{R}$, al conjunto de los racionales con una Q, al - de los enteros con Z, a los naturales con $\mathbb{N}$ y a los irracionales con $\mathbb{I}$. Por lo que,

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots \}$$

$$Z = \{ \ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

$$Q = \{ x \mid x = a/b,\ a \in Z,\ b \in Z,\ b \neq 0 \}$$

$$\mathbb{I} = \{ x \mid x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ x \notin Q \}$$

y, obviamente,

$$\mathbb{R} = Q \cup \mathbb{I} \qquad \text{y} \qquad Q \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

$$\mathbb{N} \subset Z \subset Q \subset \mathbb{R}$$

Sin embargo, los conjuntos $\mathbb{N}$, Z, Q e $\mathbb{I}$ no son los únicos subconjuntos infinitos del conjunto de los números reales, tenemos muchos otros, tal es el caso de los intervalos; ejemplos de intervalos son los tres siguientes conjuntos:

$$A = \{ x \mid x \text{ es un número real mayor que cero y menor que dos} \}$$

$B = \{ x \mid x$ es un número real mayor o igual que -5 y menor o igual que $1/2 \}$

$C = \{ x \mid x$ es un número real mayor que -3 y menor o igual que $0 \}$

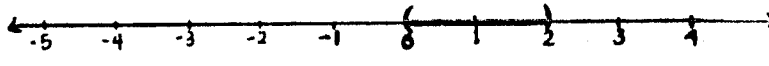
que denotamos en forma más simplicada como:

$$A = \{ x \mid 0 < x < 2 , x \in \mathbb{R} \}$$

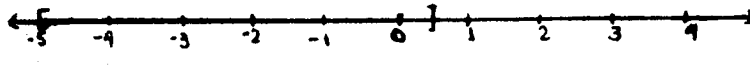
$$B = \{ x \mid -5 \leq x \leq 1/2, x \in \mathbb{R} \}$$

$$C = \{ x \mid -3 < x \leq 0, x \in \mathbb{R} \} \quad (4)$$

Estos conjuntos son graficables en la recta real por medio de segmentos. El conjunto A queda como:

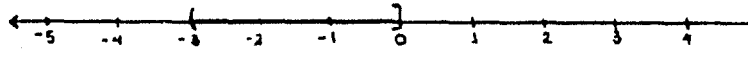


donde se observa que en los puntos correspondientes al cero y al dos se han dibujado las marcas: (); éstas indican que $0 \notin A$ y $2 \notin A$. El cero y el dos reciben el nombre de extremo izquierdo y extremo derecho, respectivamente, del intervalo. El conjunto B queda graficado por:



y las marcas: [ ] , indican que los extremos del intervalo si - pertenecen al conjunto B, es decir, $-5 \in B$ y $1/2 \in B$. Por último al conjunto C lo representamos :

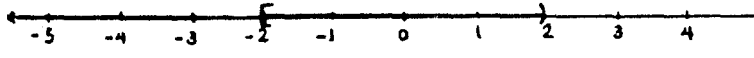
(4) Los signos $>$ y $\geq$ deben leerse: mayor y mayor o igual, respectivamente. Y los signos $<$ y $\leq$ como: menor y menor o igual, respectivamente.



donde, es claro que, $-3 \notin C$ y $0 \in C$.

Problema 2. Graficar en la recta real los conjuntos $F = \{ x \mid -2 \leq x < 2, x \in \mathbb{R} \}$ y $G = \{ x \mid 0 < x < 3, x \in \mathbb{R} \}$

Respuesta: Para el conjunto F se tiene:

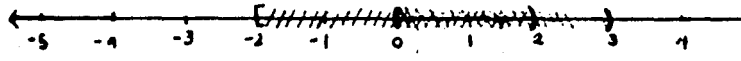


nótese que $-2 \in F$ y $2 \notin F$. Y el conjunto G queda:

Problema 3. Encontrar los conjuntos $F \cap G$ y $F \cup G$.

Respuesta: $F \cap G$ queda determinado por todos elementos que pertenecen al conjunto F y al conjunto G, por lo que,

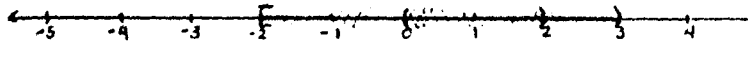
$F \cap G = \{ x \mid 0 < x < 2, x \in \mathbb{R} \}$, gráficamente,



donde se han dibujado diagonales en sentidos opuestos para representar a ambos conjuntos, con el fin de que el conjunto $F \cap G$ quede doblemente rayado. Para el conjunto unión se toman en consideración a los elementos que pertenecen al conjunto F o al conjunto G, esto es,

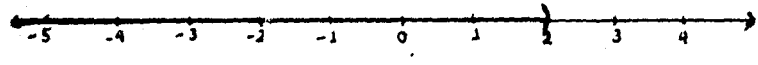
$$F \cup G = \{\, x \mid -2 \leq x < 3,\ x \in \mathbb{R} \,\}$$

y queda representado en la recta real considerando todo lo rayado en la siguiente figura:

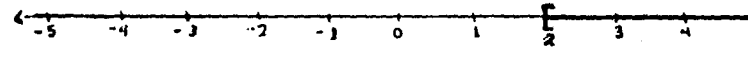


Problema 4. Encontrar los conjuntos $H \cap J$ y $H \cup J$, donde $H = \{\, x \mid x < 2,\ x \in \mathbb{R} \,\}$ y $J = \{\, x \mid x \geq 2,\ x \in \mathbb{R} \,\}$.

Respuesta: El conjunto H queda graficado por:

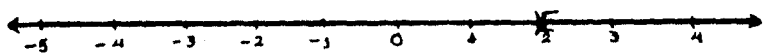


y el conjunto J por:



Como $2 \notin H$, aún cuando, $2 \in J$, se tiene que $H \cap J = \emptyset$. Y puesto que, para el conjunto unión se consideran a todos los elementos que están en el conjunto H o en el conjunto J, se - -

observa que $H \cup J = \mathbb{R}$.



EJERCICIO.

Dados los conjuntos:

$A = \{ x \mid 1 \leq x \leq 2,\ x \in \mathbb{R} \}$

$B = \{ x \mid x \leq \sqrt{5},\ x \in \mathbb{R} \}$

$C = \{ x \mid x \leq \sqrt{5},\ x \in \mathbb{N} \}$

$D = \{ x \mid -4 < x < 4,\ x \in \mathbb{R} \}$

$E = \{ x \mid -4 < x < 4,\ x \in \mathbb{Z} \}$

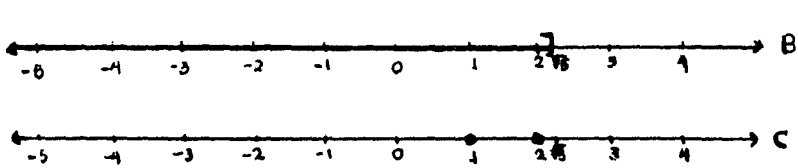
a) ¿Se verifican las igualdades: $B = C$ y $D = E$?.

b) Encontrar y graficar los conjuntos: $A \cup B$, $B \cup C$, $C \cup D$, $D \cup E$ y $A \cup E$.

c) Encontrar y graficar los conjuntos: $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap D$, $D \cap E$ y $A \cap E$.

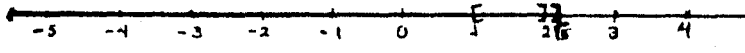
SOLUCION.

a) No, en ninguno de los dos casos. $B \neq C$ puesto que el conjunto B contiene a todos los números reales menores o iguales que $\sqrt{5}$, y C contiene solamente números naturales menores o iguales que $\sqrt{5}$. De hecho, $C \subset B$ y sus gráficas son:

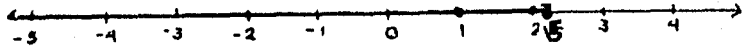


En forma análoga, $D \neq E$.

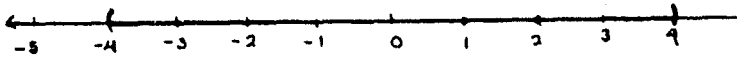
b) $A \cup B = B$, gráficamente,



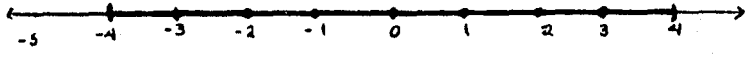
$B \cup C = B$, gráficamente,



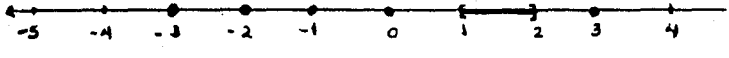
$C \cup D = D$, gráficamente,



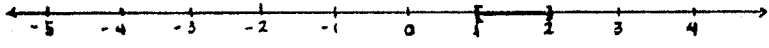
$D \cup E = D$, gráficamente,



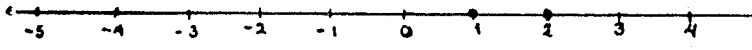
$A \cup E = A \cup \{-3, -2, -1, 0, 3\}$, gráficamente.



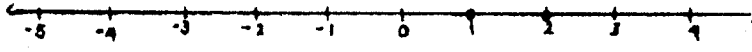
c) $A \cap B = A$, gráficamente,



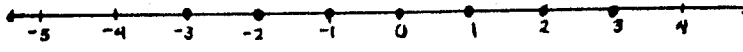
$B \cap C = C$, gráficamente,



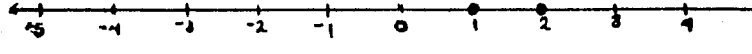
$C \cap D = C$, gráficamente,



$D \cap E = E$, gráficamente,



$A \cap E = \{1, 2\}$



C. ALGUNOS CONJUNTOS DE PUNTOS EN EL PLANO CARTESIANO.

Parejas, pero ordenadas.

Recordemos que todo punto en el plano cartesiano queda - determinado por una pareja ordenada de números reales, la cual representamos en forma general como: (x, y). En esta sección - se presentan conjuntos de puntos en el plano que poseen alguna característica especial, dichos conjuntos se denotan de la siguiente manera:

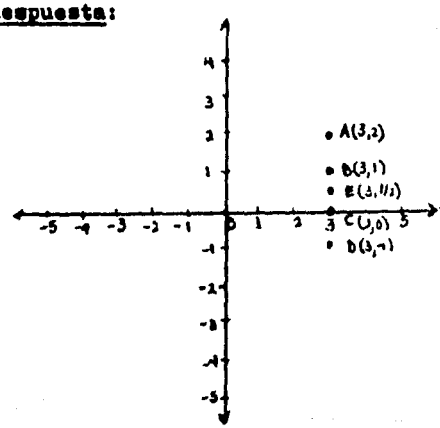
$$L = \{ (x, y) \mid \text{"característica"} \}$$

que obviamente, leemos como: "L es el conjunto de puntos en el plano tales que poseén tal característica", o bien, "L es el - conjunto de parejas que cumplen con la característica...".

Problema 5.

a) Localizar en el plano los puntos: A(3, 2), B(3,1), C(3, 0), D(3, -1) y E(3, 1/2).

Respuesta:

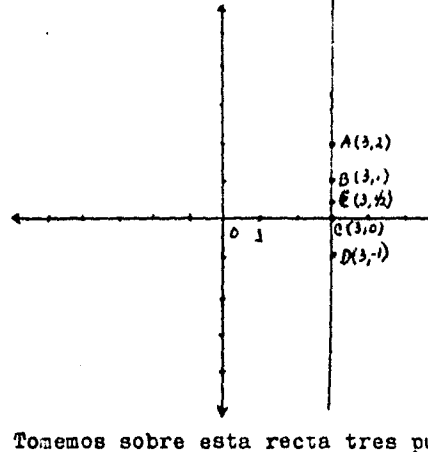


b) ¿Qué tienen en común los cinco puntos?.

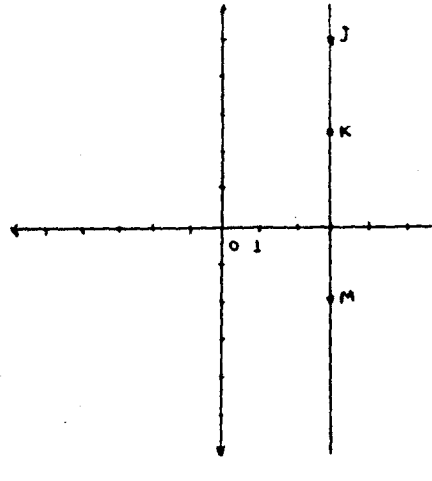
Respuesta: Tienen igual abscisa, es decir, x = 3.

c) ¿Qué sucede si trazamos la línea recta que pasa por los puntos A(3, 2) y D(3, -1)?.

Respuesta: Esta línea pasa por los puntos B(3, 1), C(3, 0) y E(3, 1/2). He aquí la figura correspondiente:



d) Tomemos sobre esta recta tres puntos más: J, K y M. De acuerdo con la siguiente figura, determina sus coordenadas.



Respuesta: J(3, 5), K(3, 5/2) y M(3, -2).

e) Observamos que los puntos J(3, 5), K(3, 5/2) y M(3, -2) presentan la misma abscisa x = 3; entonces, ¿cuál debe ser la abscisa de todos los puntos que están sobre esta recta?.

Respuesta: El número tres.

En general si llamamos L_1 al conjunto de todos los puntos que pertenecen a la recta en cuestión, podemos concluir que

$$L_1 = \{ (x, y) \mid x = 3, y \in \mathbb{R} \}$$

es decir, para que un punto (x, y) esté en la recta es necesario que tenga como abscisa al número tres y como ordenada a cualquier número real.

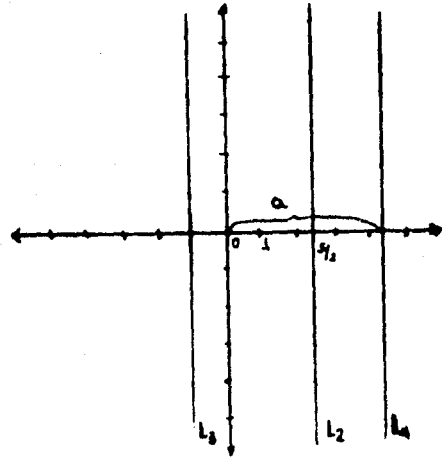
f) Localicemos los siguientes conjuntos en el plano cartesiano:

$L_2 = \{ (x, y) \mid x = 5/2, y \in \mathbb{R} \}$

$L_3 = \{ (x, y) \mid x = -1, y \in \mathbb{R} \}$

$L_4 = \{ (x, y) \mid x = a, y \in \mathbb{R} \}$, donde a es un número real cualquiera que permanece constante.

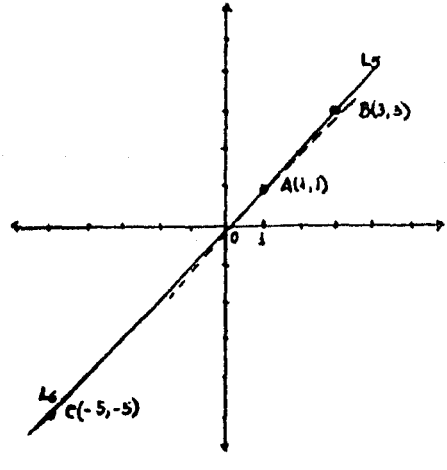
Respuesta:



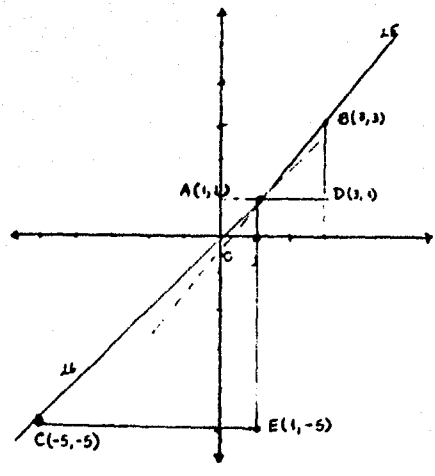
Las rectas L_1, L_2, L_3 y L_4 son perpendiculares al eje - de las abscisas y, por lo mismo, paralelas al eje de las ordenadas, verifícalo empleando un par de escuadras.

Problema 6. Los puntos A(1, 1), B(3, 3) y C(-5, -5) presentan igual abscisa y ordenada, es decir, x = y. ¿Es posible trazar una recta que pase por los tres puntos?.

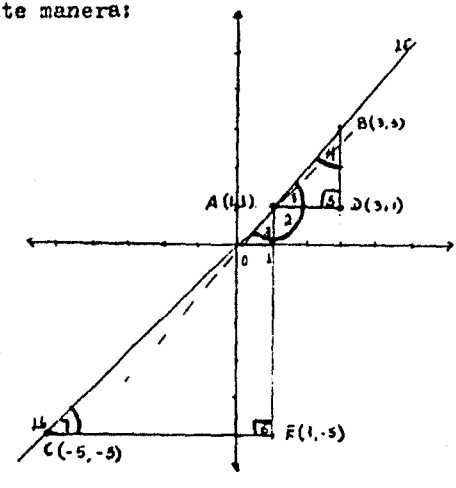
Respuesta: Sabemos que por dos puntos en el plano pasa una sola línea recta. Entonces, por A(1, 1) y B(3, 3) - pasa una sola línea recta, que denotaremos como L_5 , y por - los puntos B(3, 3) y C(-5, -5) es seguro que también pasa - una línea recta, que denotaremos como L_6 . ¿Coinciden estas rectas?. Observa la figura siguiente:



Por los puntos A(1, 1), B(3, 3) y C(-5, -5) trazamos -- rectas perpendiculares a los ejes coordenados para formar - los triángulos rectángulos ΔADB y ΔACE; donde D(3, 1) y - E(1, -5).



Numeremos lo ángulos de los triángulos así formados, de la siguiente manera:



obviamente, los ángulos 5 y 6 son rectos y la suma de las medidas de los ángulos 1 y 4 también es igual a un recto.

Las rectas L_3 y L_4 coincidirán, esto es, los puntos A(1, 1), B(3, 3) y C(-5, -5) serán colineales, si la suma de las medidas de los ángulos 1, 2 y 3 es igual a la medida de dos rectos. En otras palabras, si los ángulos 1, 2 y 3 forman un ángulo llano entonces, los puntos A, B y C están sobre la misma recta. Demostrémoslo. Estarás de acuerdo en que:

$d(A, D) = 2$ y $d(D, B) = 2$,

$d(C, E) = 6$ y $d(E, A) = 6$; y por lo mismo,

$\overline{AD}/\overline{CE} = 2/6$ y $\overline{DB}/\overline{EA} = 2/6$; de donde,

$\overline{AD}/\overline{CE} = \overline{DB}/\overline{EA}$, lo que significa que los triángulos rectángulos Δ ADB y ΔACE son semejantes por tener sus catetos proporcionales, por lo que, los ángulos 3 y 4 son iguales. Y dado que, la suma de la medida de los ángulos 1 y 4 es igual a un recto, entonces la suma de la medida de los ángulos 1 y 3 también es igual a un recto.

Por otro lado la $d(D, E) = \sqrt{40}$ y en el ΔADE se tiene que:

$d(D, E)^2 = d(A, D)^2 + d(E, A)^2$, puesto que,

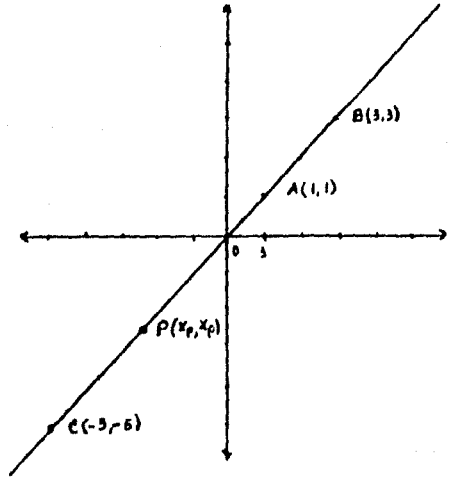
$40 = 4 + 36$. Entonces, por el recíproco del teorema de Pitágoras, se tiene que el ángulo 2 es recto. Por todo esto, la suma de las medidas de los ángulos 1, 2 y 3 es igual a dos rectos; lo que indica que las rectas L_3 y L_4 coinciden.

Esto mismo sucederá para todos los puntos del plano que cumplan con la condición de tener igual abscisa y ordenada, es decir, todos los puntos $P(x_p, y_p)$ donde $x_p = y_p$, estarán en la misma recta que pasa por los puntos A(1, 1), B(3, 3) y C(-5, -5).

A tal conjunto, lo denotamos como:

$$L_6 = \{ (x, y) \mid y = x , \quad x \in \mathbb{R} \} ,$$

y lo representamos gráficamente:



En general, todo conjunto de puntos en el plano, de la forma:

$$L = \{ (x, y) \mid y = mx + b, \quad x \in \mathbb{R} \},$$

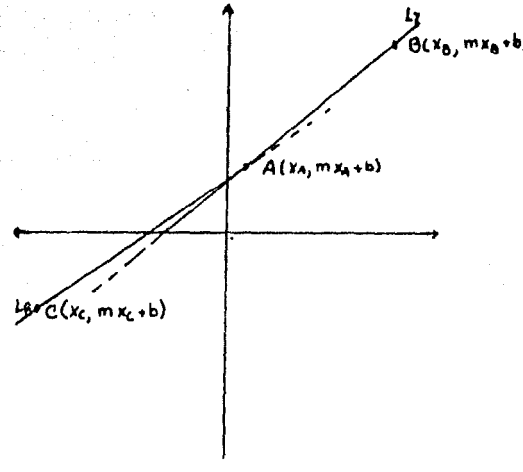
donde m y b son números reales que permanecen constantes, - tiene como gráfica a una línea recta. (4) Demostramos este - hecho tomando tres puntos que pertenezcan al conjunto L, esto es, tomando tres puntos en el plano con abscisa x y orde- y = mx + b. He aquí a tales puntos:

$$A(x_A, mx_A + b),\ B(x_B, mx_B + b) \text{ y } C(x_C, mx_C + b).$$

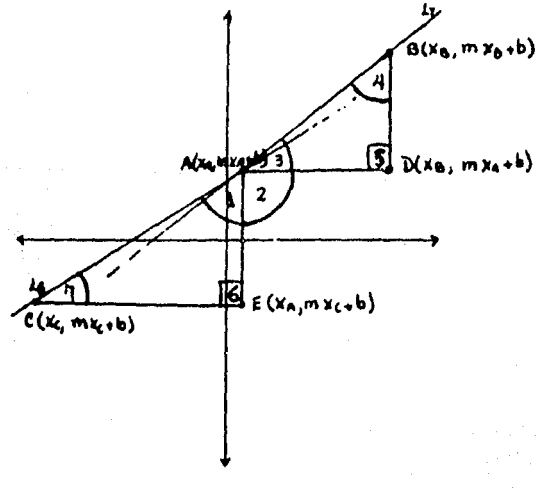
Por A y B trazamos la recta L_η y por B y C la recta L_β ,

---

(4) Observa que en el conjunto del problema 6, - - - - $L_6 = \{(x, y) \mid y = x, \quad x \in \mathbb{R}\}$, se tiene que m = 1 y b = 0.



Trazamos las perpendiculares a los ejes, que pasen por los puntos A, B y C, para formar los triángulos rectángulos ΔADB y ΔACE; y demostramos que los ángulos 1, 2 y 3, señalados en la figura siguiente forman un ángulo llano.



Sabemos que los ángulos 5 y 6 son rectos y que la suma de las medidas de los ángulos 3 y 4 es igual a un recto. Y - que:

$$d(A, D) = \sqrt{(x_A - x_B)^2} = |x_A - x_B|,$$

$$d(C, E) = \sqrt{(x_C - x_A)^2} = |x_C - x_A|,$$

$$d(D, B) = \sqrt{m^2(x_A - x_B)^2} = |m||x_A - x_B|,$$

$$d(E, A) = \sqrt{m^2(x_C - x_A)^2} = |m||x_C - x_A|,$$

por lo que,

$\overline{AD}/\overline{CE} = |x_A - x_B|/|x_C - x_A|$ y

$\overline{DB}/\overline{EA} = (|m||x_A - x_B|)/(|m||x_C - x_A|)$, o bien,

$\overline{DB}/\overline{EA} = |x_A - x_B|/|x_C - x_A|$,

esto es,

$\overline{AD}/\overline{CE} = \overline{DB}/\overline{EA}$, por lo que los triángulos rectángulos ΔADB y ΔACE son semejantes y, por lo mismo, los ángulos 1 y 4 son iguales. Entonces, la suma de las medidas de - los ángulos 1 y 3 es igual a un recto.

Por otra parte se cumple que:

$d(D, E)^2 = d(A, D)^2 + d(E, A)^2$, verifícalo,

por lo que, el ΔADE es un triángulo rectángulo y el ángulo 2 es recto.

Por todo esto, los ángulos 1, 2 y 3 forman un ángulo - llano y los puntos $A(x_A, mx_A + b)$, $B(x_B, mx_B + b)$ y - - - $C(x_C, mx_C + b)$ están en la misma recta. Y el conjunto,

$$L = \{ (x, y) \mid y = mx + b, x \in \mathbb{R} \},$$

tiene como gráfica a una línea recta.

Problema 7.

a) Si tenemos el conjunto:

$L_q = \{ (x, y) \mid y = x + 1, x \in \mathbb{R} \}$,

¿qué ordenada le corresponde a cada uno de los siguientes puntos: $A(3, y_A)$, $B(-1, y_B)$, $C(-2, y_C)$ y $D(1/2, y_D)$?.

Respuesta: A(3, 4), B(-1, 0), C(-2, -1) y D(1/2, 3/2). Para obtener las ordenadas se sustituye en la condición y = x + 1, los valores dados en las abscisas de los puntos, como ejemplo calculemos la ordenada del punto $A(3, y_A)$,

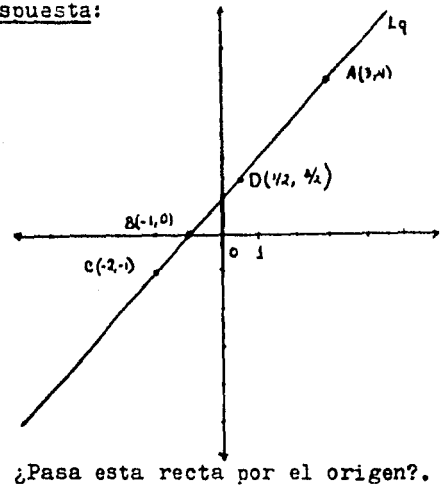
y = x + 1, por lo que,

$y_A = 3 + 1$, o bien,

$y_A = 4$.

b) Localizar estos cuatro puntos en el plano y trazar la recta que pasa por ellos.

Respuesta:



c) ¿Pasa esta recta por el origen?.

Respuesta: No, porque $0 \neq 0 + 1$.

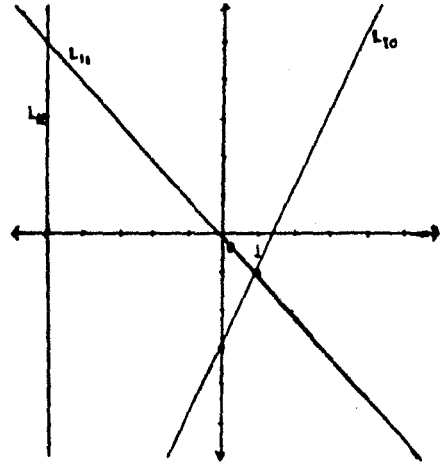
Problema 8. Localizar en el plano los siguientes conjuntos:

$$L_{10} = \{ (x, y) \mid y = 2x - 3, \ x \in \mathbb{R} \}$$

$$L_{11} = \{ (x, y) \mid y = -x, \ x \in \mathbb{R} \}$$

$$L_{12} = \{ (x, y) \mid y = -5, \ x \in \mathbb{R} \}$$

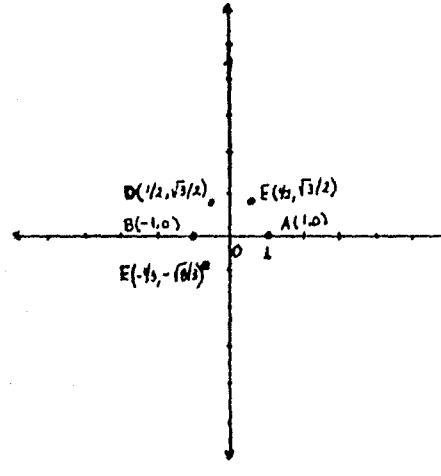
Respuesta:



Problema 9.

a) Localizar en el plano los puntos: A(1, 0), - - - B(-1, 0), C(1/2, $\sqrt{3}/2$), D(-1/2, $\sqrt{3}/2$) y E(-1/3, - $\sqrt{8}/3$).

Respuesta:



b) ¿Es posible trazar una línea recta que pase por los cinco puntos anteriores?

Respuesta: Evidentemente, no.

c) ¿Cuál es la distancia del punto A(1, 0) al origen?.

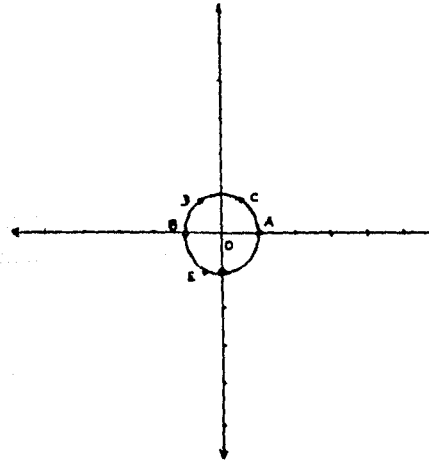
Respuesta: Uno porque: $d(A, O) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 - 0)^2}$, o bien, $d(A, O) = \sqrt{1} = 1$.

d) ¿ Las distancias de los puntos restantes al origen, son iguales a la d(A, O)?.

Respuesta: Si, en todos los casos son iguales a uno, es decir, d(A, O) = d(B, O) = d(C, O) = d(D, O) = d(E, O) = 1. Lo que significa que la distancia de todos estos puntos al origen es constante.

e) Como sabemos, por geometría elemental, una circunferencia es un conjunto de puntos, situados en un mismo plano, que están a la misma distancia de otro punto llamado centro. Entonces, si tomamos como centro el origen y dibujamos la circunferencia con radio igual a la unidad, ésta debe pasar por los cinco puntos dados. Traza dicha circunferencia.

Respuesta:



f) El punto P(-3, 2), ¿pertenece a esta circunferencia de centro en el origen y radio igual a la unidad?

Respuesta: No porque su diatancia al origen no es igual a uno, esto es, $d(P, O) = \sqrt{13} \neq 1$.

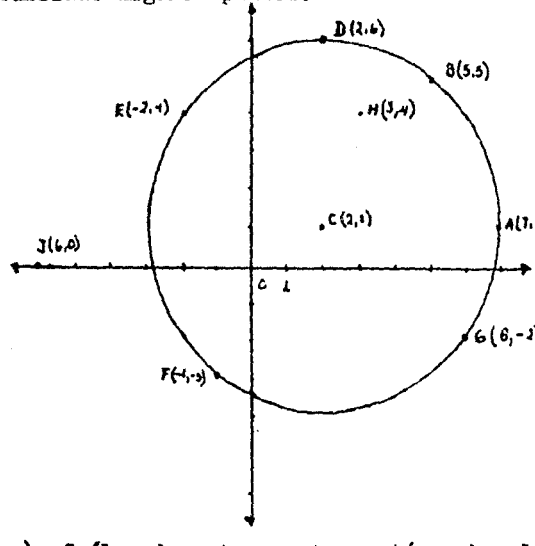
g) ¿Qué condición deberá cumplir un punto cualquiera $P(x_\rho, y_\rho)$ en el plano, para pertenecer a la mencionada circunferencia?.

Respuesta: Que su distancia al origen sea igual a uno, es decir, que $d(P, O) = 1$, o bien, $(x_\rho - 0)^2 + (y_\rho - 0)^2 = 1^2$ o lo que es lo mismo, $x_\rho^2 + y_\rho^2 = 1$. Entonces, podemos intuir

que la circunferencia de centro en el origen y radio igual a la unidad es el conjunto de puntos (x, y) que cumple con la condición: $x^2 + y^2 = 1$. Simbólicamente:

$$C = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, \ x \in \mathbb{R} \}.$$

Problema 10. En la siguiente figura se ha trazado la circunferencia de centro C(2, 1) y radio igual a cinco; y se han localizado algunos puntos.



a) ¿Cuáles de estos puntos están sobre la circunferencia?.

Respuesta: A(7, 1), B(5, 5), D(2, 6), E(-2, 4), F(-1, -3) y G(6, -2). Esto, de acuerdo con la figura.

b) ¿Cuál es la distancia de estos puntos al centro de la circunferencia?.

Respuesta: d(A, C) = d(B, C) = d(D, C) = d(E, C) = d(F, C) = d(G, C) = 5.

c) ¿ Y, las distancias d(J, C) y d(H, C) también - son iguales a cinco?.

Respuesta: No, d(J, C) = 17 y d(H, C) = 10.

Entonces, podemos intuir, que el conjunto de puntos que forman la circunferencia de centro C(2, 1) y radio igual a - cinco, debe cumplir con la condición de tener una distancia - al centro C(2, 1) igual a cinco. Simbólicamente:

$$C = \{ (x, y) \mid \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 5,\ x \in \mathbb{R} \},$$

$$C = \{ (x, y) \mid (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25,\ x \in \mathbb{R} \}.$$

EJERCICIO.

a) Los conjuntos $L = \{ (x, y) \mid y = 4,\ x \in \mathbb{R} \}$ y - - - - - -
$S = \{ (x, y) \mid y = 4,\ 2 \leq x \leq 5 \}$, ¿son iguales?.

b) Graficar el conjunto $L = \{ (x, y) \mid y \geq x,\ x \in \mathbb{R} \}$.

c) Graficar el conjunto $L = \{ (x, y) \mid y < x + 1,\ x \in \mathbb{R} \}$.

d) Graficar el conjunto $L = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9,\ x \in \mathbb{R} \}$.

e) Empleando una sola figura graficar los conjuntos siguientes:

$A = \{ (x, y) \mid x = -6,\ 0 \leq y \leq 4 \}$

$B = \{ (x, y) \mid x = -4,\ 2 \leq y \leq 4 \}$

$C = \{ (x, y) \mid x = -2,\ 0 \leq y \leq 4 \}$

$D = \{ (x, y) \mid x = 0,\ 0 \leq y \leq 4 \}$

$E = \{ (x, y) \mid 2 \leq x \leq 4,\ y = 0 \}$

$F = \{ (x, y) \mid -6 \leq x \leq -4,\ y = 4 \}$

$G = \{ (x, y) \mid -2 \leq x \leq 0,\ y = 4 \}$

$H = \{ (x, y) \mid 2 \leq x \leq 4,\ y = 4 \}$

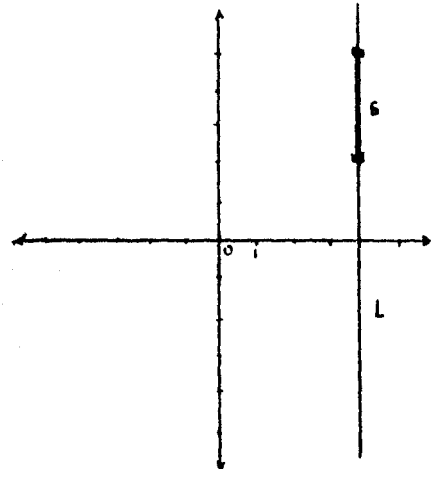
$J = \{ (x, y) \mid -6 \leq x \leq -4,\ y = 2 \}$

$K = \{ (x, y) \mid -2 \leq x \leq 0,\ y = 2 \}$

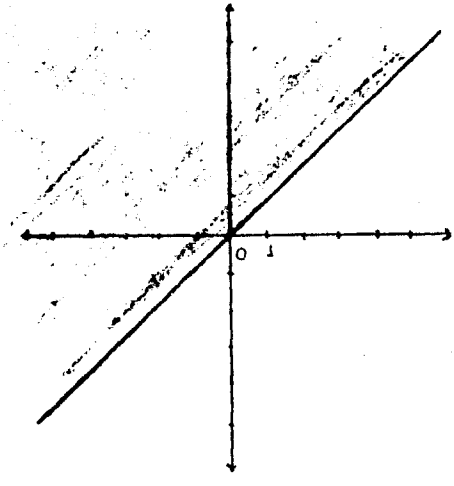
$L = \{ (x, y) \mid 2 \leq x \leq 4,\ y = 2x - 4 \}$

SOLUCION.

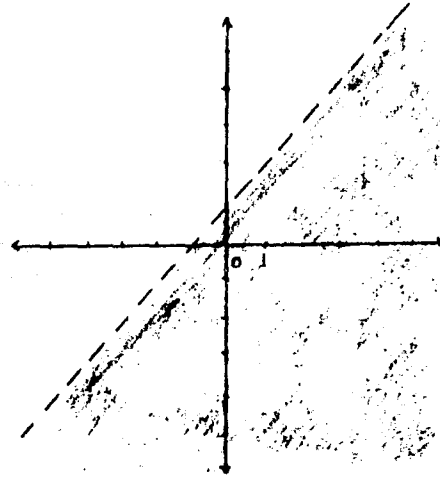
a) No, el conjunto L tiene por gráfica una recta perpendicular al eje de las ordenadas, y el conjunto S es tan solo un segmento de esta línea, de hecho, $S \subset L$.



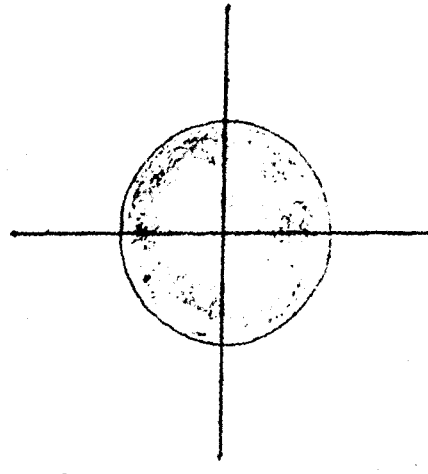
b) Para la condición $x = y$ tenemos la recta que aparece en el problema 6, los puntos que cumplen con $y > x$ quedan por "arriba" de dicha recta y aparecen sombreados en la siguiente figura. Este conjunto incluye a la recta.



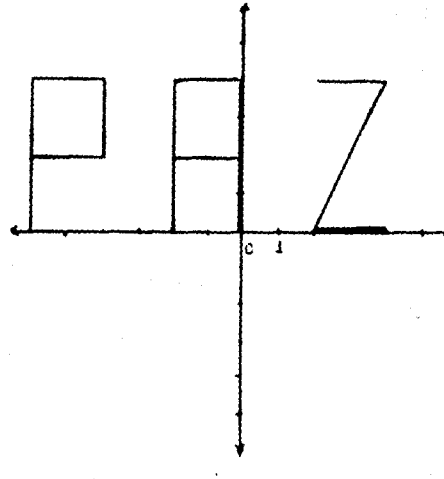
c) Los puntos que cumplen con la condición $y = x + 1$ están en - la recta cuya gráfica aparece en el problema 7; las parejas que cumplen la desigualdad, $y < x + 1$ quedan "abajo" de dicha línea. Este conjunto no incluye a la recta.



d) Para $x^2 + y^2 = 9$ se tiene una circunferencia de centro en el origen y radio igual a tres. El conjunto C contiene a todos los puntos que están dentro y sobre dicha circunferencia.



e)Se tiene la gráfica:



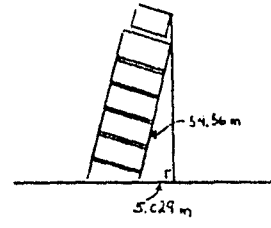
Moraleja: Hay que hacer mucho por la PAZ.

CAPITULO IV.

LA PENDIENTE DE UNA RECTA.

A. LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO AGUDO.

La torre inclinada de Pisa mide, desde el pie a su parte superior, 54.56 metros, y está fuera de su plomada 5.029 metros. Calcular su ángulo de inclinación con respecto a la vertical. (1)



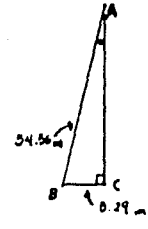
Las seis razones.

Resolver este problema, con el que iniciamos este capítulo, requiere de la aplicación de alguna de las seis razones trigonométricas que conocemos: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante; las cuales abreviamos como: sen, cos, tan, cot, sec, csc, respectivamente. Como sabemos, estas razones resultan de comparar las longitudes de los catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo cualquiera, tomando como referencia a alguno de sus ángulos agudos interiores.

---

(1) CABALLERO, Arquímedes, et. al. Matemáticas. Pág. 186.

Así, encontrar el ángulo de inclinación de la torre inclinada de Pisa nos lleva a considerar el siguiente esquema:



obviamente, $\overline{AB}$ representa la hipotenusa del $\triangle ABC$. Como precisamos encontrar la medida del ángulo ($\angle$) agudo con vértice en el punto A, llamaremos a los catetos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, cateto adyacente y cateto opuesto al $\angle A$, respectivamente. Entonces, las razones trigonométricas de este ángulo son:

$$\text{sen } \angle A = \text{cateto opuesto/ hipotenusa} = \overline{BC}/\overline{AB},$$
$$\cos \angle A = \text{cateto adyacente/ hipotenusa} = \overline{AC}/\overline{AB},$$
$$\tan \angle A = \text{cateto opuesto/ cateto adyacente} = \overline{BC}/\overline{AC},$$
$$\cot \angle A = \text{cateto adyacente/ cateto opuesto} = \overline{AC}/\overline{BC},$$
$$\sec \angle A = \text{hipotenusa/ cateto adyacente} = \overline{AB}/\overline{AC},$$
$$\csc \angle A = \text{hipotenusa/ cateto opuesto} = \overline{AB}/\overline{BC}.$$

(fácilmente se observa que son recíprocas, por parejas, las razones: $\text{sen}\angle A$ y $\csc \angle A$, $\cos \angle A$ y $\sec \angle A$ y $\tan \angle A$ y $\cot \angle A$; por lo mismo, nos concentraremos únicamente en el estudio de las primeras tres, es decir, del $\text{sen}\angle A$, $\cos \angle A$ y $\tan \angle A$).

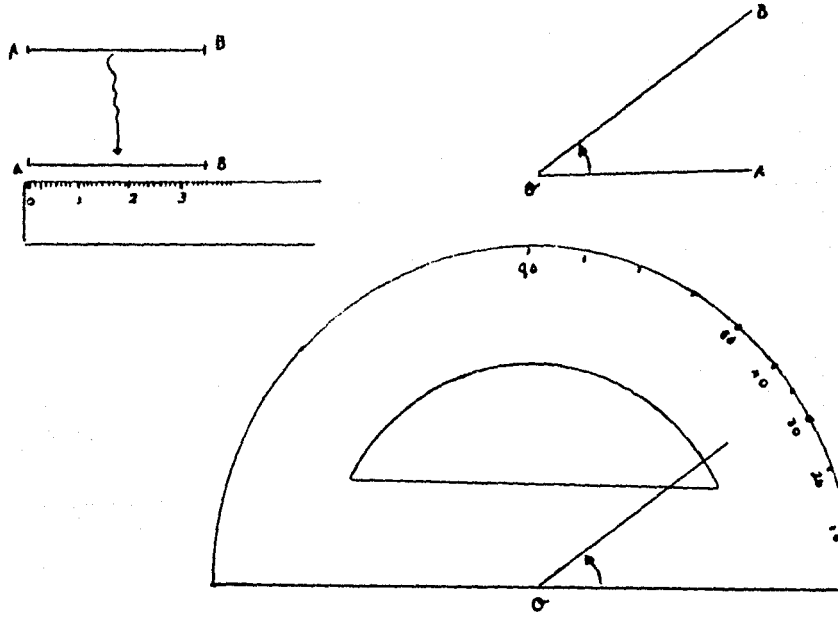
Ahora bien, sabemos por el enunciado de nuestro problema que $\overline{AB} = 54.56$ metros y $\overline{BC} = 5.029$ metros, por lo que al tener la longitud de la hipotenusa y del cateto opuesto, debemos calcular el valor de la razón $\text{sen} \angle A$, puesto que es ésta la que relaciona a ambas cantidades:

$$\text{sen} \angle A = \overline{BC}/\overline{AB} = 5.029/\ 54.56 = 0.0921 \qquad (2)$$

buscamos en las tablas de razones trigonométricas, la del valor natural del seno, en ésta el número más cercano a 0.0921 es 0.0929, el cual corresponde a 5° 20', entonces el ángulo de inclinación, con respecto a la vertical, que presenta la - torre inclinada de Pisa es:

$$\angle A = 5° 20' \text{ aproximadamente.}$$

En la escuela elemental medimos representaciones gráfi-- cas de segmentos y ángulos, empleando una regla graduada y un transportador, respectivamente:



(2) Puesto que en las tablas más comunes de razones trigonométricas aparecen números de cuatro cifras, los resultados que obtengamos serán "cortados" a partir del cuarto dígito -- después del punto decimal.

Así decimos que la longitud del segmento que une los puntos A y B es de treinta y cinco milímetros, lo cual escribimos - como:

$$\overline{AB} = 35 \text{ mm.}, \text{ o bien,}$$

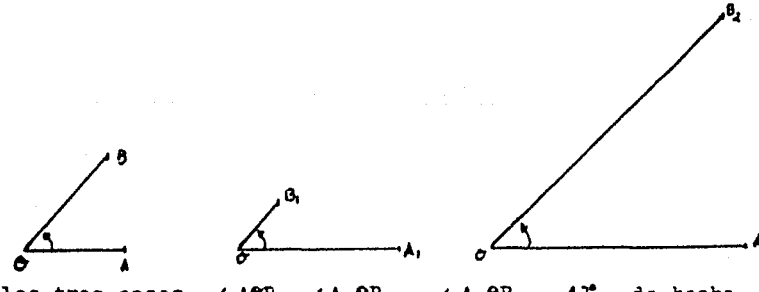
$$\overline{AB} = 3.5 \text{ cm.}$$

y que la amplitud de giro del ángulo con vértice en el punto θ y lado inicial $\overline{\theta A}$ y lado final $\overline{\theta B}$ mide treinta y cinco grados, simbólicamente:

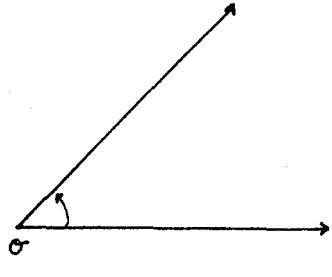
$$\angle\theta = 35^\circ, \text{ o bien,}$$

$$\angle A\theta B = 35^\circ.$$

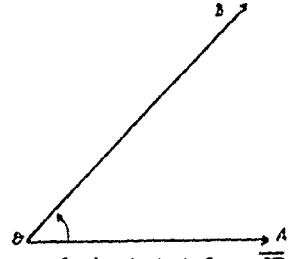
Observamos también, desde aquellos primeros años de estudio, que la longitud de los lados del ángulo no altera la medida del mismo:



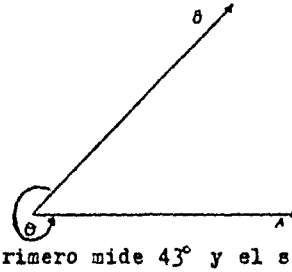
en los tres casos, $\angle A\theta B = \angle A_1\theta B_1 = \angle A_2\theta B_2 = 43^\circ$, de hecho podemos prolongar los lados del ángulo indefinidamente, esto lo representamos como:



y A y B pueden ser cualesquiera dos puntos distintos de O, sobre los lados del ángulo. Sin embargo, el orden en que se tomen los lados $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ si resulta de importancia, puesto que no es lo mismo, el ángulo que tiene vértice en O y lado inicial en $\overline{OA}$ y lado final en $\overline{OB}$:

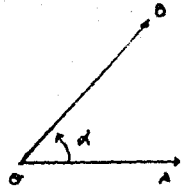


que el que tiene, por lado inicial a $\overline{OB}$ y lado final a $\overline{OA}$: (3)

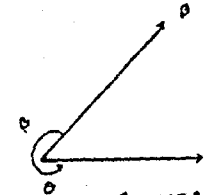


Puesto que, el primero mide 43° y el segundo mide 317°. En el presente trabajo, para evitar posibles confusiones, colocaremos una letra del alfabeto griego entre los lados del ángulo que deseemos tratar, por lo general, utilizaremos las letras: α (alfa), β (beta), γ (gamma) y θ (teta).

(3) Consideraremos únicamente ángulos entre 0° y 360°, dirigidos en el sentido inverso a las manecillas del reloj.



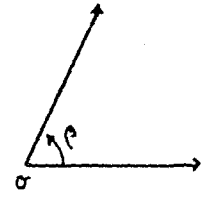
$\angle \alpha = 43°$



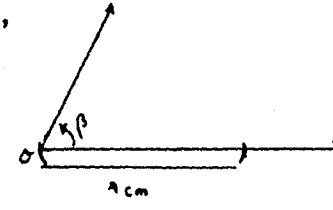
$\angle \beta = 217°$

Pues bien, ha llegado el momento de medir directamente, la representación gráfica de un ángulo agudo, sin emplear — transportador alguno, por supuesto, aplicaremos las razones trigonométricas.

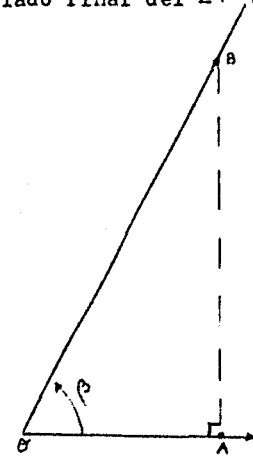
Problema 1. Obtener la medida del $\angle \beta$, sin usar — el transportador.



Respuesta: Tomemos el segmento $\overline{OA} = 4$ cm, sobre el lado inicial del $\angle \beta$,



por este punto A trazamos la perpendicular a $\overline{OA}$ y prolongamos hasta cortar al lado final del $\angle \beta$ en el punto B:



medimos la longitud del segmento que une los puntos A y B y - obtenemos que,

$$\overline{AB} = 6.8 \text{ cm.}$$

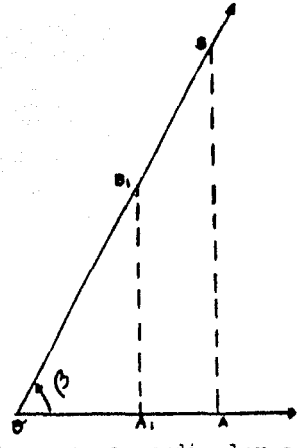
Evidentemente, el $\triangle ABC$, es un triángulo rectángulo, donde los catetos son los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{AB}$, y la razón trigonométrica - que los relaciona es la tangente:

$$\tan \angle \beta = \overline{AB} / \overline{OA} = 6.8/4 = 1.700,$$

el número más cercano a 1.700 que aparece en las tablas correspondientes es 1.698, por lo que,

$$\angle \beta = 59^\circ\ 30', \text{ aproximadamente.}$$

La elección de los puntos A y B resulta sumamente arbitraria e irrelevante, puesto que otro par de puntos distintos a éstos, digamos A_1 y B_1, como los que se muestran en la figura siguiente, dan lugar a la misma razón.



siempre que $\overline{A_1B_1}$, sea perpendicular a $\overline{OA_1}$, es decir,

$\overline{AB}/\overline{OA} = \overline{A_1B_1}/\overline{OA_1}$, puesto que el ΔAOB es semejante al ΔA_1OB. (4)

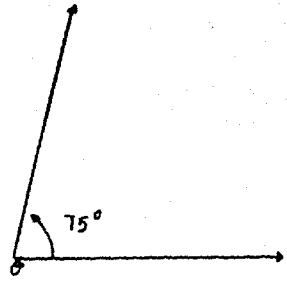
En resumen, para calcular la amplitud de giro de un ángulo agudo, en un triángulo rectángulo, basta con aplicar alguna de las tres razones trigonométricas más usuales: seno, coseno y tangente; dependiendo de cuales sean las longitudes de los lados del triángulo que conozcamos. Inversamente, si conocemos la amplitud de giro de un ángulo agudo y deseamos conocer sus razones trigonométricas, basta con conformar un triángulo rectángulo conveniente y medir la longitud de los lados del mismo.

Problema 2. Encontrar las razones trigonométricas del ángulo de 75°.

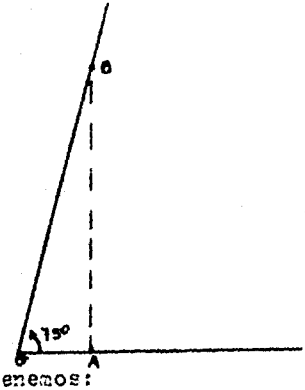
Respuesta: Dibujamos el ángulo auxiliándonos con un transportador:

---

(4) Revisa el primer capítulo de este trabajo, en la sección correspondiente a la división de un segmento en partes proporcionales.



Tomamos un punto cualesquiera en el lado final del ángulo y - bajamos la perpendicular hacia el lado inicial, conformando el triángulo rectángulo $\Delta B\theta A$.



Donde:

$\overline{AB}$ = 5.2 cm

$\overline{B\theta}$ = 5.4 cm

$\overline{\theta A}$ = 1.4 cm

Así, obtenemos:

$$\text{sen } 75^\circ = 5.2/\ 5.4 = 0.9629,$$

$$\cos 75^\circ = 1.4/\ 5.4 = 0.2592 \quad \text{y}$$

$$\tan 75^\circ = 5.2/\ 1.4 = 3.714\ .$$

Obviamente, nuestros resultados son aproximados, puesto que nuestros instrumentos de medición e inclusive nuestra habilidad para medir están sujetos a un cierto margen de error. - Resultados más precisos, pero tampoco exactos, los encontramos en las tablas de valores naturales de estas razones, en el libro de Granville (5) aparecen las siguientes cantidades:

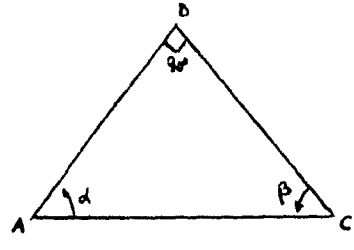
sen 75° = 0.9659 ,

cos 75° = 0.2588 y

tan 75° = 3.732 .

Problema 1. Encontrar las razones trigonométricas del ángulo de 45°.

Respuesta: Este ángulo, por su aparición frecuente en problemas que implican resolución de triángulos rectángulos, requiere de atención especial. Para encontrar sus razones trigonométricas trazamos el ΔABC de manera que resulte ser un triángulo isósceles y rectángulo.



Observa que los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son los lados iguales del triángulo y como para efectos de medida de ángulos no importa la longitud de los lados del mismo, podemos asignar a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ la unidad como medida, es decir:

$\overline{AB} = 1 = \overline{BC}$, y por lo mismo, la hipotenusa es,

$\overline{AC} = \sqrt{2}$.

Por geometría elemental sabemos que:

1. Los ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180°.

2. En un triángulo isósceles, a los lados iguales se oponen ángulos iguales. (En el ΔABC, $\angle\alpha = \angle\beta$).

(5)GRANVILLE, William Anthony, et. al. Trigonometría plana y esférica. Pág. 456.

Entonces, en la figura, tenemos que:

$\angle\alpha + \angle\beta = 90°$, o lo que es lo mismo,

$2\angle\beta = 90°$, por lo que,

$\angle\beta = 45°$. Y las razones trigonométricas de este ángulo son:

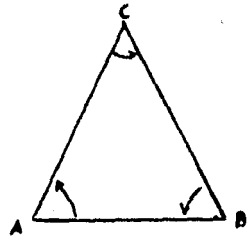
$\text{sen } 45° = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$,

$\cos 45° = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$ y

$\tan 45° = 1$.

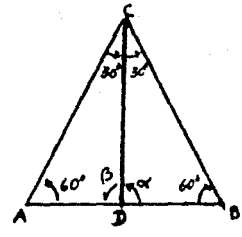
Problema 4. Encontrar las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°.

Respuesta: Estos ángulos también resultan ser de uso frecuente, para encontrar sus razones trigonométricas tracemos un Δ ABC equilátero, cuyos lados consideramos con longitud igual a la unidad.

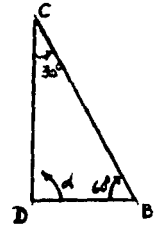


$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 1$

Nuevamente, por geometría elemental, sabemos que los tres ángulos interiores de un triángulo equilátero cualquiera son iguales; es decir, los ángulos con vértice en los puntos A, B y C son iguales y por lo mismo miden 60° cada uno. Al trazar la bisectriz del ángulo agudo con vértice en C formamos dos triángulos congruentes:



De acuerdo con la figura el ΔACD es congruente con el ΔCDB, puesto que tiene dos ángulos correspondientes iguales y el lado comprendido entre estos también es igual ($\overline{AC} = \overline{BC}$). Por lo mismo $\overline{AD} = \overline{DB}$ y como $\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AB} = 1$, entonces $\overline{DB} = 1/2$. Y los ángulos α y β también son iguales entre sí, además $\angle\alpha + \angle\beta = 180°$, entonces $\angle\alpha = 90°$. Por todo esto el ΔCDB, es un triángulo rectángulo con ángulos agudos de 30° y 60°, con $\overline{BC} = 1$, $\overline{DB} = 1/2$ y $\overline{CD} = \sqrt{3}/2$,



y las razones trigonométricas para estos ángulos agudos son:

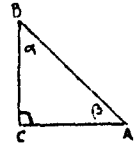
$$\text{sen } 60° = \sqrt{3}/2 \quad , \qquad \text{sen } 30° = 1/2 \quad ,$$

$$\cos 60° = 1/2 \quad , \qquad \cos 30° = \sqrt{3}/2 \quad ,$$

$$\tan 60° = \sqrt{3} \qquad \text{y} \qquad \tan 30° = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3.$$

EJERCICIO.

Calcular las seis razones de los ángulos agudos: α y β ; señalados en el siguiente triángulo rectángulo. Compárense los resultados.



donde:

$\overline{AB} = 3$,

$\overline{BC} = 2$ y

$\overline{CA} = \sqrt{5}$

SOLUCION.

$\operatorname{sen} \angle\alpha = \sqrt{5}/3$, $\operatorname{sen} \angle\beta = 2/3$,

$\cos \angle\alpha = 2/3$, $\cos \angle\beta = \sqrt{5}/3$,

$\tan \angle\alpha = \sqrt{5}/2$, $\tan \angle\beta = 2/\sqrt{5}$,

$\cot \angle\alpha = 2/\sqrt{5}$, $\cot \angle\beta = \sqrt{5}/2$,

$\sec \angle\alpha = 3/2$, $\sec \angle\beta = 3/\sqrt{5}$,

$\csc \angle\alpha = 3/\sqrt{5}$ y $\csc \angle\beta = 3/2$

Observamos que $\angle\alpha + \angle\beta = 90^\circ$, es decir, los ángulos α y β son complementarios y se cumple que:

$\operatorname{sen} \angle\alpha = \cos \angle\beta$, $\cos \angle\alpha = \operatorname{sen} \angle\beta$,

$\tan \angle\alpha = \cot \angle\beta$, $\cot \angle\alpha = \tan \angle\beta$,

$\sec \angle\alpha = \csc \angle\beta$ y $\csc \angle\alpha = \sec \angle\beta$.

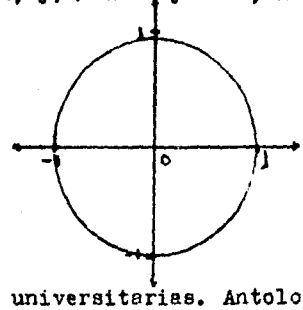
B. LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO ENTRE 0° Y 360°.

> Todas las invenciones que posee el mundo, no fueron encontradas primeramente por la razón ni por los cerebros; sino que fueron alcanzadas por los de aquellos que tuvieron la suerte de tropezar con ellas por descuido o equivocación.
>
> Samuel Botler (1612-1680). (6)

Generalicemos ideas.

En la sección anterior tratamos las razones trigonométricas de ángulos agudos; para generalizar estas ideas para ángulos de cualquier medida entre 0° y 360° consideremos la circunferencia de radio igual a la unidad y centro en el origen. (7) Como sabemos, por el capítulo anterior, esta circunferencia queda determinada por el conjunto:

$C = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \in \mathbb{R} \}$ y su gráfica es,

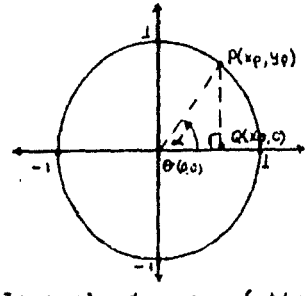


(6) Lecturas universitarias. Antología de matemáticas. - Pág. 105.

(7) En realidad, la longitud del radio es irrelevante, -- puesto que, como sabemos, la longitud de los lados del ángulo no afecta la medida del mismo. Es por comodidad que se prefiere trabajar con el radio igual a la unidad.

Algunos de los puntos que se encuentran en esta circunferencia son: A(1, 0), B(0, 1), C(-1, 0), D(0, -1), E($-1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$), F($\sqrt{3}/2$, $-1/2$), G($1/2$, $\sqrt{3}/2$), H($-1/\sqrt{2}$, $-1/\sqrt{2}$), etc.

Tomemos un punto $P(x_p, y_p)$ en la circunferencia C, en la parte comprendida en el primer cuadrante y conformemos el triángulo rectángulo con vértices en los puntos $P(x_p, y_p)$, $\mathcal{O}(0, 0)$ y $Q(x_p, 0)$, bajando la perpendicular desde el mencionado punto P, al eje de las abscisas.



Para el ángulo agudo α, con vértice en el origen, lado inicial en $\overline{\mathcal{O}Q}$ y lado final en $\overline{\mathcal{O}P}$, tenemos las razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} \angle\alpha = \overline{PQ}/\overline{\mathcal{O}P} = d(P, Q)/d(\mathcal{O}, P)$$

$$\operatorname{sen} \angle\alpha = \sqrt{(x_p - x_p)^2 + (y_p - 0)^2} \,/\, \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$$

$$\operatorname{sen} \angle\alpha = |y_p|/1 = y_p \ ,$$

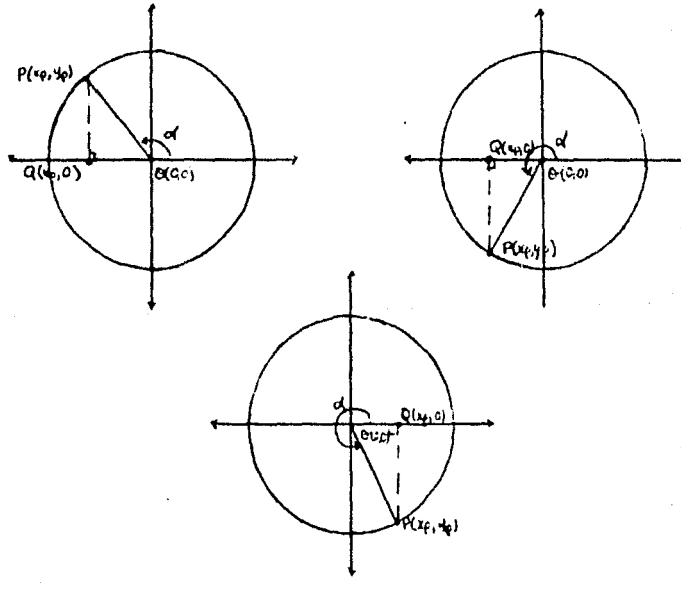
puesto que $P(x_p, y_p)$ pertenece a la circunferencia C, se tiene que $x_p^2 + y_p^2 = 1$; y como la coordenada y_p es positiva, $|y_p| = y_p$. De igual forma:

$$\cos \angle\alpha = x_p \quad \text{y} \quad \tan \angle\alpha = y_p/x_p \ ,$$

que concuerdan con las razones trigonométricas dadas en la sección anterior, para ángulos agudos.

Al mover el punto $P(x_p, y_p)$ sobre la circunferencia C hacia los tres cuadrantes restantes, observamos que el $\angle\alpha$ pasa a

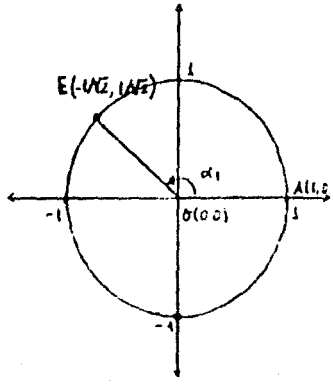
ser un ángulo obtuso, con lado inicial en $\overline{OA}$, lado final en $\overline{OP}$ y vértice en el origen; además, deja de ser interior a cada - uno de los triángulos rectángulos $\triangle OPQ$, señalados en las si-- guientes figuras; los cuales, seguimos conformando al trazar - la perpendicular al eje de las abscisas que pasa por el punto $P(x_p, y_p)$.

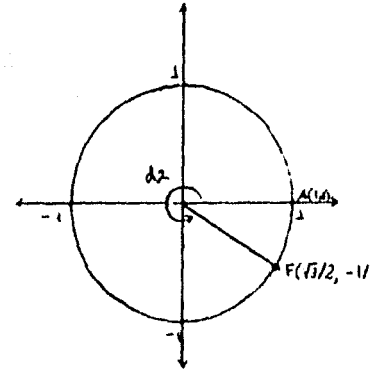


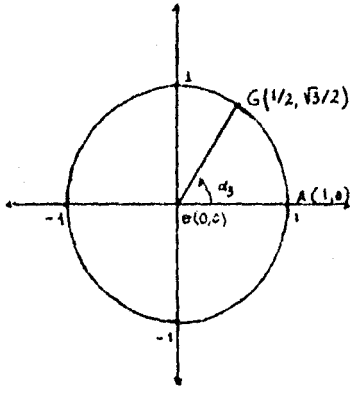
Entonces, para ser congruentes con nuestras primeras -- ideas, definimos para cualquier ángulo obtuso α, no mayor de - 360°, con lado final en $\overline{OP}$,

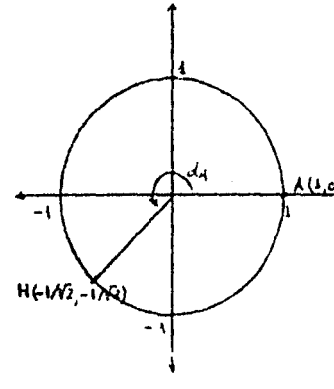
$$\operatorname{sen} \angle\alpha = y_p, \quad \cos \angle\alpha = x_p \text{ y } \quad \tan \angle\alpha = y_p/x_p,$$

donde es evidente que se debe atender a los signos de las coor denadas. He aquí algunos ejemplos numéricos;









$\operatorname{sen} \angle\alpha_1 = 1/\sqrt{2}$,
$\cos \angle\alpha_1 = -1/\sqrt{2}$,
$\tan \angle\alpha_1 = -1$,
$\operatorname{sen} \angle\alpha_3 = \sqrt{3}/2$,
$\cos \angle\alpha_3 = 1/2$,
$\tan \angle\alpha_3 = \sqrt{3}$;

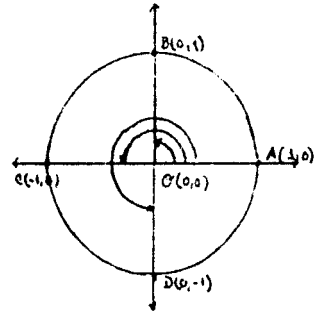
$\operatorname{sen} \angle\alpha_2 = -1/2$,
$\cos \angle\alpha_2 = \sqrt{3}/2$,
$\tan \angle\alpha_2 = -1/\sqrt{3}$,
$\operatorname{sen} \angle\alpha_4 = -1/\sqrt{2}$,
$\cos \angle\alpha_4 = -1/\sqrt{2}$,
$\tan \angle\alpha_4 = 1$.

En resumen, los signos de las razones trigonométricas varían de acuerdo con el cuadrante donde se encuentre el lado final del ángulo. Observa la siguiente tabla con los signos de - los mismos:

	I	II	III	IV
sen $\angle\alpha$	+	+	-	-
cos $\angle\alpha$	+	-	-	+
tan $\angle\alpha$	+	-	+	-

Problema 5. Encontrar las razones trigonométricas - de los ángulos de 0°, 90°, 180° y 270°.

Respuesta: Estos ángulos tiene por lado final a $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ respectivamente, donde A(1,0), B(0, 1), C(-1, 0) y D(0, -1), entonces:

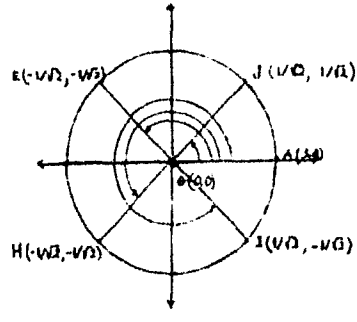


sen 0° = 0 ,
cos 0° = 1 ,
tan 0° = 0 ,
sen 180° = 0,
cos 180° = -1,
tan 180° = 0 y

sen 90° = 1 ,
cos 90° = 0 ,
tan 90° = ∞ ,
sen 270° = -1,
cos 270° = 0 ,
tan 270° = ∞ .

Problema 6. Encontrar las razones trigonométricas de los ángulos de 45°, 135°, 225° y 315°.

Respuesta: Como observas los ángulos de 135°, 225° y 315° se forman agregando 90°, 180° y 270° a 45° respectivamente, de acuerdo con la figura, estos tres ángulos tienen como lados finales a $\overline{OE}$, $\overline{OH}$ y $\overline{OI}$ y el ángulo de 45° tiene a $\overline{OJ}$.



Como $J(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$ entonces,

$\operatorname{sen} 45° = 1/\sqrt{2}$, $\cos 45° = 1/\sqrt{2}$ y $\tan 45° = 1$;

y dado que $E(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$ entonces,

$\operatorname{sen} 135° = 1/\sqrt{2}$, $\cos 135° = -1/\sqrt{2}$ y $\tan 135° = -1$;

y como $H(-1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2})$ entonces,

$\operatorname{sen} 225° = -1/\sqrt{2}$, $\cos 225° = -1/\sqrt{2}$ y $\tan 225° = 1$

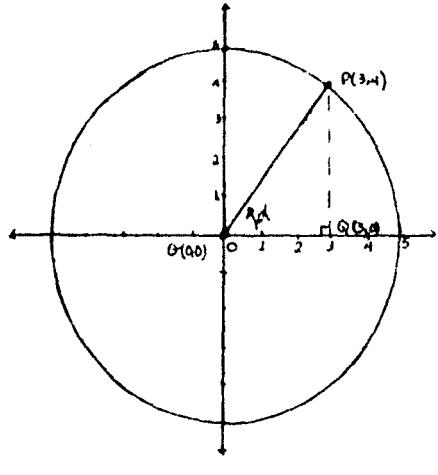
por último, $I(1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2})$ entonces,

$\operatorname{sen} 315° = -1/\sqrt{2}$, $\cos 315° = 1/\sqrt{2}$ y $\tan 315° = -1$.

Hasta el momento hemos trabajado con puntos sobre la circunferencia de radio igual a la unidad. Los siguientes problemas se presentan con el fin de generalizar aún más nuestras ideas, al trabajar con circunferencias de radio distinto de la unidad.

Problema 7. Encontrar las razones trigonométricas del ángulo agudo α, cuyo lado final es $\overline{OP}$, y donde P(3, 4).

Resuelta: Evidentemente el punto P(3, 4) no está en la circunferencia de radio igual a la unidad puesto que, $3^2 + 4^2 \neq 1^2$ pero está en la circunferencia de radio igual a cinco, observa:



$\overline{OP} = 5$,
$\overline{QP} = 4$ y
$\overline{OQ} = 3$.

tenemos nuevamente un triángulo rectángulo ΔOPQ y nuestras razones trigonométricas no son otras que:

$\operatorname{sen} \angle\alpha = 4/5$, $\cos \angle\alpha = 3/5$ y $\tan \angle\alpha = 4/3$

donde se han tomado las razones definidas como:

$\operatorname{sen} \angle\alpha$ = ordenada del punto P/ radio,

$\cos \angle\alpha$ = abscisa del punto P/ radio y

$\tan \angle\alpha$ = ordenada del punto P/ abscisa del punto P.

Y puesto que, el radio es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las coordenadas, simbólicamente:

$$r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \quad ;$$

entonces definimos para cualquier ángulo con lado final en el segmento $\overline{OP}$, donde las coordenadas del punto P son x_p, y_p, las razones trigonométricas como:

$$\text{sen} \angle \alpha = y_p / r$$
$$\cos \angle \alpha = x_p / r$$
$$\tan \angle \alpha = y_p / x_p$$

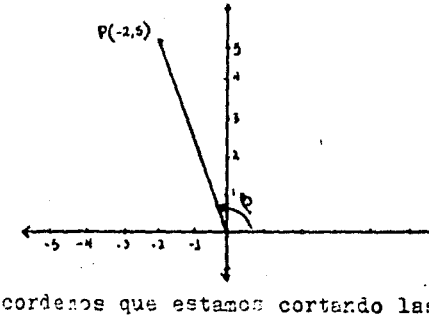
Obsrva que en la razón tangente no interviene el valor del radio, por esto se prefiere utilizarla al calcular los valores de los ángulos, conocidas las coordenadas del punto P. En el caso numérico, con el que estamos trabajando, hemos obtenido que:

$$\tan \angle \alpha = 4/3 = 1.333, \text{ por lo que,} \quad (8)$$
$$\angle \alpha = 53^\circ\ 10', \text{ aproximadamente.}$$

Problema 8. Encontrar el valor del ángulo β con vértice en el origen y lado final en $\overline{OP}$, donde P(-2, 5).

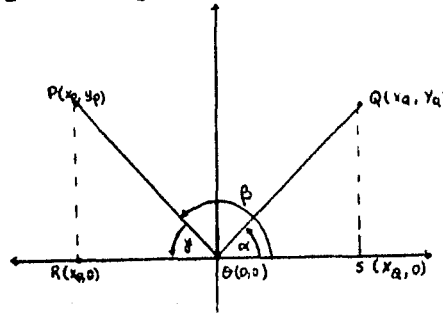
Respuesta: El punto P(-2,5) se encuentra en el segundo cuadrante, por lo mismo el ángulo β es un ángulo obtuso no mayor de 180° y su tangente es:

$$\tan \angle \beta = -2/5 = -2.500$$



(8) Recordemos que estamos cortando las cifras de los cocientes en el cuarto dígito.

Sin embargo, el valor del ángulo β no lo podemos dar directamente, ya que no tenemos tablas comunes de razones trigonométricas de ángulos obtusos, por lo que es necesario valernos de la geometría plana para encontrar una fórmula trigonométrica que relacione las razones de los ángulos agudos del primer cuadrante con los ángulos obtusos del segundo cuadrante. - Observa la siguiente figura:



en ésta se ha tomado el punto $Q(x_Q, y_Q)$ de manera que,

$$x_P = -x_Q \qquad y_P = y_Q \text{, y por lo mismo,}$$

$$r_1 = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} = \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2} = r_2$$

entonces, el $\triangle PRO$ es semejante al $\triangle QOS$, por lo que los ángulos γ y α son iguales; y como los ángulos β y γ son suplementarios, es evidente que:

$$\angle \beta = 180^\circ - \angle \alpha .$$

Y las razones trigonométricas de los ángulos α y β son:

$\operatorname{sen} \angle \beta = \operatorname{sen} \angle \alpha$ puesto que, $y_P / r_1 = y_Q / r_2$,

$\cos \angle \beta = -\cos \angle \alpha$ puesto que, $x_P / r_1 = -x_Q / r_2$ y

$\tan \angle \beta = -\tan \angle \alpha$ puesto que, $y_P / x_P = y_Q / -x_Q$.

Es decir, el valor absoluto de las razones trigonométricas del ángulo del segundo cuadrante β, es igual al valor absoluto de las razones trigonométricas del mismo nombre del α , que no es otro que el suplemento del $\angle \beta$; entonces, podemos ignorar el signo de

las razones del $\angle\theta$, buscar este cociente en tablas y la medida del ángulo que obtengamos lo restamos de 180°.

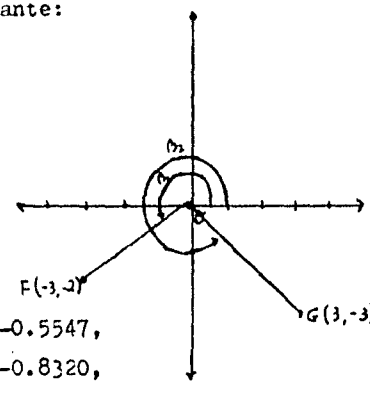
Así, en el ejemplo numérico que dejamos pendiente, la $\tan\angle\theta = -2.500$, buscamos el valor más cercano a $|-2.5001|$ en tablas y obtenemos al $\angle\theta = 68^\circ\ 10'$ aproximadamente, por lo que:

$\angle\theta = 180^\circ - 68^\circ\ 10' = 111^\circ\ 15'$, aproximadamente.

Lo mismo obtendremos aplicando cualquiera de las otras dos razones: seno y coseno (verifícalo).

Problema 9: Encontrar las razones trigonométricas de los ángulos β_1 y β_2, con vértice en el origen y lados finales en $\overline{OF}$ y $\overline{OG}$, respectivamente, donde F(-3, -2) y G(3, -3); dibujar la figura correspondiente.

Respuesta: Tenemos ángulos obtusos con lados finales en el tercero y cuarto cuadrante:



$\operatorname{sen}\angle\beta_1 = -2/\sqrt{13} = -0.5547,$

$\cos\angle\beta_1 = -3/\sqrt{13} = -0.8320,$

$\tan\angle\beta_1 = 3/2 = 1.500,$

$\operatorname{sen}\angle\beta_2 = -3/\sqrt{18} = -0.7071,$

$\cos\angle\beta_2 = 3/\sqrt{18} = 0.7071$ y

$\tan\angle\beta_2 = -3/3 = -1.$

Nuevamente, la medida en grados de los ángulos β_1 y β_2 , no la encontramos directamente en las tablas comunes, por lo que es necesario deducir fórmulas trigonométricas que relacionen ángulos del tercer y cuarto cuadrante con ángulos del primer cuadrante. Sin embargo, el conocimiento de estas fórmulas no resulta esencial para el presente estudio, por lo que remitimos al lector interesado, al libro de Granville, Trigonometría Plana.

Una identidad, o igualdad trigonométrica, que no podemos dejar fuera por su gran importancia y aplicación es:

$$\operatorname{sen}^2 \angle\alpha + \cos^2 \angle\alpha = 1,$$

ésta se cumple para cualquier ángulo α y se verifica partiendo de las definiciones que hemos dado:

$\operatorname{sen} \angle\alpha = y_\rho / r$ y

$\cos \angle\alpha = x_\rho / r$. Entonces,

$\operatorname{sen}^2 \angle\alpha = y_\rho^2 / r^2$ y

$\cos^2 \angle\alpha = x_\rho^2 / r^2$, por lo mismo,

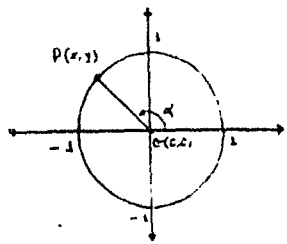
$\operatorname{sen}^2 \angle\alpha + \cos^2 \angle\alpha = y_\rho^2 / r^2 + x_\rho^2 / r^2$, y puesto que,

$r = \sqrt{x_\rho^2 + y_\rho^2}$ entonces,

$\operatorname{sen}^2 \angle\alpha + \cos^2 \angle\alpha = r^2 / r^2 = 1.$

EJERCICIO.

a) Considérese la circunferencia de radio igual a la unidad y centro en el origen, y tómese un punto cualquiera P(x, y) en - ella; entonces, como sabemos, se define:



$\operatorname{sen} \angle\alpha = y$

$\cos \angle\alpha = x$

$\tan \angle\alpha = y/x$

Dar la expresión correspondiente para tres razones trigonomé-- tricas restantes.

b) A partir de las definiciones dadas en el inciso a, muestre que: $(\operatorname{sen} \angle\alpha)(\csc \angle\alpha) = 1$; $\tan \angle\alpha = \operatorname{sen} \angle\alpha / \cos \angle\alpha$; - - $\sec^2 \angle\alpha = 1 + \tan^2 \angle\alpha$ y $\cos \angle\alpha = 1/\sec \angle\alpha$.

SOLUCION.

a) $\cot \angle\alpha = x/y$; $\sec \angle\alpha = 1/x$ y $\csc \angle\alpha = 1/y$.

b) Sabemos que, $\operatorname{sen} \angle\alpha = y$ y $\csc \angle\alpha = 1/y$ entonces,

$(\operatorname{sen} \angle\alpha)(\csc \angle\alpha) = (y)(1/y) = 1$.

Puesto que, $\tan \angle\alpha = y/x$, $\operatorname{sen} \angle\alpha = y$ y $\cos \angle\alpha = x$ entonces,

$\tan \angle\alpha = y/x = \operatorname{sen} \angle\alpha / \cos \angle\alpha$.

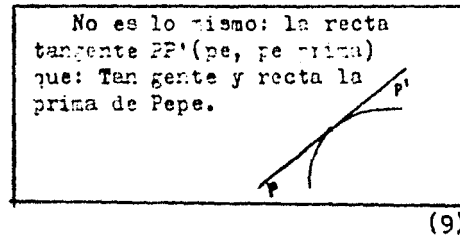
Sabemos que, $\sec^2 \angle\alpha = 1/x^2$ y $1 + \tan^2 \angle\alpha = x^2 + y^2/x^2$ y como el punto P(x, y) pertenece a la circunferencia de radio igual a - la unidad y centro en el origen, se cumple que, $x^2 + y^2 = 1$, por lo que, $x^2 + y^2/x^2 = 1/x^2$. Entonces,

$\sec^2 \angle\alpha = 1/x^2 = 1 + \tan^2 \angle\alpha$.

Como $\cos \angle\alpha = x$ y $\sec \angle\alpha = 1/x$ entonces,

$\cos \angle\alpha = x = 1/(1/x) = 1/\sec \angle\alpha$.

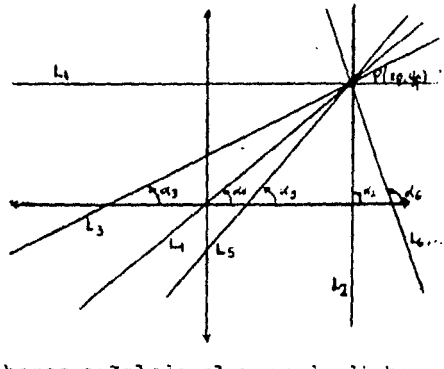
C. LA TANGENTE DEL ANGULO DE INCLINACION DE UNA LINEA RECTA.



(9)

Diferente de 90°.

Por geometría elemental, sabemos que por un punto en un plano pasan una infinidad de rectas. Elijamos $P(x_p, y_p)$ distinto del origen y prolonguemos las rectas que pasan por este punto hasta que corten al eje de las abscisas:



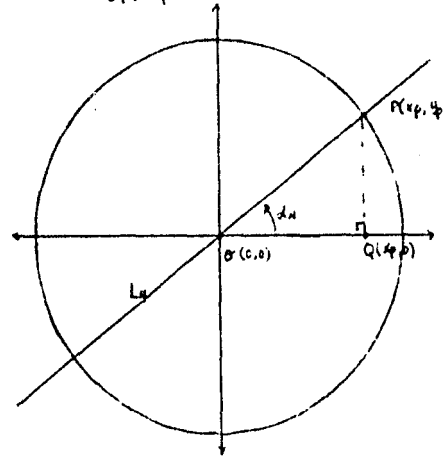
en la figura hemos señalado algunas de dichas rectas. En par-

(9) ARAGON, op. cit., Pág. 138.

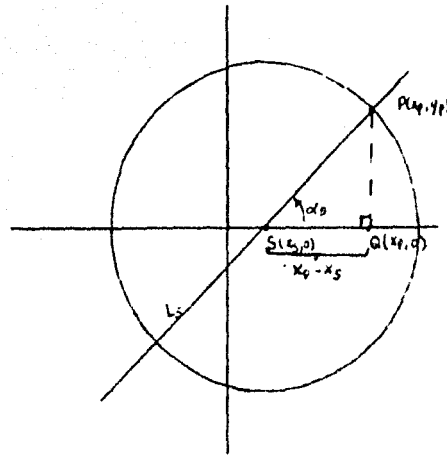
ticular, L_1 es paralela al eje de las abscisas y L_2 es perpendicular al mismo eje coordenado, dejamos estos dos casos "especiales" para tratarlos más adelante. Por el momento, nos ocuparemos de las rectas que forman con el mencionado eje de las abscisas un ángulo α mayor que 0° y menor que 180°, pero diferente de 90°.

Como se muestra en la figura, L_4 corta al eje de las abscisas en el origen, entonces, al igual que en la sección anterior, es posible trazar la circunferencia de centro en el origen y radio $\overline{OP}$; y calculamos la tangente del ángulo α_4 por medio del cociente de las coordenadas de $P(x_p, y_p)$, es decir,

$$\tan \measuredangle \alpha_4 = y_p / x_p .$$



Para L_5, la situación es distinta, puesto que esta recta corta al eje de las abscisas en un punto distinto al origen; - llamemos S a dicho punto y tracemos la circunferencia de centro en $S(x_s, 0)$ y radio $\overline{SP}$:



Obviamente, en el Δ PQS, el valor del cateto adyacente ya no depende exclusivamente de la coordenada x_P , del punto P; este cateto lo tomamos como la diferencia:

$x_P - x_S$, y definimos la tangente del ángulo α_S como,

$\tan \angle \alpha_S = y_P / (x_P - x_S)$.

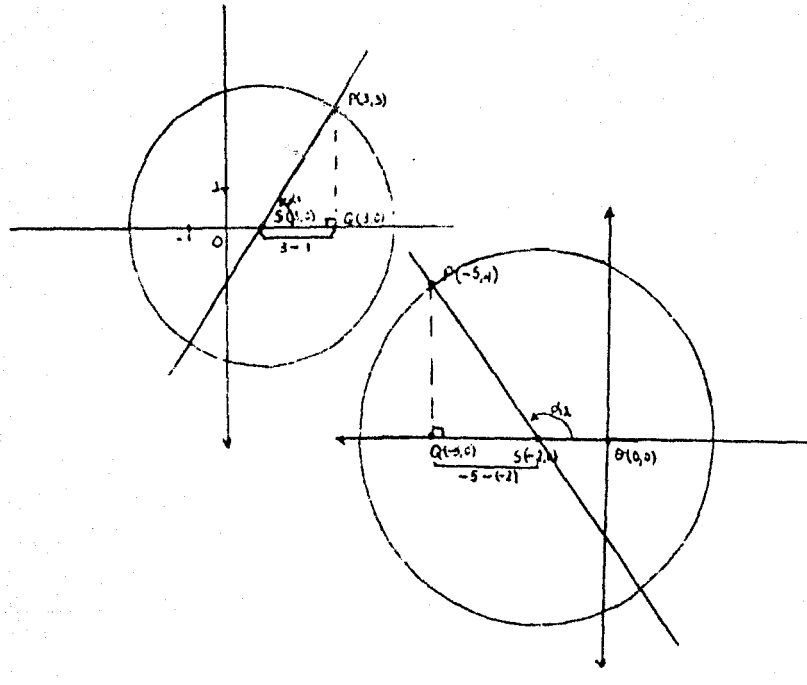
Nótese que no se está tomando la d(Q, S), tal como la hemos definido, puesto que ésta es igual al valor absoluto de dicha diferencia, es decir,

$d(Q, S) = |x_P - x_S|$; y, como sabemos, se cumple que,

$|x_P - x_S| = |x_S - x_P|$; pero,

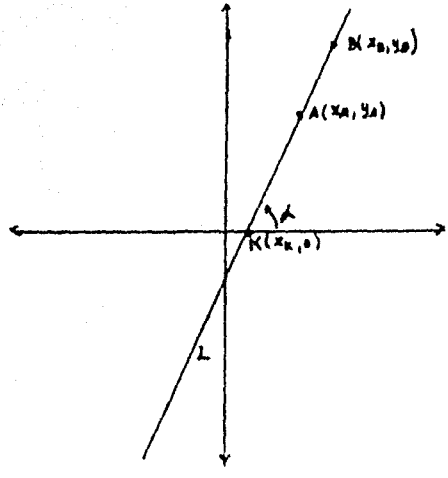
$x_P - x_S = -(x_S - x_P)$.

Problema 10. Calcular la razón tangente de cada uno de los ángulos marcados en las figuras siguientes:

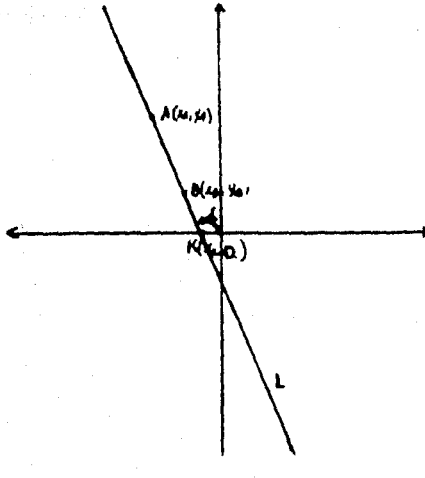


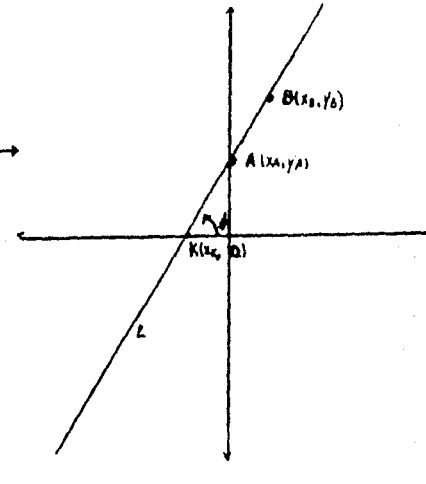
Respuesta: Tan $\angle\alpha_1 = 3/2$ y tan $\angle\alpha_2 = -1.333$, puesto -- que, tan $\angle\alpha_1 = 3/(3 - 1) = 3/2 = 1.500$ y tan $\angle\alpha_2 = 4/(-5 -(-2)) = 4/(-5 + 2) = 4/-3 = -4/3$. Y, por lo mismo, $\angle\alpha_1 = 56^\circ\ 20'$ apro-- ximadamente y $\angle\alpha_2 = 180^\circ - 53^\circ 10' = 126^\circ 50'$ aproximadamente.

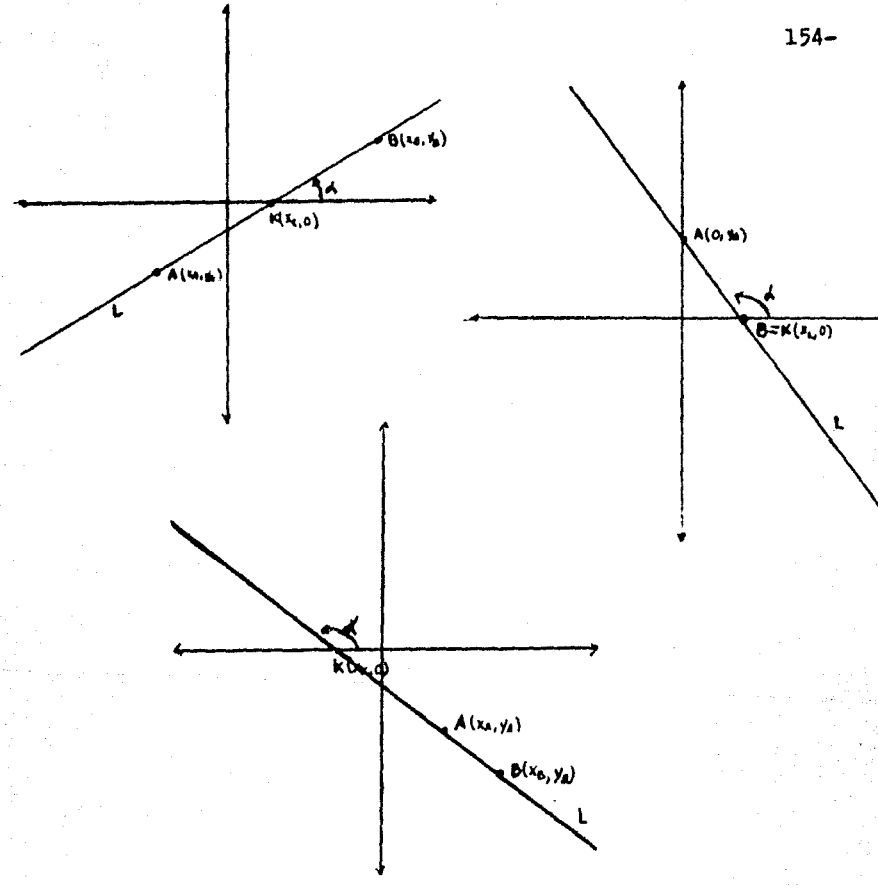
Generalicemos aún más esta idea, tomando dos puntos --- $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ arbitrarios, sobre una recta L también - arbitraria, con la condición de que L no sea ni paralela, ni - perpendicular al eje de las abscisas. Y obtengamos la tangente del ángulo α .



Observa que es por comodidad que en el dibujo aparezcan los puntos A y B en el primer cuadrante, pero éstos pueden estar en cualquiera de los tres cuadrantes restantes:

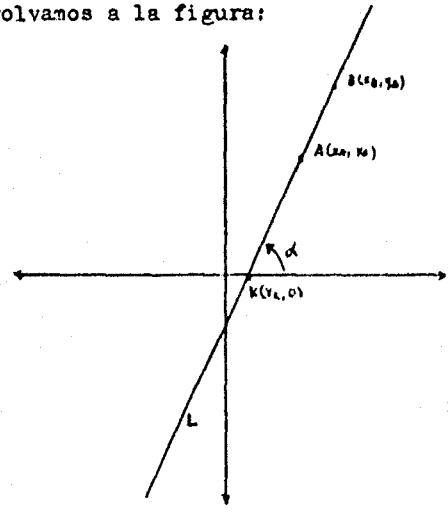




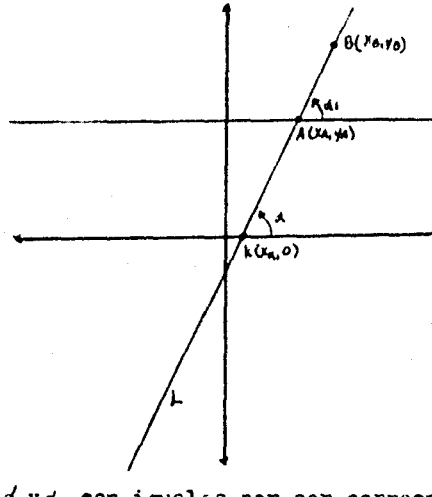


En todos los casos (estas figuras solamente representan algunos), la recta L corta al eje de las abscisas en un punto - $K(x_K, 0)$, formando cuatro ángulos, de los cuales nos interesa únicamente el señalado con la letra α . El $\angle\alpha$ tiene como lado inicial a la parte del eje de las abscisas comprendida del - punto K hacia la derecha del mismo. Al $\angle\alpha$ lo llamamos: "ángulo de inclinación de la recta L".

Pero, volvamos a la figura:

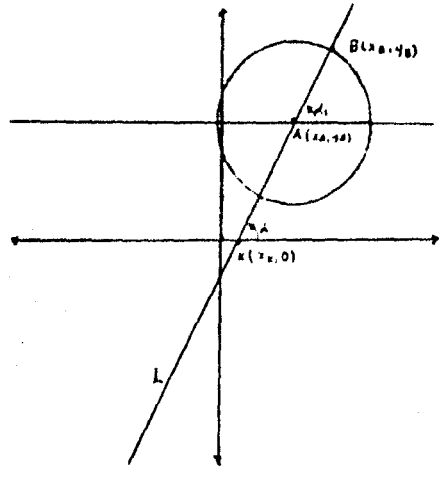


Y, tracemos la recta paralela al eje de las abscisas que pase por el punto $A(x_A , y_A)$.

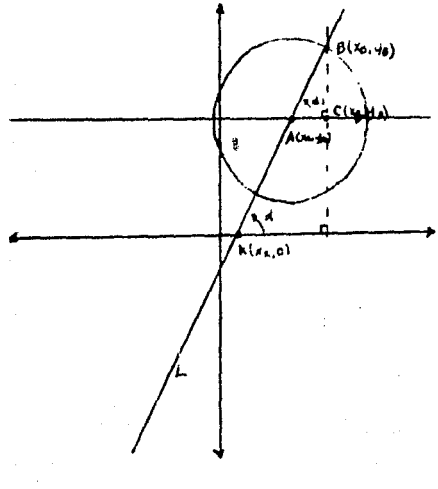


Los ángulos α y α_1 son iguales por ser correspondientes entre rectas paralelas. Por lo que nuestro problema se reduce a calcular el valor de la razón tangente del ángulo α_1 . - - - - -

Tracemos la circunferencia de centro en el punto $A(x_A, y_A)$ y - radio $\overline{AB}$.



Formemos el ΔABC, trazando la perpendicular al eje de las abscisas que pasa por el punto $B(x_B, y_B)$. Obviamente el ángulo -- con vértice en el punto $C(x_C, y_C)$ es recto.



Como se observa, el valor de los catetos del Δ ABC no dependen exclusivamente de las coordenadas del punto $B(x_B, y_B)$, de hecho, el cateto adyacente al ángulo α, se toma como la diferencia: $x_B - x_A$; y el cateto opuesto al mismo $\angle\alpha$, es: $y_B - y_A$. Definamos entonces, a la tangente del $\angle\alpha$ como el cociente de estas diferencias, es decir,

$$\tan \angle\alpha = (y_B - y_A)/(x_B - x_A).$$

Ahora bien, al ángulo α lo llamamos ángulo de inclinación de la recta L, al valor de la razón tangente lo llamaremos: pendiente de la recta L. Entonces, definimos la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ como el cociente,

$$(y_B - y_A)/(x_B - x_A),$$

por supuesto que la pendiente será un número real siempre que $x_B \neq x_A$; el único caso en que $x_B = x_A$ se presenta cuando tenemos una recta perpendicular al eje de las abscisas, pero éste lo trataremos más adelante.

A la pendiente de la recta se acostumbra denotarla con la letra m. Así, la expresión:

$$m = (y_B - y_A)/(x_B - x_A) \qquad (10)$$

debe leerse como: "la pendiente m de la recta que pasa por los puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$".

---

(10) Puesto que $x_B - x_A = -(x_A - x_B)$, se tiene que, $-(y_B - y_A)/(x_B - x_A) = -((y_B - y_A)/(x_A - x_B))$, y puesto que $y_B - y_A = -(y_A - y_B)$ entonces, $(y_B - y_A)/(x_B - x_A) = -((y_A - y_B)/(x_B - x_A))$; pero $(y_B - y_A)/(x_B - x_A) = (y_A - y_B)/(x_A - x_B)$, por lo mismo emplearemos indistintamente ambos miembros de la tercera igualdad en lo sucesivo.

Problema 11. Obtener la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A(3, 2) y B(1, 0).

Respuesta: Sustituímos los valores de las coordenadas de los puntos A(3, 2) y B(1, 0), en la fórmula,

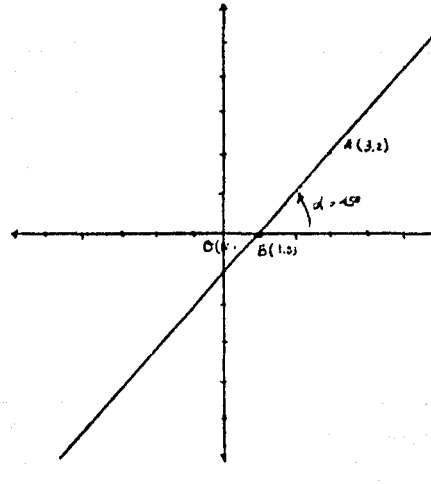
$m = (y_A - y_B)/(x_A - x_B)$ y obtenemos,

$m = (2 - 0)/(3 - 1)$, o lo que es lo mismo,

$m = 1$, por lo que,

$\tan \angle\alpha = 1$ y $\angle\alpha = 45°$

Entonces, la pendiente de la recta es el número uno y el ángulo de inclinación de la misma es de 45°.



Problema 12. Obtener el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A(2, -3) y B(-2, 2).

Respuesta: Nuevamente aplicamos la fórmula,

$m = (y_A - y_B)/(x_A - x_B)$,

$m = (-3 - 2)/(2 - (-2))$,

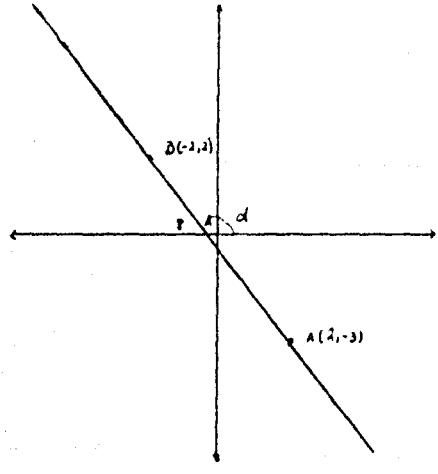
$m = -5/4$ y, por lo mismo,

$\tan \angle\alpha = -5/4$, o bien,

$|\tan(180° - \angle\alpha)| = 5/4$ y

$\angle\alpha = 180° - 51° 20'$, es decir,

$\angle\alpha = 128° 40'$.



EJERCICIO.

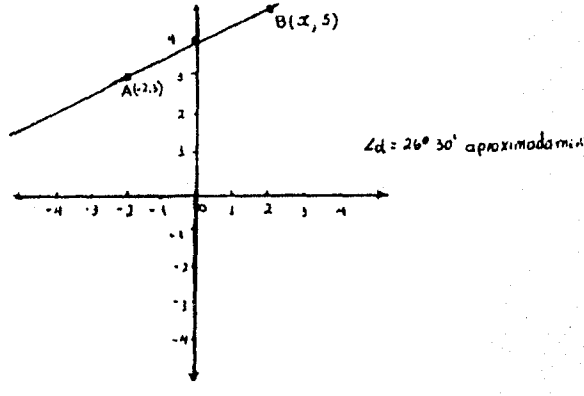
a) La pendiente de la recta que pasa por los puntos A(-2, 3) y B(x, 5) es 0.5. Hallar la abscisa del punto B. Graficar.

b) La pendiente de la recta que pasa por los puntos A(-3, y) y B(-1, 0) es 1; encontrar la ordenada del punto A. Graficar.

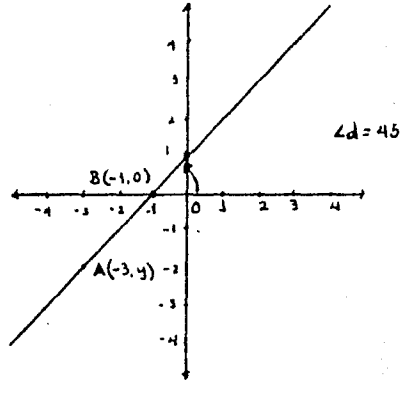
SOLUCION.

a) Puesto que $m = (y_A - y_B)/(x_A - x_B)$, se tiene al sustituir valores que:

$1/2 = (3 - 5)/(-2 - x)$; por lo mismo, $x = 2$.



b) La ordenada es -2.



CAPITULO V.

LA ECUACION DE LA LINEA RECTA.

A. LA FORMA PENDIENTE Y ORDENADA EN EL ORIGEN.

> El primero de estos preceptos, consistía en no recibir como verdadero lo que con toda evidencia no reconociese como tal, evitando cuidadosamente la -- precipitación y los prejuicios, y no aceptando como cierto sino lo presente a mi espíritu de manera tan clara y distinta que acerca de su certeza no pudiera caber la menor duda. (1)

Por los resultados obtenidos en la sección C del capítulo III, de este trabajo, sabemos que los conjuntos:

$$L = \{ (x, y) \mid y = 2x, \ x \in \mathbb{R} \},$$

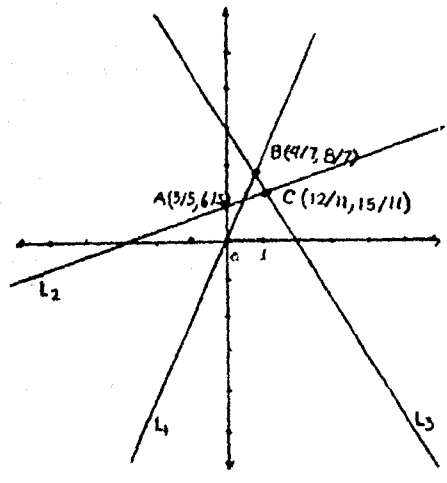
$$L = \{ (x, y) \mid y = 1/3 \ x + 1, \ x \in \mathbb{R} \} \text{ y}$$

$$L = \{ (x, y) \mid y = -3/2 \ x + 3, \ x \in \mathbb{R} \},$$

tienen por gráfica a una línea recta. He aquí la figura correspondiente:

---

(1) DESCARTES, René. Discurso del método. Pág. 16.



Estas rectas se cortan en parejas en un solo punto:

$$L_1 \cap L_2 = \{ A(3/5,\ 6/5) \}$$
$$L_1 \cap L_3 = \{ B(4/7,\ 8/7) \}$$
$$L_2 \cap L_3 = \{ C(12/11,\ 15/11) \} \quad ,$$

es decir, L_1 y L_2 coinciden en el punto A; L_1 y L_3 en el punto B y L_2 y L_3 en el punto C; sin embargo, difieren en sus otros puntos, por lo mismo los conjuntos L_1, L_2 y L_3 son distintos entre sí. Esta diferencia la marca, sin duda, la característica que determina a cada uno de estos conjuntos; en otras palabras, las parejas de números reales que cumplen con las igualdades:

$$y = 2x, \quad y = 1/3\ x + 1, \quad y = -3/2\ x + 3$$

son distintas en general. A estas tres expresiones las nombramos ecuaciones de primer grado, y puesto que, como hemos observado, las soluciones de éstas determinan rectas en el plano, es común llamarlas ecuaciones de las rectas, entonces:

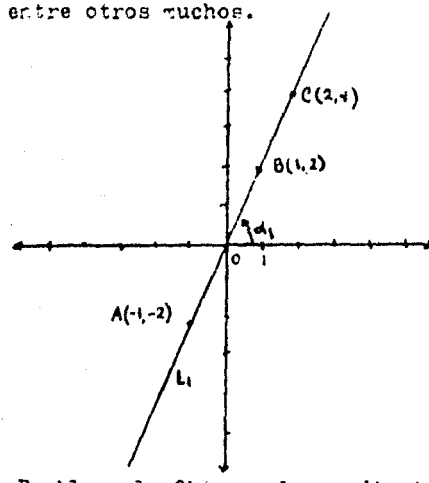
$y = 2x$ es la ecuación de la recta L_1,

$y = 1/3\ x + 1$ es la ecuación de la recta L_2,

$y = -2/3\ x + 3$ es la ecuación de la recta L_3 y, en general, decimos que

$y = mx + b$ es la ecuación de la recta L, donde m y b son dos números reales, que permanecen constantes.

Detengámonos un momento, en la recta L_1, como observamos esta recta corta al eje de las abscisas en el origen, formando el ángulo agudo α_1 (recordemos que al $\angle\alpha_1$ lo llamamos ángulo de inclinación de la recta L_1, éste tiene como vértice al origen y como lado inicial al semieje positivo de las abscisas). Además L_1 contiene a los puntos A(-1, -2), B(1, 2) y C(2, 4), entre otros muchos.



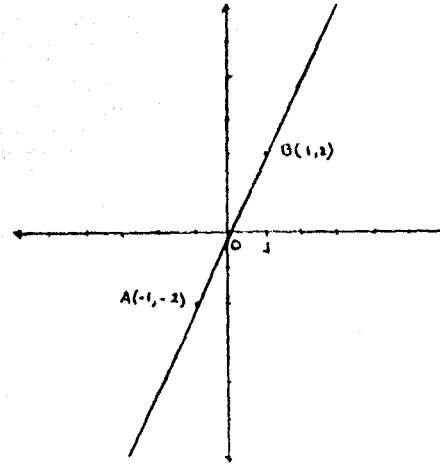
Problema 1. Obtener la pendiente de la recta L_3.

Respuesta: La recta pasa por los puntos A(-1, -2) y B(1, 2) entonces, al aplicar la fórmula de la sección anterior, obtenemos:

$$m = (y_A - y_B)/(x_A - x_B) = (-2 - 2)/(-1 - 1) = -4/-2,$$

por lo mismo la pendiente m_1, de la recta L_1, es igual a dos, simbólicamente:

$$m_1 = 2.$$



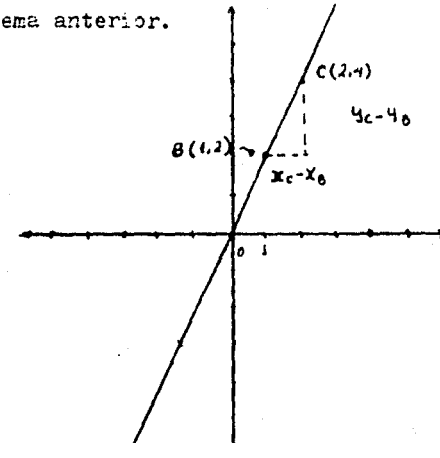
Problema 2. Considerando los puntos B(1, 2) y C(2, 4) obtener la pendiente de la recta L_1.

Respuesta: Aplicamos nuevamente nuestra fórmula, ahora con las coordenadas de los puntos B y C,

$$m_1 = (y_C - y_B)/(x_C - x_B),$$

$$m_1 = (2 - 4)/(1 - 2) = -2/(-1) = 2.$$

Como era de esperarse, la pendiente m_1 sigue siendo igual a dos, aún cuando han sido tomados dos puntos distintos a los del problema anterior.



Problema 3. Obtener la pendiente de la recta L_1, - considerando los puntos B(1, 2) y D(2, 3).

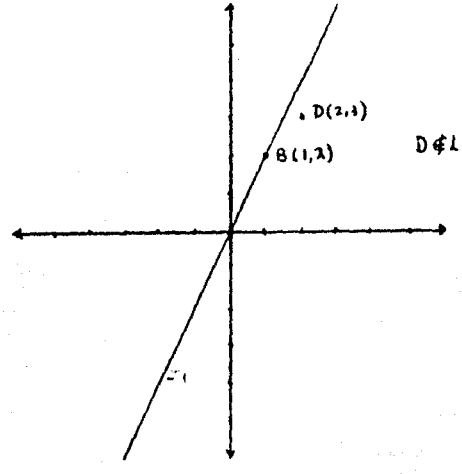
Respuesta: Nuevamente aplicamos la ya conocida fórmula y esperamos que $m_1 = 2$, entonces:

$$m_1 = (y_B - y_D)/(x_B - x_D),$$
$$m_1 = (2 - 3)/(2 - 1) = -1/2 \quad !$$

Evidentemente, tenemos un error, puesto que $2 \neq -1/2$. Esto se debe sencillamente, a que el punto D(2, 3) no está en la recta L_1, puesto que $3 \neq 2(2)$, es decir, no cumple con la condición $y = 2x$. En general L_1 está formada por todas las parejas $(x, 2x)$, entonces los puntos A y B pertenecen a la recta, - siempre y cuando, su ordenada sea el doble de su abscisa, por lo mismo $A(x_A, 2x_A)$ y $B(x_B, 2x_B)$ cumplen con:

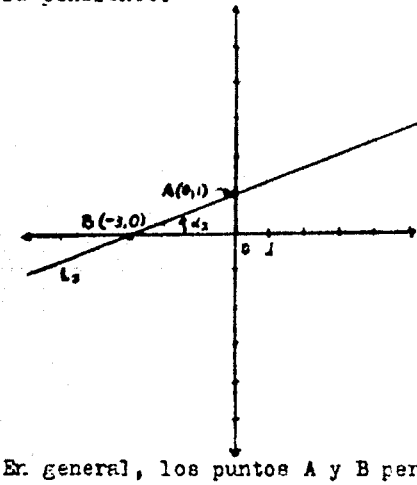
$$m_1 = (y_A - y_B)/(x_A - x_B) = (2x_A - 2x_B)/(x_A - x_B)$$
$$= 2(x_A - x_B)/(x_A - x_B) = 2,$$

en resumen, L_1 es un conjunto de puntos que tomados por parejas hacen que $m_1 = 2$.



Problema 4. Obtener la pendiente de la recta L_2.

Respuesta: L_2 tiene por condición que $y = 1/3\ x + 1$ entonces, determinemos dos puntos que solucionen esta ecuación tomando $x = -3$ y $x = 0$; así, si $x = -3$, $y = (1/3)(-3) + 1 = 0$ por lo que el punto $B(-3, 0)$ pertenece a L_2 y si $x = 0$ entonces, $y = (1/3)(0) + 1 = 1$ y el punto $A(0, 1)$ también pertenece a la recta en cuestión. Dibujemos la recta L_2 y calculemos su pendiente.



$m_2 = (y_A - y_B)/(x_A - x_B)$

$m_2 = (1 - 0)/(0 - (-3))$

por lo mismo,

$m_2 = 1/3$

En general, los puntos A y B pertenecen a la recta L_2 si sus ordenadas cumplen con las siguientes igualdades:

$$y_A = 1/3\ x_A + 1, \qquad y_B = 1/3\ x_B + 1$$

por lo que,

$$m_2 = (y_A - y_B)/(x_A - x_B)$$

$$m_2 = ((1/3\ x_A + 1) - (1/3\ x_B + 1))/(x_A - x_B)$$

$$m_2 = (1/3\ (x_A - x_B))/(x_A - x_B), \text{ es decir,}$$

$$m_2 = 1/3\ .$$

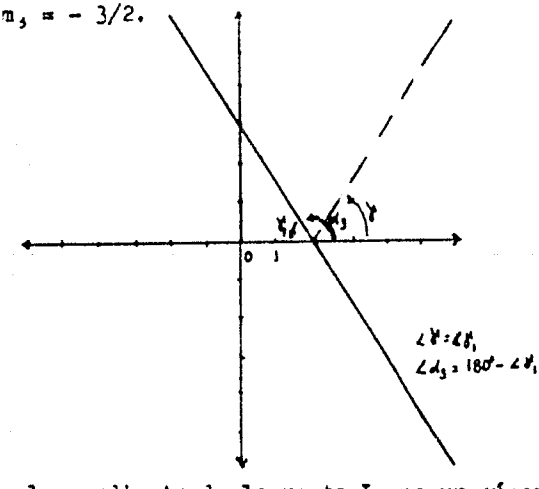
Problema 5. Obtener la pendiente de L_3.

Respuesta: En L_3 la condición es $y = -3/2\ x + 3$ entonces, al punto $A(x_A, y_A)$ está en la recta si, $y_A = -3/2x_A + 1$ y, por lo mismo, el punto $B(x_B, y_B)$ también debe cumplir con $y_B = -3/2\ x_B + 1$ para pertenecer a L_3. Por todo esto,

$$m_3 = (y_A - y_B)/(x_A - x_B),$$

$$m_3 = ((-3/2\ x_A + 3) - (-3/2\ x_B + 3))/(x_A - x_B),$$

$$m_3 = -3/2.$$



Observa que la pendiente de la recta L_3 es un número negativo por lo que para encontrar el ángulo de inclinación de la misma ($\angle\alpha_3$), es necesario aplicar la relación:

$$\text{Tan}\angle\alpha_3 = -\tan(180° - \alpha) \text{ donde,}$$

$$\tan\angle\alpha = 3/2 \quad y$$

$$\angle\alpha = 56°\ 20'\ \text{aproximadamente,}$$

$$\angle\alpha_3 = 180° - 56°\ 20',\ \text{o bien,}$$

$$\angle\alpha_3 = 123°\ 40'.$$

Entonces, de acuerdo con los resultados obtenidos en los problemas precedentes, la recta L_1 cuya ecuación es $y = 2x$, tiene por pendiente a 2, L_2 cuya ecuación es $y = 1/3\ x + 1$ tiene por pendiente a 1/3, L_3 cuya ecuación es $y = -3/2\ x + 3$ tiene por pendiente a -3/2; inducimos que la recta L de ecuación $y = mx + b$ tiene por pendiente al número m, donde como sabemos, $m=(y_A - y_B)/(x_A - x_B)$, y y_A, y_B, x_A y x_B son las coordenadas de dos puntos A y B que pertenezcan a L.

Problema 6. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2, 2) y tiene pendiente $m = 1/2$.

Respuesta: Sabemos que, para dos puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ estén en la recta se debe cumplir que:

$$m=(y_A - y_B)/(x_A - x_B).$$

conocemos el valor de las coordenadas del punto A y el de la pendiente de la recta entonces, al sustituir Obtenemos:

$$1/2 =(2 - y_B)/(2- x_B),$$ y procedemos a despejar,

$$y_B = 1/2\ x_B + 1,$$

como $B(x_B, y_B)$ puede ser cualquier punto sobre la recta en cuestión, eliminemos los subíndices y tenemos la ecuación que deseamos:

$y = 1/2\ x + 1$, que no es otra que la ecuación de la recta L_2 (verifícalo).

Problema 7. Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto B(4, -3) y tiene pendiente $m= -3/2$.

Respuesta: Otro punto cualquiera de la recta es - - $A(x, y)$ por lo que de

$$m =(y_A - y_B)/(x_A - x_B)$$ se obtiene,

$-3/2 =(y - (-3))/(x - 4)$, o lo que es lo mismo,

$y = -3/2\ x + 3$. Que es la ecuación de la recta L_3 (verifícalo).

Problema 8. Obtener la ecuación de la recta que pasa por el origen y tiene pendiente m = 2.

Respuesta: Tomemos para B(x_B , y_B) las coordenadas del origen y al punto A(x, y) a cualquier punto sobre la recta distinto del mismo origen, entonces:

$$m = (y_A - y_B)/(x_A - x_B)$$

$$2 = (y - 0)/(x - 0), \text{ o bien,}$$

$$y = 2x.$$

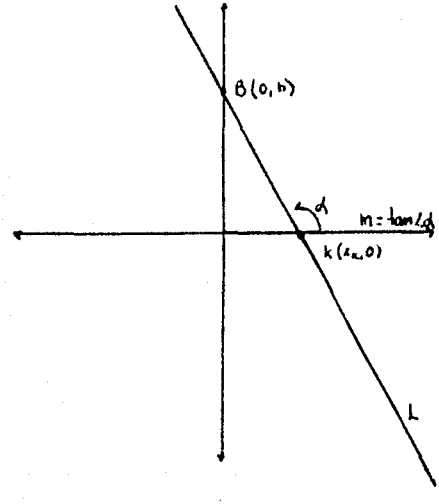
En general, la ecuación de la recta con pendiente m y que pasa por el punto B(x_B , y_B) es:

$$y - y_B = m(x - x_B).$$

En el caso particular en que B(0, b) tenemos la expresión:

$$y = mx + b,$$

que llamamos la ecuación de la recta con pendiente m y ordenada al origen igual a b.



Problema 2. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2, 1) y B(4, -3). Verificar el resultado obtenido.

Respuesta: Como los puntos A y B deben estar en la recta, se debe cumplir que la pendiente de la misma sea:

$m = (y_A - y_B)/(x_A - x_B)$ por lo que,

$m = (-3 - 1)/(4 - 2) = -2$;

Con la pendiente $m = -2$ y el punto B(4, -3), aplicamos la primera fórmula del párrafo anterior:

$y - y_B = m(x - x_B)$, por lo que,

$y - (-3) = -2(x - 4)$, o bien,

$y = -2x + 5$, es la ecuación que buscamos.

Para verificar este resultado, basta con sustituir los valores de las coordenadas de los puntos en cuestión en la ecuación y obtener una igualdad. Así, para el punto A(2, 1) sustituímos en,

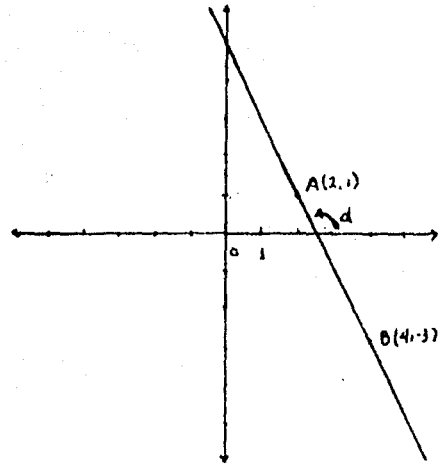
$y = -2x + 5$ y obtenemos,

$1 = -2(2) + 5$ y como

$1 = -4 + 5$, decimos que las coordenadas del punto A satisfacen la ecuación; para el punto B(4, -3) se tiene,

$-3 = -2(4) + 5$, o bien,

$-3 = -8 + 5$ por lo que las coordenadas del punto B también satisfacen a la susodicha ecuación. Que ambos puntos "satisfagan" la ecuación significa que ambos puntos estén en la recta con ecuación $y = -2x + 5$ y como "por dos puntos en el plano pasa una única recta" no queda duda alguna de que nuestro resultado es correcto.



Para concluir esta sección obtengamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$. Obviamente,

$$m = y_A - y_B / x_A - x_B,$$

por lo que al sustituir este valor en la ecuación de la recta con pendiente m y que pasa por el punto $B(x_B, y_B)$,

$y - y_B = m(x - x_B)$, se tiene,

$$y - y_B = \left((y_A - y_B)/(x_A - x_B)\right)(x - x_B).$$

EJERCICIO.

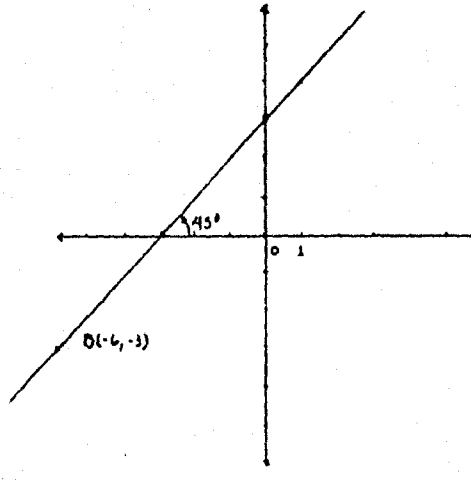
a) Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto B(-6, -3) y ángulo de inclinación igual a 45°. Efectuar la gráfica correspondiente.

b) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto B(0, 3) y tiene pendiente m = 0. Efectuar la gráfica correspondiente.

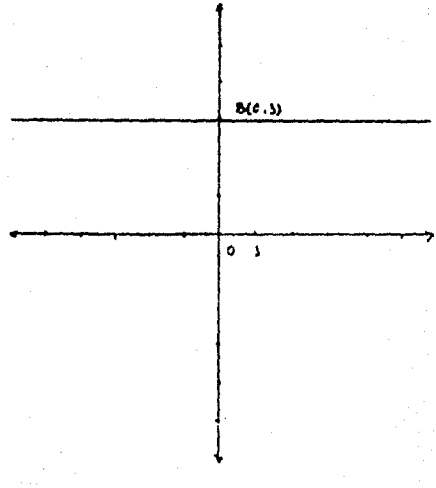
c) Los vértices de un triángulo son A(1, 2), B(-3, -3) y C(5,-3) determinar las ecuaciones de las rectas que contiene a sus lados. Dibujar la gráfica correspondiente.

SOLUCION.

a) $y = x + 3$.



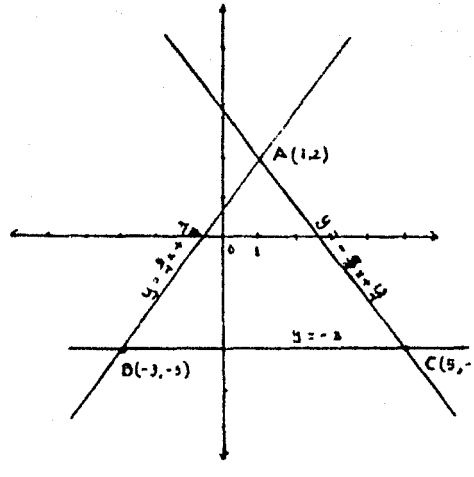
b) $y = 3$.



c) $y = 5/4\ x + 3/4$,

$y = -3$ y

$y = -5/4\ x + 13/4$.



B. LOS CASOS ESPECIALES Y LA FORMA SIMETRICA.

> El segundo, era la división de cada una de las dificultades con que tropieza la inteligencia al investigar la verdad, en tantas partes como fuera necesario para resolverlas. (2)

Hasta el momento, hemos trabajado con rectas oblicuas al eje de las abscisas, avoquémonos en esta sección al estudio de las rectas paralelas y perpendiculares al, tan mencionado, eje.

Problema 10. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(4, 1) y B(2, 1).

Respuesta: Aplicamos la fórmula,

$y - y_0 = ((y_A - y_B)/(x_A - x_B))(x - x_B)$, y obtenemos,

$y - 1 = ((1 - 1)/(4 - 2))(x - 1)$, o bien,

$y - 1 = 0\ (x - 4)$, es decir,

$$y = 1.$$

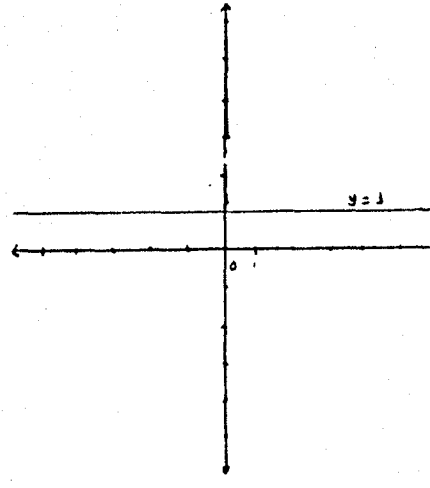
Estamos ante una recta cuya pendiente es igual a cero, pero esto no debe preocuparnos, puesto que como sabemos, el conjunto:

$$L = \{ (x , y) \mid y = 1,\ x \in \mathbb{R} \}$$

representa una recta paralela al eje de las abscisas, y por lo mismo no tenemos ángulo de inclinación, o visto de otra forma, $\angle\alpha = 0^\circ$ y $\tan\angle\alpha = 0$. He aquí a esta recta.

---

(2) Idem.



Lo mismo sucede para todas las rectas cuya ecuación sea - $y = k$, donde k representa un número real, que permanece constante, puesto que cualquier par de puntos que pertenezcan a la recta tendrán por ordenada al número k, es decir, $A(x_A, k)$ y - $B(x_B, k)$ serán dos de estos puntos y la pendiente es:

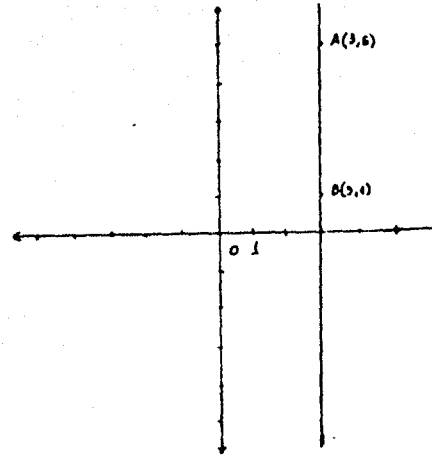
$m = (k - k)/(x_A - x_B)$, donde $x_A \neq x_B$.

Problema 11. Obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(3, 5) y B(3, 1).

Respuesta: Al aplicar la consabida fórmula obtenemos,

$y - 1 = ((5 - 1)/(3 - 3))(x - 3)$,

estamos ante un cociente que no está definido puesto que el divisor (3 - 3) es igual a cero. Este es justamente, el caso en que $x_A = x_B$. Localicemos los puntos A(3, 5) y B(3, 1) y dibujemos la recta que pasa por éstos:



Evidentemente, se trata de una recta paralela al eje de las ordenadas y por lo mismo perpendicular al eje de las abscisas, es decir, $\measuredangle \alpha = 90^{\circ}$, por lo que, $\tan \measuredangle \alpha = \infty$, donde el símbolo "$\infty$" (que debe leerse como: "infinito"), indica que el valor de la tangente es tan grande como se desee. En este caso decimos que la pendiente no está definida.

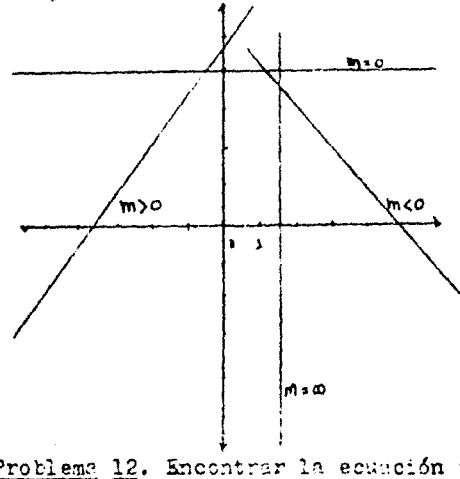
Como sabemos el conjunto $L = \{ (x, y) \mid x = 3, y \in \mathbb{R} \}$ determina a la recta que nos ocupa, por lo que aseguramos que $x = 3$ es la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(3,5) y B(3, 1). De igual forma todas las ecuaciones $x = k$, donde k es un número real cualquiera que permanece constante, representan rectas perpendiculares al eje de las abscisas, cuyas pendientes no están determinadas.

Puntualicemos, la ecuación $y = mx + b$ representa:

1). Una recta oblicua al eje de las abscisas si $m \neq 0$. Con dos casos particulares, si $m > 0$, el ángulo de inclinación es agudo; y si $m < 0$, el ángulo de inclinación es obtuso.

2). Una recta paralela al eje de las abscisas si $m = 0$.

3). En el caso de que $m = \infty$, la ecuación $y = mx + b$ se cambia por una de la forma $x = k$; y tenemos una recta perpendicular al eje de las abscisas.



Problema 12. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(a, 0) y B(0, b), donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Respuesta: Si A(a, 0) y B(0, b) tenemos que,

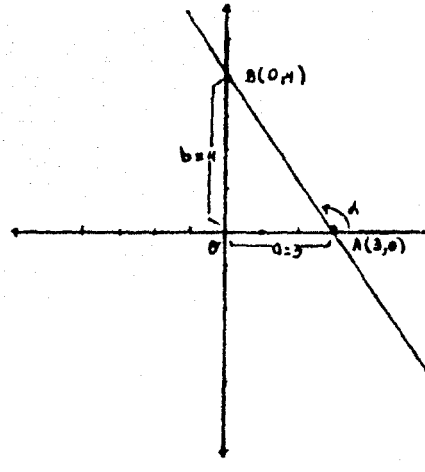
$y - 0 = ((b - 0)/(0 - a))(x - a)$, o bien,

$y = -b/a\ x + b$, pero esto mismo lo podemos escribir como,

$y/b + x/a = 1$, a esta expresión le nombramos la forma simétrica de la ecuación de la recta. Los números reales a y b marcan la distancia al origen de los puntos de intersección con los ejes, tomando en cuenta el signo. Observa los siguientes ejemplos numéricos.

1). si $a = 3$ y $b = 4$, la ecuación en su forma simétrica es,

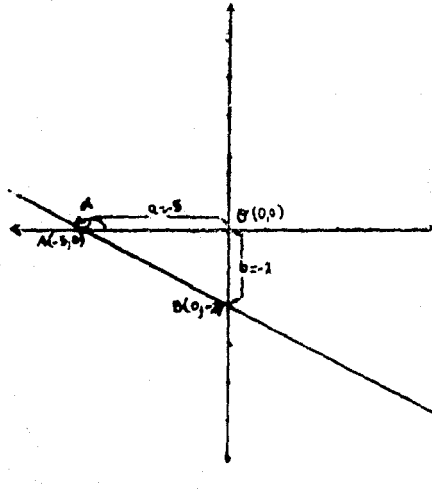
$y/4 + x/3 = 1$, su gráfica está dada por:



2). Si a = -5 y b = -2, la ecuación en su forma - simétrica es,

$y/-2 + x/-5 = 1$, o bien,

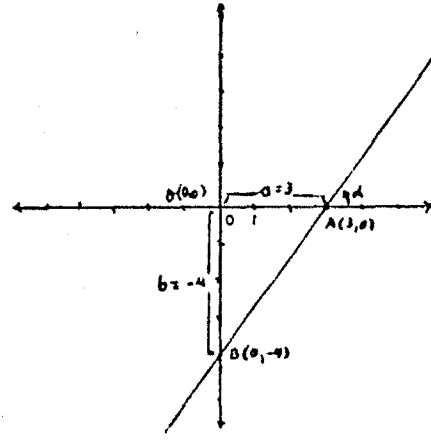
$-y/2 - x/5 = 1$.



3). Si a = 3 y b = -4, la ecuación de la recta en su forma simétrica es,

$y/-4 + x/3 = 1$, o bien,

$-y/4 + x/3 = 1$.



Efectuemos algunas operaciones algebraicas en la ecuación en su forma simétrica del ejemplo del inciso 1).

$y/4 + x/3 = 1$, multiplicando ambos miembros por doce, que es el mínimo común multiplo de 4 y 3, tenemos que,

$3y + 4x = 12$, por lo que al igualar a cero di,

$4x + 3y - 12 = 0$. Esta expresión es conocida como la ecuación de la recta en su forma general. Obviamente, al despejar a la variable ye tenemos,

$y = -4/3\ x + 4$, que como sabemos es la ecuación de la recta con pendiente $m = -4/3$ y corte con el eje de las abscisas en $y = 4$.

Para el ejemplo del inciso 2), se tiene:

$-y/2 - x/5 = 1$, es la ecuación de la recta en su forma simétrica,

$2x + 5y + 10 = 0$, es la ecuación de la misma recta en su forma general,

$y = -2/5\ x - 2$, es la ecuación de la recta con pendiente $m = -2/3$ y ordenada al origen en $y = -2$.

Y para el ejemplo del inciso 3),

$-y/4 + x/3 = 1$, ecuación de la recta en su forma simétrica,

$4x - 3y - 12 = 0$, ecuación de la recta en su forma general y

$y = 4/3\ x - 4$, la ecuación de la recta con pendiente $m = 4/3$ y ordenada al origen igual a -4.

Como observas tenemos tres nombres distintos para la misma recta; la utilidad de cada una de estas expresiones depende del problema que se desee resolver.

En general, para $a \neq 0$ y $b \neq 0$, se tiene que:

$y/b + x/a = 1$ es la ecuación en su forma simétrica,

$bx + ay - ab = 0$, es la ecuación en su forma general se acostumbre escribir como, $Ax + By + C = 0$ donde, $A = b$, $B = a$ y $C = -ab$; y, por último,

$y = -A/B\ x - C/B$, es la ecuación de la misma recta con pendiente $m = -A/B$ y ordenada al origen $-C/B$.

EJERCICIO.

a) Encontrar el ángulo de inclinación de las rectas:

$L_1 = \{(x, y) \mid x - y + 2 = 0, x \in \mathbb{R}\}$ y

$L_2 = \{(x, y) \mid x - y - 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$

b) Encontrar la pendiente de las rectas:

$L_3 = \{(x, y) \mid 3x - 4y - 4 = 0, x \in \mathbb{R}\}$ y

$L_4 = \{(x, y) \mid 4x + 3y - 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$

c) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-1, 2) y tiene pendiente m = 2. Escribirla en su forma simétrica.

d) Encontrar la ecuación de la recta que tiene pendiente m = -3/2 y que pasa por el origen.

e) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(0, -1) y B(-3/2, -4). Verificar el resultado.

f) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(3, 2) y B(-3, -2). ¿Esta recta es perpendicular al eje de las abscisas?.

g) ¿Qué tienen en común las rectas del inciso a?. Graficar.

h) ¿Son paralelas las rectas de los incisos c y e?. ¿Cómo son sus pendientes?. Graficar.

i) Graficar las rectas del inciso b y verificar que éstas son perpendiculares empleando un par de escuadras.

j) Graficar las rectas de los incisos d y f. Verificar con un par de escuadras que estas rectas son perpendiculares y comprobar que el producto de sus pendientes es -1.

k) ¿Cuántas rectas tienen pendiente m = 2?.

l) ¿Cuántas rectas pasan por el punto P(-1, 3).

SOLUCION.

a) Para L_1 $\angle\alpha_1 = 45°$; para L_2 el $\angle\alpha_2 = 45°$.

b) Para L_3 $m_3 = 3/4$; para L_4 $m_4 = -4/3$.

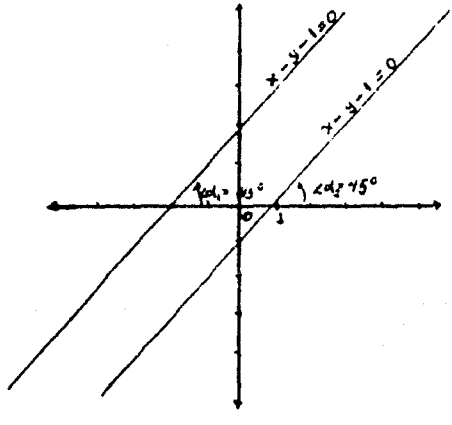
c) $y/4 - x/2 = 1$.

d) $y = -3/2\ x$.

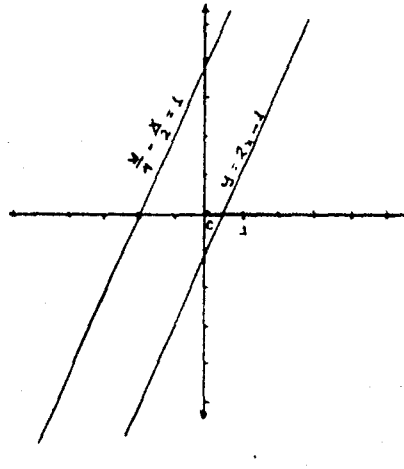
e) $y = 2x - 1$.

f) $y = 2/3\ x$. No es perpendicular al eje de las abscisas porque $x_A \neq x_B$.

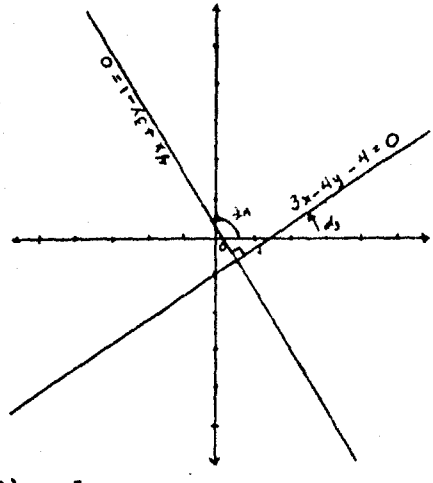
g) Tienen igual ángulo de inclinación ($\angle \alpha = 45^\circ$) y por lo mismo, tienen igual pendiente ($m = 1$).



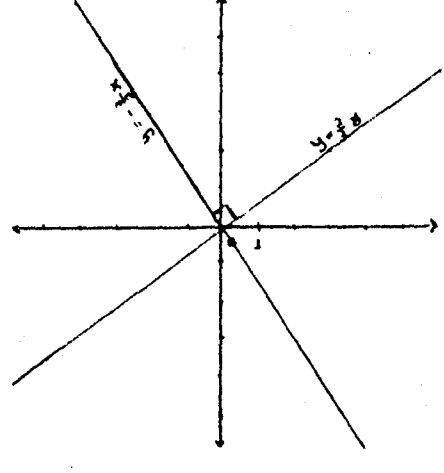
h) Sí, son paralelas. Sus pendientes son iguales ($m = 2$).



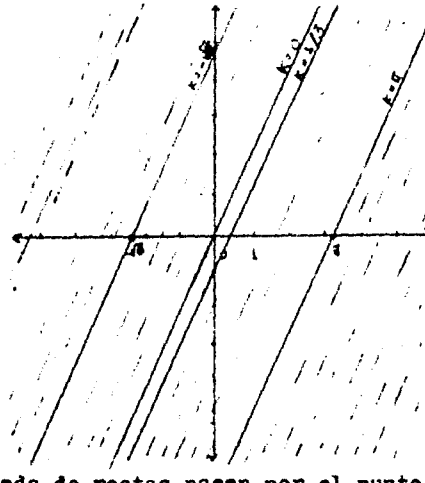
i) Las pendientes son 3/4 y -4/3 respectivamente, por lo que (3/4)(-4/3) = -1.



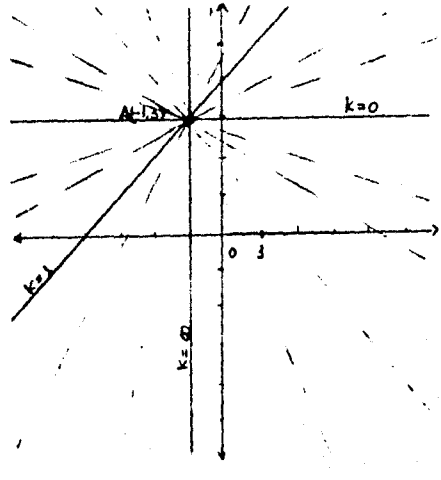
j) (-3/2)(2/3) = -1.



k) Una infinidad de rectas que llamamos "familia de rectas con pendiente m = 2" y representamos con la ecuación y = 2x + k, donde K toma cualquier valor en los números reales.



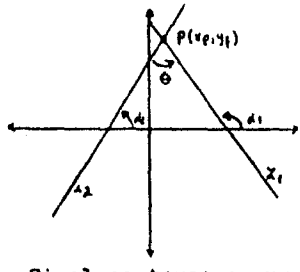
l) Una infinada de rectas pasan por el punto A(-1, 3), las cuales tiene por ecuación a y = k(x + 1) + 3, donde k puede tomar cualquier valor en los reales. En el caso en que k = ∞ tenemos la recta x = -1, que como recordarás es perpendicular al eje de las abscisas.

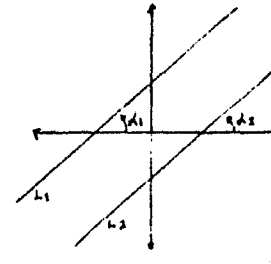


C. LAS CONDICIONES DE PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO.

El tercero, ordenar los conocimientos, empezando siempre por los más sencillos, elevándome por grados hasta llegar a los más compuestos, y suponiendo un orden en aquellos que no lo tenían por naturaleza. (3)

Por geometría elemental, sabemos que dos rectas, L_1 y L_2 en el plano, pueden cortarse en un solo punto $P(x_p, y_p)$, o -- ser paralelas, pero no ambas cosas a la vez.





Si al cortarse en un punto $P(x_p, y_p)$ forman un ángulo recto, es decir, si el $\angle\theta = 90^\circ$, decimos que las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares. Observa que el $\angle\theta$ no tiene porque coincidir con los ángulos de inclinación (α_1 y α_2) de las rectas.

Los conceptos de paralelismo y perpendicularidad de dos - rectas oblicuas al eje de las abscisas se hallan íntimamente ligados con el valor de las pendientes, de hecho:

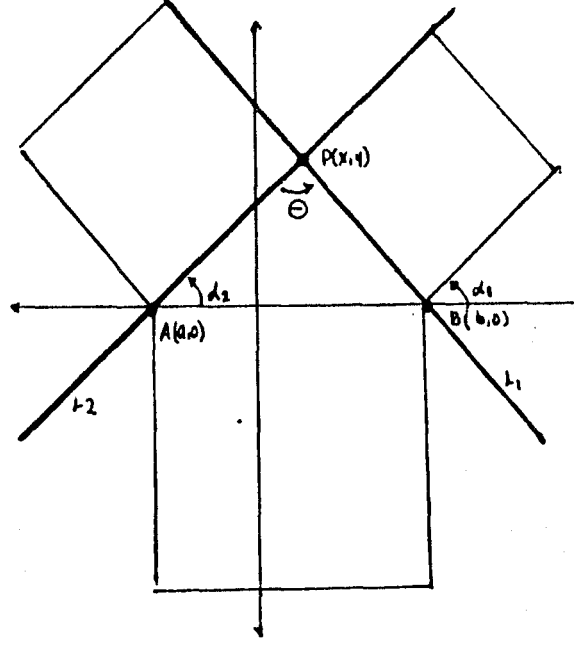
---

(3) Idem.

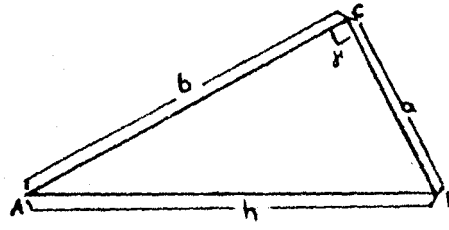
1). Si las pendientes m_1 y m_2 de dos rectas L_1 y L_2 son recíprocas y de signo contrario, esto es, si $m_1 m_2 = -1$ - entonces, L_1 y L_2 son perpendiculares; e inversamente, si L_1 y L_2 son perpendiculares entonces, sus pendientes m_1 y m_2 - son recíprocas y de signo contrario.

2). Si las pendientes m_1 y m_2 de dos rectas L_1 y L_2 son iguales entonces, las rectas son paralelas; e inversamente, si L_1 y L_2 son rectas paralelas entonces, $m_1 = m_2$.

Para demostrar la primera relación, o sea la condición - de perpendicularidad, es preciso considerar el, ya mencionado, Teorema de Pitágoras. Hasta el momento, lo hemos aplicado al calcular longitudes y distancias, pero no lo hemos demostrado. Este teorema afirma que el área del cuadrado construído sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados costruídos sobre los catetos, en un triángulo rectángulo.



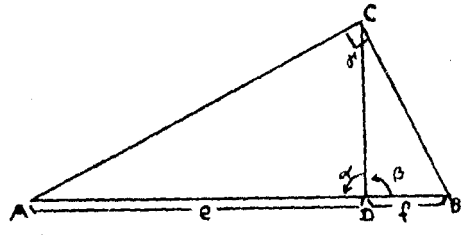
Una demostración del teorema de Pitágoras es la siguiente:



en el triángulo rectángulo con vértices en los puntos A, B y C y $\angle\gamma = 90°$, llamaremos h a la longitud del segmento $\overline{AB}$, b a la longitud del segmento $\overline{AC}$ y a a la longitud del segmento $\overline{BC}$ y demostraremos que,

$$h^2 = a^2 + b^2 ,$$

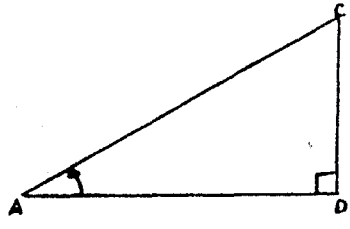
para ésto, trazamos la perpendicular al lado $\overline{AB}$ que pasa por el punto C.



Obviamente, los ángulos α y β son rectos y el ΔADC, al igual que el ΔCDB, es un triángulo rectángulo. Llamaremos e a la longitud del segmento $\overline{AD}$ y f a la longitud del segmento $\overline{DB}$, por lo mismo,

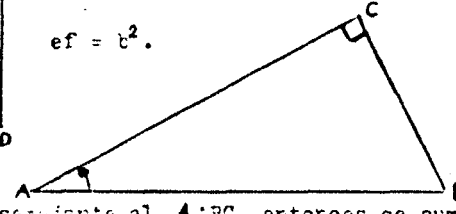
$$h = e + f.$$

Entonces, bajo todas estas condiciones, el Δ ADC es semejante al Δ ABC, por ser triángulos rectángulos con un ángulo en común, esto significa que tienen sus lados correspondientes proporcionales, por lo que se verifica:



$e/b = b/h$, o lo que es lo mismo,

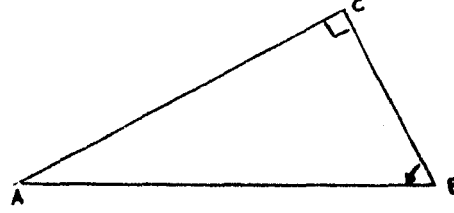
$ef = b^2$.



De igual forma el Δ CDB es semejante al Δ ABC, entonces se cumple que:

$f/a = a/h$, o bien,

$fh = a^2$.



Al sumar miembro a miembro las igualdades obtenidas,

$eh = b^2$ y $fh = a^2$, se tiene,

$fh + eh = a^2 + b^2$, factorizamos h en el primer miembro,

$(f + e)h = a^2 + b^2$, pero como $f + e = h$ entonces,

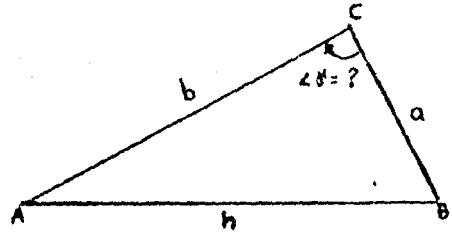
$h^2 = a^2 + b^2$, que es precisamente el resultado que deseábamos.

El recíproco del Teorema de Pitágoras afirma que si el área del cuadrado construído sobre uno de los lados de un triángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construídos sobre sus otros dos lados entonces, el triángulo es un triángulo rectángulo.

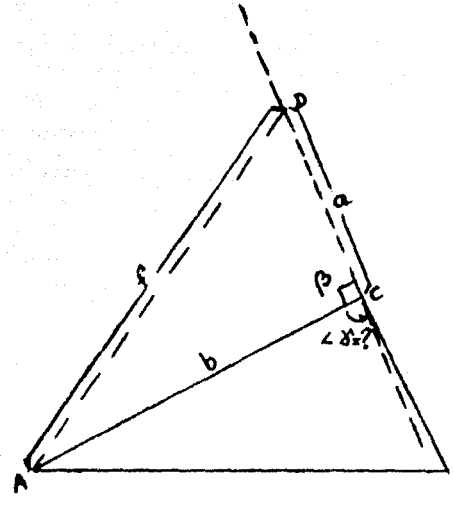
Tomemos un triángulo cualquiera con vértices en los puntos A, B y C; y llamemos h, a y b a las longitudes de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Supongamos además que se cumple la relación,

$$h^2 = a^2 + b^2 ,$$

y demostremos que el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, en otras palabras, demostremos que el $\angle \delta = 90^\circ$.



Trazamos una recta perpendicular al lado $\overline{AC}$, que pase por el punto C, esta recta no tiene por que contener al lado $\overline{BC}$. Sobre esta recta tomamos el punto D de manera que, $\overline{BC} = \overline{CD}$ y por lo mismo, la longitud del segmento $\overline{CD}$ es igual a a. Por último unimos los puntos A y D. Y llamemos f a la longitud del segmento $\overline{AD}$.



De acuerdo con esta construcción, el ΔACD es un triángulo rectángulo por lo que se verifica, de acuerdo con el Teorema de Pitágoras, que

$$f^2 = a^2 + b^2 ,$$

pero nosotros partimos de que en el ΔABC se cumple que

$$h^2 = a^2 + b^2$$

por lo que

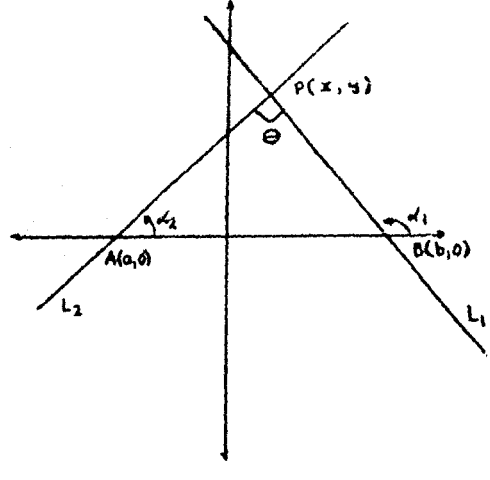
$$f^2 = h^2 , \text{ o bien, } f = h .$$

Esto significa que los triángulos ΔABC y ΔACD tienen sus tres lados iguales, entonces son congruentes y, por lo mismo, tienen sus ángulos correspondientes iguales, entonces:

$$\angle \gamma = \angle \beta , \text{ o bien,}$$

$\angle \gamma = 90^\circ$, que es precisamente lo que deseábamos demostrar.

Volvamos a las condiciones de perpendicularidad y paralelismo de dos rectas oblicuas al eje de las abscisas y demostremos primeramente, que si dos rectas tienen pendientes recíprocas y de signo contrario entonces, son perpendiculares. Para esto, tomemos dos rectas L_1 y L_2, como las de la siguiente figura, que cumplen con la condición de que sus pendientes m_1 y m_2 son recíprocas y de signo contrario, es decir, $m_1 m_2 = -1$ y demostraremos que el ΔAPB es un triángulo rectángulo, donde A(a, 0), B(b, 0) y P(x , y).



Por definición de pendiente, $m_1 = (y - 0)/(x - b)$ y $m_2 = (y - 0)/(x - a)$, por lo que se verifica,

$$(y/(x - b))(y/(x - a)) = -1$$ entonces, al operar algebráicamente obtenemos:

$$y^2 = -(x - b)(x - a)$$

$$y^2 = -x^2 + xa + xb - ab$$

$$ab = -x^2 - y^2 + xa + xb$$

$$-2ab = 2x^2 + 2y^2 - 2xa - 2xb$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2xb + x^2 + y^2 + x^2 - 2xa + a^2 + y^2$$

$$(a - b)^2 = (b - x)^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2$$

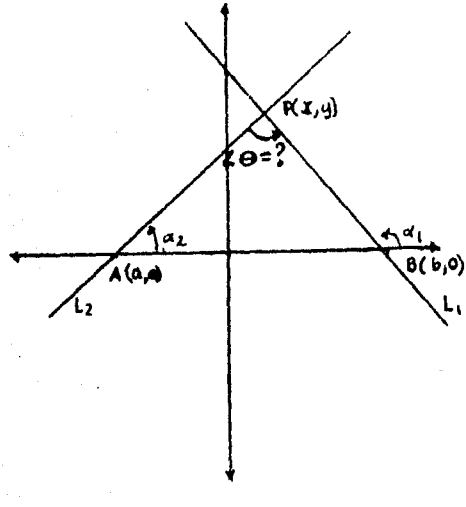
$$(a - b)^2 + (0 - 0)^2 = (b - x)^2 + (0 - y)^2 + (x - a)^2 + (y - 0)^2$$, que no es otra cosa que,

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = (x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2 + (x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2$$

$$d(A, B)^2 = d(B, P)^2 + d(P, A)^2$$, o bien,

$$\overline{AB}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{PA}^2$$, por lo que de acuerdo con el recíproco del Teorema de Pitágoras, el Δ APB es un triángulo rectángulo de hipotenusa $\overline{AB}$ y $\angle\theta = 90°$.

Así, hemos demostrado que dos rectas que tienen pendientes recíprocas y de signo contrario son perpendiculares. Para demostrar el recíproco de este enunciado, es decir, para demostrar que dos rectas perpendiculares tienen pendientes recíprocas y de signo contrario, nos auxiliamos de la misma figura,



y recorremos el camino inverso al que hemos seguido, ahora - partimos de que las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares, por lo que el $\triangle APB$ es un triángulo rectángulo, por lo que se - cumple el Teorema de Pitágoras y se dá que,

$$\overline{AB}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{PA}^2, \text{ o bien,}$$

$$d(A, B)^2 = d(B, P)^2 + d(P, A)^2$$

y al sustituir los valores de las coordenadas de los puntos A(a, 0), B(b, 0) y P(x, y) se obtiene que,

$$(a - b)^2 = (b - x)^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2,$$

por lo mismo,

$$y^2 = -(x - b)(x - a),$$

o bien,

$$(y/(x - b))(y/(x - a)) = -1,$$

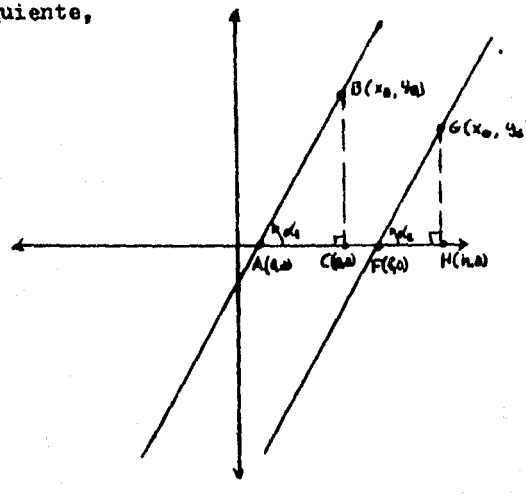
que por definición de pendiente de una recta se tiene,

$$m_1 m_2 = -1,$$

$$m_1 = -1/m_2,$$

es decir, las pendientes son recíprocas y de signo contrario.

Demostrar que dos rectas L_1 y L_2 son paralelas si sus - pendientes son iguales, resulta más sencillo. Observemos la figura siguiente,



Las rectas L_1 y L_2 cortan al eje de las abscisas en los puntos A(a, 0) y F(f, 0) respectivamente; en las mismas, se toman dos puntos arbitrarios, $B(x_B, y_B)$ y $G(x_G, y_G)$ y de éstos se trazan las perpendiculares respectivas al eje de las abscisas, a fin de formar los triángulos rectángulos: ΔABC y ΔFGH. Sabemos que las pendientes son iguales en ambas rectas. Además $m_1 = \tan \angle\alpha_1 = \overline{BC} / \overline{AC}$ y $m_2 = \tan \angle\alpha_2 = \overline{GH} / \overline{FH}$, por lo que, $\overline{BC} / \overline{AC} = \overline{GH} / \overline{FH}$; y como los ángulos β_1 y β_2 son rectos tenemos que el ΔABC es semejante al ΔFGH, por lo que $\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2$ y esto significa que L_1 y L_2 son paralelas por formar ángulos correspondientes iguales con el eje de las abscisas.

Inversamente, si suponemos que L_1 y L_2 son rectas paralelas, los ángulos de inclinación, α_1 y α_2, son iguales por ser ángulos correspondientes entre rectas paralelas, esto significa que $\tan \angle\alpha_1 = \tan \angle\alpha_2$, por lo que, $m_1 = m_2$; es decir, si dos rectas oblicuas al eje de las abscisas son paralelas entonces sus pendientes son iguales.

Problema 13. Determinar si las siguientes rectas son paralelas, $L_1 = \{(x, y) \mid x + y - 5 = 0, x \in \mathbb{R}\}$

$L_2 = \{(x, y) \mid 2x - y - 4 = 0, x \in \mathbb{R}\}$

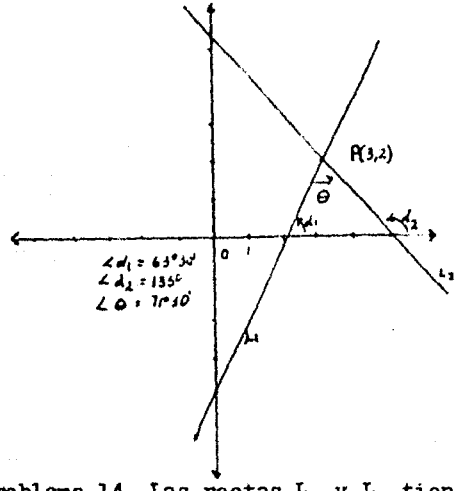
Respuesta: La pendiente de L_1 es igual a negativo uno y la pendiente de L_2 es igual a dos, en símbolos,

$m_1 = -1$ y $m_2 = 2$, por lo mismo,

$m_1 \neq m_2$ y podemos asegurar que L_1 y L_2 no son rectas paralelas. De hecho, al resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$$

por alguno de los métodos algebráicos que conocemos, tenemos que x = 3, y = 2 lo solucionan. Por lo que las rectas se intersectan en el punto P(3, 2). He aquí sus gráficas.



Problema 14. Las rectas L_1 y L_2 tienen en común al punto P(-2, -4). ¿Son perpendiculares?, ¿son paralelas?.

$L_1 = \{ (x, y) \mid 2y - 5x - 2 = 0, x \in \mathbb{R} \}$,

$L_2 = \{ (x, y) \mid y - 5/2\, x - 1 = 0, x \in \mathbb{R} \}$.

Respuesta: Las pendientes respectivas son:

$m_1 = 5/2$ y $m_2 = 5/2$, por lo que,

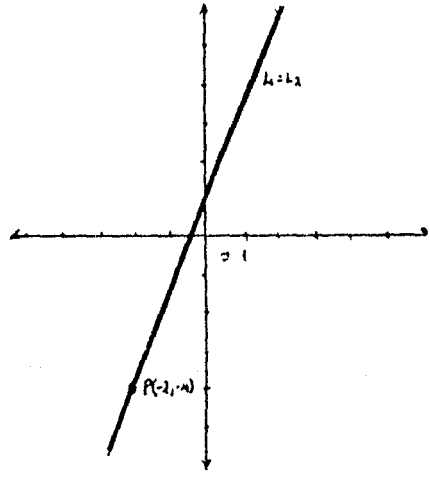
$m_1 m_2 = 25/4 \neq -1$ entonces, afirmamos que no son perpendiculares. Sin embargo, $m_1 = m_2$, esto significa que L_1 y L_2 son paralelas. Pero el punto P(-2, -4), efectivamente satisface ambas ecuaciones:

$2y - 5x - 2 = 0$, evaluada en las coordenadas del punto P da,

$2(-4) - 5(-2) - 2 = 0$, puesto que,

$-8 + 10 - 2 = 0$. De forma semejante, la ecuación $y - 5/2\, x - 1 = 0$, también se satisface, puesto que $-4 + 5 - 1 = 0$.

Pero esto resulta absurdo, a primera vista, puesto que tene-- mos dos rectas paralelas que se cortan en un punto. No es tal, lo que sucede es que estamos ante dos rectas que coinciden en todos sus puntos, en otras palabras, su gráfica es la misma.



Las ecuaciones de estas rectas presentan la particularidad de que los coeficientes de las variables X y y, así como el término independiente son proporcionales, es decir, en la ecuación $y - 5/2\ x - 1 = 0$, el coeficiente de y es 1, el de x es -5/2 y el término independiente es -1; y éstos son - justamente la mitad de los correspondientes a los de la ecuación $2y - 5x - 2 = 0$, por lo que al tomar los cocientes respectivos tenemos:

para las y la razón 1/2,
para las x la razón $(-5/2)/-5 = 1/2$
y para los términos independientes la misma
razón $-1/-2 = 1/2$.

En general, dos rectas con ecuaciones:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

coinciden si se cumple que,

$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2$, donde obviamente,

A_2, B_2 y C_2 son números reales distintos de cero. En otras palabras, las rectas coinciden si existe un número real k distinto de cero que cumpla con:

$$A_1 = kA_2$$

$$B_1 = kB_2$$

$$C_1 = kC_2$$

(En el ejemplo numérico que trabajamos en el problema 14, - $k = 1/2$).

Problema 15. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(-2, 1) y que es perpendicular a la recta con ecuación $y = \sqrt{3}x + 1$.

Respuesta: La recta, cuya ecuación deseamos, debe - ser perpendicular a la recta de ecuación $y = \sqrt{3}x + 1$, por lo que su pendiente m está obligada a ser recíproca y de signo contrario a ésta, por lo que,

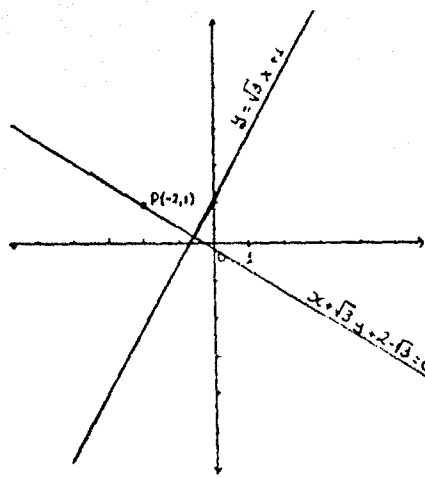
$$m = -1/\sqrt{3},$$

y como además, debe pasar por el punto P(-2, 1), entonces - aplicamos la fórmula:

$$y - y_p = m(x - x_p)$$

$$y - 1 = -1/\sqrt{3}\ (x + 2), \text{ o bien,}$$

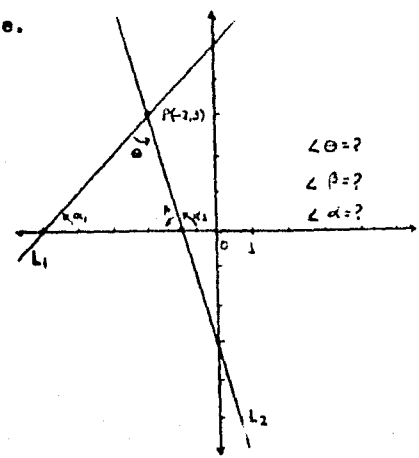
$$x + \sqrt{3}y + 2 - \sqrt{3} = 0\ .$$



Problema 16. Las rectas,

$L_1 = \{(x, y) \mid x - y + 5 = 0,\ x \in \mathbb{R}\}$ y

$L_2 = \{(x, y) \mid 3x + y + 3 = 0,\ x \in \mathbb{R}\}$, se intersectan en el punto P(-2, 3) y forman al cortarse con el eje de las abscisas el ΔABC. Encontrar los valores aproximados de los ángulos interiores de dicho triángulo. He aquí la gráfica correspondiente.



Respuesta: Las rectas no son perpendiculares puesto que, $m_1 = 1$ y $m_2 = -3$ y, por lo mismo, $m_1 m_2 \neq -1$ entonces, el $\angle \theta \neq 90°$. Pero, el $\angle \alpha$ es el ángulo de inclinación de la recta L_1 y como $m_1 = 1$, se tiene que $\tan \angle \alpha = 1$, por lo que el $\angle \alpha = 45°$. El $\angle \beta$ es el suplemento del ángulo de inclinación de la recta L_2 entonces, $\tan \angle \beta = -\tan \angle \alpha_2 = 3$ y $\angle \beta = 71° 30'$, aproximadamente. Finalmente, calculamos el valor del ángulo aplicando el teorema: "la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es igual a 180° ". Entonces,

$$\angle \theta = 180° - (\angle \beta + \angle \alpha)$$

$$\angle \theta = 180° - 116° 30'$$

$\angle \theta = 63° 30'$, aproximadamente.

EJERCICIO.

a) Las rectas, cuyas ecuaciones son: $3x + 2y + 1 = 0$ y - - $x + 5y - 4 = 0$. ¿Son paralelas?, ¿son perpendiculares?, ¿se cortan en algún punto?.

b) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto - A(0, -4) y es paralela a la recta con ecuación $y = \sqrt{3}x + 1$. Graficar ambas rectas.

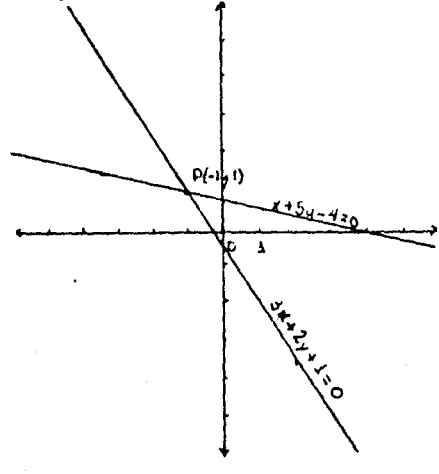
c) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta con ecuación $y = \sqrt{2}x + 1$. Graficar.

d) Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a la recta con ecuación $y = 2/5\ x - 2$ y que pasa por el punto de intersección de las rectas con ecuaciones $y + x = 5$ y $3y - x = 3$.

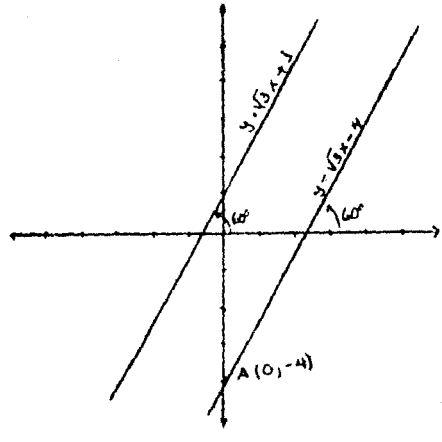
e) Las rectas con ecuaciones $2y - 6x + 4 = 0$ y $3x - y - 2 = 0$ ¿coinciden?.

SOLUCION.

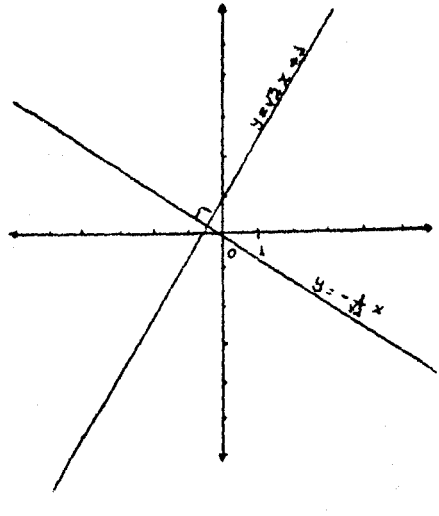
a) No son paralelas, tampoco son perpendiculares y se cortan en el punto P(-1, 1).



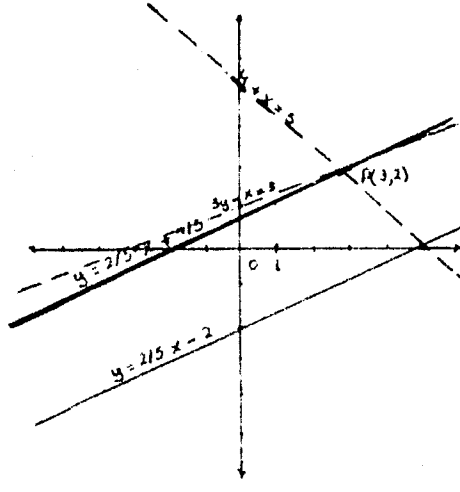
b) Con $m = \sqrt{3}$ y punto A(0, -4) la ecuación que se busca es: $y = \sqrt{3}x - 4$.



c) $y = -1/\sqrt{2}\ x$.

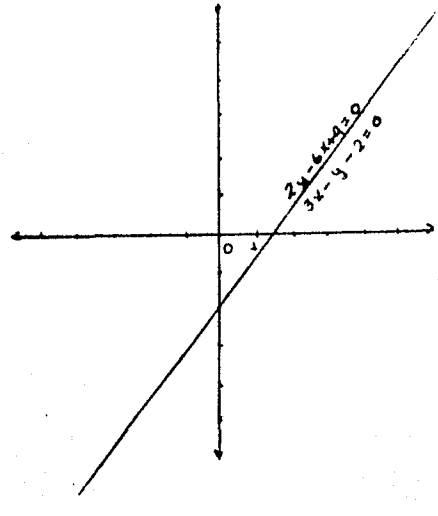


d) El punto de intersección de las rectas es P(3, 2) y la pendiente es m = 2/5, por que la ecuación es y = 2/5 x + 4/5.



e) Efectivamente, las rectas coinciden, en este caso:

$A_1 / A_2 = B_1 / B_2 = C_1 / C_2 = -2$.



D. LA DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA Y LA FORMA NORMAL.

> Y el último, consistía en hacer enumeraciones - tan completas y generales, que me dieran la seguri— dad de no haber incurrido en ninguna omisión. (4)

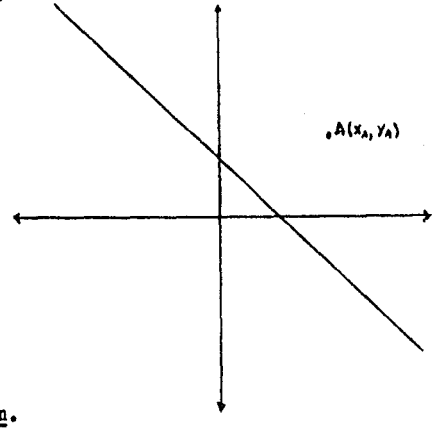
Estamos ciertos de que la distancia entre los puntos - $A(x_A, y_A)$ y $B(x_b, y_b)$ la encontramos mediante la fórmula, -

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_b)^2 + (y_A - y_b)^2} \ ,$$

y que el conjunto,

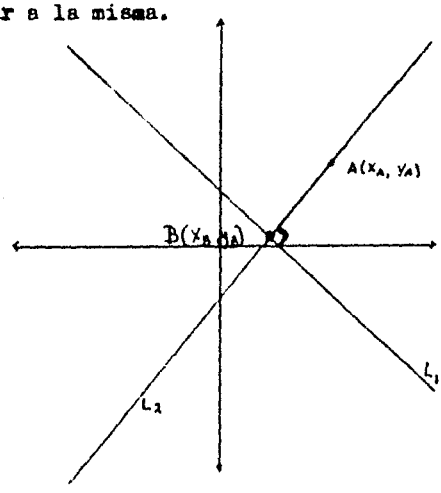
$$L = \{ (x, y) \mid Px + Qy + R = 0,\ P \neq 0,\ Q \neq 0,\ x \in \mathbb{R} \}$$

es una línea recta con pendiente $m = -P/Q$, que corta al eje - de las abscisas en $x = -R/P$ y al eje de las ordenadas en - $y = -R/Q$. Pues bien, en esta sección vamos a encontrar una -- fórmula para calcular la distancia de un punto $A(x_A, y_A)$ a - una recta L.



(4) Idem.

Por geometría elemental, sabemos que por un punto - - $A(x_A, y_A)$, exterior a una recta L_1, pasa una única recta L_2, perpendicular a la misma.



Si el punto $B(x_B, y_B)$ es el punto de intersección de las rectas perpendiculares L_1 y L_2 entonces, la d(A, B) la llamamos - la distancia del punto $A(x_A, y_B)$ a la recta L_1. Para calcular esta distancia es necesario:

1). Encontrar la ecuación de la recta L_2 .

2). Resolver el sistema de ecuaciones lineales que se forma con las respectivas ecuaciones de L_1 y L_2, para encontrar así, al punto $B(x_B, y_B)$.

3). Calcular la distacia entre los puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ aplicando la fórmula conocida,

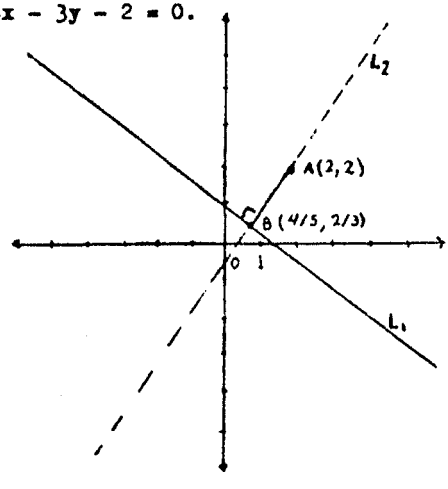
$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Problema 17. Encontrar la distancia del punto A(2, 2) a la recta $L_1 = \{ (x, y) \mid 3x + 4y - 4 = 0 , x \in \mathbb{R} \}$

Respuesta: La recta L_1 tiene pendiente $m_1 = -3/4$ - entonces, la pendiente de L_2 es $m_2 = 4/3$ y su ecuación está dada por:

$y - 2 = 4/3 (x - 2)$, o lo que es lo mismo,

$4x - 3y - 2 = 0.$



Encontramos las coordenadas del punto $B(x_B, y_B)$ resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 4 = 0 \\ 4x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

y puesto que $x = 4/5$ y $y = 2/3$ entonces, el punto es B(4/5,2/5) Por último, calculemos la d(A, B),

$$d(A, B) = \sqrt{(2 - 4/5)^2 + (2 - 2/5)^2}$$

$$d(A, B) = 2.$$

Por todo esto, la distacia del punto A(2, 2) a la recta $3x + 4y - 4 = 0$ es dos.

Generalicemos, encontrando la distancia del punto $A(x_A, y_A)$ a la recta $L_1 = \{(x, y) \mid Px + Qy + R = 0,\ x \in \mathbb{R}\}$

1). La recta L_1 tiene pendiente $m_1 = -P/Q$ entonces, la recta L_2, perpendicular a L_1, tiene pendiente $m_2 = Q/P$ y, puesto que pasa por el punto $A(x_A, y_A)$, su ecuación es:

$$y - y_A = Q/P\,(x - x_A), \text{ o bien,}$$

$$Qx - Py + Py_A - Qx_A = 0.$$

2). Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} Px + Qy + R = 0 \\ Qx - Py + Py_A - Qx_A = 0 \end{cases}$$

y encontramos las coordenadas del punto $B(x_B, y_B)$; donde,

$$x_B = (Q^2x_A - PQy_A - PR)/(P^2 + Q^2),$$

$$y_B = (P^2y_A - PQx_A - QR)/(P^2 + Q^2).$$

3). Encontramos la distancia entre los puntos A y B mediante la fórmula:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - ((Q^2x_A - PQy_A - PR)/(P^2 + Q^2)))^2 + (y_A - ((P^2y_A - PQx_A - QR)/(P^2 + Q^2)))^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{((P^2x_A + PQy_A - RP)^2 + (Q^2y_A + PQx_A + QR)^2)/(P^2 + Q^2)}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(P^2(Px_A + Qy_A - R)^2 + Q^2(Px_A + Qy_A + R)^2)/P^2 + Q^2}$$

$$d(A, B) = |Px_A + Qy_A + R|/\sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Y esta última es justamente, la fórmula general para calcular la distancia del punto $A(x_A, y_A)$ a la recta con ecuación, $Px + Qy + R = 0$.

En el problema 17 de este capítulo, hemos obtenido que la distacia del punto A(2, 2) a la recta con ecuación $3x + 4y - 4 = 0$ es igual a dos; verifiquémoslo sustituyendo los valores correspondientes,

$$x_A = 2,\ y_A = 2,\ P = 3,\ Q = 4 \text{ y } R = -4.$$

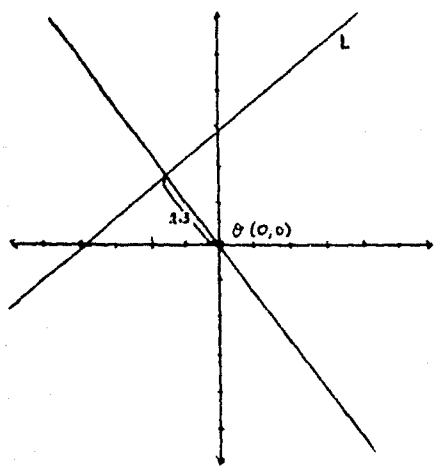
en la fórmula obtenida,

$$|Px_A + Qy_A + R| / \sqrt{P^2 + Q^2} =$$
$$|3(2) + 4(2) - 4| / \sqrt{3^2 + 4^2} =$$
$$|10| / 5 = 2.$$

Problema 18. Encontrar la distancia desde el origen a la recta $L = \{ (x, y) \mid 6x - 8y + 23 = 0,\ x \in \mathbb{R} \}$

Respuesta: En este caso, $x_A = 0$, $y_A = 0$, $P = 6$, $Q = -8$ y $R = 23$, por lo que:

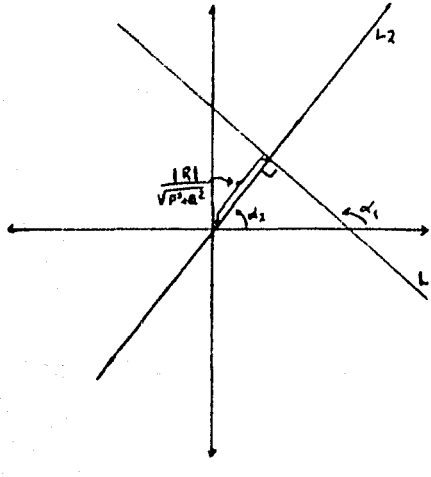
$$|Px_A + Qy_A + R| / \sqrt{P^2 + Q^2} =$$
$$|6(0) - 8(0) + 23| / \sqrt{6^2 + (-8)^2} =$$
$$|23| / 10 = 2.3$$

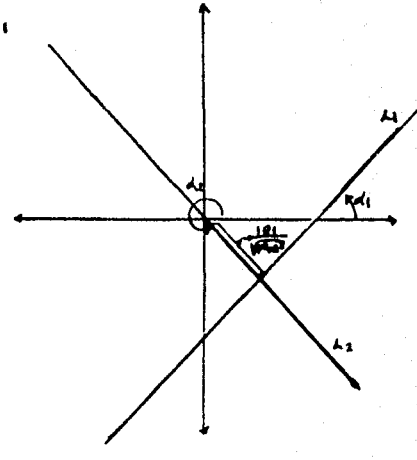


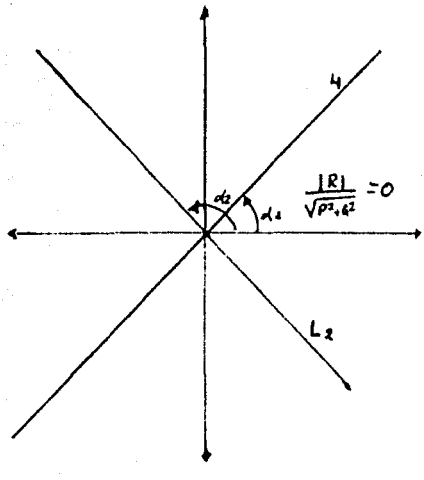
Problema 19. Encontrar la distancia del origen a la recta $L_1 = \{ (x, y) \mid Px + Qy + R = 0,\ P \neq 0 \text{ ó } Q \neq 0,\ x \in \mathbb{R} \}$.

Respuesta: Al sustituir $x_A = 0$ y $y_A = 0$ en la fórmula tenemos,

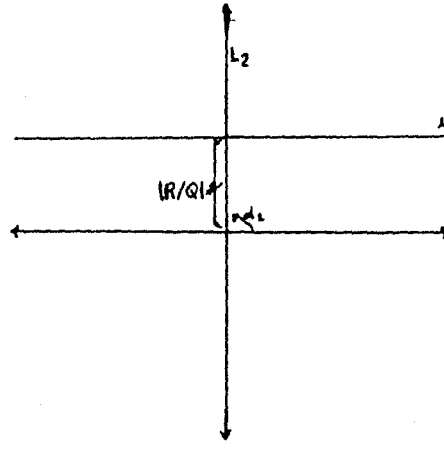
$$|Px_A + Qy_A + R| / \sqrt{P^2 + Q^2} = |R| / \sqrt{P^2 + Q^2}$$



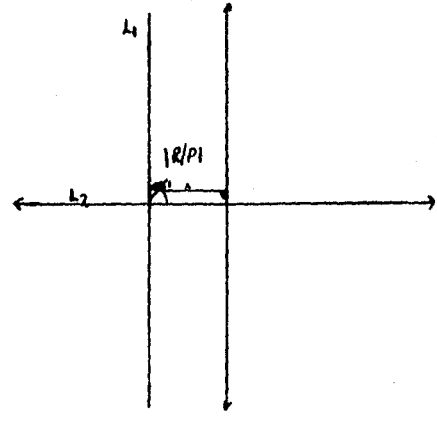




En particular si $P = 0$, pero $Q \neq 0$, L_1 es una recta paralela al eje de las abscisas y por lo mismo L_2 coincide con L y la distancia que deseamos es $|R|/|Q|$ o bien, $|R/Q|$.

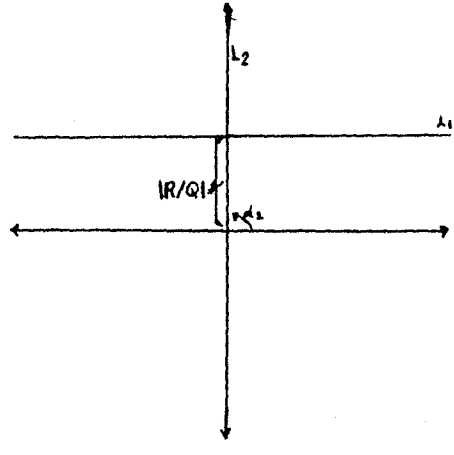


Si $P \neq 0$ y $Q = 0$, se tiene que L_1 es paralela al eje de las ordenadas y L_2 coincide con el eje de las abscisas; y la distancia del origen a L es $|R/P|$

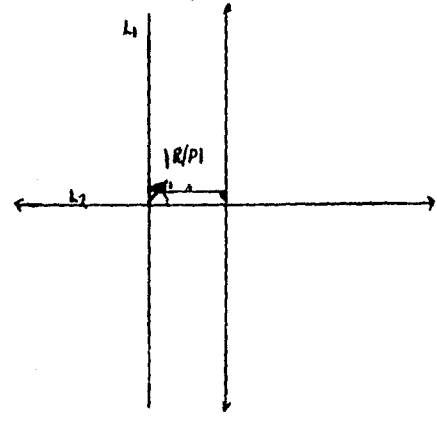


P y Q no puden ser ambos igual a cero, sencillamente, porque se tendría la indeterminación: R/0

En particular si $P = 0$, pero $Q \neq 0$, L_1 es una recta paralela al eje de las abscisas y por lo mismo L_2 coincide con L y la distancia que deseamos es $|R|/|Q|$ o bien, $|R/Q|$.



Si $P \neq 0$ y $Q = 0$, se tiene que L_1 es paralela al eje de las ordenadas y L_2 coincide con el eje de las abscisas; y la distancia del origen a L es $|R/P|$



P y Q no puden ser ambos igual a cero, sencillamente, porque se tendría la indeterminación: R/0

La recta L_2 la llamamos la normal a la recta L_1 trazada desde el origen. El ángulo de inclinación de la normal es α_2 y por los resultados obtenidos en el capítulo correspondiente a Trigonometría, sabemos que las coordenadas del punto $B(x_B, y_B)$ satisfacen las igualdades:

$$\operatorname{sen} \angle \alpha_2 = y_B \,/\sqrt{x_B^2 + y_B^2}$$

$$\cos \angle \alpha_2 = x_B \,/\sqrt{x_B^2 + y_B^2}$$

por lo mismo,

$$y_B = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}\ \operatorname{sen} \angle \alpha_2$$

$$x_B = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}\ \cos \angle \alpha_2 \ .$$

Pero la $d(O, B) = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$ es, de acuerdo con el resultado obtenido en el problema 19 de este capítulo, igual a $|R|/\sqrt{P^2 + Q^2}$ entonces, al sustituir tenemos,

$$y_B = |R| \operatorname{sen} \angle \alpha_1 \,/\sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$x_B = |R| \cos \angle \alpha_1 \,/\sqrt{P^2 + Q^2}$$

La pendiente de la normal, $m_2 = \tan \angle \alpha_2$, es recíproca y de signo contrario a la pendiente de la recta L_1 , por lo que

$$m_1 = -1 \,/\, \tan \angle \alpha_2 \ ,$$

pero sabemos, por trigonometría, que $\tan \angle \alpha_2 = \operatorname{sen} \angle \alpha_2 / \cos \angle \alpha_2$ entonces,

$$m_1 = -\cos \angle \alpha_2 \,/\, \operatorname{sen} \angle \alpha_2 \ .$$

Con la pendiente m_1 y el punto $B(|R|\cos \angle \alpha_2 \,/\sqrt{P^2 + Q^2}, |R| \operatorname{sen} \angle \alpha_2 / \sqrt{P^2 + Q^2})$ obtenemos una nueva expresión para la ecuación de la recta L_1 bajo la fórmula,

$$y - y_B = m_1 (x - x_B),$$

$$y - (|R| \operatorname{sen} \angle \alpha_2 / \sqrt{P^2 + Q^2}) = (-\cos \angle \alpha_2 / \operatorname{sen} \angle \alpha_2)(x - (|R| \cos \angle \alpha_2 / \sqrt{P^2 + Q^2}))$$

o bien,

$$x\cos\angle\alpha_2 + y\operatorname{sen}\angle\alpha_2 - (|R|/\sqrt{P^2+Q^2})(\operatorname{sen}^2\angle\alpha_1 + \cos^2\angle\alpha_2) = 0$$

y puesto que, $\operatorname{sen}^2\angle\alpha_1 + \cos^2\angle\alpha_2 = 1$, se tiene la expresión:

$$x\cos\angle\alpha_2 + y\operatorname{sen}\angle\alpha_1 - (|R|/\sqrt{P^2+Q^2}) = 0,$$

que llamamos la ecuación en su forma normal de la recta L_1. Nótese que no se trata de la ecuación de la recta normal a L_1, es decir, esta expresión no es la ecuación de la recta L_2. De hecho si L_1 tiene por ecuación, en su forma general, a

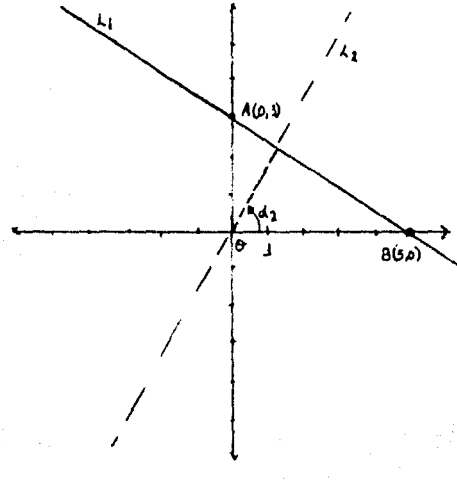
$$Px + Qy + R = 0,$$

la ecuación de la recta normal L_2 será:

$$Qx - Py = 0.$$

Problema 20. Escribir en su forma normal la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(0, 3) y B(5, 0).

Respuesta: He aquí la gráfica correspondiente:



En su forma simétrica la ecuación de la recta L es:

$$x/3 + y/5 = 1,$$

de donde obtenemos su forma general,

$$5x + 3y - 15 = 0, \text{ por lo que,}$$

$$|R|/\sqrt{P^2 + Q^2} = 15/\sqrt{34} \quad \text{y la pendiente,}$$

$$m = -5/3.$$

Un primer acercamiento a la forma normal de la ecuación de L, nos muestra que,

$$x\cos \measuredangle\alpha_1 + y\operatorname{sen} \measuredangle\alpha_2 - 15/\sqrt{34} = 0,$$

sin embargo, desconocemos el valor del $\measuredangle\alpha_1$, pero puesto que, éste es el ángulo de inclinación de la recta normal a L, y éstas, obviamente, son perpendiculares, se tiene que:

$$\tan \measuredangle\alpha_2 = -1/(-5/3), \text{ o bien,}$$

$$\tan \measuredangle\alpha_1 = 3/5 \quad \text{y, por lo mismo,}$$

$\measuredangle\alpha_1 = 31^\circ$, aproximadamente. Por todo esto, la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(0, 3) y B(5, 0), en su forma normal es:

$$x\cos 31^\circ + y\operatorname{sen} 31^\circ - 15/\sqrt{34} = 0$$

Problema 21. Escribir en su forma normal la ecuación de la recta $L = \{ (x, y) \mid Px + Qy + R = 0,\ P \neq 0,\ Q \neq 0,\ R \neq 0 \quad x \in \mathbb{R} \}$.

Respuesta: Obviamente, $Px + Qy + R = 0$ es la ecuación de la recta L en su forma general y deseamos que ésta y la ecuación, $x\cos \measuredangle\alpha_1 + y\operatorname{sen} \measuredangle\alpha_2 - (|R|/\sqrt{P^2 + Q^2}) = 0$, representen a la mencionada recta L. Entonces, retomando los resultados obtenidos en el problema 14 de este capítulo, establecemos las siguientes igualdades:

$\cos \measuredangle \alpha_1 = \lambda P$

$\operatorname{sen} \measuredangle \alpha_1 = \lambda Q$

$-(|R| / \sqrt{P^2 + Q^2}) = \lambda R$, donde λ representa a un número real distinto de cero. A partir de la tercera igualdad, aplicando la definición de valor absoluto de un número real, se tiene que:

$\lambda = -1/\sqrt{P^2 + Q^2}$ si $R > 0$ y

$\lambda = 1/\sqrt{P^2 + Q^2}$ si $R < 0$. Por lo mismo,

$\cos \measuredangle \alpha_1 = \pm P / \sqrt{P^2 + Q^2}$

$\operatorname{sen} \measuredangle \alpha_1 = \pm Q / \sqrt{P^2 + Q^2}$ y la ecuación de la recta L en su forma normal es,

$$\pm Px/\sqrt{P^2 + Q^2} \pm Qy/\sqrt{P^2 + Q^2} \pm R/\sqrt{P^2 + Q^2} = 0.$$

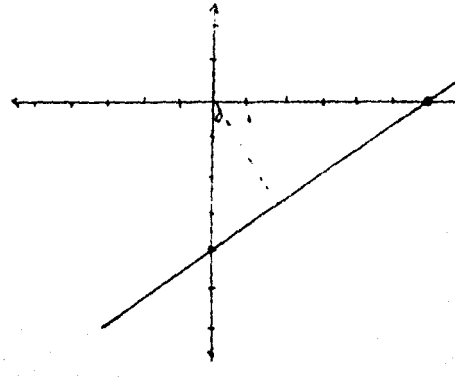
EJERCICIO.

a) La ecuación de una recta, en su forma general, es - - - - $2x - 3y - 12 = 0$. ¿Cuál es la distancia del origen a esta recta?, ¿cuál es la forma general de la ecuación de la misma?.

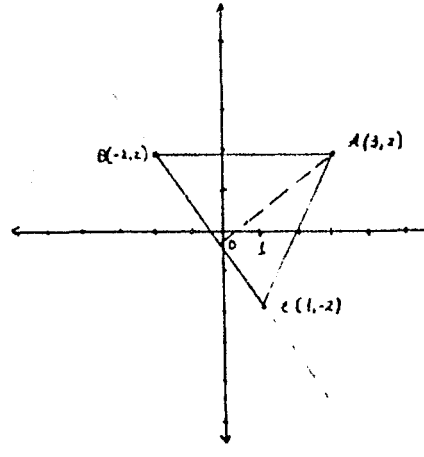
b) Calcular el área del triángulo cuyos vértices son A(3, 2), B(-2, 2) y C(1, -2).

SOLUCION.

a) La gráfica correspondiente es:



La distancia del origen a la recta es: $|-12|/\sqrt{4+9} = 12/\sqrt{13}$.
La ecuación en su forma normal es: $2x/\sqrt{13} + 3y/\sqrt{13} - 12/\sqrt{13} = 0$.
b) La figura correspondiente es:



Para obtener el área del triángulo tomemos como base al lado $\overline{BC}$; la ecuación de la recta que contiene a dicho lado es $4x + 3y + 2 = 0$, por lo que, la distancia del punto A(3, 2) a esta recta es igual a 4, puesto que,

$$|4(3) + 3(2) + 2| / \sqrt{4^2 + 3^2} = 4.$$

Y como sabemos, la $d(B, C) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (2 + 2)^2} = 5$. Entonces, el área del ΔABC es igual a 10 unidades cuadradas.

BIBLIOGRAFIA.

APOSTOL, Tom M.
Análisis Matemático.
(tr. Dr. José Plá Carrera).
España, Ed. Reverté, 1979.

ARAGON, Bohorquez Misael y VALIENTE, Barderas Santiago.
En el amable mundo de la matemática.
México, Ed. Patria, 1978.

BALDOR, Aurelio.
Aritmética.
España, Ed. Cultural Centroamericana, 1978.

BERGAMINI, David.
Matemáticas.
(tr. Julio P. Yáñez).
México, Ed. Lito Offset Latina, 1974.

CABALLERO, Arquímedes, et. al.
Matemáticas, tercer curso.
México, Ed. Esfinge, 1957.

DESCARTES, René.
Discurso del método.
(Introducción, Francisco Larroyo).
México, Ed. Porrua, 1981.

GOMEZ, José Luis.
Introducción a las matemáticas aplicadas.
Geometría Analítica.
México, Ed. Terra Nova, 1984.

GRANVILLE, William Anthony, et. al.
Trigonometría plana y esférica.
(tr. Ing. Rafael García Díaz).
México, Ed. UTEHA, 1969.

JURGENSEN, Ray C., et. al.
Geometría moderna. Estructura y método.
(tr. Ing. Ricardo Treviño Garza).
México, Ed. Publicaciones Culturales, 1982.

LARA, Aparicio Miguel.
Antología de Matemáticas.
México, U.N.A.M., 1971.

LEHMANN, Charles H.
Geometría Analítica.
(tr. Ing. Rafael García Díaz).
México, Ed. UTEHA, 1974.

MISE, Edwin E.
Geometría elemental desde un punto de vista avanzado.
(tr. Ing. Sergio Vargas Romero).
México, Ed. CECSA, 1976.

REES, Paul K. y SPARKS, Fred W.
Algebra.
(tr. José Emilio Amores).
México, Ed. Reverte Mexicana, 1970.

SANTALO, Marcelo y CARBONEL, Vicente.
Geometría Analítica.
México, Ed. Porrua, 1983.

TREJO, César A.
Matemática General.
Argentina, Ed. Kapelusz, 1965.