

207.36



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

Tratamiento de Sistemas Multiperiódicos en
la Electrodinámica Estocástica

T E S I S

Que para obtener el título de

F I S I C O

presentan

Ana Natasha Saskia Lozano de Swaan y
Miguel Alcubierre Moya



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INDICE

CAPÍTULO I: Interpretaciones de la Mecánica Cuántica.	1
1. Antecedentes históricos.	1
2. La interpretación de Copenhague.	6
3. El concepto de probabilidad.	10
4. El argumento EPR.	15
5. La interpretación estadística.	19
6. Variables ocultas.	25
Bibliografía.	33
CAPÍTULO II: La Electrodinámica Estocástica.	36
1. Introducción a la Electrodinámica Estocástica.	36
2. Descripción del campo de vacío.	42
3. Las ecuaciones de evolución.	51
4. Desarrollo perturbativo de la ecuación de Braffort-Marshall.	55
5. La condición de equilibrio para sistemas multiperiódicos no degenerados.	60
6. El oscilador armónico y el rotor rígido.	63
Bibliografía.	67

**CAPÍTULO III: El Atomo de Hidrógeno en la Electrodinámica
Estocástica.**

1. Introducción.	69
2. Desarrollo multiperiodico para una fuerza central.	70
3. Ecuación de Fokker-Planck para el átomo de hidrógeno.	77
4. La condición de equilibrio para el átomo de hidrógeno.	90
5. Conclusión.	102
Bibliografía.	105

**CAPÍTULO IV: La Electrodinámica Estocástica Desde
una Nueva Perspectiva.**

1. Descripción dinámica de un sistema en presencia del campo estocástico del punto cero.	106
2. La hipótesis de respuesta lineal.	112
3. La condición de cuantización y las desigualdades de Helsenberg.	118
4. Balance energético detallado y transiciones radiativas.	123
5. El hamiltoniano con la hipótesis de respuesta lineal.	134
6. El oscilador armónico.	139

7. Relación entre el nuevo formalismo y la mecánica matricial.	145
Bibliografía.	150
CONCLUSIONES.	151
APÉNDICE 1: Sistemas Multiperíódicos.	154
APÉNDICE 2: El Problema de Kepler con Variables de Acción y Angulo.	157
BIBLIODRAFÍA GENERAL.	164

CAPITULO I

INTERPRETACIONES DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

INTERPRETACIONES DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

1. Antecedentes históricos.

La mecánica cuántica en su forma primitiva surgió a principios de este siglo como respuesta al fracaso de la física clásica en su intento por explicar algunos fenómenos relacionados con la estructura microscópica de la materia.

Hasta 1925 esta forma incipiente de la mecánica cuántica estaba constituida por una serie de reglas construidas *ad hoc* que describían satisfactoriamente algunos fenómenos cuánticos. Pese a que esta nueva teoría estaba erigiéndose sobre flagrantes contradicciones con la electrodinámica de Maxwell, había logrado explicar satisfactoriamente varios aspectos de la emisión y absorción de radiación por los átomos, el espectro del cuerpo negro, el efecto Compton y el efecto fotoeléctrico, entre otras cosas. En este año aparecieron dos trabajos, uno de Heisenberg y otro de él mismo con Born y Jordan, en los que se presentó la mecánica cuántica matricial, que fue la primera teoría en incluir estas reglas empíricas en una estructura lógica y formal.

Un año después, Erwin Schrödinger publicó una versión alternativa, inspirada en la hipótesis de de Broglie, en la que presentaba la mecánica cuántica en términos de una ecuación de onda. Poco después demostró la equivalencia formal entre ambas teorías, pero debido a que la mecánica ondulatoria ofrecía una visión menos abstracta y una mayor simplicidad matemática gozó desde el principio de una mayor popularidad. Schrödinger esperaba que, de acuerdo con el cuadro de de Broglie, la amplitud ψ

involucrada en la ecuación de onda describiera oscilaciones reales en el espacio físico¹. Para él, el fenómeno ondulatorio no era más que la estructura interna de la partícula, que dejaba de ser puntual para convertirse en un objeto extendido, en principio, en todo el espacio. Sin embargo, muy pronto fue claro que ψ no podía representar una onda física, ya que, entre otras cosas, la función de onda asociada a un sistema de N partículas corresponde a oscilaciones en $3N$ dimensiones. La función ψ requería, pues, de otra interpretación.

Esta nueva interpretación apareció poco después en un trabajo de Max Born titulado "Sobre la mecánica cuántica de los procesos de colisión". Según Born la función ψ no representa al sistema físico ni a ninguna de sus características, sino que, más bien, permite calcular la probabilidad de encontrar a la partícula en un elemento de volumen δv por medio de la combinación $\psi^* \psi \delta v$. Born, Bohr, Heisenberg y Jordan adoptaron una interpretación subjetiva del concepto de probabilidad, hecho que resultó crucial en el desarrollo de los fundamentos filosóficos de la nueva teoría. De acuerdo con esta interpretación, la probabilidad mide el grado de conocimiento que un observador tiene acerca de cierto sistema físico, lo que está en contraposición con la interpretación frecuentista de la probabilidad, común en las otras aplicaciones físicas y científicas.

¹ M. Jammer, 'The Philosophy of Quantum Mechanics', 1974, p. 32.

Por otro lado, como teoría probabilista, la mecánica cuántica no permite calcular trayectorias para las partículas, sino solamente la probabilidad de que éstas se encuentren en una posición dada. Entonces, si se supone que la mecánica cuántica describe exhaustivamente al sistema y se adopta una visión subjetiva de la probabilidad, un observador no debería tener acceso al conocimiento de la trayectoria que sigue la partícula.

A raíz de la visita de Schrodinger a Copenhague en septiembre de 1926, Bohr y Heisenberg sintieron la necesidad de esclarecer la relación entre la mecánica cuántica, que interpretaban subjetivamente, y el experimento. En particular, trataron de reconciliar la teoría con el hecho de que se pudiesen observar trayectorias en la cámara de Wilson.

En febrero de 1927, Heisenberg encontró la solución a este problema. Podía reconciliarse el experimento con el hecho de que el formalismo matemático no permitiera definir trayectorias precisas si se notaba que lo que se observa en la cámara de Wilson no es la trayectoria de la partícula, sino una cadena de gotas de agua, cuya extensión permite determinar únicamente una sucesión discreta de posiciones indefinidas. Desarrollando esta idea, Heisenberg obtuvo sus relaciones de indeterminación, que fueron publicadas en un artículo donde las interpretaba desde un punto de vista operacionalista. Para él no tenía sentido hablar de una propiedad física si no se concebía un experimento que permitiese medirla (de hecho, la "necesidad" de reducir la teoría a términos observables había sido ya argumentada por Heisenberg desde su primer trabajo sobre mecánica matricial). En el caso particular de

las relaciones de indeterminación. lo anterior significaba que no era posible definir simultáneamente la posición y la cantidad de movimiento de una partícula (o cualquier pareja de variables canónicamente conjugadas) puesto que no existía un dispositivo experimental que permitiese medirlas a la vez. Según Heisenberg "esta indeterminación es la razón esencial de la aparición de relaciones estadísticas en la mecánica cuántica"². La interpretación de las desigualdades de Heisenberg es uno de los puntos más controvertidos de la mecánica cuántica.

En octubre del mismo año se llevó a cabo en Bruselas el V Congreso Solvay, en el que se trataría el tema "Electrones y Fotones", y que contaría con la participación de los más grandes físicos de la época. Las discusiones se centraron en el significado de la teoría cuántica y, en particular, de las desigualdades de Heisenberg.

En su exposición, Heisenberg y Born presentaron la mecánica matricial y su interpretación probabilista de la función de onda. Al final de su intervención afirmaron que la mecánica cuántica era una teoría completa y que sus fundamentos ya no eran susceptibles de ser modificados.

Por otro lado, Bohr expuso sus ideas sobre la complementariedad que ya había presentado poco antes en una reunión en Como en septiembre de 1927. En esta ocasión Bohr estableció las bases de la llamada interpretación de Copenhague de

² Ibid. p. 59.

la mecánica cuántica. Según Bohr, la propia naturaleza de la teoría cuántica nos obliga a considerar la descripción espacio-temporal y la descripción causal³ como complementarias y excluyentes.

Einstein, por su parte, hizo notar que el carácter probabilístico de la teoría permitía interpretarla de dos formas distintas: 1) La función ψ describe completamente a un sistema individual; 2) ψ representa un ensemble estadístico de sistemas⁴. La primera interpretación, observó Einstein, implicaba que, mientras la partícula no fuese observada, debería considerarse como potencialmente presente en todo el espacio. Al ser detectada la partícula, el paquete de ondas que la describe debería colapsarse instantáneamente, lo que estaba en contradicción con la teoría especial de la relatividad. Por otro lado, la segunda manera de interpretar la función ψ permitía evitar esta dificultad. En efecto, en este contexto, $\psi^* \delta v$ representa la probabilidad de que algún miembro del ensemble se encuentre en el elemento de volumen δv . De esta forma la localización de un individuo no altera la distribución de probabilidades del

³En el lenguaje de Bohr 'descripción causal' se refiere a una descripción en términos del intercambio de energía y momento.

⁴Un ensemble se define como un conjunto, en principio infinito, de copias mentales de un sistema, tales que el valor de algunas de las variables que lo caracterizan es el mismo en todas ellas. La constricción de estos valores define lo que se conoce como 'macroestado' y la libertad de selección del resto de variables realiza todos los posibles 'microestados' compatibles con él.

ensemble, por lo que no requiere de la "reducción del paquete de ondas".

A pesar de las objeciones de Einstein, al finalizar el congreso prácticamente todos los asistentes se habían adherido a la interpretación de Bohr y Heisenberg, que se convirtió así en la interpretación oficial u ortodoxa. Incluso de Broglie, que había presentado su propia interpretación causal (la teoría de las ondas piloto), se apegó a la visión ortodoxa como resultado de la dura crítica que recibió por parte de Pauli.

Einstein, sin embargo, nunca aceptó el punto de vista de Bohr. El debate entre ellos continuó hasta la muerte de Einstein en 1955.

2. La interpretación de Copenhague.

El formalismo de la mecánica cuántica es hoy universalmente aceptado. De hecho, la teoría cuántica es uno de los pilares de la física contemporánea. Sin embargo, a sesenta años de su creación, aun no se ha logrado el consenso en cuanto a la interpretación a que deben someterse los conceptos básicos de esta teoría.

En efecto, existe un gran número de interpretaciones consistentes con el formalismo, que se basan en diferentes posiciones filosóficas, algunas de las cuales se contradicen

mutuamente⁵. Ante la diversidad de posibilidades es conveniente adoptar una postura crítica antes que adherirse dogmáticamente a una sola de ellas.

Actualmente la interpretación de Copenhague es, con mucho, la más difundida. Este punto de vista parte del postulado de que la función de onda describe a un sistema físico individual. Cuando se analizan las desigualdades de Heisenberg desde esta perspectiva, nos vemos obligados a aceptar la existencia de un límite intrínseco en la precisión de nuestras mediciones, lo que conduce necesariamente a ver a la mecánica cuántica como la teoría final de la naturaleza. Las posiciones filosóficas que han sido aducidas para sustentar la interpretación de Copenhague abarcan desde el subjetivismo estricto e incluso el solipsismo hasta el materialismo dialéctico, pasando por el idealismo puro, el neokantianismo y el positivismo. La corriente predominante está basada en el concepto de "complementariedad" que se relaciona con la discontinuidad de los procesos cuánticos y en la doctrina positivista, según la cual la finalidad de la física no es la comprensión del mundo objetivo, sino exclusivamente la descripción de fenómenos observables⁶. La escuela ortodoxa acepta, en particular, una visión instrumentalista del conocimiento

⁵ Una relación breve (y no exhaustiva) que permite ver la diversidad de interpretaciones que se han propuesto puede encontrarse en el libro de Jammer 'The Philosophy of Quantum Mechanics'.

⁶ M. Bunge, 1956.

científico, que considera a las teorías únicamente como formalismos matemáticos útiles en la predicción de resultados experimentales. Según este punto de vista, la tarea del físico consiste sólo en dominar el formalismo y aprender a aplicarlo, en contraposición con el realismo que busca, más bien, la comprensión de la naturaleza. De hecho, en estas diferencias reside una parte fundamental del desacuerdo entre Einstein y Bohr (el resto está conectado con el problema del determinismo).

El instrumentalismo es muy popular entre las nuevas generaciones de físicos, que pretenden desvirtuar las discusiones filosóficas dentro de la ciencia. Pese a que esta posición pueda parecer muy reciente es, de hecho, una vieja teoría filosófica. A este respecto, Karl Popper escribió: "Durante mucho tiempo la iglesia utilizó la concepción instrumentalista de la ciencia como un arma contra una ciencia naciente. Podréis forjar instrumentos, artefactos, pero no podréis, con la luz de vuestra sola razón, descubrir ninguno de los secretos ocultos de este mundo.: éste es, en breve, el argumento con el que el cardenal Bellarmino se opuso a las enseñanzas de Galileo sobre el sistema copernicano, y con el que el obispo Berkeley se opuso a Newton."⁷ Por otro lado, el solo hecho de hacer ciencia requiere de la adopción consciente o inconsciente de alguna postura filosófica. Es ésta la que indica

⁷ K. Popper, 'Post Scriptum a la Lógica de la Investigación Científica, Vol. III: Teoría Cuántica y el Clima en Física', 1965; p. 122.

el tipo de preguntas que un científico hace a la naturaleza y las respuestas que considera significativas.

El concepto de complementariedad deriva de una posición positivista. Debido a la "indivisibilidad" del cuanto de acción, que produce una discontinuidad en los fenómenos cuánticos, no es posible despreciar la interacción entre un sistema microscópico y los instrumentos de medición. De acuerdo con Bohr, entonces, no puede atribuirse una realidad independiente ni al sistema ni al instrumento. "... todo intento de subdividir al fenómeno exigirá un cambio de dispositivo experimental que introducirá nuevas posibilidades de interacción, no controlables en principio, entre los objetos y los instrumentos de medición: es esta circunstancia la que expresa la individualidad de los efectos cuánticos típicos. En consecuencia, los resultados obtenidos en condiciones experimentales diferentes no pueden ser englobados en una sola representación, sino que deben considerarse como complementarios en el sentido de que sólo la totalidad de los fenómenos agota la información posible sobre los objetos."⁹

La idea de complementariedad se refiere, sobre todo, a la imposibilidad de llevar a cabo una descripción que sea a la vez causal y espacio-temporal de los fenómenos cuánticos. Para Bohr,

⁹ N. Bohr, 'Discussions avec Einstein sur des problèmes épistémologiques de la physique atomique.', contribución a 'Albert Einstein, Philosopher Scientist', Evanston 1949; reeditado en: N. Bohr, 'Physique atomique et connaissance humaine', Gauthier-Villars, 1961. París, p. 67.

las desigualdades de Heisenberg son una forma de expresar dicha imposibilidad.

3. El concepto de probabilidad.

Se mencionó antes que la interpretación del formalismo de la mecánica cuántica está estrechamente relacionada con la interpretación adoptada para la noción de probabilidad. Esta puede ser de dos tipos: subjetiva u objetiva.

El punto de vista subjetivo es aquél que interpreta la cantidad $p(A|B)$ (probabilidad de A dado B) como una medida del conocimiento que posee el observador acerca de A, dada la información B.

Dentro de las interpretaciones objetivas podemos mencionar cuatro:

1) Interpretación clásica. $p(A|B)$ es el cociente del número de casos favorables a los eventos A y B y el número de casos favorables al evento B. Esta interpretación sólo es válida cuando todos los casos favorables al evento B son igualmente probables. (Debido a esta limitación en su aplicabilidad, la interpretación clásica no se utiliza en la actualidad).

2) Interpretación frecuentista o estadística. $p(A|B)$ es el límite de la frecuencia relativa de los sucesos A en los sucesos B cuando el número de éstos tiende a infinito.

3) Interpretación propensional. Esta interpretación fue propuesta originalmente por K. Popper y considera a $p(A|B)$ como una medida de la propensión o tendencia que tiene el evento A de

ocurrir si ha ocurrido el evento B. Para Popper la propensión es una propiedad objetiva y real de toda la situación física.

4) Interpretación de ensemble. Esta última interpretación consiste en obtener modelos teóricos para el concepto de probabilidad generalizando los procedimientos de la Mecánica Estadística. En esta interpretación se consideran ensembles de réplicas teóricas del sistema físico bajo estudio y, de esta forma, la medida sobre el ensemble de un determinado tipo de acontecimiento se toma como la definición teórica de la probabilidad, mientras que las frecuencias observadas constituyen la principal técnica para medirla. Desde este punto de vista, el condicional B de una probabilidad $p(A|B)$ es equivalente a la definición del ensemble teórico.

La escuela de Copenhague acepta un punto de vista subjetivo de la probabilidad. Esto se refleja en la suposición de que la función de onda describe completamente a un sistema individual. Podemos ilustrar lo anterior por medio de la paradoja de de Broglie: consideremos un electrón en el interior de una caja y supongamos que ésta es dividida en dos partes de igual volumen. De acuerdo con la escuela ortodoxa podemos considerar que el electrón individual está completamente descrito por una función de onda. Sea A el evento "el electrón está en la caja I", entonces $\sim A$ es el evento "el electrón está en la caja II". Sea finalmente B el condicional "la caja ha sido separada en dos partes". Entonces:

$$p(A|B) = p(\sim A|B) = \frac{1}{2}$$

Supongamos ahora que un observador detecta al electrón en la caja I. Entonces, si la función de onda representa el conocimiento del observador, tendremos que aceptar que las funciones de onda en las cajas I y II se ven modificadas en el instante en que éste se percata de que el electrón está en una de ellas: la función de onda en la caja II se anula, mientras que en la caja I se reduce al estado que describe la presencia del electrón. Este fenómeno se conoce como colapso de la función de onda y es producto exclusivamente de haber adoptado una interpretación subjetiva de las probabilidades, lo que se refleja en la suposición de que la función de onda describe al sistema individual. Como dijo Heisenberg: "Es bien sabido que la reducción de los paquetes de onda siempre aparece en la teoría de Copenhague cuando se completa la transición de lo posible a lo real...", es decir, cuando "se selecciona lo real entre lo posible, selección que realiza el 'observador'...".⁹ Para Heisenberg este fenómeno es similar a un salto cuántico. Es importante notar que el postulado de "proyección" o "colapso" de la función de onda debe añadirse al formalismo cuántico si se desea que esta interpretación sea consistente.

Por otro lado, en el razonamiento anterior, nada impide que las cajas hayan estado separadas por una distancia arbitraria antes de la observación. Entonces, la medición realizada sobre una de ellas altera instantáneamente la función de onda en la otra

⁹ K. Popper: Op. cit., p. 97, ref. 71.

caja, lo que constituye una violación del principio de la relatividad.

Este es uno de los problemas más graves que presenta la interpretación ortodoxa. Los partidarios de esta escuela argumentan a su favor que este tipo de acción a distancia no puede utilizarse para transmitir información a otro observador. En efecto, supongamos que dos observadores realizan el experimento anterior y cada uno observa una caja. Si el observador I detecta al electrón en su caja, produce un colapso instantáneo en la función de onda en la caja II. Sin embargo, el observador II no tiene manera de saber lo que ha ocurrido a menos que:

- 1) abra su propia caja, en cuyo caso se percatará de la ausencia del electrón por sus propios medios, es decir, sin necesidad de recibir información del observador I.

- 2) el observador I le notifique su hallazgo por algún medio de comunicación (en general, éstos suelen ser más lentos que la luz).

Parecería ser, entonces, que en ninguno de los dos casos se viola el principio de la relatividad, pero este argumento solamente es válido si se interpreta, no sólo la mecánica cuántica, sino también la relatividad especial desde la posición positivista, esto es, si se piensa que la relatividad no se refiere a la propagación de interacciones, sino a la transmisión de información entre observadores. De esta manera, lo que prohíbe la relatividad es únicamente que la información viaje más rápido que la luz.

Los problemas anteriores no aparecen si se adopta una interpretación objetiva de la probabilidad. Consideremos de nuevo el experimento de la caja y la relación $p(A|B) = p(\sim A|B) = \frac{1}{2}$, vista desde la perspectiva de la interpretación frecuentista. En este caso, cuando el observador detecta el electrón en la caja I, la probabilidad $p(A|B)$ no se altera, ya que ésta sólo se refiere a la frecuencia con que se obtendrá este resultado si se repite el experimento muchas veces. El conocimiento del resultado de una realización del experimento dice poco sobre la frecuencia. Una vez que se ha encontrado la partícula en la caja I, podría decirse que la probabilidad de encontrarla en esa caja se ha "convertido" en 1, pero esto es sólo una forma de hablar, ya que se trata en realidad de dos probabilidades diferentes: la probabilidad $p(A|B)$ de encontrar la partícula en la caja I dado que la caja original se separó en dos, y la probabilidad $p(A|A)$ de encontrar la partícula en la caja I dado que ha sido encontrada en la caja I. En la interpretación de ensembles la primera correspondería a la probabilidad teórica mientras que la segunda a la experimental.

Vemos, pues, que la "reducción del paquete de ondas" en este caso no es más que un cambio en el condicional de la probabilidad, es decir, en la especificación del experimento, y se convierte en el enunciado de un hecho trivial: $p(A|A) = 1$ y $p(\sim A|A) = 0$.

El razonamiento anterior resulta más claro mediante el siguiente ejemplo: se lanza una moneda al aire; la probabilidad de obtener águila o sol es $\frac{1}{2}$ en cada caso. Mientras no se conozca el resultado del experimento, se puede seguir diciendo que la probabilidad es $\frac{1}{2}$. Al observar el resultado, una probabilidad "se

hace" 1 y la otra 0. En este caso no se puede considerar que la observación haya "colapsado la función de onda", pues la moneda es un objeto clásico. Lo que ocurre, una vez más, es que se trata de dos experimentos (dos condicionales) distintos: "lanzar una moneda" y "lanzar una moneda y obtener un resultado específico".

El ejemplo anterior podría analizarse también utilizando las dos probabilidades de la interpretación de ensamble: la teórica que posee el valor de $\frac{1}{2}$ en todo momento para ambas posibilidades (cara ó sol) y la experimental, que varía dependiendo de cual haya sido el resultado particular del experimento.

Es interesante notar que la interpretación subjetiva de la teoría de probabilidades ocurre también en la mecánica estadística clásica, en la que, a veces, se interpreta la entropía como una medida de nuestro conocimiento del sistema, en lugar de la interpretación correcta, según la cual esta cantidad representa una medida del desorden en el sistema.

4. El argumento EPR.

En 1935 surgió la que es quizá la más importante objeción a la interpretación de Copenhague de la mecánica cuántica en un artículo publicado por Einstein, Podolsky y Rosen bajo el título "Can quantum-mechanical description of reality be considered complete?"¹⁰

¹⁰ A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen, 1935.

El objetivo de este trabajo era mostrar que, bajo ciertas circunstancias, es posible considerar que dos variables que no conmutan son simultáneamente elementos de la realidad, en contradicción con la interpretación ortodoxa de las desigualdades de Heisenberg. El teorema de Einstein, Podolsky y Rosen (EPR), llamado así por ellos mismos, ha sido calificado por los miembros de la escuela ortodoxa como "paradoja", o, incluso, "falacia EPR". Sin embargo, es posible mostrar que se trata, en efecto, de un teorema bien formado¹⁴ si se aceptan los siguientes postulados:

1) Una condición necesaria para que una teoría sea completa es que por cada elemento relevante¹⁷ de la realidad exista otro en la teoría que le corresponda.

2) Una condición suficiente para identificar un elemento de la realidad puede expresarse como sigue: si podemos, sin perturbar en forma alguna al sistema, predecir con certeza (es decir, con probabilidad igual a 1) el valor de una cantidad física, entonces existe un elemento de la realidad que corresponde a dicha cantidad física.

Para lograr su objetivo, Einstein, Podolsky y Rosen consideran un experimento pensado en el que dos partículas

¹⁴ L. E. Ballentine, 1970.

¹⁷ La condición de que los elementos de la realidad sean relevantes a la teoría no fué impuesta por Einstein. Sin embargo, y aunque el concepto "relevante" sea muy vago, esta condición es esencial ya que sin ella no existiría ninguna teoría completa dentro de este marco y por lo tanto el criterio sería inútil.

interactúan durante cierto tiempo y luego se separan. Existen diferentes versiones de este experimento. Consideraremos una de las más sencillas, debida a David Bohm. Dos partículas de spin $\frac{1}{2}$ se preparan en un estado inestable inicial de spin total 0. Cuando se separan debe conservarse el spin total. Entonces, si medimos, por ejemplo, la componente x del spin de la partícula 1, σ_{1x} , podemos inferir el valor de la componente x del spin de la partícula 2, σ_{2x} , sin perturbarla en forma alguna (ya que esta partícula puede estar arbitrariamente alejada de la otra en el momento de la medición). Podemos, entonces, afirmar que σ_{2x} es un elemento de la realidad. A menos que se acepte la posibilidad de una interacción instantánea entre ambas partículas, podemos afirmar, incluso, que σ_{2x} era un elemento de la realidad aun antes de llevar a cabo la medición de σ_{1x} .

Como, por otro lado, podíamos muy bien haber decidido medir la componente z del spin de la partícula 1, un argumento análogo nos permite considerar a σ_{2z} como un elemento de la realidad. Entonces, σ_{2x} y σ_{2z} son elementos simultáneos de la realidad. Como la mecánica cuántica no permite definir el valor de ambas a la vez (puesto que son variables que no conmutan), debemos concluir que la descripción cuántica de la realidad es incompleta.

Este argumento demuestra, más específicamente, que las siguientes proposiciones son incompatibles:

1) El vector de estado provee una descripción completa del sistema individual.

2) Las propiedades físicas reales de dos objetos separados espacialmente son independientes¹³.

La disyuntiva anterior fue planteada por primera vez por Einstein en 1949.

El artículo original fue criticado por Bohr en un trabajo publicado bajo el mismo título¹⁴. Bohr aceptó que el razonamiento de EPR era correcto, su crítica estaba dirigida, más bien, hacia las premisas en que este se basaba. Para él, el formalismo de la mecánica cuántica es incompatible con el punto de vista filosófico de EPR y, en particular, con el criterio de realidad que ellos proponen, ya que sólo puede asociarse un elemento de realidad a un acto de observación realizado de una manera concreta. De esta forma, el argumento de EPR pierde por completo su significado: no tiene sentido asociarle simultáneamente elementos de la realidad a variables que no conmutan, puesto que no existe ningún dispositivo experimental que permita mediclas al mismo tiempo. Y si no hay una medida concreta, tampoco algo a lo que se le pueda atribuir un elemento de la realidad.

Es generalmente aceptado que Bohr logró refutar con éxito el resultado de EPR. Sin embargo, su respuesta es válida sólo si se acepta una postura positivista. En el marco filosófico del realismo, las conclusiones de EPR siguen teniendo validez.

¹³ Esta proposición se conoce como principio de localidad.

¹⁴ v. Bohr, 1935.

ADEMÁS de la crítica de Bohr, se han presentado muchas otras que atacan, fundamentalmente, el hecho de que en el argumento EPR se supone tácitamente la siguiente hipótesis: si en un sistema S_1 se mide una observable A con el resultado a , tiene sentido especular acerca de cual hubiera sido el resultado a' , en vez de A , otra observable B (que puede no conmutar con A) fuera medida en el mismo sistema S_1 , cuando éste se encuentra en el mismo estado. Esta hipótesis no está contenida en el formalismo cuántico.

Existen, sin embargo, formulaciones modernas del argumento EPR en las que la hipótesis anterior no es necesaria. En estas formulaciones se han explotado más a fondo las implicaciones físicas y filosóficas y se ha rebasado la conclusión original: la disyuntiva ya no es sólo entre la localidad y la completéz de la mecánica cuántica, sino entre la localidad y la mecánica cuántica misma (sea ésta completa o no)¹⁵.

5. La interpretación estadística.

Hemos expuesto brevemente las bases de la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica, y algunos de los problemas más graves que presenta. Existe, básicamente, un punto de vista alternativo, propuesto por Einstein desde el Congreso Solvay de 1927, que consiste en suponer que la función de onda no representa

¹⁵ F. Selleri. "El debate de la teoría cuántica", 1966; W. de Baere, 1966.

a un sistema individual, sino a un ensemble estadístico de sistemas¹⁶. Este punto de vista es conocido como interpretación estadística de la mecánica cuántica.

Es importante notar que una descripción estadística sólo permite predecir el valor medio de las variables dinámicas de un sistema individual cuando es posible aplicar la hipótesis ergódica, que consiste en suponer que el promedio temporal de una variable dinámica asociada a un sistema es igual al promedio de dicha variable tomado sobre los distintos sistemas que componen al ensemble a un tiempo dado. Esto equivale a suponer que, si un sistema individual evoluciona durante un tiempo suficientemente largo, habrá ocupado todos los microestados compatibles con el macroestado que define al ensemble. La propiedad de ergodicidad ha sido demostrada para algunos sistemas, en otros existe evidencia experimental a su favor, sin embargo, para la mayoría de los sistemas se requiere suponer esta característica.

En mecánica cuántica los casos de interés no son necesariamente ergódicos: un sistema ligado en un eigenestado de la energía puede serlo, mientras que una partícula que es dispersada por un centro de fuerzas claramente no lo es. Debido a ésto, la mecánica cuántica es, en general, incapaz de hacer predicciones sobre sistemas individuales.

En el marco de la interpretación estadística la probabilidad que predice la teoría cuántica para un valor de cierta variable

¹⁶ Ver nota 4, página 5.

dinámica se entiende como la proporción relativa de miembros del ensemble para los cuales la variable considerada tiene dicho valor. Entonces, la manera de verificar estas predicciones es repitiendo el experimento muchas veces y construyendo la distribución estadística de los resultados.

En este contexto, las desigualdades de Heisenberg pueden entenderse sin necesidad de suponer que la posición y el momento de una partícula no existen simultáneamente. En efecto, la derivación de estas desigualdades a partir del formalismo involucra únicamente las dispersiones de las variables dinámicas consideradas. De esta manera

$$\Delta q \Delta p \geq \hbar/2,$$

donde q y p son cualquier pareja de variables canónicamente conjugadas, impone una restricción al producto de las dispersiones estadísticas sobre el ensemble y no dice nada acerca de las incertidumbres δq y δp en la medición simultánea de estas variables en un sistema individual. De hecho, Δq y Δp sólo pueden determinarse experimentalmente si las incertidumbres δq y δp son mucho menores que ellas. Nada impide, incluso, que en ciertas circunstancias se cumpla:¹⁷

$$\delta q \delta p < \hbar/2.$$

¹⁷ Ballentine; Op. cit. p. 365.

Un ejemplo muy conocido donde ocurre ésto es el siguiente: una partícula con momento inicial conocido \vec{p} pasa a través de una rendija muy angosta. Debido a efectos de difracción, el momento de la partícula cambiará, pero su energía (y por lo mismo $p = \|\vec{p}\|$) se mantendrá constante. Al llegar la partícula a una pantalla que se encuentra a una distancia L de la rendija puede medirse su coordenada z (distancia vertical con respecto a la posición donde hubiera llegado una partícula clásica) con un error δz . Simultáneamente se puede conocer la componente z del momento, puesto que $p_z = p \sin\theta = p z / (L^2 + z^2)^{1/2}$ (con θ el ángulo entre la trayectoria clásica y la línea que une a la rendija con el punto z), con un error δp_z que puede hacerse arbitrariamente pequeño modificando adecuadamente la distancia L entre ambas pantallas. Claramente, el producto $\delta z \delta p_z$ no tiene ninguna cota inferior.

Entonces, desde el punto de vista de la interpretación estadística, las relaciones de Heisenberg no se refieren en absoluto a las mediciones simultáneas.

Otro de los problemas que resuelve la interpretación estadística es el de la supuesta dualidad onda-partícula. El carácter ondulatorio se refiere exclusivamente a la distribución de probabilidades en el ensemble de partículas; éstas retienen su carácter corpuscular.

El hecho de que las probabilidades se obtengan a través de una ecuación de onda queda como un problema abierto de gran interés, cuya solución significaría un avance fundamental en la comprensión de los fenómenos cuánticos.

Lo anterior se ilustra claramente por medio del experimento de las dos rendijas: un haz tenue¹⁰ de partículas monoenergéticas incide sobre una pared con dos rendijas, tras de la cual hay una placa fotográfica. Cada partícula produce una marca casi puntual sobre la placa; después de un tiempo suficientemente largo se observa sobre la placa un patrón de interferencia. Si se cierra una de las rendijas se forma un patrón simple, con un solo máximo. De acuerdo con la escuela de Copenhague el primer patrón resulta del hecho de que la onda que representa a una partícula interfiere consigo misma. Esto equivale a considerar que la partícula pasa por ambas rendijas. Desde el punto de vista estadístico cada partícula posee una trayectoria bien definida y pasa por una sola de las rendijas. Aparentemente no puede explicarse la aparición del patrón de interferencia en el primer caso, ya que el hecho de que una de las rendijas esté abierta o cerrada no debería afectar la trayectoria de las partículas que pasan por la otra rendija. Sin embargo la interpretación estadística no niega la posibilidad de que existan ciertos agentes físicos, aun desconocidos, que se vean afectados por la configuración de las rendijas y que alteren las trayectorias. La identificación de tales agentes ofrece nuevas perspectivas a la investigación en una dirección que los miembros de la escuela ortodoxa consideran carente de interés.

¹⁰ Esta condición permite considerar que las partículas pasan de una en una y no interactúan entre sí.

En apoyo a la interpretación de este experimento en términos ortodoxos se ha utilizado un argumento basado en la teoría de probabilidades. Sea $p_1(x)$ ($p_2(x)$) la probabilidad de que la partícula incida en la posición x sobre la placa fotográfica dado que la rendija 2 (1) está cerrada, y sea $p_{12}(x)$ la probabilidad de que incida en x dado que ambas rendijas están abiertas. Los eventos "pasar por la rendija 1" y "pasar por la rendija 2" son excluyentes y exhaustivos. Podría esperarse que $p_{12}(x) = p_1(x) + p_2(x)$, sin embargo, esto no ocurre, puesto que p_1 y p_2 son distribuciones gaussianas y, por lo tanto, su suma no produce un patrón de interferencia. Esta aparente contradicción nos llevaría a una (o ambas) de las siguientes conclusiones:

1) La teoría usual de probabilidades no se aplica a los fenómenos cuánticos.

2) Los eventos "pasar por la rendija 1" y "pasar por la rendija 2" no pueden considerarse mutuamente excluyentes (de alguna manera la partícula pasaría por ambas).

Una vez más, el error en el razonamiento radica en la omisión de los condicionales en las funciones de probabilidad. Estos condicionales serían c_1 : "sólo la rendija 1 está abierta", c_2 : "sólo la rendija 2 está abierta" y c_3 : "ambas rendijas están abiertas". En este caso el experimento indica únicamente que

$$p(x|c_3) \neq p(x|c_1) + p(x|c_2)$$

lo cual, por otro lado, no tenía por qué ocurrir. De esta manera, no hay necesidad de aceptar ninguna de las conclusiones

anteriores. Sin embargo, este tipo de argumentos han sido utilizados incluso por gente como Feynman¹⁹.

6. Variables ocultas.

Como sabemos, de acuerdo con la interpretación estadística, un estado cuántico no describe exhaustivamente a un sistema individual. Podría pensarse, entonces, que la mecánica cuántica se refiere únicamente a los promedios de las variables dinámicas usuales sobre los valores de otros parámetros ajenos a ella. La distribución de estos parámetros estaría regida por leyes propias, distintas de las cuánticas, y no podría ser controlada en principio. El comportamiento cuántico de la materia sería el efecto de la distribución de estas "variables ocultas"; así, los ensembles propiamente cuánticos serían aquellos en donde las variables ocultas están distribuidas en su forma natural o no controlada, esto es, en forma tal que se cumplan las relaciones de Heisenberg.

Con la introducción de las variables ocultas puede concebirse un ensemble en el que éstas tengan una distribución que permita la violación de las desigualdades de Heisenberg. Dicho ensemble trascendería claramente el dominio de la teoría cuántica. Sin embargo, el nivel actual de conocimiento hace imposible controlar

¹⁹ R. Feynman, 'The Feynman Lectures on Physics', tomo III, Fondo Educativo Interamericano, 1971, pp. 1-7, 1-B.

las variables ocultas y no nos permite realizar experimentalmente un ensemble de este tipo. Esto no excluye, por otro lado, que éstas puedan controlarse en el futuro a través del estudio de las leyes que rigen su comportamiento.

Debido a que la existencia de variables ocultas contradice la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica, se ha generado en torno a ellas una importante polémica. En 1932, John von Neumann desarrolló un teorema por medio del cual pretendía demostrar que ninguna teoría de variables ocultas era capaz de reproducir todos los resultados de la mecánica cuántica. Su razonamiento está basado sobre los siguientes postulados:²⁰

1) Si se representa una observable por un operador R , entonces cualquier función f de dicho observable está representada por $f(R)$.

2) La suma de varias observables, representadas por R, S, \dots , está representada por el operador $R+S+\dots$ sin importar si los operadores conmutan o no.

3) La correspondencia entre operadores hermitianos y observables es uno a uno.

4) Si la observable R es no negativa, entonces $\langle R \rangle \geq 0$.

5) $\forall R, S, \dots$ y $\forall a, b, \dots \in \mathbb{R}$, se debe cumplir

$$\langle aR+bS+\dots \rangle = a\langle R \rangle + b\langle S \rangle + \dots$$

²⁰ Ballentine; Op. cit., p. 374.

para todos los estados posibles en los que puedan calcularse promedios.

Von Neumann demuestra que no puede existir un ensemble en el que todas las observables tengan valores fijos (sin dispersión). Como una teoría de variables ocultas permite la construcción de ensembles no dispersivos²¹, von Neumann concluye que no hay variables ocultas. Además, von Neumann muestra que existen ensembles cuánticos (es decir, dispersivos) que son homogéneos, esto es, tales que:

$$\langle R \rangle_E = \langle R \rangle_{E'}$$

donde E es el ensemble, E' \subseteq E es cualquier subensemble y R es cualquier observable. Por otro lado, las teorías de variables ocultas excluyen la posibilidad de que un ensemble dispersivo sea homogéneo²², lo que parece reafirmar la conclusión de von Neumann.

Estos resultados acabaron prácticamente con la polémica por cerca de veinte años, hasta que David Bohm publicó, en 1952, una teoría de variable oculta que reproducía exactamente las predicciones estadísticas de la mecánica cuántica. Suponiendo una función de onda $\psi = R \exp(iS/\hbar)$ y sustituyendo en la ecuación de Schrödinger y tomando $\rho = \psi \psi^* = R^2$ y

$$v = \nabla S/m = (\hbar/2im) (\nabla\psi/\psi - \nabla\psi^*/\psi^*)$$

²¹ Basta con fijar el valor de las variables ocultas para todos los miembros del ensemble.

²² Jammer; Op. cit., pp. 260-270.

donde ρ es la densidad de probabilidad y v es la velocidad de flujo de partículas, Bohm obtuvo dos ecuaciones: una de ellas es la ecuación de continuidad para la probabilidad, y la otra es una ecuación de balance de energía de la forma:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + V(x) + U(x)$$

con $U(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}$. En su modelo Bohm asigna a cada partícula una posición perfectamente definida x (variable oculta) y un momento dado por $p = m v = \nabla S$, lo que equivale a suponer que cada partícula sigue una trayectoria bien definida. Conociendo las condiciones iniciales de la partícula, el modelo de Bohm permite predecir exactamente el movimiento de la partícula a través de la ley clásica

$$m \ddot{x} = -\nabla (V + U)$$

Bohm llamó a $U(x)$ el potencial cuántico e interpretó la función ψ como un campo físico real y objetivo, que producía una fuerza sobre las partículas dada por $-\nabla U$, y cuya ecuación de propagación era la ecuación de Schrödinger²³.

A pesar de que la teoría de Bohm no tuvo gran aceptación, su sola existencia invalida el teorema de von Neumann. Su aparición hizo renacer la polémica y propició el surgimiento de otros modelos de variable oculta. Incluso alentó a de Broglie a retomar

²³ Jammer; Op. cit., pp. 200-202.

las ideas que había abandonado a raíz de la oposición que encontró en el Congreso Solvay de 1927.

La aparición de teorías de variables ocultas compatibles con la mecánica cuántica llevó a John Stewart Bell²⁴ a estudiar detenidamente el teorema de von Neumann para detectar sus fallas. Apoyado en una teoría de variables ocultas construida por él mismo, Bell demostró que el postulado de aditividad de los valores esperados (postulado 5 de von Neumann) no era válido en general. Esto es claro si se consideran las componentes σ_x y σ_y del spin de una partícula. El hecho de que para ensembles cuánticos se cumpla que $\langle \sigma_x + \sigma_y \rangle = \langle \sigma_x \rangle + \langle \sigma_y \rangle$ es una propiedad no trivial de la mecánica cuántica²⁵. Sin embargo, en un ensemble no dispersivo, cada observable tendrá un valor fijo, igual a alguno de sus eigenvalores. Entonces, por ejemplo, $\langle \sigma_x \rangle = \pm 1$, $\langle \sigma_y \rangle = \pm 1$, pero $\langle \sigma_x + \sigma_y \rangle = \pm \sqrt{2}$. Vemos, entonces, que este tipo de ensembles no satisfacen el postulado 5.

En un artículo escrito en 1964²⁶, Bell analizó detenidamente el argumento de EPR, que había permanecido inalterado por décadas y no había rebasado los límites puramente epistemológicos. En su análisis, utilizó un experimento pensado similar a la versión de Bohm del argumento original e investigó las propiedades que debería tener cualquier teoría de variables ocultas compatible con el principio de localidad. Bell obtuvo como resultado una

²⁴ J. S. Bell, 1966.

²⁵ Ballentine; *op. cit.*, p. 376.

²⁶ J. S. Bell, 1964.

desigualdad que cualquier teoría de este tipo debe satisfacer, y que la mecánica cuántica viola, lo que lo llevó a la conclusión de que ninguna teoría local de variables ocultas es capaz de reproducir todos los resultados cuánticos con precisión arbitraria. Este resultado constituye el llamado teorema de Bell. La importancia de la desigualdad de Bell radica en el hecho de que es posible, en principio, contrastarla experimentalmente. De esta forma sería posible resolver empíricamente una discusión de carácter filosófico.

Recientemente se han llevado a cabo experimentos de este tipo, y prácticamente en todos ellos se ha encontrado que la desigualdad de Bell se viola, lo que ha llevado a un gran número de científicos a afirmar que las teorías locales de variables ocultas son incapaces de describir adecuadamente a la naturaleza.

Sin embargo, la conclusión anterior no goza de una aceptación absoluta. Existen diversas posiciones acerca de la validez, tanto de los resultados experimentales, como del propio teorema de Bell. Entre quienes no comparten el punto de vista ortodoxo están los que suponen que el teorema de Bell es válido, lo que implica que es la mecánica cuántica, y no las teorías locales de variables ocultas, la que describe incorrectamente a la naturaleza. Este grupo ha mostrado que en los experimentos hasta ahora realizados se incluyen hipótesis ajenas al teorema, y que, por lo tanto, sus resultados no proporcionan información concluyente acerca de si la naturaleza obedece o no la desigualdad de Bell.

Por otro lado, también han sido presentadas críticas al teorema de Bell, que muestran que su dominio de aplicación es

mucho más restringido de lo que se cree usualmente²⁷. En particular, ha sido posible construir teorías locales de variables ocultas que violan la desigualdad de Bell y que, en sí mismas, constituyen contraejemplos al teorema. Sin embargo, para lograr lo anterior, estas teorías deben sacrificar la existencia de distribuciones de probabilidad conjuntas para observables que son, desde el punto de vista de la mecánica cuántica, incompatibles. Esto parece indicar que no es el principio de localidad lo que entra en juego en la discusión, sino la existencia de este tipo de distribuciones de probabilidad. De esta forma, cualquier teoría, local o no, que contenga en su formalismo estas distribuciones deberá cumplir con la desigualdad de Bell.

De lo anterior podemos concluir que, aun cuando la evidencia experimental mostrara definitivamente que la naturaleza viola la desigualdad de Bell, como parece ser el caso, esto no implicaría que debamos renunciar, ni a la objetividad, ni a la localidad en la descripción física de la naturaleza, sino que, solamente, obligaría a que cualquier intento de fundamentar a la mecánica cuántica con una teoría de variables ocultas no incluya la posibilidad de calcular distribuciones conjuntas de probabilidad para los resultados de las mediciones de variables incompatibles, lo que representaría un problema de investigación de gran interés.

Desde esta perspectiva, parecería ser que el teorema de Bell no descarta la posibilidad de hacer una descripción de la

²⁷ A. M. Cetto, 1966.

naturaleza que sea compatible con el principio de localidad y que esté basada en la convicción de que el universo existe independientemente de la presencia de seres inteligentes que lo observen, lo que es, en nuestra opinión, un principio irrenunciable del pensamiento científico.

Bibliografía.

Daore, W. de (1986), *Adv. Electr. and Electron Physics* 68, p.245, 1986.

Ballentine, L.E. (1970), "The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics", *Rev. Mod. Phys.* 42, 1970.

Ballentine, L.E. (1986), "Probability theory in quantum mechanics", *Am. J. Phys.* 54(10), p.883, 1986.

Bell, J.S. (1964), "On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox", *Physics* 1, p.195, 1964.

Bell, J.S. (1966), "On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics", *Rev. Mod. Phys.* 38, p.447, 1966.

Bohr, N. (1935), "Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete", *Phys. Rev.* 48, p.696, 1935.

Bohr, N. , "Discussions avec Einstein sur des problèmes épistémologiques de la physique atomique", contribución a "Albert Einstein: Philosopher Scientist", Evaston 1949. Reeditado en: N. Bohr. "Physique atomique et connaissance humaine", Gauthier-Villars, Paris 1961.

Brody, T (1975), "Probability: A New Look at Old Ideas", Rev. Mex. Fis. 24, P.25, 1975.

Brody, T. (1983), "Foundations for Quantum Mechanics. Results and Problems", Rev. Mex. Fis. 29, p.461, 1983.

Bunge, M. (1956), "Survey of the interpretations of quantum mechanics", Am. J. Phys. 24, p.272, 1956.

Copasso, V.; Fortunato, D.; Selleri, F. (1970), "von Neumann's Theorem and Hidden-Variable Models", Rivista del Nuovo Cimento 2, p.149, 1970.

Cetto, A.M. (1986), "Why should the Bell inequality be obeyed?", preprint, IFUNAM, 1986.

Einstein, A.; Podolsky, B.; Rosen, N. (1935), "Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?", Phys. Rev. 47, p.777, 1935

Jammer, M., "The Philosophy of Quantum Mechanics". John Wiley and Sons, Nueva York 1974.

Popper, K., Post Scriptum a: "La lógica de la investigación científica" vol. III: "Teoría cuántica y el cisma en física", Tecnos, Madrid 1985

Ross-Bonney, A.A. (1975), "Does God Play Dice? A Discussion of Some Interpretations of Quantum Mechanics", *Il Nuovo Cimento* 30B, p.55, 1975.

Selleri, F., "El debate de la teoría cuántica", Alianza Editorial, Madrid, 1986.

CAPITULO II

LA ELECTRODINÁMICA ESTOCÁSTICA

LA ELECTRODINÁMICA ESTOCÁSTICA

1. Introducción a la Electrodinámica Estocástica.

Dentro del marco de la interpretación estadística de la mecánica cuántica se han propuesto un gran número de teorías que intentan explicar el comportamiento microscópico de la materia. De todas estas, la electrodinámica estocástica (EDE) es una de las que presentan mayores perspectivas. De acuerdo con esta teoría, las propiedades cuánticas de una partícula cargada son el producto de la interacción entre ésta y un campo electromagnético fluctuante, cuya densidad espectral a una temperatura de cero absoluto coincide con la del campo de vacío de la electrodinámica cuántica. Sin embargo, en EDE este campo de fondo es real (aunque no directamente observable, ya que su promedio temporal es cero), en contraposición con la electrodinámica cuántica que lo considera como un campo virtual. De acuerdo con la EDE, los resultados usuales de la teoría cuántica deben obtenerse como promedios sobre las realizaciones del campo de fondo para sistemas que han alcanzado estados de equilibrio. La EDE, sin embargo, no tiene por que restringirse al estudio de sistemas en equilibrio, lo que le debe permitir, en principio, predecir toda una nueva serie de fenómenos ajenos a la mecánica cuántica.

La existencia de un campo estocástico de fondo que permea todo el espacio debe tener efectos muy importantes en la dinámica de las partículas; así, cualquier descripción "clásica" que ignore dichos efectos será necesariamente incompleta. Una partícula inmersa en el campo de vacío debe intercambiar energía y momento

con éste en forma aleatoria, de manera que no es posible considerarla como un sistema cerrado. Esa constante interacción tendrá como efecto el que las variables dinámicas asociadas a la partícula no tengan valores fijos, por lo que, si se presta atención exclusivamente a la partícula, y no al sistema completo campo y partícula, las leyes clásicas de conservación serán válidas sólo en promedio. El estudio de sistemas abiertos está aun en sus principios, y la EDE es una de las primeras teorías físicas en intentar describirlos abiertos.

En principio, la EDE debería considerar la existencia de campos de fondo distintos al electromagnético (gravitacional, fuerte, débil), sin embargo, parece ser que basta con considerar este campo para entender, al menos, las propiedades de sistemas cuánticos no relativistas. Lo anterior tiene el grave problema de no permitir comprender el comportamiento cuántico de las partículas elementales neutras (como el neutrino). Aun así, existe un argumento debido a Santos¹ evitar esta dificultad. Según él, através del comportamiento estocástico que adquieren las partículas en contacto con el campo electromagnético de fondo, todos los demás campos adquieren propiedades estocásticas, y deben alcanzar un estado de equilibrio que asegure que sus propiedades estadísticas, así como su densidad de energía, adquieran los mismos valores. De esta forma, basta con describir uno solo de esos campos para conocer el comportamiento de los demás. La enorme

¹E. Santos (1979).

simplicidad matemática que presenta el campo electromagnético lo hace el mejor candidato para esa descripción.

La idea de explicar el comportamiento cuántico de la materia suponiendo que éste es producto de la interacción con un campo de fondo fué propuesta inicialmente por Kalitsin en 1953, Adirovich y Podgoretskii en 1954, y por Sokolov y Tumanov en 1956². Estos últimos consideraron el problema del oscilador armónico clásico en interacción con el campo de vacío de la electrodinámica cuántica y mostraron que, como resultado de la interacción, las variables dinámicas de la partícula se transforman en operadores que satisfacen las relaciones cuánticas usuales de conmutación.

La EDE propiamente dicha nació con los trabajos de Braffort et al. en 1954³ y Marshall en 1963, en los que se introdujo, por primera vez, la idea de que el campo electromagnético de fondo propuesto por la electrodinámica cuántica tiene existencia real. En su artículo, Marshall estudió el comportamiento del oscilador armónico en interacción con dicho campo y encontró que existe una distribución estacionaria en el espacio fase como resultado del equilibrio entre la potencia media que el oscilador radía en su movimiento y la que absorbe del campo, si se supone que la densidad espectral de éste, a temperatura cero, es de la forma:

$$\rho_0(\omega) = A\omega^3$$

¹ N. Kalitsyn, 1953; E. I. Adirovich y M. I. Podgoretskii, 1954; A. A. Sokolov y V. S. Tumanov, 1956

³ P. Braffort M. Spighel y C. Tzara, 1954; T. W. Marshall, 1963.

La relación anterior es la misma que Braffort et al. habían encontrado algunos años antes a partir de consideraciones de tipo termodinámico.

Marshall mostró, también, que si la constante de proporcionalidad A se toma igual a $\hbar/(2\pi^2c^3)$, se encuentra una energía media para el oscilador de $\frac{1}{2}\hbar\omega$. La densidad espectral obtenida por Marshall es precisamente la misma que la electrodinámica cuántica predice para el campo de vacío:

$$\rho_0(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2c^3} \quad (1)$$

Además, si la densidad espectral del campo se hace variar de acuerdo a la ley de Planck, el comportamiento del oscilador a temperaturas mayores que cero coincide nuevamente con las predicciones de la mecánica cuántica.

Según una de las interpretaciones propuestas para la EDE, el origen del campo de fondo está en la radiación producida por todas las partículas cargadas del universo, que a lo largo del tiempo ha logrado alcanzar un estado de equilibrio. Un campo originado de esta forma es, necesariamente, estocástico, además, si se supone que la distribución de materia en el universo es, a gran escala, homogénea e isotrópica, el campo heredará estas características. Las propiedades anteriores serán válidas siempre que no exista cantidades apreciables de materia cercanas que alteren al campo de fondo (por ejemplo, si encerramos al campo en una pequeña cavidad no podrán existir todos los modos). La explicación de algunos fenómenos cuánticos, como el experimento de las dos rendijas, dependerá crucialmente de la anisotropía del campo debida a la presencia

de estas. Evidentemente, el hecho de que una o las dos rendijas estén abiertas alterará la forma del campo de fondo y se reflejará en un cambio en el comportamiento de las partículas (Dicho de otra forma, es el campo de fondo quien "sabe" que las dos rendijas están abiertas y lo "comunica" a las partículas). Otra importante propiedad del campo de vacío es el hecho de que la densidad espectral (1) es la única que permanece invariante frente a transformaciones de Lorentz⁴. Una consecuencia directa de lo anterior es que el campo de vacío no da origen a fuerzas de fricción, lo que se traduce en que preserva (en promedio) la ley de la inercia⁵.

La constante de Planck \hbar es, desde este punto de vista, tan sólo una medida de la magnitud de las fluctuaciones del campo, y debido al origen de este campo es de esperarse que su valor esté determinado cosmológicamente. Algunos autores han especulado, incluso, sobre la posibilidad de que, debido a las inhomogeneidades locales que existen en el universo, el valor de \hbar puede variar de manera apreciable en diferentes regiones de éste, lo que debería dar lugar a fenómenos de gran importancia. Aun más, el valor de \hbar no tendría por que haber permanecido constante en todas las épocas.

Entre las características del campo del punto cero está también su incoherencia, y el hecho de que su promedio temporal y

⁴ F. W. Marshall, 1965; T. H. Boyer, 1969; E. Santos, 1974.

⁵ Una discusión más extensa acerca de las propiedades del campo de fondo puede encontrarse en: T. H. Boyer 1970 y 1975.

espacial se anula. Debido a todo esto, es natural esperar que no sea observable a escala macroscópica, donde sólo las frecuencias bajas, para las que el campo es despreciable, tienen efecto. Sin embargo, a escala microscópica, donde las frecuencias altas son importantes, es posible detectar el campo indirectamente por sus efectos sobre las partículas.

La ecuación (1) presenta un problema grave debido a que su integral sobre todas las frecuencias es infinita, lo que le da un contenido energético igualmente infinito. Este problema aparece también en la electrodinámica cuántica, y es una de las razones por las que esta teoría considera al campo de fondo como un campo virtual. Como para EDE este campo es real, su densidad espectral debe ser integrable, ya que de otra forma produciría efectos gravitacionales infinitos, lo que está en obvia contradicción con las observaciones. El problema anterior pone en evidencia el hecho de que el espectro (1) debe ser válido sólo para frecuencias bajas. Una forma de ver esto es notando que para valores de ω tales que $\hbar\omega \gg 2mc^2$ la probabilidad de creación de pares ya no puede despreciarse. Debido a que $\rho_0(\omega) \propto \omega^3$ es la única densidad espectral invariante de Lorentz, parecería ser que es inadecuado exigir esta propiedad si deseamos que $\rho_0(\omega)$ sea integrable. Lo anterior no es tan extraño si se toma en cuenta que la métrica real de nuestro universo no es la de Minkowski. De esta forma, lo que debe exigirse a $\rho_0(\omega)$ no es que sea invariante de Lorentz, sino que posea covariancia general en una métrica adecuada a nuestro universo (por ejemplo la métrica de Robertson-Walker).

Hasta ahora no se ha encontrado una densidad espectral adecuada que sea integrable y generalmente covariante, por lo que

la densidad (1) continúa utilizándose. Es importante notar que esta forma del espectro es sólo una idealización ya que en general existirán fluctuaciones alrededor de la ecuación (1). Hasta el momento no se conocen las consecuencias que estas fluctuaciones puedan tener.

La EDE ha logrado resolver con éxito un apreciable número de problemas, entre los que se encuentran: el oscilador armónico (incluyendo las correcciones radiativas a primer orden y su comportamiento a temperaturas mayores a cero), el rotor rígido, dos osciladores armónicos acoplados, los efectos diamagnéticos de la materia y el efecto Casimir^d. Este último puede usarse como una evidencia indirecta de la existencia real del campo de fondo. Además, la EDE escapa a todas las paradojas de la mecánica cuántica, y permite entender, al menos cualitativamente, el origen del comportamiento ondulatorio de la materia considerandolo un reflejo de la interacción con el campo de vacío.

2. Descripción del campo de vacío.

Para estudiar los sistemas dinámicos desde la perspectiva de la EDE, es necesario conocer las propiedades del campo del punto cero, y expresarlas en lenguaje matemático. Como dicho campo es electromagnético, podemos utilizar para su estudio la herramienta desarrollada en la electrodinámica clásica. Existe, sin embargo,

^dUna revisión extensa de los orígenes, logros, y problemas de la EDE puede encontrarse en L. de la Peña, 1983.

una diferencia esencial entre los campos clásicos y el campo de fondo que radica en el carácter estadístico de éste último. Dicha estocasticidad debe reflejarse en la descripción matemática del campo de vacío.

Consideremos un campo de radiación en una caja cúbica de lado L con paredes perfectamente conductoras, descrito en la norma de Coulomb, en la que los campos eléctrico y magnético se expresan a partir del potencial vectorial en la forma:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1)$$

Podemos desarrollar al potencial vectorial en una serie de Fourier de ondas planas con vector de propagación \mathbf{k}_n y frecuencia $\omega_n = ck_n$ (con $k_n = \|\mathbf{k}_n\|$). El vector \mathbf{k}_n está dado por:

$$\mathbf{k}_n = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n} \quad (2)$$

con $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ y n_i entero, ya que se impone la condición de que quepa un número entero de longitudes de onda λ en la caja de lado L , y $k_i = 2\pi/\lambda$. El potencial vectorial se expresa en la forma:

$$\mathbf{A} = 1/L^{3/2} \sum_n \sum_\sigma \hat{\mathcal{E}}_{n\sigma} \left[c_{n\sigma} \exp(i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} - \omega_n t)) + c_{n\sigma}^* \exp(-i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - \omega_n t)) \right] \quad (3)$$

donde los $\hat{\mathcal{E}}_{n\sigma}$ son los vectores de polarización (con $\sigma = 1, 2$) que satisfacen la condición de transversalidad:

$$\mathbf{k}_n \cdot \hat{\mathcal{E}}_{n\sigma} = 0 \quad (4)$$

y la de ortogonalidad:

$$\hat{\mathcal{E}}_{n\sigma} \cdot \hat{\mathcal{E}}_{n\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'} \quad (5)$$

Además como $\hat{k}_n = k_n/k_n$ y los vectores $\hat{\epsilon}_{n\sigma}$ forman un triplete ortonormal, satisfacen las condiciones:

$$\sum_{\sigma} \epsilon_{(n\sigma)_i} \epsilon_{(n\sigma)_j} = \delta_{ij} - k_{ni} k_{nj} / k_n^2 \quad (6)$$

Las amplitudes $c_{n\sigma}$ de la ecuación (3) son números complejos arbitrarios. En el caso clásico son números bien definidos, mientras que en la EDE son variables aleatorias cuyas propiedades estadísticas reflejan la naturaleza del campo de fondo.

La ecuación (3) adquiere una forma más conveniente para su análisis si se reescribe a $c_{n\sigma} \exp(-i\omega t)$ y su complejo conjugado como:

$$\begin{aligned} & c_{n\sigma} \exp(i(k_n \cdot x - \omega t)) + c_{n\sigma}^* \exp(-i(k_n \cdot x - \omega t)) = \\ & \cos k_n \cdot x (c_{n\sigma} e^{i\omega t} + c_{n\sigma}^* e^{-i\omega t}) + i \sin k_n \cdot x (c_{n\sigma} e^{i\omega t} - c_{n\sigma}^* e^{-i\omega t}) \\ & \equiv (4\pi c^2)^{1/2} \left[-q_{n\sigma} \cos k_n \cdot x + \frac{p_{n\sigma}}{\omega_n} \sin k_n \cdot x \right] \end{aligned}$$

De esta forma el potencial vectorial queda expresado por:

$$A = (4\pi c^2/L^3)^{1/2} \sum_n \sum_{\sigma} \hat{\epsilon}_{n\sigma} \left[-q_{n\sigma} \cos k_n \cdot x + p_{n\sigma}/\omega_n \sin k_n \cdot x \right] \quad (7)$$

donde $q_{n\sigma}$ y $p_{n\sigma}$ son funciones oscilatorias dependientes del tiempo que satisfacen las ecuaciones:

$$\ddot{q}_{n\sigma} + \omega_n^2 q_{n\sigma} = 0 \quad (8.a)$$

$$\ddot{p}_{n\sigma} + \omega_n^2 p_{n\sigma} = 0 \quad (8.b)$$

$$\dot{q}_{n\sigma} = p_{n\sigma} \quad (8.c)$$

$$\dot{p}_{n\sigma} = -\omega_n^2 q_{n\sigma} \quad (8.d)$$

Podemos escribir ahora los campos eléctrico y magnético de la forma:

$$E(x,t) = \left[\frac{4\pi}{L^3} \right]^{1/2} \sum_{n\sigma} \hat{e}_{n\sigma} \left[p_{n\sigma} \cos k_n \cdot x + \omega_n q_{n\sigma} \sin k_n \cdot x \right] \quad (9)$$

$$B(x,t) = \left[\frac{4\pi c^2}{L^3} \right]^{1/2} \sum_n (k_n \times \hat{e}_{n\sigma}) \left[q_{n\sigma} \sin k_n \cdot x + (p_{n\sigma} / \omega_n) \cos k_n \cdot x \right] \quad (10)$$

Finalmente, el hamiltoniano del campo toma la forma:

$$H_r = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + B^2) d\kappa^3 = \frac{1}{2} \sum_n \sum_{\sigma} (p_{n\sigma}^2 + \omega_n^2 q_{n\sigma}^2) = \sum_n \sum_{\sigma} H_{n\sigma} \quad (11)$$

El hamiltoniano escrito de esta forma es equivalente al de un conjunto infinito de osciladores armónicos independientes de masa unitaria y con frecuencia característica ω_n , donde las $q_{n\sigma}$ y $p_{n\sigma}$ juegan el papel de coordenadas y momentos generalizados. El hamiltoniano de cada uno de estos osciladores está dado por:

$$H_{n\sigma} = \frac{1}{2} p_{n\sigma}^2 + \frac{1}{2} \omega_n^2 q_{n\sigma}^2 \quad (12)$$

Puede verse que, con el hamiltoniano (11), las relaciones (8) resultan ser directamente las ecuaciones de Hamilton del sistema.

En nuestro caso las $q_{n\sigma}$ y las $p_{n\sigma}$ son variables estocásticas, y por lo tanto los valores de cada $H_{n\sigma}$ también lo serán. Si ahora exigimos que el promedio de la energía de cada uno de estos osciladores elementales sobre todas las realizaciones del campo corresponda al promedio de la energía del campo de vacío de la electrodinámica cuántica, es decir, $\frac{1}{2} \hbar \omega_n$ y denotamos ese promedio por $\langle \rangle$, se obtiene:

$$\langle H_{n\sigma} \rangle = \frac{1}{2} \hbar \omega_n = \frac{1}{2} \langle p_{n\sigma}^2 + \omega_n^2 q_{n\sigma}^2 \rangle \quad (13)$$

o equivalentemente, usando el teorema del virial:

$$\langle p_{n\sigma}^2 \rangle = \omega_n^2 \langle q_{n\sigma}^2 \rangle = \frac{1}{2} \hbar \omega_n \quad (14)$$

Además, como el campo de vacío debe promediar a cero, debemos tener que:

$$\langle q_{n\sigma} \rangle = \langle p_{n\sigma} \rangle = 0 \quad (15)$$

Las propiedades estadísticas anteriores pueden determinarse directamente de consideraciones sobre la energía. Podemos pedir aun otra condición, basada en el hecho de que el campo de fondo debe encontrarse en un estado de máxima estocasticidad. Esto significa que cada modo del campo fluctúa en forma independiente de los demás, es decir, que estos no están correlacionados entre sí. Lo anterior puede expresarse, junto con las ecuaciones (14), en la forma:

$$\langle q_{n\sigma} p_{n'\sigma'} \rangle = 0 \quad (16.a)$$

$$\langle q_{n\sigma} q_{n'\sigma'} \rangle = (\hbar/2\omega_n) \delta_{nn'} \delta_{\sigma\sigma'} \quad (16.b)$$

$$\langle p_{n\sigma} p_{n'\sigma'} \rangle = (\hbar\omega_n/2) \delta_{nn'} \delta_{\sigma\sigma'} \quad (16.c)$$

La máxima estocasticidad implica, también, que la amplitud de cada uno de los modos del campo obedece una distribución gaussiana. Este tipo de distribuciones poseen la propiedad de que los momentos de orden superior de la variable estocástica z pueden encontrarse a partir de los momentos de primer y segundo orden. En particular, si la variable estocástica promedia a cero se tendrá:

$$\langle z^n \rangle = \begin{cases} (n-1)!! \sigma^n & \text{para } n \text{ par.} \\ 0 & \text{para } n \text{ impar.} \end{cases}$$

con σ^2 la varianza de la variable estocástica.

El desarrollo del campo A toma una forma similar al campo de vacío de la electrodinámica cuántica cuando se substituye a las variables canónicas del campo $q_{n\sigma}$ y $p_{n\sigma}$ por otras variables definidas como:

$$a_{n\sigma} = 1/(2\hbar\omega_n)^{1/2} (ip_{n\sigma} + \omega_n q_{n\sigma}) \exp(i\omega_n t) \quad (17.a)$$

$$a_{n\sigma}^* = 1/(2\hbar\omega_n)^{1/2} (ip_{n\sigma} - \omega_n q_{n\sigma}) \exp(-i\omega_n t) \quad (17.b)$$

A partir de las expresiones anteriores es claro que $a_{n\sigma}$ y $a_{n\sigma}^*$ no dependen del tiempo.

En términos de estas nuevas variables, el potencial vectorial A (ecuación (7)) se escribe como:

$$A = \sum_n \sum_\sigma \left[\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_n} \right]^{1/2} \hat{\epsilon}_{n\sigma} \left[a_{n\sigma} \exp(i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} - \omega_n t)) + \text{c.c.} \right] \quad (18)$$

con $V = L^3$.

De las ecuaciones (15) y (16) podemos obtener las relaciones estadísticas que deben satisfacer las $a_{n\sigma}$:

$$\langle a_{n\sigma} \rangle = 0 \quad (19.a)$$

$$\langle a_{n\sigma} a_{n'\sigma'} \rangle = 0 \quad (19.b)$$

$$\langle a_{n\sigma} a_{n'\sigma'}^* \rangle = \frac{1}{2} \delta_{nn'} \delta_{\sigma\sigma'} \quad (19.c)$$

El hamiltoniano (11) queda dado por:

$$H_r = \sum_n \sum_\sigma \hbar\omega_n a_{n\sigma}^* a_{n\sigma} \quad (20)$$

Las expresiones anteriores sugieren considerar a las variables $a_{n\sigma}$ y $a_{n\sigma}^*$ como los análogos estocásticos de los operadores de creación y aniquilación utilizados en la electrodinámica cuántica.

De las ecuaciones (19) y (20) puede obtenerse que:

$$\langle H_r \rangle = \sum_n \sum_{\sigma} \frac{1}{2} \hbar \omega_n \quad (21)$$

La función de autocorrelación del campo eléctrico $E(\mathbf{x}, t)$ es de gran importancia en la mayoría de los problemas que aborda la EDE y, en particular, está directamente relacionada con la densidad espectral del campo de fondo. Para obtenerla, partimos de la expresión para E en términos de $a_{n\sigma}$ y $a_{n\sigma}^*$:

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \\ = -\sum_n \sum_{\sigma} \left[\frac{2\pi\hbar\omega_n}{V} \right]^{1/2} \hat{e}_{n\sigma} \left[-ia_{n\sigma} \exp(i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} - \omega_n t)) + \text{c.c.} \right] \quad (22)$$

de donde:

$$\langle E_i(\mathbf{x}, t) E_j(\mathbf{x}', t') \rangle = \frac{2\pi\hbar}{V} \sum_n \sum_{\sigma} \sum_{n'} \sum_{\sigma'} \hat{e}_{(n\sigma)_i} \hat{e}_{(n'\sigma')_j} (\omega_n \omega_{n'})^{1/2} \times \\ \langle \left[-ia_{n\sigma} \exp(i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} - \omega_n t)) + \text{c.c.} \right] \left[-ia_{n'\sigma'} \exp(i(\mathbf{k}_{n'} \cdot \mathbf{x}' - \omega_{n'} t')) + \text{c.c.} \right] \rangle \\ = \frac{2\pi\hbar}{V} \sum_n \sum_{\sigma} \sum_{n'} \sum_{\sigma'} \hat{e}_{(n\sigma)_i} \hat{e}_{(n'\sigma')_j} (\omega_n \omega_{n'})^{1/2} \omega_n \cos(\mathbf{k}_n \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \omega_n (t - t'))$$

Finalmente, usando la ecuación (5), encontramos que:

$$\langle E_i(\mathbf{x}, t) E_j(\mathbf{x}', t') \rangle = \\ \frac{2\pi\hbar}{V} \sum_n \sum_{\sigma} \sum_{n'} \sum_{\sigma'} (\delta_{ij} - k_{ij} / k_n^2) \omega_n \cos(\mathbf{k}_n \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \omega_n (t - t')) \quad (23)$$

Análogamente puede demostrarse que:

$$\langle B_i(x,t) B_j(x',t') \rangle = \langle E_i(x,t) E_j(x',t') \rangle$$

El resultado anterior adquiere una forma más útil si se toma el límite $L \rightarrow \infty$. En ese caso, la suma sobre n se convierte en una integral sobre k , ya que:

$$\frac{1}{V} \sum_n = \frac{1}{L^3} \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3}$$

Como $\Delta n_1 = \Delta n_2 = \Delta n_3 = 1$, entonces:

$$\frac{1}{V} \sum_n = \sum_{n_1} \frac{\Delta n_1}{L} \sum_{n_2} \frac{\Delta n_2}{L} \sum_{n_3} \frac{\Delta n_3}{L}$$

Pero $n_i/L = k_i/2\pi \Rightarrow \Delta n_i/L = \Delta k_i/2\pi$, por lo que:

$$\frac{1}{V} \sum_n = (1/8\pi^3) \sum_{k_1} \Delta k_1 \sum_{k_2} \Delta k_2 \sum_{k_3} \Delta k_3$$

$$\Rightarrow \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \sum_n = (1/8\pi^3) \iiint d^3k$$

La autocorrelación de E se expresa como:

$$\langle E_i(x,t) E_j(x',t') \rangle = \frac{\hbar}{4\pi^2} \int (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2) \omega \cos(k \cdot (x-x') - \omega(t-t')) d^3k$$

Un caso importante corresponde a $x' = x$, en el que se obtiene:

$$\langle E_i(x,t) E_j(x,t') \rangle = \frac{\hbar}{4\pi^2} \int (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2) \omega \cos(\omega(t-t')) d^3k$$

como $d^3k = k^2 dk d\Omega$, con $d\Omega$ la diferencial de ángulo sólido,

$$\int (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2) d\Omega = \int \delta_{ij} d\Omega - \int k_i k_j / k^2 d\Omega$$

$$= 4\pi \delta_{ij} - 1/k^2 \int k_i k_j d\Omega = \left[4\pi - 1/k^2 \int k_i^2 d\Omega \right] \delta_{ij}$$

Debido a la simetría, la integral de k_i^2 es la misma para todas las componentes. Si tomamos la componente z:

$$\begin{aligned} k_z &= k \cos\phi \\ \Rightarrow \int k_z^2 d\Omega &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi k^2 \cos^2\phi \sin\phi d\phi d\theta \\ &= 2\pi k^2 \int_0^\pi \cos^2\phi \sin\phi d\phi = 4\pi k^2/3 \end{aligned}$$

de donde, finalmente:

$$\begin{aligned} \langle E_i(\mathbf{x}, t) E_j(\mathbf{x}, t') \rangle &= \frac{2\hbar}{3\pi} \int_0^\infty k^2 \omega \cos(\omega(t-t')) \delta_{ij} dk \\ &= \frac{2\hbar}{3\pi} \int_0^\infty \omega^3/c^3 \cos(\omega(t-t')) \delta_{ij} d\omega \equiv \delta_{ij} \varphi(t-t') \end{aligned} \quad (24)$$

En la expresión anterior $\varphi(s)$ está dada por:

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \frac{2\hbar}{3\pi c^3} \int_0^\infty \omega^3 \cos(\omega s) d\omega \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \rho_0(\omega) \cos(\omega s) d\omega \end{aligned} \quad (25)$$

en donde se utilizó la ecuación (II.11).

El resultado anterior es un caso particular del teorema de Wiener-Khinchin de la teoría general de procesos estocásticos, que relaciona autocorrelación de una variable estocástica con su densidad espectral de fluctuaciones (en el caso del campo electromagnético, las fluctuaciones $\langle E^2 \rangle$ son proporcionales a la densidad de energía).

Puede definirse la función $S(\omega) = 4\pi\rho_0(\omega)/3$. $S(\omega)$ es la transformada de Fourier del campo, y nos será de gran utilidad en las secciones siguientes.

3. Las ecuaciones de evolución.

En la teoría general de procesos estocásticos la ecuación de Fokker-Planck (F-P), o ecuación de evolución, ha sido una herramienta de gran importancia, pues permite obtener la distribución de probabilidad en el espacio fase a partir de la ecuación de movimiento, para procesos en los que la aproximación de Markov es válida. Estos procesos son aquellos en los que la probabilidad de que el sistema se encuentre en un cierto estado en el tiempo t depende únicamente de donde haya estado en un tiempo t' anterior (no es necesario que t' sea inmediatamente anterior a t), y no de toda la trayectoria que el sistema haya seguido⁷. En este sentido se dice que un proceso de Markov tiene memoria corta.

En la literatura sobre procesos estocásticos es usual derivar la ecuación de F-P para el caso en el que la fuerza estocástica es un ruido blanco, es decir, cuando su densidad espectral es independiente de la frecuencia ($\rho(\omega) = \text{cte.}$); este tipo de fuerza

⁷De manera más formal, lo anterior significa que si el sistema pasó por las posiciones x_1, x_2, \dots, x_n en los tiempos t_1, t_2, \dots, t_n , la probabilidad de que esté en la posición x_{n+1} al tiempo t_{n+1} será:

$$P(x_{n+1} | x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_{n+1} | x_n)$$

aparece en fenómenos como el movimiento browniano. En la EDE, sin embargo, el espectro de la fuerza (ver ecuación (II.1.1)) es altamente coloreado debido a su dependencia en ω^3 , por lo que es necesario obtener una ecuación de F-P más general.

Para desarrollar una ecuación de F-P aplicable a EDE se parte del hamiltoniano (no relativista) de una partícula cargada en interacción con un campo electromagnético, que, en la norma de Coulomb, está dado por:

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c)^2 + V + H_f \quad (1)$$

donde \mathbf{A} es el potencial vectorial, V es un potencial externo y H_f es el hamiltoniano del campo:

$$H_f = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d^3x$$

A partir del hamiltoniano (1) puede obtenerse la ecuación de movimiento de la partícula siguiendo un método muy conocido en la teoría electromagnética. A la ecuación que se obtiene se le denomina ecuación de Abraham-Lorentz (A-L) y tiene la forma:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + m\tau\ddot{\mathbf{x}} + e\mathbf{E} + \frac{e^2}{c} \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} \quad (2)$$

donde \mathbf{F} es la fuerza externa y $\tau = 2e^2/3mc^3$. El término $m\tau\ddot{\mathbf{x}}$ se conoce como la reacción de radiación y se obtiene como una fuerza que el campo radiado por la partícula ejerce sobre ella misma⁹.

⁹ Ver, por ejemplo: L. D. Landau y E. M. Lifshitz, 'Teoría clásica de los campos', Volumen II del curso de Física Teórica, ed. Reverté, Barcelona 1981.

En la EDE, los campos clásicos E y B de la ecuación (2) se sustituyen por campos estocásticos, y la fuerza externa F incluye los efectos de campos electromagnéticos adicionales que pudieran existir. La ecuación obtenida de esta forma se conoce como ecuación de Braffort-Marshall (B-M) y tiene la misma forma que (2). En general, nos restringiremos a casos no relativistas ($v \ll c$), por lo que no consideraremos los efectos magnéticos. Además, como los modos del campo que afectan más a la partícula tienen longitudes de onda muy grandes comparadas con las dimensiones de los sistemas atómicos, tomaremos la aproximación de onda larga, es decir, tomaremos $E = E(t)$ como una superposición homogénea de osciladores. La ecuación de B-M se reduce, entonces, a:

$$m\ddot{x} = F(x,t) + m\ddot{x} + eE(t) \quad (3)$$

Existen diversos métodos para derivar la ecuación de F-P de la EDE, algunos de ellos parten de la ecuación de B-M⁹, mientras que otros lo hacen directamente del hamiltoniano (1)¹⁰. Debido a que la deducción de esta ecuación es muy extensa, y a que no está directamente relacionada con el objetivo de esta tesis, nos limitaremos a dar el resultado. La ecuación de F-P para la densidad de probabilidad en el espacio fase $Q(x,p,t)$ puede escribirse como:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{p}{m} \cdot \nabla_Q + \nabla_p \cdot (F + \frac{1}{m} \nabla F) Q = \nabla_p \nabla_p \cdot \hat{D}^{PP} Q - \nabla_p \nabla_p \cdot \hat{D}^{NP} Q \quad (4)$$

⁹ A. M. Cetto, 1984.

¹⁰ L. de la Peña, 1983.

donde los operadores de difusión \hat{D}^{PP} y \hat{D}^{kP} están dados por:

$$\hat{D}_{ik}^{kP} Q(x,p,t) = e^2 \sum_j \int_0^t \langle E_i^m(t) E_j^m(t') \rangle \frac{\partial x_k}{\partial p_j} Q(x,p,t') dt' \quad (5.a)$$

$$\hat{D}_{ik}^{PP} Q(x,p,t) = e^2 \sum_j \int_0^t \langle E_i^m(t) E_j^m(t') \rangle \frac{\partial p_k}{\partial p_j} Q(x,p,t') dt' \quad (5.b)$$

En las expresiones anteriores, si la partícula hubiera pasado por el punto $\bar{x}(t')$, $\bar{p}(t')$ para $t' < t$, una trayectoria clásica (sin fuerza estocástica) la llevaría a $x(t)$, $p(t)$ al tiempo $t = t'$. E^m es el campo eléctrico estocástico modificado por la presencia de la partícula (a orden v^2), y está dado por:

$$E_i^m(t) = 1/\tau \int_0^m E_i(t') \exp((t-t')/\tau) dt'$$

En el siguiente capítulo utilizaremos la ecuación de F-P para estudiar el átomo de hidrógeno en el marco de la EDE. Debido a que el átomo es un sistema multiperifódico¹¹ es necesario desarrollar una versión de la ecuación de F-P aplicable a este tipo de sistemas. Para lograr esto, se considera que el campo de vacío produce una perturbación pequeña sobre el movimiento clásico, y se escribe la ecuación de F-P en términos de variables de acción y ángulo. Marshall¹² mostró que la ecuación de F-P que se obtiene en este caso tiene la forma:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\sum_l \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left[\Lambda_l - \sum_j B_{lj} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right] P \quad (6)$$

¹¹ Ver apéndice 1.

¹² T. W. Marshall, 1980.

con $P(\xi_i)$ la densidad de probabilidad en el espacio de las variables de acción ξ_i . La dependencia en las variables angulares η_i no aparece debido a que se ha realizado un promedio temporal. Los coeficientes A_i y B_{ij} están dados por:

$$A_i = m\tau \sum_j P_i(\xi_j) \frac{\partial \xi_i(t)}{\partial p_j} \quad (7.a)$$

$$B_{ij} = \frac{e^2}{2} \sum_k \sum_l \int_{-\infty}^{\infty} K_{kl}(s) P_i \left[\frac{\partial \xi_i(t)}{\partial p_k} \frac{\partial \xi_j(t-s)}{\partial p_l} \right] ds \quad (7.b)$$

donde P_i denota promedio temporal y K_{ij} es la función de correlación de la fuerza eléctrica estocástica:

$$K_{ij}(s) = \langle E_i(t) E_j(t-s) \rangle = \delta_{ij} \phi(s)$$

y las parciales $\partial \xi_i / \partial p_k$ se calculan para el movimiento no perturbado.

4. Desarrollo perturbativo de la ecuación de Braffort-Marshall

La ecuación de Fokker-Planck y la técnicas relacionadas con ella son el procedimiento usual utilizado en la EDE para estudiar el comportamiento de los sistemas dinámicos. Sin embargo, la estructura matemática de dicha ecuación es sumamente abstracta, por lo que la física detrás de ella queda, en gran medida, oculta. Para evitar esta dificultad puede usarse un método alternativo¹³

¹³ L. de la Peña y A. M. Celto (1987).

basado en un desarrollo perturbativo de la ecuación de Braffort-Marshall (ecuación (II.3.3)):

$$m\ddot{x} = F(x) + m\dot{x} + eE \quad (1)$$

Para resolver (1) perturbativamente en el caso general, se propone expresar la solución como una serie en potencias de la carga eléctrica e:

$$x = x^{(0)} + ex^{(1)} + e^2 x^{(2)} + \dots \quad (2)$$

Desarrollando $F(x)$ en serie de Taylor alrededor de $x^{(0)}$ obtenemos:

$$F(x) = F(x^{(0)}) + \sum_k \left. \frac{\partial F}{\partial x_k} \right|_0 (x_k - x_k^{(0)}) + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l} \right|_0 (x_k - x_k^{(0)})(x_l - x_l^{(0)}) + \dots$$

Substituyendo (2) en la ecuación anterior se encuentra, a orden dos en e:

$$F(x) = F(x^{(0)}) + \sum_k \left. \frac{\partial F}{\partial x_k} \right|_0 (ex_k^{(1)} + e^2 x_k^{(2)}) + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l} \right|_0 e^2 x_k^{(1)} x_l^{(1)} \quad (3)$$

De (1), (2) y (3) se obtiene, después de separar términos con las mismas potencias de e:

$$m\ddot{x}_l^{(0)} = F_l(x^{(0)}) \quad (4.a)$$

$$m\ddot{x}_l^{(1)} = \sum_k \left. \frac{\partial F_l}{\partial x_k} \right|_0 x_k^{(1)} + E_l \quad (4.b)$$

$$m\ddot{x}_k = \sum_k \left. \frac{\partial F_k}{\partial x_k} \right|_0 x_k^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \left. \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_k \partial x_l} \right|_0 x_k^{(1)} x_l^{(1)} + m\ddot{x}_k / e^2 \quad (4.c)$$

De la ecuación (4.a) vemos que el sistema no perturbado (a orden cero en e) evoluciona siguiendo la ecuación clásica de movimiento, tal y como fue propuesto anteriormente al desarrollar la ecuación de F-P. La fuerza estocástica aparece en la ecuación (4.b) para $x^{(1)}$. Esta ecuación puede resolverse en general con el método de la función de Green, partiendo de una solución retardada de la forma:

$$x_k^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^t \sum_j G_{kj}(t,t') E_j(t') dt'$$

con $G_{ij}(t,t')$ funciones continuas tales que:

$$\begin{aligned} G_{ij}(t,t') &= 0 & \text{si } t' \geq t \\ \frac{\partial}{\partial t} G_{ij}(t,t') \Big|_{t=t'} &= 0 & \text{si } i \neq j \\ \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\partial}{\partial t} G_{ii}(t,t') &= \frac{1}{m} \end{aligned}$$

Derivando $x^{(1)}$ respecto a t encontramos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k^{(1)}(t) &= \sum_j G_{kj}(t,t) E_j(t) + \int_{-\infty}^t \sum_j \frac{\partial}{\partial t} G_{kj}(t,t') E_j(t') dt' \\ &= \int_{-\infty}^t \sum_j \frac{\partial}{\partial t} G_{kj}(t,t') E_j(t') dt' \\ \ddot{x}_k^{(1)}(t) &= \sum_j \frac{\partial}{\partial t} G_{kj}(t,t) E_j(t) + \int_{-\infty}^t \sum_j \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{kj}(t,t') E_j(t') dt' \\ &= E_k(t)/m + \int_{-\infty}^t \sum_j \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{kj}(t,t') E_j(t') dt' \end{aligned}$$

Substituyendo lo anterior en (4.b) y usando el hecho de que $x^{(0)}$ cumple con la ecuación clásica de movimiento que implica:

$$\left. \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right|_0 = \frac{\partial \dot{p}_i^{(0)}}{\partial x_k^{(0)}}$$

obtenemos:

$$\sum_j \int_{-\infty}^t \left[m \frac{\partial^2}{\partial t'^2} G_{ij}(t, t') - \sum_k \frac{\partial \dot{p}_i^{(0)}(t)}{\partial x_k^{(0)}(t)} G_{kj}(t, t') \right] E_j(t') dt' = 0$$

Como las $E_j(t)$ son funciones arbitrarias, la condición anterior se reduce a:

$$m \frac{\partial^2}{\partial t'^2} G_{ij}(t, t') - \sum_k \frac{\partial \dot{p}_i^{(0)}(t)}{\partial x_k^{(0)}(t)} G_{kj}(t, t') = 0$$

pero: $\dot{p}_i^{(0)}(t) = \frac{\partial}{\partial t} p_i^{(0)}(t) = m \frac{\partial^2}{\partial t^2} x_i^{(0)}(t)$.

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t'^2} G_{ij}(t, t') = \sum_k \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \left[\frac{\partial x_i^{(0)}(t)}{\partial x_k^{(0)}(t)} \right] G_{kj}(t, t')$$

La ecuación anterior se satisface si tomamos:

$$G_{ij}(t, t') = \frac{\partial x_i^{(0)}(t)}{\partial p_j^{(0)}(t')}$$

de donde:

$$x_i^{(1)} = \int_{-\infty}^t \sum_j \frac{\partial x_i^{(0)}(t)}{\partial p_j^{(0)}(t')} E_j(t') dt' \quad (5)$$

En forma enteramente análoga es posible obtener $x^{(2)}$ usando (4.c), y, en principio todas las demás $x^{(i)}$, usando sus ecuaciones correspondientes.

De la ecuación de B-M se puede obtener una condición de balance de energía si se multiplica por \dot{x} :

$$m\ddot{x} \cdot \dot{x} = F(x) \cdot \dot{x} + m\tau \ddot{x} \cdot \dot{x} + eE \cdot \dot{x}$$

Como $m\ddot{x} \cdot \dot{x} = p \cdot \dot{p}/m = d/dt.(p^2/2m)$, entonces: $m\ddot{x} \cdot \dot{x} = dT/dt$, con T la energía cinética de la partícula. Además, se cumple que: $F \cdot \dot{x} = -\nabla V \cdot dx/dt = -dV/dt$, con V el potencial. La ecuación anterior se reduce así a:

$$\frac{dH}{dt} = m\ddot{x} \cdot \dot{x} + eE \cdot \dot{x}$$

con H el hamiltoniano "clásico" de la partícula:

$$H = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$$

El término $m\ddot{x} \cdot \dot{x}$ es la potencia instantánea radiada por la partícula, mientras que $eE \cdot \dot{x}$ es la potencia instantánea que ésta absorbe del campo de fondo. En un estado estacionario, el promedio temporal y sobre las realizaciones del campo de dH/dt debe ser cero:

$$P_t \left\langle \frac{dH}{dt} \right\rangle = 0$$

por lo que la condición de balance energético es:

$$m\ddot{x} P_t \langle \dot{x} \cdot \dot{x} \rangle + e P_t \langle E \cdot \dot{x} \rangle = 0 \quad (6)$$

Desarrollando esta expresión al orden más bajo en e se obtiene:

$$m\ddot{x} P_t \langle \dot{x}^{(0)} \cdot \dot{x}^{(0)} \rangle + e^2 P_t \langle E \cdot \dot{x}^{(1)} \rangle = 0 \quad (7)$$

Para llegar a la ecuación anterior se ha tomado en cuenta que $\langle E \cdot \dot{x}^{(0)} \rangle = \langle E \rangle \cdot \dot{x}^{(0)} = 0$, pues $\dot{x}^{(0)}$ no depende de la fuerza estocástica y E promedia a cero. La ecuación (7) es una condición

de equilibrio que debe satisfacerse a orden más bajo en ϵ siempre que la partícula se encuentre en un estado estacionario.

5. La condición de equilibrio para sistemas multiperiodicos no degenerados.

Estamos interesados en aplicar la condición de equilibrio (II.4.7) a sistemas cuyo movimiento clásico es multiperiodico ya que en el próximo capítulo estudiaremos el átomo de hidrógeno también desde esta perspectiva, que ofrece mayor transparencia física y simplicidad matemática que el método basado en la ecuación de F-P. Para sistemas multiperiodicos podemos expresar $x^{(0)}$ como una serie múltiple de Fourier¹⁴:

$$x^{(0)}(t) = \sum_k \tilde{x}_k \exp(i\omega_k t) \quad (1)$$

con $\omega_k = k \cdot \omega_{0i}$ y las componentes ω_{0i} las frecuencias fundamentales del movimiento. Las variables angulares η_i asociadas a este sistema están dadas por:

$$2\pi\eta_i = \omega_{0i} t + \beta_i \quad (2)$$

donde las β_i son constantes dadas por las condiciones iniciales del problema. En términos de estas variables la expresión (1) toma la forma:

$$x^{(0)}(t) = \sum_k \tilde{z}_k \exp(2\pi i k \cdot \eta) \quad (3)$$

¹⁴ Ver apéndice 1.

En la expresión anterior \tilde{x}_k difiere de \tilde{x}_k sólo en una fase arbitraria que resulta irrelevante por lo que en adelante no haremos distinción entre ellas. El momento $p = m\dot{x}$ es, a orden cero:

$$p^{(0)}(t) = \lim \sum_k (k \cdot \omega_0) \tilde{x}_k \exp(2\pi i k \cdot \eta) \quad (4)$$

La potencia media absorbida por el sistema está dada por:

$$\begin{aligned} e^2 \mathbb{P}_i \langle E \cdot \dot{x}^{(i)} \rangle &= e^2 \sum_i \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \langle E_i(t) \int_{-\infty}^t \sum_j \frac{\partial \dot{x}_j^{(0)}(t)}{\partial p_j^{(0)}(t')} E_j(t') dt' \rangle dt \\ &= e^2 \sum_i \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2mT} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^t \sum_j \frac{\partial p_i^{(0)}(t)}{\partial p_j^{(0)}(t')} \langle E_i(t) E_j(t') \rangle dt' dt \end{aligned}$$

En las secciones anteriores se vio que:

$$\langle E_i(t) E_j(t') \rangle = \delta_{ij} \rho(t-t') = \delta_{ij} \int_0^\infty S(\omega) \cos \omega(t-t') d\omega$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i \langle E \cdot \dot{x}^{(i)} \rangle &= \sum_i \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2mT} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^t \int_0^\infty \frac{\partial p_i^{(0)}(t)}{\partial p_j^{(0)}(t')} S(\omega) \cos \omega(t-t') d\omega dt' dt \\ &= \sum_i \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2mT} \int_{-T}^T \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial p_i^{(0)}(t)}{\partial p_j^{(0)}(t-u)} S(\omega) \cos \omega u d\omega du dt \quad (5) \end{aligned}$$

Por otro lado, notamos que:

$$\frac{\partial p_i^{(0)}(t)}{\partial p_j^{(0)}(t')} = [x_i^{(0)}(t), p_j^{(0)}(t')] =$$

donde $[,]$ denota paréntesis de Poisson. Podemos calcular este paréntesis en el sistema de las variables de acción y ángulo:

$$\begin{aligned}
 [x_i^{(0)}(t'), p_i^{(0)}(t)] &= \sum_j \left[\frac{\partial x_i^{(0)}(t')}{\partial \eta_j} \frac{\partial p_i^{(0)}(t)}{\partial \xi_j} - \frac{\partial p_i^{(0)}(t)}{\partial \eta_j} \frac{\partial x_i^{(0)}(t')}{\partial \xi_j} \right] \\
 &= -2\pi m \sum_{j k k'} \exp(2\pi i(k \cdot \eta(t) + k' \cdot \eta(t'))) \left[k'_j \frac{\partial (k \cdot \omega_0 \tilde{x}_{ki})}{\partial \xi_j} - \right. \\
 &\quad \left. k_j (k \cdot \omega_0 \tilde{x}_{k'i}) \frac{\partial x_{k'i}}{\partial \xi_j} \right]
 \end{aligned}$$

Tomando $t' = t - u$, realizando la integral sobre t de la ecuación (5), y usando el resultado anterior, se encuentra:

$$\begin{aligned}
 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2mT} \int_{-T}^T [x_i^{(0)}(t-u), p_i^{(0)}(t)] dt &= 2\pi \sum_{j k k'} \left[k_j (k \cdot \omega_0 \tilde{x}_{k'i}) \frac{\partial x_{k'i}}{\partial \xi_j} - \right. \\
 &\quad \left. k'_j \tilde{x}_{k'i} \frac{\partial (k \cdot \omega_0 \tilde{x}_{ki})}{\partial \xi_j} \right] \exp(-ik' \cdot \omega_0 u) \delta_{k, -k'} \\
 &= 2\pi \sum_{j k} k_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} (k \cdot \omega_0 \tilde{x}_{ki} \tilde{x}_{-ki}^*) \exp(ik \cdot \omega_0 u)
 \end{aligned}$$

En el cálculo anterior se utilizó el hecho de que el sistema es no degenerado para convertir la delta de $k \cdot \omega_0$ y $-k' \cdot \omega_0$ en una delta de k y $-k'$, ya que si todas las componentes del vector ω_0 son distintas entre sí y distintas de cero, la única forma en que se puede tener:

$$k \cdot \omega_0 = -k' \cdot \omega_0$$

es si $k = -k'$. Lo anterior no es necesariamente cierto si por lo menos dos de las componentes de ω_0 son iguales.

Por otro lado, sabemos que $\tilde{x}_{ki}^* = \tilde{x}_{-ki}^*$ $\Rightarrow \tilde{x}_{ki} \tilde{x}_{-ki}^* = |\tilde{x}_{ki}|^2$, por lo que, finalmente se tiene para la potencia media absorbida:

$$\begin{aligned}
P_t \langle E \cdot \dot{\tilde{x}}^{(1)} \rangle &= 2\pi \sum_{l,j,k} \int_0^\infty \int_0^\infty k \cdot \omega_0 \left| \tilde{x}_{kl} \right|^2 \exp(i k \cdot \omega_0 u) S(\omega) \cos \omega u du d\omega \\
&= \pi^2 \sum_{l,j,k} k_j \frac{d}{d\xi_j} \int_0^\infty S(\omega) \langle k \cdot \omega_0 \left| \tilde{x}_{kl} \right|^2 \rangle \left[\delta(\omega + k \cdot \omega_0) + \delta(\omega - k \cdot \omega_0) \right] d\omega \\
\Rightarrow P_t \langle E \cdot \dot{\tilde{x}}^{(1)} \rangle &= \pi^2 \sum_k k \cdot \nabla_{\xi} S(\omega_k) \omega_k \left| \tilde{x}_{kl} \right|^2 \quad (6)
\end{aligned}$$

Para la potencia media radiada por la partícula se tiene:

$$\begin{aligned}
P_t \langle \ddot{\tilde{x}}^{(0)} \cdot \ddot{\tilde{x}}^{(0)} \rangle &= \sum_l \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sum_k \tilde{x}_{kl} \tilde{x}_{kl}^4 \omega_k^3 \exp(it(\omega_k + \omega_{k'})) dt \\
\Rightarrow \text{mr} P_t \langle \ddot{\tilde{x}}^{(0)} \cdot \ddot{\tilde{x}}^{(0)} \rangle &= - \sum_{l,k} \text{mr} \omega_k^4 \left| \tilde{x}_{kl} \right|^2 \quad (7)
\end{aligned}$$

La condición (II.4.7) se reduce, entonces, a:

$$\sum_k \left[\omega_k^4 \left| \tilde{x}_{kl} \right|^2 - \frac{1}{2} \pi^2 c^3 k \cdot \nabla_{\xi} \omega_k S(\omega_k) \left| \tilde{x}_{kl} \right|^2 \right] = 0 \quad (8)$$

Esta ecuación es la condición de equilibrio energético que debe satisfacer un sistema multiperiodico no degenerado en interacción con el campo estocástico de fondo.

6. El oscilador armónico y el rotor rígido.

En el capítulo III se analizará el problema de la aplicación de la ecuación (II.5.8) a un sistema multiperiodico; en esta sección nos concretaremos a estudiar, como ejemplos sencillos, dos sistemas con un solo periodo de movimiento: el oscilador armónico

unidimensional y el rotor rígido. Ambos sistemas han sido estudiados en forma detallada por varios autores¹⁵.

Comenzaremos por aplicar la condición de equilibrio al oscilador armónico. La trayectoria clásica del oscilador está dada por:

$$x^{(0)} = \tilde{x}_1 \exp(i\omega t) + \tilde{x}_{-1} \exp(-i\omega t) \quad (1)$$

con $\tilde{x}_1 = x_0/2 - ip_0/2m\omega$, $\tilde{x}_{-1} = \tilde{x}_1^*$ y x_0 , p_0 la posición y el momento iniciales. A orden cero el momento estará dado por:

$$p^{(0)} = im\omega (\tilde{x}_1 \exp(i\omega t) - \tilde{x}_{-1} \exp(-i\omega t)) \quad (2)$$

La condición de equilibrio se reduce a:

$$\begin{aligned} \omega^4 |\tilde{x}_1|^2 + \omega^4 |\tilde{x}_{-1}|^2 - \frac{1}{2} \pi^2 c^3 \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(S(\omega) |\tilde{x}_1|^2 - \frac{\partial}{\partial \xi} (-\omega S(\omega) |\tilde{x}_{-1}|^2) \right) \right] &= 0 \\ \rightarrow \omega^4 |\tilde{x}_1|^2 - \frac{1}{2} \pi^2 c^3 \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\omega S(\omega) |\tilde{x}_1|^2 \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

La variable de acción ξ está dada, a orden cero, por:

$$\xi = \oint p^{(0)} \dot{x}^{(0)} dt = 4\pi m\omega |\tilde{x}_1|^2 \quad (4)$$

la ecuación (3) se reduce, entonces, a:

$$\begin{aligned} \omega^3 \xi - \frac{1}{2} \pi^2 c^3 \left[\frac{\partial}{\partial \xi} S(\omega) \xi \right] &= 0 \\ \rightarrow \omega^3 \xi - \pi^2 c^3 \frac{\partial \xi}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned}$$

¹⁵ Una bibliografía extensa puede encontrarse en L. de la Peña 1983.

y por lo tanto obtenemos que la solución de equilibrio corresponde a:

$$\rightarrow \xi = n\hbar \quad (5)$$

La energía del oscilador es, en este caso:

$$E = p_0^2/2m + m\omega^2 k_0^2/2 = 2m\omega^2 \left| \frac{\xi}{k_1} \right|^2 = \xi\omega/2\pi \quad (6)$$

Substituyendo (5) en (6) se obtiene que la energía del oscilador resulta ser:

$$E = n\hbar\omega/2 \quad (7)$$

que es, precisamente, el resultado que predice la mecánica cuántica para el estado base del oscilador.

El caso del rotor rígido plano se obtiene a partir del anterior descomponiendo su movimiento en dos osciladores perpendiculares con frecuencias iguales. Tendremos, entonces, $\xi = \xi_x + \xi_y = 2n\hbar$. Por otro lado, la variable de acción del rotor satisface la relación $\xi = 2nL$, con L el momento angular, por lo que:

$$L = n\hbar \quad (8)$$

Diferentes autores han tratado, en forma aproximada, el problema de la órbita circular en el átomo de hidrógeno como si se tratara de un rotor rígido¹⁶. Para un potencial central de la forma

¹⁶El tratamiento más reciente se debe a H. E. Puthoff, 1987.

$V = -k/r$, la energía y el momento angular de una órbita circular están relacionadas de la forma:

$$E = - \frac{mk^2}{2L^2}$$

De la ecuación (8) obtenemos:

$$E = - \frac{mk^2}{2\hbar^2}$$

Como para el átomo de hidrógeno se tiene que $k = Ze^2$, la energía del estado base resulta ser:

$$E = - \frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2} \quad (9)$$

La ecuación anterior es precisamente la energía que predice la mecánica cuántica. Es importante notar que el tratamiento anterior para el estado base del átomo de hidrógeno debe verse sólo como un resultado heurístico, ya que deliberadamente se han despreciado las contribuciones que puedan tener los armónicos mayores de la órbita y que, como veremos más adelante, aparecen aun en el límite en que la excentricidad tiende a cero.

Bibliografia

Adirovich, E.I.; Podgoretskii, M.I. (1954), JETP (URSS) 26, p.59, 1954.

Boyer, T.H. (1969), Phys. Rev. 182, p.1374, 1969.

Boyer, T.H. (1970), Annals of Phys. (N.Y.) 56, p.474, 1970.

Boyer, T.H. (1975), Phys. Rev. D11, p. 790, 1975.

Braffort, P.; Spiguel, M.; Tzara, C. (1954), C.R. Acad. Sc. Paris 239, p.157, 1954. Erratum: id., 239, p.925, 1954.

Brody, T. (1983), "Foundations for Quantum Mechanics. Results and Problems", Rev. Mex. Fis. 29, p.461, 1983.

Cotto, A.M. (1984), "New perturbative derivation of the Fokker-Planck equation for coloured multiplicative noise", Phys. Letters 101A, number 4, pp. 185-186, marzo 1984.

Kalitsin, N.St. (1953), JETP (URSS) 25, p.407, 1953.

Marshall, T.W. (1963), Proc. R. Soc. A276, p.475, 1963.

Marshall, T.W. (1965), Proc. Camb. Phil. Soc. 61, p.537, 1965.

Marshall, T.W. (1980), *Physica* 103A, p.172, 1980.

Peña, L. de la; Cetto, A.M. (1979), "The quantum harmonic oscillator revisited: A new look from stochastic electrodynamics", *J. Math. Phys.* 20(3), pp. 469-483, marzo 1979.

Peña, L. de la (1983), "Stochastic electrodynamics: its development, present situation and perspectives", *Proc. of the Escuela Latinoamericana de Física 1982, Cali-Colombia*; World Scientific, Singapore 1983.

Peña, L. de la; Cetto, A.M. (1987), "New approach to stochastic electrodynamics for the explanation of quantum phenomena", Preprint, IFUNAM 87-3, México 1987.

Puthoff, H.E. (1987), "Ground state of hydrogen as a zero point fluctuation determined state", *Phys. Rev. D.* 35, p.3266, mayo 1987.

Santos, E. (1979), *Proc. Einstein Centennial Symposium*, Bogotá, Colombia, 1979.

Santos, E. (1974), *Il Nuovo Cim.* 22B, p.201, 1974.

Sokolov, A.A.; Tumanov, V.S. (1956), "The uncertainty relation and fluctuation theory", *JETP, URSS* 3, pp. 958-959, abril 1956.

CAPITULO III

EL ATOMO DE HIDRÓGENO EN LA ELECTRODINÁMICA ESTOCÁSTICA

EL ÁTOMO DE HIDRÓGENO EN LA ELECTRODINÁMICA ESTOCÁSTICA

1. Introducción.

En el capítulo anterior se desarrollaron los métodos de la EDE aplicables al estudio de sistemas cuyo movimiento clásico es multiperifódico. Existen muchos sistemas de gran interés físico que poseen esta característica entre los que se encuentran el oscilador anarmónico, el rotor tridimensional y el problema de Kepler.

El interés en el estudio de los sistemas multiperifódicos se incrementó a principios de siglo con el surgimiento de las reglas de cuantización de Bohr-Sommerfeld que encontraban su expresión más natural en términos de las variables de acción. En 1927, Max Born¹ realizó una profunda investigación sobre este tipo de sistemas en relación con la mecánica matricial. Aun cuando el advenimiento de la teoría de Schrodinger opacó la importancia del trabajo de Born, éste es, hasta la fecha, quizá la aportación más completa al estudio de las variables de acción y ángulo.

En este capítulo se prestará atención a un sistema multiperifódico en particular: el problema de Kepler. El estudio de este sistema en relación con el átomo de hidrógeno ha sido de gran importancia en la EDE ya que ha contribuido a revelar fallas en el formalismo usual de esta teoría, y ha sido de utilidad en la

¹ M. Born (1927).

búsqueda de posibles direcciones que corrijan dichas fallas. En el capítulo se estudiará este sistema usando tanto la ecuación de Fokker-Planck como la condición de equilibrio, mostrando que en ambos casos las predicciones de la EDE resultan incompatibles con las de la mecánica cuántica. Finalmente, se analizará detenidamente la condición de equilibrio para tratar de rastrear el origen de esta discrepancia.

2. Desarrollo multiperiodico para una fuerza central.

En el apéndice 1 se muestra que para los sistemas multiperiodicos las coordenadas cartesianas admiten un desarrollo múltiple de Fourier de la forma:

$$x_i = \sum_n \tilde{x}_n \exp(2\pi i n \cdot \eta) \quad (1)$$

con $n = (n_1, n_2, n_3)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ y η_i las variables angulares. El desarrollo anterior es de fundamental importancia cuando se busca aplicar tanto la ecuación de F-P como la condición de equilibrio al estudio de los sistemas multiperiodicos en general debido a que proporciona explícitamente la dependencia de las coordenadas cartesianas respecto de las variables angulares. Para el caso del problema de Kepler, sin embargo, el desarrollo en

serie de Fourier que se obtiene para las coordenadas cartesianas² no posee esta dependencia explícita en las variables angulares. Esto se debe a que las dos frecuencias fundamentales de este sistema son iguales entre sí, lo que permite reescribir la serie múltiple de Fourier como:

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_n \tilde{x}_m \exp(2\pi i n \cdot \eta) = \sum_n \tilde{x}_m \exp(i n \cdot (\omega_0 t, \omega_0 t)) \\ &= \sum_n \tilde{x}_m \exp(i(n_1 + n_2)\omega_0 t) \end{aligned}$$

con ω_0 la frecuencia fundamental de movimiento. Como en la suma múltiple aparece solo una frecuencia, la última expresión se reduce a una serie simple de Fourier de la forma:

$$x_i = \sum_k \tilde{x}_k \exp(ik\omega_0 t)$$

Si se parte de una expresión como la anterior, como es el caso en el problema de Kepler, resulta imposible hacer un desarrollo en la dirección inversa para obtener de nuevo la dependencia explícita en las variables angulares. Entonces, si se quiere encontrar un desarrollo múltiple de Fourier aplicable a este sistema, debe seguirse una dirección diferente basada en el estudio de los sistemas sujetos a un potencial central arbitrario, para los cuales la expresión (1) se simplifica considerablemente.

² Ver el apéndice 2, donde se resuelve el movimiento clásico de sistema de Kepler, y se encuentra el desarrollo de Fourier de sus coordenadas cartesianas.

para ver lo anterior es parte de la ecuación de Hamilton-Jacobi para un potencial central arbitrario $U(r)$:

$$1/(2m) \left\{ \left[\frac{\partial W}{\partial r} \right]^2 + 1/(r^2) \left[\frac{\partial W}{\partial \phi} \right]^2 \right\} + U(r) = E \quad (2)$$

En forma enteramente análoga al procedimiento que se sigue en el apéndice 2, se propone una solución del tipo $W(r, \phi) = W_r(r) + W_\phi(\phi)$, y se encuentra:

$$\frac{dW_\phi}{d\phi} = M = \text{cte.} \quad (3)$$

$$\frac{dW_r}{dr} = \left[2m(E - U) - M^2/r^2 \right]^{1/2} \quad (4)$$

con la variable de acción ξ_ϕ dada por:

$$\xi_\phi = \oint \frac{dW_\phi}{d\phi} d\phi = 2\pi M.$$

Entonces:

$$W = \int \left[2m(E - U) - \xi_\phi^2 / 4\pi^2 r^2 \right]^{1/2} dr + \xi_\phi \phi / 2\pi \quad (5)$$

Las variables angulares resultan ser:

$$\eta_r = \frac{\partial W}{\partial \xi_r} = \int \frac{m \partial E / \partial \xi_r}{[2m(E - U) - \xi_\phi^2 / 4\pi^2 r^2]^{1/2}} dr \quad (6.a)$$

$$\eta_\phi = \frac{\partial W}{\partial \xi_\phi} = \phi / 2\pi + \int \frac{m \partial E / \partial \xi_\phi - \xi_\phi / (4\pi^2 r^2)}{[2m(E - U) - \xi_\phi^2 / 4\pi^2 r^2]^{1/2}} dr \quad (6.b)$$

Examinando las ecuaciones (6) se encuentra que:

$$\eta_r = f_1(r, \xi_r, \xi_\phi) \quad \eta_\phi = \phi / 2\pi + f_2(r, \xi_r, \xi_\phi)$$

La forma funcional de f_1 y f_2 depende de $U(r)$, pero no es necesario conocerla para el tratamiento presente. En principio, debe ser posible despejar r y ϕ de las ecuaciones anteriores para obtener:

$$r = \xi_1(\eta_r, \xi_r, \xi_\phi) \quad (7.a)$$

$$\phi = 2\pi\eta_\phi + \xi_2(\eta_r, \xi_r, \xi_\phi) \quad (7.b)$$

Las coordenadas cartesianas están dadas por:

$$x = r \cos\phi \quad y = r \sin\phi$$

de donde:

$$x = \frac{r}{2} (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) = \frac{1}{2} \xi_1(\eta_r, \xi_r, \xi_\phi) \left[\exp i(2\pi\eta_\phi + \xi_2(\eta_r, \xi_r, \xi_\phi)) + \exp i(-2\pi\eta_\phi - \xi_2(\eta_r, \xi_r, \xi_\phi)) \right]$$

entonces:

$$x = h_1(\eta_r, \xi_r, \xi_\phi) \exp(2\pi i\eta_\phi) + h_2(\eta_r, \xi_r, \xi_\phi) \exp(-2\pi i\eta_\phi)$$

Como las variables de acción ξ_r y ξ_ϕ son constantes de movimiento, podemos desarrollar las funciones h_1 y h_2 en serie de Fourier con respecto a η_r . Obtenemos, finalmente, que:

$$x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\tilde{x}_{n,1} \exp(-2\pi i(n\eta_r + \eta_\phi)) + \tilde{x}_{n,-1} \exp(-2\pi i(n\eta_r - \eta_\phi)) \right] \quad (8.a)$$

$$y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\tilde{y}_{n,1} \exp(-2\pi i(n\eta_r + \eta_\phi)) + \tilde{y}_{n,-1} \exp(-2\pi i(n\eta_r - \eta_\phi)) \right] \quad (8.b)$$

Los coeficientes de los desarrollos anteriores son, en general, funciones de ξ_r y ξ_ϕ . Además, como $x + iy = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, entonces:

$$x + iy = r e^{i\phi} = h_3(\eta_r, \eta_r, \eta_\phi) \exp(2\pi i \eta_\phi)$$

Desarrollando a h_3 en serie de Fourier se tiene³:

$$x + iy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(2\pi i(n\eta_r + \eta_\phi)) \quad (9)$$

Es posible expresar los coeficientes $\tilde{x}_{n,1}$, $\tilde{x}_{n,-1}$, $\tilde{y}_{n,1}$, $\tilde{y}_{n,-1}$ en términos de C_n . Para lograr lo anterior se definen números reales A_n y B_n tales que $C_n = A_n + iB_n$. De esta forma, la ecuación (9) se transforma en:

$$\begin{aligned} x + iy &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n + iB_n) \exp(2\pi i(n\eta_r + \eta_\phi)) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n \cos(2\pi(n\eta_r + \eta_\phi)) - B_n \sin(2\pi(n\eta_r + \eta_\phi)) \right] \\ &\quad + i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[B_n \cos(2\pi(n\eta_r + \eta_\phi)) + A_n \sin(2\pi(n\eta_r + \eta_\phi)) \right] \end{aligned}$$

de donde:

$$x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n \cos(2\pi(n\eta_r + \eta_\phi)) - B_n \sin(2\pi(n\eta_r + \eta_\phi)) \right] \quad (10.a)$$

$$y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[B_n \cos(2\pi(n\eta_r + \eta_\phi)) + A_n \sin(2\pi(n\eta_r + \eta_\phi)) \right] \quad (10.b)$$

Desarrollando la ecuación (10.a) encontramos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(A_n + iB_n) \exp(2\pi i(n\eta_r + \eta_\phi)) \right. \\ &\quad \left. + (A_n - iB_n) \exp(-2\pi i(n\eta_r + \eta_\phi)) \right] \end{aligned}$$

³El procedimiento anterior puede verse más claramente en M. Born (1927).

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[C_n \exp(2\pi i(n\eta_r + \eta_\phi)) + C_n^* \exp(-2\pi i(n\eta_r + \eta_\phi)) \right]$$

Si en la primera suma se cambia n por $-n$, la expresión anterior toma la forma:

$$x = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[C_{-n} \exp(-2\pi i(n\eta_r - \eta_\phi)) + C_n^* \exp(-2\pi i(n\eta_r + \eta_\phi)) \right] \quad (11)$$

Comparando con (8.a) se encuentra que:

$$\tilde{x}_{n,1} = C_n^*/2 \quad \tilde{x}_{n,-1} = C_{-n}/2 \quad (12.a)$$

Análogamente, para \tilde{y}_n se tiene:

$$\tilde{y}_{n,1} = iC_n^*/2 \quad \tilde{y}_{n,-1} = -iC_{-n}/2 \quad (12.b)$$

En el caso particular del problema de Kepler el movimiento es degenerado, de manera que: $2\pi\eta_r = 2\pi\eta_\phi = \omega_0 t$. En este caso no se tiene un desarrollo múltiple de Fourier, sino un desarrollo en una sola variable. En el apéndice 2 se encuentran los coeficientes \tilde{x}_n y \tilde{y}_n de un solo índice correspondientes a dicho desarrollo. Para poder utilizar los métodos descritos en el capítulo II es necesario encontrar como están relacionados esos coeficientes de un solo índice con los coeficientes de dos índices $\tilde{x}_{n,1}$, $\tilde{x}_{n,-1}$, $\tilde{y}_{n,1}$, $\tilde{y}_{n,-1}$. Sustituyendo la relación $2\pi\eta_r = 2\pi\eta_\phi = \omega_0 t$ en la ecuación (11) encontramos:

$$x = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[C_{-n} \exp(-i(n-1)\omega_0 t) + C_n^* \exp(-i(n+1)\omega_0 t) \right]$$

Si en la primera suma tomamos $n' = n - 1$ y en la segunda $n' = n + 1$, obtenemos:

$$x = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{-n-1} + C_{n-1}^*) \exp(-in\omega_0 t)$$

por lo que:

$$\tilde{x}_n = (C_{n-1}^* + C_{-n-1})/2 \quad (13.a)$$

y, en forma analoga:

$$\tilde{y}_n = i(C_{n-1}^* - C_{-n-1})/2 \quad (13.b)$$

De las ecuaciones (13) podemos despejar C_n , obteniendo:

$$C_n = \tilde{x}_{-n-1} + i\tilde{y}_{-n-1} \quad (14)$$

Finalmente, sustituyendo (14) en las ecuaciones (12), y utilizando las expresiones (A2.23), encontramos la relacion entre los coeficientes de un solo indice y los de dos indices para el problema de Kepler:

$$\tilde{x}_{n,1} = (\tilde{x}_{n+1} - i\tilde{y}_{n+1})/2 \quad (15.a)$$

$$\tilde{x}_{n,-1} = (\tilde{x}_{n-1} + i\tilde{y}_{n-1})/2 \quad (15.b)$$

$$\tilde{y}_{n,1} = (\tilde{y}_{n+1} + i\tilde{x}_{n+1})/2 \quad (15.c)$$

$$\tilde{y}_{n,-1} = (\tilde{y}_{n-1} - i\tilde{x}_{n-1})/2 \quad (15.d)$$

A partir de las ecuaciones (15) puede encontrarse fácilmente una expresión para los coeficientes del desarrollo múltiple de Fourier sustituyendo las ecuaciones (A2.22) para \tilde{x}_n y \tilde{y}_n . La ventaja de tener una expresión para el desarrollo múltiple es que esta nos permite conocer la dependencia explícita de las coordenadas cartesianas en las variables angulares η_i . Esta

dependencia explícita será de gran utilidad en las próximas secciones.

3. Ecuación de Fokker-Planck para el átomo de hidrógeno.

En esta sección estudiaremos el comportamiento de un sistema sujeto a un potencial del tipo $\phi(r)$ desde la perspectiva de la EDE empleando un método que ya es usual en esta teoría y que consiste en resolver la ecuación de Fokker-Planck asociada al sistema⁴.

La ecuación de F-P en términos de variables de acción y ángulo (ecuación (H.3.6)) es:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[A_i + \sum_j B_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right] P \quad (1)$$

donde los coeficientes A_i y B_{ij} están dados por:

$$A_i = \sum_j m_j \dot{\xi}_j \langle \dot{\xi}_j(t) \frac{\partial \xi_i(t)}{\partial p_j} \rangle \quad (2.a)$$

$$B_{ij} = (e^2/2) \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) \dot{\xi}_k \left[\frac{\partial \xi_i(t)}{\partial p_k} \frac{\partial \xi_j(t-s)}{\partial p_k} \right] ds \quad (2.b)$$

con $\varphi(s)$ la función de autocorrelación del campo eléctrico encontrada en el capítulo II. Las derivadas de la ecuación anterior deben calcularse para el movimiento clásico no perturbado.

⁴Un trabajo que sigue las mismas líneas que esta sección, aunque no llega a resolver la ecuación de F-P, fue presentado por T. W. Marshall y P. Claverie (1980). Expresiones como las ecuaciones (1) y (2) de este capítulo se tomaron directamente de ese trabajo.

Las expresiones anteriores pueden simplificarse si se utiliza la siguiente expresión, basada en la invariación de los paréntesis de Poisson frente a transformaciones canónicas:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} = \left[x_j, \xi_i \right] = \left[x_j, \xi_i \right]_{n,z} = \frac{\partial x_j}{\partial \eta_i} \quad (3)$$

de donde:

$$A_i = m\tau \sum_j \mathbb{P}_i \left[\bar{x}_j, \frac{\partial x_j(t)}{\partial \eta_i} \right] \quad (4.a)$$

$$B_{ij} = (e^2/2) \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} p(s) \mathbb{P}_i \left[\frac{\partial x_k(t)}{\partial \eta_i} - \frac{\partial x_k(t-s)}{\partial \eta_j} \right] ds \quad (4.b)$$

Si en las ecuaciones (4) se sustituye el desarrollo multiperíodico para las coordenadas cartesianas x_i dado en el apéndice 1 (ecuación(A1.6)):

$$x_i = \sum_n \tilde{x}_{ni} \exp(2\pi i n \cdot \eta) \quad (5)$$

se encuentra:

$$\begin{aligned} A_i &= m\tau \sum_j \mathbb{P}_i \left\{ \sum_n (n \cdot \omega_0)^2 \tilde{x}_{nj} \exp(2\pi i n \cdot \eta) \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left[\sum_{n'} \tilde{x}_{n'i} \exp(2\pi i n' \cdot \eta) \right] \right\} \\ &= 2\pi m\tau \sum_j \sum_n \sum_{n'} (n \cdot \omega_0)^2 n'_i \tilde{x}_{nj} \tilde{x}_{n'i} \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T \exp(2\pi i \eta \cdot (n+n')) dt \\ &= 2\pi m\tau \sum_j \sum_n \sum_{n'} (n \cdot \omega_0)^2 n'_i \tilde{x}_{nj} \tilde{x}_{n'i} \delta_{n,-n'} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$A_i = -2\pi m\tau \sum_j \sum_n (n \cdot \omega_0)^2 n_i |\tilde{x}_{nj}|^2 \quad (6)$$

Para obtener la última expresión se tomó en cuenta el hecho de que x_i es real y, por lo tanto, $\tilde{x}_{nj} = \tilde{x}_{-nj}^*$.

Siguiendo un procedimiento análogo se obtiene para B_{ij} que:

$$B_{ij} = 2\pi^2 e^2 \sum_k \sum_n n_i n_j |\tilde{x}_{nk}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \rho(s) \exp(in \cdot \phi_0 s) ds \quad (7)$$

Para llegar a las ecuaciones (6) y (7) se ha realizado un tratamiento completamente general, aplicable a cualquier sistema multiperódico. Si ahora tomamos en cuenta el hecho de que en el problema de Kepler la fuerza es central, dichas expresiones pueden simplificarse de manera apreciable. En primer lugar, es posible mostrar que, debido a la simetría rotacional, los coeficientes A_{ij} , B_{ij} no son todos independientes, ya que deben satisfacer las relaciones⁵:

$$A_{33} = (\xi_3 / \xi_2) A_{22} \quad (8.a)$$

$$B_{13} = (\xi_3 / \xi_2) B_{12} \quad (8.b)$$

$$B_{23} = (\xi_3 / \xi_2) B_{22} \quad (8.c)$$

$$B_{33} = \frac{1}{2} (1 + (\xi_3 / \xi_2)^2) B_{22} \quad (8.d)$$

Además, la densidad de probabilidad $P(\xi)$ también posee simetría rotacional, por lo que su derivada respecto a ξ_3 debe ser cero.

La ecuación (1) se reduce, entonces, a:

⁵La demostración de estas relaciones puede encontrarse en T. W. Marshall y P. Claverie, 1980.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[-A_1 P + B_{11} \frac{\partial P}{\partial \xi_1} + B_{12} \frac{\partial P}{\partial \xi_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[-A_2 P + B_{12} \frac{\partial P}{\partial \xi_1} + B_{22} \frac{\partial P}{\partial \xi_2} \right] \\ + \left[-P \frac{\partial A_3}{\partial \xi_3} + \frac{\partial B_{13}}{\partial \xi_3} \frac{\partial P}{\partial \xi_1} + \frac{\partial B_{23}}{\partial \xi_3} \frac{\partial P}{\partial \xi_2} \right]$$

de donde:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[-A_1 P + B_{11} \frac{\partial P}{\partial \xi_1} + B_{12} \frac{\partial P}{\partial \xi_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[-A_2 P + B_{12} \frac{\partial P}{\partial \xi_1} + B_{22} \frac{\partial P}{\partial \xi_2} \right] \\ + (1/\xi_2) \left[-A_2 P + B_{12} \frac{\partial P}{\partial \xi_1} + B_{22} \frac{\partial P}{\partial \xi_2} \right]$$

Estamos interesados en estudiar el caso estacionario para el cual $\partial P / \partial t = 0$. Entonces, la ecuación de Fokker-Planck toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[-A_1 P + B_{11} \frac{\partial P}{\partial \xi_1} + B_{12} \frac{\partial P}{\partial \xi_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[-A_2 P + B_{12} \frac{\partial P}{\partial \xi_1} + B_{22} \frac{\partial P}{\partial \xi_2} \right] \\ + (1/\xi_2) \left[-A_2 P + B_{12} \frac{\partial P}{\partial \xi_1} + B_{22} \frac{\partial P}{\partial \xi_2} \right] = 0 \quad (9)$$

Podemos escoger un sistema de coordenadas tal que el plano de la órbita corresponda al plano $\vartheta = \pi/2$, de manera que sea posible aplicar los resultados de las secciones anteriores. Tomando $\xi_1 = \xi_r$ y $\xi_2 = \xi_\varphi$ y usando las ecuaciones (III.2.8) encontramos que:

$$A_r \equiv A_1 = -2\pi m r \sum_{n_r} \sum_{n_\varphi = 1, -1} \langle n \cdot \omega_0 \rangle^2 n_r \langle |\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2 \rangle \\ = -2\pi m r \sum_{n_r} n_r \left[\langle n_r \omega_{0r} + \omega_{0\varphi} \rangle^3 \langle |\tilde{x}_{n_r, 1}|^2 + |\tilde{y}_{n_r, 1}|^2 \rangle \right. \\ \left. + \langle n_r \omega_{0r} - \omega_{0\varphi} \rangle^3 \langle |\tilde{x}_{n_r, -1}|^2 + |\tilde{y}_{n_r, -1}|^2 \rangle \right]$$

Además, de las ecuaciones (III.2.12) podemos escribir:

$$\begin{aligned} |\tilde{x}_{n,r}|^2 &= |C_n|^2/4 & ; & & |\tilde{x}_{n,-1}|^2 &= |C_{-n}|^2/4 \\ |\tilde{y}_{n,r}|^2 &= |C_n|^2/4 & ; & & |\tilde{y}_{n,-1}|^2 &= |C_{-n}|^2/4 \end{aligned} \quad (10)$$

De esta manera el coeficiente A_r toma la forma:

$$A_r = -2\pi m r \left[\sum_{n_r} n_r (|C_{n_r}|^2/2) (n_r \omega_{Or} + \omega_{O\phi})^2 + \sum_{n_r} n_r (|C_{-n_r}|^2/2) (n_r \omega_{Or} - \omega_{O\phi})^2 \right]$$

Si se cambia en la segunda suma n_r por $-n_r$ obtenemos finalmente para A_r :

$$A_r = -2\pi m r \sum_{n_r} |C_{n_r}|^2 (n_r \omega_{Or} + \omega_{O\phi})^2 \quad (11.a)$$

Análogamente se obtienen los demás coeficientes:

$$A_\phi = -2\pi m r \sum_{n_r} |C_{n_r}|^2 (n_r \omega_{Or} + \omega_{O\phi})^2 \quad (11.b)$$

$$B_{rr} = 2\pi^2 e^2 \sum_{n_r} n_r^2 |C_{n_r}|^2 S_E (n_r \omega_{Or} + \omega_{O\phi}) \quad (11.c)$$

$$B_{r\phi} = 2\pi^2 e^2 \sum_{n_r} n_r |C_{n_r}|^2 S_E (n_r \omega_{Or} + \omega_{O\phi}) \quad (11.d)$$

$$B_{\phi\phi} = 2\pi^2 e^2 \sum_{n_r} |C_{n_r}|^2 S_E (n_r \omega_{Or} + \omega_{O\phi})^2 \quad (11.e)$$

con $S_E(\omega)$ dada por:

$$S_E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(s) \exp(i\omega s) ds \quad (12)$$

Para el problema de Kepler se tiene que $\omega_{or} = \omega_{o\phi} = 2\pi\nu$, con ν dada por la ecuación (A.2.11). Además, si sustituimos la expresión para C_n de la ecuación (III.2.14) en las relaciones para A_i y B_{ij} y tomamos $n = (n_r + 1)$ obtenemos:

$$A_r = -16\pi^4 m r \sum_n (n-1) n^3 (4\pi^2 m k^2)^3 / (\xi_r + \xi_\phi)^5 \left[\tilde{x}_{-n} + i\tilde{y}_{-n} \right]^2$$

pero como $\tilde{x}_{-n} = \tilde{x}_n$ y $\tilde{y}_{-n} = -\tilde{y}_n$ tenemos que:

$$(\tilde{x}_{-n} + i\tilde{y}_{-n}) = (\tilde{x}_n - i\tilde{y}_n)$$

Utilizando las ecuaciones (III.2.21), la expresión anterior toma la forma:

$$\tilde{x}_n - i\tilde{y}_n = (\xi_r + \xi_\phi)^2 / (4\pi^2 m k) \left[J'_n(n\varepsilon)/n + ((1-\varepsilon^2)^{1/2}/n\varepsilon) J_n(n\varepsilon) \right]$$

Sea f_n definido por:

$$f_n = J'_n(n\varepsilon)/n + ((1-\varepsilon^2)^{1/2}/n\varepsilon) J_n(n\varepsilon)$$

entonces A_r se reduce a:

$$A_r = - \left[\frac{2(2\pi)^5 m \varepsilon^2 k^4}{3c^3 (\xi_r + \xi_\phi)^5} \right] \sum_n (n-1) n^3 f_n^2 \quad (13.a)$$

y en forma análoga:

$$A_\phi = - \left[\frac{2(2\pi)^5 m \varepsilon^2 k^4}{3c^3 (\xi_r + \xi_\phi)^5} \right] \sum_n n^3 f_n^2 \quad (13.b)$$

Para los coeficientes B_{ij} necesitamos encontrar el valor de $S_E(\omega)$. Utilizando la ecuación (II.2.25) tenemos que, para el campo del punto cero:

$$S_E(\omega) = \frac{2h}{\pi c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \omega^3 \cos(\omega s) e^{i\omega s} d\omega ds$$

Si se define una función $F(\omega)$ dada por:

$$F(\omega) = \frac{h}{2\pi^2 c^3} |\omega|^3$$

entonces $S_E(\omega)$ se reduce a:

$$S_E(\omega) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(s) e^{i\omega s} ds = (4\pi^2/3)F(\omega)$$

con $\tilde{F}(s)$ la transformada de Fourier de $F(\omega)$. Finalmente $S(\omega)$ toma la forma:

$$S_E(\omega) = \frac{2h}{3c^3} |\omega|^3 \quad (14)$$

Los coeficientes B_{ij} resultan ser entonces:

$$B_{rr} = \left[\frac{h(2\pi)^7}{3c^3} \frac{me^2 k^4}{(\xi_r + \xi_\phi)^5} \right] \sum_n n^2(n-1)^2 |n| f_n^2 \quad (15.a)$$

$$B_{r\phi} = \left[\frac{2(2\pi)^6}{3c^3} \frac{me^2 k^4}{(\xi_r + \xi_\phi)^5} \right] \sum_n n^2(n-1) |n| f_n^2 \quad (15.b)$$

$$B_{\phi\phi} = \left[\frac{2(2\pi)^6}{3c^3} \frac{me^2 k^4}{(\xi_r + \xi_\phi)^5} \right] \sum_n n^2 |n| f_n^2 \quad (15.c)$$

Las sumatorias que aparecen en las ecuaciones (13) y (15) se conocen como series de Kapteyn y pueden expresarse como sumas de potencias de la excentricidad ϵ (que convergen si $|\epsilon| < 1$). Los primeros términos de éstas son:

$$\sum_n n^4 f_n^2 = 1 + 3\epsilon^2 + 45\epsilon^4/8 + \dots \quad (16.a)$$

$$\sum_n n^3 f_n^2 = 1 + \epsilon^2 + \epsilon^4 + \dots \quad (16.b)$$

$$\sum n^4 |n| f_n^2 = 1 + 7e^2 + 717e^4/32 + \dots \quad (16.c)$$

$$\sum n^3 |n| f_n^2 = 1 + 3e^2 + 179e^4/32 + \dots \quad (16.d)$$

$$\sum n^2 |n| f_n^2 = 1 + e^2 + 33e^4/32 + \dots \quad (16.e)$$

Obtener una solución general para la ecuación de F-P (ecuación (9)) con las expresiones obtenidas para los coeficientes A_{ij} y B_{ij} resulta extremadamente difícil, sino imposible. Debido a esto, nos limitaremos a estudiar dicha ecuación en forma aproximada, considerando que las contribuciones más significativas son aquellas que se obtienen cuando la excentricidad de la órbita es prácticamente cero. No existe ninguna razón física que nos sugiera una aproximación de este tipo, el único argumento que puede emplearse para justificarla es que, de esta manera, se logra simplificar substancialmente el procedimiento matemático. Para realizar esta aproximación resulta conveniente el siguiente cambio de variable:

$$u = \xi_r \quad y \quad v = \xi_\phi$$

En términos de u y v , la ecuación (9) se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left[-A'_r P + B'_{rr} \frac{\partial P}{\partial u} + B'_{r\phi} \frac{\partial P}{\partial v} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[-A'_\phi P + B'_{r\phi} \frac{\partial P}{\partial u} + B'_{\phi\phi} \frac{\partial P}{\partial v} \right] \\ + (1/v) \left[-A'_\phi P + B'_{r\phi} \frac{\partial P}{\partial u} + B'_{\phi\phi} \frac{\partial P}{\partial v} \right] = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

con:

$$A'_r = - \left[\frac{2(2\pi)^6 m e^2 k^4}{3c^3 (\xi_r + \xi_\phi)^5} \right] \sum_n n^4 f_n^2 \quad (18.a)$$

$$A'_{\phi} = - \left[\frac{2(2\pi)^6 m e^2 k^4}{3 c^3 (\xi_r + \xi_{\phi})^5} \right] \sum_n n^3 f_n^2 \quad (18.b)$$

$$B'_{rr} = \left[\frac{\hbar(2\pi)^7 m e^2 k^4}{3 c^3 (\xi_r + \xi_{\phi})^5} \right] \sum_n n^4 |u| f_n^2 \quad (18.c)$$

$$B'_{r\phi} = \left[\frac{\hbar(2\pi)^7 m e^2 k^4}{3 c^3 (\xi_r + \xi_{\phi})^5} \right] \sum_n n^3 |n| f_n^2 \quad (18.d)$$

$$B'_{\phi\phi} = \left[\frac{\hbar(2\pi)^7 m e^2 k^4}{3 c^3 (\xi_r + \xi_{\phi})^5} \right] \sum_n n^2 |n| f_n^2 \quad (18.e)$$

Usando las ecuaciones (16) se encuentra que en el limite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ los coeficientes anteriores se reducen a:

$$A'_r = A'_{\phi} = - \left[\frac{2(2\pi)^6 m e^2 k^4}{3 c^3 u^5} \right]$$

$$B'_{rr} = B'_{r\phi} = B'_{\phi\phi} = \left[\frac{\hbar(2\pi)^7 m e^2 k^4}{3 c^3 u^5} \right]$$

En ese limite, la ecuacion (17) toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{1}{u^5} \left[P + \pi \hbar \frac{\partial P}{\partial u} + \pi \hbar \frac{\partial P}{\partial v} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{1}{u^5} \left[P + \pi \hbar \frac{\partial P}{\partial u} + \pi \hbar \frac{\partial P}{\partial v} \right] \right\} \\ + \frac{1}{v u^5} \left[P + \pi \hbar \frac{\partial P}{\partial u} + \pi \hbar \frac{\partial P}{\partial v} \right] = 0 \end{aligned}$$

Que puede reescribirse como:

$$\frac{1}{v} \left\{ \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right\} = 0 \quad (19)$$

$$\text{con } f = \frac{v}{u^5} \left[P + \pi \hbar \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial v} \right) \right]$$

Por otro lado, de las ecuaciones (A2.10) y (A2.15) obtenemos:

$$R = \frac{(\xi_r + \xi_{\phi})^2}{4m\pi^2 k} \quad (20.a)$$

$$c = \left[1 - \frac{\xi_{\phi}^2}{(\xi_r + \xi_{\phi})^2} \right]^{1/2} \quad (20.b)$$

Despejando las variables de acción de las ecuaciones (20) encontramos:

$$\xi_r = 2\pi(mkA)^{1/2}(1 - (1 - \epsilon^2)^{1/2}) \quad (21.a)$$

$$\xi_\phi = 2\pi(mkR)^{1/2}(1 - \epsilon^2)^{1/2} \quad (21.b)$$

De las expresiones anteriores vemos que en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ se tiene $\xi_r \rightarrow 0$, y por lo tanto $u = v$. Debido a esto, la ecuación (19) se puede escribir como:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) = 0$$

donde $f = \frac{1}{u^4} \left[P + \pi\hbar \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial v} \right) \right]$

La ecuación anterior tiene como solución general $f(u,v) = f(u-v)$. Hemos visto que en este límite se tiene $u \cong v$, por lo que $f(u-v) \cong f(0) = \text{cte}$. Si denotamos la constante por C tendremos, de la definición de f :

$$C = \frac{1}{u^4} \left[P + \pi\hbar \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial v} \right) \right]$$

Para que P sea una distribución de probabilidad adecuada debe anularse junto con sus derivadas en el límite en que u y v crecen indefinidamente. De la expresión anterior vemos que esto sólo puede ocurrir si $C = 0$.

En ese caso la ecuación diferencial se reduce a:

$$P + \pi\hbar \left[\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial v} \right] = 0 \quad (22)$$

Como en este límite $u = v$, nos hemos restringido a una trayectoria en el espacio (u,v) , por lo que es posible expresar a

la densidad de probabilidad P en términos de una variable t que parametrice dicha trayectoria. Las ecuaciones paramétricas son:

$$u = t \quad \text{y} \quad v = t$$

entonces:

$$P(u(t), v(t)) + \pi \hbar \frac{d}{dt} P(u(t), v(t)) = 0$$

$$\Rightarrow P = \text{const.} \exp(-t/\pi \hbar)$$

Como $t = v = \xi_\phi = 2\pi M$, con M el momento angular de la órbita, encontramos para la densidad de probabilidad en el espacio de momentos (ξ_r, ξ_ϕ) , sobre la línea $c = 0$:

$$P(\xi_r, \xi_\phi)_{c=0} = D \exp(-2M/\hbar) \quad (23)$$

con D una constante de normalización.

Esta solución aproximada no es aceptable, ya que su integral sobre el espacio de momentos (ξ_r, ξ_ϕ) es:

$$N = \int_0^\infty \int_0^\infty D \exp(-2M/\hbar) d\xi_r d\xi_\phi = \infty$$

Debido a lo anterior, el radio promedio resulta ser:

$$\begin{aligned} \langle R \rangle &= \frac{D}{N} \int_0^\infty \int_0^\infty R \exp(-2M/\hbar) d\xi_r d\xi_\phi \\ &= \frac{1}{4mk\pi^2} \frac{D}{N} \int_0^\infty \int_0^\infty (\xi_r + \xi_\phi)^2 \exp(-2M/\hbar) d\xi_r d\xi_\phi = \infty \end{aligned}$$

El resultado anterior implica que habrá una autoionización del átomo. Esta es una predicción muy conocida de la EDE que

resulta incompatible con la mecánica cuántica. Este resultado se discutirá con mayor amplitud en la próxima sección.

Debido a que en el procedimiento seguido para resolver la ecuación diferencial se supuso que las contribuciones de las órbitas circulares resultan mucho más significativas que las otras, puede pensarse que el resultado obtenido es producto exclusivamente de haber realizado una mala aproximación. Sin embargo, el resultado puede reforzarse si se analiza la ecuación diferencial exacta (ecuación (17)) que puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}
 & - \left[\frac{\partial A'_r}{\partial u} + \frac{\partial A'_r}{\partial v} + \frac{A'_r}{v} \right] P + \left[-A'_r + \frac{\partial B'_{rr}}{\partial u} + \frac{\partial B'_{r\phi}}{\partial v} + \frac{B'_{r\phi}}{v} \right] \frac{\partial P}{\partial u} \\
 & \left[-A'_{\phi\phi} + \frac{\partial B'_{r\phi}}{\partial u} + \frac{\partial B'_{\phi\phi}}{\partial v} + \frac{B'_{\phi\phi}}{v} \right] \frac{\partial P}{\partial v} + B'_{rr} \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} + B'_{\phi\phi} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \\
 & + 2B'_{r\phi} \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} = 0 \tag{24}
 \end{aligned}$$

Las series de Kapteyn que aparecen en los coeficientes A'_r y $A'_{\phi\phi}$ pueden sumarse explícitamente⁶, dando como resultado:

$$\sum_n n^4 f_n^2 = \frac{3}{2} \eta^{-5} - \frac{1}{2} \eta^{-3} \tag{25.a}$$

$$\sum_n n^3 f_n^2 = \eta^{-2} \tag{25.b}$$

con $\eta = (1 - \epsilon^2)^{1/2} = v/u$. Tenemos entonces que:

$$A'_r = - \left[\frac{2(2\pi)^6 \text{ me}^2 k^4}{3c^3 u^5} \right] \sum_n n^4 f_n^2 = \frac{K}{u^5} \left[\frac{3}{2} \eta^{-5} - \frac{1}{2} \eta^{-3} \right] \tag{26.a}$$

⁶ La demostración de este resultado puede verse en T. V. Marshall 1979.

$$A'_\varphi = - \left[\frac{2(2\pi)^6 m e^2 k^4}{3 c^3 u^5} \right] \sum_n n^3 \eta_n^2 = \frac{K}{u^5} \eta^{-2} \quad (26.b)$$

$$\text{con } K = - \left[\frac{2(2\pi)^6 m e^2 k^4}{3 c^3} \right]$$

Usando las expresiones anteriores, el coeficiente de P en la ecuación (24) toma la forma:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial A'_r}{\partial u} + \frac{\partial A'_s}{\partial v} + \frac{A'_r}{v} \right] &= K \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{u^5} \left[\frac{1}{2} (u/v)^5 - \frac{1}{2} (u/v)^4 \right] \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{u^5} (u/v)^2 \right] + \frac{1}{v u^5} (u/v)^2 \right\} \\ &= K \left\{ 1/(uv)^3 - 2/(uv)^3 + 1/(uv)^3 \right\} = 0 \end{aligned}$$

Vemos, entonces, que la ecuación diferencial (24) admite una solución exacta de la forma $P = \text{cte}$. Si suponemos que la solución aproximada (23) es el límite asintótico de alguna solución exacta no trivial, debemos concluir que la ecuación estacionaria de F-P (ecuación (24)) posee dos soluciones distintas. La conclusión anterior es de gran importancia, ya que existe un teorema demostrado por Khas'minskii⁷ que afirma que un proceso de difusión del tipo descrito por la ecuación de F-P que posea más de una solución estacionaria será no recurrente, lo que significa que el sistema no volverá en un tiempo finito a una determinada vecindad de su posición inicial, y por lo tanto no será ergódico⁸. Este teorema es intuitivamente obvio, ya que la existencia de dos

⁷ R. Z. Khas'minskii, 1960.

⁸ Para una discusión más detallada de este teorema y su relación con la EDE puede verse P. Claverie, F. Soto y L. Pesquera, 1980 y P. Claverie y F. Soto, 1982.

soluciones estacionarias implica que el sistema puede pasar de una a la otra de manera no controlada manteniendo la densidad de probabilidad constante en el tiempo, de manera que no alcanzará un estado de equilibrio. El teorema de Khas'minskiĭ implica, también, que las soluciones obtenidas no serán integrables, lo que significa que la partícula no estará ligada al centro de fuerzas. La discusión anterior refuerza la predicción que se obtuvo con la solución aproximada en el sentido de que el átomo se autoionizará.

Aun así, es posible pensar que el fenómeno de la autoionización obtenido por este método no sea un problema intrínseco de la EDE, sino que provenga de el hecho de haber utilizado una aproximación markoviana al derivar la ecuación de F-P. El exigir que el proceso estocástico sea aproximadamente de Markov es muy restrictivo, y podría muy bien ser el causante de que se obtengan resultados inadecuados. Para poder analizar si el origen de la autoionización está en esta aproximación, utilizaremos un procedimiento alternativo para el estudio del átomo de hidrógeno en la próxima sección.

4. La condición de equilibrio para el átomo de hidrógeno.

En la sección anterior se estudió el problema de Kepler en la EDE usando los métodos relacionados con la ecuación de evolución o ecuación de F-P. En esta sección se tratará el mismo sistema desde otra perspectiva, utilizando la condición de equilibrio (II.4.7):

$$m\tau P_t(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}) + e^2 P_t(\langle E \cdot x^{(1)} \rangle) = 0 \quad (1)$$

En el capítulo II se desarrolló la condición anterior para un sistema multiperódico. Sin embargo, ese desarrollo se hizo suponiendo que dicho sistema era no degenerado, por lo que la ecuación resultante (ecuación (II.8)) no puede aplicarse al problema de Kepler. Para encontrar la condición de equilibrio adecuada a nuestros propósitos partimos del desarrollo en serie de Fourier de las coordenadas cartesianas para el problema de Kepler:

$$x_l \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_{nl} \exp(-in\omega_0 t)$$

con $\omega_0 = 2\pi\nu = (-2E/mR^2)^{1/2}$. Como a orden cero en ϵ el vector de posición cumple con la ley clásica de movimiento, podemos expresar la coordenada $x^{(0)}$ como:

$$x^{(0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_n \exp(-in\omega_0 t) \quad (2)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(0)} \ddot{x}^{(0)} &= \sum_n \sum_{n'} n^3 n' \omega_0^4 \tilde{x}_n \tilde{x}_{n'} \exp(-i\omega_0 t(n+n')) \\ \Rightarrow P_L(\dot{x}^{(0)} \ddot{x}^{(0)}) &= \omega_0^4 \sum_n \sum_{n'} n^3 n' \tilde{x}_n \tilde{x}_{n'} \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T \exp(-i\omega_0 t(n+n')) dt \\ &= \omega_0^4 \sum_n \sum_{n'} n^3 n' \tilde{x}_n \tilde{x}_{n'} \delta_{n,-n'} \\ \Rightarrow P_L(\dot{x}^{(0)} \ddot{x}^{(0)}) &= -\omega_0^4 \sum_n n^4 |\tilde{x}_n|^2 \end{aligned}$$

Para y se obtiene una expresión análoga, por lo que, finalmente, el primer término de la ecuación (1) resulta ser:

En el capítulo II se desarrolló la condición anterior para un sistema multiperiodico. Sin embargo, ese desarrollo se hizo suponiendo que dicho sistema era no degenerado, por lo que la ecuación resultante (ecuación (II.5.8)) no puede aplicarse al problema de Kepler. Para encontrar la condición de equilibrio adecuada a nuestros propósitos partimos del desarrollo en serie de Fourier de las coordenadas cartesianas para el problema de Kepler:

$$x_l = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_{nl} \exp(-in\omega_0 t)$$

con $\omega_0 = 2\pi\nu = (-2E/mR^2)^{1/2}$. Como a orden cero en ϵ el vector de posición cumple con la ley clásica de movimiento, podemos expresar la coordenada $x^{(0)}$ como:

$$x^{(0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_n \exp(-in\omega_0 t) \quad (2)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(0)} \ddot{x}^{(0)} &= \sum_n \sum_{n'} n^3 n' \omega_0^4 \tilde{x}_n \tilde{x}_{n'} \exp(-i\omega_0 t(n+n')) \\ \Rightarrow \mathbb{P}_l(\dot{x}^{(0)} \ddot{x}^{(0)}) &= \omega_0^4 \sum_n \sum_{n'} n^3 n' \tilde{x}_n \tilde{x}_{n'} \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T \exp(-i\omega_0 t(n+n')) dt \\ &= \omega_0^4 \sum_n \sum_{n'} n^3 n' \tilde{x}_n \tilde{x}_{n'} \delta_{n-n'} \\ \Rightarrow \mathbb{P}_l(\dot{x}^{(0)} \ddot{x}^{(0)}) &= -\omega_0^4 \sum_n n^4 |\tilde{x}_n|^2 \end{aligned}$$

Para y se obtiene una expresión análoga, por lo que, finalmente, el primer término de la ecuación (1) resulta ser:

$$m\tau P_1(\dot{\mathbf{x}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{x}}^{(0)}) = -m\tau \omega_0^4 \sum_n n^4 (|\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2) \quad (3)$$

Para calcular el segundo término de la condición de equilibrio partimos de una expresión obtenida en el capítulo II:

$$e^2 P_1(\langle \mathbf{E}, \dot{\mathbf{x}}^{(1)} \rangle) = \sum_i \frac{e^2}{m} \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \Sigma(\omega) \cos \omega(t-t') \left[\dot{x}_i^{(0)}(t'), p_i^{(0)}(t') \right] dt dt' \quad (4)$$

Podemos calcular el paréntesis de Poisson en el sistema de variables de acción y ángulo, para lo cual usamos el desarrollo multiperíodico de las coordenadas cartesianas (ecuación (III.2.8)):

$$x = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \left[\tilde{x}_{n_1} \exp(-2\pi i(n_1 \eta_r + \eta_\phi)) + \tilde{x}_{n_1}^* \exp(-2\pi i(n_1 \eta_r - \eta_\phi)) \right] \\ = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-1,1} \left[\tilde{x}_{n_1, n_2} \exp(-2\pi i(n_1 \eta_r + n_2 \eta_\phi)) \right] \quad (5.a)$$

$$y = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \left[\tilde{y}_{n_1} \exp(-2\pi i(n_1 \eta_r + \eta_\phi)) + \tilde{y}_{n_1}^* \exp(-2\pi i(n_1 \eta_r - \eta_\phi)) \right] \\ = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-1,1} \left[\tilde{y}_{n_1, n_2} \exp(-2\pi i(n_1 \eta_r + n_2 \eta_\phi)) \right] \quad (5.b)$$

Aplicando el desarrollo anterior a $x^{(0)}$ encontramos:

$$\left[\dot{x}^{(0)}(t'), p_x^{(0)}(t') \right] = \sum_j \left[\frac{\partial x^{(0)}(t')}{\partial \eta_j} \frac{\partial p^{(0)}(t')}{\partial \xi_j} - \frac{\partial x^{(0)}(t')}{\partial \xi_j} \frac{\partial p^{(0)}(t')}{\partial \eta_j} \right] \\ = 2\pi m \sum_j \sum_{n_1, n_2} \sum_{n_1', n_2'} (n_1 + n_2) \exp(-i\omega_0((n_1 + n_2)t + (n_1' + n_2')t')) \left[n_j \omega_0 \tilde{x}_{n_1, n_2} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \tilde{x}_{n_1', n_2'}^* - n_j' \tilde{x}_{n_1', n_2'} \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\tilde{x}_{n_1, n_2} \omega_0) \right]$$

en donde se ha tomado en cuenta que el sistema es degenerado, y por lo tanto ambas frecuencias son iguales. Desarrollando la suma sobre j se obtiene:

$$\begin{aligned} \left[x^{(0)}(t'), p_x^{(0)}(t) \right] &= 2\pi m \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n'_1} \sum_{n'_2} (n_1 + n_2) \exp(-i\omega_0 (n_1 + n_2)t + \\ & (n'_1 + n'_2)t') \left[n_1 \omega_0 \tilde{x}_{n_1, n_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \tilde{x}_{n'_1, n'_2} - n'_1 \tilde{x}_{n'_1, n'_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\tilde{x}_{n_1, n_2} \omega_0) + \right. \\ & \left. n_2 \omega_0 \tilde{x}_{n_1, n_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \tilde{x}_{n'_1, n'_2} - n'_2 \tilde{x}_{n'_1, n'_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\tilde{x}_{n_1, n_2} \omega_0) \right] \end{aligned}$$

Si en la ecuación (4) se hace un cambio de variable de manera que $u = t - t'$, el único término que conserva la dependencia en t es el paréntesis de Poisson, por lo que el promedio temporal sólo le afecta a él. Tenemos, entonces:

$$\overline{\left[x^{(0)}(t-u), p_x^{(0)}(t) \right]} = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T \left[x^{(0)}(t-u), p_x^{(0)}(t) \right] dt$$

Al hacer la integral anterior se obtiene una delta que impone la condición: $n_1 + n_2 + n'_1 + n'_2 = 0$, por lo que sólo tres de las n 's son independientes. Podemos notar que, a diferencia del caso no degenerado donde se obtenía $n = -n'$, lo que eliminaba dos grados de libertad, en este caso se elimina solamente un grado de libertad. Finalmente se encuentra que:

$$\begin{aligned}
 P_t \left[X^{(0)}(t-u) P_X^{(0)}(t) \right] &= 2\pi m \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_2'} (n_1 + n_2) \exp(-i\omega_0 (n_1 + n_2) u) \\
 &\left[n_1 \omega_0 \tilde{X}_{n_1, n_2} \frac{\partial}{\partial \xi_r} \langle \tilde{X}_{-n_1 - n_2 - n_2', n_2'} \rangle + n_2 \omega_0 \tilde{X}_{n_1, n_2} \frac{\partial}{\partial \xi_\varphi} \langle \tilde{X}_{-n_1 - n_2 - n_2', n_2'} \rangle + \right. \\
 &\quad \left. (n_1 + n_2 + n_2') \langle \tilde{X}_{-n_1 - n_2 - n_2', n_2'} \rangle \frac{\partial}{\partial \xi_r} \langle \tilde{X}_{n_1, n_2} \omega_0 \rangle - \right. \\
 &\quad \left. n_2' \langle \tilde{X}_{-n_1 - n_2 - n_2', n_2'} \rangle \frac{\partial}{\partial \xi_\varphi} \langle \tilde{X}_{n_1, n_2} \omega_0 \rangle \right]
 \end{aligned}$$

De las ecuaciones (5) vemos que tanto n_2 como n_2' toman valores únicamente de 1 y -1, por lo que podemos desarrollar sus sumatorias:

$$\begin{aligned}
 P_t \left[X^{(0)}(t-u) P_X^{(0)}(t) \right] &= 2\pi m \sum_{n_1} \left\{ (n_1 + 1) \exp(-i\omega_0 u (n_1 + 1)) \left[n_1 \frac{\partial}{\partial \xi_r} [\omega_0 \tilde{X}_{n_1, 1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \langle \tilde{X}_{-n_1 - 2, 1} + \tilde{X}_{-n_1, -1} \rangle + 2\tilde{X}_{-n_1 - 2, 1} \frac{\partial}{\partial \xi_r} \langle \omega_0 \tilde{X}_{n_1, 1} \rangle + \omega_0 \tilde{X}_{n_1, 1} \frac{\partial}{\partial \xi_\varphi} \langle \tilde{X}_{-n_1 - 2, 1} \right. \\
 &\quad \left. + \tilde{X}_{-n_1, -1} \rangle + \langle \tilde{X}_{-n_1, -1} - \tilde{X}_{-n_1 - 2, 1} \rangle \frac{\partial}{\partial \xi_\varphi} \langle \omega_0 \tilde{X}_{n_1, 1} \rangle \right] + \\
 &\quad (n_1 - 1) \exp(-i\omega_0 u (n_1 - 1)) \left[n_1 \frac{\partial}{\partial \xi_r} [\omega_0 \tilde{X}_{n_1, -1} \langle \tilde{X}_{n_1, 1} + \tilde{X}_{-n_1 + 2, -1} \rangle - \right. \\
 &\quad \left. 2\tilde{X}_{-n_1 + 2, -1} \frac{\partial}{\partial \xi_r} \langle \omega_0 \tilde{X}_{n_1, -1} \rangle - \omega_0 \tilde{X}_{n_1, -1} \frac{\partial}{\partial \xi_\varphi} \langle \tilde{X}_{-n_1, 1} + \tilde{X}_{-n_1 + 2, -1} \rangle + \right. \\
 &\quad \left. \langle \tilde{X}_{-n_1 + 2, -1} - \tilde{X}_{-n_1, 1} \rangle \frac{\partial}{\partial \xi_\varphi} \langle \omega_0 \tilde{X}_{n_1, -1} \rangle \right] \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Si en el término con la primera exponencial se define $n = n_1 + 1$ y en el de la segunda exponencial $n = n_1 - 1$, la expresión anterior se reduce a:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_t \left[x^{(0)}(t-u), p_x^{(0)}(t) \right] &= 2\pi m \sum_n n \exp(-i\omega_0 nu) \left\{ n \frac{\partial}{\partial \xi_r} [\omega_0 (\tilde{x}_{n-1,1} + \tilde{x}_{n+1,-1}) \right. \\
 &(\tilde{x}_{-n-1,1} + \tilde{x}_{-n+1,-1})] + \frac{\partial}{\partial \xi_r} [\omega_0 (\tilde{x}_{n+1,-1} - \tilde{x}_{n-1,1}) (\tilde{x}_{-n-1,1} + \tilde{x}_{-n+1,-1})] \\
 &+ (\tilde{x}_{-n+1,-1} - \tilde{x}_{-n-1,1}) \frac{\partial}{\partial \xi_r} [\omega_0 (\tilde{x}_{n-1,1} + \tilde{x}_{n+1,-1})] + \omega_0 (\tilde{x}_{n-1,1} - \tilde{x}_{n+1,-1}) \\
 &\left. \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\tilde{x}_{-n-1,1} + \tilde{x}_{-n+1,-1}) \right\} + 2 \left[\tilde{x}_{-n-1,1} \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 \tilde{x}_{n-1,1}) - \tilde{x}_{-n+1,-1} \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 \tilde{x}_{n+1,-1}) \right] \Big\}
 \end{aligned}$$

Para continuar, debemos sustituir los coeficientes de dos índices por sus expresiones en términos de los coeficientes de un solo índice (ecuaciones (III.2.15)):

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_t \left[x^{(0)}(t-u), p_x^{(0)}(t) \right] &= 2\pi m \sum_n n \exp(-i\omega_0 nu) \left\{ n \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 |\tilde{x}_n|^2) + i \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 \tilde{y}_n \tilde{x}_{-n}) \right. \\
 &+ i \tilde{y}_{-n} \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 \tilde{x}_n) - i \omega_0 \tilde{y}_n \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\tilde{x}_{-n}) + \frac{1}{2} \left[-2 \tilde{x}_{-n} \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 \tilde{y}_n) - 2 \tilde{y}_{-n} \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 \tilde{x}_n) \right] \Big\} \\
 &= 2\pi m \sum_n n \exp(-i\omega_0 nu) \left\{ n \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 |\tilde{x}_n|^2) + i \left[\tilde{y}_{-n} \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 \tilde{x}_n) - \omega_0 \tilde{y}_n \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\tilde{x}_{-n}) \right] \right. \\
 &\quad \left. + i \left[\omega_0 \tilde{y}_n \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\tilde{x}_{-n}) - \tilde{y}_{-n} \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 \tilde{x}_n) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

De manera análoga encontramos para y:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_t \left[y^{(0)}(t-u), p_y^{(0)}(t) \right] &= 2\pi m \sum_n n \exp(-i\omega_0 nu) \left\{ n \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 |\tilde{y}_n|^2) + \right. \\
 &+ i \left[\tilde{x}_{-n} \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 \tilde{y}_n) - \omega_0 \tilde{x}_n \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\tilde{y}_{-n}) \right] + i \left[\omega_0 \tilde{x}_n \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\tilde{y}_{-n}) - \tilde{x}_{-n} \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 \tilde{y}_n) \right] \Big\}
 \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
 P_1 \left\{ \left[x^{(0)}(t-u), p_x^{(0)}(t) \right] + \left[y^{(0)}(t-u), p_y^{(0)}(t) \right] \right\} &= 2\pi n \sum_n n \exp(-i\omega_0 nu) \\
 &\left\{ n \frac{\partial}{\partial \xi_r} [\omega_0 (|\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2)] + i \left[\frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 \tilde{x}_{-n} \tilde{y}_n) - \frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 \tilde{x}_n \tilde{y}_{-n}) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_\phi} (\omega_0 \tilde{x}_n \tilde{y}_{-n}) - \frac{\partial}{\partial \xi_\phi} (\omega_0 \tilde{x}_{-n} \tilde{y}_n) \right\}
 \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones (A2.23) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 P_1 \left\{ \left[x^{(0)}(t-u), p_x^{(0)}(t) \right] + \left[y^{(0)}(t-u), p_y^{(0)}(t) \right] \right\} &= 2\pi n \sum_n n \exp(-i\omega_0 nu) \\
 &\left\{ n \frac{\partial}{\partial \xi_r} [\omega_0 (|\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2)] + 2i \left[\frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 \tilde{x}_n \tilde{y}_n) - \frac{\partial}{\partial \xi_\phi} (\omega_0 \tilde{x}_n \tilde{y}_n) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo el resultado anterior en la ecuación (4) se encuentra:

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 P_1 \langle \langle E \cdot \dot{x}^{(1)} \rangle \rangle &= 2\pi e^2 \int_0^\infty S(\omega) \int_0^\infty \cos \omega u \sum_n n \exp(-i\omega_0 nu) \\
 &\left\{ n \frac{\partial}{\partial \xi_r} [\omega_0 (|\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2)] + 2i \left[\frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 \tilde{x}_n \tilde{y}_n) - \frac{\partial}{\partial \xi_\phi} (\omega_0 \tilde{x}_n \tilde{y}_n) \right] \right\} du d\omega \\
 &= 2\pi e^2 \sum_n n \int_0^\infty \left\{ n \frac{\partial}{\partial \xi_r} [\omega_0 S(\omega) (|\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2)] + 2i \left[\frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 S(\omega) \tilde{x}_n \tilde{y}_n) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial \xi_\phi} (\omega_0 S(\omega) \tilde{x}_n \tilde{y}_n) \right] \right\} \int_0^\infty \cos \omega u \exp(-i\omega_0 nu) du d\omega
 \end{aligned}$$

Como:

$$\int_0^\infty \cos \omega u \exp(-i\omega_0 nu) du = (\pi/2) (\delta(\omega - \omega_0 n) + \delta(\omega + \omega_0 n))$$

entonces:

$$e^2 \mathbb{P}_1 \langle \langle E \cdot \tilde{x}^{(4)} \rangle \rangle = \pi^2 e^2 \sum_n n \left\{ n \frac{\partial}{\partial \xi_r} [\omega_0 S(n\omega_0) \langle |\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2 \rangle] \right. \\ \left. + 2i \left[\frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 S(n\omega_0) \tilde{x}_n \tilde{y}_n) - \frac{\partial}{\partial \xi_\varphi} (\omega_0 S(n\omega_0) \tilde{x}_n \tilde{y}_n) \right] \right\}$$

Pero $S(\omega) = 2\hbar |\omega|^3 / 3\pi c^3 = m\hbar |\omega|^3 / \pi \omega^2$, por lo que:

$$e^2 \mathbb{P}_1 \langle \langle E \cdot \tilde{x}^{(4)} \rangle \rangle = m\hbar \pi \sum_n n \left\{ n \frac{\partial}{\partial \xi_r} [\omega_0 |n\omega_0|^3 \langle |\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2 \rangle] \right. \\ \left. + 2i \left[\frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 |n\omega_0|^3 \tilde{x}_n \tilde{y}_n) - \frac{\partial}{\partial \xi_\varphi} (\omega_0 |n\omega_0|^3 \tilde{x}_n \tilde{y}_n) \right] \right\} \quad (6)$$

Usando las ecuaciones (3) y (6) vemos que la condición de equilibrio (1) para el problema de Kepler es:

$$\sum_n \left[\omega_0^4 n^4 \langle |\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2 \rangle - \pi \hbar n \left\{ n \frac{\partial}{\partial \xi_r} [\omega_0 |n\omega_0|^3 \langle |\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2 \rangle] \right. \right. \\ \left. \left. + 2i \left[\frac{\partial}{\partial \xi_r} (\omega_0 |n\omega_0|^3 \tilde{x}_n \tilde{y}_n) - \frac{\partial}{\partial \xi_\varphi} (\omega_0 |n\omega_0|^3 \tilde{x}_n \tilde{y}_n) \right] \right\} \right] = 0 \quad (7)$$

Por simplicidad nos restringiremos a las órbitas circulares, por lo que debemos desarrollar la condición (7) a orden cero en la excentricidad ε . Para ello es necesario conocer los primeros términos de los desarrollos de los coeficientes \tilde{x}_n y \tilde{y}_n . De las ecuaciones (A2.22) y (A2.24) encontramos que, hasta segundo orden en ε :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= -3R\varepsilon/2 & \tilde{y}_0 &= 0 \\ \tilde{x}_1 &= R \left[1/2 - 3\varepsilon^2/16 \right] & \tilde{y}_1 &= 4R \left[1/2 - 5\varepsilon^2/16 \right] \\ \tilde{x}_2 &= R\varepsilon/4 & \tilde{y}_2 &= 4R\varepsilon/4 \\ \tilde{x}_3 &= 3R\varepsilon^2/16 & \tilde{y}_3 &= 13R\varepsilon^2/16 \end{aligned}$$

todos los demás coeficientes son de orden mayor a ε^2 .

En la sección anterior se encontró que:

$$R = (\xi_r + \xi_\varphi)^2 / 4m^2k \quad \varepsilon = (1 - \xi_\varphi^2 / (\xi_r + \xi_\varphi)^2)^{1/2}$$

Además, de la ecuación (A2.11) tenemos que:

$$\omega_0 = 2\pi\nu = 8\pi m^3 k^2 / (\xi_r + \xi_\varphi)^3 = (k/mR^3)^{1/2}$$

Usando las relaciones anteriores podemos calcular el primer término de la condición (7) a orden cero en ε :

$$\begin{aligned} \sum_n \omega_0^4 n^4 \langle |\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2 \rangle &\cong \omega_0^4 \left[\langle |\tilde{x}_1|^2 + |\tilde{y}_1|^2 \rangle + \langle |\tilde{x}_{-1}|^2 + |\tilde{y}_{-1}|^2 \rangle \right] \\ &= 2\omega_0^4 \langle |\tilde{x}_1|^2 + |\tilde{y}_1|^2 \rangle \cong 2\omega_0^4 (R^2/4 + R^2/4) = \omega_0^4 R^2 \\ \Rightarrow \sum_n \omega_0^4 n^4 \langle |\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2 \rangle &\cong k^2 m^2 / R^4 \end{aligned} \quad (8)$$

Para el segundo término de (7) tenemos:

$$\begin{aligned} T_2 &\cong \pi \hbar \sum_n n \left\{ n \frac{\partial}{\partial \xi_r} \langle \omega_0 | n \omega_0 \rangle^3 \langle |\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2 \rangle \right. \\ &\quad \left. + 2i \left[\frac{\partial}{\partial \xi_r} \langle \omega_0 | n \omega_0 \rangle^3 \langle \tilde{x}_n \tilde{y}_n \rangle - \frac{\partial}{\partial \xi_\varphi} \langle \omega_0 | n \omega_0 \rangle^3 \langle \tilde{x}_n \tilde{y}_n \rangle \right] \right\} \\ &= \pi \hbar \sum_n n \left\{ n \left[\frac{\partial R}{\partial \xi_r} \frac{\partial}{\partial R} \langle \omega_0 | n \omega_0 \rangle^3 \langle |\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2 \rangle \right] + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \langle \omega_0 | n \omega_0 \rangle^3 \langle |\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2 \rangle \right\} \\ &\quad + 2i \left[\frac{\partial R}{\partial \xi_r} \frac{\partial}{\partial R} \langle \omega_0 | n \omega_0 \rangle^3 \langle \tilde{x}_n \tilde{y}_n \rangle + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \langle \omega_0 | n \omega_0 \rangle^3 \langle \tilde{x}_n \tilde{y}_n \rangle \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial R}{\partial \xi_\varphi} \frac{\partial}{\partial R} \langle \omega_0 | n \omega_0 \rangle^3 \langle \tilde{x}_n \tilde{y}_n \rangle - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \langle \omega_0 | n \omega_0 \rangle^3 \langle \tilde{x}_n \tilde{y}_n \rangle \right] \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones (III.3.20) puede encontrarse que:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_r} = \frac{1}{2\pi (mkR)^{1/2}} \left[\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon} \right]$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_\varphi} = \frac{1}{2\pi (mkR)^{1/2}} \left[\frac{(1-\varepsilon^2) - (1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon} \right]$$

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_r} = \frac{\partial R}{\partial \xi_\varphi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{R}{m-k} \right]^{1/2}$$

además, hemos visto que $\omega_0 > 0$ y que ω_0 no depende la excentricidad ε , por lo que T_2 se reduce a:

$$T_2 = \pi \hbar \sum_n n |n|^3 \left\{ \frac{n}{\pi} \left[\frac{R}{m-k} \right]^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} [\omega_0^4 \langle |\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2 \rangle] \right.$$

$$\left. + n \omega_0^4 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \langle |\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2 \rangle + 2n \omega_0^4 \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_r} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_\varphi} \right] \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \langle \tilde{x}_n \tilde{y}_n \rangle \right\}$$

Sustituyendo el valor de las derivadas de ε respecto a las ξ obtenemos:

$$T_2 = 2 \frac{\hbar}{(mk)^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left\{ n R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} [\omega_0^4 \langle |\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2 \rangle] \right.$$

$$\left. + (\omega_0^4 / R^{1/2}) \left[\frac{n}{2} \left[\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon} \right] \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \langle |\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2 \rangle + \left(\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \langle \tilde{x}_n \tilde{y}_n \rangle \right] \right\}$$

A orden cero en ε , el primer término de la expresión anterior es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^5 R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} [\omega_0^4 \langle |\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2 \rangle] \cong R^{1/2} \left[(1) \frac{\partial}{\partial R} [\omega_0^4 \langle |\tilde{x}_1|^2 + |\tilde{y}_1|^2 \rangle] \right]$$

$$\cong R^{1/2} \left[\frac{\partial}{\partial R} (k^2 / m^2 R^6) \langle R^2 / 4 + R^2 / 4 \rangle \right] = -2k^2 / m^2 R^{9/2}$$

Debido a que en el segundo y tercer términos de T_2 aparecen derivadas respecto a ε multiplicadas por $1/\varepsilon$ debemos desarrollar las expresiones dentro de las derivadas hasta orden ε^2 . Haciendo esto, el segundo término de T_2 es, a orden cero en ε :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2} \left[\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon} \right] \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (|\tilde{x}_n|^2 + |\tilde{y}_n|^2) \cong \frac{1}{2} [1/\varepsilon - \varepsilon] \\ & \left[(1)^3 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (|\tilde{x}_1|^2 + |\tilde{y}_1|^2) + (2)^3 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (|\tilde{x}_2|^2 + |\tilde{y}_2|^2) \right] \\ & \cong \frac{1}{2} [1/\varepsilon - \varepsilon] \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (R^2(1/2 - 3\varepsilon^2/16))^2 + R^2(1/2 - 5\varepsilon^2/16)^2 \right. \\ & \quad \left. + 32 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (2R^2\varepsilon^2/16) \right] \cong 7R^2/2 \end{aligned}$$

Podemos notar que en este resultado aparece una contribución de los segundos armónicos de la órbita, que permanece incluso en el límite $\varepsilon = 0$. Esta contribución no fué tomada en cuenta cuando se trató en el capítulo II al átomo como una pareja de osciladores independientes. Lo anterior producirá, necesariamente, discrepancias entre el resultado que se obtuvo en ese caso (coincidente con el cuántico) y el que se obtendrá con este método. Como, por otro lado, el tratamiento presente es mucho más preciso y detallado que el anterior, el hecho de que las predicciones no coincidan con las cuánticas representa un problema de fondo en la EDE.

Para el tercer término de T_2 se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 i \frac{(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\tilde{x}_n \tilde{y}_n) = i (1-\varepsilon^2/2+\dots)/\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\tilde{x}_n \tilde{y}_n)$$

$$\cong 1/\epsilon \left[\frac{\partial}{\partial \epsilon} (iR^2(1/2-3\epsilon^2/16)(1/2-5\epsilon^2/16)) + (2)^4 \frac{\partial}{\partial \epsilon} (iR^2\epsilon^2/16) \right]$$

$$\cong -3R^2/2$$

En este término se observan discrepancias aun mayores con el tratamiento heurístico del capítulo II, ya que existen contribuciones debidas a la combinación de las componentes (x,y), lo que invalidaría, de principio, el que se puedan considerar como osciladores independientes.

Finalmente, a orden cero en ϵ , T_2 se reduce a:

$$T_2 = 2 \frac{\hbar}{(mk)^{1/2}} \left[-2k^2/m^2 R^{9/2} + (\omega_0^4/R^{1/2})(7R^2/2 - 3R^2/2) \right]$$

$$= 2 \frac{\hbar}{(mk)^{1/2}} \left[-2k^2/m^2 R^{9/2} + (k^2/m^2 R^{13/2})(2R^2) \right] = 0 \quad (9)$$

Sustituyendo (8) y (9) en la ecuación (7) encontramos que la condición de equilibrio para órbitas circulares ($\epsilon = 0$) implica:

$$k^2 m^2 / R^4 = 0$$

Como k y m son ambas distintas de cero, la única forma en que la expresión anterior puede satisfacerse es si $R = \infty$. Lo anterior significa que, de acuerdo con la EDE, no existe una órbita circular estable para el átomo de hidrógeno. Vemos, entonces, que se ha recuperado el resultado predicho por la ecuación de F-P en el sentido de que ocurrirá una autoionización del átomo.

Si se analizan detenidamente las hipótesis físicas de la EDE, el fenómeno de la autoionización resulta fácil de entender, ya que, al estar la partícula en interacción con el campo estocástico de fondo, existe, en principio, la posibilidad de que absorba de

éste cantidades de energía mayores a la de ionización. Aunque un evento de este tipo es muy poco probable, al promediar sobre un tiempo infinito ocurrirá necesariamente. Una vez que la partícula se haya liberado de la influencia del centro de fuerzas no hay posibilidad de que vuelva a estar ligada a éste.

La mecánica cuántica, sin embargo, predice que el estado base debe ser estable, por lo que no contempla la posibilidad de una autoionización. Existe, por lo tanto, una incompatibilidad de fondo entre las predicciones de la mecánica cuántica y las de la EDE para el caso del átomo. Aun así, el solo hecho de que un cálculo menos formal como el realizado en el capítulo II haya producido resultados aceptables significa que la EDE muy probablemente tiene algún elemento de verdad en su interior.

5. Conclusión.

En el capítulo II se logró describir satisfactoriamente el comportamiento del oscilador armónico unidimensional y el rotor rígido utilizando la condición de equilibrio. Sin embargo, al aplicar el mismo formalismo a un sistema más complejo, como el átomo de hidrógeno, se encuentra que las predicciones de la teoría no reflejan adecuadamente el comportamiento físico del sistema. Además, en el cálculo que utiliza el desarrollo perturbativo de la ecuación de B-M no se requiere utilizar la aproximación de Markov. Si bien se ha hecho un desarrollo solo a segundo orden en la carga eléctrica e , esto es, en principio, menos restrictivo, por lo que el problema de la autoionización parece no ser producto de una

aproximación markoviana, sino que debe originarse en algún otro lugar de la teoría. Por otro lado, hasta ahora, la EDE sólo ha sido capaz de describir el estado base de los diferentes sistemas, y no ha sido capaz de explicar la existencia de estados excitados discretos, salvo para el oscilador armónico, en donde estos surgen únicamente de manera formal⁹. Lo anterior podría ser una razón suficiente para sugerirnos el abandonar a la EDE, sin embargo, los grandes logros que ésta ha alcanzado en el estudio de un gran número de sistemas nos permiten suponer que no es una descripción esencialmente incorrecta de la naturaleza y que sus fallas podrán corregirse mediante una revisión cuidadosa de sus métodos.

La estructura matemática de la ecuación de Fokker-Planck impide, debido a su gran complejidad, determinar cual de las hipótesis inherentes a la EDE es la causante de que ésta sea incapaz de tratar adecuadamente con los sistemas no lineales. El método basado en la condición de equilibrio y en el desarrollo perturbativo de la ecuación de Brufford-Marshall permite, en cambio, analizar estas hipótesis con mayor claridad.

Si se observa la condición de equilibrio desarrollada para sistemas multiperiodicos (ecuación (11.58)):

$$\sum_n \left[(n \cdot \omega_0)^4 |\tilde{x}_m|^2 - \frac{3}{2} n^2 e^3 n \cdot \nabla_i (n \cdot \omega_0) S(n \cdot \omega_0) |\tilde{x}_m|^2 \right] = 0 \quad (1)$$

se encuentra que la ecuación puede satisfacerse término a término, de modo que exista un balance detallado de energía, sólo si el

⁹ L. de la Peña y A. M. Cetto (1979).

espectro del campo de fondo $S(\omega)$ es proporcional a ω^2 , es decir, con un espectro de Raleigh-Jeans; sólo así se logra tener en ambos términos de la expresión la misma potencia de n . Debido a que la EDE propone un espectro proporcional a ω^3 queda claro que, en su forma usual, esta teoría es capaz únicamente de lograr un balance energético global, a diferencia de la mecánica cuántica, en donde existe un balance energético detallado.

Si se insiste en mantener el espectro $S(\omega) \propto \omega^3$ que, además de ser el único invariante frente a transformaciones de Lorentz, es el mismo propuesto por la electrodinámica cuántica, entonces debe modificarse la ecuación (1) si se desea obtener un balance detallado. Para obtener dicha ecuación, el único presupuesto ajeno a la mecánica newtoniana y a los postulados fundamentales de la EDE utilizado fué la ecuación de movimiento de Draffort-Marshall para describir la interacción entre la partícula y un campo de vacío. De esta forma, se concluye que es esta última ecuación (y por lo mismo la ecuación clásica de Abraham-Lorentz) la que debe ser modificada, lo que equivale a decir que el origen del problema de la EDE está en la descripción de la interacción entre la materia y los campos electromagnéticos.

Bibliografía.

Born, M., "The Mechanics of the Atom", Frederick Ungar Pub. Co., Nueva York 1960; Publicación original: Bell, Londres 1927.

Claverie, P.; Soto, F.; Pesquera, L. (1980), *Phy. Letters* A80, p. 113, 1980.

Claverie, P.; Soto, F. (1982), *J. Math. Phys.* 23, p. 753, 1982.

Goldstein, H., "Mecánica Clásica", Aguilar S.A. de ediciones, Madrid 1979.

Khas'minskii, R.Z. (1960), *Theory Prob. Appl.* 5, p. 179, 1960.

Marshall, T.W.; Claverie, P. (1980), "Stochastic electrodynamic of nonlinear systems. I. Partial in a central field of force", *J. Math. Phys.* 21, p. 1819, 1980.

Peña, L. de la (1983); "Stochastic Electrodynamics: its development, present situation and perspectives", *Proc. of the Escuela Latinoamericana de Física 1982*, Cali, Colombia; World Scientific, Singapore 1983.

Peña, L. de la; Getto, A.M. (1979), *J. Math. Phys.* 20(3), p. 469, 1979.

CAPITULO IV

LA ELECTRODINÁMICA ESTOCÁSTICA DESDE UNA NUEVA PERSPECTIVA

LA ELECTRODINÁMICA ESTOCÁSTICA DESDE UNA NUEVA PERSPECTIVA

1. Descripción dinámica de un sistema en presencia del campo estocástico del punto cero.

En el capítulo anterior señalamos que el origen del problema de la EDE para describir sistemas no lineales se encuentra en el tratamiento de la ecuación de Braffort-Marshall, es decir, en la descripción de la interacción entre la partícula y el campo estocástico de fondo.

Debido a que a orden cero en la carga eléctrica e , la ecuación de B-M se reduce a la ecuación clásica de movimiento, la EDE ha considerado sistemáticamente a la presencia del campo de vacío sólo como una perturbación en el movimiento clásico.

Recientemente, L. de la Peña y A.M. Cetto¹ presentaron una visión alternativa que parte de la suposición de que el campo de fondo no puede considerarse como una mera perturbación, sino que juega un papel esencial en la dinámica de una partícula inmersa en él. Desde este punto de vista, podemos esperar que las propiedades canónicas de las amplitudes $a_{n\sigma}$ y $a_{n\sigma}^*$ del campo estocástico de vacío se reflejen en la descripción de la dinámica de una partícula en interacción con él.

Para intentar realizar una descripción dinámica del sistema campo-partícula consideremos primero una pareja de variables

¹L. de la Peña y A.M. Cetto (1986) y (1987).

dinámicas A y B asociadas al campo de fondo. El paréntesis de Poisson de dichas variables será:

$$\left[A, B \right] = \sum_n \sum_\sigma \left\{ \frac{\partial A}{\partial q_{n\sigma}} \frac{\partial B}{\partial p_{n\sigma}} - \frac{\partial A}{\partial p_{n\sigma}} \frac{\partial B}{\partial q_{n\sigma}} \right\} \quad (1)$$

donde $q_{n\sigma}$ y $p_{n\sigma}$ son las variables canónicas del campo introducidas en el capítulo II (ecuaciones (II.2.7) y (II.2.8)). Si se reescribe la expresión anterior en términos de las amplitudes $a_{n\sigma}$ y $a_{n\sigma}^*$ definidas en la ecuación (II.2.17) obtenemos:

$$\begin{aligned} \left[A, B \right] &= \frac{1}{i\hbar} \sum_n \sum_\sigma \left\{ \frac{\partial A}{\partial a_{n\sigma}} \frac{\partial B}{\partial a_{n\sigma}^*} - \frac{\partial A}{\partial a_{n\sigma}^*} \frac{\partial B}{\partial a_{n\sigma}} \right\} \\ &= \frac{1}{i\hbar} \langle A, B \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

A la cantidad $\langle A, B \rangle$ se le denomina poissoniano de A y B.

Podemos usar la definición (2) para calcular el poissoniano de las componentes $E_i(t)$ y $E_j(t')$ del campo eléctrico de fondo, a partir de la ecuación (II.2.22), que en la aproximación de onda larga toma la forma:

$$E(t) = \sum_n \sum_\sigma \left[\frac{2\pi\hbar}{V} \right]^{1/2} \omega_n^{1/2} \hat{\epsilon}_{n\sigma} \left[i a_{n\sigma} \exp(-i\omega_n t) + c.c. \right] \quad (3)$$

Usando la ecuación (II.2.6) encontramos:

$$\begin{aligned} \langle E_i(t); E_j(t') \rangle &= \frac{2\pi\hbar}{V} \sum_n \sum_\sigma \omega_n \left[\delta_{ij} - k_{n_i} k_{n_j} / k_n^2 \right] \\ &\quad \left[\exp(i\omega_n(t-t')) - \exp(i\omega_n(t-t')) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Si ahora tomamos el límite $V \rightarrow \infty$ e integramos sobre el ángulo sólido de la misma forma que en el capítulo II, la expresión anterior toma la forma:

$$\langle E_i(t); E_j(t') \rangle = - \frac{4\pi h}{3\pi c^3} \delta_{ij} \int_0^\infty \omega^3 \operatorname{sen}\omega(t-t') d\omega$$

Como la densidad espectral del campo del punto cero es:

$$S_0(\omega) = \frac{2 h \omega^3}{3 \pi c^3}$$

obtenemos finalmente para el poissoniano:

$$\langle E_i(t); E_j(t') \rangle = - 2i \delta_{ij} \int_0^\infty S_0(\omega) \operatorname{sen}\omega(t-t') d\omega \quad (5)$$

El resultado anterior es muy interesante, pues muestra que, aun cuando el campo eléctrico E es una función aleatoria, el poissoniano de $E_i(t)$ y $E_j(t')$ no lo es, debido a que la dependencia en las $a_{n\sigma}$ ha desaparecido. Podemos notar que la función de autocorrelación del campo (ecuación (II.2.24)) y el poissoniano (5) corresponden respectivamente a la parte real e imaginaria de la transformada de Fourier de la densidad espectral.

Consideremos ahora al sistema completo campo-partícula. Su hamiltoniano es:

$$H_T = \frac{1}{2m} \left[\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right]^2 + V(x) + H_r, \quad (6)$$

con H_r el hamiltoniano del campo dado por la ecuación (II.2.11):

$$H_r = \frac{1}{2} \sum_n \sum_\sigma (p_{n\sigma}^2 + \omega_n^2 q_{n\sigma}^2) \quad (7)$$

donde:

$$q_{n\sigma} = i (\hbar/2\omega_n)^{1/2} (b_{n\sigma} - b_{n\sigma}^*)$$

$$p_{n\sigma} = (\hbar\omega_n/2)^{1/2} (b_{n\sigma} + b_{n\sigma}^*)$$

Las amplitudes $b_{n\sigma}$ difieren de las amplitudes del campo libre $a_{n\sigma}$ en el hecho de que incluyen el campo radiado por la partícula.

Supongamos que la interacción entre campo y partícula comienza al tiempo $t = 0$. Sean x_0 y p_0 los valores iniciales de la posición y el momento de la partícula, y sean $a_{n\sigma} = b_{n\sigma}(t=0)$. Como resultado de la interacción, puede esperarse que para cualquier tiempo $t > 0$ las variables $(x(t), p(t))$ dependan de las amplitudes iniciales del campo $a_{n\sigma}$. Esta dependencia puede estudiarse más fácilmente si realizamos una transformación canónica del tipo:

$$(x(t), p(t); q_{n\sigma}(t), p_{n\sigma}(t)) \longrightarrow (x_0, p_0; q_{n\sigma}(t=0), p_{n\sigma}(t=0))$$

De esta forma, el paréntesis de Poisson de dos variables dinámicas de la partícula $f(x, p)$ y $g(x, p)$ será:

$$\left[f, g \right]_{x, p} = \left[f, g \right]_{x_0, p_0} + \left[f, g \right]_{q_{n\sigma}(t=0), p_{n\sigma}(t=0)}$$

Usando la ecuación (2) obtenemos:

$$\left[f, g \right]_{x, p} = \left[f, g \right]_{x_0, p_0} - \frac{i}{\hbar} \langle f, g \rangle \quad (8)$$

En particular, si en la expresión anterior tomamos $f = x_i$ y $g = p_j$ encontramos:

$$\left[x_i, p_j \right]_{x, p} = \left[x_i, p_j \right]_{x_0, p_0} - \frac{i}{\hbar} \langle x_i, p_j \rangle$$

Como debe cumplirse que $\left[x_i, p_j \right]_{x, p} = \delta_{ij}$ la expresión anterior se reduce a:

$$\left[x_i, p_j \right]_{x_0, p_0} - \frac{i}{\hbar} \langle x_i, p_j \rangle = \delta_{ij} \quad (9)$$

De manera similar se encuentra:

$$\left[x_i, x_j \right]_{x_0, p_0} - \frac{i}{\hbar} \langle x_i x_j \rangle = 0 \quad (10.a)$$

$$\left[p_i, p_j \right]_{x_0, p_0} - \frac{i}{\hbar} \langle p_i p_j \rangle = 0 \quad (10.b)$$

Por otro lado, del hamiltoniano (6) puede verse que las ecuaciones de movimiento para la partícula son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \left[x_i, H_T \right]_{x, p} = \left[x_i, H \right]_{x, p} - (e/mc) A_i \\ \dot{p}_i &= \left[p_i, H_T \right]_{x, p} = \left[p_i, H \right]_{x, p} + \sum_k \frac{e}{c} \dot{x}_k \partial_i A_k \end{aligned}$$

donde $H = \frac{1}{2m} p^2 + V(x)$

Usando la expresión (8), las ecuaciones anteriores toman la forma:

$$\dot{x}_i = \left[x_i, H \right]_{x_0, p_0} - \frac{i}{\hbar} \langle x_i H \rangle - (e/mc) A_i \quad (11.a)$$

$$\dot{p}_i = \left[p_i, H \right]_{x_0, p_0} - \frac{i}{\hbar} \langle p_i H \rangle + \sum_k \frac{e}{c} \dot{x}_k \partial_i A_k \quad (11.b)$$

De las ecuaciones (11) podemos ver que en ausencia del campo estocástico de fondo la dinámica de la partícula queda determinada por el paréntesis respecto de las variables x_0 y p_0 . Sin embargo, cuando se toman en cuenta los efectos, tanto del campo de fondo como de la reacción de radiación, el movimiento de la partícula resulta ser sumamente complejo. Podemos esperar que, debido al comportamiento estocástico del campo de vacío, la dependencia de las variables dinámicas de la partícula con respecto a sus valores iniciales se pierda cuando haya transcurrido un tiempo suficientemente largo comparado con el tiempo de correlación de la

fuerza estocástica². Una vez que se ha alcanzado esta etapa, el movimiento de la partícula estará determinado únicamente por los valores de las amplitudes a_{no} del campo de fondo. En ese caso diremos que la partícula se encuentra en el régimen cuántico.

La discusión anterior implica que, una vez en el régimen cuántico, la ecuación (8) se transformará en:

$$\left[F, G \right]_{x,p} = - \frac{i}{\hbar} \langle F, G \rangle \quad (12)$$

En particular, de las ecuaciones (9) y (10):

$$\langle x_i, x_j \rangle = 0 \quad \langle p_i, p_j \rangle = 0 \quad (13.a)$$

$$\langle x_i, p_j \rangle = i\hbar \delta_{ij} \quad (13.b)$$

Análogamente, las ecuaciones (11) se reducen a:

$$\dot{x}_i = - \frac{i}{\hbar} \langle x_i, H \rangle - (e/mc) A_i \quad (14.a)$$

$$\dot{p}_i = - \frac{i}{\hbar} \langle p_i, H \rangle + \sum_k \frac{e}{c} \dot{x}_k \partial_i A_k \quad (14.b)$$

Los términos que contienen la carga eléctrica e dan lugar a correcciones radiativas. En la aproximación a orden cero en la carga eléctrica ($e = 0$) se obtiene:

$$\dot{x}_i^{(0)} = - \frac{i}{\hbar} \langle x_i^{(0)}, H^{(0)} \rangle \quad (15.a)$$

²En general, el tiempo necesario para que se alcance esta situación será muy pequeño comparado, por ejemplo, con las vidas medias de los estados excitados ya que sabemos que la mecánica cuántica es válida para intervalos de menos de 10^{-15} seg.

$$\dot{p}_i^{(0)} = -\frac{i}{\hbar} \cdot p_i^{(0)} \cdot H^{(0)} \quad (15b)$$

donde $H^{(0)} \equiv H(x^{(0)}, p^{(0)})$.

Podemos observar que en el límite de tiempos largos, y sin tomar en cuenta las correcciones radiativas, la evolución temporal de las variables dinámicas (x, p) de la partícula está gobernada por el hamiltoniano "clásico", pero la estructura de las ecuaciones de movimiento está determinada por las amplitudes $a_{n\sigma}$ y $a_{n\sigma}^*$ del campo. Además, en este límite no aparece la carga eléctrica en las ecuaciones de movimiento.

2. La hipótesis de respuesta lineal

En la discusión anterior se ha puesto de manifiesto el hecho de que, una vez que la partícula ha alcanzado el régimen cuántico, la evolución de sus variables dinámicas (incluso a orden cero en ϵ) está gobernada por los valores de las amplitudes del campo estocástico de fondo. Debido a lo anterior, en ese régimen se tendrá:

$$x^{(0)} = x^{(0)}(a_{n\sigma}, a_{n\sigma}^*) \quad (1)$$

Es evidente que una dependencia funcional de esta forma no puede obtenerse a partir de la ecuación clásica de movimiento (ecuación (II.4.4)), ya que en ella no aparece el campo de vacío. El hecho de que la descripción clásica de la interacción entre la partícula y el campo no proporcione resultados adecuados no es, en realidad, sorprendente. Fue precisamente este problema el que

quedó en evidencia desde los trabajos de Planck en 1900, y el que dió origen, finalmente, a la elaboración de la electrodinámica cuántica.

Hasta hace poco tiempo, la EDE había descrito, sistemáticamente, la interacción con el campo estocástico de fondo desde un punto de vista clásico debido a que existía la esperanza de que las propiedades cuánticas de la materia fueran producto exclusivamente de la interacción clásica entre ésta y el campo estocástico de fondo. Sin embargo, la discusión llevada a cabo en las secciones anteriores muestra que esta visión clásica conduce a resultados limitados y que la situación es mucho más compleja de lo que se creía.

Para obtener una nueva ecuación de movimiento que describa adecuadamente la interacción entre la partícula y el campo se requiere de un modelo que represente correctamente dicho mecanismo. Debido al éxito que ha tenido la electrodinámica cuántica en la descripción de los fenómenos electromagnéticos en la escala atómica, puede pensarse que su formalismo es capaz de proporcionar la descripción que buscamos. Sin embargo, el carácter de esta teoría es fenomenológico en el sentido de que parte de una descripción ya cuantizada de materia y campo, por lo que la EDE, que intenta comprender los fenómenos cuánticos desde un punto de vista más fundamental, no puede sustentarse en ella. Pese al enorme interés que encierra el encontrar un modelo fundamental del proceso de interacción entre la materia y el campo de fondo, no existe, hasta ahora, ninguna investigación en esta dirección. Debido a esto, nos vemos obligados por el momento a

limitarnos unicamente a intentar describir la forma que debe tomar la solución $x^{(0)}$ bajo los efectos de la interacción.

En general, podemos expresar la dependencia funcional de $x^{(0)}$ respecto de las amplitudes $a_{n\sigma}$ y $a_{n\sigma}^*$, una vez que se ha alcanzado el régimen cuántico, como un desarrollo en serie de potencias del tipo:

$$x^{(0)} = \sum_n \sum_\sigma A_{n\sigma} a_{n\sigma}(t) + \sum_n \sum_\sigma \sum_{n'\sigma'} B_{nn'\sigma\sigma'} a_{n\sigma}(t) a_{n'\sigma'}(t) + \dots \quad (2)$$

con $a_{n\sigma}(t) = a_{n\sigma} \exp(-i\omega_n t)$.

En la expresión anterior los productos $a_{n\sigma} a_{n'\sigma'}$ representan cualquier posible combinación entre las a 's y las a^* 's. Además, se ha escogido el origen del sistema de coordenadas de forma tal que $\mathbb{P}(x^{(0)}) = 0$ y se está considerando que la evolución temporal de $x^{(0)}$ está determinada exclusivamente por las $a_{n\sigma}(t)$ (i.e. $\dot{A}, \dot{B}, \dots = 0$).

Un requisito de enorme importancia para la teoría es que se satisfaga un balance energético detallado (es decir, con cada frecuencia del campo por separado). Esto se debe exigir para asegurar que se alcance el equilibrio entre el campo de vacío y materia, y no sólo para reproducir los resultados de la mecánica cuántica. En efecto, si no existe un balance energético detallado, se extraería energía de algunos modos y se inyectaría en otros, lo que causaría una continua alteración del espectro del campo de vacío y evitaría que se llegara al equilibrio. En el desarrollo (2) propuesto para $x^{(0)}$ aparecen términos no lineales en las a 's que mezclan diferentes frecuencias del campo, esto causa que resulte muy difícil separar la interacción con cada modo

del campo y lograr que se alcance un balance detallado de energía. Debe demandarse, entonces, que el desarrollo para $x^{(0)}$ contenga solamente términos lineales en las amplitudes. Existen otros argumentos que refuerzan la exigencia anterior. En primer lugar, si se hace una analogía con la electrodinámica cuántica es posible despreciar los términos de orden superior en las a_n , tomando en cuenta que éstos representarían, en el lenguaje cuántico, interacciones en las que intervienen dos o más "fotones", cuya probabilidad es muy pequeña comparada con las interacciones con un solo fotón. Una de los argumentos más fuertes a favor de la demanda de linealidad se obtiene analizando la ecuación (IV.13) para el poissoniano de x_i y p_i . La cantidad del lado derecho de dicha ecuación es una constante (igual a if), mientras que la cantidad del lado izquierdo es el poissoniano de dos funciones estocásticas. Como el poissoniano involucra primeras derivadas respecto a las a 's, la única forma general de asegurar que la condición se cumpla es si x_i y p_i son funciones lineales de estas. En resumen, se propone para $x^{(0)}$ una expresión de la forma:

$$x^{(0)} = \sum_n \sum_{\sigma} \tilde{x}_{n\sigma} a_{n\sigma} \exp(-i\omega_n t) + \text{c.c.} \quad (3)$$

En el desarrollo para $x^{(0)}$ debe tomarse $\omega_{-n} = -\omega_n$ con $|\omega_n| = \frac{2\pi c}{L}|n|$. Lo anterior contrasta con el desarrollo en ondas planas del campo, donde se tenía $\omega_{-n} = \omega_n$. La razón para proponer un desarrollo de esta forma es que la partícula debe oscilar con una fase para modos del campo que se propagan en la dirección \mathbf{k} y con la fase opuesta para modos que se propagan con

la dirección $-k$. En otras palabras, deben permitirse respuestas con fase arbitraria para una excitación dada.

A partir de la ecuación (3) se pueden construir los términos de orden superior en ϵ del vector x siguiendo el mismo procedimiento que en el capítulo II.

Es importante notar que la hipótesis de respuesta lineal se ha propuesto exclusivamente para sistemas ligados; el problema de la partícula libre y los fenómenos de dispersión no están contemplados en esta descripción.

De la estructura de la ecuación (3) puede verse que la partícula responde a la presencia del campo en forma tal que cada modo la arrastra en su movimiento, haciéndola oscilar en resonancia con él. Debido a esto, la existencia del campo de fondo determina esencialmente el movimiento de la partícula, por lo que no puede considerarse como una simple perturbación. La dependencia lineal de $x^{(0)}$ en las amplitudes del campo refleja el hecho de que, una vez que se ha alcanzado el equilibrio, la partícula interacciona independientemente con cada modo. De hecho, este argumento podría usarse como punto de partida para introducir la hipótesis de respuesta lineal.

Las amplitudes $a_{n\sigma}$ y $a_{n\sigma}^*$ que aparecen en la ecuación (3) deben estar asociadas solamente al campo del punto cero, y no incluir las de campos excitados (por ejemplo térmicos), cuya acción se toma en cuenta como una perturbación. Este hecho parece ser necesario para obtener muchos de los resultados de la teoría, y entenderlo cabalmente representa una de las principales tareas que quedan por realizarse. Por el momento, podría argumentarse que

los campos externos usuales poseen amplitudes y energía muy por debajo de los valores infinitos que caracterizan las correspondientes variables del campo de fondo.

La forma explícita de los coeficientes $\tilde{\chi}_{0\alpha}$ que aparecen en la expresión (3) está determinada por la fuerza externa que actúa sobre la partícula, y será diferente para cada sistema dinámico particular. Estos coeficientes están relacionados directamente con la intensidad de la interacción con cada modo del campo de fondo, y serán cero cuando no exista interacción con el modo asociado a ellos. Hemos encontrado, entonces, un hecho muy significativo que resulta característico de esta descripción y que recuerda las oscilaciones parciales de la mecánica matricial de Heisenberg: a orden cero en la carga eléctrica, la partícula se mueve oscilando en resonancia con determinados modos del campo, y no siguiendo las trayectorias clásicas producidas por la fuerza externa. Esta última determina únicamente los modos y la intensidad de la interacción con cada uno de ellos.

Desde este punto de vista podemos ver que la razón por la que la descripción del oscilador armónico con los métodos tradicionales de la EDE resulta satisfactoria es, precisamente, que el movimiento clásico de este sistema coincide con el que, en esta visión, es producido por la resonancia con los modos del campo. Es esto mismo lo que lleva a que los resultados obtenidos para las órbitas circulares del átomo de hidrógeno cuando se le trata como dos osciladores independientes sean los correctos, mientras que una descripción que resulta, desde la perspectiva anterior, más precisa conduce a resultados insatisfactorios.

En la expresión (3) aparece una suma, tanto sobre números de onda n , como sobre las polarizaciones del campo α . En general, podemos esperar que esta última sumatoria sea importante sólo en el caso en que las partículas que se encuentren en interacción con el campo posean spin. Esto se debe a que, para una partícula sin spin en interacción con un campo no polarizado, no puede esperarse que haya preferencia en la interacción con una de las dos posibles polarizaciones, de manera que deberá tenerse $\tilde{x}_{n1} = \tilde{x}_{n2}$ para cada número de onda n . La relación entre el spin de una partícula y las polarizaciones α del campo puede ser de gran importancia, y es uno de los programas de investigación que deberán llevarse a cabo próximamente.

3. La condición de cuantización y las desigualdades de Heisenberg.

Una vez que se ha adoptado la hipótesis de respuesta lineal para describir el comportamiento del sistema dinámico a orden cero en ϵ , nos encontramos en condiciones de calcular los poissonianos de las diferentes variables dinámicas asociadas a éste. En particular, resulta de gran interés el poissoniano de las variables (x,p) que, según hemos visto, debe satisfacer la condición:

$$\langle x_i^{(0)}(t); p_j^{(0)}(t) \rangle = i\hbar \quad (1)$$

La importancia de esta relación radica en su analogía con la relación de conmutación que cumplen las variables x y p en la

mecánica cuántica. Esta semejanza es la razón por la cual la ecuación (1) se considerará como la condición de cuantización que debe satisfacer un sistema en el régimen cuántico.

Usando la hipótesis de respuesta lineal y tomando $p_i^{(0)} = m \dot{x}_i^{(0)}$ encontramos para el poissoniano:

$$\begin{aligned} \langle \dot{x}_i^{(0)}(t); p_j^{(0)}(t) \rangle &= \sum_{n\sigma} \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\tilde{x}_{n\sigma} \exp(-i\omega_n t)) (\tilde{x}_{n\sigma}^* \exp(i\omega_n t)) - \text{c.c.} \right] \\ &= 2im \sum_{n\sigma} \omega_n |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \end{aligned}$$

Finalmente, usando la ecuación (1) se obtiene:

$$\sum_{n\sigma} \omega_n |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 = \hbar/2m \quad (2)$$

La ecuación anterior es la regla de cuantización que debe satisfacer el sistema dinámico en el régimen cuántico. Es interesante notar que la expresión (2) es el análogo estocástico de una relación que se obtiene en la mecánica cuántica, conocida como regla de suma de Thomas-Reiche-Kuhn:

$$\sum_{\alpha} (E_{\alpha} - E_{\beta}) |\langle \alpha | x | \beta \rangle|^2 = \hbar^2/2m$$

La regla de suma anterior puede reescribirse de una forma semejante a la ecuación (2) notando que $(E_{\alpha} - E_{\beta}) = \hbar\omega_{\beta\alpha}$. Entonces:

$$\sum_{\alpha} \omega_{\beta\alpha} |\langle \alpha | x | \beta \rangle|^2 = \hbar/2m \quad (3)$$

Comparando (2) y (3) vemos que los coeficientes $\tilde{x}_{n\sigma}$ que aparecen en la expresión para $\dot{x}^{(0)}$ (cuyo valor dependerá en general del estado en el que se encuentre la partícula) pueden

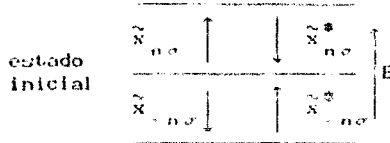
interpretarse como los elementos de matriz $\langle \alpha | x | \beta \rangle$ correspondientes a transiciones del estado inicial β en el que se encuentra la partícula, a otro estado final α . Estas transiciones serán inducidas por un modo del campo cuya frecuencia sea:

$$\omega_n = \omega_{\beta\alpha} = (E_\alpha - E_\beta) / \hbar.$$

En el caso en que ω_n sea mayor a cero, la transición se hará hacia un estado α con energía mayor, mientras que si ω_n es menor a cero, el estado final α tendrá una energía menor. De esta forma los diferentes estados cuánticos accesibles a una partícula resultan estar determinados por los diferentes modos del campo de fondo con los que ésta puede interactuar.

Si interpretamos la hipótesis de respuesta lineal (ecuación (IV.2.3)) desde esta perspectiva, vemos que en $x^{(0)}$ aparecen términos asociados con transiciones a estados de mayor energía, relacionados con ω_n mayores que cero, y términos asociados con transiciones a estados con menor energía, relacionados con ω_n menores que cero. Las transiciones que salen del estado original estarán representadas por $\tilde{x}_{n\sigma}$, mientras que las que regresan estarán representadas por $\tilde{x}_{n\sigma}^*$. En particular, si para cierto modo del campo se tiene $\omega_n > 0$, tendremos que $\tilde{x}_{n\sigma}$ nos llevará a un estado de mayor energía. Como $\omega_{-n} = -\omega_n$, el coeficiente $\tilde{x}_{-n\sigma}$ representará una transición a un estado de energía menor. Si por el momento tomamos prestado el resultado cuántico que nos dice que la diferencia de energía entre esos niveles es $\Delta E = \hbar|\omega_n|$, vemos que las transiciones producidas por $\tilde{x}_{n\sigma}$ y $\tilde{x}_{-n\sigma}$ son hacia niveles que están a la misma distancia del

estado inicial. Lo anterior puede representarse gráficamente de la forma:



De la discusión anterior, resulta evidente que para el estado base de cualquier sistema, desde donde no es posible pasar a un estado de menor energía, se tendrá: $\tilde{X}_{n\sigma} = 0$ siempre que $\omega_n > 0$.

Por otro lado sabemos que, salvo para el oscilador armónico, los niveles de energía no son equidistantes, por lo que en el caso general no se tendrá $\tilde{X}_{n\sigma}$ y $\tilde{X}_{-n\sigma}$ diferentes de cero a la vez para ningún modo del campo.

A partir de la hipótesis de respuesta lineal es posible obtener otra condición típica de la mecánica cuántica: la desigualdad de Heisenberg para la posición y el momento. En efecto, a partir de la ecuación (IV.2.3) obtenemos:

$$\langle X^{(0)} \rangle^2 = \sum_n \sum_\sigma \sum_{n'\sigma'} \left\{ \left[\tilde{X}_{n\sigma} \tilde{X}_{n'\sigma'} \exp(-i(\omega_n + \omega_{n'})t) \right] a_{n\sigma} a_{n'\sigma'} + \left[\tilde{X}_{n\sigma} \tilde{X}_{n'\sigma'}^* \exp(-i(\omega_n - \omega_{n'})t) \right] a_{n\sigma} a_{n'\sigma'}^* \right\} + \text{c.c.} \quad (4)$$

de donde:

$$\langle \langle X^{(0)} \rangle^2 \rangle = \sum_n \sum_\sigma |\tilde{X}_{n\sigma}|^2 \equiv \sigma_x^2 \quad (5)$$

Análogamente, para $p^{(0)}$:

$$\langle p^{(0)} \rangle^2 = m^2 \sum_n \sum_\sigma \sum_{n'} \sum_{\sigma'} \left\{ \left[-\omega_{nn'} \tilde{x}_{n\sigma} \tilde{x}_{n'\sigma'} \exp(-i(\omega_{nn'} + \omega_{n'n'})t) \right] a_{n\sigma} a_{n'\sigma'} + \left[\omega_{nn'} \tilde{x}_{n\sigma} \tilde{x}_{n'\sigma'}^* \exp(-i(\omega_{nn'} - \omega_{n'n'})t) \right] a_{n\sigma} a_{n'\sigma'}^* \right\} + \text{c.c.} \quad (6)$$

entonces:

$$\langle \langle p^{(0)} \rangle^2 \rangle = m^2 \sum_n \sum_\sigma \omega_n^2 |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \equiv \sigma_p^2 \quad (7)$$

De (5) y (7) podemos ver que:

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 = m^2 \sum_n \sum_\sigma \sum_{n'} \sum_{\sigma'} |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 |\tilde{x}_{n'\sigma'}|^2 \omega_n^2 \geq \left[m \sum_n \sum_\sigma \omega_n |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \right]^2$$

Usando la condición de cuantización (ecuación (2)):

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \frac{\hbar}{4} \approx \frac{1}{4} \left[\langle x^{(0)} \rangle \langle p^{(0)} \rangle \right]^2 \quad (8)$$

Vemos, entonces, que en la nueva formulación de la EDE la desigualdad de Heisenberg para x y p aparece de manera natural, con el poissoniano jugando el papel del conmutador. En esta derivación de la desigualdad se calcularon promedios sobre las diferentes realizaciones del campo estocástico de fondo, por lo que resulta evidente que se refieren a dispersiones sobre un onsenble de sistemas en interacción con dicho campo, y de ninguna manera implican que la posición y el momento de una sola partícula no estén definidos a la vez. Además, debido a que la hipótesis de respuesta lineal es válida sólo cuando se ha alcanzado el régimen cuántico, no existe ninguna razón para suponer que la desigualdad (8) se cumpla para tiempos anteriores. De hecho, en esta visión se esperaría que las desigualdades de Heisenberg pudieran violarse arbitrariamente antes de alcanzar ese régimen, lo que representa

una discrepancia fundamental con la mecánica cuántica que abre, en principio, la posibilidad de que en algún momento pueda determinarse experimentalmente cual de las dos teorías describe mejor a la naturaleza.

4. Balance energético detallado y transiciones radiativas.

Uno de los argumentos que se utilizaron a favor de la hipótesis de respuesta lineal fué el hecho de que sólo de esta forma sería posible, en principio, satisfacer una condición de balance energético detallado. Nuestra intención ahora es verificar que, efectivamente, dicha condición puede cumplirse bajo ciertas circunstancias.

En el capítulo II se encontró que el cambio en la energía media de la partícula está dado por:

$$P_t \left\langle \frac{dH}{dt} \right\rangle = m\tau P_t \langle \ddot{x} \cdot \dot{x} \rangle + e P_t \langle E \cdot \dot{x} \rangle$$

La condición de balance energético global es, entonces (ecuación (II.4.6)):

$$m\tau P_t \langle \ddot{x} \cdot \dot{x} \rangle + e P_t \langle E \cdot \dot{x} \rangle = 0 \quad (1)$$

Puede parecer contradictorio utilizar la condición anterior ya que ésta se obtuvo como una consecuencia directa de la ecuación de Braffort-Marshall, cuya validez ha sido cuestionada varias veces en este trabajo. Sin embargo, hemos mostrado que esta ecuación es incorrecta, fundamentalmente, a orden cero en e . A ordenes mayores en la carga eléctrica la ecuación de B-M funciona,

por lo menos en promedio, adecuadamente. La hipótesis de respuesta lineal se ha propuesto, precisamente, con el fin de incluir los posibles efectos de la interacción a orden cero con el campo de fondo. Debido a esto, resulta razonable suponer que el sistema puede describirse de manera satisfactoria si se utiliza la hipótesis de respuesta lineal y la ecuación de B-M a ordenes mayores en e .

Si desarrollamos la expresión (1) a segundo orden en e encontramos:

$$\text{tr } P_1 \langle \tilde{x}^{(0)} \cdot \dot{x}^{(0)} \rangle + e P_1 \langle E \cdot \dot{x}^{(0)} \rangle + e^2 P_1 \langle E \cdot \dot{x}^{(1)} \rangle = 0 \quad (2)$$

En el desarrollo realizado en el capítulo II, el segundo término de la expresión anterior se anulaba debido al hecho de que $x^{(0)}$ era independiente del campo estocástico de fondo y el promedio de E sobre las realizaciones del campo es cero. En este caso, la hipótesis de respuesta lineal implica una dependencia de $x^{(0)}$ en las amplitudes $a_{n\sigma}$ y $a_{n\sigma}^*$, por lo que el segundo término de la ecuación (2) debe, en principio, incluirse.

Usando la expresión para el campo eléctrico (ecuación (IV.1.3)) y la expresión para $x^{(0)}$ encontramos:

$$\begin{aligned} \langle E \cdot \dot{x}^{(0)} \rangle &= \left\langle \sum_n \sum_\sigma \sum_{n'} \sum_{\sigma'} \left[\frac{2\pi\hbar}{V} \right]^{1/2} \omega_n^{1/2} \left[i a_{n\sigma} \exp(-i\omega_n t) + \text{c.c.} \right] \right. \\ &\quad \left. \hat{\epsilon}_{n\sigma} \cdot \left[i\omega_n \tilde{x}_{n\sigma} a_{n\sigma} \exp(-i\omega_n t) + \text{c.c.} \right] \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_n \sum_\sigma \left[\frac{2\pi\hbar}{V} \right]^{1/2} \omega_n^{3/2} \hat{\epsilon}_{n\sigma} \cdot \left[\tilde{x}_{n\sigma}^* + \tilde{x}_{n\sigma} \right] \end{aligned}$$

En lo sucesivo consideraremos partículas sin spin. Entonces, de acuerdo a la discusión de la sección 2, se tendrá que $\tilde{x}_{n1} = \tilde{x}_{n2} \equiv \tilde{x}_n$, con $\sigma = 1, 2$. La expresión anterior se reduce a:

$$\langle E \cdot \dot{x}^{(0)} \rangle = \frac{1}{2} \sum_n \left[\frac{2\pi\hbar}{V} \right]^{1/2} \omega_n^{1/2} \left[\tilde{x}_n^{(1)} + \tilde{x}_n \right] \cdot \sum_\sigma \hat{\epsilon}_{n\sigma}$$

Al sumar sobre las polarizaciones la ecuación anterior se anula debido a que por cada modo del campo existe otro con la misma frecuencia que se propaga en la dirección opuesta y que tiene las polarizaciones invertidas. Entonces, la ecuación (2) toma la misma forma que tenía en el capítulo II:

$$m\gamma \mathbb{P}_i \cdot \dot{x}^{(0)} \cdot \dot{x}^{(0)} + e^2 \mathbb{P}_i \cdot (E \cdot \dot{x}^{(0)}) = 0 \quad (3)$$

En la ecuación anterior $x^{(1)}$ está dado por la misma expresión que en el capítulo II (ecuación (II.4.5)). Esto se debe a que dicha expresión depende únicamente de la estructura de la ecuación para $x^{(0)}$, y no de la fuerza explícita que se utilice. Así, si a la fuerza externa se le añade la fuerza de interacción con el campo a orden cero en e , la expresión para $x^{(0)}$ no se ve alterada.

La ecuación (3) puede reescribirse como una suma sobre los diferentes modos del campo utilizando la hipótesis de respuesta lineal. Para ello, partimos de la expresión para $x^{(1)}$ (ecuación (II.4.5)):

$$x_i^{(1)} = \sum_j \int_{-\infty}^t \frac{\partial x_i^{(0)}(t')}{\partial p_j^{(0)}(t')} E_j(t') dt' \quad (4)$$

Como $\partial x_i^{(0)}(t)/\partial p_j^{(0)}(t) = \left[x_j^{(0)}(t), x_i^{(0)}(t) \right]$ y en el régimen cuántico los paréntesis de Poisson se sustituyen por poissonianos. Tendremos:

$$x_i^{(1)} = \frac{i}{\hbar} \sum_j \int_{-\infty}^t \langle x_j^{(0)}(t') x_i^{(0)}(t) \rangle E_j(t') dt' \quad (5)$$

Para el poissoniano se obtiene:

$$\langle x_i^{(0)}(t') x_i^{(0)}(t) \rangle = \sum_{n\sigma} \left[\tilde{x}_{n\sigma} \tilde{x}_{n\sigma}^* \exp(-i\omega_n(t-t')) - \text{c.c.} \right]$$

Aun cuando consideramos partículas sin spin, conservaremos el índice σ en los coeficientes $\tilde{x}_{n\sigma}$ debido a que de esta forma resulta más sencillo identificar a que modo del campo nos referimos una vez que han desaparecido las amplitudes $a_{n\sigma}$ y $a_{n\sigma}^*$.

En general puede esperarse que $\tilde{x}_{n\sigma_1}$ y $\tilde{x}_{n\sigma_2}$ no sean distintos de cero a la vez. Esto se debe al hecho de que los movimientos en distintos ejes serán producidos por modos diferentes del campo, que aun en el caso que tengan la frecuencia tendrán diferente vector de onda. Entonces, el poissoniano se reducirá a:

$$\langle x_j^{(0)}(t') x_i^{(0)}(t) \rangle = 2i\delta_{ij} \sum_{n\sigma} |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \sin \omega_n(t'-t) \quad (6)$$

Introduciendo la ecuación anterior en la expresión para $x_i^{(1)}$ se obtiene:

$$x_i^{(1)} = -\frac{2}{\hbar} \int_{-\infty}^t \sum_{n\sigma} |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \sin \omega_n(t'-t) E_i(t') dt' \quad (7)$$

A partir de esta expresión podemos calcular el segundo término de la ecuación (3):

$$e^{2i} P_{\nu} \langle E \cdot \tilde{X}^{(1)} \rangle = \frac{2e^2}{\hbar} \sum_{\nu} \sum_{n\sigma} |\tilde{X}_{n\sigma}|^{2\omega_n} \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T \int_{-m}^t \cos \omega_n (t'-t) \langle E_{\nu}(t') E_{\nu}(t) \rangle dt' dt$$

Haciendo el cambio de variable $u = t-t'$, y usando el hecho de que $\langle E_{\nu}(t') E_{\nu}(t) \rangle = \varphi(t'-t)$, con φ dada por la ecuación (II.2.25):

$$\varphi(u) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega u d\omega$$

obtenemos:

$$e^{2i} P_{\nu} \langle E \cdot \tilde{X}^{(1)} \rangle = \frac{2e^2}{\hbar} \sum_{\nu} \sum_{n\sigma} |\tilde{X}_{n\sigma}|^{2\omega_n} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega u \cos \omega_n u du d\omega = \frac{e^2}{\hbar} \pi \sum_{\nu} \sum_{n\sigma} |\tilde{X}_{n\sigma}|^{2\omega_n} \int_0^{\infty} S(\omega) (\delta(\omega+\omega_n) + \delta(\omega-\omega_n)) d\omega$$

de donde, finalmente:

$$e^{2i} P_{\nu} \langle E \cdot \tilde{X}^{(1)} \rangle = \frac{\pi e^2}{\hbar} \sum_{\nu} \sum_{n\sigma} |\tilde{X}_{n\sigma}|^{2\omega_n} S(\omega_n) \quad (8)$$

Para el otro término de la ecuación (3) se tiene, también a partir de (5):

$$m\tau P_{\nu} \langle \tilde{X}^{(0)} \cdot \tilde{X}^{(0)} \rangle = -m\tau \sum_{\nu} \sum_{n\sigma} |\tilde{X}_{n\sigma}|^{2\omega_n^4} \quad (9)$$

La condición (3) se reduce, entonces, a:

$$\sum_{\nu} \sum_{n\sigma} \left\{ -m\tau |\tilde{X}_{n\sigma}|^{2\omega_n^4} + \frac{\pi e^2}{\hbar} |\tilde{X}_{n\sigma}|^{2\omega_n} S(\omega_n) \right\} = 0 \quad (10)$$

Si queremos que haya balance detallado, la condición debe satisfacerse para cada frecuencia por separado. En ese caso se tendrá:

$$-m\tau \left[|\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \omega_n^4 + |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2 \omega_{-n}^4 \right] + \frac{\pi e^2}{\hbar} \left[|\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \omega_n S(\omega_n) + |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2 \omega_{-n} S(\omega_{-n}) \right] = 0$$

Como $\omega_{-n} = -\omega_n$ se obtiene, tomando en cuenta que $S(\omega) = S(-\omega)$:

$$-m\tau\omega_n^4 \left[|\tilde{x}_{n\sigma}|^2 + |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2 \right] + \frac{\pi e^2}{\hbar} \omega_n S(\omega_n) \left[|\tilde{x}_{n\sigma}|^2 - |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2 \right] = 0 \quad (11)$$

El término del lado izquierdo de la expresión anterior es el la energía media intercambiada por unidad de tiempo con los modos de frecuencia ω_n , que debe ser cero cuando haya un balance energético detallado.

Sustituyendo el valor de τ y despejando $S(\omega_n)$ se encuentra:

$$S(\omega_n) = \frac{2\hbar}{3\pi c^3} \omega_n^3 \frac{|\tilde{x}_{n\sigma}|^2 + |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2}{|\tilde{x}_{n\sigma}|^2 - |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2} \quad (12)$$

Supongamos que $\omega_n > 0$, entonces tendríamos que $\omega_{-n} < 0$, y en el estado base de cualquier sistema los coeficientes $\tilde{x}_{-n\sigma}$ serán iguales a cero. En ese caso, la ecuación (12) se reduce a:

$$S(\omega_n) = \frac{2\hbar}{3\pi c^3} \omega_n^3 \quad \text{con } \omega_n > 0 \quad (13)$$

Vemos, entonces, que en el estado base de un sistema arbitrario se cumple la condición de balance detallado únicamente si el espectro del campo de fondo está dado por la expresión (13), es decir, si el espectro tiene precisamente la forma que propone la EDE. Este resultado es de fundamental importancia, ya que muestra que no es necesario cambiar la forma del espectro del punto cero para lograr recuperar el balance detallado de la mecánica cuántica.

Quando el sistema no se encuentra en su estado base, la condición de balance detallado exige que el espectro de fondo esté dado através de la ecuación (12). De la estructura de esta ecuación resulta evidente que para un campo de fondo físico (campo de vacío, campo térmico, etc.) no necesariamente habrá balance energético detallado. En realidad, esto no representa ningún problema, ya que sabemos que la presencia de este tipo de campos induce transiciones entre los diferentes estados accesibles a la partícula. Sólo el estado base es realmente estable, y esto únicamente si el sistema se encuentra en interacción con el campo de vacío.

Si no se exige que exista un balance energético detallado en un estado arbitrario, el cambio medio en la energía de la partícula debido a la interacción con los modos de frecuencia ω_n seguirá estando dado por el término del lado izquierdo de la ecuación (11):

$$\frac{dE_{n\sigma}}{dt} = -m\tau\omega_n^4 \left[|\tilde{x}_{n\sigma}|^2 + |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2 \right] + \frac{ueZ}{\hbar} \omega_n S(\omega_n) \left[|\tilde{x}_{n\sigma}|^2 - |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2 \right] \quad (14)$$

En general, podemos descomponer a la densidad espectral del campo de fondo como una suma de dos contribuciones, una debida al campo del punto cero y otra debida al campo externo. Entonces:

$$S(\omega) = S_0(\omega) + S_e(\omega) \quad (15)$$

$$\text{con } S_0(\omega) = \frac{2\hbar}{3\pi c^3} \omega^3.$$

Sustituyendo (15) en la ecuación (14) se encuentra:

$$\frac{dE_{n\sigma}}{dt} = \left[\frac{\pi e Z}{\hbar} \omega_n S_0(\omega_n) \right] |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 - \left[\frac{\pi e Z}{\hbar} \omega_n S_e(\omega_n) + \frac{4eZ}{3c^3} \omega_n^4 \right] |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2 \quad (16)$$

Como la densidad espectral de energía S_{ω} es positiva o nula, la ecuación anterior muestra que el coeficiente $|\tilde{x}_{n\sigma}|^2$ está asociado a un aumento en la energía media de la partícula, es decir, a transiciones a estados de energía mayor, mientras que $|\tilde{x}_{-n\sigma}|^2$ está asociado a una disminución de energía y a transiciones a estados con energía menor. La ecuación (15) confirma, entonces, la discusión de la sección anterior. Podemos notar, además, que sólo puede existir una ganancia media en la energía en el caso en que exista un campo externo tal que $S_{\omega} \neq 0$. En contraste, habrá pérdida de energía aun cuando se tenga $S_{\omega} = 0$, excepto para un n en el caso en que $|\tilde{x}_{-n\sigma}|^2 = 0$ (por ejemplo en el estado base). Si llamamos transiciones espontáneas a aquellas que se dan en ausencia de campo externo (debidas tanto a la pérdida de energía por reacción de radiación como a la inducida por el campo del punto cero), lo anterior significa que no hay, en ningún caso, absorción espontánea de energía, mientras que en general sí hay emisión espontánea⁹.

Podemos avanzar aun más si definimos a $P_{n\sigma}^{\circ}$ como la probabilidad de absorción de energía inducida por el campo externo, y a $P_{n\sigma}^0$ como la probabilidad de absorción en ausencia de campo externo (probabilidad espontánea), y a las correspondientes probabilidades de emisión $P_{-n\sigma}^{\circ}$ y $P_{-n\sigma}^0$. Si suponemos que en una transición inducida por el modo del campo (n,σ) se intercambia una

⁹ Una discusión acerca de las transiciones radiativas puede verse en M. Alcubierre, A. M. Celto, L. de la Peña y N. S. Lozano, 1988.

energía $\hbar\omega_n$,⁴ el cambio medio en la energía por unidad de tiempo estará dado por:

$$\frac{dE_{n\sigma}}{dt} = \hbar\omega_n \left[\langle P_{n\sigma}^* + P_{n\sigma}^0 \rangle - \langle P_{-n\sigma}^* + P_{-n\sigma}^0 \rangle \right] \quad (17)$$

Comparando las ecuaciones (16) y (17) vemos que:

$$P_{n\sigma}^* = \left[\frac{4\pi^2 e^2}{\hbar^2} \rho_e(\omega_n) \right] |\tilde{X}_{n\sigma}|^2 \equiv B_{n\sigma} \rho_e(\omega_n) \quad (18.a)$$

$$P_{-n\sigma}^* = \left[\frac{4\pi^2 e^2}{\hbar^2} \rho_e(\omega_n) \right] |\tilde{X}_{-n\sigma}|^2 \equiv B_{-n\sigma} \rho_e(\omega_n) \quad (18.b)$$

$$P_{n\sigma}^0 = 0 \equiv A_{n\sigma} \quad (18.c)$$

$$P_{-n\sigma}^0 = \frac{1}{\hbar} \frac{4e^2}{3c^3} \omega_n^3 |\tilde{X}_{-n\sigma}|^2 \equiv A_{-n\sigma} \quad (18.d)$$

en donde se ha usado el hecho de que $S_e(\omega) = 4\pi\rho_e(\omega)/3$.

Los coeficientes $A_{\pm n\sigma}$ y $B_{\pm n\sigma}$ dados por las ecuaciones (18) corresponden precisamente a los conocidos coeficientes A y B de Einstein para las probabilidades de transición, cuya expresión explícita fué encontrada por primera vez por Dirac⁵ al acoplar el sistema atómico con un campo electromagnético externo en segunda cuantización. En la derivación anterior se han obtenido las mismas expresiones de manera general empleando exclusivamente los postulados de la EDE, salvo por la suposición de que la diferencia de energía entre dos estados relacionados a través del modo (n,σ) es igual a $\hbar\omega_n$.

⁴Esta suposición se toma, por el momento, directamente de la teoría cuántica. Sin embargo, confiamos en que pronto sea posible demostrarla a partir de los postulados de la EDE.

⁵P. A. M. Dirac, (1927).

Si estudiamos ahora un sistema que sólo posea dos estados denotados por a y b con energías E_a y E_b respectivamente y que cumplen además con que $E_a > E_b$, tendremos que ambos niveles interactúan únicamente con un modo del campo (ya que sólo hay una transición posible), cuya frecuencia será:

$$\omega_n = \frac{E_b - E_a}{\hbar} \equiv \omega_{ab} = -\omega_{ba} > 0 \quad (19)$$

El estado a solamente puede ganar energía por lo que el coeficiente $\tilde{x}_{-n\sigma}^a$ correspondiente al modo del campo (n,σ) con el que la partícula interactúa debe ser cero, mientras que el estado b sólo puede perder energía y de esta forma su coeficiente $\tilde{x}_{n\sigma}^b$ debe anularse. Entonces:

$$x_a^{(0)} = \tilde{x}_{n\sigma}^a a_{n\sigma} \exp(-i\omega_n t) + c.c.$$

$$x_b^{(0)} = \tilde{x}_{-n\sigma}^b a_{-n\sigma} \exp(i\omega_n t) + c.c.$$

Como $\tilde{x}_{n\sigma}^{a*}$ representa la transición $b \rightarrow a$ debe cumplirse que:

$$\tilde{x}_{n\sigma}^{a*} = \tilde{x}_{n\sigma}^b$$

Supongamos ahora que tenemos N_a partículas en el estado a y N_b en el estado b y que el sistema se encuentra en equilibrio a una temperatura T . Para que exista equilibrio debe tenerse que:

$$\Delta N_a = \Delta N_b = 0$$

pero:

$$\Delta N_a = N_b P_{-b} - N_a P_a =$$

$$= N_b \left[\frac{4\pi z e^2}{3\hbar^2} \rho_e(\omega_{ab}) + \frac{4e^2}{3\hbar c^3} \omega_{ab}^3 \right] |\tilde{x}_{n\sigma}^b|^2 - N_a \left[\frac{4\pi z e^2}{3\hbar^2} \rho_e(\omega_{ab}) \right] |\tilde{x}_{n\sigma}^a|^2$$

De la expresión anterior obtenemos que la densidad espectral de energía que corresponde al equilibrio queda dada por:

$$\rho_e(\omega_{ab}) = \frac{\hbar \omega_{ab}^3}{\pi^2 c^3} \frac{N_b}{N_a - N_b}$$

Si suponemos ahora que la distribución de partículas obedece la estadística de Maxwell-Boltzman, de manera que:

$$\frac{N_a}{N_b} = \exp(-\beta(E_a - E_b))$$

con $\beta = 1/KT$ y T la temperatura absoluta, se obtiene (tomando $\omega = \omega_{ab}$):

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\beta \hbar \omega) - 1} \quad (20)$$

que es precisamente la distribución de Planck. Este resultado es verdaderamente importante ya que muestra, mediante consideraciones muy sencillas y un aparato matemático extremadamente simple, que el formalismo utilizado tiene una gran capacidad predictiva.

Además como:

$$\rho(\omega) = \rho_o(\omega) + \rho_e(\omega)$$

se obtiene para la densidad espectral de energía del campo de fondo en equilibrio térmico con materia a temperatura $T = 1/k\beta$:

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \left[\frac{1}{\exp(\beta \hbar \omega) - 1} + \frac{1}{2} \right] = \rho_0(\omega) \tanh \left[\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right] \quad (21)$$

Es muy importante hacer énfasis en el hecho de que la distribución de Planck completa (ecuación (21)) se ha obtenido sin la necesidad de suponer la cuantización del campo ni la materia. Aun cuando si se utilizó la hipótesis de que en cada transición de un estado a a otro estado b el sistema mecánico intercambia una energía $\Delta E = \hbar \omega_{ab}$, esto no es equivalente a introducir una cuantización (vease, además, la sección 6 donde se obtiene ese resultado para el oscilador de manera natural).

5. El hamiltoniano con la hipótesis de respuesta lineal.

En la primera sección de este capítulo discutimos el comportamiento dinámico de un sistema sujeto a la interacción con el campo de fondo. En esa sección encontramos que, al orden más bajo en la carga eléctrica e , las ecuaciones de movimiento que describen al sistema una vez que se ha alcanzado el régimen cuántico son:

$$\langle \dot{x}^{(0)}; H^{(0)} \rangle = i\hbar \dot{x}^{(0)} \quad (1.a)$$

$$\langle \dot{p}^{(0)}; H^{(0)} \rangle = i\hbar \dot{p}^{(0)} \quad (1.a)$$

En las expresiones anteriores, cualquier referencia explícita al campo de fondo ha desaparecido, obteniéndose expresiones

enteramente análogas a las de la mecánica cuántica, con los poissonianos jugando el papel de los conmutadores. Debido a que con la hipótesis de respuesta lineal, las variables $x^{(0)}$ y $p^{(0)}$ quedan expresadas como funciones de las amplitudes del campo, cualquier función de estas variables estará también expresada en términos de dichas amplitudes.

Nos interesa, en particular, encontrar una expresión de este tipo para el hamiltoniano de la partícula. Esto puede hacerse partiendo de la ecuación de movimiento (1.a). De la hipótesis de respuesta lineal tenemos que:

$$x^{(0)} = -i \sum_{n\sigma} \tilde{x}_{n\sigma} \omega_n a_{n\sigma} \exp(-i\omega_n t) + \text{c.c.} \quad (2)$$

Además, para el poissoniano de $x^{(0)}$ y H se encuentra:

$$\langle x^{(0)} \Pi^{(0)} \rangle = \sum_{n\sigma} \left[\langle \tilde{x}_{n\sigma} \exp(-i\omega_n t) \rangle \frac{\partial H}{\partial a_{n\sigma}^*} - \langle \tilde{x}_{n\sigma}^* \exp(i\omega_n t) \rangle \frac{\partial H}{\partial a_{n\sigma}} \right] \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1.a) obtenemos:

$$\sum_{n\sigma} \left\{ f_{\omega_n} \left[\tilde{x}_{n\sigma} a_{n\sigma} \exp(-i\omega_n t) - \tilde{x}_{n\sigma}^* a_{n\sigma}^* \exp(i\omega_n t) \right] - \left[\tilde{x}_{n\sigma} \exp(-i\omega_n t) \right] \frac{\partial H^{(0)}}{\partial a_{n\sigma}^*} - \left[\tilde{x}_{n\sigma}^* \exp(i\omega_n t) \right] \frac{\partial H^{(0)}}{\partial a_{n\sigma}} \right\} = 0 \quad (4)$$

Como las exponenciales son linealmente independientes entre sí, debe anularse por separado el coeficiente de cada una de ellas. Usando el hecho de que $\omega_{-n} = -\omega_n$, esta condición implica:

$$f_{\omega_n} \tilde{x}_{n\sigma} a_{n\sigma} - \tilde{x}_{n\sigma} \frac{\partial H^{(0)}}{\partial a_{n\sigma}^*} - f_{\omega_{-n}} \tilde{x}_{-n\sigma}^* a_{-n\sigma}^* - \tilde{x}_{-n\sigma}^* \frac{\partial H^{(0)}}{\partial a_{-n\sigma}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{Re}_n \left[\tilde{X}_{n\sigma} a_{n\sigma} + \tilde{X}_{-n\sigma}^* a_{-n\sigma}^* \right] = \tilde{X}_{n\sigma} \frac{\partial H^{(0)}}{\partial a_{n\sigma}^*} - \tilde{X}_{-n\sigma}^* \frac{\partial H^{(0)}}{\partial a_{-n\sigma}} \quad (5)$$

La solución más general de la ecuación anterior, bilineal en las a's, tiene la forma:

$$H^{(0)} = \sum_{n\sigma}^{\omega_n > 0} \left\{ Q_{n\sigma} a_{n\sigma} a_{n\sigma}^* + Q_{-n\sigma} a_{-n\sigma} a_{-n\sigma}^* + R_{n\sigma} a_{n\sigma} a_{-n\sigma} + R_{n\sigma}^* a_{n\sigma}^* a_{-n\sigma}^* + S_{n\sigma} a_{n\sigma}^2 + S_{-n\sigma} a_{-n\sigma}^2 + S_{n\sigma}^* a_{n\sigma}^2 + S_{-n\sigma}^* a_{-n\sigma}^2 + T_{n\sigma} a_{n\sigma} a_{-n\sigma}^* + T_{n\sigma}^* a_{n\sigma}^* a_{-n\sigma} \right\} \quad (6)$$

con $Q_{n\sigma}$ y $Q_{-n\sigma}$ reales. Sustituyendo (6) en (5), e igualando a cero los coeficientes de las diferentes amplitudes, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\text{Re}_n \tilde{X}_{n\sigma} = \tilde{X}_{n\sigma} Q_{n\sigma} - \tilde{X}_{-n\sigma}^* R_{n\sigma} \quad (7.a)$$

$$\text{Re}_n \tilde{X}_{-n\sigma}^* = \tilde{X}_{n\sigma}^* R_{n\sigma}^* - \tilde{X}_{-n\sigma}^* Q_{-n\sigma} \quad (7.b)$$

$$0 = 2\tilde{X}_{n\sigma} S_{n\sigma}^* - \tilde{X}_{-n\sigma}^* T_{n\sigma}^* \quad (7.c)$$

$$0 = \tilde{X}_{n\sigma} T_{n\sigma}^* - 2\tilde{X}_{-n\sigma}^* S_{-n\sigma} \quad (7.d)$$

y sus correspondientes complejas conjugadas. Podemos ver en las ecuaciones anteriores que los coeficientes Q y R son independientes de S y T . Como estos dos últimos no intervienen en el valor esperado de $H^{(0)}$ (ver ecuación (6)) y además no quedan completamente determinados por las ecuaciones (7.c), (7.d) y sus complejas conjugadas, pueden elegirse como cero sin mayores consecuencias.

Los coeficientes Q y R se determinan a partir de (7.a) y (7.b), obteniéndose:

$$R_{n\sigma} = \frac{\tilde{x}_{-n\sigma}}{\tilde{x}_{n\sigma}} (f_{\omega_n} + Q_{-n\sigma}) \quad (8)$$

y:

$$|\tilde{x}_{n\sigma}|^2 (Q_{n\sigma} + f_{\omega_n}) = |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2 (Q_{-n\sigma} + f_{\omega_n}) \quad (9)$$

$$\text{Sea: } \Delta_{n\sigma} = \frac{|\tilde{x}_{n\sigma}|^2}{(Q_{-n\sigma} + f_{\omega_n})} = \frac{|\tilde{x}_{-n\sigma}|^2}{(Q_{n\sigma} - f_{\omega_n})}$$

entonces, se tiene:

$$Q_{n\sigma} = \frac{|\tilde{x}_{-n\sigma}|^2}{\Delta_{n\sigma}} + f_{\omega_n} \quad Q_{-n\sigma} = \frac{|\tilde{x}_{n\sigma}|^2}{\Delta_{n\sigma}} - f_{\omega_n} \quad (10)$$

con $\Delta_{n\sigma}$ una función indeterminada. Además, de (8), $R_{n\sigma}$ resulta ser:

$$R_{n\sigma} = \frac{\tilde{x}_{n\sigma} \tilde{x}_{-n\sigma}}{\Delta_{n\sigma}} \quad (11)$$

Sustituyendo (10) y (11) en (6) encontremos, para el hamiltoniano:

$$H^{(0)} = \sum_{n\sigma}^{\omega_n > 0} \frac{1}{\Delta_{n\sigma}} \left\{ |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2 a_{n\sigma} a_{n\sigma}^* + |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 a_{-n\sigma} a_{-n\sigma}^* + \Delta_{n\sigma} f_{\omega_n} (a_{n\sigma} a_{n\sigma}^* - a_{-n\sigma} a_{-n\sigma}^*) + (\tilde{x}_{n\sigma} \tilde{x}_{-n\sigma} a_{n\sigma} a_{-n\sigma} + \text{c.c.}) \right\} \quad (12)$$

La solución anterior es importante sólo para aquellos sistemas en donde haya una degeneración en la separación de los niveles de energía (como el oscilador armónico), ya que en otro caso no se tendrán $\tilde{x}_{n\sigma}$ y $\tilde{x}_{-n\sigma}$ diferentes de cero a la vez. Para sistemas sin degeneración, las ecuaciones (7.a) y (7.b) implican que:

$$Q_{n\sigma} = \hbar\omega_n \quad Q_{-n\sigma} = -\hbar\omega_n \quad (13.a)$$

$$R_{n\sigma} = 0 \quad (13.b)$$

por lo que el hamiltoniano se reduce a:

$$H^{(0)} = \sum_{n\sigma} \sum_{\omega_n > 0} \hbar\omega_n a_{n\sigma} a_{n\sigma}^* - \sum_{n\sigma} \sum_{\omega_n > 0} \hbar\omega_n a_{-n\sigma} a_{-n\sigma}^* = \sum_{n\sigma} \hbar\omega_n Q_{n\sigma} a_{n\sigma} a_{n\sigma}^* \quad (14)$$

donde las sumas prima y doble prima se realizan sobre los modos para los cuales $\tilde{x}_{n\sigma}$ y $\tilde{x}_{-n\sigma}$ son distintos de cero respectivamente.

En el caso de sistemas degenerados, podemos encontrar una forma particular para $\Delta_{n\sigma}$ si pedimos que la función $Q_{n\sigma}$ tenga la forma:

$$Q_{\pm n\sigma} = W_{n\sigma} |\tilde{x}_{\pm n\sigma}|^2$$

con $W_{n\sigma} = W_{-n\sigma}$ y arbitraria por lo demás. En ese caso, la ecuación (10) implica que:

$$\Delta_{n\sigma} = \frac{|\tilde{x}_{n\sigma}|^2 - |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2}{\hbar\omega_n} \quad (15)$$

y $W_{n\sigma} = \frac{1}{\Delta_{n\sigma}}$, de donde se sigue que:

$$Q_{n\sigma} = |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \frac{\hbar\omega_n}{|\tilde{x}_{n\sigma}|^2 - |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2} \quad (16.a)$$

$$Q_{-n\sigma} = |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2 \frac{\hbar\omega_n}{|\tilde{x}_{n\sigma}|^2 - |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2} \quad (16.a)$$

$$R_{n\sigma} = \tilde{x}_{n\sigma} \tilde{x}_{-n\sigma} \frac{\hbar\omega_n}{|\tilde{x}_{n\sigma}|^2 - |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2} \quad (16.c)$$

El hamiltoniano se expresa, entonces, como:

$$H^{(0)} = \sum_{n\sigma}^{\infty} \sum_{n'\sigma'}^{\infty} \frac{\hbar\omega_n}{|\tilde{x}_{n\sigma}|^2 - |\tilde{x}_{-n\sigma'}|^2} \left\{ |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 a_{n\sigma}^* a_{n'\sigma'} + |\tilde{x}_{-n\sigma'}|^2 a_{-n\sigma'}^* a_{n'\sigma'} + (\tilde{x}_{n\sigma} \tilde{x}_{-n\sigma'} a_{n\sigma} a_{-n\sigma'} + \text{c.c.}) \right\} \quad (17)$$

De la expresión anterior se observa fácilmente que el valor esperado de $H^{(0)}$ resulta ser:

$$\langle H^{(0)} \rangle = \sum_{n\sigma}^{\infty} \sum_{n'\sigma'}^{\infty} \frac{\hbar\omega_n}{2} \frac{|\tilde{x}_{n\sigma}|^2 + |\tilde{x}_{-n\sigma'}|^2}{|\tilde{x}_{n\sigma}|^2 - |\tilde{x}_{-n\sigma'}|^2} \quad (18)$$

Hemos encontrado, entonces, una expresión para el valor medio del hamiltoniano de la partícula en términos de los coeficientes $\tilde{x}_{n\sigma}$, que, como hemos visto, son los análogos estocásticos de los elementos de matriz de la teoría cuántica. Sin embargo, no sabemos que tan general sea la validez de esta expresión debido a que no conocemos el alcance de la suposición que se utilizó para encontrar $\Delta_{n\sigma}$. En la siguiente sección tendremos oportunidad de aplicar la ecuación (17) a un sistema particular y ver cuales son sus consecuencias.

6. El oscilador armónico.

Con la intención de poner a prueba la validez del formalismo desarrollado en este capítulo estudiaremos el comportamiento del oscilador armónico. En el capítulo II se aplicó la condición de equilibrio a este sistema y se encontró una solución satisfactoria; sin embargo, de las discusiones de las secciones

anteriores podemos esperar que el nuevo formalismo sea capaz de dar una descripción más profunda de este sistema.

El hamiltoniano del oscilador armónico es, a orden cero en ϵ :

$$H^{(0)} = \frac{(p^{(0)})^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(x^{(0)})^2 \quad (1)$$

En el cálculo de las desigualdades de Heisenberg se encontraron expresiones para $(p^{(0)})^2$ y $(x^{(0)})^2$, que al sustituir en la ecuación (1) dan:

$$H^{(0)} = \frac{m}{2} \sum_n \sum_n \left\{ (\omega_0^2 - \omega_n \omega_{n'}) \left[\tilde{x}_n \tilde{x}_{n'} a_n a_{n'} \exp(-i(\omega_n + \omega_{n'})t) + \text{c.c.} \right] + (\omega_0^2 + \omega_n \omega_{n'}) \left[\tilde{x}_n \tilde{x}_{n'}^* a_n a_{n'}^* \exp(-i(\omega_n - \omega_{n'})t) + \text{c.c.} \right] \right\} \quad (2)$$

En la ecuación (2) se ha omitido la suma sobre las polarizaciones del campo, debido a que no estamos interesados en el spin de la partícula. Además, la suma sobre n se ha sustituido por una suma en una dimensión ya que consideramos un oscilador unidimensional.

Por otro lado, en la sección anterior vimos que el hamiltoniano debe tener la forma (ecuación (IV.4.17)):

$$H^{(0)} = \sum_n^{\omega_n > 0} \hbar \omega_n \frac{1}{|\tilde{x}_n|^2 - |\tilde{x}_{-n}|^2} \left[|\tilde{x}_n|^2 a_n a_n^* + |\tilde{x}_{-n}|^2 a_{-n} a_{-n}^* + \langle \tilde{x}_n \tilde{x}_{-n} a_n a_{-n} + \text{c.c.} \rangle \right] = \sum_n \hbar \omega_n \frac{1}{|\tilde{x}_n|^2 - |\tilde{x}_{-n}|^2} \left[|\tilde{x}_n|^2 a_n a_n^* + \frac{1}{2} (\tilde{x}_n \tilde{x}_{-n} a_n a_{-n} + \text{c.c.}) \right] \quad (3)$$

Comparando (2) y (3) encontramos, en primer lugar, que:⁶

$$(\omega_0^2 + \omega_n \omega_{n'}) \left[\tilde{x}_n \tilde{x}_{n'}^* \exp(-i(\omega_n - \omega_{n'})t) + \text{c.c.} \right] = \frac{2}{m} \hbar \omega_n \frac{1}{|\tilde{x}_n|^2 - |\tilde{x}_{-n}|^2} |\tilde{x}_n|^2 \quad (4)$$

De la aquí vemos que para $n \neq n'$:

$$(\omega_0^2 + \omega_n \omega_{n'}) \tilde{x}_n \tilde{x}_{n'}^* = 0$$

Si ahora tomamos $\tilde{x}_n \neq 0$, la expresión anterior implica que:

$$\tilde{x}_{n'} = 0 \quad \text{ó} \quad \omega_{n'} = -(\omega_0^2 / \omega_n) \quad (5)$$

Es decir, si el oscilador interacciona con el modo n del campo ($\tilde{x}_n \neq 0$), sólo podrá interaccionar con aquellos otros modos n' tales que $\omega_{n'} = -(\omega_0^2 / \omega_n)$.

Consideremos ahora el caso $n = n'$. La ecuación (4) se reduce, entonces, a:

$$(\omega_0^2 + \omega_n^2) (2|\tilde{x}_n|^2) = \frac{2}{m} \hbar \omega_n \frac{1}{|\tilde{x}_n|^2 - |\tilde{x}_{-n}|^2} |\tilde{x}_n|^2$$

Si $\tilde{x}_n \neq 0$, se tendrá:

⁶El igualar las dos expresiones para el hamiltoniano puede hacerse en el caso del oscilador debido a que la expresión dada en términos de x y p resulta ser cuadrática en las amplitudes del campo. Esto no ocurrirá en general, por lo que aun no es evidente como generalizar este procedimiento.

$$|\tilde{x}_n|^2 - |\tilde{x}_{-n}|^2 = \frac{\hbar}{m} \omega_n \frac{1}{(\omega_0^2 + \omega_n^2)} \quad (6)$$

Para obtener la expresión anterior no se supuso nada acerca de \tilde{x}_{-n} , por lo que puede anularse.

Por otro lado, de las ecuaciones (2) y (3) sigue, también, que:

$$\begin{aligned} & (\omega_0^2 - \omega_{n,n'}) \tilde{x}_n \tilde{x}_{n'} \exp(-i(\omega_n + \omega_{n'})t) = \\ & \delta_{n,-n'} \frac{2}{m} \hbar \omega_n \frac{1}{|\tilde{x}_n|^2 - |\tilde{x}_{-n}|^2} \left(\frac{1}{2} \tilde{x}_n \tilde{x}_{-n} \right) \quad (7) \end{aligned}$$

Para $n = n'$, la condición anterior recupera la ecuación (6). Si, por el contrario, $n \neq n'$ y $\tilde{x}_n \neq 0$, se tendrá:

$$\tilde{x}_{n'} = 0 \quad \text{ó} \quad \omega_{n'} = (\omega_0^2 / \omega_n) \quad (8)$$

Las ecuaciones (5) y (8) se combinan para dar:

$$\tilde{x}_{n'} = 0 \quad \forall n' \neq \pm n \quad (9)$$

En particular, si $n = n'$, la ecuación (8) implica que:

$$\omega_n^2 = \omega_0^2 \quad (10)$$

De los resultados anteriores podemos concluir que el oscilador interactúa sólo con un modo n del campo, cuya frecuencia es precisamente la frecuencia propia del oscilador ($\omega_n = \omega_0$) y con el correspondiente modo $-n$ de frecuencia negativa.

Usando lo anterior, la ecuación (6) toma la forma:

$$|\tilde{x}_n|^2 - |\tilde{x}_{-n}|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0} \quad (11)$$

Podemos notar que la expresión anterior es precisamente la condición de cuantización (ecuación (IV.3.2)) para el caso del oscilador, y se encontró directamente a partir de la expresión para el hamiltoniano.

Si elegimos $\tilde{\chi}_n$ y $\tilde{\chi}_{-n}$ reales, la solución general de (11) es:

$$\tilde{\chi}_n(\alpha) = \left[\frac{\hbar}{2m\omega_0} (\alpha+1) \right]^{1/2} \quad (12.a)$$

$$\tilde{\chi}_{-n}(\alpha) = \left[\frac{\hbar}{2m\omega_0} \alpha \right]^{1/2} \quad (12.b)$$

con α , en principio, cualquier número positivo. Vemos, entonces, que la solución para el movimiento de oscilador depende de una constante arbitraria α , y por lo tanto no es única. Esto contrasta con el resultado del capítulo II, en el que nos restringimos, necesariamente, al estado base.

Para el caso particular del estado base se tendrá $\tilde{\chi}_{-n} = 0$. Para este estado, entonces, α debe anularse, y $\tilde{\chi}_n$ se reduce a:

$$\tilde{\chi}_n(\alpha=0) = \left[\frac{\hbar}{2m\omega_0} \right]^{1/2}$$

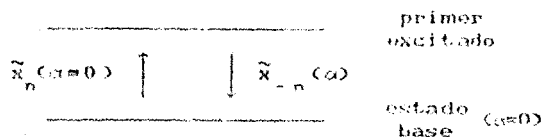
Sustituyendo este resultado en la expresión para el hamiltoniano (ecuación (3)) se obtiene:

$$\langle H^{(0)}(\alpha=0) \rangle = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$$

Este es precisamente el resultado que se encontró en el capítulo II. En el caso más general, el valor medio de $H^{(0)}$ resulta ser:

$$\langle H^{(0)}(\alpha) \rangle = \hbar \omega_0 \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \quad (13)$$

Como el estado base debe ser el de mínima energía, el siguiente estado accesible al oscilador debe ser precisamente aquél que al interactuar con el modo de frecuencia negativa haga una transición hacia el estado base. Gráficamente se tendrá:



Debido a que $\tilde{X}_n(\alpha=0)$ y $\tilde{X}_{-n}^*(\alpha)$ representan la misma transición, deberá tenerse que:

$$\tilde{X}_n(\alpha=0) = \tilde{X}_{-n}^*(\alpha)$$

Entonces:

$$\tilde{X}_{-n}^*(\alpha) = \tilde{X}_{-n}(\alpha) = \left[\frac{\hbar}{2m\omega_0} \right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \alpha = 1$$

Hemos encontrado que la α correspondiente al primer estado accesible después del estado base debe ser igual a la unidad. En forma enteramente análoga se puede mostrar que, en general, para el i -ésimo estado excitado se tendrá $\alpha = i$, es decir, α debe ser un número entero. De esta forma, se ha recuperado el espectro de niveles que predice la mecánica cuántica y los valores correctos de la energía media de cada uno de ellos.

Las ecuaciones (12) muestran que el valor de los coeficientes \tilde{X}_n y \tilde{X}_{-n} resulta ser, precisamente, el valor de los elementos de matriz que la mecánica cuántica predice para el oscilador armónico, resultado que corrobora la interpretación que habíamos

dato para dichos coeficientes. Además, debido a que α solo puede tomar valores enteros, la expresión (13) para el valor medio del hamiltoniano predice que la separación de energía entre niveles adyacentes es $h\omega_0 = h\omega_n$, con ω_n la frecuencia del modo del campo que induce la transición. Este hecho, que había sido postulado para determinar las probabilidades de transición, emerge de manera natural para este sistema.

Sin embargo, quizá el resultado de mayor importancia que se obtuvo en este cálculo sea la predicción de un espectro discreto de niveles de energía, que se obtiene por primera vez a partir de la EDE desde un punto de vista físico y no como un resultado formal a partir de manipulaciones matemáticas.

Finalmente, hacemos notar que la complejidad del cálculo crece enormemente cuando se intenta estudiar sistemas más complejos, por lo que se requiere desarrollar una herramienta matemática que nos permita atacar este tipo de problemas de manera más simple.

7. Relación entre el nuevo formalismo y la mecánica matricial.

Al aplicar los métodos usuales de la EDE, desarrollados en el capítulo II, al estudio del comportamiento de una partícula inmersa en el campo del punto cero, se supuso de manera implícita que ésta se encontraba en su estado de mínima energía o estado base. Esta suposición se basaba en el hecho de que el campo del punto cero no es capaz de llevar a la partícula a niveles superiores de energía, pero sí puede inducir transiciones de éstos:

al estado base. De esta forma, al realizar un promedio sobre un tiempo arbitrariamente largo, la partícula terminaría, inevitablemente, en su estado base.

Cuando se estudia el mismo sistema desde la perspectiva presentada en este capítulo la situación es distinta. En este caso, la dinámica queda gobernada por la condición de cuantización (ecuación (IV.3.2)) y las ecuaciones de movimiento (ecuaciones (IV.1.15)):

$$\sum_{n\sigma} \omega_n |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 = \hbar/2m \quad (1.a)$$

$$\hbar \dot{x}_i^{(0)} = \langle x_i^{(0)} | H^{(0)} \rangle \quad (1.b)$$

$$\hbar \dot{p}_i^{(0)} = \langle p_i^{(0)} | H^{(0)} \rangle \quad (1.c)$$

Hemos visto en el ejemplo del oscilador armónico que estas ecuaciones no determinan unívocamente el estado en el que se encuentra la partícula, por lo que nos obligan a restringir la descripción al estado base. En principio, entonces, podemos realizar una descripción en cualquier estado α , por lo que es necesario incluir ese índice en nuestras ecuaciones. En particular, la hipótesis de respuesta lineal será:

$$x_\alpha^{(0)} = \sum_{n\sigma} \tilde{x}_{n\sigma} a_{n\sigma} \exp(-i\omega_n t) + \text{c.c.} \quad (2)$$

en donde el índice cartesiano se ha eliminado para simplificar la notación. Hemos mencionado que la dinámica de la partícula determinará que ésta interaccione sólo con algunos modos del campo. Cuando una interacción de este tipo ocurra, la partícula intercambiará energía y momento con el modo correspondiente del

campo y pasará del estado α a otro estado β . La interacción con diferentes modos dará como resultado distintos estados finales.

En la ecuación (1) aparece una suma sobre los diferentes modos del campo. Esta suma puede cambiarse por una suma sobre los posibles estados β de la siguiente forma: denotemos por $(n\sigma)_{\alpha\beta}$ al modo del campo que produce la transición $\alpha \rightarrow \beta$, entonces se tendrá, en general

$$\tilde{x}_{n\sigma\alpha} = \sum_{\beta} \tilde{x}_{(n\sigma)_{\alpha\beta}} \delta_{n\sigma, (n\sigma)_{\alpha\beta}} \quad (3)$$

Es decir, el coeficiente $\tilde{x}_{n\sigma}$ asociado al estado α será diferente de cero sólo para los modos $(n\sigma)_{\alpha\beta}$ que produzcan transiciones de dicho estado α a alguno de los estados posibles β .

Sustituyendo (3) en (2) se obtiene:

$$x_{\alpha}^{(0)} = \sum_{\beta} \tilde{x}_{(n\sigma)_{\alpha\beta}} a_{(n\sigma)_{\alpha\beta}} \exp(-i\omega_{\alpha\beta} t) + \text{c.c.} \quad (4)$$

La expresión anterior contiene todavía información sobre la polarización σ y el vector de onda $k = 2\pi n/L$ del modo del campo que produce la transición $\alpha \rightarrow \beta$. Como esta información no es necesaria en la mayoría de las aplicaciones de la teoría, podemos eliminarla de la ecuación (4) obteniendo:

$$x_{\alpha}^{(0)} = \sum_{\beta} \tilde{x}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} \exp(-i\omega_{\alpha\beta} t) + \text{c.c.} \quad (5)$$

La importancia de la expresión (5) es que hemos logrado expresar a $x_{\alpha}^{(0)}$ como una suma, ya no sobre los modos del campo, sino sobre los diferentes estados accesibles al sistema. De hecho, con la notación anterior se tendrá que $\tilde{x}_{\alpha\beta} = \tilde{x}_{\beta\alpha}^*$, ya que

ambos se refieren a la misma transición, y por lo mismo $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ y $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}^*$.

Es posible reescribir entonces la condición de cuantización (ecuación (IV.3.2)) de la siguiente forma:

$$\hbar/2m = \sum_{\rho} \omega_{\alpha\beta} |\tilde{x}_{\alpha\beta}|^2 = \sum_{\rho} \omega_{\alpha\beta} \tilde{x}_{\alpha\beta} \tilde{x}_{\beta\alpha} \quad (6)$$

Tomando:

$$p^{(0)} = m\dot{x}^{(0)} = -im \sum_{\rho} \tilde{x}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} \exp(-i\omega_{\alpha\beta} t) + \text{c.c.} \equiv \sum_{\rho} \tilde{p}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} \exp(-i\omega_{\alpha\beta} t) + \text{c.c.}$$

la ecuación (6) toma la forma:

$$\begin{aligned} \hbar/2m &= -(i/2m) \sum_{\rho} (\tilde{x}_{\alpha\beta} \tilde{p}_{\beta\alpha} - \tilde{p}_{\alpha\beta} \tilde{x}_{\beta\alpha}) \\ \Rightarrow \sum_{\rho} (\tilde{x}_{\alpha\beta} \tilde{p}_{\beta\alpha} - \tilde{p}_{\alpha\beta} \tilde{x}_{\beta\alpha}) &= i\hbar \end{aligned} \quad (7)$$

Si ahora definimos dos matrices \hat{x} y \hat{p} , de manera que sus elementos sean los coeficientes $\tilde{x}_{\alpha\beta}$ y $\tilde{p}_{\alpha\beta}$, podemos ver que la ecuación (7) corresponde a los elementos de la diagonal de la ecuación matricial:

$$\left[\hat{x}, \hat{p} \right] = i\hbar \quad (8)$$

con $[,]$ el conmutador de las matrices. Esta ecuación puede extenderse a los elementos fuera de la diagonal debido a la independencia estadística de las amplitudes $a_{\alpha\beta}$ y $a_{\gamma\delta}$ correspondientes a distintos modos del campo.

Podemos ver, a partir de la ecuación (8), como el nuevo formalismo de la EDE nos lleva de manera natural a la condición de

cuantización de la mecánica matricial. La conexión entre ambas teorías puede llevarse aun más lejos⁷, mostrando que efectivamente, la EDE es capaz de fundamentar aceptablemente los postulados de mecánica matricial, lo que permite comprender muchas de las propiedades cuánticas de la materia.

⁷L. de la Peña y A. M. Cetto, (1987).

Bibliografía.

Alcubierre, M.; Cetto, A.M.; de la Peña, L.; Lozano, N.S. (1988), "Detailed Balance and Radiative Transitions in the New Approach to Stochastic Electrodynamics", PREPRINT, IFUNAM, 1988.

Dirac, P.A.M. (1927), "The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation", Proceedings of the Royal Society A-114, p.243, 1927.

Jimenez, J.L.; Peña, L. de la; Brody, T. (1980), "Zero Point Term in Cavity Radiation", Am. J. Phys. 48, p. 840, 1980.

Peña, L. de la; Cetto, A.M. (1986), "The Physics of Stochastic Electrodynamics", Il Nuovo Cimento 92B, p. 109, 1986.

Peña, L. de la; Cetto, A.M. (1987), "New Approach to Stochastic Electrodynamics for the Explanation of Quantum Phenomena", Preprint, IFUNAM 87-3, México 1987.

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos desarrollado una breve revisión de los fundamentos de la EDE. Esta teoría no sólo busca reproducir los resultados de la mecánica cuántica desde un punto de vista causal y objetivo, sino que pretende alcanzar una comprensión más profunda de los fenómenos físicos que ocurren en la escala atómica.

Poco a los éxitos alcanzados por la EDE en la descripción de sistemas simples como el oscilador armónico o el rotor rígido, hemos mostrado que para un sistema más complejo, como el átomo de hidrógeno, las predicciones de la teoría no coinciden con las cuánticas. En particular, vimos que la EDE predice que el átomo se autoioniza. Este fenómeno de autoionización no es por sí solo motivo suficiente para desacreditar la teoría, ya que podría incluso tener un origen físico. Sin embargo, el problema del átomo es solamente un reflejo de otro problema más grave: la EDE en su forma usual es, en general, incapaz de describir adecuadamente los sistemas no lineales.

De lo anterior es claro que, si queremos que la EDE sea capaz de tratar cualquier tipo de sistema cuántico, es necesario entenderla desde una perspectiva diferente. La hipótesis de respuesta lineal y la descripción del sistema en el régimen cuántico en términos de poissonianos se han propuesto, precisamente, como una posible vía para llevar esto a cabo. Aun cuando el origen de la respuesta lineal es, hasta el momento, oscuro, la gran capacidad predictiva de esta hipótesis nos

permite suponer que representa una descripción adecuada de la forma en que responde la partícula a la interacción con el campo de vacío.

En el último capítulo hemos mostrado como esta hipótesis, aunada al concepto de poissoniano, conduce a una amplia gama de resultados que coinciden con los cuánticos y que son aplicables a cualquier sistema. Entre ellos se encuentran la regla de suma de Thomas-Reiche-Kuhn, la desigualdad de Heisenberg para la posición y el momento, la descripción de las transiciones radiativas, incluyendo los coeficientes A y B de Einstein, la distribución de Planck. Quizá uno de los resultados más importantes sea el haber mostrado que para el estado base de un sistema arbitrario existe un balance energético detallado con el campo del punto cero. Además, hemos visto como el nuevo formalismo de la EDE conduce de manera natural a la mecánica matricial.

El haber sido capaces de obtener las expresiones correctas para las probabilidades de transición muestra que la nueva versión de la EDE no es sólo una teoría alterna a la mecánica cuántica, sino a toda la teoría cuántica, incluyendo a la electrodinámica cuántica.

Como tanto la hipótesis de respuesta lineal como la posibilidad de sustituir los paréntesis de Poisson por poissonianos se aplican sólo en el régimen cuántico, no podemos esperar obtener predicciones ajenas a las de la teoría cuántica. El problema de generalizar la EDE para situaciones fuera de este régimen, es decir, para tiempos arbitrariamente breves, está íntimamente ligado con el de entender el origen de la respuesta

lineal, es decir, entender a fondo la interacción campo-materia, y constituye un programa de investigación de gran importancia.

Existe todavía un gran número de problemas por resolver relacionados con esta nueva forma de la EDE que seguramente encierran una enorme riqueza física, y cuyo estudio nos puede permitir ahondar en la comprensión del comportamiento microscópico de la materia.

APENDICES

Apéndice 1. Sistemas multiperiodicos.

En el presente trabajo se desarrollan los métodos matemáticos necesarios para estudiar los sistemas multiperiodicos desde la perspectiva de la EDE. Se dice que un sistema tiene un movimiento clásico multiperiodico cuando la proyección de su trayectoria en el espacio fase sobre cada uno de los planos (q_i, p_i) ¹ es una curva periódica. Para que un movimiento se considere multiperiodico, no es necesario que su frecuencia sea la misma en todos los planos (q_i, p_i) . De hecho, si las frecuencias individuales no son múltiplos racionales entre sí, el sistema no recorrerá una trayectoria cerrada en el espacio físico, y sin embargo se le seguirá considerando multiperiodico. Cuando todas las frecuencias de movimiento son incommensurables entre sí, se dice que el movimiento multiperiodico es no degenerado.

La descripción más simple de los sistemas multiperiodicos es aquella que se realiza en términos de las variables de acción y ángulo. Este tipo de variables se define en base a un conjunto de coordenadas y momentos generalizados (q_i, p_i) para los cuales el hamiltoniano del sistema considerado es separable. Las variables de acción ξ_i juegan el papel de nuevos momentos generalizados y están dadas por:

$$\xi_i = \oint p_i dq_i \quad (1)$$

¹ Con q_i una coordenada generalizada y p_i su correspondiente momento canónicamente conjugado.

donde la integral se realiza sobre un periodo completo en el plano (q_i, p_i) . Las variables angulares η_i son las coordenadas generalizadas asociadas a las variables de acción y están dadas por:

$$\eta_i = \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \quad (2)$$

donde $W(\xi_i, q_i)$ es la función característica de la transformación canónica $(q_i, p_i) \rightarrow (\eta_i, \xi_i)$, en términos de la cual $p_i = \partial W / \partial q_i$.

Las ecuaciones de Hamilton para las variables de acción y ángulo toman la forma:

$$\dot{\xi}_i = 0 \quad \dot{\eta}_i = \frac{\partial H}{\partial \xi_i} = \text{cte.} \equiv \nu_i \quad (3)$$

Estas ecuaciones admiten la solución:

$$\xi_i = \alpha_i \quad \eta_i = \nu_i t + \beta_i \quad (4)$$

con α_i y β_i constantes. Los números ν_i son las frecuencias asociadas al movimiento periódico en el plano (q_i, p_i) .

De la ecuación (4) vemos que si ha transcurrido un tiempo igual al período $\Delta t = T_i = 1/\nu_i$, entonces $\Delta \eta_i = 1$, lo que significa que η_i cambia en una unidad cuando q_i efectúa un período completo. Podemos ver, entonces, que las q_i son funciones periódicas de las variables angulares η_i , con período fundamental $\Delta \eta_i = 1$, y por lo tanto admiten un desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$q_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{q}_{ni} \exp(2\pi i n \eta_i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{q}_{ni} \exp(2\pi i (\nu_i t + \beta_i)) \quad (5)$$

con:

$$\tilde{q}_{n_1} = \int_0^1 q_1 \exp(-2\pi i n_1 \eta_1) d\eta_1.$$

Si consideramos una variable que sea función de varias q_i , su desarrollo de Fourier contendrá las frecuencias ν_i de cada una de las coordenadas que en ella aparecen y a sus respectivos armónicos. Las coordenadas cartesianas x_k del sistema no son, en general, separables, pero pueden expresarse como funciones de las coordenadas separables q_i , por lo que tendrán un desarrollo múltiple de Fourier de la forma:

$$x_k = \sum_n \tilde{x}_{nk} \exp(2\pi i n \cdot \eta) \quad (6)$$

con $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)$, y $n = (n_1, n_2, \dots)$.

Las funciones que poseen un desarrollo de la forma (6) se conocen como funciones múltiple o condicionalmente periódicas.

Apéndice 2. El problema de Kepler con variables de acción y ángulo.

Para aplicar al problema de Kepler los métodos de la EDE desarrollados en el capítulo II es necesario resolver sus ecuaciones clásicas de movimiento utilizando variables de acción y ángulo.

Por simplicidad, y tomando en cuenta que el movimiento de una partícula sujeta a un potencial central es en un plano, consideraremos sólo dos dimensiones (r, ϕ) . El hamiltoniano del sistema es¹:

$$H = 1/(2m) \left[p_r^2 + p_\phi^2 / r^2 \right] - k/r \quad (1)$$

con $k > 0$. La ecuación de Hamilton-Jacobi es, entonces:

$$1/(2m) \left\{ \left[\frac{\partial W}{\partial r} \right]^2 + 1/(r^2) \left[\frac{\partial W}{\partial \phi} \right]^2 \right\} - k/r = E \quad (2)$$

Supongamos una solución del tipo: $W(r, \phi) = W_r(r) + W_\phi(\phi)$. La ecuación anterior se reduce a:

$$1/(2m) \left\{ \left[\frac{dW_r}{dr} \right]^2 + 1/(r^2) \left[\frac{dW_\phi}{d\phi} \right]^2 \right\} - k/r = E \quad (3)$$

La dependencia respecto de ϕ aparece sólo en el último término, por lo que debe cumplirse que:

$$\frac{dW_\phi}{d\phi} = M = \text{cte.} \quad (4)$$

¹El procedimiento seguido en esta sección puede verse en el libro 'Mecánica clásica' de H. Goldstein.

de donde (3) se reduce a:

$$1/(2m) \left\{ \left[\frac{dW_r}{dr} \right]^2 + M^2/r^2 \right\} - k/r = E \quad (5)$$

Las variables de acción se definen como:

$$\xi_r = \int p_r dr = \int \frac{dW_r}{dr} dr \quad (6.a)$$

$$\xi_\phi = \int p_\phi d\phi = \int \frac{dW_\phi}{d\phi} d\phi \quad (6.b)$$

Para ξ_ϕ tenemos, entonces:

$$\xi_\phi = \int M d\phi = 2\pi M \quad (7)$$

mientras que para ξ_r se tendrá:

$$\xi_r = \int \left[2mE + 2mk/r - M^2/r^2 \right]^{1/2} dr \quad (8)$$

Para integrar la ecuación anterior notamos que el integrando es $p_r = m\dot{r}$, por lo que los límites del movimiento estarán determinados por $\dot{r} = 0$. Sean r_1 y r_2 las raíces del integrando, con $r_1 < r_2$. Entonces, mientras la partícula va de r_1 a r_2 , $\dot{r} > 0$ y debemos tomar la raíz cuadrada positiva, en cambio, cuando va de r_2 a r_1 se tiene $\dot{r} < 0$ y tomamos la raíz cuadrada negativa. Entonces:

$$\begin{aligned} \xi_r &= \int_{r_1}^{r_2} \left[2mE + 2mk/r - M^2/r^2 \right]^{1/2} dr - \int_{r_2}^{r_1} \left[2mE + 2mk/r - M^2/r^2 \right]^{1/2} dr \\ &\Rightarrow \xi_r = 2 \int_{r_1}^{r_2} \left[2mE + 2mk/r - M^2/r^2 \right]^{1/2} dr \end{aligned}$$

Sean $a = -2mE$, $b = 2mk$, $c = M^2$. Como la partícula está ligada se tiene $E < 0$, además $k > 0$ y $M^2 > 0$, por lo que a , b y c son positivos. La integral se reduce a:

$$\xi_r = 2 \int_{r_1}^{r_2} \left[-a + b/r - c/r^2 \right]^{1/2} dr$$

con r_1 y r_2 raíces de la ecuación $-a + b/r - c/r^2 = 0$.

Calculando la integral obtenemos, finalmente, que:

$$\begin{aligned} \xi_r &= 2\pi c^{1/2} + \pi b/a^{1/2} \\ \Rightarrow \xi_r &= -2\pi M + \pi k(-2m/E)^{1/2} \end{aligned} \quad (9)$$

Sustituyendo (7) en (9) y despejando E encontramos:

$$E = -2\pi m^2 k^2 / (\xi_r + \xi_\phi)^2 \quad (10)$$

La ecuación anterior implica un movimiento degenerado, cuya única frecuencia es:

$$\nu = \frac{\partial H}{\partial \xi_r} = \frac{\partial H}{\partial \xi_\phi} = 4\pi m^2 k^2 / (\xi_r + \xi_\phi)^3 \quad (11)$$

Las variables angulares asociadas a ξ_r y ξ_ϕ serán:

$$\eta_r = \nu t + \beta_1 \quad \eta_\phi = \nu t + \beta_2 \quad (12)$$

Podemos elegir, por simplicidad, $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Tendremos, entonces, que: $\eta_r = \eta_\phi = \nu t \equiv \omega$. Como se vió en el apéndice 1, r y ϕ son funciones periódicas de η_r y η_ϕ respectivamente, con período fundamental igual a 1. Como el movimiento es degenerado, cualquier función $f(r, \phi)$ admite un desarrollo en serie simple de Fourier de la forma:

$$f(r, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(-2in\omega) \quad (13)$$

donde

$$a_n = \int_0^1 f(r, \phi) \exp(2in\omega) dr$$

Para calcular los coeficientes a_n es necesario conocer $r(t)$ y $\phi(t)$. De (4) y (5) encontramos que:

$$W = \int \left[2mE + 2mk/r - M^2/r^2 \right]^{1/2} dr + M\phi$$

de donde:

$$t + \gamma_1 = \frac{\partial W}{\partial E} = \int \frac{M dr}{(2mE + 2mk/r - M^2/r^2)^{1/2}} \quad (14.a)$$

y

$$\gamma_2 = \frac{\partial W}{\partial M} = \int \frac{M dr}{r^2 (2mE + 2mk/r - M^2/r^2)^{1/2}} + \phi \quad (14.b)$$

con γ_1 y γ_2 constantes. Integrando (14.b) y eligiendo $\gamma_2 = -\pi/2$ encontramos la ecuación de la trayectoria $r(\phi)$:

$$r = R(1 - \varepsilon^2)/(1 + \varepsilon \cos\phi) \quad (15)$$

con $R = -k/2E$ $\varepsilon = (1 + 2EM^2/mk^2)^{1/2}$

La dependencia temporal se obtiene integrando la ecuación (14.a):

$$t + \gamma_1 = (-m/2E)^{1/2} \left[R \arcsen((r-R)/\varepsilon R) - \varepsilon R(1 - ((r-R)/\varepsilon R)^2)^{1/2} \right]$$

La ecuación anterior es trascendente, pero puede escribirse en una forma más compacta si definimos $\text{sen}\tau \equiv (r-R)/\varepsilon R$. Entonces:

$$r = R(1 + \varepsilon \text{sen}\tau) \quad (16.a)$$

$$t + \gamma_1 = R(-m/2E)^{1/2} (\tau - \varepsilon \text{cost}) \quad (16.b)$$

Las ecuaciones (16) proporcionan la dependencia temporal de r en forma paramétrica, y pueden tomar una forma más conveniente para los cálculos si escogemos $\lambda = \tau + \pi/2$ y $\gamma_1 = -\pi R(-m/2E)^{1/2}/2$.

$$r = R(1 - \varepsilon \cos\lambda) \quad (17.a)$$

$$t = R(-m/2E)^{1/2}(\varepsilon - \varepsilon \operatorname{sen}\lambda) \quad (17.b)$$

Las coordenadas cartesianas $x = r \cos\phi$ y $y = r \operatorname{sen}\phi$ resultan ser, usando las ecuaciones (15) y (17):

$$x = R(\cos\lambda - \varepsilon) \quad y = R(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \operatorname{sen}\lambda \quad (18)$$

Puede encontrarse un desarrollo de Fourier de la forma (13) para las coordenadas (x,y) . Para x tenemos:

$$x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_n \exp(-2\pi i n \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_n \exp(-2\pi i n t)$$

Resulta más sencillo calcular las componentes de Fourier de \dot{x} . Derivando la expresión anterior:

$$\dot{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-2\pi i n \nu) \tilde{x}_n \exp(-2\pi i n \nu t)$$

Sea $\omega_0 = 2\pi\nu = (-2E/mR^2)^{1/2}$. Entonces:

$$-i\omega_0 \ln \tilde{x}_n = \int_0^T \dot{x} \exp(i\omega_0 n t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x} \exp(i\omega_0 n t) dt$$

donde $T = 2\pi/\omega_0$ es el período de la órbita. Como $\dot{x} dt = dx = (dx/d\lambda) d\lambda$ tenemos, de (18), que $\dot{x} dt = -R \operatorname{sen}\lambda d\lambda$. Además, de (17): $t = R(-m/2E)^{1/2}(\lambda - \varepsilon \operatorname{sen}\lambda)$. Substituyendo y despejando \tilde{x}_n encontramos:

$$\tilde{x}_n = (-iR/2\pi n) \int_0^{2\pi} \text{sen} \lambda \exp(i n \lambda - \varepsilon \text{sen} \lambda) d\lambda \quad (19)$$

Análogamente, para \tilde{y}_n se obtiene:

$$\tilde{y}_n = (iR(1 - \varepsilon^2)^{1/2} / 2\pi n \varepsilon) \int_0^{2\pi} \exp(i n \lambda - \varepsilon \text{sen} \lambda) d\lambda \quad (20)$$

Para calcular las integrales (19) y (20) se utiliza una relación de las funciones de Bessel $J_n(z)$:

$$J_n(z) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} \exp(i(n\lambda - z \text{sen} \lambda)) d\lambda$$

Entonces:

$$\tilde{x}_n = \frac{R}{n} J'_n(n\varepsilon) \quad \tilde{y}_n = i \frac{R(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}{n\varepsilon} J_n(n\varepsilon) \quad (21)$$

Las ecuaciones anteriores son válidas para $n \neq 0$. Usando el desarrollo en serie de las funciones Bessel:

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \frac{z^{n+2k}}{(1/2)^{n+2k}}$$

encontramos para \tilde{x}_n y \tilde{y}_n :

$$\tilde{x}_n = \frac{R}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+2k)(n\varepsilon)^{n+2k-1}}{k! \Gamma(n+k+1)} (1/2)^{n+2k} \quad (22.a)$$

$$\tilde{y}_n = iR(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n\varepsilon)^{n+2k-1}}{k! \Gamma(n+k+1)} (1/2)^{n+2k} \quad (22.b)$$

con $n \neq 0$. Por otro lado, debido a que tanto x como y son números reales, debe satisfacerse que:

$$\tilde{x}_n = \tilde{x}_{-n}^* \quad \tilde{y}_n = \tilde{y}_{-n}^*$$

De las ecuaciones (22) se puede ver que \tilde{x}_n es real, mientras que \tilde{y}_n es imaginario puro, por lo que la expresión anterior se reduce a:

$$\tilde{x}_n = \tilde{x}_{-n} \quad \tilde{y}_n = -\tilde{y}_{-n} \quad (23)$$

Para los coeficientes con $n = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T x \, dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} x \frac{dt}{d\lambda} \, d\lambda \\ &= R\omega_0 / 2\pi \int_0^{2\pi} (\cos\lambda - \epsilon) R (-m/2E)^{1/2} (1 - \epsilon \cos\lambda) \, d\lambda \\ &= R/2\pi \int_0^{2\pi} (-\epsilon + (1+\epsilon^2)\cos\lambda - \epsilon \cos^2\lambda) \, d\lambda \end{aligned}$$

finalmente obtenemos:

$$\tilde{x}_0 = -\frac{3}{2} \epsilon R \quad (24.a)$$

y, en forma análoga:

$$\tilde{y}_0 = 0 \quad (24.b)$$

Las ecuaciones (22) y (24) nos dan los coeficientes del desarrollo de Fourier de las coordenadas cartesianas (x,y) para el problema de Kepler. Puede notarse que, debido a la degeneración de este sistema, las coordenadas cartesianas se expresan como una serie simple de Fourier y no como una serie múltiple.

BIBLIOGRAFIA GENERAL

Adirovich, E.I.; Podgoretskii, M.I. (1954), JETP (URSS) 26, p.59, 1954.

Alcubierre, M.; Getto, A.M.; de la Peña, L.; Lozano, N.S. (1988), "Detailed Balance and Radiative Transitions in the New Approach to Stochastic Electrodynamics", PREPRINT, IFUNAM, 1988.

Baere, W. de (1986), Adv. Electr. and Electron Physics 68, p.245, 1986.

Ballentine, L.E. (1970), "The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics", Rev. Mod. Phys. 42, 1970.

Ballentine, L.E. (1986), "Probability theory in quantum mechanics", Am. J. Phys. 54(10), p.683, 1986.

Bell, J.S. (1964), "On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox", Physics 1, p.195, 1964.

Bell, J.S. (1966), "On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics", Rev. Mod. Phys. 38, p.447, 1966.

Bohr, N. (1935), "Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete", Phys. Rev. 48, p.696, 1935.

Bohr, N. , "Discussions avec Einstein sur des problèmes épistémologiques de la physique atomique", contribución a "Albert

Einstein: Philosopher Scientist", Evaston 1949. Reeditado en:
N. Bohr, "Physique atomique et connaissance humaine",
Gauthier-Villars, Paris 1961.

Born, M., "The Mechanics of the Atom", Frederick Ungar Pub.
Co., Nueva York 1960; Publicación original: Bell, Londres 1927.

Boyer, T.H. (1969), Phys. Rev. 182, p.1374, 1969.

Boyer, T.H. (1970), Annals of Phys. (N.Y.) 56, p.474, 1970.

Boyer, T.H. (1975), Phys. Rev. D11, p. 790, 1975.

Braffort, P.; Spighel, M.; Tzara, G. (1954), C.R. Acad. Sc.
Paris 239, p.157, 1954. Erratum: id., 239, p.925, 1954.

Brody, T. (1975), "Probability: A New Look at Old Ideas", Rev.
Mex. Fis. 24, p.25, 1975.

Brody, T. (1983), "Foundations for Quantum Mechanics. Results
and Problems", Rev. Mex. Fis. 29, p.461, 1983.

Bunge, M. (1956), "Survey of the interpretations of quantum
mechanics", Am. J. Phys. 24, p.272, 1956.

Capasso, V.; Fortunato, D.; Selleri, F. (1970), "von
Neumann's Theorem and Hidden-Variable Models", Rivista del Nuovo
Cimento 2, p.149, 1970.

Cotto, A.M. (1984), "New perturbative derivation of the Fokker-Planck equation for coloured multiplicative noise", Phys. Letters 101A, number 4, pp. 185-186, marzo 1984.

Cotto, A.M. (1986), "Why should the Bell inequality be obeyed?", preprint, IFUNAM, 1986.

Claverie, P.; Soto, F.; Pasquera, L. (1980), Phy. Letters A80, p. 113, 1980.

Claverie, P.; Soto, F. (1982), J. Math. Phys. 23, p. 753, 1982.

Dirac, P.A.M. (1927), "The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation", Proceedings of the Royal Society A-114, p.243, 1927.

Einstein, A.; Podolsky, R.; Rosen, N. (1935), "Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?", Phys. Rev. 47, p.777, 1935

Goldstein, H., "Mecánica Clásica", Aguilar S.A. de ediciones, Madrid 1979.

Jammer, M., "The Philosophy of Quantum Mechanics", John Wiley and Sons, Nueva York 1974.

Jimenez, J.L.; Peña, L. de la; Brody, T. (1980), "Zero Point Term in Cavity Radiation", Am. J. Phys. 48, p. 840, 1980.

Kalitsin, N.S. (1953), JETP (URSS) 25, p.407, 1953.

Khas'minskii, R.Z. (1960), Theory Prob. Appl. 5, p. 179,
1960.

Marshall, T.W. (1963), Proc. R. Soc. A276, p.475, 1963.

Marshall, T.W. (1965), Proc. Camb. Phil. Soc. 61, p.537,
1965.

Marshall, T.W. (1980), Physica 103A, p.172, 1980.

Marshall, T.W.; Claverie, P. (1980), "Stochastic
electrodynamics of nonlinear systems. I. Partial in a central
field of force", J. Math. Phys. 21, p. 1819, 1980.

Peña, L. de la; Cetto, A.M. (1979), "The quantum harmonic
oscillator revisited: A new look from stochastic electrodynamics",
J. Math. Phys. 20(3), p. 469, 1979.

Poña, L. de La (1983); "Stochastic Electrodynamics: its
development, present situation and perspectives", Proc. of the
Escuela Latinoamericana de Física 1982, Cali, Colombia; World
Scientific, Singapore 1983.

Peña, L. de la; Cetto, A.M. (1986), "The Physics of
Stochastic Electrodynamics", Il Nuovo Cimento 92B, p. 189, 1986.

Peña, L. de la; Cetto, A.M. (1987), "New Approach to Stochastic Electrodynamics for the Explanation of Quantum Phenomena", Preprint, IFUNAM 87-3, México 1987.

Popper, K., Post Scriptum a: "La lógica de la Investigación científica" vol. III: "Teoría cuántica y el esma en física", Tecnos, Madrid 1985.

Puthoff, H.E. (1987), "Ground state of hydrogen as a zero point fluctuation determined state", Phys. Rev. D, 35, p.3266, mayo 1987.

Ross-Bonney, A.A. (1975), "Does God Play Dice? A Discussion of Some Interpretations of Quantum Mechanics", Il Nuovo Cimento 30B, p.55, 1975.

Santos, E. (1979), Proc. Einstein Centennial Symposium, Bogotá, Colombia, 1979.

Santos, E. (1974), Il Nuovo Cim. 22B, p.201, 1974.

Selleri, F., "El debate de la teoría cuántica", Alianza Editorial, Madrid, 1986.

Sokolov, A.A.; Tumanov, V.S. (1956), "The uncertainty relation and fluctuation theory", JETP, URSS 3, pp. 958-959, abril 1956.