

24.13



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

**EFFECTO DE LA TENSION SUPERFICIAL
EN DINAMICA DE FLUIDOS: EL
PROBLEMA DE LA ESFERA.**

T E S I S

Que para obtener el grado de:

F I S I C O

P r e s e n t a :

María del Rocío Chicharro Serra

México, D. F.

Abril 1988



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN.

En este trabajo se analizan las condiciones de frontera generales en dinámica de fluidos. Siendo la condición usual la de adherencia, que establece la ausencia de movimiento relativo entre un fluido y una frontera sólida, se propone un método para determinar la posible existencia de deslizamiento, modificando sólo las características de la interfase. Para esto se sugiere el cambiar una propiedad macroscópica que sea solo relevante en la superficie: la tensión superficial. Analizando un caso sencillo como es el movimiento uniforme y lento de una esfera en un fluido viscoso, se analiza el efecto que tiene introducir resbalamiento en su superficie. Como resultado se plantea experimentalmente el problema para establecer la existencia o no de movimiento.

INDICE.

CAPITULO I. FUNDAMENTOS.

I.1.	Aspectos generales.	1
I.2.	Principios de conservación.	3
I.3.	Ecuaciones constitutivas.	10
I.4.	Condiciones de frontera.	14
I.5.	Formulación del problema.	18

CAPITULO II. ANALISIS TEORICO.

II.1.	Introducción.	21
II.2.	Fuerza de arrastre.	21
II.3.	Análisis mecánico.	27
II.4.	Discusión.	32

CAPITULO III. DESARROLLO EXPERIMENTAL.

III.1.	Introducción.	36
III.2.	Descripción del dispositivo experimental	36
III.3.	Procedimiento experimental.	39
III.4.	Propagación de errores.	40
III.5.	Validez del modelo.	45

CAPITULO IV. RESUMEN, CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS.

47

INTRODUCCION.

La dinámica de fluidos es la parte de la física que tiene como objeto el determinar el comportamiento de un medio, líquido o gaseoso, a partir de las fuerzas que actúan sobre él. El enfoque, totalmente macroscópico, y en el contexto clásico, converge en la formulación de una teoría de campo. Las ecuaciones para los campos de velocidad y de presión, por ejemplo, son diferenciales, parciales y no lineales. Estas ecuaciones requieren, para su solución, de condiciones subsidiarias asociadas al comportamiento temporal, condiciones iniciales, y al espacial, condiciones de frontera.

Las condiciones iniciales definen el estado de movimiento en el instante a partir del cual se inicia la descripción. En virtud de que en esta tesis se estudian flujos estacionarios, en los que el tiempo inicial se ha trasladado al remoto pasado, estas condiciones no serán discutidas en lo sucesivo.

Las condiciones a la frontera son las que ponen de manifiesto la forma en que el fluido interacciona con otros medios presentes en su superficie. Aquí se analiza el caso en el que el fluido está en contacto con un sólido.

En el siglo XVIII aparece por primera vez la dificultad de formular las condiciones de frontera adecuadas, cuando Bernoulli destaca las diferencias entre su análisis, basado en la suposición de que los fluidos (ideales) resbalan libremente sobre

una superficie sólida, y las observaciones experimentales. La hipótesis de que un fluido se adhiere a la superficie, en el estado de la teoría de entonces, era inadmisiblemente matemáticamente. La discusión sobre este problema fue enriquecida un siglo después al formularse las ecuaciones como hoy las conocemos y aceptarse como una posibilidad más, la condición de adherencia.

En esta tesis se propone que las condiciones a la frontera pueden modificarse si se cambia la naturaleza de la interfase fluido-sólido. Este cambio en las condiciones de frontera es entre los extremos de adherencia y resbalamiento totales. La hipótesis básica en este trabajo es la de suponer que cambiando la tensión superficial relativa, que es una de las manifestaciones macroscópicas de la interacción entre dos medios distintos, se pueden modificar exclusivamente las condiciones de frontera. Esta relación será manejada en forma completamente implícita en cuanto al análisis teórico se refiera.

En el capítulo I se describe a un fluido al que se considera como un continuo, con base en los principios de conservación. A continuación se introducen las ecuaciones constitutivas y se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes que, junto con la ecuación de continuidad, integran las ecuaciones básicas de la dinámica de fluidos. Posteriormente se plantean y discuten las condiciones a la frontera que describen la interacción entre un fluido y un sólido, mismas que llevan a la formulación del problema. En el capítulo II, partiendo de la hipótesis de que la tensión superficial produce un efecto en la velocidad relativa entre un fluido y un sólido, se estudia el

problema del movimiento uniforme de una esfera inmersa en un fluido viscoso. Para esto se consideran las condiciones a la frontera extremas de adherencia y deslizamiento y se calcula la fuerza de arrastre, en términos de un coeficiente de deslizamiento. Esta fuerza se introduce en el análisis mecánico y se estudia el comportamiento de la esfera. En el capítulo III se propone un diseño experimental, correspondiente al modelo teórico, que permita observar el efecto y se presentan las pruebas realizadas. Finalmente, el capítulo IV contiene el resumen, conclusiones y perspectivas de la "tesis" presentada en este trabajo.

CAPITULO I. FUNDAMENTOS.

I.1 ASPECTOS GENERALES.

Dado que se puede describir completamente el comportamiento de un fluido viscoso con las ecuaciones de Navier-Stokes, en este capítulo se expondrán los principios generales y las hipótesis básicas para llegar a ellas [Currie, 1974; Landau et al., 1959].

Los fluidos están constituidos por moléculas en constante movimiento que sufren colisiones continuamente. Para un análisis riguroso habría que tomar en cuenta la estructura molecular y su dinámica, partiendo de una descripción estrictamente microscópica [Currie, 1974; Batchelor, 1967]. Nos limitaremos en este desarrollo a considerar que la trayectoria libre media es muy pequeña comparada con cualquier dimensión física del problema; así, se puede suponer una distribución continua de materia y establecer las propiedades del fluido tales como velocidad, densidad, temperatura, etc., como funciones continuas de la posición y del tiempo.

Una vez considerado el fluido como continuo, se puede describir su movimiento desde dos puntos de vista, con el sistema Euleriano o el sistema Lagrangiano [Currie, 1974; Lamb 1932]. En la descripción Euleriana se fija un punto en el espacio \vec{x} y se observa al fluido que pasa por dicho punto en el transcurso del tiempo, especificando su densidad $\rho(\vec{x}, t)$ y su velocidad $\vec{u}(\vec{x}, t)$, por lo que los campos son funciones de las coordenadas espacio-tiempo. En éste caso se especifica un volumen de control,

un volumen fijo en el punto \vec{x} , en el que la cantidad y propiedades de la materia pueden variar con el tiempo, no así su forma. En la descripción Lagrangiana, se identifica a una "partícula" de fluido y se sigue su trayectoria; es decir, los campos son funciones del tiempo y la posición inicial \vec{x}_0 . En este sistema pueden variar la forma y posición del elemento de volumen. Al referirse al elemento de volumen, se lo considera suficientemente grande de tal forma que contenga un número grande de moléculas para manejarlo como un continuo, pero suficientemente pequeño como para aplicarle las leyes de la mecánica como a una "partícula" simple.

Estos dos métodos deben estar relacionados si han de describir el movimiento de un fluido. Si se considera un campo arbitrario α , es necesario conocer su variación con el tiempo en el volumen de control, pero al seguir el movimiento de éste se debe emplear el método Lagrangiano. Por tanto, como las coordenadas de la partícula (x, y, z) son funciones del tiempo, se puede establecer la variación del campo mediante la regla de la derivación de funciones compuestas en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{D\alpha}{Dt} &= \frac{\partial\alpha}{\partial t} + u\frac{\partial\alpha}{\partial x} + v\frac{\partial\alpha}{\partial y} + w\frac{\partial\alpha}{\partial z} \\ &= \frac{\partial\alpha}{\partial t} + u_k \frac{\partial\alpha}{\partial x_k}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde D/Dt es la derivada material; este operador tiene sentido sólo cuando se aplica a un campo variable (esto es, una función de \vec{x} y t), por lo que da una derivada en el tiempo siguiendo el movimiento del fluido. Aquí, se ha usado la convención de Einstein de suma sobre índices repetidos.

El teorema de transporte de Reynolds [Currie, 1974], relaciona la derivada Lagrangiana de una integral de volumen con una integral de volumen cuyo integrando contiene derivadas Eulerianas, esto es:

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \alpha \, dV = \int_{v(t)} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha u_k) \right] dV, \quad (1.2)$$

donde α es cualquier campo. Matemáticamente expresa el hecho de que no sólo el integrando cambia en el tiempo sino también el volumen de integración, v .

1.2. PRINCIPIOS DE CONSERVACION.

En esta sección se desarrollan las cinco ecuaciones básicas del movimiento de los fluidos: la ecuación de continuidad, la ecuación vectorial de conservación de la cantidad de movimiento y la ecuación de conservación de la energía. Se supone que las velocidades características del fluido son mucho menores que la velocidad de la luz, no considerando así efectos relativistas. Además, debido a que la longitud de onda de De Broglie es muy pequeña ($\sim 1\text{\AA}$), se excluye el comportamiento cuántico del sistema. Bajo estas hipótesis, las ecuaciones de la dinámica de fluidos se fundamentan en las leyes de la mecánica clásica.

a) Conservación de la masa.

La ecuación que establece la conservación de la masa, llamada de continuidad, resulta de postular que no hay aniquilación ni creación de materia. Si se piensa en un volumen

arbitrario V , enteramente ocupado por el fluido, donde la función $\rho(\vec{x}, t)$ esté definida, el cambio en el tiempo de la masa en ese volumen es cero; así

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \, dV = 0,$$

por la ecuación (1.2), se tiene

$$\int_{V(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) \right] dV = 0.$$

Esta relación es válida para cualquier volumen y se satisface sólo si el integrando es cero. De aquí que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0, \quad (1.3)$$

es decir,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0.$$

Esta es la primera condición que deben satisfacer la densidad y el campo de velocidad [Currie, 1974]. Cuando la densidad ρ es constante, se dice que el fluido es incompresible y su derivada material es cero. Se tiene entonces:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (1.4a)$$

es decir,

$$\text{div } \vec{u} = 0. \quad (1.4b)$$

Sin embargo, el hecho de que $\text{div } \vec{u}=0$ no implica que la densidad sea constante; aunque sea constante en el tiempo puede variar con la posición, pues si por ejemplo se considera el flujo estacionario de un fluido estratificado, en donde la densidad sea constante a lo largo de las líneas de flujo, pudiendo variar de línea a línea, se tiene que su derivada material es cero (Currie, 1974).

b) *Conservación del ímpetu.*

Las ecuaciones del movimiento o ecuaciones dinámicas, son una representación de la segunda ley de Newton. Se tiene entonces que la ecuación de conservación del ímpetu está dada por (Currie, 1974)

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{u} \, dV = \int_S \vec{J} \, dS + \int_V \rho \vec{F} \, dV;$$

donde el término de la izquierda representa el cambio temporal del momento lineal del fluido que ocupa el volumen V y los términos de la derecha representan la fuerza total que actúa sobre el fluido; la suma de las fuerzas superficiales \vec{J} y las fuerzas volumétricas $\rho \vec{F}$. Las fuerzas superficiales actúan sobre la superficie de cada elemento y están determinadas por el área de su superficie y la orientación de ésta; éstas fuerzas pueden ser normales debido a la presión y cortantes debido a la viscosidad. La componente i de la fuerza ejercida sobre un elemento de superficie, de área dS y normal \hat{n} , puede representarse como $\tau_{ij} \hat{n}_j dS$, donde τ_{ij} es el tensor de esfuerzos y es la componente i de la fuerza por unidad de área que actúa sobre una superficie con normal en la dirección

j. Las fuerzas volumétricas actúan directamente sobre cada elemento de volumen y dependen de la masa ahí contenida, actúan en una dirección dada y resultan de un campo externo; como por ejemplo la fuerza gravitacional o la fuerza electromagnética. Así,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_i dV = \int_S \tau_{ij} n_j dS + \int_V \rho F_i dV.$$

Usando la ecuación (1.2), el teorema de la divergencia, la ecuación (1.3) y tomando en cuenta que el volumen es arbitrario, se llega a

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \tau_{lj}}{\partial x_l} + \rho F_j, \quad (1.5)$$

donde el miembro de la derecha representa las fuerzas que causan la aceleración y el izquierdo representa el cambio temporal del momento, por unidad de volumen; esto es, las llamadas fuerzas inerciales local y convectiva.

c) Conservación del momento angular.

A partir de la conservación del momento angular, se puede obtener la simetría del tensor de esfuerzos [Singe & Schild, 1949]. Se sabe que dada una partícula de masa m y cantidad de movimiento lineal \vec{p} en una posición \vec{r} con relación al origen de un marco de referencia inercial, la cantidad de momento angular está

dada por

$$L = \vec{r} \times \vec{p}.$$

A partir de la ecuación de conservación del momento lineal, la

ecuación de conservación del momento angular es

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{r} \times (\rho \vec{u}) \right] + \text{div} \left[\vec{r} \times (\rho \vec{u}) \vec{u} \right] \right\} dV =$$

$$\int_S \vec{r} \times (\tau \cdot \hat{n}) dS + \int_V \vec{r} \times (\rho \vec{F}) dV .$$

Desarrollando en componentes se puede escribir de la forma:

$$\int_V \left\{ \varepsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \varepsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho u_j u_l) \right\} dV =$$

$$\int_V \left\{ \varepsilon_{ijk} \tau_{jl} + \varepsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial x_l} \tau_{jl} + \varepsilon_{ijk} x_i \rho \bar{r}_j \right\} dV ,$$

aquí ε_{ijk} es el tensor alternante de Levi-Civita en el espacio de tres dimensiones y puede tomar los siguientes valores:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} + 1 & \text{si } (ijk) \text{ es una permutación par del orden cíclico.} \\ - 1 & \text{si } (ijk) \text{ es una permutación impar del orden cíclico.} \\ 0 & \text{cualquier otro caso.} \end{cases}$$

La ecuación anterior se puede escribir como:

$$\int_V \left\{ \varepsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \varepsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho u_j u_l) - \varepsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial x_l} (\tau_{jl}) \right. \\ \left. - \varepsilon_{ijk} \tau_{jl} - \varepsilon_{ijk} x_i \rho F_j \right\} dV = 0 .$$

Factorizando $x_l \epsilon_{ijk}$ se tiene:

$$\int_V \left\{ x_l \epsilon_{ijk} \left\{ \left[\rho \partial_l u_j + u_j \partial_l \rho \right] + \left[\rho u_j \partial_{x_l} u_l + u_l \partial_{x_l} \rho u_j \right] - \left[\partial_{x_l} \tau_{jl} + \rho F_j \right] \right\} - \epsilon_{ijk} \tau_{ji} \right\} dV = 0 ,$$

es decir:

$$\int_V \left[x_l \epsilon_{ijk} \left\{ \left[\rho \frac{\partial}{\partial t} u_j + \rho u_l \frac{\partial}{\partial x_l} u_j - \frac{\partial}{\partial x_l} \tau_{jl} - \rho F_j \right] + u_j \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial x_l} u_l \right] \right\} \right] - \epsilon_{ijk} \tau_{ji} dV = 0 ,$$

en donde, por las ecuaciones (1.3) y (1.5), se llega a

$$\int_V \epsilon_{ijk} \tau_{ji} dV = 0 ,$$

y como el volumen es arbitrario, se obtiene que

$$\epsilon_{ijk} \tau_{ji} = 0 ,$$

es decir, el tensor de esfuerzos es simétrico: $\tau_{ji} = \tau_{ij}$.

c) Conservación de la energía.

La ecuación de conservación de la energía es la generalización de la primera ley de la Termodinámica para un sistema fuera de equilibrio. Para esto, es necesario introducir la hipótesis de equilibrio local, ésta permite establecer la

energía de una "partícula" como la suma de la energía cinética por unidad de masa $1/2(\rho\vec{u}\cdot\vec{u})$ y la energía interna por unidad de masa ϕ . El balance termodinámico se obtiene igualando la energía con la suma de la potencia desarrollada por las fuerzas de superficie $\vec{u}\cdot\vec{J}dS$ y de las fuerzas volumétricas $\vec{u}\cdot\vec{F}dV$ y el flujo de calor \vec{q} ; la cantidad de calor que sale del elemento de fluido por unidad de tiempo y unidad de área es $\vec{q}\cdot\hat{n}$, donde \hat{n} es la normal a la superficie. De esta manera, el principio de conservación de la energía, en un volumen V y superficie S , está representado por:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left[\rho\phi + \frac{1}{2} \rho\vec{u}\cdot\vec{u} \right] dV = \int_S \vec{u}\cdot\vec{J} dS + \int_V \vec{u}\cdot\rho\vec{F} dV - \int_S \vec{q}\cdot\hat{n} dS.$$

De aquí que el cambio total de la energía (incluyendo cinética e interna) en el volumen de control, es igual a la potencia desarrollada por las fuerzas superficiales, que incluyen el trabajo reversible hecho por la presión y el trabajo irreversible debido a las fuerzas viscosas, más la potencia desarrollada por las fuerzas externas, menos la pérdida de energía debida al flujo de calor. Usando las ecuaciones (1.2), (1.3) y (1.5), la ecuación de conservación de la energía interna puede escribirse en la forma:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}. \quad (1.6)$$

A partir de los principios de conservación, se han obtenido cinco ecuaciones que describen el movimiento de un fluido y, como consecuencia de la hipótesis de equilibrio local, hay dos ecuaciones de estado para un sistema simple. Estas son: $P=P(\rho,T)$

y $e=e(P,T)$, en donde P es la presión termodinámica y T la temperatura [Currie, 1974]. Sin embargo, se cuenta con 16 variables: densidad ρ , energía interna e , tres componentes de la velocidad \vec{u} , tres componentes del flujo de calor \vec{q} , seis componentes del tensor de esfuerzos $\underline{\tau}$, la presión P y la temperatura T . De esta forma, se tiene un sistema abierto, por lo que se deben introducir ecuaciones en términos de las mismas variables para obtener un sistema de ecuaciones cerrado. Estas se conocen como las ecuaciones constitutivas.

1.3 ECUACIONES CONSTITUTIVAS.

Las ecuaciones constitutivas permiten cerrar el sistema de ecuaciones. La primera relaciona al tensor de esfuerzos con los gradientes de la velocidad y la presión. La segunda permite relacionar al vector de flujo de calor con el gradiente de la temperatura.

Para construir la primera ecuación constitutiva, se formularán las condiciones que el tensor de esfuerzos $\underline{\tau}$ ó τ_{ij} satisfice. En un fluido en reposo, sólo se ejercen fuerzas normales y están dadas por la presión termodinámica, por lo que el tensor de esfuerzos es isotrópico en cualquier lugar del fluido y tiene la forma:

$$\tau_{ij} = -P \delta_{ij},$$

en donde el signo negativo se debe a que se considera a los esfuerzos normales positivos cuando son de tensión. Para un

fluido en movimiento los esfuerzos tangenciales, que se denotarán por σ_{ij} , no se anulan. Entonces, el tensor de esfuerzos es la suma de los esfuerzos normales y tangenciales, quedando

$$\tau_{ij} = -P \delta_{ij} + \sigma_{ij}.$$

Para encontrar la forma explícita del tensor σ es necesario introducir ciertas hipótesis sobre la naturaleza del tensor. La primera hipótesis establece que el tensor σ_{ij} sólo depende del tensor $e_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j) + (\partial u_j / \partial x_i)$, es decir $\sigma = \sigma(e)$. Desarrollando en serie de Taylor:

$$\sigma_{ij} = F_{ij} + F_{ijkl} e_{kl} + F_{ijklmn} e_{kl} e_{mn} + \dots$$

donde F_{ij}, F_{ijkl}, \dots , son tensores de rango 2, 4, ..., los cuales pueden depender de los invariantes del tensor e_{ij} , I_1, I_2, I_3 , que son: $I_1 = \delta_i^j e_{ij}$, el cual es la traza; $I_2 = \frac{1}{2!} \delta_{ij}^{kl} e_{ik} e_{jl}$, que es la suma de los cofactores e $I_3 = \frac{1}{3!} \delta_{ijk}^{lmn} e_{il} e_{jm} e_{kn}$, que es el determinante. Aquí:

$$\delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\beta_1 \dots \beta_n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \{\beta\} \neq \{\alpha\}. \\ +1 & \text{si } \{\beta\} \text{ es permutación par de } \{\alpha\}. \\ -1 & \text{si } \{\beta\} \text{ es permutación impar de } \{\alpha\}. \end{cases}$$

La segunda hipótesis establece que σ_{ij} depende linealmente de e ; esto es,

$$\sigma_{ij} = F_{ij} + F_{ijkl} e_{kl}.$$

donde F_{ij} depende linealmente sólo de I_1 y F_{ijkl} no depende de los invariantes del tensor.

Finalmente, se supone al fluido isotrópico, en este caso el tensor F_{ijkl} es un tensor isotrópico de la forma [Currie, 1974; Synge & Schild, 1946]

$$F_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \left[\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right] + \gamma \left[\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk} \right],$$

donde los coeficientes λ, μ y γ son escalares. El tensor de esfuerzos es simétrico por lo que sólo se tienen dos coeficientes independientes; entonces se puede escribir de la forma

$$\sigma_{ij} = \eta \left[\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right] + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad (1.7)$$

donde η es el coeficiente de viscosidad cortante y ζ el coeficiente de viscosidad volumétrica. A los fluidos que siguen este comportamiento lineal se les denomina newtonianos [Milne-Thomson, 1979].

La segunda ecuación constitutiva está dada por la ley de conducción de calor de Fourier que relaciona el flujo de calor con el gradiente de la temperatura [Landau, 1959]:

$$q_j = -\chi \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (1.8)$$

donde χ es el coeficiente de conductividad térmica del fluido.

Sustituyendo las ecuaciones (1.7) y (1.8) en la ecuación (1.6), se obtiene

$$\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = -\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\chi \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] + \bar{\Phi}, \quad (1.9)$$

que es la ecuación de energía, en donde $\bar{\Phi}$ es la función de disipación y representa la conversión de la energía mecánica en calor debido al efecto de viscosidad. Esta función está dada por:

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2} \eta \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} u_k \right]^2 + \zeta \text{div } \dot{\mathbf{u}}^2.$$

Sustituyendo la ecuación (1.7) en la ecuación (1.5) y bajo la suposición de que las viscosidades η y ζ permanecen constantes, se tiene

$$\rho \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{u}} \right] = -\nabla P + \eta \nabla^2 \dot{\mathbf{u}} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}), \quad (1.10a)$$

que es la llamada ecuación de Navier-Stokes. De tal forma que para fluidos incompresibles, se reduce a

$$\rho \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{u}} \right] = -\nabla P + \eta \nabla^2 \dot{\mathbf{u}}. \quad (1.10b)$$

Por medio de las ecuaciones constitutivas se ha cerrado el sistema de ecuaciones, contando con siete ecuaciones y siete variables. Sin embargo, como ya se mencionó, nos limitaremos a las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido viscoso e incompresible y que son la ecuación de continuidad (1.4b) y las de Navier-Stokes (1.10b). Estas ecuaciones constituyen un sistema

cerrado de cuatro ecuaciones diferenciales parciales, parabólicas, no lineales, que son suficientes para determinar el campo de velocidades y la presión, bajo las condiciones de frontera adecuadas y condiciones iniciales.

1.4. CONDICIONES DE FRONTERA.

En esta sección se discutirán las condiciones a la frontera correspondientes a una interfase fluido-sólido.

Si se considera un fluido viscoso que se mueve con un campo de velocidades \vec{u} , en relación con un sólido que se encuentra en reposo ($\vec{v}=0$), cuya normal a la superficie es \hat{n} , se pueden establecer dos condiciones en la frontera. La primera es una condición cinemática, la cual establece que la velocidad normal en la interfase es cero, es decir

$$\vec{u} \cdot \hat{n} = 0 ; \quad (1.11)$$

esta condición tiene la implicación física de que el fluido no puede penetrar en el sólido. La segunda condición, de naturaleza dinámica, que debe cumplirse en la frontera, es sobre la velocidad tangencial relativa. Por lo general, ésta se toma como cero, de tal forma que

$$\vec{u} \times \hat{n} = 0 . \quad (1.12a)$$

Esta es la llamada condición de adherencia, debido a que el fluido se adhiere a la superficie del sólido.

Actualmente se considera, para fines prácticos, que el fluido inmediatamente en contacto con la superficie del sólido no tiene velocidad relativa, pero las condiciones exactas en una escala molecular permanecen en duda. Con base en esto, Goldstein [1965] presenta una nota histórica con relación a las condiciones a la frontera en la superficie de contacto entre un fluido y un sólido. Durante el siglo XIX se presentaron varias hipótesis, debidas al trabajo de varios autores y de los cuales se menciona a los más representativos. La primera plantea que cuando el fluido está en contacto con un sólido no hay una velocidad relativa y, si el fluido tiene las mismas propiedades en todas partes, su velocidad cambia continuamente. La segunda, claramente explicada por Girard en una discusión de sus experimentos de flujo de líquidos a través de tubos, supone que hay una fina capa del fluido que permanece completamente adherida al sólido y que el resto del fluido se desliza sobre ésta capa. Supone también que si las paredes son del mismo material en todas partes, la capa tiene un espesor constante y éste depende solamente de la curvatura de la pared y de la temperatura. En la tercera hipótesis, Navier, a partir de sus ecuaciones de movimiento para fluidos viscosos, deduce que hay deslizamiento en la frontera del sólido y que éste se resiste por una fuerza proporcional a la velocidad relativa. Explica los resultados de Girard diciendo que el espesor de la capa es de longitud μ/β (en donde μ es la viscosidad y β es una constante) y cuando esta longitud es cero, no hay deslizamiento. Stokes considera la condición de adherencia, pero sus cálculos no coinciden con los experimentos de los que tiene noticia por lo que, durante la siguiente década permanece indeciso por inclinarse a una hipótesis determinada.

Finalmente, habiendo realizado sus propios experimentos y habiéndose enterado de los famosos experimentos de Hagen y Poiseuille, adopta la condición de adherencia como la correcta.

Sobre el origen de las condiciones a la frontera se han hecho diversos estudios al respecto, de entre los cuales destaca el de Richardson [1973]. Presenta un análisis que se basa en la constitución rugosa de las superficies, estudiando los casos en presencia y ausencia de esfuerzos cortantes. Bajo la evidencia de que a nivel mesoscópico (digamos 10^{-5} m) todas las superficies presentan rugosidad, demuestra que cuando el fluido fluye a través de estas irregularidades, se producen grandes gradientes de velocidad, causando disipación de energía que frena al fluido, por lo que el flujo tangencial a lo largo de la superficie es muy lento. Esto da lugar a que a nivel macroscópico, lo que se observa, es que el fluido se adhiere al sólido. De esta forma, concluye que para cualquier condición de frontera sobre una superficie rugosa a nivel mesoscópico, es la condición de frontera de adherencia la que resulta a nivel macroscópico.



Por otro lado, hay ejemplos en donde se cuenta con argumentos que apoyan la existencia de deslizamiento en una frontera fluido-sólido. Se puede mencionar a Epstein [1923], quien analiza la resistencia de esferas en gases. Considera dos casos: el primero es cuando el radio de la esfera es menor a la trayectoria libre media ($\alpha < l$). Calcula la fuerza que ejercen las moléculas sobre la superficie al pegar en ésta y la fuerza que

ejercen las moléculas al dejarla y experimentalmente encuentra que la fuerza al dejar la superficie se compone de 9/10 de reflexión especular y de 1/10 de reflexión difusa. El segundo caso que trata es cuando $\alpha \gg l$. En este caso obtiene un factor de corrección a la ley de Stokes. En otra aportación, Peralta-Fabi y Zwanzig argumentan que, a nivel molecular, se puede usar una descripción hidrodinámica siempre y cuando se use la condición de deslizamiento. Para entender esto, se analiza el arrastre que experimenta una molécula, representada por un campo central, colocada en un flujo uniforme. Usando descripciones hidrodinámicas diferentes, como son las ecuaciones de Navier-Stokes [1979] y de los 13 momentos de Grad [1983], ésta última tomando en cuenta efectos de trayectoria libre media finita, se obtiene el resultado correspondiente a la condición a la frontera de deslizamiento.

En los casos en los que hay una velocidad tangencial relativa, la condición de frontera se formula en términos de los esfuerzos tangenciales. Así, se plantea la condición a la frontera de deslizamiento total en la forma:

$$(\underline{\tau} \cdot \hat{n}) \times \hat{n} = 0, \quad (1.12b)$$

y físicamente representa el hecho de que el fluido se desliza sobre la superficie del sólido al no ejercer fuerzas tangenciales sobre ésta.

De esta forma se han establecido las condiciones de frontera en los extremos de adherencia y deslizamiento, que son

casos extremos de la interacción en una interfase fluido-sólido.

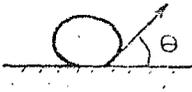
1.5. FORMULACION DEL PROBLEMA.

Se ha expuesto hasta ahora que la interacción en una interfase fluido-sólido se va a reflejar en las condiciones a la frontera. Una de las manifestaciones macroscópicas de la interacción entre dos medios es la tensión superficial (σ). Esta es la energía libre por unidad de área que se asocia a la superficie entre dos medios no miscibles. Cabe esperar que cambios en σ afecten el comportamiento macroscópico, modificando las condiciones a la frontera.

Si bien en esta tesis no se pretende determinar la relación explícita entre σ y condiciones de frontera, es importante hacer plausible la existencia de esta relación. La concepción más simple, no del todo correcta asociada a la existencia de la tensión superficial, es la de imaginar la presencia de una membrana separando dos medios; una σ grande representaría una membrana flexible y relativamente impermeable. Se dice en este caso que un fluido no moja al otro. En el caso opuesto de una σ pequeña, esta membrana sería un tanto difusa y permeable; el fluido se dice moja al otro medio. El efecto más importante desde el punto de vista termodinámico, es que esta energía libre asociada a la superficie introduce una discontinuidad en la presión al atravesar la interfase.

Cuando dos fluidos se encuentran en contacto con un

sólido, es común determinar la tensión superficial relativa entre uno de los fluidos y el sólido midiendo ángulos de contacto (θ).



Por ejemplo en el caso de una gota de agua en contacto con un sólido (ver figura), el ángulo de contacto caracteriza las propiedades de mojado.

El segundo fluido, el aire, se supone que solo juega un papel de testigo. Si $\theta > \pi/2$, θ es pequeña de modo que el fluido moja al sólido, mientras que si $\theta < \pi/2$, no moja y se dice que la superficie es hidrófoba. La teoría usual tiene sentido para sistemas en equilibrio. El punto aquí, es extender estas ideas al caso en el que no hay equilibrio y se presentan gradientes en la velocidad y presión en el sistema. La tensión superficial, cuando es grande, afectaría las condiciones de frontera permitiendo deslizamiento, al menos parcial. Si la tensión superficial es pequeña, cabe esperar que el fluido, al mojar al sólido, tienda a adherirse a éste.

Excepto en la parte que concierne al diseño experimental, y esto marginalmente, la relación entre tensión superficial y condiciones de frontera estará presente en forma implícita. Es decir, que el análisis subsecuente está basado en la hipótesis de que es posible cambiar las condiciones de frontera. El objetivo es el de determinar, en algún caso particular, el efecto que tendrían diferentes condiciones de frontera, entre los extremos de adherencia y deslizamiento.

Para poner de manifiesto el efecto de usar deslizamiento o adherencia como condiciones de frontera, se ha escogido el

problema bien conocido del movimiento de una esfera en un fluido viscoso e incompresible. En el siguiente capítulo se determinará la fuerza de arrastre que sufre la esfera, bajo aproximaciones relativamente fuertes y que serán discutidas en su momento, y la expresión correspondiente será usada para establecer la ecuación de movimiento de la esfera. La solución de ésta permitirá comparar el movimiento de la esfera cuando el fluido se adhiere o se desliza sobre su superficie. Esto es lo que permite establecer el tamaño máximo del efecto.

La predicción teórica da pie entonces al diseño de un experimento, relativamente sencillo, que permita confirmar la existencia y magnitud del efecto.

En este capítulo, se han presentado los principios básicos en los que se fundamentan las ecuaciones de la dinámica de fluidos. Así mismo, se establecieron las condiciones de frontera en sus extremos de adherencia y deslizamiento, que incorporan el tipo de interacción en la interfase fluido-sólido y finalmente, se ha formulado el problema a desarrollar, en el cual se aplican ambas condiciones de frontera para poder determinar el efecto.

CAPITULO II. ANALISIS TEORICO.

II.1. INTRODUCCION.

En este capítulo se expone el análisis del movimiento de una esfera en un fluido. La forma de tratarlo consiste en resolver primero el problema hidrodinámico, es decir, se determina la fuerza de arrastre o de fricción que se opone al movimiento de la esfera. Esta fuerza que depende de las condiciones a la frontera, se expresa en términos de un coeficiente de deslizamiento. A continuación, se resuelve el problema mecánico que consiste en el movimiento de una esfera en un campo gravitacional uniforme y bajo la acción de una fuerza de fricción debida al fluido. Finalmente se estima el tamaño del efecto desde varios puntos de vista.

II.1. FUERZA DE ARRASTRE.

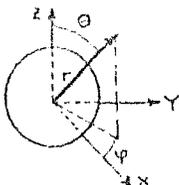
Se considera una esfera de radio a_0 , en reposo, en un fluido incompresible con una densidad ρ y viscosidad η . Se supone que el fluido se mueve uniformemente en la dirección Z y que lejos de la esfera (el origen) tiene un campo de velocidades \vec{u}_0 . Debido a que las ecuaciones son invariantes ante una transformación de Galileo, es equivalente considerar al fluido en reposo y a la esfera en movimiento uniforme. Ahora, se supone un movimiento muy lento, con lo cual se pueden minimizar los efectos de inercia, de tal forma que se puede despreciar el término inercial $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$. Además, debido a que el fluido es incompresible el campo de

velocidades es solenoidal. Así,

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad , \quad (2.1)$$

$$\eta \nabla^2 \vec{u} = \nabla P \quad . \quad (2.2)$$

Dada la simetría esférica, el campo de velocidades es sólo función de las coordenadas radial y azimutal de tal forma que $\vec{u} = \vec{u}(r, \theta)$.



Las condiciones de frontera que debe satisfacer \vec{u} son:

$$\vec{u} \Big|_{r \rightarrow \infty} = \vec{u}_0 \quad (2.3)$$

$$\hat{n} \cdot \vec{u} \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (2.4)$$

Esta última se refiere a que la componente normal de la velocidad en la superficie de la esfera es cero, por lo que el fluido no penetra a la superficie. Las condiciones restantes son

$$\vec{u} \times \hat{n} = 0 \quad , \quad (2.5a)$$

o bien,

$$\hat{\tau} \times \hat{n} = 0 \quad . \quad (2.5b)$$

El procedimiento a seguir, es el de resolver las ecuaciones (2.1) y (2.2), bajo las condiciones a la frontera (2.3), (2.4) y (2.5a) ó (2.5b), para determinar el campo de

velocidades. A partir de éste, se encuentran las componentes normal y tangencial de los esfuerzos, cuya integral sobre la superficie de la esfera da la fuerza de arrastre. Se definen el campo de velocidades y de presión como:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 \cdot T ,$$

$$P = \eta \vec{u}_0 \cdot \vec{S} ,$$

en donde T es un tensor esféricamente simétrico de la forma

$$T = f(r) I + g(r) \frac{\vec{r}\vec{r}}{r^2} , \quad \text{o en componentes, } T_{ij} = f \delta_{ij} + g \frac{x_i x_j}{r^2} ,$$

y S es un vector de la forma

$$\vec{S} = h(r) \frac{\vec{r}}{r} = h \hat{n} , \quad \text{o en componentes, } S_j = h \frac{x_j}{r} ,$$

en donde $f(r)$, $g(r)$ y $h(r)$, son funciones escalares aún indeterminadas. Así, se puede escribir el campo de velocidades y de presión en la forma

$$\vec{u} = f(r) \vec{u}_0 + \hat{n} (\hat{n} \cdot \vec{u}_0) g(r) , \quad (2.6)$$

$$P = \eta (\vec{u}_0 \cdot \hat{n}) h(r) . \quad (2.7)$$

Sustituyendo \vec{u} en componentes en las ecuaciones (2.1) y (2.2), se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_{ji} = 0 , \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} S_j = \eta \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} T_{ji} . \quad (2.9)$$

Desarrollando (2.8) se llega a

$$\frac{d}{dr} (f+g) + \frac{2}{r} g = 0, \quad \text{o bien, } f' = -g' - \frac{2}{r} g$$

y desarrollando (2.9) se llega a

$$h = rf'' + 2f' + \frac{2}{r}g, \quad \text{o bien,} \quad h' - \frac{h}{r} = g'' + \frac{2}{r}g' - \frac{g}{r^2}g.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene una ecuación diferencial lineal homogénea de 3º orden,

$$r^3g'''' + 5r^2g''' - 2rg'' - 4g = 0,$$

cuya solución proporciona las funciones escalares, que están dadas por:

$$\begin{aligned} f &= -2ar^2 + \frac{b}{r} - \frac{c}{3r^3} + d, \\ g &= ar^2 + \frac{b}{r} + \frac{c}{r^3}, \\ h &= -10ar + \frac{2b}{r^3}. \end{aligned}$$

Donde a, b, c y d, son constantes de integración. Sustituyendo f, g, y h en (2.6) se obtiene:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 \left[-2ar^2 + \frac{b}{r} - \frac{c}{3r^3} + d \right] + \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{u}_0) \left[ar^2 + \frac{b}{r} + \frac{c}{r^3} \right].$$

Si se usa la condición de frontera (2.3), se tiene que cuando $r \rightarrow \infty$, $d = 1$ y $a = 0$, por lo que

$$\vec{u} = \vec{u}_0 - b \frac{\vec{u}_0 + \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{u}_0)}{r} + c \frac{3\hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{u}_0) - \vec{u}_0}{r^3}.$$

Aplicando ahora la condición de frontera (2.4), se llega a la siguiente expresión

$$\vec{u} = \vec{u}_0 \left(1 - \frac{b}{r} - b \frac{a_0^2}{r^3} + \frac{a_0^3}{2r^3} \right) + \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{u}_0) \left[-\frac{b}{r} + 3b \frac{a_0^2}{r^3} - \frac{a_0^3}{r^3} \right].$$

Si $b = \frac{1}{2} a_0 \left(1 + \frac{1}{2} \zeta \right)$, en donde ζ es un coeficiente que llamaremos de deslizamiento, el campo de velocidades tiene la forma:

$$\begin{aligned} \vec{u} = \vec{u}_0 \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \zeta \right) \frac{a_0}{r} - \frac{1}{4} \zeta \left[\frac{a_0}{r} \right]^3 \right] \\ + \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{u}_0) \left[-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \zeta \right) \frac{a_0}{r} + \frac{3}{4} \zeta \left[\frac{a_0}{r} \right]^3 \right], \end{aligned} \quad (2.10)$$

que expresado en componentes queda:

$$u_r = u_0 \cos \theta \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2} \zeta \right) \frac{a_0}{r} + \frac{1}{2} \zeta \left[\frac{a_0}{r} \right]^3 \right], \quad (2.11)$$

$$u_\theta = -u_0 \sin \theta \left[1 - \left(\frac{1 + \zeta/2}{2} \right) \frac{a_0}{r} - \frac{1}{4} \zeta \left[\frac{a_0}{r} \right]^3 \right]. \quad (2.12)$$

Hasta ahora, se han aplicado dos condiciones a la frontera, (2.3) y (2.4) y falta aplicar una. Así, cuando $\vec{u} \cdot \hat{n} = 0$, entonces $\zeta = 1$ y se tiene la condición de adherencia y cuando $(\vec{\tau} \cdot \hat{n}) \times \hat{n} = 0$, entonces $\zeta = 0$, teniendo la condición de deslizamiento. Entonces, dado que se han satisfecho todas las condiciones de frontera y no hay constantes libres, se puede asegurar que la solución es única.

La resistencia que ofrece el fluido a la esfera, está dada por la suma de los esfuerzos normales y tangenciales; así

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_S (\vec{\tau} \cdot \hat{n}) dS \\ &= -a_0^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta (\hat{e}_r \tau_{rr} + \hat{e}_\theta \tau_{r\theta}) d\theta, \end{aligned} \quad (2.13)$$

en donde \hat{e}_r y \hat{e}_θ son los vectores unitarios, que en coordenadas cartesianas son:

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \hat{i} \sin\theta \cos\varphi + \hat{j} \sin\theta \sin\varphi + \hat{k} \cos\theta, \\ \hat{e}_\theta &= \hat{i} \cos\theta \cos\varphi + \hat{j} \cos\theta \sin\varphi + \hat{k} \sin\theta, \end{aligned}$$

y τ_{rr} y $\tau_{r\theta}$ son las componentes del tensor de esfuerzos y están dadas por [Landau, 1959]

$$\tau_{rr} = -p + 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \text{y} \quad \tau_{r\theta} = \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right].$$

Sustituyendo los vectores unitarios y las componentes del tensor de esfuerzos en (2.13) se obtiene que,

$$\vec{F} = 4\pi\eta a_0 \vec{u}_0 \left(1 + \frac{1}{2} \zeta \right), \quad (2.14)$$

que es la fuerza de arrastre ejercida sobre la esfera. Claramente se encuentra en la dirección de \vec{u}_0 . Ahora se observa que cuando

$$\zeta=0, \quad \vec{F} = 4\pi\eta a_0 \vec{u}_0 \quad (2.15a)$$

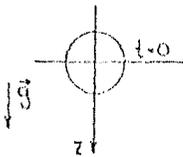
y $\zeta=1,$ $\vec{F} = 6\pi\eta a_0 \vec{u}_0 \quad (2.15b)$

en donde (2.15b) se conoce como la ley de Stokes.

11.3. ANALISIS MECANICO.

Lo que se pretende ahora, es plantear el problema que presenta el análisis mecánico del movimiento de una esfera inmersa en un fluido y sujeta a una fuerza de fricción como la calculada en la sección anterior.

Se considera un fluido viscoso, incompresible e infinito en reposo, caracterizado por su densidad ρ' y viscosidad η . En lo



que se refiere a la esfera, ésta se caracteriza por su densidad ρ y radio a_0 , localizando su centro, en el tiempo $t=0$, en el origen de los ejes coordenados, de tal manera que su

movimiento sea en la dirección del eje z , paralelo al campo gravitacional. Si parte del reposo se tiene que $\dot{z}=0$, en $t=0$. Ahora, por la segunda ley de Newton, la masa por la aceleración es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre la esfera. Tomando la dirección hacia abajo positiva, se tiene

$$m\ddot{z} = mg - m'g - F_H, \quad (2.16)$$

en donde m es la masa de la esfera, m' la masa del fluido desplazado por la esfera, mg la fuerza debida a la gravedad, $m'g$ es la fuerza de flotación y F_H es la fuerza de arrastre. A velocidades pequeñas, ésta es proporcional a la velocidad (ver ec. 2.15), entonces:

$$F_H = 4\pi\eta a_0^2 \left[1 + \frac{1}{2} \zeta \right] = b_7 \dot{z}. \quad (2.17)$$

Sustituyendo (2.17) en (2.16), se tiene

$$m\ddot{z} = mg - m'g - b_T \dot{z} .$$

Sean $\beta = \frac{m - m'}{m} g = \frac{\rho - \rho'}{\rho} g$ y $\gamma = \frac{b}{m} \tau$. (2.17')

La ecuación por resolver es

$$\ddot{z} = \beta - \gamma \dot{z} ,$$

con las condiciones iniciales $z(0) = \dot{z}(0) = 0$.

Resolviendo la ecuación se obtiene:

$$\dot{z} = \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t})$$

y por tanto

$$z_T = \frac{\beta}{\gamma} (\gamma t - 1 + e^{-\gamma t}) . \quad (2.18)$$

Quando la esfera empieza a moverse su velocidad es cero, la fuerza de resistencia es cero y la aceleración inicial es g . A medida que aumenta la velocidad, también aumenta la fuerza de resistencia, hasta que finalmente se igualan en magnitud, la aceleración se anula y la velocidad ya no aumenta. Se dice entonces que la esfera alcanza su velocidad terminal, de tal forma que cuando $t \rightarrow \infty$, $\dot{z} \rightarrow u_0 = \frac{\beta}{\gamma}$.

Si lo que se espera es encontrar un efecto que va a depender sólo de las condiciones a la frontera entre los extremos (2.15a) o (2.15b), se deben considerar dos esferas "idénticas" en cuanto a radio y densidad se refiere, pero cuyas superficies sean diferentes; ésto es, una con una superficie hidrófila y otra con una superficie hidrófoba. Se espera entonces que sus velocidades sean diferentes al estar en función del coeficiente de

deslizamiento.

Una forma de analizar la solución al problema consiste en fijar un tiempo de caída y estimar la diferencia en la distancia recorrida por cada esfera. Sea Z_k la distancia alcanzada a los $k\Delta t$ segundos (t_k), tal que la diferencia entre Z_k y Z_{k-1} la llamaremos dk . dk' es la diferencia en el caso de deslizamiento. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta dk &= dk - dk' = (Z_k - Z_{k-1}) - (Z_k' - Z_{k-1}') \\ &= (Z_k - Z_k') - (Z_{k-1} - Z_{k-1}') \\ &= \Delta Z_k - \Delta Z_{k-1}, \end{aligned}$$

que es la diferencia en recorrido entre las dos esferas en ese intervalo. Como lo que interesa es la diferencia en el recorrido total, se sigue que:

$$\sum_{k=0}^n \Delta dk = \sum_{k=0}^n \Delta Z_k - \sum_{k=0}^n \Delta Z_{k-1} = \Delta Z_n.$$

Para calcular Δdk , de (2.10) se tiene:

$$\begin{aligned} dk &= \frac{\beta}{\gamma^2} \left[\gamma(t_k - t_{k-1}) + e^{\gamma t_k} - e^{\gamma t_{k-1}} \right] \\ &= \frac{\beta}{\gamma^2} \left[\gamma \Delta t + (1 - e^{-\gamma \Delta t}) e^{\gamma t_k} \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

lo que lleva a:

$$\Delta dk = \beta \left[\frac{\Delta t}{\gamma} - \frac{\Delta t}{\gamma} + \frac{e^{-\gamma t_k} (1 - e^{\gamma \Delta t})}{\gamma^2} - \frac{e^{-\gamma t_{k-1}} (1 - e^{\gamma \Delta t})}{\gamma^2} \right].$$

Si se considera el caso ideal, en donde

$$\rho x = \rho x' \quad , \quad \alpha_0 = \alpha_0' \quad \text{para} \quad \zeta=0 \quad \text{y} \quad \zeta'=1,$$

y además $\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{3}{2}$, se tiene:

$$\Delta dx = \frac{\beta}{4\gamma^2} \left[3\gamma' \Delta t + 9e^{-\gamma' t K} (1 - e^{-\gamma' \Delta t}) - 4e^{-\frac{9}{2}\gamma' t} (1 - e^{\frac{9}{2}\gamma' \Delta t}) \right] . \quad (2.20)$$

Este es el valor máximo que puede haber en la diferencia de recorridos.

Otra forma de análisis, consiste en fijar una distancia en el recorrido y estimar la diferencia de tiempos de caída entre

las dos esferas; partiendo de (2.10), se tiene:

$$1 + \frac{Z\gamma^2}{\beta} = \gamma t + e^{-\gamma t} .$$

Sean $X_0 = \gamma_0 t_0$, $X_1 = \gamma_1 t_1$ y $A = 1 + \frac{Z\gamma^2}{\beta}$, con $Z_0 = Z_1$, entonces:

$$A_0 = X_0 + e^{-X_0} \quad \text{y} \quad A_1 = X_1 + e^{-X_1} .$$

Estas dos ecuaciones se resuelven numéricamente, encontrando los valores de X_0 y X_1 . De aquí que:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{X_1}{\gamma_1} - \frac{X_0}{\gamma_0} .$$

Para determinar estas diferencias en forma cuantitativa se usó el sistema más simple y accesible. Así, se escoge un balón de acero

y como fluido agua bidestilada con los siguientes parámetros:

$$\eta_{\text{AGUA}} = 0.01 \quad \text{cm}^2/\text{s.}$$

$$\rho_{\text{AGUA}} = 1.0 \quad \text{gr/cm}^3.$$

$$\rho_{\text{ACERO}} = 7.8 \quad \text{gr/cm}^3.$$

$$\alpha_0 = 0.158 \quad \text{cm.}$$

Los cálculos muestran:

1. Cuando se fija una distancia de caída de 30 cm.,
la diferencia en tiempos de caída es de $\Delta t = 9.919 \times 10^{-4}$ seg.,
en donde $t_0 = 0.266$ seg.

De aquí, se puede observar que Δt es del orden de milésimas de segundo, lo cual lleva a considerar la realización de un experimento bajo la otra forma de análisis, esto es, fijando tiempos de caída.

2. Cuando se fija el tiempo de caída en 0.27 seg.,
la diferencia en recorridos es de $\Delta Z = 0.227$ cm.
en donde $Z_0 = 30.7$ cm.

En el desarrollo hidrodinámico del problema, se ha supuesto que la esfera lleva una velocidad constante, correspondiente a la velocidad terminal, aún cuando éste hecho se discutirá posteriormente, vale la pena en este momento calcular el orden de magnitud de ésta. Se mencionó que la velocidad terminal se alcanza cuando $t \rightarrow \infty$ por lo que $\dot{z} \rightarrow u_0 = \beta/\gamma$, de

esta forma se tiene que:

$$u_0(\text{sl}) \cong 5547.78 \text{ cm/s.} \quad \text{y} \quad u_0(\text{sr}) \cong 3698.52 \text{ cm/s.}$$

Donde: SL = slip = deslizamiento y ST = stick = adherencia.

Para estimar el tiempo que le toma a la esfera alcanzar su velocidad terminal, calculamos el tiempo en que su velocidad es 90% de la terminal. Así,

$$\dot{z} = \frac{\beta}{\gamma} [1 - e^{-\gamma t}] = u_0 [1 - e^{-\gamma t}],$$

es decir,

$$\tau = -\frac{1}{\gamma} \text{Ln} \left[1 - \frac{\dot{z}}{u_0} \right],$$

ahora $\dot{z} \cong 0.9 u_0$, por tanto:

$$\tau \cong -\frac{1}{\gamma} \text{Ln} 0.1 = \frac{\text{Ln } 10}{\gamma}.$$

De tal forma que cuando hay adherencia, $\tau \cong 10 \text{ s.}$

y cuando hay deslizamiento, $\tau \cong 15 \text{ s.}$

La distancia recorrida de 0 a τ está dada por:

$$z\tau = u_0(\gamma\tau - 1 + e^{-\gamma\tau}),$$

por lo tanto: $z\tau(\text{sl}) \cong 7779.81 \text{ cm.}$ y $z\tau(\text{sr}) \cong 5181.41 \text{ cm.}$

II.3. DISCUSION.

En esta sección se van a discutir las principales aproximaciones introducidas en el cálculo de la fuerza de arrastre F_H , ya que el análisis mecánico es formalmente exacto, dada la F_H .

Se ha supuesto un movimiento uniforme ($\dot{u}_0 = \text{cte.}$), lento ($R \ll 1$) y sin rotación.

Si \dot{u}_0 no es constante, entonces la esfera lleva una velocidad en función del tiempo $\dot{u}(t)$. Este problema fue analizado por Basset [1888] y extendido por Landau [1959], obteniendo para el caso de adherencia:

$$F_H = 2\pi\rho a_0^3 \left[\frac{3\nu}{a_0^2} u_0(t) + \frac{1}{\nu} \frac{du_0(t)}{dt} + \frac{3}{a_0} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{du_0}{dt} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right].$$

El primer término es el correspondiente a la ley de Stokes (b_2^2). El segundo ($1/2 m^* \ddot{z}$) introduce la llamada "masa aparente". El último introduce un término de memoria en la aceleración. Sin entrar en el estudio de las consecuencias que tendrían estos dos términos en el análisis mecánico, podemos estimar su magnitud en la siguiente forma:

1. Al quedar $m + m^*/z$, como coeficiente de la aceleración, la aproximación usada es buena si m^*/z puede despreciarse con respecto a m . Para balín y agua se tiene $m^*/z_m \sim 0.06$, que puede despreciarse con respecto a 1 dado que se tiene $m(1 + m^*/z_m)z$.
2. El término de memoria es de orden $\frac{\sqrt{\nu}}{a_0} \frac{u_0}{\sqrt{t}}$ y el primero es de orden $\frac{\nu u_0}{a_0^2}$, por lo que aquel podrá despreciarse si $\nu t \gg a_0^2$, es decir, para tiempos relativamente grandes ($t \geq 3$ seg). Para tiempos menores, es de esperarse, este término debe jugar un papel comparable y el presente análisis podría no ser adecuado.

En cuanto a la lentitud supuesta, que se traduce en la

linearización de las ecuaciones de Navier-Stokes ($R=0$), Oseen (ver Lamb 1945), introdujo una aproximación en 1911 que permitió, posteriormente, mejorar el resultado de Stokes. El resultado, válido para $R \leq 0.5$, es

$$F_H = 6\pi\mu a v_0 \left(1 + \frac{3R}{8} + \dots \right),$$

que si R excede un valor de 0.5, es inútil para calcular el arrastre. Correcciones sistemáticas han sido introducidas posteriormente por Proudman y Pearson [1975], pero ninguna de ellas permite manejar números de Reynolds mayores a 0.5. Chester y Breach [1969] continúan con este análisis incluyendo potencias mayores del número de Reynolds. Extienden la serie para la fuerza de arrastre de una esfera de la siguiente manera:

$$F_H = \frac{6\pi}{R} \left[1 + \frac{3}{8} R + \frac{2}{30} R^2 \log R + \frac{\rho}{40} \left(\gamma + \frac{5}{9} \log 2 - \frac{529}{500} \right) R^2 + \frac{27}{80} R^3 \log R + O(R)^3 \right],$$

donde $\gamma = 0.5722$ es la constante de Euler.

Este resultado es decepcionante porque, en comparación con experimentos, indica que el rango de aplicabilidad se aumenta escasamente. Chester y Breach concluyen que la expansión de la serie es de valor práctico sólo en el rango $0 < R < 0.5$. Sin embargo, Dennis y Walker [1971] encuentran que para valores abajo de $R=0.3$, la serie da una mejor aproximación que cualquier otra solución asintótica para el arrastre. Así, a pesar de la aproximación introducida, es difícil estimar el error; los experimentos indican una desviación grande que teóricamente no ha sido posible justificar.

En óste capítulo, con base en el problema formulado, se ha introducido un modelo que permite ver el efecto que tiene el cambiar las condiciones a la frontera, entre los casos extremos de adherencia y deslizamiento. Se ha supuesto que un cambio en la tensión superficial produce un cambio en las condiciones a la frontera y se predice el tamaño del efecto máximo. Este modelo permite proponer un experimento para observar la existencia del efecto. Esto se presenta en el siguiente capítulo.

CAPITULO III. DESARROLLO EXPERIMENTAL.

III.1. INTRODUCCION.

En este capítulo se presenta la descripción de un dispositivo experimental que ha sido diseñado de acuerdo al problema formulado. Se expone el procedimiento seguido, las características del fluido y de las esferas y los inconvenientes que han tenido que ser enfrentados. Finalmente, se calcula la propagación de errores con el fin de determinar si el orden de magnitud de la incertidumbre es mayor ó menor que la del efecto.

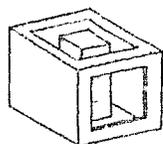
III.2. DESCRIPCION DEL DISPOSITIVO EXPERIMENTAL.

Para completar el problema se propone un experimento por medio del cual se pueda observar el efecto que causa sobre la fuerza de arrastre el cambio en la tensión superficial.

Dado el planteamiento teórico del problema, lo que se requiere es observar el movimiento de dos esferas en un fluido. De esta manera se propone el siguiente dispositivo. Una caja que contiene al fluido, que en este caso es agua bidestilada debido a las características bien conocidas que presenta; su viscosidad, que aún cuando se determina previamente con un viscosímetro, en general, se conoce bien esta información para diferentes temperaturas Handbook [1902-1983] y así mismo, su densidad. Por otro lado, el fluido debe mantenerse libre de impurezas por lo que es necesario que la caja permanezca cerrada, evitando de esta

forma cualquier tipo de contaminación. Debido a que el agua debe permanecer en reposo, se depositan en ésta unos hilos muy finos de tal forma que si llegaran a presentarse corrientes, éstas puedan ser observadas.

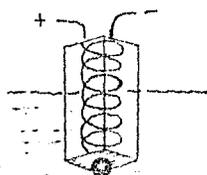
Para asegurar que no exista variación de la viscosidad del fluido, es de gran importancia mantener constante su temperatura. Esto se logra colocando la caja que contiene agua en un baño térmico; esto es, dentro de otra caja que contiene agua a



una temperatura constante y uniforme por medio de un control de temperatura previamente calibrado. Así mismo, para que los cambios de la temperatura ambiente no afecten el experimento, el baño térmico se encuentra aislado por medio de placas aislantes a excepción del frente, que debido a la necesidad de la visibilidad contiene dos placas de vidrio entre las cuales se encuentra una capa de aire.

En lo que se refiere a las esferas, éstas deben cumplir rigurosamente con ciertas características si se pretende observar el efecto. Una de ellas es la que se refiere a la superficie. Se hizo mención del efecto que produce la rugosidad en la superficie; así, se pretende que ésta sea la mínima para lo cual se deben observar las superficies por medio de un microscopio electrónico. Con relación a su tamaño y densidad, en el inicio del desarrollo experimental se trabajó con esferas cuya densidad fuera aproximadamente igual a la del agua, buscando con esto que la velocidad de caída fuera lenta y se pudieran obtener números de Reynolds muy pequeños. Por ejemplo, usando pelotas de ping-pong

llenas de agua. En este caso se observa que presentan efectos de orilla debido a su tamaño y por consiguiente, una serie de movimientos que no son controlables. Posteriormente se trabajó con esferas más pequeñas y de vidrio, debido a la homogeneidad del material y a la facilidad relativa para cubrirlas con otros materiales, cambiando la tensión superficial relativa. Se presentó en cambio el problema de poco peso y sus trayectorias presentaron una serie de desviaciones no controlables, ni reproducibles. Actualmente se está trabajando con balines de acero. Mediante procedimientos químicos se están preparando las superficies, de tal forma que dos esferas "idénticas" en tamaño, densidad y rugosidad, una tenga una superficie hidrófila y la otra una superficie hidrófoba. Se han escogido los balines con un diámetro muy pequeño, debido a la hipótesis de que la esfera se mueve en un fluido infinito y de esta forma minimizar los efectos de orilla. Por otro lado hay que asegurar en lo posible que la esfera siga una trayectoria recta, por lo que debe trasladarse a lo largo del eje de la caja. Un punto importante es que, suponiendo que por un cambio en la tensión superficial se va a observar el efecto, no se debe contaminar la superficie. Por



estas razones se ha diseñado un dispositivo que automáticamente suelta las esferas, las cuales se encuentran inmersas en el fluido; las ventajas que éste presenta, se deben en primer lugar al hecho de que como el

dispositivo se encuentra fijo, la esfera siempre saldrá del mismo punto de la caja lo cual asegura que la esfera sólo sufrirá desviaciones sistemáticas en su trayectoria. Las otras ventajas, que se evitan sin el contacto manual con la esfera, son que se

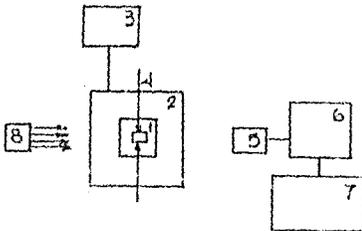
mantiene libre de impurezas su superficie y se puede lograr mayor reproducibilidad.

III.3. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL.

Esta sección se refiere al procedimiento seguido para llevar a cabo las mediciones. Como se mencionó en el capítulo anterior, hay dos formas de obtener las medidas: fijar un tiempo de caída y medir la distancia recorrida o fijar una distancia y medir el tiempo de caída. Debido a que el desarrollo experimental se inició conjuntamente con el desarrollo teórico, en un principio parecía factible fijar una distancia y medir el tiempo de caída; sin embargo, hecho que se observó primero experimentalmente, es que el tiempo de caída es del orden de décimas de segundo y como consecuencia, manualmente es imposible obtener una medida reproducible. De tal forma que se optó por basar el análisis en la fotografía; así, la iluminación fue proporcionada por un estroboscopio cuya frecuencia está dada en función de parámetros tales como distancia focal, abertura del diafragma, tipo de película, etc. y entonces surge el problema de la intensidad luminosa, la cual es insuficiente. Por ésta razón se plantea la necesidad de utilizar dos estroboscopios, asegurando que la intensidad luminosa es la requerida; sin embargo, es difícil lograr que sus frecuencias se acoplen, lo que conduce a reproducciones fotográficas mal definidas, por lo que las medidas no pueden ser confiables. Por último, se propone otro método que es el que actualmente se está trabajando. Este consiste en la filmación por medio de video, de tal forma que con una cámara se filma la caída de la esfera y ésta se reproduce en una

video-grabadora, con la gran ventaja de que la imagen se puede observar inmediata y repetidamente antes de iniciar cualquier análisis. Una vez obtenida la imagen deseada, se procede a digitizarla; ésto es, se barre la imagen y a cada punto se le asigna un valor numérico, el cual se procesa en una computadora proporcionando los datos deseados. Este proceso se encuentra en desarrollo.

Se pueden resumir éstas dos secciones presentando el siguiente esquema:



1. caja que contiene al fluido.
2. baño térmico.
3. control de temperatura.
4. dispositivo de soldado.
5. cámara de video.
6. video-grabadora.
7. computadora.
8. fuente luminosa.

III.3. PROPAGACION DE ERRORES.

Cuando se presentó el modelo teórico, se estimó en forma cuantitativa que para un tiempo de caída fijo de 0.27 s. la diferencia de recorridos máxima es aproximadamente de 0.227 cm. La importancia de estimar posibles errores se debe al hecho de que el efecto es muy pequeño, por lo que si la suma de las incertidumbres o del error es muy grande o del orden de magnitud, es inobservable el efecto. Para estimar el error se toma en cuenta lo siguiente. Cuando se filma la trayectoria la cámara proporciona 30 cuadros por segundo de los cuales sólo 10 contienen

imágenes. Dado que la cámara se encuentra fija, todos los cuadros van a mostrar manchas debidas a imperfecciones del cristal o a otras causas, por lo que éstas se eliminan de la toma dejando sólo la parte de interés (esto es, se restan los cuadros), obteniendo la trayectoria del balón en el tiempo [FIG.11].

Como se mencionó anteriormente, lo ideal es que la esfera lleve una velocidad constante de tal forma que la diferencia en las posiciones ΔZ sea constante [FIG.2] y como ésta se alcanza a tiempos grandes, lo que se espera entonces, es que al graficar ΔZ vs t se obtenga la [FIG.3].

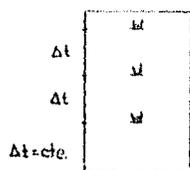


FIG. 1.

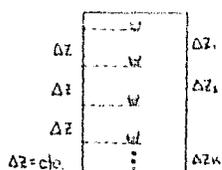


FIG. 2.

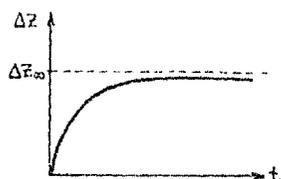


FIG. 3.

De los parámetros que se manejan no todos pueden considerarse "exactos". Por parte del agua se tiene su densidad ρ' y su viscosidad η , que aún cuando tienen una incertidumbre, ésta puede despreciarse por el hecho de que se mantiene constante cuantas veces se repita el experimento, en ambos casos. De esta forma, los parámetros cuya incertidumbre influye son: el radio de la esfera a_0 , su densidad ρ y debido a que no es posible sincronizar en todas las tomas el instante de soltar la esfera con la filmación, entonces de una esfera a otra habrá un tiempo diferente de que cae a que la tome la cámara [FIG.4], por lo que el tiempo también tiene incertidumbre.

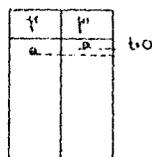


FIG. 4.

La ecuación (2.19) proporciona la diferencia en posición como función del coeficiente de deslizamiento y de los parámetros α_0 , ρ , ρ' , η y ζ ; pero éstos se encuentran comprendidos en γ , β y t , de aquí que $dk = dk(\gamma, \beta, t)$, además $\beta = \beta(m)$ y $\gamma = \gamma(\alpha)$, entonces se sigue que:

$$\delta dk = \left[\frac{\partial dk}{\partial \alpha_0} \right]_{\alpha_0, t} \delta \alpha_0 + \left[\frac{\partial dk}{\partial m} \right]_{\alpha_0, t} \delta m + \left[\frac{\partial dk}{\partial t} \right]_{\alpha_0, m} \delta t .$$

Lo que se pretende es tomar δdk como un máximo, es decir, se tiene una expresión de la forma:

$$\delta dk = A \delta \alpha_0 + M \delta m + T \delta t , \quad (3.1)$$

en donde:

$$A = \alpha_{01} + \alpha_{02} + \alpha_{03} + \dots + \alpha_{0n},$$

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n,$$

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n,$$

los cuales dependen del coeficiente de deslizamiento, $A(\zeta)$, $M(\zeta)$ y $T(\zeta)$. Para que los valores de A , M y T sean máximos, se toman los valores absolutos de sus componentes. Desarrollando se obtiene:

$$A = -\frac{\alpha\beta}{m\gamma^2} \Delta t \left[1 - e^{-\gamma t \kappa} (1 + \gamma t \kappa) \right] .$$

$$M = \frac{\alpha \alpha_0 \beta}{m^2 \gamma^2} \Delta t \left[1 - e^{-\gamma t \kappa} (1 + \gamma t \kappa) \right] + \frac{m^2}{m^2 \gamma} g \Delta t (1 - e^{-\gamma t \kappa}) .$$

$$T = \beta \Delta t e^{-\gamma t \kappa} ,$$

que sustituyendo en (3.1) se llega a:

$$\delta dk = \Delta t \left\{ -\frac{\alpha\beta}{m\gamma^2} \left[1 - e^{-\gamma t \kappa} (1 + \gamma t \kappa) \right] \delta \alpha_0 + \left[\frac{\alpha\beta\alpha_0}{m^2 \gamma^2} \left\{ 1 - e^{-\gamma t \kappa} (1 + \gamma t \kappa) \right\} + \frac{m^2}{m^2 \gamma} g (1 - e^{-\gamma t \kappa}) \right] \delta m + \beta e^{-\gamma t \kappa} \delta t \right\} .$$

Como $\beta = \frac{m - m'}{m} g = \frac{\Delta m}{m} g = \left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g$, se sigue que:

$$\delta dk = \Delta t g \left\{ -\frac{\Delta m}{m'} \frac{a}{m'} \left[1 - e^{-\gamma t K} (1 + \gamma t K)\right] \delta a + \frac{\Delta m}{m'} \gamma e^{-\gamma t K} \delta t + \left[\frac{\Delta m}{m'} \frac{a a_0}{\gamma m^2} \left\{1 - e^{-\gamma t K} (1 + \gamma t K)\right\}^{-1} + \frac{\Delta m}{m'} \frac{m'}{m \Delta m} g (1 - e^{-\gamma t K}) \right] \delta m \right\} .$$

Como lo que se quiere es δdk máxima, se toma $\zeta=1$ de tal forma que:

$$\delta dk = \frac{2g \Delta t a_0^2 (\rho - \rho')}{9 \rho^2 v} \left[\gamma \delta t e^{-\gamma t K} - \left(1 - e^{-\gamma t K} (1 + \gamma t K)\right) \frac{\delta a_0}{a_0} + \left(1 - e^{-\gamma t K} (1 + \gamma t K) + \frac{\rho'}{\rho - \rho'} (1 - e^{-\gamma t K})\right) \frac{\delta m}{m} \right] . \quad (3.2)$$

Se considera al mismo sistema que se usó en el desarrollo teórico que consiste en un balín de acero y agua bi-distilada con los siguientes parámetros: $\eta_{\text{AGUA}} = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$, $\rho_{\text{AGUA}} = 1.0 \text{ gr/cm}^3$, $\rho_{\text{ACERO}} = 7.8 \text{ gr/cm}^3$ y $a_0 = 0.158 \text{ cm}$.

Se toma $K=10$, por el hecho de que se tienen 10 tomas por cada filmación, debido a la distancia recorrida y a las características de la cámara. Los valores de δa y δm son medidos de acuerdo a la precisión que proporcionan los instrumentos y en éste caso son: $\delta a = 0.002 \text{ cm}$ y $\delta m = 0.003 \text{ gr}$. El valor de $\delta t = 1/60 \text{ seg.}$, está dado por la velocidad de la cámara, el valor de γ correspondiente a $\zeta=1$ es $\gamma = 0.154$. De esta forma, si se sustituyen todos los valores en la ecuación (3.2) se obtiene el valor del error máximo, que es:

$$\delta d_{10} \cong 0.22 \text{ cm}.$$

Lo que interesa ahora es comparar el orden de magnitud del efecto con el del error. Así, se tiene que cuando $\delta d \ll \Delta d$, el caso ideal, el efecto es perfectamente observable por lo que el modelo teórico y el experimento, a pesar de su sencillez y de la serie de aproximaciones hechas, se puede considerar bastante bueno. Cuando $\delta d < \Delta d$ ó $\delta d \sim \Delta d$, el efecto es difícilmente observable. En éste caso, $\delta d \gg \Delta d$ por lo que a priori no se puede observar; sin embargo, se estimó que para $K=30$ resulta que $\Delta d \approx 1.3$ y $\delta d \approx 0.2$. Este hecho abre varias posibilidades que se centran en disminuir el valor de δt que es el mayor. Así es posible disminuirlo usando una cámara de video más rápida de manera que pueda proporcionar más cuadros por segundo, lo que aseguraría un valor menor; ésta alternativa en principio parece buena, sin embargo en el laboratorio no se cuenta con una cámara de tales características, lo que lleva a pensar en otra posibilidad, como es dar a la esfera una velocidad inicial que pudiera acercarse a su velocidad terminal, esto aumentaría el tamaño del efecto. También se podría tomar en cuenta que los estrobotacs se pudieran acoplar, lo que llevaría a que uno puede escoger la frecuencia de acuerdo al número de imágenes deseadas. En fin, a pesar de tener que buscar alguna alternativa ó modificación del experimento, ésto no afecta el que se pueda pensar que el modelo es bueno y que el efecto es observable.

III.4. VALIDEZ DEL MODELO.

Durante el proceso experimental se han presentado una serie de efectos que vale la pena mencionar.

En lo que se refiere a las trayectorias seguidas por los balines, se ha observado que sufren una desviación. Esta desviación se puede deber a varias causas. Por un lado se tiene que el diámetro del balín, que es de 0.30 cm, es muy pequeño y se esperaría que los efectos de orilla que pudiera sentir, dado que se mueve en una caja cuyas dimensiones son 20x20x50cm, fueran mínimos, sin embargo no presenta trayectorias rectas. Estos efectos, en última instancia, se espera que no sean un factor limitante para determinar el efecto buscado, puesto que se ha observado que en todos los recorridos, la esfera sufre el mismo tipo de desviación y si en el análisis minucioso es reproducible se podrá despreciar. Por otro lado, dada la distancia que recorre el balín, en ningún momento alcanza su velocidad terminal, pero no se puede aumentar la distancia de recorrido, por el hecho de que en el momento de realizar la filación se presentaría un error de paralaje muy grande, el cual no permitiría un análisis confiable. De ésta manera, es cierto que existen efectos no tomados en cuenta por el modelo teórico, sin embargo los resultados experimentales obtenidos hasta el momento, son del orden de magnitud de los obtenidos teóricamente, hecho que proporciona un incentivo para continuar analizando éste problema.

En éste capítulo se ha presentado una descripción, tanto del dispositivo experimental, como del procedimiento seguido en todo su desarrollo. Se presentaron las características tanto del fluido como de la esfera, algunos de los inconvenientes que han tenido que ser enfrentados y una estimación de la propagación del error, encontrándose que éste no cubre necesariamente el efecto deseado.

CAPITULO IV. RESUMEN, CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS.

Se han presentado los aspectos generales que rigen el comportamiento de los fluidos en movimiento. El problema específico que se ha tratado, consiste en el movimiento uniforme de una esfera en un fluido viscoso, incompresible e infinito. Se ha propuesto que cambiando la tensión superficial en la superficie de la esfera, pueden cambiarse las condiciones a la frontera del caso usual de adherencia a aquel en que hay deslizamiento. Así, se obtiene un efecto debido a que cuando la superficie de la esfera es hidrófoba, se espera que exista deslizamiento, al menos parcial y cuando la superficie es hidrófila, lo que se espera es que haya adherencia.

El efecto ha sido predicho a partir de un modelo sencillo, que consiste en la caída de un cuerpo en el que la fuerza de fricción es la que manifiesta las condiciones a la frontera. Esta depende de un coeficiente de deslizamiento y éste a su vez, supongamos, depende de la tensión superficial; ésta es la forma en que la parte hidrodinámica interviene en el modelo teórico. Una vez establecida la posible existencia de un efecto, por medio de un cálculo teórico, se propone un desarrollo experimental para establecer la existencia real del fenómeno.

Durante el desarrollo del problema se han introducido una serie de aproximaciones, un tanto inconsistentes, que es necesario mencionar. Cuando se determina la fuerza de arrastre, se considera que la esfera lleva una velocidad constante. Sin embargo, en el problema mecánico la esfera parte del reposo y en

ningún momento su velocidad es constante; así mismo, en el desarrollo experimental, la distancia que recorre (30 cm), es tan pequeña, que siempre se va acelerando. La estimación de la velocidad terminal, en cada caso, es $u_{ST}^* \cong 55.47$ m/s y $u_{ST}^* \cong 36.98$ m/s, las cuales se alcanzarían en una distancia de $Z_{OL} \cong 71.3$ m y $Z_{OT} \cong 31$ m, distancia que es muy difícil poder considerar en un laboratorio. Por otro lado, la fuerza de arrastre se calcula partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes, linearizadas bajo la hipótesis de que el movimiento de la esfera es lento. Es decir, que el número de Reynolds, que es el que contribuye a la linearización de las ecuaciones, se considera pequeño ($Re \ll 1$). Dada la velocidad media que se obtiene en el experimento, se estima que el número de Reynolds es del orden de 50 000 y esto invalida el tratamiento. En última instancia, el modelo describiría la etapa inicial del movimiento. Sin embargo, las predicciones son cuantitativamente buenas, pues experimentalmente se ha obtenido, que el balón recorre los 30 cm. en un tiempo aproximadamente de 0.27 s., lo cual coincide con la predicción teórica.

En el desarrollo experimental, además de encontrar que no se alcanza la velocidad terminal y que el número de Reynolds es muy grande, se ha podido observar la presencia de efectos de orilla, debidos tanto a la superficie, como a las paredes de la caja, como al fondo de la misma; sin embargo, se ha notado que éstos efectos son sistemáticos y pequeños, de tal forma que se pueden ignorar y por tanto no afectan el efecto buscado.

Todos éstos problemas son factores que definitivamente hacen pensar que el modelo no describe lo que se desea observar, sin embargo experimentalmente se ha visto que los órdenes de magnitud del modelo son correctos y que las inconsistencias se pueden tomar como aproximaciones sin caer en un grave error.

Mostradas éstas aproximaciones, se propone el estudio del problema en el cual sean tomadas en cuenta. Se está realizando teóricamente un análisis del problema, en el que se incluye el efecto de la aceleración. Así mismo se están estudiando experimentalmente los efectos de orilla. Lo que parece muy difícil de determinar experimentalmente, es lo que se refiere a los efectos intermedios entre los extremos de adherencia y deslizamiento, debido a que si en los extremos se encuentra que el efecto es muy pequeño, parece casi imposible observar efectos menores.

La posible importancia de este trabajo, con relación a las aplicaciones prácticas, surge del hecho de que los fluidos en movimiento siempre se encuentran en interacción con sólidos. Si el efecto existe, en ciertos casos puede ser considerable y aún cuando en otros su magnitud sea tan pequeña que se pueda despreciar, es bueno tener presente que hay un efecto para tomarlo en cuenta cuando sea necesario. Básicamente se ha pensado en la viscosimetría de precisión en donde se manifiesta claramente la interacción fluido-sólido y en la cual se presentaría la necesidad de tomar en cuenta este efecto.

Alicia rió: "No hay para qué probar; no se puede creer en cosas imposibles", "Parece que no tienes mucha práctica, dijo la reina. Cuando yo era más joven, siempre lo hice media hora diaria y a veces creí hasta en seis cosas imposibles antes del desayuno.

LEWIS CARROLL.

BIBLIOGRAFIA.

- Baird, D. C., 1962, An introduction to Measurement Theory and experiment Design, Prentice-Hall, New Jersey.
- Basset, A. B., 1888, A treatise on Hydrodynamics, vol.II, Dover, 1961.
- Batchelor, G. K., 1967, An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press.
- Chester, W. and Breach, D. R., 1969, *J. Fluid Mech.*, 37, 237.
- Currie, I. G., 1974, Fundamental Mechanics of Fluids, Mc Graw-Hill, New York.
- Dennis, S. C. R., and Walker, J. D. A., 1971, *J. Fluid. Mech.* 48, 751-760.
- Epstein, P. S., 1924, *Phys. Rev.* 23, 710-.
- Goldstein, S., 1965, Modern Developments in Fluid Dynamics, vol. II, Dover, New York.
- Handbook of Chemistry and Physics, 1982-1983, Weast, CRC Press, Inc., Florida, F-40.
- Happel, J., and Brenner, H., 1973, Low Reynolds number hydrodynamics, Noordhoff International.

- Lamb, H., 1932, Hydrodynamics, Cambridge University Press.
- Landau, L. D., and Lifshitz, E. M., 1959, Fluid Mechanics, Pergamon Press, London.
- Milne-Thomson. L. M., 1979, Theoretical Hydrodynamics, McMillan Press, London.
- Peralta-Fabi, R., and Zwanzig, R., 1979, *J. Chem. Phys.* **70** 504-.
- Peralta-Fabi, R., and Zwanzig, R., 1983, *J. Chem. Phys.* **78**, 2525-.
- Proudman, I., and Pearson, J. R. A., 1957, *J. Fluid. Mech.* **2**, 3237.
- Richardson, S., 1973, *J. Fluid. Mech.*, **59**, 707-.
- Synge, J. L., y Schild, A., 1946, Tensor Calculus, Dover, Canadá.