41
2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ASPECTOS DE ALGEBRA SUPERIOR I, A TRAVES DE PROBLEMAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

P R E S E N T A

JULIETA DEL CARMEN VERDUGO DIAZ

México, D.F. **1988**

I N D I C E .

P R O L O G O

El presente trabajo forma parte de un curso de Algebra Superior que se imparte a lo largo de 2 semestres en la Facultad de Ciencias de la UNAM. (en el apéndice c, se presenta un bosquejo de este curso).

El trabajo es resultado de 4 años de impartir como ayudante de profesor, la materia de Algebra Superior I en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Esta es una materia obligatoria para estudiantes de las carreras de matemáticas, actuaría y física.

En este trabajo, se desarrollan solamente la mitad de los temas del curso.

La forma de impartir el curso, es un tanto desordenada, aparentemente sin estructura hecha de antemano. El orden y la estructura misma, la van dando los alumnos de acuerdo a las necesidades que se crean como consecuencia de los diferentes caminos propuestos por ellos para resolver los problemas. Decimos un tanto desordenada y aparentemente sin estructura, porque aunque existen un orden y una estructura para los temas que se les imparten, son los alumnos quienes le imponen ritmo y orden a la clase a medida que se van involucrando en los problemas. Por ejemplo, nos ha sucedido que después de discutir el segundo o tercer problema del curso, los alumnos tienen una discusión que nos encamina rápidamente a ver el tema de Combinatoria antes del de Inducción y otras veces, la discusión en el grupo es tal que casi inmediatamente después de 3 ó 4 problemas podemos dar la teoría referente al tema de Inducción Matemática. Es más, la mayoría de las veces no podemos dar uno u otro tema sino que tenemos que ir y venir entre estos temas, o incluso entrar a otros temas,diferentes a estos dos, que salen en la discusión propia de un problema.

Para escribir esta experiencia, fué necesario darle alguna estructrura, pero quiero hacer la aclaración que si algún desorden, discontinuidad o brincos no muy claros aparecen en el trabajo, fué casi intencionalmente, porque la dinámica misma del salón de clase es la que va dando la pauta de hacia dónde seguir y en el trabajo escrito es muy dificil poder darle ese dinamismo, ese movimiento constante.

Quiero hacer la aclaración de que escribir el trabajo tratando de no perder la idea de ese "desorden necesario" fué muy dificil. Siempre que lo empezaba a escribir, resultaba un trabajo esquemático que en el mejor de los casos lo que le reflejaba a un maestro que lo tuviera en sus manos era un escrito en donde se daban 4 ó 5 caminos diferentes de resolver un problema, un trabajo esquemático el cual podía consultarse para encontrar otro camino por el cual resolver un problema y nada más. Ninguna de esas versiones esquemáticas me satisfizo y traté de cambiarlas en torno a mostrar que lo importante es la discusión del grupo, la dinámica que le imponen a la clase los alumnos en su discusión, el proceso por medio del cual los alumnos van descubriendo, creando y <u>haciendo</u> matemáticas.

No quisiera que el trabajo sirviera solo para que un maestro (o alumno) lo consultara para encontrar una receta de cómo resolver un problema concreto y que en base a ese camino impartiera (¿aprendiera?) su clase de la manera tradicional, solo dándole a los alumnos "la" forma en que se resuelve tal o cual problema. Puede suceder que por ejemplo en un problema concreto un maestro (o alumno) entienda mejor una forma (o camino) de resolverlo y que le parezca mejor explicarlo así; pero ésto no debe ser limitación para que les permitamos, o ayudemos a los alumnos, buscar otras vías de resolver el mismo problema.

La forma en que impartimos el curso es la siguiente:
Por ejemplo, el primer día de clases les pone un problema de contar. No se les da teoría previa, sino se les hace la aclaración de que pueden resolverlo con lo que ellos mismos

deseen, con las herramientas que tienen, que busquen alguna respuesta por cualquier camino que ellos quieran. El sentido es que los estudiantes hagan matemáticas desde el primer momento, que busquen una respuesta con los conocimientos que cada uno traiga, no importa el tiempo que inviertan para obtener la respuesta, el valor está en involucrarse y trabajar desde el primer momento, estructurar de cualquier forma el problema para después argumentar, comentar, enriquecer o incluso modificar su respuesta.

Los problemas que se les dan son problemas sencillos, problemas para los cuales cada uno de los alumnos puede tener una respuesta, sea válida o no, ya sea de inmediato o un poco después de pensarla. Y ya sea correcta o no lo sea, los problemas planteados permiten que con las matemáticas que manejan los alumnos, se pueda dar una respuesta.

Una vez que la mayoría de los alumnos ha manifestado tener una respuesta, se les pide que vayan externando cuál es su resultado y que expliquen cuál es el procedimiento que siguieron. Aquí, es donde empiezan realmente los problemas porque a veces los alumnos tienen una respuesta y no saben como llegaron a ella; a veces tienen una respuesta saben como llegaron a ella, pero no pueden explicar cómo lo hicieron; otros más saben como llegaron al resultado, y "explican" como lo hicieron, pero ninguno de sus compañeros entiende el procedimiento, etc. Es en estos momentos cuando se nos hace muy importante hacer que los alumnos participen y socialicen sus experiencias. Tienen que convencerse entre ellos mismos de que lo que hicieron es correcto a través de convencer a los demás de que su procedimiento y forma de abordar el problema son correctos, o bien que los demás los convenzan, a través de hacerle ver, en cualquiera de los momentos, cuál es su error y por consiguiente qué es lo correcto.

C A P I T U L O   I

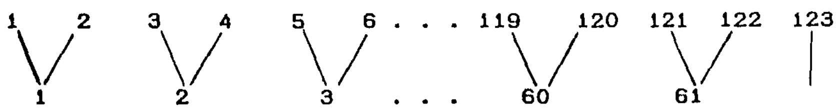
EL PROBLEMA DEL PIN PON.

En un torneo de Pin Pon las partidas se juegan por parejas escogidas al azar. En la primera ronda se forman parejas al azar y los jugadores que pierden van quedando eliminados. Si el número de participantes es impar, uno de los jugadores pasa automáticamente a la siguiente ronda (aquel que al azar no le toca pareja contra quien jugar). Para la siguiente ronda participan todos los ganadores de la primera, junto con el posible impar a quien no le tocó pareja y así sucesivamente hasta que se tiene un solo ganador.

Dado un número fijo de jugadores, ¿ cuántas partidas se juegan ?

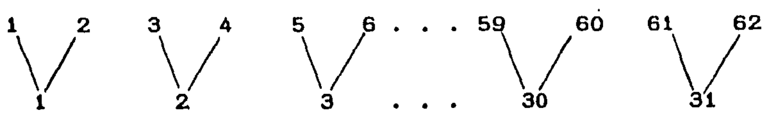
Supongamos, por ejemplo, que se tienen 123 jugadores. Suponiendo que ya se tiene realizado el sorteo para escoger las parejas y se numeran los jugadores de tal manera que el contrincante numero uno juega contra el número dos, el tres contra el cuatro y así sucesivamente, para la primera ronda tenemos:

122 jugadores que juegan 61 partidas y 1 jugador que se queda sin jugar y pasa automáticamente a la siguiente ronda.



Ahora numeremos los 62 jugadores que quedan, para la segunda ronda tenemos:

62 jugadores que juegan 31 partidas ;



Los resultados que vamos obteniendo los podemos expresar en la siguiente tabla :

# DE RONDA	# DE JUGADORES	# DE PARTIDAS
1	123	61
2	62(1)	31
3	31	15
4	16	8
5	8	4
6	4	2
7	2	1
TOTAL DE PARTIDAS JUGADAS		122

tabla 1

Como se ve, se necesitan 122 partidas para tener un ganador.

¿ Qué pasaría si a última hora, antes de empezar los juegos se hubiera inscrito un jugador mas ?

Suponiendo ahora que tenemos 124 jugadores inscritos. ¿ Cuántas partidas juegan para tener un solo ganador ?

Podemos hacer una tabla como la anterior, y tenemos:

(1) Obsérvese que en la ronda anterior el número de partidas fué 61 por lo que el número de jugadores involucrados fué 122 y el número de jugadores con pase automático 1 por lo tanto se tienen en total 62 jugadores en la segunda ronda.

# DE RONDA	# DE JUGADORES	# DE PARTIDAS
1	124	62
2	62	31
3	31	15
4	16	8
5	8	4
6	4	2
7	2	1
TOTAL DE PARTIDAS JUGADAS		123

tabla 2

Si ahora tenemos 129 jugadores inscritos, ¿ cuántas partidas se jugarán ? Hagamos otra tabla:

# DE RONDAS	# DE JUGADORES	# DE PARTIDAS
1	129	64
2	65	32
3	33	16
4	17	8
5	9	4
6	5	2
7	3	1
8	2	1
TOTAL DE PARTIDAS JUGADAS		128

TABLA 3

¿ Podríamos dar una regla general para cualquier número de jugadores que se inscribieran al torneo ?

De los tres ejemplos anteriores se observa que la regla puede ser:

CONJETURA. Para N jugadores serán necesarios N-1 partidas para que se tenga un ganador.

¿ Cómo comprobamos esta conjetura ? ó ¿ Cómo la demostramos ? Es decir, ¿ Cómo podemos dar algún argumento general que nos convenza claramente de esta hipótesis ?

Haciendo torneos con poquitos jugadores comprobaríamos la regla enunciada mediante el conteo directo. Pero debemos comprobarla para todos los números N , incluyendo N's muy grandes.

Sabiendo que (como calculamos en el primer ejemplo) el número de partidas con 123 jugadores es 122, podemos determinar el número de partidas con 124 jugadores sin necesidad de volver a contar todo de nuevo, como hicimos anteriormente. Basta notar que cuando llega un nuevo jugador, hace falta una partida mas en el esquema que se tenía antes. Este razonamiento lo podemos hacer en general de la siguiente manera:

Si damos por sabido que teniendo K jugadores el número de partidas es K-1, cuando llega el jugador número K+1 lo que se puede hacer es enfrentarlo, en una partida adicional, al ganador final de los K originales que teníamos antes. Así, el número de partidas jugadas con K+1 jugadores es: K-1 que ya teníamos, mas la partida adicional que agregamos; es decir: (K-1) + 1 = K partidas.

¿ Comprueba esto la hipótesis de la conjetura ? No cambiará el resultado si en vez de enfrentar al nuevo jugador contra el campeón, lo anexáramos a cualquiera de las rondas anteriores ? (se deja al lector pensar y discutir, si es posible, estas preguntas).

Hasta aquí, hemos encontrado que si tenemos N jugadores. el número de de partidas es N-1. Nos ha resultado cierto en muchos casos y varias formas, pero ¿qué significa ésto?, ¿podemos encontrar qué significa esta expresión en el problema mismo?

Resulta muy fácil el resultado de N-1 partidas, entonces ¿será también fácil pensar qué significa ese número?, ¿porqué el 1 en la fórmula?

Tratando de resolver estas preguntas, encontramos que N es el número de jugadores, pero el 1, ¿qué significa? El 1 debe ser el único ganador, ya que en el problema, un uno así de importante es solo El ganador, El campeón. De modo que en efecto, esa fórmula nos dice mucho acerca del problema mismo. N-1 es el número de jugadores inscritos menos el campeón o sea todos los jugadores que perdieron, todos los que no son El campeón.

El mismo problema, podemos razonarlo de un modo diferente, por ejemplo: ¿ se podrá contar el conjunto que nos interesa (partidas) a través del número de elementos de otro conjunto equivalente al conjunto incógnita, pero un tanto más fácil de contar ?

Si los elementos del conjunto que nos interesa (partidas) los ponemos en correspondencia con los elementos de otro conjunto, por ejemplo con el conjunto de los perdedores, observamos que efectivamente existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de partidas que se juegan y el conjunto de los perdedores, pues en cada partida se elimina a un jugador y cada perdedor es eliminado en una sola partida (solo pierde en una partida). Entonces si se tienen N jugadores, para que exista un solo ganador tiene que haber N-1 perdedores, para lo cual se requieren N-1 partidas.

Tenemos así que efectivamente el número de partidas a jugar es el número de jugadores inscritos menos uno; y ¿qué quiere decir esto? Que todos los jugadores son perdedores menos uno que es el campeón, o sea que: Para N jugadores el número de partidas es igual al número de perdedores, que es N-1.

En seguida, un ejercicio para el lector que sugerimos para pensar en el mismo sentido en que se ha analizado el problema del Pin Pon.

EJERCICIO. LA TABLILLA DE CHOCOLATE.

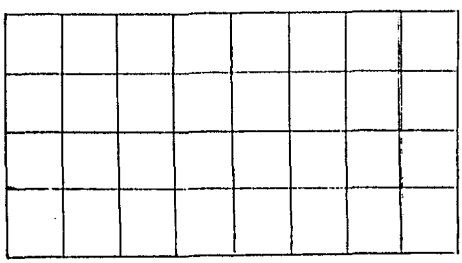
Se tiene una tablilla de chocolate que consta de MxN pequeñas piezas. Se quiere dividir ésta de forma que se tengan las MN piezas separadas. ¿Cuál es el número mínimo de cortes que hay que hacer para obtener todas las piezas sueltas?

CONDICIONES: no se pueden hacer cortes mediante apilar dos o mas hileras de cuadritos y obviamente tampoco se pueden hacer cortes en zig zag.

De nuevo podemos empezar por un ejemplo. Supongamos que la tablilla tiene 8x4 pequeñas piezas. ¿Cuántos cortes se necesitan para tener las 32 pequeñas piezas sueltas?

¿Cuál es la regla general para saber el número de cortes que hay que hacer con cualquier tablilla?

¿Se podrá encontrar un conjunto equivalente que nos ayude a convencernos de nuestra forma de contar?



SEGUNDO PROBLEMA DEL PIN PON

En este torneo de Pin Pon, los jugadores se enfrentarán todos contra todos; es decir cada jugador tiene que jugar contra todos los restantes. Ahora no nos interesa qué pasa hasta que exista un ganador sino lo siguiente:

¿ Cuántas partidas se juegan en total si se tienen N jugadores inscritos y se han de enfrentar todos contra todos ?

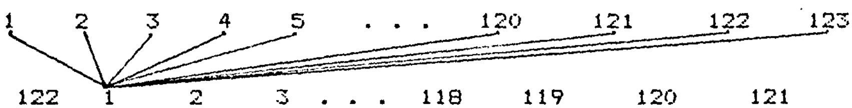
Empecemos nuevamente con un caso particular, por ejemplo, por contar cuántas partidas se juegan si se inscribieron 123 jugadores.

Cada uno de los participantes va a jugar 122 partidas:

Nuevamente numeremos a los participantes del 1 al 123, tenemos así que haciendo un esquema de las partidas del jugador número uno se tiene:

Estas serán las partidas del jugador número uno.

En la misma forma podríamos decir que las partidas del jugador número dos son:



Y Así sucesivamente para cada uno de los 123 jugadores; entonces, las partidas jugadas serían 122 por cada jugador, o sea: 122 x 123 .

Pero ¿contamos bien?

Observando las partidas para los jugadores 1 y 2 vemos que la partida en que se enfrentan ellos aparece contada en las del 1 pero también en las del 2. O sea que contamos doble esta partida. Pero también contamos doble la partida del jugador 1 contra el jugador 3, ya que la contamos cuando enumeramos las del 1 y cuando contamos las del 3; lo mismo cuando contamos la partida del 1 con el 4 y así sucesivamente . Y obsérvese tambien, que la partida del 2 con el 3 también está contada dos veces, y la del 3 con el 4 y así sucesivamente, por lo que vemos que todo lo hemos contado doble. Entonces el número de partidas que se jugarán es:

$$\frac{122 \times 123}{2} = \frac{15,806}{2} = 7,503$$

Tratemos ahora el caso general. Supongamos que el número de jugadores es N.

Tenemos N jugadores, cada uno va a jugar contra N-1, por lo tanto cada uno va a jugar N-1 partidas. Pero por lo que se observó en el párrafo anterior, cada partida está contada dos veces por lo tanto el número de partidas es:

$$\frac{N(N-1)}{2}$$

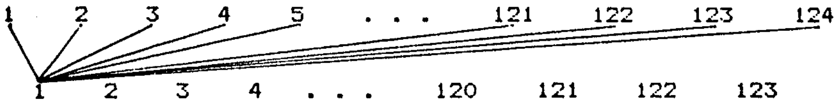
Pero , vamos a verlo de otra manera. Podemos proceder como hicimos con el primer problema del Pin Pon, es decir, partiendo de ver qué sucede si agregamos un jugador mas.

Por ejemplo, si se tenian 123 jugadores, el número de partidas era 7503. ¿Cuántas partidas habrá que agregar si a última hora se incribiera uno mas y tuviéramos 124 jugadores?

Según la regla general que hemos conjeturado (y que debemos comprobar), para 124 jugadores el número de partidas es $\frac{123 \times 124}{2}$.

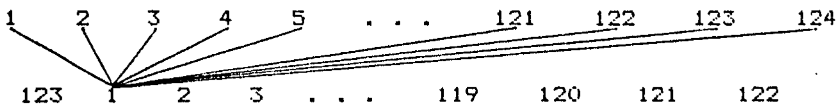
Veamos ahora si llegamos a esta misma conclusión partiendo de que ya sabemos el número de partidas para 123 jugadores:

Para el jugador número uno se tiene:



Las partidas para el jugador 1 son ahora 123.

Para el jugador número dos son:



También 123 partidas.

Y así sucesivamente. Es decir, para cada jugador aumenta en uno el número de partidas jugadas, y como eran 123 jugadores, entonces se tienen 123 partidas más;' Nótese que 123 son precisamente los contrincantes del jugador 124 por lo que la regla para contar cuando llega un jugador más es agregar tantas partidas como jugadores se tenían, esto es:

Número de partidascon 123 jugadores más el número de jugadores que había antes es igual al número de partidas c4on 124 jugadores.S O sea: $\frac{123 \times 122}{2} + 123$

Una simple multiplicación nos permite comprobar que 7626 es lo mismo que $\frac{123 \times 124}{2}$.

Mediante el conteo directo en el caso de un número de participantes pequeño, y con los casos que hemos analizado, tenemos la siguiente tabla:

# DE JUGADORES	# DE PATRTIDAS	INCREMENTO EN # DE PARTIDAS
1	0	0
2	1	1
3	3	2
4	6	3
5	10	4
6	15	5
.	.	.
.	.	.
.	.	.
123	7503	?
124	7626	123

Tabla 4

Pero, ¿Cómo comprobaremos que para K jugadores las partidas serán $\frac{(K-1)K}{2}$?

Si para K jugadores son $\frac{(K-1)K}{2}$ partidas, cuando llega el jugador número K+1 se jugarán K partidas más, (el número de jugadores que había antes), entonces tenemos:

$$\frac{(K-1)K}{2} + K = \frac{(K-1)K + 2K}{2} = \frac{K^2 - K + 2K}{2} =$$

$$\frac{K^2 + K}{2} = \frac{K(k+1)}{2}$$

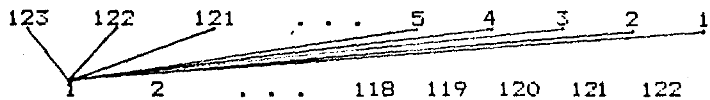
Que es el número de partidas que se juegan cuando hay K+1 jugadores inscritos.

¡ Entonces parece ser que la reglita sí funciona !

Para N jugadores el número de partidas a jugar es $\frac{(N-1)N}{2}$.

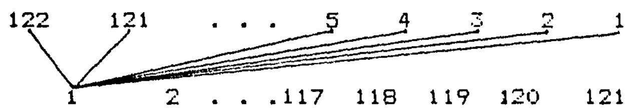
Buscando otro argumento, o bien otra forma de analizar el problema tenemos:

Si son 123 jugadores, el número de partidas para el jugador número uno serán:



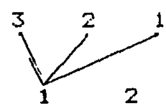
122 partidas para el primer jugador.

Para el segundo:

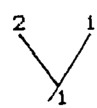


121 partidas para el segundo jugador, porque la partida que juega éste con el número uno ya fué contada en el caso anterior (las partidas del jugador número uno).

Siguiendo de esta manera, tendremos al final para el jugador número N-2:



Solo 2 partidas para el jugador N-2. Y



Una sola partida para el jugador N-1.

Esto es, el primer jugador se enfrentará contra los 122 jugadores restantes, el segundo contra los 121 restantes (ya que la partida que juega contra el primer jugador, ya la contamos al contar los juegos del jugador número uno), el tercer jugador jugará contra 120 y así sucesivamente. El último jugador ya no le quedarán opciones porque sus 122 juegos ya quedaron contados al contar los de sus contrincantes. Por lo que el número de partidas en total son:

$$122 + 121 + 120 + 119 + . . . + 4 + 3 + 2 + 1$$

El resultado de esta suma debe dar exactamente el mismo resultado que la fórmula que ya habíamos encontrado por otro razonamiento.

Analicemos esto con números pequeños:

Si el número de jugadores es 3 por ejemplo, el número de partidas es $2 + 1 = 3$. Si el número de jugadores es 4, el número de partidas es $3 + 2 + 1 = 6$. Tomando algunos ejemplos más llegamos a la siguiente tabla:

# DE JUGADORES	# DE PARTIDAS
1	0
2	1
3	2 + 1
4	3 + 2 + 1
5	4 + 3 + 2 + 1
.	. . .
.	. . .
.	. . .
K	(K-1)+(K-2)+. . .+2 + 1

tabla 5

En donde el renglón número K es apenas la conjetura que queremos comprobar, es decir, hemos formulado lo que creemos que debe suceder en el renglón número K .

Debemos ahora encontrar cuánto vale esa "sumota". Tenemos que encontrar que ésta vale exactamente $\frac{(k-1)K}{2}$.

Busquémos cómo efectuarla.

Sumémos de 2 en 2 los sumandos de esta suma de la siguiente manera: el primer sumando lo sumamos con el último, el segundo con el penúltimo y así sucesivamente, o sea: (2)

$$(K-1) + (K-2) + (K-3) + \ . \ . \ . + 3 + 2 + 1$$

$$(K-1) + 1$$

$$(K-2) + 2$$

$$(K-3) + 3$$

$$\vdots$$

Tenemos que sumar:

$$((K-1)+1) + ((K-2)+2) + ((K-3)+3) + \ . \ . \ .$$

¿ Cuál será el último sumando ?

Si la K es impar, K-1 (el primer sumando) es par y se tiene que el último sumando, ya agrupados, es :

$\frac{K+1}{2} + \frac{K-1}{2}$ que son exactamente $\frac{k-1}{2}$ sumandos, los cuales son cada uno de ellos iguales a K, por lo que la suma

(2) En el libro de Colerus Egmont, Breve Historia de las Matemáticas, dice que ésto fué lo que hizo Gauss a los nueve años. En ésto, parece que no hay mucha claridad sobre qué fué exactamente lo que hizo Gauss, ya que por ejemplo en los libros de la colección Sigma, dice algo un tanto distinto (ver Sigma, El mundo de las matemáticas, vol. 1, p. 25).

es: $\frac{(K-1)}{2}K$

Si K es par, K-1 (el primer sumando) es impar y no tiene mitad, entonces al agrupar como se ha dicho quedará en el medio un número sin pareja y éste será $\frac{K}{2}$.

El último sumando, de los agrupados, es $\left(\frac{K}{2}+1\right)+\left(\frac{K}{2}-1\right)$.

Entonces la suma queda como:

$$\underbrace{(K-1+1)+(K-2+2)+\ .\ \ .\ \ .+\left(\frac{K}{2}+1+\frac{K}{2}-1\right)+\frac{K}{2}}_{\frac{K}{2}-1 \text{ sumandos}}$$

$$\left(\frac{K}{2}-1\right)K+\frac{K}{2}=\left(\frac{K-2}{2}\right)K+\frac{K}{2}=\frac{K^2-2K+K}{2}=$$

$$\frac{K^2-K}{2}=\frac{K(K-1)}{2}=\left(\frac{K-1}{2}\right)K$$

Tenemos que en cualquiera de los casos resulta que la suma es $\frac{(K-1)K}{2}$, que ya lo sabíamos ¿ no ?

Sumemos ahora de otra forma:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
 & (K-1) & + & (K-2) & + & (K-3) & + \ .\ .\ .\ + & 3 & + & 2 & + & 1 & = & S \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + \ .\ .\ .\ + & (K-3) & + & (K-2) & + & (K-1) & = & S \\
\hline
 & K & + & K & + & K & + \ .\ .\ .\ + & K & + & K & + & K & = & 2S
\end{array}$$

¿Cuántas K's tenemos que sumar?

$(K-1)\ K = 2S$ entonces $S = \frac{(K-1)K}{2}$

Ya tenemos la conclusión de que para K jugadores el número de partidas es $\frac{K(K-1)}{2}$ y lo hicimos con un razonamiento general.

De modo que lo que hemos obtenido es:

La suma de todos los números naturales hasta el K-1, sea cual sea la K, es $\frac{K(K-1)}{2}$.

Y regresando al método de, si llegase a última hora un jugador más, ¿obtendremos la misma conclusión?

Si tenemos un jugador más, la suma será:

$$K + (K-1) + (k-2) + (k-3) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

Y como hemos conjeturado que $1+2+3+\ldots+(K-1) = \frac{(K-1)K}{2}$

La suma que buscamos es igual a :

$$K + \frac{(K-1)K}{2} = \frac{2K + K^2 - K}{2} = \frac{K(K+1)}{2}$$

Que es lo mismo que se habia afirmado solo que ahora hasta el natural número K+1. Por lo tanto nuestra hipótesis debe ser correcta.

Pero todavía podemos encontrar otra manera de resolver el problema de contar las partidas.

Si formamos un cuadrado de lado igual al número de jugadores inscritos y contamos, de la manera obvia, cuantas son las partidas que se efectúan, tenemos:

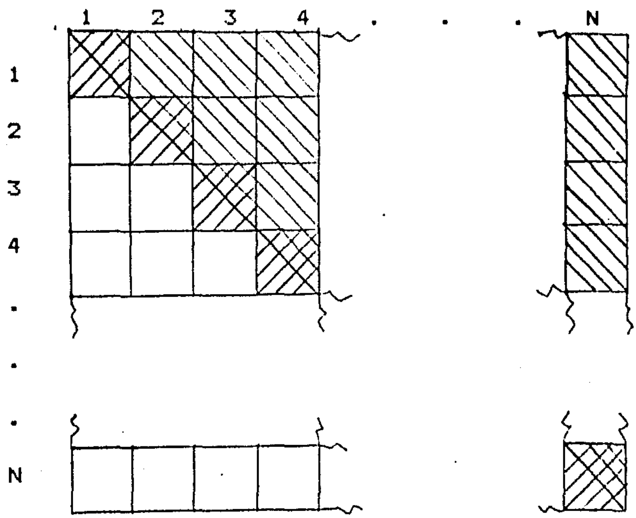


figura 1

Los cuadritos de la diagonal, es claro que no debemos contarlos ya que un jugador no se enfrenta a sí mismo. Tendremos que quitar también los cuadritos que se encuentran arriba de la diagonal (o abajo) porque, para nuestro problema, significan lo mismo: es decir, la partida en la que se enfrentan el 1 con el 2 está otra vez representada en el enfrentamiento del 2 con el 1. Por lo que contando cuántos cuadritos nos quedan, sabremos cuál es el número de partidas que se jugarán.

El número de cuadritos en todo el cuadrado es N^2 menos los que estan en la diagonal que son N. Y de los restantes tomamos solo la mitad, entonces la cantidad buscada es:

$$\frac{N^2 - N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$$

Hemos llegado entonces otra vez a la misma conclusión.

En la misma configuración anterior, podemos considerar que los cuadritos que sí nos sirven son los que quedan como se ilustra en la siguiente figura:

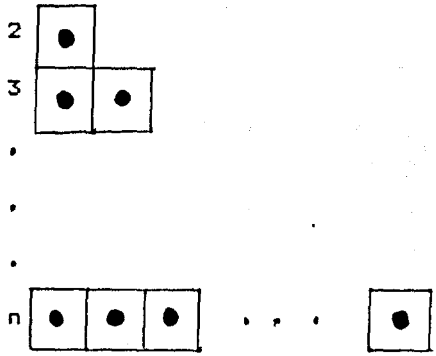
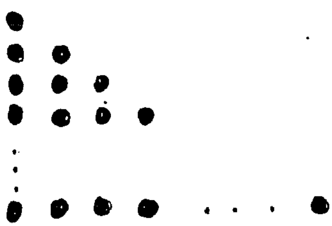


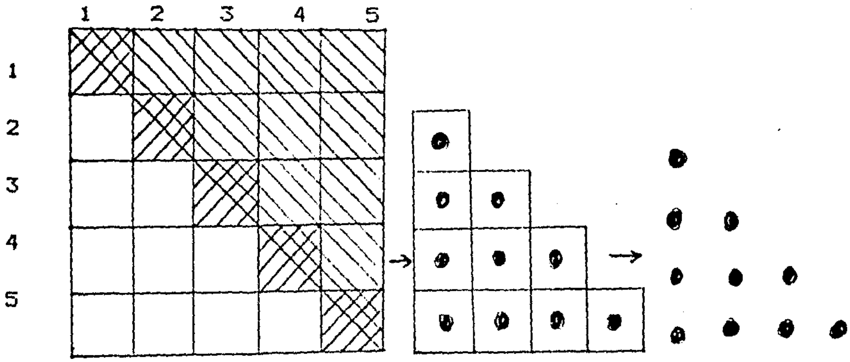
figura 2

En donde si quitamos la configuracion "cuadritos" y dejamos solo los puntitos; contar cuadritos equivale a contar puntitos en la configuración correspondiente. Queremos contar cuantos puntitos hay en un triángulo que tiene como base N puntitos y como altura también N puntitos.

Para contarlos vamos a ayudarnos de una construcción auxiliar:



Coloquemos sólo la configuración triangular con puntitos. Vamos a hacer el caso particular de 5 jugadores.



Coloquemos la configuración triangular y encima de ella, una configuración igual pero invertida, como se muestra en la siguiente figura:

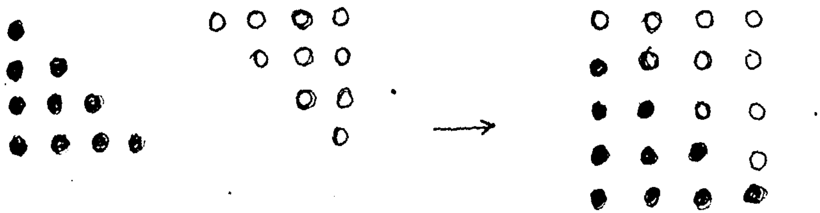


figura 3

En la configuración rectangular que obtenemos, se tienen 4 puntitos en la base y 5 en la altura, pero las 2 configuraciones triangulares tienen el mismo número de puntitos, dividiendo entre dos tenemos el número de puntos de la configuración que nos interesaba.

De donde, si lo generalizamos, es decir, pensamos en algo equivalente para cuando tenemos N jugadores, lo que tendremos es:

N-1 puntos en la base por N de altura, entre 2 porque son dos configuraciones iguales y solo queremos una; por lo que tenemos: $\frac{(N-1)N}{2}$ ¡ otra vez la misma fórmula !

Otra forma en que los alumnos vieron el problema es la siguiente:

Suponiendo que una secretaria nos ayuda a escribir las tarjetas de "participaciones", o sea las tarjetas en donde se escriben los 2 nombres de los contrincantes en una partida, vamos a contar cuántos nombres escribe la secretaria.

Por cada partida, la secretaria debe hacer una tarjeta, entonces el número de partidas es el número de tarjetas que haga la secretaria. En cada tarjeta estan escritos 2 nombres (los contrincantes de una partida). El número total de nombres que ha escrito la secretaria es $n(n-1)$ ya que cada jugador debe enfrentarse a $n-1$ jugadores. Entonces el número de tarjetas es $\frac{n(n-1)}{2}$ ya que en cada tarjeta se han escrito 2 nombres.

Y así tenemos de nuevo que el número de partidas es : $\frac{n(n-1)}{2}$.

Aunque todas las formas en que hemos analizado el problema se les han ocurrido de una u otra forma a los alumnos mismos, queremos resaltar aquí la siguiente y última manera de verlo porque solo una vez ha salido en clase y además nos parece importante resaltarla por su originalidad.

En la misma configuración del cuadrado con N cuadritos por lado de la figura 1, contemos a los "vivos" (o sea los que sí nos sirven para nuestra cuenta) . Calculemos el área que ocupan, sabemos que el área del cuadrado es $N \times N = N^2$ y a ésta le estamos quitando el área a partir de la diagonal hacia arriba, entonces el área del triángulo que queda es: N de la base por N de la altura entre dos, o sea: $\frac{N \times N}{2} = \frac{N^2}{2}$

Pero estamos quitando de mas, esto es, la mitad del área de los cuadritos de la diagonal no debemos considerarla. Quitando el área de los triangulitos que quedan inmediatamente abajo de la diagonal, resulta: El número de estos triangulitos es N y cada uno tiene por área $\frac{1}{2}$, entonces el área que buscamos es:

$$\frac{N^2}{2} - \frac{N(1)}{2} = \frac{N^2}{2} - \frac{N}{2} = \frac{(N-1)N}{2}$$

Una vez más la fórmula para contar cuantas partidas se juegan si los jugadores han de jugar todos contra todos.

Como un resúmen de lo que hemos hecho, vamos a formular una tabla tratando de concentrar los distintos caminos para resolver el problema del Pin Pon, cuando se enfrentan todos contra todos.

Número de jugadores	Número de partidas	$\frac{(N-1)N}{2}$	1+2+...+(N-1)				Particiones	T_{n-1}
2	1	$\frac{(1)2}{2}$	1				1	1
3	3	$\frac{(2)3}{2}$	1+2				3	3
4	6	$\frac{(3)4}{2}$	1+2+3				6	6
5	10	$\frac{(4)5}{2}$	1+2+3+4				10	10
6	15	$\frac{(5)6}{2}$	1+2+3+4+5				15	15
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
K	$\frac{(K-1)K}{2}$	$\frac{(K-1)K}{2}$	$\frac{(K-1)K}{2}$	$\frac{(K-1)K}{2}$	$\frac{(K-1)K}{2}$	$\frac{(K-1)K}{2}$	$\frac{(K-1)K}{2}$	$\frac{(K-1)K}{2}$

TABLA 6

Los Números Triangulares.

Fijémonos en la quinta columna de la tabla 6. A los números obtenidos en esta columna, 1,3,6,10,15,..., desde los tiempos de los griegos(3) se les llaman los números triangulares, precisamente porque los podemos representar como una configuración de este tipo.

A los números triangulares los vamos a denotar como T_N O sea :

$T_1 = 1$

$T_2 = 3$

$T_3 = 6$

.

.

.

Y volviendo a la tabla 6 podemos dar una fórmula general para encontrar el N-ésimo número triangular de la siguiente manera:

$$T_N = \frac{N(N+1)}{2}$$

Entonces a la tabla 6 le podemos agregar una columna más que sería:

(3) Ver números figurados de los griegos, en el libro History of Mathematics de D. E. Smith.

# DE JUGADORES	# DE PARTIDAS . . .	T_{N-1}
1	0	
2	1	T_1
3	3	T_2
4	6	T_3
5	10	T_4
6	15	T_5
.	.	.
.	.	.
.	.	.
K	$\frac{(K-1)K}{2}$	T_{K-1}

tabla 7

Para concluir con el segundo problema del Pin Pon, queremos hacer notar la importancia de buscar muchas vias para resolver un problema. Nótese que se han encontrado, para un solo problema, al menos 7 formas de resolverlo, 7 caminos que nos llevan al mismo resultado y cada uno de ellos presenta un interés particular. Hemos obtenido además algunos resultados que no esperábamos, como por ejemplo, hemos encontrado cuanto vale la suma de los primeros n números naturales, que es un problema muy importante y que se usa mucho; hemos visto que buscando las interpretaciones geométricas de este problema, hemos conocido a los números triangulares, que también son muy importantes y que trabajaremos mucho en el presente trabajo; hemos recordado la fórmula para el área de un triángulo, etc. Otro resultado más que hemos encontrado es que el producto de dos números naturales consecutivos ($n(n+1)$ para cualquier n en los naturales) es divisible por 2, y aunque no hemos hecho la demostración formal de esta proposición, hemos usado mucho esto como una verdad (para demostrarlo, basta con observar que el producto de 2 consecutivos tiene que ser par ya que necesariamente uno de los 2 números es par).

Y así podríamos seguir numerando una serie de resultados que van obteniéndose en el trayecto de ir dándole respuesta a un problema y sobre todo si se trata de resolverlo por muchos caminos diferentes.

Por todas estas observaciones, insistimos en la importancia que, dado un problema cualquiera, se le trate de resolver por muchos caminos diferentes. Y es así como tenemos mas elementos para enseñarles a los alumnos a hacer matemáticas.

UN PROBLEMA DE TERNAS

Recordemos, que en el segundo problema del Pin Pon calculamos en número de partidas que se jugarían cuando los jugadores se enfrentaban todos contra todos. Observemos que para contar las partidas, hicimos uso de la equivalencia que existe entre las partidas y las parejas de jugadores que han de jugar, esto es, para cada partida, existe una pareja de jugadores y para cada pareja de jugadores, existe una única partida. De modo que si eran N jugadores los que se iban a enfrentar, el número de partidas era igual al número de parejas de un conjunto con N jugadores o lo que es lo mismo, el número de partidas es el número de parejas de un conjunto con N elementos. Si el problema se nos hubiera planteado como: encontrar las parejas de un conjunto que tiene N elementos, entonces notemos que hubiésemos hecho exactamente el mismo análisis y así habríamos llegado a la conclusión de que el número de parejas de un conjunto con N elementos es $\frac{N(N-1)}{2}$.

Si ahora, por alguna razón quisiéramos contar el número de ternas de un conjunto con N elementos ¿ como procederíamos ?

Como antes, empecemos por hacer una tabla con números pequeños para la N.

Si se tienen 1 ó 2 elementos, el número de ternas posible es cero porque no podemos formar ninguna terna.

Si N es igual a 3, la única terna posible es la formada por el conjunto mismo.

Si N es 4, contemos el número de ternas posibles: Sea {a, b, c, d} el conjunto dado; las ternas son:

abc acd bcd

abd

En total 4 ternas.

Si el conjunto es de 5 elementos, como por ejemplo el conjunto {a, b, c, d, e} tenemos las siguientes ternas:

abc acd ade bcd bde cde

abd ace bce

abe

Total 10 ternas.

Para un conjunto de 6 elementos, por ejemplo el conjunto (a, b, c, d, e, f) se tiene:

abc acd ade aef bcd bde bef cde cef def

abd ace adf bce bdf cdf

abe acf bcf

abf

Total 20 ternas.

Tenemos entonces hasta ahora la siguiente tabla:

# DE ELEMENTOS	# DE TERNAS
1	0
2	0
3	1
4	4
5	10
6	20

tabla 2

¿Cuántas ternas serán si tenemos un conjunto con 7 elementos?

Para no ponernos a contar todo nuevamente vamos a tratar de encontrar una regla general en el incremento entre un renglón y otro de la tabla anterior . O bien, en los esquemas que hemos hecho, para ir contando las ternas, podemos analizar en qué se modifica uno con respecto al siguiente.

Hagamos ahora una nueva tabla en donde pongamos una columna más para los incrementos:

# DE ELEMENTOS	# DE TERNAS	INCREMENTO
1	0	0
2	0	0
3	1	1
4	4	3
5	10	6
6	20	10

tabla 9

En la tercera columna encontramos nuevamente a los números triangulares. Nuestra hipótesis es entonces que el incremento entre un renglón y otro es un número triangular, o sea nuestra tabla podemos escribirla como:

# DE ELEMENTOS	# DE TERNAS	INCREMENTO	TRIANGULAR
1	0	0	-
2	0	0	-
3	1	1	T_1
4	4	3	T_2
5	10	6	T_3
6	20	10	T_4

tabla 10

Podemos conjeturar que para el renglón número K de la tabla 10 el incremento que debe corresponder es T_{K-2}. ¡Pero tenemos que dar una fórmula para el número de ternas en el caso de tener K elementos!

Tenemos ahora dos problemas; uno, hacer ver que la conjetura del incremento es cierta para cualquier renglón de la tabla; y dos, encontrar una formulación para saber cuántas ternas se tienen cuando el conjunto tiene K elementos.

Dejémos la tabla por un momento y regresemos al problema concreto de las ternas para tratar de obtener más información.

Fijémonos como numerábamos las ternas para un conjunto de 4 elementos por ejemplo.

En la primera columna tenemos las ternas que tienen a los elementos "a" y "b" como dos de sus tres elementos, en la segunda columna están los que tienen a "a" y a "c" como dos de sus elementos, pero que son diferentes a los de la columna anterior, y en la tercera columna estan las que tienen a "b" y a "c" como dos de sus elementos y que no están en las 2 columnas anteriores.

Si el conjunto tiene 5 elementos tenemos algo semejante.

Haciendo un esquema de lo que se hace en general tenemos:

Vamos a llamarle a_i a cada elemento del conjunto y lo vamos a colocar en orden en cuanto a los subíndices. O sea $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{K-1}, a_K$ son los elementos de un conjunto con K elementos.

En la primera columna tomamos todas las ternas que tienen a a_1 y a a_2 como dos de sus tres elementos y les agregamos como tercero, a cualquiera de los K-2 elementos restantes, es decir, la primera columna tiene K-2 ternas distintas. En la segunda columna colocamos las ternas que tengan a a_1 y a_3 como dos de sus elementos, pero aquí ya no aparecerá la terna $a_1 a_2 a_3$ porque ya está contada en la primera columna, así es que en la segunda columna tenemos K-3 ternas distintas mas. En la tercera columna tenemos a las ternas que empiezan con $a_1 a_4$ y como tercer elemento cualquiera de los elementos que están colocados adelante de a_4, es decir, no aparecen ni a_2 ni a_3 como tercer elemento porque esas ternas ya estaban contadas. Entonces en la tercera columna tenemos K-4 ternas más. Siguiendo así, llegamos hasta la columna K-2 en donde están las ternas que tienen como primeros elementos a a_1 y a_{K-1} y como tercer elemento todos los restantes hacia adelante, por lo que la columna K-2 tiene una sola terna que es la $a_1 a_{K-1} a_K$.

Haciendo un esquema para que se entienda mejor lo que hemos hecho tenemos:

COLUMNA 1	COLUMNA 2	COLUMNA 3	. . .	COLUMNA K-3	COLUMNA K-2
$a_1 a_2 a_3$	$a_1 a_3 a_4$	$a_1 a_4 a_5$	. . .	$a_1 a_{K-2} a_{K-1}$	$a_1 a_{K-1} a_K$
$a_1 a_2 a_4$	$a_1 a_3 a_5$	$a_1 a_4 a_6$	. . .	$a_1 a_{K-2} a_K$	
$a_1 a_2 a_5$	$a_1 a_3 a_6$	$a_1 a_4 a_7$	. . .		
$a_1 a_2 a_6$	$a_1 a_3 a_7$	. . .			
$a_1 a_2 a_7$	. . .	. . .			
. . .	. . .	. . .			
. . .	. . .	. . .			
. . .	. . .	$a_1 a_4 a_{K-1}$			
. . .	$a_1 a_3 a_{K-1}$	$a_1 a_4 a_K$			
$a_1 a_2 a_{K-1}$	$a_1 a_3 a_K$				
$a_1 a_2 a_K$					

tabla 11

Hasta aquí tenemos que el número de ternas que tienen al elemento a_1 son:

$$(K-2) + (K-3) + (K-4) + . . . + (K-(K-2)) + (K-(K-1))$$

La primera columna tiene (K-2) renglones, la segunda (K-3) renglones, y la última (la número K-2) tiene solo un renglón, entonces el número de ternas que tienen a a_1 como uno de sus elementos es: $(K-2)+(K-3)+(K-4)+. . .+(K-(K-1))$.

Siguiendo un esquema equivalente para a_2, tenemos:

COLUMNA 1	COLUMNA 2	COLUMNA 3	. . .	COLUMNA K-4	COLUMNA K-3
$a_2 a_3 a_4$	$a_2 a_4 a_5$	$a_2 a_5 a_6$	. . .	$a_2 a_{K-2} a_{K-1}$	$a_2 a_{K-1} a_K$
$a_2 a_3 a_5$	$a_2 a_4 a_6$	$a_2 a_5 a_7$	. . .	$a_2 a_{K-2} a_K$	
$a_2 a_3 a_6$	$a_2 a_4 a_7$	. . .			
$a_2 a_3 a_7$	. . .	. . .			
. . .	. . .	. . .			
. . .	. . .	$a_2 a_5 a_{K-1}$			
. . .	$a_2 a_4 a_{K-1}$	$a_2 a_5 a_K$			
$a_2 a_3 a_{K-1}$	$a_2 a_4 a_K$				
$a_2 a_3 a_K$					

tabla 12

La primera columna tiene K-3 renglones, la segunda K-4 renglones, y la última tiene solo un renglón; el número de ternas, distintas a las ya contadas, que tienen al elemento a_2 como uno de sus elementos son:

$$(k-3) + (K-4) + (K-5) + \ldots + (K-(K-2)) + (K-(K-1))$$

Siguiendo así, tenemos que las ternas que tienen a a_3 como uno de sus elementos, y que no hubiésemos contado ya, son:

$(K-4) + (K-5) + \ldots + (K-(K-2)) + (K-(K-1))$. Y así sucesivamente hasta llegar a contar todas las ternas que tienen a a_{K-2} y que no hubiésemos contado antes, que son: Solamente una, o sea, la terna $a_{K-2}a_{K-1}a_K$.

Vemos que con este procedimiento no nos falta ninguna terna, ni tampoco hemos contado de más alguna de ellas, por lo tanto para saber el total de ternas de un conjunto con K elementos solo nos falta sumar todos los pasos que hemos hecho hasta aquí, es decir, el total de ternas es:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr}
 & (k-2) & + & (K-3) & + & (K-4) & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 & \\
 & & & (K-3) & + & (K-4) & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 & \\
 & & & & & (K-4) & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 & \\
+ & & & & & & & \vdots & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 3 & + & 2 & + & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & 2 & + & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
\hline
\end{array}$$

$$(K-2) + 2(K-3) + 3(K-4) + \ldots + (K-4)3 + (K-3)2 + (k-2)1$$

Ahora para calcularla vamos a sumar renglón por renglón, es decir, el primer renglón es la suma desde el número uno hasta el número (k-2), y esto ya lo sabemos hacer. ¡ Es el triangular número (K-2) ! Que ya sabemos que es $(K-2)(K-1)/2$. El segundo renglón es el triangular número(K-3), que es (K-3)(K-2)/2 . Y así sucesivamente hasta el último renglón que es el primer triangular, o sea, 1.

De donde esa "sumota" es lo mismo que:

$$(K-2)(K-1)/2 + (K-3)(K-2)/2 + (K-4)(K-3)/2 + \ . \ . \ . + 3 + 1$$

Entonces, nuestro problema de contar cuantas ternas no ordenadas tiene un conjunto con K elementos se ha transformado a sumar los números triangulares, o lo que es lo mismo, a sumar:

$$T_{K-2} + T_{K-3} + T_{K-4} + \ . \ . \ . + T_3 + T_3 + T_2 + T_1$$

Observemos además, que esto ya lo habíamos visto antes, cuando analizamos la tabla de incrementos, ya que habíamos dicho que el incremento entre un paso y el siguiente era un número triangular.

Entonces hemos encontrado ya un argumento para hacer válida nuestra conjetura de que en el renglón número K de la tabla 10, el incremento debe ser T_{K-2}. (dejamos al lector demostrar porqué)

Pero aún no encontramos una fórmula para saber cuántas ternas se tienen cuando el conjunto tiene K elementos, sin tener que calcular todos los casos anteriores.

Busquemos otra manera de encontrar la fórmula que queremos, es decir, busquemos una fórmula que nos proporcione el resultado del renglón 1000 por ejemplo, sin tener que calcular los 999 anteriores.

Empecemos por contar las ternas de un conjunto con 4 elementos, sea por ejemplo {a, b, c, d} el conjunto, contemos las ternas que tienen al elemento d, para ésto tomamos el conjunto {a, b, c} formado por tres de los elementos del de 4; formemos las parejas de este último conjunto: ab, ac, bc; tenemos (3)(2)/2 = 3 parejas, como ya sabemos. A estas parejas les agregamos el elemento d del conjunto original y obtenemos así las ternas: abd, acd y bcd. Teniendo entonces (3)(2)/2 = 3 ternas del conjunto de cuatro elementos, estas son todas las ternas que tienen al elemento d como uno de sus tres elementos. Si hacemos lo mismo con otro elemento por ejemplo con c, se tiene:

ab, ad, bd son las 3 parejas del conjunto (a, b, d) y agregando el elemento c tenemos: abc, adc y bdc que son las ternas que tienen al elemento c como uno de sus miembros.

Siguiendo así con cada uno de los 4 elementos del conjunto original tenemos:

abd	abc	acb	bca
acd	adc	acb	bda
bcd	bdc	cdb	cda

Son 12 ternas en total, pero tenemos que cada una se repite 3 veces ya que es lo mismo tomar abd que adb ó bda, de todos modos se trata de la misma terna.(en el esquema anterior están subrayadas como ejemplo tres de ellas). De donde el número de ternas de un conjunto con 4 elementos es 12 / 3 = 4 .

Si hacemos lo mismo con un conjunto de 5 elementos se tiene:

Sea (a, b, c, d, e) el conjunto con 5 elementos, quitamos uno y tenemos (a, b, c, d) , formamos las parejas de este último y luego les adjuntamos el quinto elemento e, teniendo así todas las ternas que tienen al elemento e, haciendo lo mismo con cada uno de los 5 elementos se tiene:

TERNAS QUE TIENEN A e	TERNAS QUE TIENEN A d	TERNAS QUE TIENEN A c	TERNAS QUE TIENEN A b	TERNAS QUE TIENEN A a
abe	abd	abc	acb	bca
ace	acd	adc	adb	bda
ade	aed	aec	aeb	bea
bce	bcd	bdc	cdb	cda
bde	bed	bec	ceb	cea
cde	bad	bac	deb	dea

tabla 13

Tenemos en total 30 ternas, donde cada una se vuelve a repetir 3 veces, (vease tabla 13). Entonces para un conjunto de 5 elementos, las ternas son ((4)(3)/2)(5)/3 = (30)/3 = 10

En general tenemos:

Para un conjunto con K elementos, contemos todas las ternas que contienen a un elemento dado, hacemos una lista de las parejas que podemos hacer con los K-1 elementos restantes, que ya sabemos que son (K-2)(K-1)/2 parejas. A estas parejas les adjuntamos el elemento que habíamos quitado y tenemos así (K-2)(K-1)/2 ternas del conjunto original, en donde siempre aparece un mismo elemento. Hacemos lo mismo con otro de los elementos del conjunto, y así para cada uno de los K elementos de él, entonces lo que tenemos son K(K-1)(K-2)/2 ternas, pero cada una de éstas se repite tres veces, por lo que ya se ha mencionado, así es que el número de ternas de un conjunto con K elementos son: K(K-1)(K-2)/6 .

¡ Ya tenemos una fórmula que nos proporciona el número de ternas que podemos formar con un conjunto de K elementos!

Vamos a comprobar de otra manera que la fórmula es cierta.

Primero debemos comprobar si en la tabla 10 la fórmula dada también concuerda renglón por renglón:

si K = 1 se tiene (1)(0)(-1)/6 = 0

si K = 2 (2)(1)(0)/6 = 0

si K = 3 (3)(2)(1)/6 = 1

Comprobando directamente para 4, 5 y 6 vemos que en verdad la fórmula es cierta en todos estos casos. Pero tenemos que comprobar si en general esa fórmula nos sirve para cualquier renglón de la tabla. Ya sabemos que el incremento de un renglón a otro es un número triangular, es más, sabemos que el incremento del renglón K-1 al renglón K es T_{K-2} y sabemos cuánto vale ese triangular, entonces veamos si la fórmula también tiene ese incremento en el renglón K.

En el renglón K la fórmula es (K)(K-1)(K-2)/6 y en el renglón K-1 es (K-1)(K-2)(K-3)/6 , veamos cuánto vale su diferencia.

$$(K)(K-1)(K-2)/6 \quad - \quad (K-1)(K-2)(K-3)/6 \quad =$$

$$[\ (K^2-K)(K-2) \ - \ (K^2-3K+2)(K-3)\ ]/6 \quad =$$

$$[\ (K^3-3K^2+2K)\ -\ (K^3-6K^2+11K-6)\ ]/6 \quad =$$
$$(3K^2-9K+6)/6\ =\ (\ K^2\ -\ 3K\ +\ 2\ )/\ 6 \quad =$$
$$[\ (K-2)(K-1)\ ]\ /6\ =\ T_{k-2}$$

Con lo que hemos comprobado que la fórmula $(K)(K-1)(K-2)/6$ nos proporciona siempre el número de ternas que podemos formar de un conjunto con K elementos, sea cual sea la K que tomemos.

Teníamos pendiente también, encontrar la suma de los números triangulares, entonces con este resultado ya podemos decir cuánto vale ésta. Pero si quisiéramos encontrarla por otro camino, podemos hacerlo en seguida, veamos:

Queremos encontrar:

$T_1\ +\ T_2\ +\ T_3\ +\ .\ \ .\ \ .\ +\ T_{N-1}\ +\ T_N$ que es lo mismo que:

$$1\ +\ 3\ +\ 6\ +\ .\ \ .\ \ .\ +\ (N-1)(N)/2\ +\ (N)(N+1)/2\ =$$

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\ .\ \ .\ \ .+(1+2+3+...+(N-1))+(1+2+3+...+N)=$$

$$\begin{array}{l}
1 \\
1 + 2 \\
1 + 2 + 3 \\
1 + 2 + 3 + 4 \\
\ \ .\ \ .\ \ . \\
+\ .\ \ .\ \ . \\
\ \ .\ \ .\ \ . \\
1 + 2 + 3 + \ .\ \ .\ \ .\ + (N-1) + N \\
\hline
N + (N-1)2 + (N-2)3 + \ .\ \ .\ \ .\ + 2(N-1) + N
\end{array}$$

Lo cual ya habíamos planteado antes, y que ahora sí vamos a analizar. Primero veamos qué sucede con números pequeños, por ejemplo si N=5 tenemos:

$$\begin{array}{rl}
1 + 3 + 6 + 10 + 15 = & 1 \\
& 1 + 2 \\
+ & 1 + 2 + 3 \\
& 1 + 2 + 3 + 4 \\
& \underline{1 + 2 + 3 + 4 + 5} \\
& 5\times1+4\times2+3\times3+2\times4+1\times5
\end{array}$$

Si completamos la suma como:

$$
\begin{array}{rl}
 & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\
 & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\
+ & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\
 & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\
 & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\
\hline
\end{array}
$$

Tenemos:

$1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 5(1) + 4(2) + 3(3) + 2(4) + 1(5) =$

$[5(1)+ 5(2)+ 5(3)+ 5(4)+ 5(5)]-[1(2)+ 2(3)+ 3(4)+ 4(5)] =$

$5(1 + 2 + 3 + 4 + 5) - 2(1 + 3 + 6 + 10)$

Por tanto

$1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 5(1 + 2 + 3 + 4 + 5)-2(1 + 3 + 6 + 10)$

Donde del lado derecho de la igualdad lo único que sabemos es sumar los números naturales, pero tenemos también que sumar los números triangulares en el segundo sumando. ¡otra vez el mismo problema! Sigamos buscando como hacerlo.

$(1 +3 +6 +10 +15)+ 2(1 + 3 + 6 + 10) = 5(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$

$(1 +3 +6 +10 +15)+ 2(1 +3 +6 +10 +15)= 5(1+2+3+4+5) + 2(15)$

$3(1 + 3 + 6 + 10 + 15) = 5(1 + 2 + 3 + 4 + 5)+ 2(1+2+3+4+5)$

$3(1 + 3 + 6 + 10 + 15) = 7(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$

$1 + 3 + 6 + 10 + 15 = [7(1+2+3+4+5)]/3 = [(5+2)(T_5)]/3$

Que ya sabemos calcular y que es: $(7)(15)/3 = 35$

Y es cierto que $1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$

Debemos ahora verificar si este procedimiento es válido para cualquier N.

$$
\begin{array}{lllllll}
T_1 + & T_2 + & T_3 + & \ldots & + T_{N-1} & + T_N = & \\
1 & & & & & & \\
1 + & 2 & & & & & \\
1 + & 2 + & 3 & & & & \\
+\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
1 + & 2 + & 3 + & \ldots & + (N-1) & & \\
1 + & 2 + & 3 + & \ldots & + (N-1) & + N & \\
\hline
\end{array}
$$

$(N)1 +(N-1)2 +(N-2)3 + \quad . \quad . \quad . \quad +2(N-1) + (1)N$

Completando como antes:

$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + (N-1) & + & N \\
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + (N-1) & + & N \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & & & \\
+ & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & & & \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & & & \\
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + (N-1) & + & N \\
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + (N-1) & + & N \\
\hline
 & N(1) & + & N(2) & + & N(3) & + & \cdots & + N(N-1) & + & N(N)
\end{array}
$$

Tenemos en total: $N(1+2+3+...+(N-1)+N)$ y debemos quitarle lo que agregamos, o sea, debemos quitar:
$1(2) + 2(3) + 3(4) + ... + (N-1)N$ entonces:

$T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_{N-1} + T_N =$

$N(1+2+3+...+N) - [(1)(2)+(2)(3)+...+(N-1)(N)] =$

como en $(1)(2)+(2)(3)+...+(N-1)(N)$ cada uno de los sumandos es par, sacamos como factor común al 2 y tenemos:

$N(1+2+3+...+N) - 2[1+3+...+[(N-1)N]/2] =$

como ya sabemos que el producto de dos números consecutivos divididos entre 2 es un número triangular, tenemos:

$N(1+2+3+...+N) - 2(T_1 + T_2 + ... + T_{N-1}) =$

Por lo tanto

$(T_1+T_2+...+T_N) + 2(T_1+T_2+...+T_{n-1}) = N(1+2+...+N)$

$(T_1+T_2+...+T_{N-1}+T_N) + 2(T_1+T_2+...+T_{N-1}) = NT_N$

sumando a ambos lados $2T_N$ tenemos:

$(T_1+T_2+...+T_{N-1}+T_N) + 2(T_1+T_2+...+T_{N-1}+T_N) = NT_N+2T_N$

$3(T_1+T_2+...+T_{N-1}+T_N) = (N+2)T_N$

$(T_1 + T_2 + ... + T_{N-1} + T_N) = [(N+2)T_N]/3 = (N+2)(N+1)(N)/6$

LLegamos así a la fórmula que ya habíamos obtenido por otro procedimiento y que ya habíamos visto que era válida para cualquier número N ó para cualquier renglón de la tabla.

Otra forma más de encontrar el número de ternas de un conjunto con K elementos

Como antes, empezaremos analizando casos con K's pequeñas; por ejemplo si K=4 tenemos:

Sea X=(a, b, c, d) un conjunto de cuatro elementos. Tomemos el conjunto Y=(a, b, c) y formemos todas las parejas del conjunto Y, éstas las combinamos con el elemento d del conjunto X y tenemos así tantas ternas de X como parejas tiene Y. O sea (3)(2)/2 = 3 ternas, pero estas no son todas, todavía falta contar la terna formada por el mismo conjunto Y. Es decir, lo que hemos hecho es:

Formamos las tres parejas de Y: ab, ac y bc; a éstas les agregamos el elemento d, tenemos: abd, acd y bcd; pero no son todas, falta la terna abc. De donde el número de ternas de un conjunto con 4 elementos es 4.

Si tenemos un conjunto con 5 elementos, se tiene:

Sea X=(a, b, c, d, e) el conjunto de 5 elementos y sea Y=(a, b, c, d) el conjunto auxiliar.Formamos las (4)(3)/2 =6 parejas del conjunto Y : ab, ac,ad, bc,bd y cd : A éstas les agregamos el elemento e del conjunto X, y tenemos así las 6 ternas siguientes: abe, ace, ade, bce, bde y cde. Pero aún faltan las 4 ternas del caso anterior, o sea faltan las ternas: abd, acd, bcd y abc; por lo que las ternas de un conjunto con 5 elementos son:
abe, ace, ade, bce, bde, cde, abd, acd, bcd y abc, que son 10 ternas en total.

Lo que hemos hecho en estos dos ejemplos nos lleva a establecer otra conjetura que es: El número de ternas de un conjunto con K elementos es igual al número de parejas de un conjunto con (K-1) elementos mas el número de ternas que se forman con un conjunto de (K-1) elementos.

Para hacer ver que la conjetura es cierta, analicemos qué fué lo que hicimos.

Si suponemos que ya tenemos contadas las ternas de un conjunto con (K-1) elementos y queremos contar cuántas ternas se forman cuando a ese conjunto de (K-1) elementos se le agrega un elemento mas, lo que hacemos es: Primero que nada hay que observar que las ternas que ya teníamos también tienen que aparecer ahora (que son en particular las ternas del conjunto con K elementos, en donde no aparece el elemento que se anexó a última hora), y además tenemos que contar todas aquellas ternas en donde aparezca ese nuevo elemento, es decir, las ternas que a fuerza tengan en la tercera posición, por ejemplo, a ese último elemento y éstas no son otras mas que el número de parejas que se forman con un conjunto de (K-1) elementos.

Para poder trabajar mejor y mas claramente, vamos a ponerle nombre al número de parejas de un conjunto y algún otro nombre al número de ternas de un conjunto.

Sean C_K^2 = el número de parejas de un conjunto con K elementos.

Y sea C_K^3 = el número de ternas de un conjunto con K elementos.

Sabemos ya que $C_K^2 = (K)(K-1)/2$ pero , alguna fórmula para C_K^3 no la sabemos aún, esto es lo que queremos descubrir.

Lo que nuestra conjetura dice, ya teniendo una notación es: $C_K^3 = C_{K-1}^2 + C_{K-1}^3$

Veamos primero si con ejemplos pequeños la conjetura es verdadera:

Si K = 3 $\quad C_3^3 = C_2^2 + C_2^3 = (2)(1)/2 + 0 = 1$

Si K = 4 $\quad C_4^3 = C_3^2 + C_3^3 = (3)(2)/2 + 1 = 4$

Si K = 5 $\quad C_5^3 = C_4^2 + C_4^3 = (4)(3)/2 + 4 = 10$

Y así podemos seguir, y encontraríamos el renglón que quisiésemos, pero tenemos que saber el renglón anterior y para saber el anterior hay que saber el anterior del anterior y así sucesivamente tendríamos que saber todos los renglones anteriores.

De cualquier manera, aunque no podamos calcular cualquier renglón de la tabla sin conocer los anteriores, la conjetura nos dice algo muy claro, que es verdadero y que además podemos ilustrar muy claramente para poder comprender mejor nuestro problema de contar el número de ternas de un conjunto. Veámoslo en general:

Sea X = $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{K-1}, a_K\}$ el conjunto en cuestión. Las ternas de X son todas las ternas en las que no aparece a_K mas todas las ternas en las que sí aparece a_K, y esas son: $C_{K-1}^3 + C_{K-1}^2$ donde C_{K-1}^3 son las ternas en donde no aparece a_K y C_{K-1}^2 son las ternas donde sí aparece a_K en compañía de todas las parejas formadas con los otros elementos distintos de a_K, y a este número ya lo conocemos.

Por este camino no encontramos una formulación general para cualquier renglón de la tabla, pero sí encontramos una relación muy lógica y clara entre un renglón y el siguiente de la tabla.

Ahora, sabiendo el número de parejas de un conjunto con k elementos y que $C_n^3 = C_{k-1}^2 + C_{k-1}^3$ veamos cuánto vale la suma de números triangulares.

Queremos comprobar que en general es cierto que:

$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{n-3} + T_{n-2} = C_n^3$ y sabemos calcular cualquier número triangular, en particular sabemos que $T_{n-2} = [(n-2)(n-1)]/2$ y ya sabemos también que es el número de parejas de un conjunto con n-1 elementos, o sea $C_{n-1}^2 = [(n-1)(n-2)]/2$, entonces lo que tenemos es:

$$C_n^3 = (T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-3}) + T_{n-3} = C_{n-1}^3 + T_{n-2}$$

O sea que debemos demostrar que :

$T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-3} = C_{n-1}^3$ pero por lo que se ha visto en el párrafo anterior, podemos seguir así para atrás en los triangulares y lo que tenemos es:

$$T_{n-2} = C_n^3 - C_{n-1}^3$$
$$T_{n-3} = C_{n-1}^3 - C_{n-2}^3$$
$$T_{n-4} = C_{n-2}^3 - C_{n-3}^3$$

.

.

.

$$T_3 = C_5^3 - C_4^3$$
$$T_2 = C_4^3 - C_3^3$$
$$T_1 = C_3^3 - C_2^3$$

De donde si sumamos tenemos:

$$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{n-4} + T_{n-3} + T_{n-2} =$$
$$C_n^3 - C_{n-1}^3 + C_{n-1}^3 - C_{n-2}^3 + C_{n-2}^3 - C_{n-3}^3 + \ldots + C_4^3 - C_3^3 + C_3^3 - C_2^3 =$$
$$C_n^3 - C_2^3$$

¿Pero qué significa C_2^3?

¡El número de ternas distintas, formadas con un conjunto de 2 elementos es cero!, por lo que:

$$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{n-2} = C_n^3$$

Que por otro lado ya sabíamos que la suma de los triangulares hasta el n-2 es el número de ternas de un conjunto de n elementos.

P R O B L E M A :

Si por alguna razón quisiéramos encontrar la suma: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ para cualquier número natural n, ¿cómo la encontraríamos?

De nuevo vayamos construyendo una tabla con números pequeños para descubrir algún procedimiento, comportamiento o fórmula general para hacerlo.

Hagamos una tabla con números que podemos ir comprobando :

n	$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$
1	1
2	9
3	36
4	100
5	225

tabla 14

Los números que nos dan, son números que podemos reconocer casi de inmediato; son de nuevo otros de los llamados números figurados, son números cuadrados; es decir son:

1^2, 3^2, 6^2, 10^2, 15^2.

Entonces resulta que $1^3 + 2^3 = 3^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$ $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$, y siguiendo así, observamos que se tiene:

$1^3 = (T_1)^3$

$1^3 + 2^3 = (T_2)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = (T_3)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (T_4)^2$

Y en general tenemos la siguiente conjetura:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (T_n)^2$ donde T_n es el n'ésimo número triangular.

¿ Cómo vamos a demostrarlo ?

Sabemos que esa fórmula funciona para los 5 primeros casos, pero ¿será siempre cierta?

Veamos cuales son los incrementos renglón por renglón en la tabla anterior y formemos una nueva tabla.

n	$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$	INCREMENTO
1	1	1
2	9	8
3	36	27
4	100	64
5	225	125

tabla 15

Claramente los incrementos son los cubos de los números naturales, es más ya lo sabíamos porque ese era el problema original, el incremento de un renglón a otro es un número al cubo, o sea en el renglón K de la tabla el incremento es K^3. Para comprobar que la fórmula es cierta en general, tenemos, no solo que comprobar que es cierta para los 5 primeros casos, sino que también se comporta igual en cualquiera de los renglones de la tabla, esto es, que el incremento en el renglón K, también en la fórmula es K^3.

Hagamos ahora una tabla de $(T_n)^2$ como sigue:

n	$(T_n)^2$	INCREMENTO
1	1	1-0 = 1
2	9	9-1 = 8
3	36	36-9 = 27
4	100	100-36 = 64
5	225	225-100=125

tabla 16

Y en general tenemos:

$(T_K)^2 - (T_{K-1})^2 = [(K)(K+1)/2]^2 - [(K-1)(K)/2]^2 =$

$[(K(K+1)/2) + ((K-1)K/2)][(K(K+1)/2) - (K-1)K/2] =$

$[K(K+1+K-1)/2][K(K+1-K+1)/2] = K^2(2K)(2)/4 = K^3$

Por lo que si en los 5 primeros renglones las tablas son iguales y el incremento entre los renglones de ellas siempre es el mismo, se tiene que hemos demostrado que:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + . . . + n^3 = (T_n)^2$ para toda n en los números naturales.

De modo que si dos listas empiezan igual y renglón por renglón se incrementan igual, entonces las dos son iguales siempre.

Volvamos al problema de encontrar la suma de números triangulares, o lo que es lo mismo, contemos cuántas ternas hay en un conjunto.

Primero contemos el número de ternas ordenadas que tiene un conjunto con n elementos: esto es, para formar una terna, podemos pensar en un casillero que tiene 3 casillas, por ejemplo, |1a.|2a.|3a.| y que tenemos que acomodar un elemento del conjunto en cada una de las casillas; para colocar un elemento (de los n del conjunto) en la primera casilla tenemos n posibilidades de hacerlo, una vez escogido uno de los n para la primera casilla, tenemos (n-1) posibilidades para escoger el elemento que ocupará la segunda casilla, y para escoger el elemento que ocupara la terçera casilla ya 'solo tenemos (n-2) posibilidades de escoger uno. Esto sucede para cada uno de los n elementos del conjunto, y sea cual sea el primer elemento que se escogió, para escoger el segundo siempre se tendrán (n-1) posibilidades, y de nuevo, sean cuales sean los que se escogieron en la primera y segunda casillas, para escoger el que estará en la tercera se tienen (n-2) posibilidades para cada elección anterior. Esto es, el número de ternas ordenadas de un conjunto con n elementos es n(n-1)(n-2).

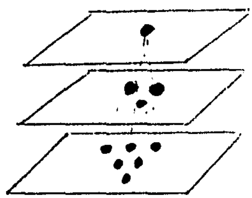
Ahora, lo que queremos en realidad es saber cuántas ternas no ordenadas tiene un conjunto con n elementos. Una vez contadas las ternas ordenadas, veamos cómo contar las no ordenadas: Por cada una de las ternas que ya contamos, se tienen 6 ternas ordenadas que, en realidad, son la misma (hablando de no ordenadas) es decir. Por ejemplo la terna abc es la misma que otras cinco más, cuando queremos contar ternas no ordenadas. O sea abc, bca, cab, bac, acb y cba son la misma terna no ordenada ya que contienen los mismos elementos. Entonces si el número de ternas ordenadas que se pueden contar de un conjunto con n elementos es n(n-1)(n-2), el número de ternas no ordenadas de un conjunto con n elementos es (n)(n-1)(n-2)/6 ; que por otro lado ya lo sabíamos y ya lo habíamos demostrado.

Ahora, veamos una forma geométrica de encontrar el número de ternas de un conjunto con n elementos, basándonos en la idea que trabajaron los griegos en cuanto a la representación geométrica de algunos números a los que llamaban números figurados.

Por ejemplo para sumar 1 + 3 + 6 , que es lo mismo que sumar $T_1 + T_2 + T_3$ y que geométricamente sería sumar:

```
                .                                   .
     .         . .                        .        . .
. + . .  + . . .       o bien      .  +  . .  +  . . .
```

es decir, lo que queremos encontrar es, cuántos puntitos hay en esta última representación, teniendo así la suma hasta el tercer número triangular. Busquemos entonces si existe alguna manera de colocarlos de tal forma que nos facilite la cuenta. Salgámonos del plano en que están colocados los puntos y formémos con ellos una pirámide colocándolos de la siguiente manera:

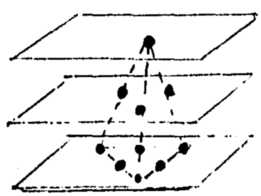


El resultado es una pirámide triangular en donde en cada "piso" o "capa" se tiene un número triangular.

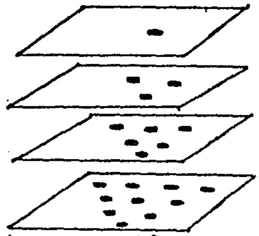
Si queremos sumar $T_1 + T_2$ lo que tenemos es:

Una pirámide triangular que tiene en la base 3 puntitos y uno en el otro nivel.

Ya vimos que si queremos sumar $T_1 + T_2 + T_3$ lo que se obtiene es una pirámide triangular con 6 puntos en la base, 3 puntos en el nivel que sigue hacia arriba y un punto más en el último plano, o sea:



Si lo que se quiere es sumar hasta el cuarto número triangular, tenemos:



Una pirámide triangular con 10 puntos en la base, 6 puntos en el siguiente nivel, 3 puntos en el penúltimo nivel y al final un punto en la "punta"

Podemos entonces, en general, llamarles a éstos, números piramidales, o sea el primer número piramidal será el úno, el segundo será el $4=T_1+T_2$, el tercer número piramidal es $10=T_1+T_2+T_3$, el cuarto es $20=T_1+T_2+T_3+T_4$ y asi sucesivamente obtenemos que el enésimo número piramidal es:

$T_1 + T_2 + T_3 + \ . \ . \ . + T_n$

Pero necesitamos saber cuánto vale el enésimo número piramidal, para saber cuánto es la suma de números triangulares, que era nuestro problema realmente.

Si hacemos algo semejante a lo que dicen que hizo Gauss cuando niño, tenemos:

Por ejemplo, si queremos obtener el cuarto número piramidal:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrl} & 1 & + & 3 & + & 6 & + & 10 & = & 20 & \quad (1) \\ + & & & & & & & & & & \\ & 10 & + & 6 & + & 3 & + & 1 & = & 20 & \quad (2) \\ \hline & 11 & + & 9 & + & 9 & + & 11 & = & 40 & \end{array}$$

En (1) tenemos la pirámide que hemos venido construyendo y en (2) la misma pirámide pero invertida (con la punta hacia abajo).

Si queremos obtener por ejemplo el quinto número piramidal:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & + & 3 & + & 6 & + & 10 & + & 15 & = & 35 \\
+ \; 15 & + & 10 & + & 6 & + & 3 & + & 1 & = & 35 \\
\hline
16 & + & 13 & + & 12 & + & 13 & + & 16 & = & 70
\end{array}
$$

¡ No nos dan resultados "bonitos" para contar en general !

Recordemos que cuando queríamos calcular a los números triangulares hacíamos algo parecido y formábamos un rectángulo que tenía como base un número natural y de altura el siguiente número natural, y que en total el número de puntitos que tenía el rectángulo era el doble del triangular que buscábamos. Bien, pues tratemos de hacer algo semejante en el sentido de construir una figura geométrica auxiliar en la cual podamos calcular fácilmente el número de puntos que contrenga, y por otro lado que esté compuesta también por los números piramidales que es lo que en realidad buscamos.

Sí tuviéramos un prisma triangular podríamos contar cuantos puntos tiene, con solo conocer cuantos tiene de base (un número triangular) y cuantos tiene de altura. Al sumar una pirámide invertida no formamos un prisma, pero podemos analizar qué hicimos para encontrar qué nos faltaría para construir un prisma triangular.

Para facilitar un poco, llamémosle de alguna manera a cada uno de los "puntitos" de cada pirámide y veamos nivel por nivel què es lo que sucede en cada caso.

Sean θ un punto de la pirámide original,

O un punto de la pirámide invertida y

X un punto de los que nos faltarían para tener un prisma.

Por ejemplo, si queremos encontrar el tercer número piramidal tenemos tres niveles que analizar:

En el nivel de la base tenemos:

```
   X
  θ X
 θ θ X
θ θ θ 0
```

Que sería la base del prisma que buscamos

En el segundo nivel hacia arriba tendríamos:

```
   X
  X X
 θ X 0
θ θ 0 0
```

para continuar con el prisma triangular

Y por último en el tercer nivel (el de mas arriba) tendríamos:

```
   X
  X 0
 X 0 0
θ 0 0 0
```

Que sería la última capa del prisma que buscámos.

Si queremos encontrar el cuarto piramidal se tiene:

```
    X
   θ X
  θ θ X
 θ θ θ X
θ θ θ θ 0
```

Primer nivel (la base)

```
    X
   X X
  θ X X
 θ θ X 0
θ θ θ 0 0
```

Segundo nivel

```
    X
   X X
  X X 0
 θ X 0 0
θ θ 0 0 0
```

Tercer nivel

```
    X
   X 0
  X 0 0
 X 0 0 0
θ 0 0 0 0
```

El cuarto y último nivel.

Hagamos un resumen de lo que tememos con estos 2 ejemplos, ilustrémoslo en las siguientes tablas y veamos qué es lo que podemos conjeturar de nuestras observaciones.

PRISMA DE BASE EL CUARTO TRIANGULAR

	nivel 1	nivel 2	nivel 3	TOTAL
# de θ	6	3	1	10
# de O	1	3	6	10
# de X	3	4	3	10
TOTAL	10	10	10	30

tabla 17

PRISMA DE BASE EL QUINTO TRIANGULAR

	nivel 1	nivel 2	nivel 3	nivel 4	TOTAL
# de θ	10	6	3	1	20
# de O	1	3	6	10	20
# de X	4	6	6	4	20
TOTAL	15	15	15	15	60

tabla 18

Preguntamos al lector, el número de X en cada caso, ¿será también una pirámide triangular?

Observamos en estos 2 ejemplos que el número total de puntos que nos faltan son, también la suma de números triangulares por lo que si en general sucediese esto, ya podríamos encontrar cuánto vale el enésimo número piramidal.

Esperamos por el momento que si queremos sumar hasta el quinto número triangular, lo que obtengamos con este procedimiento sea $(T_4)(5)/3$, y en general nuestra hipótesis es que para encontrar el enésimo número piramidal la fórmula es:

$(n)(T_{n+1})/3$

Para demostrarla, empecemos nuevamente por analizar números pequeños para descubrir la regla general en el comportamiento del problema.

Si se quiere encontrar el segundo número piramidal:

1 + 3 = . + . . =  = 4 puntos

Tenemos que formar un prisma triangular de base igual al tercer número triangular. Entonces em el nivel de la base tenemos:

```
    X
   θ X
  θ θ O
```

Donde faltaría una hilera de dos puntos. En el segundo nivel se tendría:

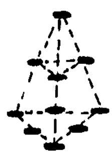
```
   .X.
   X O
  θ O O
```

Faltaria una hilera de 2 puntos, o bien 2 hileras de 1 punto cada una, para tener un prisma triangular de base 6 y altura 2, por lo que el segundo número piramidal es (6)(2)/3 o sea 4.

Si queremos sumar

$1 + 3 + 6 = T_1 + T_2 + T_3$ = . + . . + . . .

o sea contar



Debemos formar un prisma con base en cuarto número triangular.

Así, tenemos en la base:

```
   X
  θ X
 θ θ X
θ θ θ 0
```

faltaría una hilera de 3 puntos.

En el segundo nivel:

```
   X
  X X
 θ X 0
θ θ 0 0
```

faltarían 2 hileras de dos puntos cada una, y por último,

En el tercer nivel

```
   X
  X 0
 X 0 0
θ 0 0 0
```

faltarían 3 hileras de 1 punto cada una.

De donde el prisma tiene en total 30 puntos distribuidos como sigue:

$1 + 3 + 6 = 10$	en la pirámide original
$6 + 3 + 1 = 10$	en la pirámide invertida y
$(1)(3)+(2)(2)+(3)(1) = 10$	los puntos que faltarían por nivel.

Ahora si se quiere sumar hasta el T_4 tenemos que formar un prisma de base T_5 y altura 4, y de forma análoga al caso anterior tenemos:

Primer nivel

```
    X
   θ X
  θ θ X
 θ θ θ X
θ θ θ θ 0
```

faltaría una hilera de 4 puntos.

```
Segundo nivel        X
                    X X
                   θ X X
                  θ θ X 0
                 θ θ θ 0 0    faltarían 2 hileras de 3 puntos.

Tercer nivel         X
                    X X
                   X X 0
                  θ X 0 0
                 θ θ 0 0 0    faltarían 3 hileras de 2 puntos.

Y cuarto nivel       X
                    X 0
                   X 0 0
                  X 0 0 0
                 θ 0 0 0 0    faltarían 4 hileras de un punto.
```

Por lo que el prisma tiene en total 60 puntos formados como sigue:

$$1 + 3 + 6 + 10 = 20$$

$$10 + 6 + 3 + 10 = 20$$

$$(1)(4) + (2)(3) + (3)(2) + (4)(1) = 20$$

En todos estos casos, y en general, es claro que los dos primeros renglones son iguales, además, cada uno de ellos es la suma de números triangulares, entonces lo que en realidad queremos demostrar es que:

$$(1)(n) + (2)(n-1) + (3)(n-2) + \ldots + (n-1)(2) + (n)(1) =$$

$$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{n-1} + T_n = [(n)(n+1)(n+2)]/6$$

¡ Esto ya lo habíamos demostrado antes ! Cuando demostramos que la suma:

$$\begin{array}{llllll}
 & 1 & & & & \\
 & 1 + 2 & & & & \\
 & 1 + 2 + 3 & & & & \\
+ & \ldots & & & & \\
 & \ldots & & & & \\
 & \ldots & & & & \\
 & 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) & & & & \\
 & 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n & & & & \\
\hline
\end{array}$$

es lo mismo que $\frac{(n)(n+1)(n+2)}{6}$

y observemos de nuevo que ésta es precisamente la suma de los números triangulares.

Hagámoslo ahora en general y veamos si podemos demostrarlo de otra forma.

$$\begin{array}{rcccccccc} & T_1 & + & T_2 & + & T_3 & + \dots + & T_n \\ + & T_n & + & T_{n-1} & + & T_{n-2} & + \dots + & T_1 \\ & (1)(n) & + & 2(n-1) & + & 3(n-2) & + \dots + & n(1) \\ \hline \end{array}$$

$$(T_1+T_n+n)+(T_2+T_{n-1}+2(n-1))+(T_3+T_{n-2}+3(n-2))+ \dots +(T_n+T_1+n)$$

Sumando los sumandos parciales tenemos:

$$T_1 + T_n + n = (1)(2)/2 + (n)(n+1)/2 + n = [2+n^2+n+2n]/2 =$$
$$[n^2 + 3n + 2]/2 = [(n+1)(n+2)] / 2 = T_{n+1}$$
$$T_2 + T_{n-1} + 2(n-1) = (2)(3)/2 + (n-1)(n)/2 + 2(n-1) =$$
$$[6 + n^2 - n + 4n - 4] / 2 = [n^2 + 3n + 2]/2$$
$$[(n+1)(n+2)] / 2 = T_{n+1}$$

.

.

.

$$T_{i+1} + T_{n-i} + (i+1)(n-i) = (i+1)(i+2)/2 + (n-i)(n-i+1)/2 +$$
$$(i+1)(n-i) =$$
$$[i^2+3i+2+n^2-2ni+n+i^2-i+2ni-2i^2+2n-2i] / 2 =$$
$$[n^2 + 3n + 2]/2 = (n+1)(n+2)/2 = T_{n+1}$$

.

.

.

$$T_n + T_1 + n = \dots = T_{n+1}$$

Por lo tanto

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & T_1 & + & T_2 & + & T_3 & + \; . \; . \; . \; + & T_{n-1} & + & T_n \\
+ & T_n & + & T_{n-1} & + & T_{n-2} & + \; . \; . \; . \; + & T_2 & + & T_1 \\
 & 1(n) & + & 2(n-1) & + & 3(n-2) & + \; . \; . \; . \; + & (n-1)2 & + & (n)1 \\
\hline
 & T_{n+1} & + & T_{n+1} & + & T_{n+1} & + \; . \; . \; . \; + & T_{n+1} & + & T_{n+1}
\end{array}
$$

que es:

$n(T_{n+1}) = [n(n+1)(n+2)] / 2$

Que es el número total de puntos del prisma triangular, entonces despejando:

$2(T_1+T_2+...+T_n) + [1(n)+2(n-1)+...+(n-1)2+(n)1] =$

$[n(n+1)(n+2)] / 2$

De donde

$1(n) + 2(n-1) + . . . + (n-1)2 + (n)1 =$

$[n(n+1)(n+2)]/2 - 2(T_1 + T_2 + . . . + T_n) =$

(como ya sabemos cuánto vale la suma de triangulares)

$[n(n+1)(n+2)]/2 - 2[n(n+1)(n+2)/6] =$

$[3n(n+1)(n+2) - 2n(n+1)(n+2)] / 6 =$

$[(n+1)(n+2)(3n-2n)] / 6 = [n(n+1)(n+2)] / 6 =$

$T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_n$

Por lo tanto es cierto que la suma:

$1(n) + 2(n-1) + 3(n-2) + ... + (n-1)2 + (n)1$ es igual a la suma de los números triangulares desde el primero hasta el enésimo, sea cual sea la n.

Así, el enésimo número piramidal es:

$[n(T_{n+1})] / 3 = [n(n+1)(n+2)] / 6$

Que es lo que por otro camino ya habíamos probado.

Hemos visto además que un prisma triangular (de los hemos estado trabajando) se descompone en 3 pirámides de igual volumen cada una. Una pirámide está sobre su base, la segunda (la invertida) está sobre su vértice y la tercera está recargada sobre una arista.

Sugerimos al lector, como ejercicio, hacer un modelo de ésto, ya sea con pelotas de hule espuma, con bolas de unicel, con canicas, o con algún otro material que se le facilite, para observar cómo están colocadas las pirámides.

En esta descomposición se basa la fórmula del volumen de una pirámide: "área de la base por la altura entre 3", al igual que la descomposición del paralelogramo en 2 triángulos nos dá la fórmula del área del triángulo.

Sin embargo en este caso las 3 pirámides, aunque tienen el mismo volumen no son en general congruentes, como puede verse si se hizo el modelo. Esto introduce una complicación adicional que sólo puede resolverse con procedimientos infinitos, como el "Principio de Cavalieri" o los métodos del Cálculo Integral.

¿Puede el lector construir un prisma triangular donde las 3 pirámides sí sean congruentes?

P R O B L E M A .

¿Cuántos subconjuntos tiene un conjunto de n elementos?

Empecemos contando los casos pequeños. Por ejemplo, si el conjunto tiene 1 elemento ¿cuántos subconjuntos tiene? Solo tiene 2 subconjuntos que son el conjunto vacío y el conjunto mismo, o sea ø y {a} son los subconjuntos de {a}.

Si el conjunto tiene 2 elementos, por ejemplo {a,b}, los subconjuntos son: ø, {a}, {b} y {a,b}. Cuatro subconjuntos.

Para un conjunto con 3 elementos,{a,b,c} los subconjuntos son: ø, {a}. {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c} y {a,b,c}. Ocho subconjuntos en total.

Siguiendo así, tenemos que para un conjunto con 4 elementos {a,b,c,d} los subconjuntos son: ø, {a}, {b}, {c}, {d}, {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}, {a,b,c}, {a,b,d}, {b,c,d}, {a,c,d} y {a,b,c,d} que son 16 subconjuntos. Entonces podemos formular una tabla con los casos que hemos contado como sigue:

# DE ELEMENTOS	# DE SUBCONJUNTOS
0 (4)	1
1	2
2	4
3	8
4	16

tabla 19

Entonces, por lo que hemos hecho, vemos que para encontrar los subconjuntos de un conjunto con n elementos necesitamos conocer cuántos subconjuntos de 0 elementos tiene, cuántos subconjuntos con 1 elemento, cuántos con 2 elementos, cuántos con 3 elementos, y así sucesivamente hasta cuántos subconjuntos con n elementos tiene.

(4) Hemos agregado también el caso en que el conjunto no tiene elementos, en cuyo caso el número de subconjuntos es 1 ya que el ø siempre es subconjunto de cualquier conjunto.

Pero esto en general todavía no lo sabemos; sabemos cuántos subconjuntos de 0 elementos porque solo existe uno (el vacío); sabemos cuántos subconjuntos de un elemento porque es lo mismo que contar el número de elementos del conjunto; sabemos cuántos subconjuntos de 2 elementos tiene porque ya sabemos contar el número de parejas no ordenadas de un conjunto con n elementos (que es lo mismo que el número de subconjuntos con 2 elementos ¿no?) y por último sabemos cuántos subconjuntos de 3 elementos tiene, ya que también sabemos cuántas ternas no ordenadas tiene un conjunto con n elementos; pero a partir de cuatro elementos, no sabemos aún cuantos subconjuntos se forman. Entonces podemos seguir por este camino y averiguar cuantos subconjuntos de k elementos tiene un conjunto con n elementos, para cualquier k en los números naturales (no solo para k=1,2 y 3), o bien podemos intentar otro camino para determinar cuántos subconjuntos tiene un conjunto con n elementos en donde no necesitemos esta información.

El primer camino lo dejaremos pendiente por el momento, lo veremos un poco mas adelante, seguiremos ahora por el segundo, intentaremos ver el problema de otro modo. (el lector puede intentar el primer camino por su propia cuenta, aunque también aquí lo veremos mas adelante)

Para un conjunto con 0 elementos, el número de subconjuntos, ya hemos visto es solo uno. Para un conjunto con 1 elemento, los subconjuntos son: el subconjunto con 0 elementos mas el subconjunto que consta del elemento único del conjunto. O sea, si el conjunto con 1 elemento es {a}, los subconjuntos son ø y el subconjunto {a} que es el conjunto mismo. En total son 2 subconjuntos.

Para un conjunto con 2 elementos, el número de subconjuntos es el número de subconjuntos de un conjunto con 1 elemento (caso anterior) más el número de subconjuntos nuevos que se formen con el conjunto de 2 elementos. Esto es, si el conjunto de 2 elementos es {a,b} el número de subconjuntos es: los 2 subconjuntos de {a}, que son: ø y {a}, más los 2 subconjuntos {b} y {a,b} que son los subconjuntos que no eran subconjuntos de {a}, por lo que en total tenemos 4 subconjuntos de {a,b}.

Para el caso en que el conjunto tenga 3 elementos, por ejemplo {a,b,c}, los subconjuntos son todos los del caso anterior más los nuevos subconjuntos formados con el elemento c. O sea ø, {a}, {b}, {a,b} más {c}, {a,c}, {b,c} y {a,b,c} en total 8 subconjuntos.

Para un conjunto con 4 elementos solo debemos contar los 8 subconjuntos de un conjunto de 3 elementos y agregarle los subconjuntos formados por el nuevo elemento agregado a cada uno de los 8 subconjuntos anteriores, esto es: los subconjuntos de {a,b,c,d} son los subconjuntos de {a,b,c} más cada uno de éstos junto con el elemento d, o sea:

ø, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c} más {d}, {a,d}, {b,d}, {c,d}, {a,b,d}, {a,c,d}, {b,c,d} y {a,b,c,d}

O lo que es lo mismo, solo debemos multiplicar por 2 el caso anterior. Con lo que el número de subconjuntos de un conjunto de 4 elementos es 16.

Así para un conjunto de 5 elementos el número de subconjuntos debe ser 16 x 2 = 32.

En general tenemos entonces que si sabemos el número de subconjuntos de un conjunto con K elementos, podemos saber el número de subconjuntos de un conjunto con K+1 elementos; solamente debemos multiplicar por 2 el caso anterior.

Podemos entonces incrementar la tabla 15 como sigue y ver si podemos encontrar una fórmula general:

# DE ELEMENTOS	#DE SUBCONJUNTOS	INCREMENTO
0	1	-
1	2 = 2(1)	1
2	4 = 2(2)	2
3	8 = 2(4)	4
4	16 = 2(8)	8
5	32 = 2(16)	16
6	64 = 2(32)	32
7	128 = 2(64)	64

tabla 20

¿ Cuál será el número de subconjuntos si el número de elementos es K ?

Si denotamos por S(n) al número de subconjuntos de un conjunto con n elementos, lo que hasta aquí sabemos es:

S(K) = 2 (S(K-1)) con lo que tenemos una fórmula recursiva para encontrar el número de subconjuntos de un conjunto con n elementos. Pero como ésta fórmula es siempre cierta, podemos sustituir encadenadamente y tenemos:

S(K) = 2(S(K-1)) = 2 [2(S(K-1))] = 2(2[2(S(K-1))]) = . . .

Y llegaremos así, en algún momento a S(6) que ya conocemos, esto es:

Por ejemplo S(8) es:

S(8) = 2[S(7)] = 2(2[S(6)]) = 2[2(64)] = 2(128) = 256

Veamos entonces cuántas veces se tiene que multiplicar por 2 para llegar a S(K).

Por ejemplo si K = 5 tenemos:

S(5) = 2[S(4)] = 2(2[S(3) = 2[2(2[S(2)])] =

2(2[2(2[S(1)])]) = 2[2(2[2(2[2])])] = 2^5 = 32

Entonces vemos que en general S(K) es:

S(K) = 2[S(K-1)] = 2(2[S(K-2)]) = . . .= 2^K

Por lo que el número de subconjuntos de un conjunto con K elementos es 2^K .

Otra manera de ver el mismo problema es la siguiente:

Supongamos que tenemos un conjunto de 3 elementos y queremos encontrar el número de subconjuntos que tiene. Sea el conjunto $\{a_1, a_2, a_3\}$ el conjunto en cuestión. Coloquemos en una hilera los elementos del conjunto y debajo de ella una hilera de 3 casillas como sigue:

a_1	a_2	a_3

Para un subconjunto de $\{a_1,a_2,a_3\}$, asignemos un número 1 en la primera casilla si el elemento a_1 es elemento del subconjunto y número 0 si el elmento a_1 no es elemento del subconjunto. Lo mismo para cada una de las 3 casillas. Tenemos así una distribucion de ceros y unos para cada uno de los subconjuntos. Hagamos una lista de los subconjuntos y de la hilera de casillas correspondiente para este caso particular.

SUBCONJUNTO	a_1	a_2	a_3
$\emptyset$	0	0	0
$\{a_1\}$	1	0	0
$\{a_2\}$	0	1	0
$\{a_3\}$	0	0	1
$\{a_1,a_2\}$	1	1	0
$\{a_1,a_3\}$	1	0	1
$\{a_2,a_3\}$	0	1	1
$\{a_1,a_2,a_3\}$	1	1	1

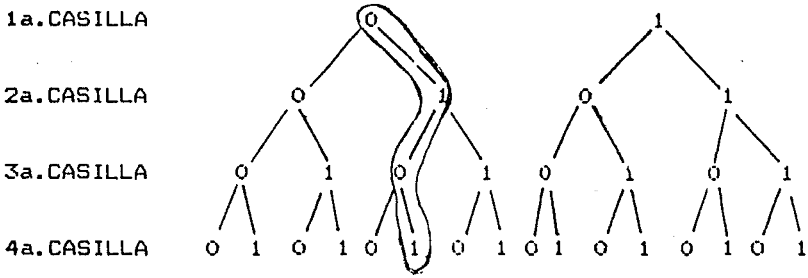
De esta manera tenemos una función uno a uno entre los subconjuntos de un conjunto de 3 elementos y la distribución de ceros y unos en un casillero de 3 lugares.

De manera que para un conjunto con 4 elementos tenemos un casillero con 4 lugares y de la misma manera debemos contar cuantas formas distintas hay de llenar los 4 lugares con ceros y unos.

Sea $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ un conjunto de 4 elementos.

SUBCONJUNTO	a_1	a_2	a_3	a_4
$\emptyset$	0	0	0	0
$\{a_1\}$	1	0	0	0
$\{a_2\}$	0	1	0	0
$\{a_3\}$	0	0	1	0
$\{a_4\}$	0	0	0	1
$\{a_1, a_2\}$	1	1	0	0
$\{a_1, a_3\}$	1	0	1	0
$\{a_1, a_4\}$	1	0	0	1
$\{a_2, a_3\}$	0	1	1	0
$\{a_2, a_4\}$	0	1	0	1
$\{a_3, a_4\}$	0	0	1	1
$\{a_1, a_2, a_3\}$	1	1	1	0
$\{a_1, a_2, a_4\}$	1	1	0	1
$\{a_1, a_3, a_4\}$	1	0	1	1
$\{a_2, a_3, a_4\}$	0	1	1	1
$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$	1	1	1	1

Entonces para contarlos podemos verlo como el número de formas distintas que se tienen de distribuir ceros y unos en un casillero de 4 lugares. Para llenar la primera casilla tenemos 2 oportunidades, ponemos un uno o bien ponemos un cero (el primer elemento está o no está en el subconjunto). Una vez que hayamos llenado la primera casilla, para la segunda casilla tenemos de nuevo 2 oportunidades: ponemos un uno o ponemos un cero; una vez llenos las dos primeras, para llenar la tercera casilla tenemos otra vez 2 posibilidades, poner un uno o poner un cero, y por último, para llenar la cuarta casilla, no importa lo que hayamos hecho en las tres primeras, tenemos otras 2 oportunidades, ponemos un uno o ponemos un cero. Por lo que el número de formas distintas que tenemos de llenar con ceros y unos un casillero de 4 lugares es: 2 para el primero, 2 para el segundo, 2 para el tercero y 2 para el cuarto lugar; por lo tanto son $2\times2\times2\times2 = 2^4 = 16$ formas de hacerlo. Hemos puesto la multiplicación, porque para cada una de las elecciones que hagamos existen todas las otras posibilidades, es decir, si en la primera escogemos cero podemos escoger unos en todas las otras o bien en todas puros ceros o combinados, pero esto mismo podíamos haber hecho si en la primera hubiésemos escogido un uno; y así para cada una de las 4 casillas. Todo esto podemos ilustrarlo en un nuevo esquema como sigue:



esquema 1

También aquí tenemos una representación para cada uno de los subconjuntos del conjunto. Si seguimos el camino marcado en el esquema 1, éste representa al subconjunto: 0 1 0 1 que es el $\{a_2, a_4\}$. De manera que los 16 caminos que representamos en el esquema 1 son todos los subconjuntos que buscábamos. En este esquema se ve un poco mejor por qué multiplicamos cada vez por 2.

Entonces, en general para un conjunto con n elementos, formamos un casillero con n lugares y para cada uno tenemos 2 oportunidades, independientes de las demás, por lo que el número de subconjuntos es $2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$.

Por lo que hemos llegado de nuevo al resultado que ya teníamos por otro camino.

Observación.

Notemos que el esquema 1 nos da también la información de cuántos subconjuntos tienen al elemento a_1 por ejemplo, y éstos son solo los caminos que empiezan con 1 y éstos son los que estan en la parte derecha del esquema, o sea 8 subconjuntos tienen a a_1 y además sabemos que 8 subconjuntos no lo tienen. De manera semejante podemos contar los subconjuntos que contienen al elemento a_2 y los que no lo tienen. Lo mismo para los demás elementos del conjunto.

Recordemos que está pendiente encontrar el número de subconjuntos de 4 elementos de un conjunto con n elementos, así como el número de subconjuntos de 5 elementos de un conjunto con n elementos, y así sucesivamente el número de subconjuntos de n elementos que tiene un conjunto con n elementos. ¿ Puede el lector dar una respuesta a este problema ? Lo invitamos a pensarlo.

Para ver el camino que dejamos pendiente, se sugiere hacer un análisis semejante al que se hizo con la ternas a partir de las parejas. De nuevo invitamos al lector a hacer este análisis.

En el capítulo de Combinatoria, se da una solución a éste problema por el camino que hemos dejado pendiente.

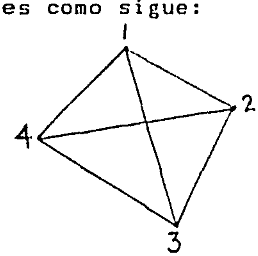
PROBLEMA.

¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo (6) de n lados?

Si el polígono tiene n lados, también tiene n vértices. De cada uno de los vértices salen n-1 líneas para unirse a los demás vértices, de éstas 2 son lados y n-3 son diagonales del polígono. Haciendo esta cuenta para cada uno de los vértices, vemos que estaremos contando doble, porque cada línea está unida a 2 vértices, por lo tanto el número de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.

Por otro lado, veamos el problema ayudándonos con algunos dibujos de casos particulares de polígonos.

Si el polígono tiene 4 lados por ejemplo, y numeramos sus vértices, tenemos que las diagonales se representan por parejas de vértices como sigue:

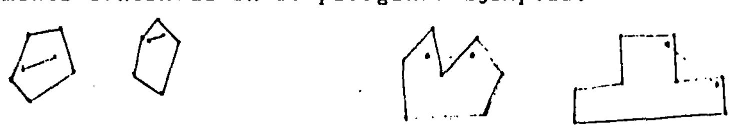


Donde las diagonales son las 2 líneas representadas por $\overline{13}$ y $\overline{24}$; $\overline{13}$ representa la línea que une al vértice 1 con el 3, y $\overline{24}$ la que une al vértice 2 con el 4.

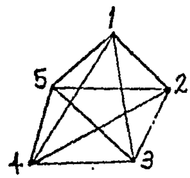
Si el polígono tiene 5 lados, tenemos:

---

(6) Estamos hablando de un polígono convexo. Un polígono es convexo si para cualesquiera 2 puntos en el interior del polígono, el segmento de recta que une a estos 2 puntos está totalmente contenido en el polígono. Ejemplos:

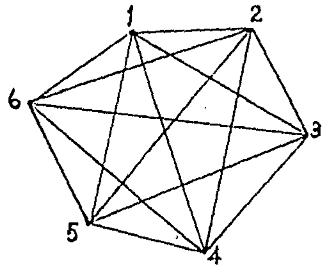


Convexos   No convexos



Las diagonales son las 5 líneas representadas por $\overline{13}$, $\overline{24}$, $\overline{35}$, $\overline{14}$ y $\overline{25}$.

Si el polígono tiene 6 lados:



Las diagonales son las líneas $\overline{13}$, $\overline{14}$, $\overline{15}$, $\overline{24}$, $\overline{25}$, $\overline{26}$, $\overline{35}$, $\overline{36}$, y $\overline{46}$.

Veamos que éste es el mismo problema de contar parejas de elementos de un conjunto (en este caso el conjunto de vértices), solo que estamos descontando aquellas parejas de vértices que describen los lados del polígono, estas son las parejas de vértices consecutivos. En el caso del polígono de 6 lados, del total de parejas de 6 elementos tenemos que descontar las líneas $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$, $\overline{45}$, $\overline{56}$ y $\overline{61}$.

Así es que para el polígono de 6 lados tenemos:

$$\frac{6(5)}{2} - 6 = 15 - 6 = 9 \text{ diagonales.}$$

En general, si $A=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es el conjunto de vértices de un polígono de n lados, formamos las parejas de estos n elementos y a éstas tenemos que quitarles las parejas de vértices consecutivos que son: para cada v_i sus consecutivos son v_{i-1} y v_{i+1}, entonces las parejas de consecutivos que contienen al vértice v_i son $v_{i-1}v_i$ y v_iv_{i+1}, y ésto sucede para cada i, por lo que por cada vértice hay 2 parejas de consecutivos. Notemos además que la pareja $v_i v_{i+1}$ también la estamos contando para ser quitada cuando quitamos las parejas de vértices consecutivos que contienen a v_{i+1}, entonces estamos quitando en realidad el doble de lo que debemos, por lo que al final debemos dividir entre 2 el número de parejas de vértices consecutivos

El número de parejas que debemos quitar es 2n/2 = n y ésto ya lo sabíamos , ya que las parejas de vértices consecutivos son precisamente las que describen los lados del polígono y ya sabemos por el problema mismo que el polígono tiene n lados, entonces en efecto el número de parejas que debemos quitar es n.

Por lo tanto el número de diagonales de un polígono de n lados es: $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1) - 2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$

Ahora tenemos además un tercer procedimiento para encontrar el número de diagonales de un polígono de n lados.

Si procedemos como antes, haciendo una lista que comience con números pequeños, observamos la siguiente tabla:

# DE LADOS	# DE DIAGONALES
3	0
4	2
5	5
6	9
7	14

tabla 21

Contándolos a pie, para un polígono de 8 lados ya se hace muy difícil, pero podemos observar estos 4 casos para ver si existe alguna relación que podamos demostrar en general.

Si el polígono tiene 4 lados, de cada uno de sus vértices solo sale una diagonal(ya que de las 3 lineas que salen 2 son lados). Si el polígono tiene 5 lados, de cada vértice salen 2 diagonales. Si el polígono tiene 6 lados sales 3 diagonales de cada vértice y así sucesivamente, si aumentamos en uno el número de lados, se aumenta en uno el número de diagonales que salen de cada vértice.

Entonces podemos considerar que ya tenemos la regla de crecimiento. Veamos ahora como se comportan los incrementos, en la siguiente tabla:

# DE LADOS	# DE DIAGONALES	INCREMENTO
3	0	0
4	2	2
5	5	3
6	9	4
7	14	5

tabla 22

Entonces, sabiendo cuántas diagonales tiene un polígono de k lados ya sabríamos cuántas tiene un polígono de k+1 lados, pues sabemos que el incremento de ese renglón tiene que ser $(k+1)-2 = k-1$.

Ahora aclaremos un poco qué quiere decir lo que hemos encontrado en la columna de incremento.

Dado un polígono de 5 lados, sabemos que de cada uno de los 5 vértices salen 4 líneas, de las cuales 2 son lados y el resto son diagonales. Si a éste polígono le aumentamos un lado mas, como se muestra en la figura 7, tenemos que de cada uno de los 6 vértices salen 5 líneas de las cuales, de nuevo 2 son lados y el resto son diagonales. Entonces el número total de diagonales de un polígono con 6 lados es:

el # de diagonales de uno de 5 lados + las diagonales que se forman con el nuevo vértice + la diagonal que se forma con lo que antes era el quinto lado del polígono de 5 lados.

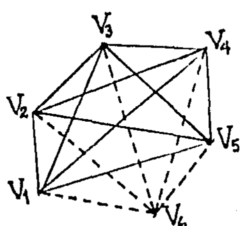


figura 7

Las diagonales del polígono de 5 lados son: v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_2v_5 y v_3v_5 y las del polígono de 6 lados son: v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_5, v_2v_6, v_3v_6, v_4v_6 y v_1v_5; de donde el incremento son las 3 líneas que salen de sexto vértice que son diagonales, mas la línea que antes era lado en el polígono de 5 lados.

En general tenemos que, dado un polígono de k+1 lados, el incremento en el número de diagonales en total con respecto al número de diagonales de un polígono de k lados es: # de diagonales del polígono con k lados + # de líneas que salen del vértice k+1 que no sean lados + la línea que antes era el k'ésimo lado del polígono de k lados; esto es, el número de líneas que salen del vértice k+1 que no son lados es k-2, más la línea que era lado, tenemos: k-2+1=k-1 que es el incremento en el renglón k+1 de la tabla.

Como hemos hecho con todo detalle el principio de la lista y como conocemos la regla de incremento, podemos ir construyendo uno por uno los renglones hasta llegar al correspondiente a un polígono de k lados.

Sea d(k) el número de diagonales de un polígono de k lados. Sabemos que d(4)=2 y que el incremento es (k-2) en el renglón k. ¿Cuánto vale entonces d(k)?

Nótese que hemos descrito aquí una recurrencia en el número de diagonales de un polígono y en base a ésta es que podemos decir que:

$$d(k) = d(k-1) + (k-2)$$

Pero

$$d(k-1) = d(k-2) + (k-1-2) = d(k-2) + (k-3)$$

y

$$d(k-2) = d(k-3) + (k-2-2) = d(k-3) + (k-4)$$

Y así sucesivamente, tenemos

$$d(k) = d(4) + (k-2) + (k-3) + \dots + [k-(k-4)] + [k-(k-3)]$$

$$d(k) = d(4) + (k-2) + (k-3) + \dots + 4 + 3 =$$

$$d(4) + (1+2) + [3+4+\dots+(k-3)+(k-2)] - (1+2) =$$

$$d(4) + [1+2+3+ \dots +(k-3)+(k-2)] - (1+2) =$$

$$d(4) + \frac{(k-2)(k-1)}{2} - 3 = \frac{4+(k-2)(k-1) - 6}{2} =$$

$$\frac{k^2 - 3k + 2 - 2}{2} = \frac{k^2 - 3k}{2} = \frac{k(k-3)}{2}$$

Que es lo que por otro lado ya sabíamos.

Más adelante, en el capítulo I, hablaremos en general del método que hemos usado aquí para encontrar $d(k)$, éste se basa en el principio que dice que si tenemos un número natural k y le restamos 1, el resultado es un número natural menor que k, y si a éste de nuevo le restamos 1, vuelve a resultar un número natural menor y siguiendo así sucesivamente, el algún momento debemos llegar necesariamente al primer natural (o sea al número 1).

P R O B L E M A .

En una ciudad donde la distribución de las calles es la que se muestra en la figura 5, se quiere saber cuántos caminos mínimos distintos se pueden hacer para llegar desde la esquina marcada con * a cada una de las esquinas de la ciudad.

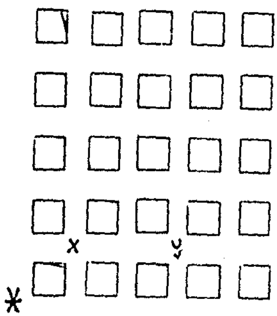
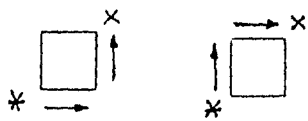


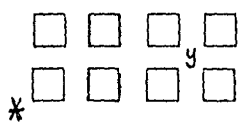
figura 5

Analicemos el problema esquina por esquina. Por ejemplo para llegar a la esquina marcada con X se tienen los siguientes caminos mínimos:

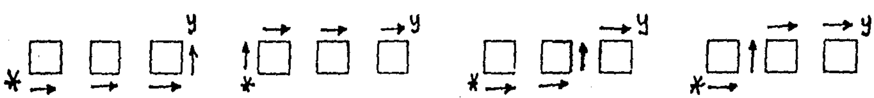


Dos caminos mínimos(mínimos, porque cada uno consta de 2 cuadras y cualquier otro camino que siguiésemos para llegar a X, tendría mayor número de cuadras).

Para otra esquina, por ejemplo la esquina marcada con Y en la siguiente figura:

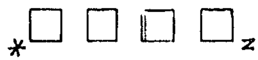


Los caminos son:

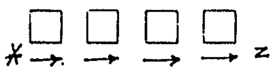


Cuatro caminos mínimos distintos. Cada uno de ellos consta de 4 cuadras y cualquier otro que encontremos tendrá mayor número de cuadras.

Para otra esquina mas, por ejemplo la esquina marcada con Z en el siguiente esquema:

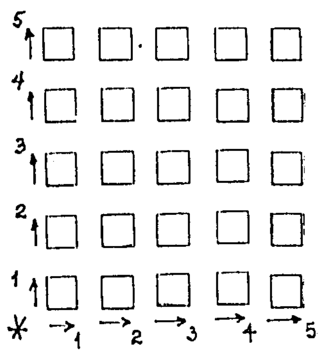


Tenemos

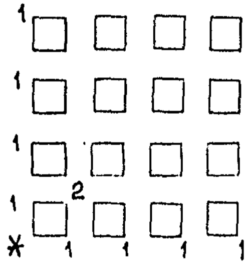


Un solo camino mínimo que consta de 4 cuadras.

Entonces lo que sucede es que en todas las esquinas que estén a las orillas de la ciudad solo habrá un camino mínimo. Ilustramos esto en el siguiente esquema en donde colocamos el número de cuadras que componen el camino mínimo a cada una de las esquinas de las orillas.

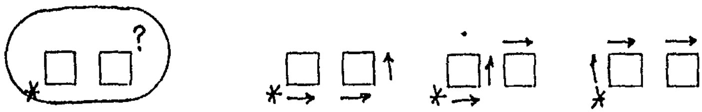


Pero veamos qué sucede en las otras esquinas. Hagamos ahora un esquema en donde coloquemos en cada esquina (de las que hemos analizado) cuántos caminos mínimos hay para llegar a ella, sin considerar de cuántas cuadras consta cada camino.

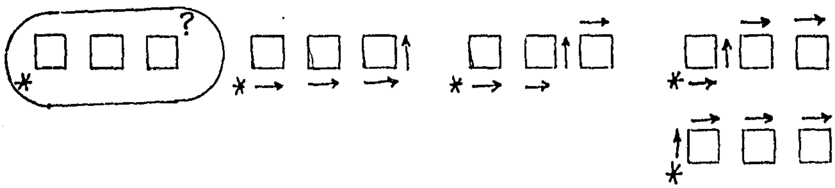


¿ Qué relación tendrán estos números ? ¿Cómo sabremos en general para cualquier esquina cuántos caminos mínimos hay?

Vayámonos en orden, buscando para cada esquina cuántos caminos mínimos hay.

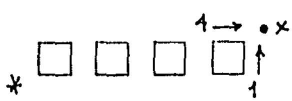


Hay 3 caminos mínimos



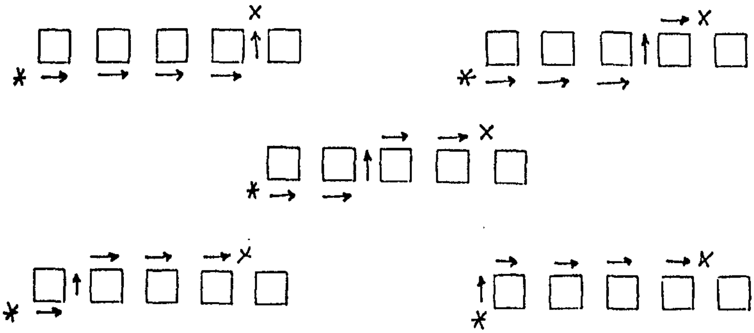
Hay cuatro caminos mínimos.

¿Cuántos caminos habrá para esta esquina?



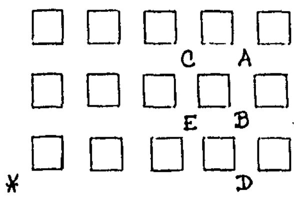
Para llegar a esta esquina, o a cualquier otra, notemos que solo podemos llegar si venimos de una de dos direcciones, es decir, no podemos venir de la esquina de arriba, por ejemplo, porque ya no sería un camino mínimo.

Tenemos que venir de la esquina que dice 4 o bien de la esquina de abajo que dice 1. Sólo podemos llegar a **X** con una direccion así → o con una dirección así ↑ . Por lo que tenemos que sumar los 4 caminos anteriores en la dirección → más el camino anterior a la dirección ↑ . Y así tendremos los 5 caminos mínimos que hay para llegar a **X** que son:



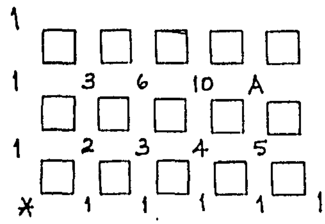
Entonces para llegar a cualquier esquina solo debemos saber cuántos caminos mínimos hay para llegar a las 2 esquinas anteriores a ella (por abajo y por la izquierda de la esquina en cuestión). Así hemos resuelto el problema, solo debemos ir sumando desde la primer esquina hasta la que necesitemos.

Por ejemplo si queremos saber cuántos caminos mínimos hay para llegar a la esquina **A** del siguiente esquema:



Debemos saber cuántos caminos hay para llegar a **B** y a **C** y sumarlos, pero para saber cuántos hay para llegar a **B** debemos saber cuántos hay para llegar a **D** y a **E** y así sucesivamente hasta que lleguemos a alguna que ya conozcamos.

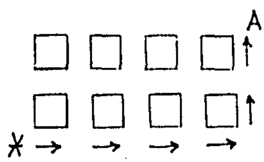
Hagamos un esquema en donde tengamos el número de caminos mínimos para llegar a las esquinas anteriores a **A**:



En donde vemos que para llegar a **A** hay 15 caminos mínimos distintos. Para llegar a **B** hay 5 caminos mínimos distintos, para llegar a C hay 10 caminos, para llegar a **D** hay 1 y para llegar a E hay 4 caminos.

Para redondear, el número de caminos mínimos para llegar a una esquina es la suma de los caminos para llegar a las dos esquinas anteriores (la de la izquierda y la de abajo de la esquina que se quiere).

Si se nos pregunta ahora ¿de cuántas cuadras consta cada uno de los caminos mínimos para llegar a una esquina?, lo que tendremos que hacer es contar sólo uno de ellos ya que todos los que son mínimos deben contener el mismo número de cuadras. Por ejemplo para llegar a **A** en el esquema anterior se tienen 15 caminos mínimos distintos y cada uno consta de 6 cuadras ya que el camino



es uno de los 15 mínimos y éste tiene 6 cuadras.

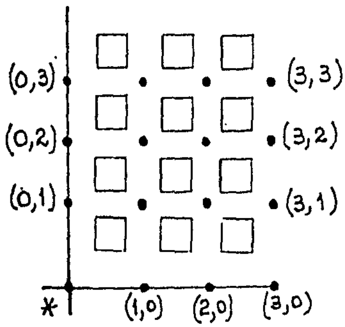
Pero en general ¿cómo sabremos de cuántas cuadras se compone cada camino mínimo dependiendo de la esquina de que se trate?

Sabemos por ejemplos que hemos hecho que cada camino mínimo, además de tener el mismo número de cuadras, también tiene el mismo número de cuadras en una dirección y el mismo número de cuadras en la otra dirección. Esto es, si un camino mínimo consta de 4 flechas hacia la derecha y 2 hacia arriba, todo camino mínimo que llegue a esa esquina (la A en este caso), debe contener también 4 flechas hacia la derecha y 2 hacia arriba.

Entonces podemos decir que contar el número de caminos mínimos para llegar a una esquina es lo mismo qu contar de cuántas formas distintas se pueden colocar tantas flechas hacia la derecha y tantas otras hacia arriba, una vez que sabemos de cuántas cuadras consta un camino mínimo.

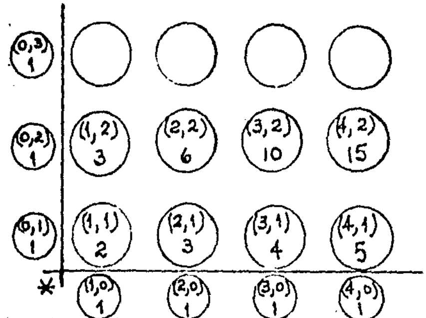
Queremos encontrar una formulación que nos indique cuál es el número de caminos mínimos en cada esquina, sin necesidad de construir todo lo que corresponde a las esquinas anteriores, y además queremos saber de cuántas cuadras se compone un camino mínimo para cada esquina sin necesidad de hacer uno de ellos explícitamente.

Establezcamos un sistema cartesiano con el origen en * y demos a cada esquina las coordenadas correspondientes a puntos con coordenadas en los números enteros no negativos, como sigue:



Queremos saber, dado el punto de coordenadas (i,j) cuántos caminos mínimos hay para llegar a él. Y de cuántas cuadras consta cada uno.

Hagamos un nuevo esquema en dondee coloquemos en una misma esquina, tanto las coordenadas correspondientes como el número de caminos mínimos en los casos que ya hemos calculado, y veamos qué podemos extraer en general de esta información.



Después de observar y pensar un poco lo que hemos estado haciendo, podemos hacer las siguientes observaciones:

1) En todos los puntos que tienen alguna coordenada igual a cero, el número de caminos mínimos es igual a 1.

2) En todas las esquinas cuyas coordenadas tienen un 1, el número de caminos mínimos es la suma de sus coordenadas.

3) En todas las esquinas cuyas coordenadas tienen un 2, el número de caminos mínimos es un número triangular. Es más, si la esquina tiene por coordenadas la (i,2) o la (2,i) el número de caminos mínimos es el número T_{i+1}.

4) En todas las esquinas cuyas coordenadas tienen un 3, el número de caminos mínimos es un número piramidal. Es más, si la esquina tiene por coordenadas la (i,3) o la (3,i) el número de caminos mínimos es el (i+1)'ésimo número piramidal.

Ahora observemos nuevamente el esquema, pero veámoslo en sus diagonales, es decir, busquemos alguna regularidad o regla entre las diagonales. Por ejemplo, en la primera diagonal tenemos los puntos de coordenadas (0,1) y (1,0) y en ambos el número de caminos es 1. En la segunda diagonal tenemos los puntos de coordenadas (0,2), (1,1) y (2,0) y en ellos los caminos mínimos son 1, 2 y 1 respectivamente. En la tercera diagonal tenemos:

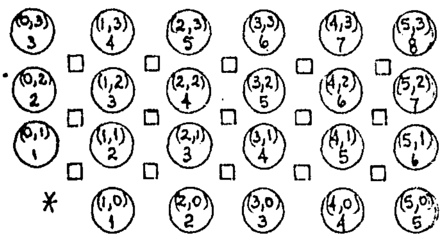
COORDENADAS	CAMINOS
(0,3)	1
(1,2)	3
(2,1)	3
(3,0)	1

Y así sucesivamente tenemos por ejemplo la quinta diagonal como:

COORDENADAS	CAMINOS
(0,5)	1
(1,4)	5
(2,3)	10
(3,2)	10
(4,1)	5
(5,0)	1

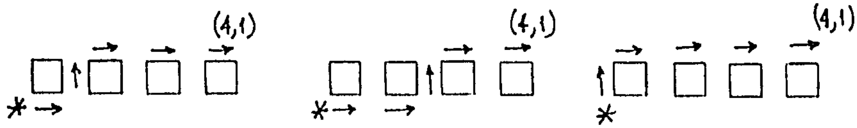
Vemos que existe cierta regularidad, pero ¿cuál es la manera de expresarla?

Hagamos ahora un esquema en donde en cada esquina pongamos tanto sus cóordenadas como el número de cuadras que contiene cada camino mińimo, como sigue:



Notemos en el esquema que en cada diagonal se tiene el mismo número de cuadras en cada camino minimo. Esto es, por ejemplo en la tercera diagonal el número de cuadras para llegar a cada esquina de esa diagonal es el mismo, o sea, en cada una de las 4 esquinas que estan en la tercera diagonal, el número de cuadras de un camino minimo es 3.

Por ejemplo en la quinta diagonal, el número de caminos minimos en cada esquina de esa diagonal es siempre 5; entonces en lo que deben cambiar entre sí los caminos mínimos a cada esquina es en el número de cuadras hacia la derecha y el número de cuadras hacia arriba. Esto es, si para 2 puntos distintos en la quinta diagonal se tiene que el número de cuadras es el mismo, entonces la composición (en cuanto a orientaciones) de las cuadras debe ser distinta. Fijémonos en 3 de los caminos mínimos que hay para llegar a la esquina de coordenadas (4,1) que está en la quinta diagonal y por lo tanto cada uno de los caminos mínimos ha de tener 5 cuadras en total.



Cada uno tiene 5 cuadras en total pero, además vemos que cada uno tiene 4 cuadras hacia la derecha y una sola cuadra hacia arriba. De donde empezamos a sospechar que el número de cuadras de un camino mínimo está relacionado con las coordenadas de esa esquina, esto es:

Conjetura. Para la esquina (i,j) el número de cuadras que contiene un camino mínimo es $i+j$, donde además i de ellas son hacia la derecha y j son hacia arriba.

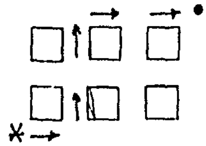
Dejamos como ejercicio para el lector demostrar esta conjetura, ya que en esencia hemos dado la idea de la demostración al hacer el caso de la quinta diagonal con un razonamiento válido en general.

Tenemos ya resuelto uno de nuestros problemas, que era saber de cuántas cuadras consta un camino mínimo para cualquier esquina; pero aún falta saber cuántos caminos mínimos hay en cada esquina, sin hacer todos los casos anteriores.

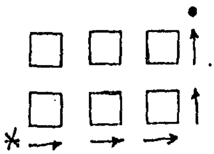
Hagamos una representación de cada camino mínimo como sigue:

A cada camino le hacemos corresponder un arreglo de flechas, hacia la derecha y hacia arriba, como se muestra en seguida: (llamaremos D a las flechas hacia la derecha y A a las flechas hacia arriba)

CAMINO ARREGLO



(D,A,A,D,D)

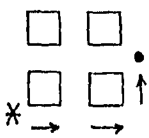


(D,D,D,A,A)

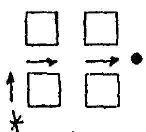
Y así, tenemos que, dado un camino mínimo cualquiera, existe un arreglo de flechas que describe el camino dado; y viceversa, dado un arreglo de flechas, existe un camino mínimo que está representado por este arreglo.

De modo que si sabemos cuántas cuadras tiene un camino mínimo, cuántas son hacia la derecha y cuántas son hacia arriba, solo tenemos que buscar de cuántas maneras podemos acomodar tantas flechas hacia la derecha y tantas otras hacia arriba en un número fijo de lugares, para tener así el número de caminos mínimos que existen para una esquina dada.

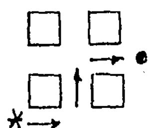
Por ejemplo, para la esquina de coordenadas (2,1) hay 3 caminos mínimos y cada uno consta de 3 cuadras en total donde 2 de ellas son hacia la derecha y 1 hacia arriba. Esto es:



1



2



3

Y su representación en los arreglos de flechas es:

(D,D,A) (A,D,D) (D,A,D)

respectivamente.

Que son las 3 formas distintas de colocar 2 flechas hacia la derecha y una hacia arriba en un casillero de 3 lugares.

De modo que la pregunta que tenemos pendiente se transforma ahora a encontrar: ¿de cuántas maneras distintas se pueden colocar i flechas hacia la derecha y j flechas hacia arriba en un casillero con $i+j$ lugares? para la esquina (i,j).

Tenemos los $i+j$ lugares, escojamos i de ellos de cualquier manera, en ellos asignemos flechas hacia la derecha y en el resto (que son j) asignemos las j flechas hacia arriba. Debemos buscar ahora ¿de cuántas formas distintas podemos hacer esta elección?.

De nuevo procederemos tratando de buscar un argumento general, que sea válido en cualquier caso y que nos proporcione suficiente información para demostrar el resultado.

Ya conocemos cuál es el número total de cuadras de un camino mínimo, esto es, si queremos llegar a la esquina (i,j) sabemos que cualquier camino debe constar de $i+j$ cuadras en total y esto, podemos pensarlo como un casillero que tiene $i+j$ lugares, o bien, en un arreglo de $i+j$ coordenadas; entonces solo falta averiguar de cuántas formas podemos llenarlos con exactamente i flechas hacia la derecha y j flechas hacia arriba.

Siguiendo con la representación que habíamos usado, sea $(D,A,D,D, \ldots ,A)$ un arreglo con $i+j$ lugares, i de los cuales son D y j son A. Si numeramos los lugares de este arreglo, tenemos:

$(1,2,3, \ldots ,i+j)$

$(D,A,D, \ldots , A)$

En donde podemos cambiar un poco la notación y decir que en los lugares $1,3,\ldots$ las flechas son hacia la derecha y en los lugares $2, \ldots ,i+j$ las flechas son hacia arriba.

Entonces para designar los arreglos del párrafo anterior solo debemos decir en qué lugares de los 3 disponibles, hay flechas hacia la derecha y en cuales hay flechas hacia arriba. Esto es, para esos 3 arrglos se tiene:

Para el arreglo 1 tenemos que las flechas hacia la derecha estan en los lugares 1 y 2, y las flechas hacia arriba en el lugar 3. Para el arreglo 2 se tiene que las flechas hacia la derecha estan en los lugares 2 y 3 , y las flechas hacia arriba estan el el lugar 1; y por último para el tercer arreglo tenemos que las flechas hacia la derecha estan en los lugares 1 y 3 y las flechas hacia arriba en el lugar 2.

De modo que si tenemos un arreglo con i+j lugares y decimos en cuales de ellos estan las i flechas hacia la derecha y en cuales estan las j flechas hacia arriba, tenemos bien caracterizado el arreglo. Por lo que solo tenenmos que contar de cuántas maneras distintas podemos escoger i lugares de un arreglo que tiene i+j lugares; o bien de cuántas maneras distintas podemos escoger j lugares de un arreglo que tiene i+j lugares. Notemos que es suficiente con decir en qué lugares deben estar las flechas hacia la derecha y ya con eso quedan determinados los lugares en que deben ir las flechas hacia arriba o viceversa. Entonces debe suceder que el número de formas de escoger i lugares de un casillero con i+j lugares es el mismo que el número de formas de escoger j lugares en un casillero de i+j lugares.

¿Cómo lo comprobamos en general?

Veamos por ejemplo si el casillero tiene 2+1 lugares, debemos encontrar todas las formas de escoger 2 lugares para colocar D . Estos son: 1,2 ; 1,3 y 2,3 que ya las conocíamos y además son el mismo número de las formas de colocar 1 lugar en un casillero de 3 lugares, que son: 3,2 y 1 respectivamente.

Notemos que en este ejemplo lo que estamos buscando son el número de parejas de un conjunto con 3 elementos o sea $C_{2,1}^{2}$, que son la misma cantidad que el número de formas que tenemos de escoger un elemento de un conjunto de 3 elementos.

Ahora, si el arreglo tiene 3+1 lugares, debemos encontrar todas las formas de escoger 3 lugares para colocar D, o bien todas las formas de escoger 1 lugar para colocar A. La respuesta a lo primero es: 1,2,3 ; 1,2,4 ; 1,3,4 y 2,3,4 que ya sabíamos porque son las ternas que podemos escoger de un conjunto que tiene 4 elementos o sea C_{3+1}^{3} . La respuesta a la segunda parte es: 1 ; 2 ; 3 y 4 que es el mismo número 4 que ya habíamos encontrado.

Si el arreglo tuviera 3+2 lugares, debemos encontrar todas las formas de escoger 3 lugares para colocar D o bien las formas de escoger 2 lugares para colocar A y por lo que se ha dicho en los 2 párrafos anteriores es lo mismo que encontrar las ternas y las parejas, o sea: C_{3+2}^{3} ó C_{3+2}^{2} y tenemos entonces que: $C_{3+2}^{3} = C_{5}^{3} = (5)(4)(3)/6 = 10$ y $C_{3+2}^{2} = C_{5}^{2} = (5)(4)/2 = 10$.

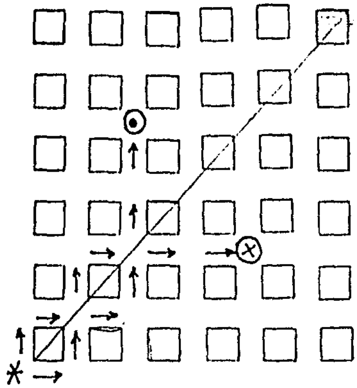
Que comprueba en este caso particular lo que hemos venido argumentando en general.

De modo que, al menos ya podemos calcular cuál es el número de caminos mínimos para todas aquellas esquinas en cuyas coordenadas aparezca un 2 o un 3, esto es: podemos dar el número de caminos mínimos para las esquinas (i,2), (i,3), (2,j) y (3,j) que son C_{i+2}^{2} , C_{i+3}^{3} , C_{2+j}^{2} y C_{3+j}^{3} respectivamente.

Pero esto no resuelve el problema en general ya que todavía nos falta dar respuesta a muchas esquinas cuyas coordenadas no son 2 ó 3.

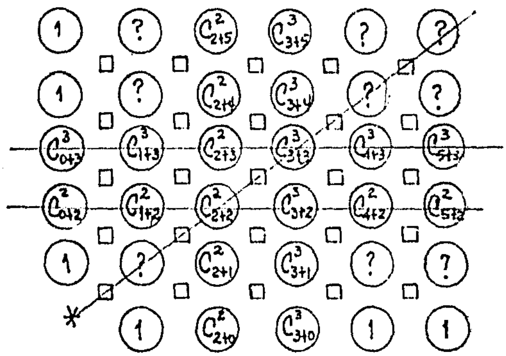
Ahora, avancemos un poco en las observaciones sobre el problema en general.

Notemos que para un camino dado, por ejemplo (D,A,D,A,D,D) existe otro que es simétrico a él, o sea, el camino representado por (A,D,A,D,A,A), y esto, como es claro sucede para cada uno de los caminos, lo que de nuevo nos dice que para llegar a la esquina marcada con $\odot$ en la figura $\otimes$ existe el mismo número de caminos mínimos que para llegar a la esquina marcada con en la misma figura, ya que estas esquinas son simétricas.



O sea , el número de caminos minimos para llegar a la esquina (i,j) es el mismo qu el número de caminos minimos para llegar a la esquina (j,i).

Y volviendo con los casos que ya podemos resolver, hagamos un esquema donde coloquemos el número de caminos mínimos para llegar a cada esquina con los elementos que ya hemos discutido.



esquema con las 2 columnas y 2 renglones que si conocemos.

Donde por la simetria que hemos dicho, vemos que $C_{3+2}{}^3 = C_{2+3}{}^2$.

Pero veamos también que todavía nos falta mucho por resolver. En todas las esquinas marcada con ? no podemos dar la respuesta todavía sin recurrir a los casos anteriores. Pero hemos avanzado en el sentido de tener claridad acerca de qué es lo que estamos buscando y, por todo lo que hemos venido observano tenemos que en general lo que estamos buscando es el número de subconjuntos con i elementos de un conjunto con i+j elementos. Y de nuevo, notemos que si en vez de escoger los i lugares donde se coloquen las D hubiésemos escogido los j lugares donde se colocaran las A, de todos modos el resultado debe ser lo mismo ya que en total solo hay i+j lugares.

Entonces dejemos claro que nos falta responder a la pregunta en general de ¿cuántos caminos mínimos hay para llegar a la esquina (i,j)? sin construir el esquema de las esquinas anteriores a ella, es decir, sin la manera recursiva que se encontró al principio del análisis de este problema.

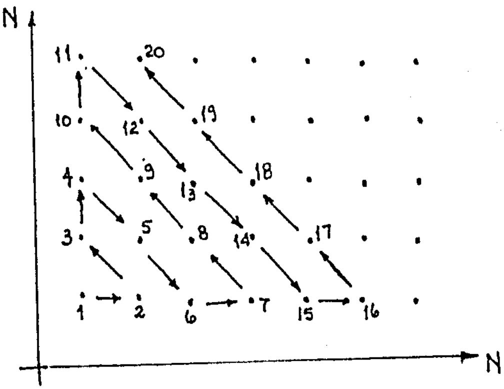
La respuesta en general, la daremos cuanto retomemos este problema en el capítulo de Combinatoria. De cualquier manera, invitamos al lector a avanzar y encontrar esta respuesta por sí mismo, intentando nuevos caminos y formas de analizar el problema.

Algo más sobre los números triangulares.

Una vez que hemos conocido a los números triangulares y que podemos trabajar con ellos, veamos una utilización muy interesante.

Se quiere encontrar una correspondencia uno a uno entre los números naturales y el producto cartesiano de los naturales con ellos mismos.

Una forma de hacerlo es la que ilustramos en el siguiente esquema:



Es claro que de esta manera no nos falta ningún número natural al que no le toque una pareja de naturales y viceversa, a toda pareja de naturales le toca un número natural. Pero con esta forma de establecer la correspondencia no es tan fácil dar una regla general para saber, dada cualquier pareja de naturales cuál es el número natural que le corresponde y al revés.

Veamos entonces otra forma de asignar la correspondencia, en donde sí se puede dar una función explícita para esta biyección.

Sea la correspondencia:

(1,1) - 1

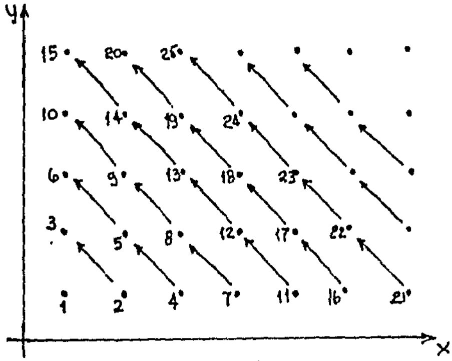
(2,1) - 2

(1,2) - 3

(3,1) - 4

(2,2) - 5
(1,3) - 6
(4,1) - 7
(3,2) - 8
(2,3) - 9

Y así sucesivamente, es decir, representado en esquema tenemos:



O sea, cada diagonal la empezamos a numerar en los puntos de coordenada y=1 seguiremos hacia arriba a la izquierda.

Notemos que en los puntos de coordenada x=1, los números que aparecen son precisamente los números triangulares, entonces solo tenemos que saber en qué diagonal y en qué posición de ésta se encuentra una pareja, para determinar qué número natural le corresponde. Esto es:

Por ejemplo el punto (3,2) se encuentra en la cuarta diagonal (empezando por la primera en el punto (1,1)) y en el segundo lugar de ésta, y vemos que el número natural que le corresponde es el 8 que es precisamente el tercer número triangular mas 2, ó el cuarto número triangular menos 2. O sea:

$8 = T_3 + 2 = 6 + 2$ o bien $8 = T_4 - 2 = 10 - 2$

Hagamos una tabla para observar mayor número de ejemplos, con todos los datos que podamos necesitar, para descubrir cuál es la regla de correspondencia que proponemos.

n	(i,j)	diagonal #	i+j	triangular ≤ n	triangular ≥ n
1	1,1	1	2	1	1
2	2,1	2	3	1	3
3	1,2	2	3	3	3
4	3,1	3	4	3	6
5	2,2	3	4	3	6
6	1,3	3	4	6	6
7	4,1	4	5	6	10
8	3,2	4	5	6	10
9	2,3	4	5	6	10
10	1,4	4	5	10	10
11	5,1	5	6	10	15
12	4,2	5	6	10	15
13	3,3	5	6	10	15
14	2,4	5	6	10	15
15	1,5	5	6	15	15
16	6,1	6	7	15	21

tabla 23

Notemos que las coordenadas de los puntos en cada diagonal siempre suman el número de diagonal que ocupan mas uno. Por ejemplo en la tercera diagonal tenemos los puntos:

$3+1 = 4$ $2+2 = 4$ y $1+3 = 4$

Y ésto sucede siempre, por lo que si hablamos de la k'ésima diagonal, sabemos que $i+j = k+1$ para cualquier punto (i,j) en esa diagonal Y la posición de un punto (i,j) en la diagonal k es la coordenada que indica la altura sobre el eje X.

De la observación de la tabla a y del esquema correspondiente a esta biyección, lo que se propone como función para dar la correspondencia uno a uno entre los naturales y el producto cartesiano de ellos es:

$(i,j) \longrightarrow T_{i+j-2} + j$ o biem

$(i,j) \longrightarrow T_{i+j-1} - i + 1$

Comprobándolas en varios ejemplos más, vemos que es mejor la segunda regla y tenemos entonces que para el punto (i,j) el número que le corresponde es el $T_{i+j-1} - i + 1$.

Por ejemplo, para el punto $(2,3)$ el número natural que le corresponde es:

$T_{2+3-1} - 2 + 1 = T_4 - 1 = (4x5)/2 - 1 = 10 - 1 = 9$

Ahora tenemos que dar la correspomdencia al revés, o sea, dado un número natural cualquiera, ¿cuál es la pareja de naturales que le corresponde?

Por ejemplo para el número 17, vemos en la figura que la pareja que le corresponde es la (5,2).

Ahora, dado un número natural n ¿qué punto le corresponde?

Debemos encontrar el menor número triangular que contenga a n, el subíndice del triangular nos indica la diagonal en la que debe estar la pareja que buscamos. Y la diferencia entre el número n y el triangular que encontremos mas uno, será la posición que ocupa en esa diagonal(contando de izquierda a derecha), esto es:

$n \leq T_k$ y $n = T_k - r$ con $0 \leq r$ k

Por lo tanto n está en la diagonal k y r son los lugares que debemos descontar a T_k para tener la posición de n en esa diagonal.

Sabemos que $k = i+j-1$ y $r = i-1$

Entonces, $n \longrightarrow (i,j)$ donde $i = r+1$ y

$j = k-r-1+1 = k-r$

O sea

$$n \longrightarrow (r+1,\ k-r)$$

Veamos de nuevo en un ejemplo si nuestra función está correcta y bien definida.

Si n=17 , tenemos que encontrar el triangular mas chico que contenga a 17 o sea, tenemos que encontrar k tal que $T_k \geq 17$, es decir:

$$(k)(k+1)/2 \geq 17$$

$$(k^2 + k)/2 \geq 17$$

$$k^2 + k \geq 34$$

$$k_2 + k - 34 \geq 0$$

Hay que encontrar el valor mínimo, o sea la igualdad, o lo que es lo mismo, el punto positivo donde la parábola intersecta al eje X.

Por lo que $k = 5.35$ es la solución positiva que buscamos, pero k debe ser entero, es más, debe ser natural, entonces k=6 es la que nos debe servir. O sea, T_6 es el menor número triangular que contiene a 17.

$T_6 = (6 \times 7)/2 = 21 \geq 17$

Por lo que $17 = 21 - 4 = T_6 - 4$ quiere decir que 17 está en la sexta diagonal en el segundo lugar, esto es:

$i = 4 + 1 = 5$ y $j = 6 - 4 = 2$

Por lo tanto a 17 le corresponde la pareja (5,2).

Se tiene así, establecida una función biyectiva entre los números naturales y el producto cartesiano de ellos, y cabe mencionar además que está demostrado que esta es la manera más simple de establecer esta biyección; es más, se ha demostrado ya que ésta y la que se establece igual por simetría (en cuanto al sentido en que se toma) son las únicas biyecciones dadas por polinomios.

. Comentario: esté es un problema relacionado con la demostración que sobre el décimo problema de Hilbert hizo Matiyasevic en 1970 (7).

(7) Ver, Hilbert's tenth problem isunsolvable. Martin Davis, Courant Institute of mathematical Science. Publicado en el Mathematical Montly en marzo de 1973.

OTRAS PREGUNTAS RELACIONADAS CON EL PROBLEMA DEL PIN-PON.

Recordemos el problema del Pin-Pon.

En un torneo de Pin-Pon las partidas se juegan por parejas escogidas al azar. En la primera ronda se forman parejas y los jugadores que pierden quedan eliminados para la siguiente ronda. Si el número de participantes es impar, uno de los jugadores pasa automáticamente a la siguiente ronda. Para la siguiente ronda participan todos los ganadores de la primera, además del posible impar a quien no le tocó pareja en la ronda anterior y así sucesivamente hasta que se tiene un solo ganador.

En la primera sección de este trabajo se dió respuesta a la pregunta: dado un número de jugadores inscritos ¿cuántas partidas se efectúan para tener un ganador? Aquí, se pretende dar respuesta a 2 preguntas más, relacionadas con el mismo problema y que en el desarrollo de la primera respuesta aparecían sin que les diésemos mucha importancia, pero que pueden surgir en el salón de clase y debemos ser capaces tanto de palpar la necesidad de abordarlas como de buscar la solución a ellas. Estas preguntas son:

1.- ¿ Cuántas rondas se efectúan ? y

2.- ¿ Cuántos pases automáticos hay ?

Para ir respondiendo a la pregunta 1 empezaremos nuevamente por analizar lo que ocurre cuando el número de participantes (n) es pequeño.

Si el número de jugadores es 2 es claro que existe solo una partida y por tanto una sola ronda.

Si el número de participantes es 3, habrá 2 rondas, a saber, la primera en la que se enfrentan por ejemplo el primero y el segundo jugador en una única partida y pasarán a la segunda ronda el ganador de esta partida y el tercer jugador, que en esta caso pasó sin jugar en la primera. Así en la segunda ronda tendremos también una única partida.

Seguimos contando así las rondas para algunos números de jugadores y llegamos a una tabla como la siguiente:

#de jugadores	#de rondas
1	0
2	1
3	2
4	2
5	3
6	3
7	3
8	3
9	4
10	4
.	.
.	.
.	.

tabla 24.

Se entiende, pues, que una ronda es cada vez que se tienen que efectúar un cierto número de partidas para que queden eliminados el mismo número de jugadores. Es lo que hemos oído que llaman rondas eliminatorias.

Es claro que el número de rondas eliminatorias depende del número de jugadores que se inscriban pero, ¿ cuál es esa dependencia ? eso es lo que queremos encontrar aquí.

Debemos buscar argumentos generales para analizar los resultados de la tabla 1 para obtener alguna fórmula o regla que nos diga, por ejemplo, cuántas rondas se jugarán si se tienen 20 jugadores o, en general, ¿cuántas rondas se efectuarán si se tienen n jugadores inscritos ?

Regresando al esquema que analizamos en el capitulo 1, en el problema del Pin-Pon, se tienen por ejemplo 123 jugadores, en la primera ronda se efectúan 61 partidas, en la segunda 31, en la tercera 15, en la cuarta 8, en la quinta 4, en la sexta 2 y en la séptima y última solo uno.

Entonces tenemos que si son 123 jugadores serán 7 rondas las que se jueguen.

Veamos cómo era el razonamiento para encontrar las partidas que se jugaban en cada ronda y así sabremos cuantas rondas se jugarán. Este razonamiento era:

A los 123 jugadores los dividimos entre 2, para formar las parejas que jugarán en la primera ronda eliminatoria, el resultado es 61 y sobra 1 jugador; entonces en la primera ronda son 61 partidas. Para la segunda ronda serán los 61 ganadores de la primera mas el jugador que sobraba, tomamos ahora a los 62 jugadores y los dividimos entre 2, obteniéndose 31 partidas y en esta ocasión no sobra nadie. En la tercera ronda tendríamos 31 jugadores que dividiendo entre 2 se obtienen 15 partidas y sobra 1 jugador y así sucesivamente. El esquema de este razonamiento es el siguiente:

1 -	123/2 = 61	sobra 1
2 -	62/2 = 31	sobra 0
3 -	31/2 = 15	sobra 1
4 -	16/2 = 8	sobra 0
5 -	8/2 = 4	sobra 0
6 -	4/2 = 2	sobra 0
7 -	2/2 = 1	sobra 0

esquema 2

Tenemos entonces una ronda por cada vez que dividimos entre dos, o sea existe una correspondencia entre el número de divisiones entre 2 y el número de rondas.

Así, lo que tenemos que contar es el número de veces que podemos dividir a n (el número de jugadores inscritos) entre 2. Aunque no es exactamente esto ya que a veces sobra un jugador y sumamos un 1 al resultado anterior. Entonces debemos buscar qué es lo que vamos a contar y cómo lo haremos.

Veamos en la tabla 24 y en lo que hasta ahora hemos hecho.

Existe una sola ronda sólo cuando son 2 jugadores; cuando son 3 ó 4 jugadores se tienen 2 rondas; se juegan 3 rondas para 5, 6, 7, 8 jugadores y parece ser que para 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16 jugadores se tienen 4 rondas. Para 17 y 18 jugadores, ya hemos visto, se tienen 5 rondas. Nos preguntamos ahora ¿ cuál es el número de jugadores en el cual se efectúen 6 rondas ?

Por lo que hemos visto, tendríamos que tener 6 divisiones. Pero ¿ en qué casos sucede esto ?

Veamos otra vez los números en los cuales existe cambio en el número de rondas, en la tabla siguiente en donde además anotaremos el número de veces que se repite cada uno:

	# de jugadores	# de rondas	# de repeticiones
	1	0	0
cambio 1	2	1	1 $= 2^0$
	3	2	
	4	2	2 $= 2^1$
cambio 2	5	3	
	6	3	
	7	3	
	8	3	4 $= 2^2$
cambio 3	9	4	
	10	4	
	11	4	
	12	4	
	13	4	
	14	4	
	15	4	
	16	4	8 $= 2^3$
cambio 4	17	5	
	18	5	
	19	5	
	20	5	
	21	5	
	22	5	
	23	5	
	24	5	
	25	5	
	26	5	
	27	5	
	28	5	

rondas para 5, 6, 7, 8 jugadores y parece ser que para 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16 jugadores se tienen 4 rondas. Para 17 y 18 jugadores, ya hemos visto, se tienen 5 rondas. Nos preguntamos ahora ¿ cuál es el número de jugadores en el cual se efectúen 6 rondas ?

Por lo que hemos visto, tendríamos que tener 6 divisiones. Pero ¿ en qué casos sucede esto ?

Veamos otra vez los números en los cuales existe cambio en el número de rondas, en la tabla siguiente en donde además anotaremos el número de veces que se repite cada uno:

	# de jugadores	# de rondas	# de repeticiones
	1	0	0
cambio 1	2	1	1 = 2^0
	3	2	
	4	2	2 = 2^1
cambio 2	5	3	
	6	3	
	7	3	
	8	3	4 = 2^2
cambio 3	9	4	
	10	4	
	11	4	
	12	4	
	13	4	
	14	4	
	15	4	
	16	4	8 = 2^3
cambio 4	17	5	
	18	5	
	19	5	
	20	5	
	21	5	
	22	5	
	23	5	
	24	5	
	25	5	
	26	5	
	27	5	
	28	5	
	29	5	
	30	5	
	31	5	
	32	5	16 = 2^4
cambio 5	33	6	

tabla 25

Observando esta tabla, vemos que hay una relación entre los cambios y las divisiones entre 2 que hemos estado haciendo.

Vemos que el número de rondas se repite cada vez mas y mas veces, conforme aumenta el número de jugadores. Y además podemos hacer las siguientes observaciones:

1) Los cambios se dan cuando el número de jugadores es una potencia de 2 mas uno.

2) La frecuencia con la que se repite un número de rondas es una potencia de 2.

3) Si N es el número de jugadores y $N = 2^m$ para algún m entonces el número de rondas es m.

4) Si N es el número de jugadores y m es el menor número natural tal que $2^m \geq N$ entonces el número de rondas que se efectúan es m.

Notemos que con esta última observación tenemos resuelta la primera pregunta y en realidad, por el procedimiento que hemos descrito, tenemos la forma de demostrarla. Pero, por lo pronto seguiremos avanzando en el análisis del problema y demostraremos después estas observaciones.

Si nuestro problema fuera contar el número de veces que podemos dividir entre 2 un número dado, ya tendríamos la respuesta, pero en el procedimiento de las divisiones(que hemos seguido para contar los pases), no es exactamente eso lo que se hace, ya que las veces que en la división sobra 1, se lo aumentamos al dividendo de la siguiente división. Entonces observamos que de alguna forma tenemos que saber el número de pases automáticos que hay para poder descubrir cómo influye ésto en el número de rondas que se efectuan.

Recordemos lo que queremos decir con pases automáticos: cuando el número de participantes es impar hay un jugador que debe pasar a la siguiente ronda sin jugar, en este caso decimos que existe un pase automático.

Para 123 jugadores por ejemplo, en la serie de divisiones que hacíamos hay 2 divisiones en las que sobra 1 entonces hay 2 pases automáticos.

Nótese que ya tenemos un algoritmo para dar la respuesta al número de pases automáticos, pero ahora queremos encontrar una fórmula general para cualquier número de jugadores y si es posible, sin hacer todas las divisiones.

Empecemos otra vez por analizar los casos mas pequeños.

Observemos la siguiente tabla:

# DE JUGADORES	# DE PASES
2	0
3	1
4	0
5	2
6	1
7	1
8	0
9	3
10	2
11	2
12	1
13	2
14	1
15	1
16	0
17	4

tabla 26

Tenemos muchos datos y aún no se ve a simple vista si pudiéramos sacar de esta tabla algún resultado general.

Lo que sí vemos es que si n es una potencia de 2, no hay pases; esto ya lo sabíamos de alguna manera ya que al hacer las divisiones entre 2 siempre van a dar un número entero que a su vez es potencia de 2 y además en cada división se tendrá siempre cero como residuo.

Por ejemplo si se tienen 16 jugadores el esquema para el número de rondas es:

1 - 16/2 = 8 sobra 0

2 - 8/2 = 4 sobra 0

3 - 4/2 = 2 sobra 0

4 - 2/2 = 1 sobra 0

O sea 4 rondas y cero pases automáticos.

Para 17 jugadores ya se tienen 5 rondas y 4 pases automáticos. Y para 18 jugadores también son 5 rondas pero 3 pases.

Busquémos pues qué es lo que hemos estado haciendo, buscando a su vez qué es lo que queremos contar.

El único dato que tenemos es el número de jugadores, por el método que hemos seguido podemos ponernos a dividir entre 2 y así ir obteniendo las respuestas.

Ahora analicemos lo que hemos venido haciendo pero en el caso general, esto es, describammos el algoritmo que nos da la respuesta a las dos preguntas en una forma general.

Si N es el número de jugadores, al dividir N entre 2 tenemos:

$$2\overline{\big)\,N}^{\,q} \quad r \qquad \text{donde obviamente} \quad 0 \leq r < 2$$

De donde podemos describirlo como:

$N = 2q + r$ donde $0 \leq r < 2$ y $q \in \mathbb{N}$

A q se le llama el cociente y a r el residuo de dividir N entre 2.

El procedimiento que hemos seguido al hacer los casos concretos podemos hacerlo también en general con cualquier N como sigue:

Sea N_0 el número de jugadores inscritos.

Ronda 1 $N_0 = 2q_0 + r_0$ con $0 \leq r_0 < 2$

Ronda 2 $N_1 = q_0 + r_0 = 2q_1 + r_1$ con $0 \leq r_1 < 2$

Ronda 3 $N_2 = q_1 + r_1 = 2q_2 + r_2$ con $0 \leq r_2 < 2$

.

.

.

Ronda m $N_{m-1} = q_{m-2} + r_{m-2} = 2q_{m-1} + r_{m-1}$ $0 \leq r_{m-1} < 2$

Ronda m+1 $N_m = q_{m-1} + r_{m-1} = 2q_m + r_m$ con $q_m=0$ y $r_m=1$

En realidad sabemos que la m+1 división ya no tiene sentido hacerla ya que siempre tenemos 1/2 = 0 y sobra 1.

Por lo que también sabemos que en la m'ésima división siempre se tendrá 2/2 = 1 y sobra 0; ya que es el partido final en donde se obtiene siempre al único ganador del torneo.

De modo que con esta notación, lo que necesitamos saber es: cuántos residuos r_i hay distintos de cero en el procedimiento anterior y cuánto vale la m. Así, el número de r_i's distintos de cero será el número de pases automáticos y el número m será el número de rondas.

Notemos que como las r_i's solo pueden tomar los valores 0 ó 1, es lo mismo contar el número de ellas distintas de cero que sumarlas a todas, ya que de cada sumando que tengamos solo los que valen 1 serán contados para la suma, de modo que la suma debe ser hecha solo hasta i=m-1 ya que r_m significa en esta notación, El ganador (que ya no es un pase automático).

Busquémos primero como sumar las r_i's:

Vamos a considerar solo $N_0 > 1$ ya que si se tiene un único jugador inscrito la cuenta no tiene sentido.

Puntualizando, estamos buscando cuanto vale Σr_i con $i=0,1,2,\ldots,m-1$ para poder decir cuántos pases hay.

De las m+1 igualdades que tenemos, no podemos obtener esta suma directamente, entonces vamos a tratar de construir alguna igualdad que nos ayude a despejar a las r_i's en términos de algo conocido por nosotros o, por lo menos, que podamos calcular.

Tenemos:

$$N_0 = 2q_0 + r_0$$
$$q_0 + r_0 = 2q_1 + r_1$$
$$q_1 + r_1 = 2q_2 + r_2$$
$$\vdots$$

$q_{m-2} + r_{m-2} = 2q_{m-1} + r_{m-1}$

$q_{m-1} + r_{m-1} = 2q_m + r_m = 1$ ya que $q_m = 0$ y $r_m = 1$

De nuevo, como queremos despejar la suma de las r_i's vamos a construir lo que necesitamos, com álgebra solamente.

Como las q_i's no nos interesan, vamos a tratar de desaparecerlas, mediante construir en ambos lados de las igualdades lo mismo para poder cancelarlas.

Multiplicando cada renglón por una potencia de 2 (la que necesitamos en cada caso), al hacer la suma de todas las igualdades va a quedar lo mismo en ambos lados, con respecto a las q_i's.

Veamos: multipliquemos el i'ésimo renglón por 2^i y tenemos:

$$
\begin{aligned}
N_0 &= 2q_0 + r_0 \\
2(q_0 + r_0) &= 2(2q_1 + r_1) \\
2^2(q_1 + r_1) &= 2^2(2q_2 + r_2) \\
&\ \ \vdots \\
2^{m-1}(q_{m-2} + r_{m-2}) &= 2^{m-1}(2q_{m-1} + r_{m-1}) \\
2^m(q_{m-1} + r_{m-1}) &= 2^m(1)
\end{aligned}
$$

Que es lo mismo que:

$$
\begin{aligned}
N_0 &= 2q_0 + r_0 \\
2q_0 + 2r_0 &= 2^2q_1 + 2r_1 \\
2^2q_1 + 2^2r_1 &= 2^3q_2 + 2^2r_2 \\
&\ \ \vdots \\
2^{m-1}q_{m-2} + 2^{m-1}r_{m-2} &= 2^mq_{m-1} + 2^{m-1}r_{m-1} \\
2^mq_{m-1} + 2^mr_{m-1} &= 2^m
\end{aligned}
$$

De donde sumando las $m+1$ igualdades tenemos:

$$N_0 + (2q_0 + 2^2q_1 + \ . \ . \ . \ + 2^{m-1}q_{m-2} + 2^mq_{m-1}) + (2r_0 + 2^2r_1 + \ . \ . \ . + 2^{m-1}r_{m-2} + 2^mr_{m-1}) =$$

$$(2q_0 + 2^2q_1 + \ldots + 2^{m-1}q_{m-2} + 2^mq_{m-1}) + (r_0 + 2r_1 + \ldots + 2^{m-1}r_{m-1} + 2^m)$$

Donde ya podemos cancelar las q_i's y tenemos:

$$N_0 + 2(r_0 + 2r_1 + \ldots + 2^{m-2}r_{m-2} + 2^{m-1}r_{m-1}) =$$

$(r_0+2r_1+ \dots +2^{m-2}r_{m-2}+2^{m-1}r_{m-1}) + 2^m$

De donde

$N_0 + (r_0+2r_1+ \dots +2^{m-2}r_{m-2}+2^{m-1}r_{m-1}) = 2^m$

Y por tanto

$$N_0 = 2^m - \Sigma(2^i r_i) \quad {}_{\text{con } i=0,1,\dots,m-1}$$

Nótese que aún no hemos encontrado lo que se quería, pero hemos encontrado que N_0 (que es el número de jugadores) se puede escribir cómo una potencia de 2 (que involucra a m, que es el número de rondas) menos un número que ya se "parece" mucho al que estábamos buscando.

Veamos quién es m, ó mas bien, veamos si podemos caracterizar ya a m en términos de N_0 (ya que $N_0=2^m-\Sigma 2^i r_i$).

Como $\Sigma(2^i r_i)_{\text{con } i=0,1,\dots,m-1}$ es un número mayor o igual a cero, lo que sí sabemos es que m es el máximo de las potencias de 2 a las que puede llegar N_0.

Ahora, por como hemos tomado a m se tiene entonces que 2^m es la potencia inmediata superior a N_0, o sea, $2^{m-1} < N_0 \leq 2^m$. Y como conocemos a N_0, podemos encontrar a m ya que conocemos todas las potencias de 2 y sabemos como encontrarlas (Nótese que ésta es una demostración de la observación 4).

Entonces ya podemos responder a la pregunta de ¿cuántas rondas se juegan dado cualquier número de jugadores?. Por ejemplo, si se tienen 300 jugadores inscritos, el número de rondas que se efectúan es 9 ya que $2^8 = 256 < 300 \leq 512 = 2^9$

Si se tienen 18 jugadores, se efectúan 5 rondas por que $2^4 < 18 \leq 2^5$.

Sólo nos falta saber qué número es: Σr_i ${}_{\text{con } i=1,2,\dots,m-1}$.

El número $\Sigma(2^i r_i)_{\text{con } i=0,1,\dots,m-1}$ es lo mismo que $r_0 + 2r_1 + 2^2 r_2 + \dots + 2^{m-1}r_{m-1}$ y ésto, es un número escrito en base 2 ya que las r_i's son cero ó uno, multiplicadas por las potencias de 2 y sumadas, esto es, un número en base 2 (8).

---

(8) Ver apéndice a.

De donde, aunque no hemos encontrado exactamente lo que buscábamos,(que es un problema abierto todavía) si tenemos al menos un procedimiento para encontrar el número de pases automáticos, que solo involucra escribir en base 2 a un número y contar en esa expresión el número de unos que contiene.

La receta es entonces:

Dado N el número de jugadores inscritos, buscamos la potencia de 2 inmediata superior. Sea $m \in N$ tal que $N \leq 2^m$ entonces m es el número de rondas que se efectúan.

Sea $P=2^m-N$, escribimos a P en base 2 y contamos el número de unos en esta expansión y éste será el número de pases automáticos que habrá en el torneo.

Ejemplo.

Si el número de jugadores inscritos es 60, tenemos:

$2^5 < 60 \leq 64 = 2^6$ entonces habrá 6 rondas y

$64 - 60 = 4 = 100_2$ entonces habrá solo 1 pase.

Podemos comprobar la veracidad de lo que hemos hecho, haciendo todo lo que hacíamos antes "a pie" :

1 -	60/2 = 30	sobra 0
2 -	30/2 = 15	sobra 0
3 -	15/2 = 7	sobra 1
4 -	8/2 = 4	sobra 0
5 -	4/2 = 2	sobra 0
6 -	2/2 = 1	sobra 0

Lo que da como resultado 6 rondas y 1 pase automático. Y $30 + 15 + 7 + 4 + 2 + 1 = 59$ partidos a jugarse en total.

Debemos hacer la acralación que aunque no se ha encontrado una fórmula que nos diga cuánto vale Σr_i con $i=0,1,\ldots,m-1$, sí se ha encontrado un método para contar cuántos r_i's son distintos de cero, que es un tanto más fácil que lo que habíamos hecho "a pie". Sobre todo si consideramos que el algoritmo para escribir un número en base 2 es muy fácil para una computadora y para ella misma también es muy fácil saber cuántos unos contiene ese número en base 2.

Ahora invitamos al lector que intente demostrar de otra forma las observaciones que hacíamos en el proceso de descubrir el número de rondas y el número de pases.

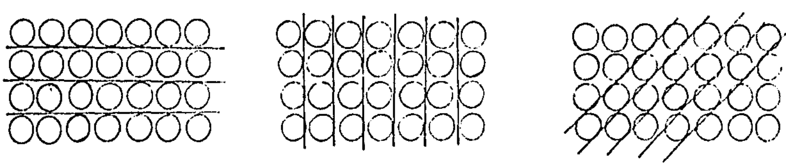
UN PROBLEMA DONDE SE UTILIZAN LOS NUMEROS TRIANGULARES.

Como un ejemplo del uso de los números triangulares en problemas de distintos tipos, transcribimos aquí, un artículo publicado en la revista Mathematics Teacher en abril de 1974 y que fué escrito por George Gullen III.

EL MENOR FACTOR PRIMO DE UN NUMERO NATURAL.

El propósito de este artículo es presentar un programa computacional para encontrar el menor factor primo de un número natural, un programa basado en un análisis de la "anatomía" de un arreglo rectangular. Un estudio de arreglos rectangulares puede ayudar en la búsqueda del menor factor primo n de un número natural N porque es equivalente a tratar de arreglar N objetos en una disposición rectangular de n renglones y m columnas, donde $1 \quad n \leq m$, N=mn y donde n es tan pequeño como sea posible.

Examinemos un arreglo rectangular típico. La figura 1 muestra tres formas de considerar un arreglo rectangular de 4 por 7. Podemos pensar que contiene 4 renglones de siete objetos cada uno como en la figura 1a., ó siete columnas de cuatro objetos cada una como en la figura 1b. Una tercera forma de pensarlo es la ilustrada en la figura 1c. Aquí, el arreglo de 4 por 7 mostrado consiste de 2 arreglos triangulares cada uno con T_3 objetos (donde T_3 es el tercer número triangular, $T_3 = 1+2+3$) y cuatro diagonales con 4 objetos cada una.



(a) (b) (c)

figura 1

En general, un arreglo rectangular de N objetos con n renglones y m columnas donde 1 n $\leq$ m puede pensarse que consiste de 2 arreglos triangulares cada uno que contiene T_{n-1} objetos y m-n+1 diagonales cada una conteniendo n objetos.

La demostración que da el número de objetos N es muy simple si se acepta la fórmula $T_n = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, donde T_n es el n'esimo número triangular.

Demostración. El número total de objetos en dos arreglos triangulares T_{n-1} y m-n+1 diagonales de n objetos es:

$$2(T_{n-1}) + n(m-n+1) = 2\,\frac{(n-1)[(n-1)+1]}{2} + mn - n^2 + n =$$

$$n^2 - n + mn - n^2 + n = mn = N$$

El siguiente algoritmo puede usarse para cualquier número de objetos N, donde N 2, en un arreglo rectangular que contiene el menor número posible de renglones mayor que uno si tal arreglo es posible. Si no es posible, el algoritmo mismo lo indicará.

Paso 1 . Coloque dos de los objetos como si estuvieran en esquinas opuestas de un arreglo rectangular. Guarde los otros objetos en una pila por separado. (ver figura 2a.)

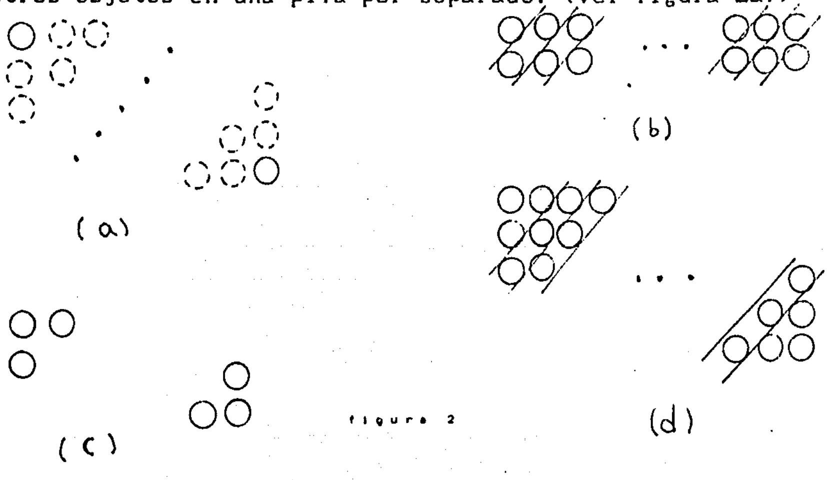


figura 2

Paso 2.1 . Si hay menos que 2 objetos en la pila separada, entonces es imposible hacer un arreglo rectangular con los N objetos.

Paso 2.2 . Si hay al menos 2 objetos en la pila, trate de arreglar todos ellos en diagonales que contengan exactamente 2 objetos cada una.(ver figura 2.b), Si puede efectuarse, entonces se tiene un arreglo rectangular con 2 renglones.

Paso 2.3 . Si no se pudo efectuar el paso 2.2, y no hay suficientes objetos para hacer al menos 2 diagonales completas, entonces es imposible arreglar los N objetos en una forma rectangular.

Paso 2.4 . Si 2 o más diagonales se formaron en el paso 2.2 pero hay un objeto extra en la pila, entonces es imposible hacerla excepto por las 2 diagonales mas cercanas a las esquinas originales y coloque todos los objetos desarreglados en una pila (ver figura 2.c).

Paso 3.1 . Si hay menos de 3 objetos en la pila, entonces es imposible colocar N objetos en un arreglo rectangular.

Paso 3.2 . Si hay al menos tres objetos en la pila, trate de arreglar todos ellos en diagonales que contengan exactamente 3 objetos cada una (ver figura 2.d). Si se puede hacer, entonces se tiene un arreglo rectangular de 3 renglones.

Paso 3.3 . Si no se ha podido y no hay suficientes objetos para hacer 2 diagonales completas, entonces es imposible acomodar N objetos en un arreglo rectangular.

Paso 3.4 . Si se han podido hacer dos o más diagonales pero hay algunos objetos que sobran (no suficientes para hacer una diagonal completa), deshaga todas las diagonales excepto las 2 más cercanas a las esquinas originales y coloque los objetos desarreglados en una pila.

.

.

.

Paso k.1 . Si hay menos de k objetos en una pila, entonces es imposible acomodar N objetos en un arreglo rectangular.

Paso k.2 . Si hay al menos k objetos en la pila, trate de arreglarlos en diagonales que contengan exactamente k objetos cada una. Si se pudo hacer, entonces se tiene un arreglo rectangular con k renglones.

Paso k.3 . Si no se ha podido hacer y no hay suficientes objetos para hacer 2 diagonales completas, entonces es imposible acomodar N objetos en un arreglo rectangular.

Paso k.4 . Si se ha podido efectuar y se han hecho 2 o más diagonales, pero sobran objetos (no suficientes para hacer una diagonal completa), deshaga todas las diagonales excepto las 2 mas cercanas a las esquinas originales y ponga los objetos desarreglados en una pila.

.

.

.

Usando el lenguaje de programas de computadora, observamos que el algoritmo descrito está en la forma de un loop (en forma circular) que terminará en un número finito de pasos para cualquier número natural N. La terminación ocurrirá ya sea porque se formará un arreglo rectangular, o porque se determina por el algortmo mismo que es imposible formar el arreglo rectanguar requerido.

El algoritmo se escribe en una forma tal que lo hace muy fácil de codificar para que una computadora lo ejecute. El siguiente es un programa de computación que es esencialmente una traducción a BASIC del algoritmo para los arreglos rectangulares.

```
100 REM              ESTE PROGRAMA ENCUENTRA EL MENOR
110 REM              FACTOR PRIMO DE CUALQUIER NUMERO
120 REM              NATURAL MAYOR QUE 2.
130 LET M=1
140 PRINT "ESCRIBA CUALQUIER NUMERO NATURAL"
```

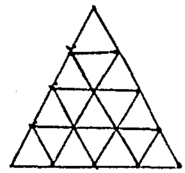
```
150 INPUT N
160 LET P2=N
170 LET P=P2-2*M
180 LET P2=P
190 LET M=M+1
200 IF P  M THEN 250
210 LET P=P-M
220 IF P  0 THEN 210
230 IF P=0 THEN 270
240 IF P2  2*M THEN 170
250 PRINT N;"ES PRIMO"
260 GOTO 280
270 PRINT "EL MENOR FACTOR PRIMO DE";N;"ES";M
280 END
```

EJERCICIOS.

1 .- Resolver el ejercicio de la tablilla de chocolate, que se propone en la página 10 de este trabajo.

2 .- ¿Cuántos cuadrados hay en un cuadrado de n cuadritos por lado? Demostrarlo.

3 .- Dada la siguiente figura:



a) ¿Cuántos triángulos hay con la misma orientación que el mayor?

b) ¿Cuántos triángulos hay con cualquier orientación?

c) Si el triángulo mayor está dividido en n partes cada lado, ¿cuántos triángulos hay?

4 .- Encontrar la suma de los números naturales impares. Demostrarla. Buscar argumentos geométricos para su demostración.

5 .- Se tiene la siguiente disposición de círculos y cruces:

¿Cómo se pueden cambiar los círculos a los lugares de las cruces y las cruces a los de los círculos? teniendo como reglas las siguientes:

a) Siempre se mueven hacia adelante, no pueden retroceder.

b) Un círculo puede saltar a una cruz o viceversa, pero no pueden saltarse una semejante con otra, no tampoco puede saltar a más de un contrario.

c) Se puede saltar siempre que exista un lugar vacío.

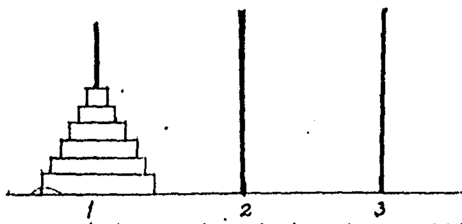
d) Dos elementos no pueden ocupar un mismo espacio.

e) Solo existen 7 lugares, 3 círculos y 3 cruces.

1-¿Cuál es el número mínimo de pasos para efectuar el traslado?

ii-Si se tienen n círculos, n cruces y 2n+1 lugares, ¿cuál es el mínimo número de pasos para efectuar el traslado? ¿Existe una fórmula general que describa el problema? Si la respuesta es afirmativa, demostrar esa fórmula.

6 .- Se tiene la llamada "Torre de Hanoi", esto es, una pirámide formada por n anillos de distintos diámetros dispuestos de mayor a menor, con el mayor en la parte inferior sosteniéndo a los demás, como se muestra en la siguiente figura:



El juego consiste en trasladar los anillos de la estaca número 1 a cualquiera de las otras 2, para lo cual se puede usar la otra como auxiliar, con la única regla consistente en que no se puede poner encima de un anillo, uno de dimensión mayor.

¿Cuál es el número mínimo de jugadas que se necesita realizar para trasladar la torre?

a) Si la torre consta de 7 anillos.

b) Si la torre consta de n anillos.

¿Tiene este problema alguna relación con el problema del torneo de Pin Pon, cuando el número de participantes es una potencia de 2?

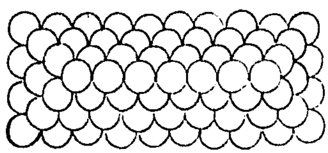
¿Se puede encontrar alguna manera de saber en cuál de las 2 estacas va a terminar la torre, con solo saber el número de discos que tiene?

Dado un número de paso (jugada), ¿se puede saber cuál es el anillo que debe moverse y a dónde ha de hacerlo?

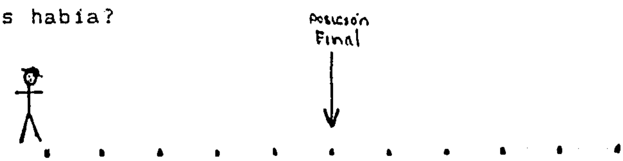
*Nota. Proximamente, se publicará un articulo de Pilar Martínez y Julieta Verdugo, en donde se da respuesta a éstas y más preguntas sobre el juego de la Torre de Hanoi.

7 .- Dado un círculo, ¿en cuántas regiones ajenas puede dividirse cuande se corta por n rectas? Encontrar una fórmula general para tener el máximo número de regiones en que puede dividirse el círculo. Demostrarla. ¿Tiene algo de relación con los números triangulares?

8 .- Se tiene una pila de balas en forma rectangular, formada de la siguiente manera: La base es un rectángulo de m balas por n, siendo m mayor que n; sobre este rectángulo está colocado otro rectángulo que tiene m-1 balas por n-1; sobre éste último está colocado un tercer rectángulo que tiene m-2 balas por n-2, y así sucesivamente: la cúspide de la pila está formada por una línea de m-(n-1) balas. ¿Cuál es el número total de balas que contiene la pila?



9 .- Se tiene un número impar de piedras, colocadas a una distancia de 10 metros una de la otra, en línea recta. Un hombre está parado en un extremo de la línea y debe colocar a todas las piedras en el lugar donde se encuentra la de enmedio. El hombre solo puede transportar una piedra a la vez. Si se sabe que el hombre ha caminado 300 metros al terminar de colocar todas las piedras en el centro, ¿cuántas piedras había?



¿Cuántos metros caminó sin cargar piedras y cuántos caminó cargando piedras?

10.- Demostrar que $T_n + T_{n-1} = n^2$

Representarlo geométricamente.

C A P I T U L O   I I

PROBLEMA.

Encontrar un número triangular cuyo doble sea un número triangular.

Volviendo con el procedimiento que hemos seguido en el capítulo anterior, hagamos primero la lista de los primeros números triangulares:

T_1	1	T_7	28	T_{13}	91	T_{19}	190
T_2	3	T_8	38	T_{14}	105	T_{20}	210
T_3	6	T_9	45	T_{15}	120	T_{21}	231
T_4	10	T_{10}	55	T_{16}	136	.	
T_5	15	T_{11}	66	T_{17}	153	.	
T_6	21	T_{12}	78	T_{18}	171	.	

Observando la lista, vemos que el 3 es un número triangular cuyo doble también es un número triangular, es decir: $6 = T_3 = 2(T_2) = 2(3)$.

Así, hemos dado respuesta a la pregunta, pero ahora nos podemos preguntar si existen mas números triangulares que cumplan con la condición, o bien, si queremos encontrar todos los números triangulares cuyo doble sea un triangular, ¿cómo encontraremos la respuesta?

Si seguimos haciendo la lista de números triangulares encontraremos que:

$210 = T_{20} = 2(T_{14}) = 2(105)$

Y entre 3 y 105 no hay otro triangular que cumpla con la proposición.Esto es fácil de comprobar, con solo observar la lista de triangulares. Entonces, ¿cuál será la siguiente pareja de triangulares que cumpla la proposición?

Seguir haciendo la lista de números triangulares resulta un trabajo tedioso y además, no necesariamente resolveríamos el problema, ya que esta lista es infinita. Entonces tratemos de entender qué es lo que estamos buscando en general, tratemos de descubrir qué es lo que cumplen estas parejas de números para poder plantearlo en general y buscar cuáles son todos los números triangulares cuyo doble es un número triangular.

Por ejemplo, ¿cómo sabemos en general si un número es triangular? ó ¿Cómo sabemos en general si el doble de un número triangular es un triangular?

Veamos un caso particular, para n=18, ¿$2(T_{18})$ será un número triangular?

Como ya sabemos calcular cualquier triangular, veamos qué significa esta pregunta:

$$2(T_{18}) = \frac{2(18)(19)}{2} = (18)(19) = 342$$

La pregunta es pues, ¿existe n en los números naturales tal que $T_n = 342$? lo que quiere decir:

$$342 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$684 = n^2 + n$ y de aquí tenemos:

$n^2 + n - 684 = 0$ cuya solución es:

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{2737}}{2}$$

$n_1 = 25.6582$ y $n_2 = -26.6582$

Claramente ninguna de las 2 soluciones satisface las condiciones del problema ya que ninguna de ellas pertenece a los números naturales.

Veamos ahora otro ejemplo particular, $2(T_{84})$ ¿será un número triangular?

Como ya vimos, el problema es encontrar n en los números naturales tal que $2(T_{84}) = T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, o sea:

$$2(T_{84}) = \frac{2(84)(85)}{2} = 7140 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

$2(7140) = n^2 + n$

$14280 = n^2 + n$

$n^2 + n - 14280 = 0$

cuyas soluciones son:

$n_1 = 119$ y $n_2 = -120$

Así, n_2 no puede ser solución, ya que no es elemento de los números naturales pero n_1 sí cumple con todo lo que se pedía, y entonces:

$$2(T_{84}) = T_{119} = \frac{(119)(120)}{2} = 7140$$

De manera que 7140 sí es un número triangular, y así, hemos encontrado otra solución al problema; de modo que ya tenemos 3 parejas de triangulares que satisfacen la condición, estas son:

(3,6), (105,210) y (3570,7140), pero ¿cuáles son todas las soluciones?

Hagámoslo en general. Queremos encontrar 2 triangulares T_n y T_m tales que $T_n = 2(T_m)$ que quiere decir:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 2\frac{m(m+1)}{2} \qquad \text{o sea}$$

$n^2 + n = 2m^2 + 2m$, donde n y m sean números naturales

En general, nuestro problema es encontrar n y m en los naturales tales que:

$$n^2 + n - 2m^2 - 2m = 0$$

De donde si completamos cuadrados tenemos:

$$(n^2 + n + \tfrac{1}{4}) - 2(m^2 + m + \tfrac{1}{4}) = -\tfrac{1}{4}$$

$$(4n^2 + 4n + 1) - 2(4m^2 + 4m + 1) = -1$$

$$(2n+1)^2 - 2(2m+1)^2 = -1 \qquad (1)$$

Aparentemente el problema se complica, pero si hacemos un cambio de variables, trataremos de avanzar en la solución y después regresaremos a nuestra ecuación (1).

Sean $x = 2n+1$ y $y = 2m+1$ entonces la ecuación (1) se transforma en $\quad x^2 - 2y^2 = -1 \qquad (2)$

En donde tenemos que encontrar números naturales impares (por el cambio de variables) tales que satisfagan la ecuación (2). Nótese que es lo mismo resolver el problema en la ecuación (2) que hacerlo en la (1) ya que las soluciones de una dan soluciones de la otra y viceversa. Ejercicio para el lector: demostrar que todas las soluciones de (2) son tales que x y y son impares.

Veamos que con las 3 parejas de soluciones de (1) que ya habíamos encontrado, podemos encontrar 3 soluciones a (2).

Sabemos que $T_3 = 2(T_2)$ de modo que n=2 y m=3 son solución a (1) ya que

$$[2(2)+1]^2 - 2[2(3)+1] = 5^2 - 2(7)^2 = -1$$

y entonces x=5 y y=7 son la solución correspondiente a la pareja n=2, m=3.

Equivalentemente tenemos que para n=20 y m=14 solución a (1), obtenemos x=41 y y=29 que son solución a (2) y por último si n=119 y m=84 se obtiene la pareja x=239 y y=169 solución a (2).

De modo que si obtenemos la solución a (2), con un procedimiento inverso al anterior, obtendremos soluciones a la ecuación (1).

Notemos que x=1 y y=1 tambien es una solución a (2), pero no lo es para nuestro problema original ya que nos conduce a:

1=2n+1 y 1=2m+1 de donde n=0 y m=0 de modo que debe suceder que $T_0 = 2(T_0)$ y aún no hemos definido qué significa T_0 . Pero, nada se altera si definimos al triangular número cero como el cero mismo, o sea $T_0 = 0$ permite que todo lo que se ha hecho sobre triangulares, siga siendo válido y además, que en este caso también sea cierta la igualdad.

¿Cómo vamos a encontrar todas las soluciones a la ecuación (2)?

Un procedimiento muy común en las matemáticas es trabajar en otros conjuntos de números y una vez resuelto el problema en esos conjuntos, regresar al conjunto original y dar allí la respuesta. El problema que venimos analizando, es un caso concreto de ésto, ya que vamos a trasladarnos a otro conjunto para dar respuesta a la ecuación (2) y después regresar a dar respuesta a la ecuación (1).

Las ecuaciones de la forma $x^2 - Ay^2 = 1$ ó $x^2 - Ay^2 = -1$

con A diferente de k^2 para alguna k en los números enteros, son las llamadas ecuaciones de Pell y existe toda una teoría matemática para encontrar sus soluciones. Nótese que la ecuación (2) es una ecuación de Pell (en el apéndice b de este trabajo damos una forma de encontrar la solución a este caso particular, además de una breve visión de lo que se hace en general para resolver estas ecuaciones y de la teoría que se vincula en este proceso).

Siguiendo el procedimiento para hallar las soluciones a las ecuaciones de Pell, encontramos el siguiente resultado:

Si x y y son solución de (2), entonces $x' = 3x+4y$ y $y' = 3y+2x$ también son solución a (2).

La demostración de esta proposición es fácil de hacer mediante el álgebra directa.

Sabemos que $x^2-2y^2 = -1$ y debemos demostrar que $(x')^2 - 2(y')^2 = -1$.

Demostración:

$$(3x+4y)^2 - 2(3y+2x)^2 = 9x^2 +24xy +16y^2 - 18y^2 - 24xy -8x^2 =$$
$$x^2 - 2y^2 = -1 \quad \text{q.e.d.}$$

Y de este resultado podemos llegar a obtener las soluciones a la ecuación (1) mediante la sustitución:

$x=2n+1$ y $y=2m+1$ que nos lleva a :

$x'=3x+4y = 3(2n+1) +4(2m+1) = 6n + 8m + 7$ y

$y'=3y+2x = 3(2m+1) +2(2n+1) = 6m + 4n +5$

Y como x' y y' son impares también, entonces existen n' y m' en los números naturales tales que $x'=2n'+1$ y $y'=2m'+1$ de modo que:

$$n' = 3n + 4m + 3 \quad \text{y} \quad m' = 3m + 2n + 2 \qquad (3)$$

son las ecuaciones que nos proporcionan todas las soluciones a nuestro problema original, es decir, n' y m' son los subíndices de triangulares que cumplen con la proposición.

De manera que hemos encontrado dos ecuaciones que nos proporcionan una infinidad de soluciones a la ecuación (1) y solo tenemos que conocer una solución particular para ir generando todas las que querramos.

Notemos que por todo el procedimiento que se hizo, en realidad hemos encontrado todas las soluciones a nuestro problema.

Si conocemos la primera solución, podemos ir obteniendo nuevas soluciones con las fórmulas que hemos encontrado en (3). Nòtese tambien que podríamos despejar a n y m en términos de n' y m' y tendríamos entonces un par de fórmulas recursivas que nos llevarían de una solución mayor a una menor cada vez que las aplicáramos.

Comprobemos en un caso particular que las fórmulas de (3) nos proporcionean soluciones a (1).

Sabemos que n=20 y m=14 son solución a (1) ya que $T_{20} = 2(T_{14})$ entonces debe suceder que n'=3(20) + 4(14) + 3 y m'=3(14) + 2(20) + 2 también sea solución de (1).

Y n'=119 y m'=84 son efectivamente solución.

Es más, ésta es la siguiente pareja de triangulares que satisface la proposición.

Así, hemos encontrado todos los números triangulares tales que su doble también es un número triangular, basta con conocer la primera solución (que ya habiamos encontrado "a pie") y las fórmulas que nos generan a la siguiente, para que tengamos a todas las soluciones.

De manera que el problema está en encontrar la primera solución y una vez encontrada ésta, el problema puede resolverse en general con toda la teoria sobre las ecuaciones de Pell(que como ya dijimos tratamos en el apéndice b).

Pero encontrar en general la solución más pequeña a las ecuaciones de la forma $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ con A un número natural no cuadrado, no siempre es fácil de hacer.

Como un ejemplo de que no es tan fácil encontrar la primera solución, citamos un párrafo del libro Inducción en la Geometría de L.I.Golovinà y I.M.Yaglom:

"Sustituyendo n en la expresión $991n^2 + 1$ por los números enteros sucesivos 1,2,3,..., jamás obtendremos el cuadrado de un número por muchos días o incluso años que dediquemos a ello. Sin embargo, sería erróneo deducir de aquí que ningún número de este tipo es un cuadrado pues, en realidad, entre los números de tipo $991n^2 + 1$ también hay cuadrados; pero es muy grande el valor mínimo de n para el cual es un cuadrado el número $991n^2 + 1$. He aquí este número

n=12 055 735 790 331 359 447 442 538 767 ."

Señalemos solamente que $991n^2 + 1$ igual a un cuadrado es una ecuación como $x^2 - Ay^2 = 1$ porque lo que se tiene es $m^2 - 991n^2 = 1$ entonces lo que se busca es la primera solución distinta de $n=0$, que ya habíamos dicho que siempre es solución en ecuaciones de este tipo.

Para concluir, remarcamos la afirmación que hemos demostrado en general:

Si n y m cumplen que $T_n = 2(T_m)$ entonces también n' y m' cumplen $T_{n'} = 2(T_{m'})$ donde $n'=3n+4m+3$ y $m'=3m+2n+2$.

PROBLEMA

Considerese el trinomio $x^2 + x + 41$ estudiado por L. Euler.

Se afirma que sustituyendo la x por números naturales, el trinomio siempre es un número primo.

¿Será cierta la afirmación?

Sustituyendo $x=1$ el trinomio resulta igual a 43 que sí es un número primo.

Si $x=2$ entonces $x^2 + x + 41 = 47$ que también es un número primo.

Siguiendo así, podemos formular la siguiente tabla:

VALOR DE x	$x^2 + x + 41$	¿es primo?
1	43	sí
2	47	sí
3	53	sí
4	61	sí
5	71	sí
6	83	sí
7	97	sí
8	113	sí
9	131	sí
10	151	sí

tabla 27

Los números 43, 47, ..., 151 son todos primos.

¿Podemos concluir que este trinomio siempre da un número primo cuando sustituimos x por cualquier número natural?

Antes de concluir, continuemos un poco mas la tabla 27

VALOR DE x	$x^2 + x + 41$	¿es primo?
11	173	si
12	197	si
13	223	si
14	251	si
15	281	si
16	313	si
17	347	si

18	383	si
19	421	si
20	461	si
21	503	si
22	547	si
23	593	si
24	641	si
25	691	si
26	743	si
27	797	si
28	853	si
29	911	si
30	971	si
31	1033	si

tabla 28

Después de analizar tantos casos, parece que ya podemos concluir que al sustituir x por cualquier número natural en $x^2 + x + 41$ nos dará como resultado un número primo.

Pero si quisiéramos seguir entreteniéndonos e incrementar más la tabla 28, comprobaríamos (como antes lo hicieron otros) que la afirmación es cierta solo hasta x=39 ya que si x=40 el trinomio es:

$(40)^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 41(41) = (41)^2$ que es claro que no es un número primo.

Entonces nos preguntamos ¿podemos asegurar que una proposición hecha por la experiencia de analizar algunos casos particulares en un problema es verdadera?

La experiencia en estos dos últimos problemas y en el problema que citamos del libro de la Induccion en la Geometría de Golovina y Yaglom, y que comentamos en el problema de encontrar un triangular cuyo doble sea un triangular, nos dice que la respuesta es no.

Pero entonces ¿qué es lo que en el capítulo anterior nos permitía demostrar las proposiciones?

De estos ejemplos podemos concluir que una proposición puede ser cierta en muchos casos particulares y ser o no ser verdadera en general. Entonces ¿cómo podemos saber si una proposición es verdadera en general?

Sabemos que es imposible analizar todos los casos, pero lo que hemos hecho en todos los otros problemas es buscar un argumento general, en abstracto y para cualquier número que analicemos para comprobar si la proposición es verdadera o no.

PROBLEMA

Encontrar un número cuadrado cuyo doble sea un número cuadrado.

Lo que de nuevo se antoja hacer, es la lista de números cuadrados para encontrar alguno.

Sea C_i el i'ésimo número cuadrado con i en todos los números naturales. Entonces la lista de los números cuadrados podemos escribirla como:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}	C_{19}	C_{20}	C_{21}	. . .
169	196	225	256	289	324	361	400	441	. . .

Y así podríamos seguir por varios días y no encontraremos uno que cumpla con las condiciones del problema.

Pero ¿ya podríamos concluir que no existe solución a este problema?

Veamos qué es lo que estamos buscando en general.

Buscamos una pareja de números naturales n y m tales que: $n^2 = 2m^2$ o sea que $n^2 - 2m^2 = 0$ (1)

Si tuviésemos un par de naturales que cumpliera con la ecuación (1), ¿cómo encontraríamos una pareja más grande que también sea solución a (1)?

Si m y n son tales que $m^2 = 2m^2$ entonces multiplicando por 2 tenemos:

$2n^2 = 4m^2 = (2m)^2$

Y encontramos así una $n' = 2m$ tal que $(n')^2 = 2n^2$ de modo que las fórmulas que nos proporcionan nuevas soluciones son:

$n' = 2m$ y $m' = n$ donde n y m satisfacen (1) y sucede que $n' > n$ y $m' > m$.

De esta forma, hemos encontrado una infinidad de soluciones a (1), partiendo de encontrar una particular, ya que así podemos seguirnos infinitamente.

Pero, ¡ no hemos encontrado una particular todavía ! ¿cómo encontraremos una?, ¿podremos encontrar una pareja de fórmulas que nos proporcionen una solución más pequeña que la pareja n, m?

Veamos, si n, m satisfacen (1) entonces n^2 es par y por consiguiente n es par, y existe k en los naturales tal que $n = 2k$ y de allí:

$n^2 = 2m^2 = 4k^2$ y por tanto

$m^2 = 2k^2$ con $k < m$

Con lo que habríamos encontrado una k tal que al elevarla al cuadrado y multiplicarla por 2 nos da otro número cuadrado.

Si la pareja (n, m) satisface (1) entonces la pareja (m, k) también la satisface. Y nótese que $n > m$ y $m > k$ de modo que hemos encontrado una nueva pareja que satisface (1) y es más pequeña que la anterior.

Entonces dado m tal que $2m^2$ es un cuadrado se puede encontrar $k=m_1<m$ tal que $2m_1{}^2$ también es un cuadrado. Así podemos encontrar una infinidad de m's tales que:

$. . . < m_3 < m_2 < m_1 < m$!!!

Pero ¡todas las m's deben estar en los números naturales!, ésto no es posible en los naturales.

Habríamos encontrado entonces una sucesión decreciente de números naturales infinita que cumple con la solución al problema. Pero en los números naturales no podemos tener un descenso infinito. Además, hemos comprobado que en los 21 primeros números cuadrados no existe una solución, de modo que en esta forma de encontrar parejas cada vez pequeñas, tendríamos que llegar en algún momento a cualquiera de los 21 casos que hemos visto "a pie" y en ellos no hay ninguna solución.

De modo que ya hemos demostrado la proposición (a): No existe un número natural n tal que $2n^2$ sea el cuadrado de un número natural.

Ahora demostremos la proposición equivalente:

En el conjunto de números naturales $\{1,2,3,\ldots,n\}$ no existe uno tal que el doble de su cuadrado sea cuadrado.

Si el conjunto consta del natural 1 solamente, tenemos que en $\{1\}$ no hay ningún número natural cuyo doble de su cuadrado sea un cuadrado, ya que $2(1)^2 = 2$ y 2 no es elemento de $\{1\}$ además 2 no es un cuadrado.

Si el conjunto tiene dos elementos, sea $\{1,2\}$, no hay ningún número natural cuyo doble de su cuadrado sea un cuadrado, porque $2(1)^2=2$ y 2, aunque está en $\{1,2\}$, no es un cuadrado y $2(2)^2=8$ y 8 no es elemento de $\{1,2\}$ además de que no es un cuadrado. Como éstas son todas las posibilidades para $\{1,2\}$ entonces no existe ningún elemento cuyo doble de su cuadrado sea un cuadrado en $\{1,2\}$.

Si el conjunto tiene 3 elementos, $\{1,2,3\}$ tenemos:

$2(1)^2 = 2$; 2 no es cuadrado aunque si es elemento de $\{1,2,3\}$

$2(2)^2 = 8$; 8 no es cuadrado ni es elemento de $\{1,2,3\}$

$2(3)^2 = 18$; 18 no es cuadrado ni es elemento de $\{1,2,3\}$

Así podríamos seguir haciendo una lista para cada conjunto, siguiéndo de uno en uno; y como en todos los problemas que hemos visto antes, analicemos qué sucede cuando, teniendo analizado un caso particular, incrementamos en uno el conjunto analizado; como cambia el análisis previo, al tener un elemento más.

Por ejemplo si el conjunto es $\{1,2,\ldots,k\}$ y en este conjunto ya se ha demostrado que no hay hay ningún número natural cuyo doble sea un cuadrado, veamos qué sucede si el conjunto es ahora $\{1,2,\ldots,k,k+1\}$.

En $\{1,2,\ldots,k,k+1\}$ tampoco hay un número natural cuyo doble de su cuadrado sea un cuadrado, porque si hubiera, podríamos encontrar otro mas chico que cumpliera con la propiedad(por lo que se ha demostrado ya anteriormente), y eso condiría la hipótesis de que en $\{1,2,\ldots,k\}$ no había ningún número cuyo doble de su cuadrado sea cuadrado. El único sospechoso es el $k+1$, entonces veamos qué sucedería con $2(k+1)^2$. Si $2(k+1)^2$ fuera un cuadrado tendríamos:

$2(k+1)^2 = m^2 \Rightarrow$ m es par por lo tanto existe s en los números enteros tal que $s<k+1$ y además sucede que

$m^2 = 2(k+1)^2 = 4s^2$ y de aquí se tiene:

$(k+1)^2 = 2s^2$ ¡habríamos encontrado un número $s<k+1$ cuyo doble de su cuadrado sería un cuadrado y ésto contradiría la hipótesis, ya que s debería estar en el conjunto $\{1,2,...,k\}$.

Por lo que hemos demostrado que no puede suceder mas que en $\{1,2,...,k,k+1\}$ no existe un número cuyo doble de su cuadrado sea un número cuadrado.

Regresando al problema original, queremos encontrar n,m tales que $n^2 - 2m^2 = 0$ y de aquí podemos tener:

$n^2 = 2m^2$ de donde

$\frac{n^2}{2} = 2$

Y sacando raíz cuadrada tenemos

$\frac{n}{m} = \sqrt{2}$!!!

¡ Pero esto es una contradicción ! Sabemos que n y m son naturales y entonces tendríamos que demostrar que $\sqrt{2}$ no se puede escribir como el cociente de 2 enteros positivos. ¿Cómo lo demostraríamos?

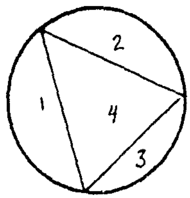
Nótese que lo hemos demostrado ya, cuando demostramos la proposición (a).

¿ Conoce el lector alguna otra demostración de que $\sqrt{2}$ es un número irracional ? Si la respuesta es afirmativa, nótese que de alguna u otra manera, en la demostración se usa un procedimiento de descenso infinito.

PROBLEMA.

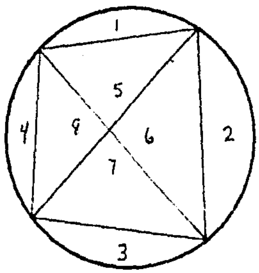
Dado un circulo y n puntos en él, ¿en cuántas regiones queda dividido el círculo cuando unimos los n puntos por medio de rectas?

Si el círculo tiene un punto, éste queda dividido en una sola región. Si el círculo tiene 2 puntos, queda dividido en 2 regiones. Si el círculo tiene 3 puntos:



Queda dividido en 4 regiones.

Si tiene 4 puntos:



Queda dividido en 8 regiones.

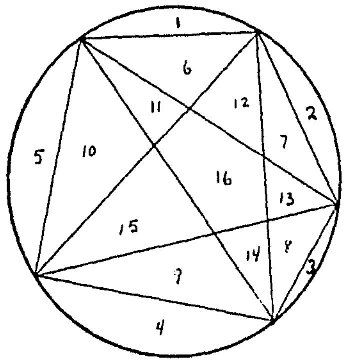
Si hacemos una tabla con los resultados que hemos obtenido, quizá pueda ayudarnos a dar la respuesta en general.

# DE PUNTOS	# DE REGIONES
1	1
2	2
3	4
4	8

tabla 29

¿Qué sucederá si el círculo tiene 5 puntos?

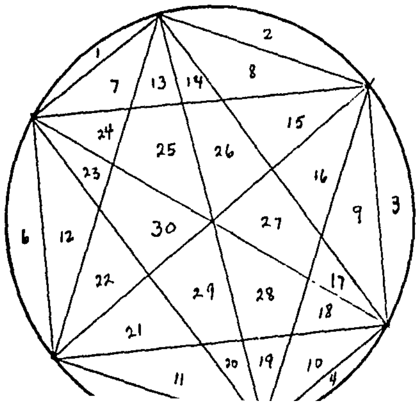
Por la regla que se observa, esperamos que el círculo quede dividido en 16 regiones. Veamos:



Contando las regiones tenemos: 5 regiones afuera del pentágono que se forma, 5 regiones afuera de la estrella, más 5 regiones que son los picos de la estrella y por último la región central. En total son 16 regiones, como esperábamos ¿no?.

Así podemos seguir contando con mas y mas puntos, pero hasta aquí, parece ser que siguen una regla, es decir, en la tabla n hemos observado que si el círculo tiene n puntos, entonces el número de regiones en que queda dividido el círculo es 2^{n-1} y ésto lo hemos comprobado ya para los 5 primeros números naturales. ¿Será cierta la proposición para todos los números naturales?

Antes de buscar un razonamiento general para ver si se puede demostrar para todos los números naturales, hagamos un ejemplo más. Si el círculo tiene 6 puntos ¿cuántas regiones determina?.



¡ Queda dividido en 30 regiones que no son lo que esperábamos !

Podemos pensar que el error se debe a la colocación de los puntos sobre el círculo, entonces hagamos un ejemplo más para cerciorarnos de que esté correcto.

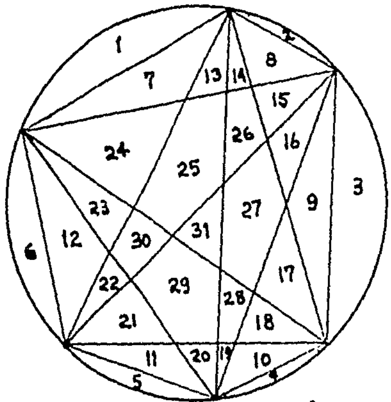


fig. 2

¡ De nuevo no salió lo que esperábamos ! : es más, ni siquiera salió igual que el ejemplo anterior en que también teníamos 6 puntos sobre el círculo. ¿por qué?

Después de hacer muchos casos mas con 6 puntos, nos daremos cuenta que en los casos en que coloquemos los 6 puntos sobre el círculo en forma un tanto uniforme se formarán 30 regiones y cuando no exista ninguna "uniformidad", se formarán 31 regiones, ya que todas las líneas del centro pasarán por un sólo punto, en el primer caso y en el segundo, las líneas del centro no pasan por un solo punto y se forma la región marcada con 31 en la figura 2, o alguna otra en otros casos.

Nótese que 31 regiones es lo más que se puede hacer, ya que en la figura 1 por ejemplo, el único punto donde se cruzan mas de 2 rectas, distinto de los 6 originales, es el punto central en donde se cruzan 3 rectas que, si los 6 puntos no estan muy uniformemente distribuidos, ese punto central se transforma en un triángulo y ésto da por resultado una región más. En la figura 2, no hay ningún cruce de más de 2 rectas, por lo que de ninguna manera podemos obtener una región más para tener las 32 regiones que esperábamos que resultaran.

Entonces lo que tenemos hasta aquí, es que no basta con comprobar un número particular de veces una hipótesis para tener demostrada una proposición, sino que debe ser demostrada en general. En este caso hemos encontrado un contraejemplo a la proposición que formulamos con base a la observación de los 5 primeros casos particulares; y si siguiéramos haciendo los casos para 7 y 8 puntos, tenemos la siguiente tabla:

# DE PUNTOS	# DE REGIONES
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	31
7	57
8	99

tabla 30

En donde vemos que no es cierta la proposición, es más, no se ve tan sencillo encontrar alguna fórmula general que sea válida para todos los casos.

Existe un método llamado Cálculo de Diferencias Finitas, que en ocasiones es muy útil, y ésta es una de ellas, ya que por medio de éste podemos encontrar una fórmula general para encontrar el número de regiones en que queda dividido el círculo. El método es el siguiente:

Se hace una lista de los valores que nos da el problema en un número particular de casos, en seguida se anotan en otra lista las diferencias entre cada par de números entre los renglones consecutivos. En una tercera lista se escriben las diferencias de los números que están en la segunda fila y así sucesivamente se van encontrando la primera, segunda, tercera, etc. diferencias, hasta que se encuentre una lista de constantes.

Veamoslo en nuestro caso particular:

N	# DE REGIONES	1a.DIF.	2a.DIF.	3a.DIF.	4a.DIF.
1	1				
2	2	1			
3	4	2	1		
4	8	4	2	1	
5	16	8	4	2	1
6	31	15	7	3	1
7	57	26	11	4	1
8	99	42	16	5	1

tabla 31

Cuando la lista inicial está generada por una función lineal, los números de la lista de las primeras diferencias son todos iguales. Si la función es cuadrática, en la lista de las segundas diferencias es en donde aparecen todas iguales. Así, una fórmula de tercer grado, dará cifras iguales en la lista de las terceras diferencias y así sucesivamente.

Volviendo a nuestro caso, la fórmula que genera la lista inicial debe ser una función de grado 4 ya que fueron necesarias 4 listas de diferencias para tener constantes.

Existe una fórmula descubierta por Isaac Newton, que es aplicable en todos los casos, independientemente del número de listas de la tabla. Esta fórmula no la vamos a ver aqui, pero si el lector está interesado, en la bibliografía de este trabajo se da un libro de Martin Gardner en donde se puede consultar lo mas elemental de ésto.

Una vez que hemos aplicado la fórmula de Newton a nuestro caso particular, resulta que la fórmula que genera la lista correspondiente al número de regiones en que queda dividido el circulo, es:

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2x3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2x3x4}$$

Que podemos comprobar que efectivamente es un polinomio de 4o.grado, y podemos comprobar que para los 8 casos que hemos hecho, la fórmula coincide. Faltaría demostrar que es válida para todos los números naturales. Como suele hacerse, se lo dejamos al lector.

NOTA. Por el "método" de quedársele viendo a la lista original una, y otra, y otra vez, se obtuvo la siguiente fórmula que también funciona para los 8 primeros casos y coincide en ellos con la que se obtuvo con la fórmula de Newton:

$$(n-3)T_1 + (n-4)T_2 + \ldots + (n-n+1)T_{n-3} + T_{n-1} + 1$$

Donde T_i es el i'ésimo número triangular. De nuevo, queda como ejercicio demostrar que ambas son válidas.

INDUCCION MATEMATICA.

Una forma de trabajar los problemas que hemos utilizado reiteradamente en el capitulo anterior ha sido la siguiente:

Al resolver un problema que se nos plantea para un número natural arbitrario n, analizamos primero el problema para valores pequeños de n y a partir de los resultados obtenemos una hipótesis para el resultado general. En ocasiones hemos podido demostrar esta hipótesis en general de manera directa (por ejemplo en el problema del Pin Pon). En otras se ha podido demostrar la hipótesis viendo que nuestra hipótesis es válida para los primeros valores de n y que la "regla de crecimiento" de nuesta hipótesis corresponde a la del resultado que se busca (por ejemplo para demostrar que el número de subconjuntos de un conjunto es 2^n observamos que ésto era válido para n=0,1 y que la "regla de crecimiento" del número de subconjuntos y de nuestra fórmula eran el mismo -"multiplicar por 2"-). De aquí concluimos que la fórmula era válida para todo natural n.

Durante todo el primer capitulo, hemos venido trabajando de estas dos maneras a la hora de demostrar una hipótesis. El primer método, es el que busca los "porqué's" de la fórmula obtenida, que busca razonamientos generales que nos ayuden a demostrar la hipótesis del problema, de modo que siguiendo esta manera de demostrar una hipótesis, lo que podemos generalizar es que debemos comprender lo mejor posible el problema concreto y buscar todos los"porqué's" que podamos, debemos tratar de explicarnos en el problema mismo todas y cada una de las abstracciones y generalizaciones que hagamos, debemos buscar muchos caminos y formas diferentes de resolver un problema. El segundo método, el que a partir de casos particulares obtenemos una hipótesis la cual se puede demostrar gracias a la propiedad que tienen los naturales de que dado un número natural siempre podemos saber cuál es el siguiente, ha llevado a la conclusión de que ya que aparece en tantos problemas relacionados con los números naturales y que aparece tantas veces, bien vale la pena "abstraer" ese método de todos estos problemas y establecer un Principio General que permita avanzar y comprender mas firmemente, en general que lo que se está haciendo es válido para toda n.

Recordemos un poco qué haciamos en el capitulo anterior en muchos de los ejemplos. Formábamos una tabla con los casos particulares que ibamos comprobando "a pie", de modo que si descubriamos una fórmula, la manera de demostrar que era válida siempre era comprobar que funcionaba para los casos particulares que ya teniamos y luego descubrir cómo era el cambio de renglón a renglón en general, es decir: Se tienen 2 listas de números (2 funciones), si podemos comprobar que empiezan igual, es decir, que f(1)=g(1) (si las funciones son f y g), y además que si en algún renglón son iguales entonces también son iguales en el siguiente renglón, se puede concluir que las 2 listas (funciones) siempre serán iguales.

Veamos un ejemplo.

Deciamos que:

$$C_n^3 = T_1 + T_2 + \dots + T_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

Porque viendo la tabla, éstas comienzan igual, o sea:

n	C_n^3	$T_1+T_2+\dots+T_{n-2}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
3	$C_3^3 = 1$	$T_1 = 1$	$\frac{3(2)(1)}{6} = 1$
4	$C_4^3 = 4$	$T_1+T_2 = 1+3 = 4$	$\frac{4(3)(2)}{6} = 4$
5	$C_5^3 = 10$	$T_1+T_2+T_3 = 1+3+6 = 10$	$\frac{5(4)(3)}{6} = 10$

Y además si suponemos que coinciden en el renglón k-2 tenemos en la tabla:

$$k \qquad C_k 3 = 1+3+6+\ldots+T_{k-2} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

Tenemos que ver que para el renglón k-1 también coinciden, es decir, que la modificación entre renglón y renglón en cualquiera de las 3 columnas es la misma, o sea:

$$C_{k+1}{}^3 - C_k{}^3 = (1+3+\ldots+T_{k-2}+T_{k-1}) - (1+3+\ldots+T_{k-2}) =$$

$$\frac{(k+1)(k)(k-1)}{6} - \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

Y ya habíamos visto en el capítulo anterior que:

$$C_{k+1}{}^3 - C_k{}^3 = \frac{k(k-1)}{2} = T_{k-1}$$

Y que

$$(1+3+\ldots+T_{k-2}+T_{k-1}) - (1+3+\ldots+T_{k-2}) = T_{k-1}$$

Y también que

$$\frac{(k+1)(k)(k-1)}{6} - \frac{k(k-1)(k-2)}{6} = \frac{k(k-1)(k+1-k+2)}{6} =$$

$$\frac{k(k-1)3}{6} = \frac{k(k-1)}{2} = T_{k-1}$$

Por lo que como las 3 listas comienzan igual y el cambio de renglón a renglón en cualquiera de las 3 es el mismo, se demuestra que las 3 son iguales siempre.

Podemos ahora establecer el Principio General que hemos venido usando y que nos permitirá demostrar en general muchas proposiciones que involucran a los números naturales, este es el llamado Principio de Inducción Matemática.

I - PRINCIPIO DE INDUCCION.

Una proposición se cumple para todo número natural n si se satisfacen las condiciones siguientes:

1)La proposición se cumple para $n=1$ y

2)La veracidad de la proposición para cualquier número $n=k$ implica su veracidad para el número natural siguiente $n=k+1$.

También se formula este Principio General de la siguiente manera:

II - PRINCIPIO DE INDUCCION.

Si A es un subconjunto del conjunto de numeros naturales que cumple:

1) 1 está en A, y

2) Si un número natural k está en A, también k+1 está en A,

Entonces A es el conjunto de todos los numeros naturales.

El mismo principio podemos enunciarlo también como:

III- PRINCIPIO DEL BUEN ORDEN.

Si A es un subconjunto del conjunto de números naturales y A no es vacio, entonces A tiene un primer elemento.

Y también lo hemos usado como:

IV- PRINCIPIO DEL "DESCENSO INFINITO".

No existe una sucesión infinita $n1, n2, n3, \ldots$ de números naturales tales que $n1 > n2 > n3 > \ldots$

Observación. Nótese que los 4 principios son en realidad el mismo. Puede demostrarse la equivalencia entre los 4 de una manera lógica. Aquí, no queremos desviarnos por ese terreno, queremos simplemente hacer hincapié en que la importancia del principio de inducción (en cualquiera de sus formas) reside en que caracteriza a los números naturales. Notemos que otros conjuntos numéricos como **Z**, **Q** y **R** no cumplen con estos principios, el orden en ellos es diferente. El conjunto de los números naturales responde totalmente a nuestra intuición en cuanto al orden que tienen. De manera que los 4 principios que hemos enunciado, no son mas que distintas formas de decir lo mismo, distintas formas de caracterizar el orden de los naturales.

Veamos algunos ejemplos mas.

Si un quebrado tiene factores comunes en el denominador y el numerador, existe un proceso de dividir ambos hasta llegar a uno que ya no tiene factores comunes.

Ejemplo: $\frac{36\ 000\ 000}{96\ 000\ 000} = \frac{3\ 600\ 000}{9\ 600\ 000} = \ldots = \frac{36}{96} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

entonces $\frac{3}{8}$ es el primer elemento que representa al mismo racional.

Este es un ejemplo de un proceso descendiente (finito) que es muy usado implícitamente desde la educación primaria.

Otro ejemplo:

$n! = 1x2x3x4x\ldots xn$

Podemos obtener el factorial de cualquier número natural mediante multiplicar los números naturales de uno en uno hasta llegar al número deseado.

El factorial de un número está bien definido, siempre tiene primer elemento esta definición y siempre sabemos cuál es el siguiente, es decir:

Definimos el factorial de un número natural como:

$1! = 1$ y $(k+1)! = (k!)(k+1)$

entonces podemos conocer cualquier número factorial, o sea:

$2! = 1!(2) = 1x2 = 2$

3! = 2!(3) = 2x3 = 6

4! = 3!(4) = 6x4 =24

.

.

.

Se puede obtener cualquier factorial mediante ir construyendo uno por uno.

Si para cada número natural se tiene una proposición, podemos obtener cuál es el conjunto de números naturales para los cuales se cumple la proposición. Por ejemplo:

PROBLEMA.

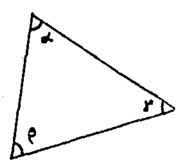
Dado un polígono(*) se trata de polígonos convexos, ver nota al pie en el problema del número de diagonales de un polígono.de n lados, ¿cuál es la suma de sus ángulos internos?

Veamos casos particulares para obtener alguna proposición que demostrar.

Si n=1 no hay polígono; si n=2 tampoco existe un polígono con 2 lados, pero si n=3 el polígono convexo de 3 lados es el triángulo y ya tenemos un resultado previo que nos da la información que necesitamos; esto es, sabemos que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

Si n=4, el polígono es un cuadrilátero que podemos dividir en 2 triángulos y así, por la información del caso anterior, tenemos que la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360°.

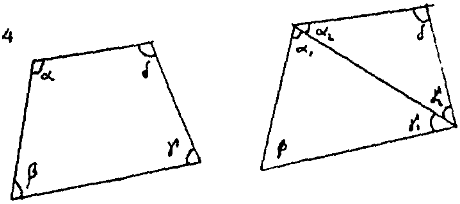
n=3



$\alpha + \beta + \Gamma = 180°$

(*) De nuevo, se trata de polígonos convexos. Ver nota al pie en el problema del número de diagonales de un polígono.

n=4

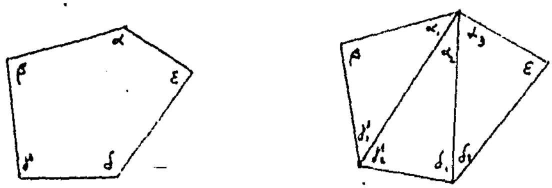


$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ y $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

Y por el caso n=3 sabemos que $\alpha_1 + \beta + \Gamma_1 = 180°$ y que $\alpha_2 + \Gamma_2 + \delta = 180°$ por lo que

$$\alpha + \beta + \Gamma + \delta = (\alpha_1 + \alpha_2) + \beta + (\Gamma_1 + \Gamma_2) + \delta = (\alpha_1 + \beta + \Gamma_1) + (\alpha_2 + \Gamma_2 + \delta) =$$
$$180° + 180° = 2(180°) = 360°$$

para n=5 tenemos:



queremos encontrar cuanto es la suma $\alpha + \beta + \Gamma + \delta + \sigma$ y de nuevo formemos triángulos donde tenemos:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\ ,\quad \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad \text{y} \quad \delta = \delta_1 + \delta_2$$

y como ya sabemos el resultado para n=3 tenemos:

$$\alpha_1 + \beta + \Gamma_1 = 180°$$
$$\alpha_2 + \Gamma_2 + \delta_1 = 180°$$
$$\alpha_3 + \delta_2 + \sigma = 180° \quad \text{entonces}$$

$$\alpha + \beta + \Gamma + \delta + \sigma = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \beta + (\Gamma_1 + \Gamma_2) + (\delta_1 + \delta_2) + \sigma =$$
$$(\alpha_1 + \beta + \Gamma_1) + (\alpha_2 + \Gamma_2 + \delta_1) + (\alpha_3 + \delta_2 + \sigma) =$$
$$180° + 180° + 180° = 3(180°) = 540°$$

Podemos observar entonces que cada vez que aumentamos un lado, en los términos del problema, aumentamos un triángulo. También observemos que en general dado un polígono convexo de n lados podemos dividirlo en n-2 triángulos (ejercicio para el lector, demostrarlo) y ya sabemos cuánto suman los ángulos internos de un triángulo, por lo que la formulita que ya se antoja proponer es la (n-2)180° o sea, la proposición siguiente:

Proposición. La suma de los ángulos internos de un polígono convexo de n lados es $(n-2)180°$.

Observación. Esta proposición, no tiene sentido para $n=1$ y $n=2$, por lo que para demostrarla vamos a cambiar un poco la proposición.

Proposición. En un polígono convexo de $n+2$ lados, la suma de sus ángulos internos es $n(180°)$.

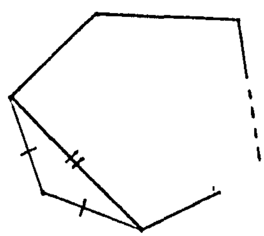
Demostración:

Sea A el conjunto de números naturales para los cuales se cumple la afirmación.

El 1 está en A ya que un polígono de $1+2 = 3$ lados es un triángulo y en éste sucede que la suma de sus ángulos internos es $180°= (1)180°$.

Hipótesis de Inducción. Consideremos que la afirmación es verdadera para $n=k$. Esto es, dado un polígono convexo de $k+2$ lados, la suma de sus ángulos internos es $(k)180°$. Debemos demostrar que para $n=k+1$ también es cierta la afirmación.

Consideremos un polígono convexo de $k+3$ lados, tomemos 3 vértices consecutivos, el polígono convexo de $k+3$ lados se descompone en un polígono convexo de $k+2$ lados y un triángulo.



Entonces, por hipótesis para un polígono de $k+2$ lados la afirmación es verdadera, la suma de los ángulos internos de éste es $k(180°)$ y al agregarle la suma de los ángulos internos del triángulo que falta, tenemos $k(180°) + 180° = (k+1)180°$.

La suma de los ángulos internos de un polígono convexo de $k+3$ lados es:

$(k+3-2)(180°) = (k+1)180°$ por lo que k+1 también está en A. Y por lo tanto A son todos los números naturales. Y con ésto queda demostrada la afirmación para todo número natural.

PROPOSICION.

Todos los triángulos tienen la misma área.

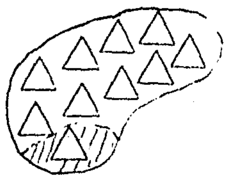
Demostración por inducción:

Tenemos la proposición: "si tenemos un conjunto de n triángulos, todos ellos tienen la misma área".

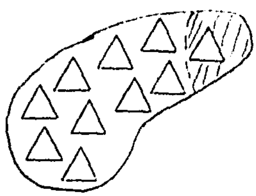
Tomemos un triángulo de ese conjunto y resulta que para ese triángulo es cierta la proposición, ya que es un único triángulo y por lo tanto en un conjunto con un triángulo, todos tienen la misma área.

Tomemos un conjunto con n triángulos y supongamos que todos ellos tienen la misma área.

Tomemos ahora un conjunto con n+1 triángulos y tenemos que demostrar que en éste tambien todos tienen la misma área.



Tomemos n+1 triángulos y apartemos uno de ellos. Tenemos un conjunto con n triángulos y en éste, por hipótesis todos tienen la misma área. Después regresamos el triángulo que se había apartado y se aparta ahora otro triángulo de los otros n.



Por hipótesis, los n triángulos tienen la misma área, por lo tanto la proposición para n+1 triángulos es cierta, esto es:

Dado un conjunto con n+1 triángulos todos tienen la misma área.

O sea a partir de que la proposición es cierta para n triángulos se demostró que también es verdadera para n+1 triángulos.

Obviamente esta es una proposición que no es verdadera ya que basta con dar 2 triángulos que no tengan la misma área para darnos cuenta de su falsedad. Pero ¿dónde está el problema en la demostración?.

Parece que el problema está en suponer que los dos conjuntos que obtenemos con n elementos cada uno al apartar un triángulo, tienen alguna intersección, esto es, suponemos que tienen elementos comunes; sin embargo, para n=2 se ve que los conjuntos son ajenos y no se puede decir nada sobre ellos. O sea que si Pi es la proposición para i triángulos lo que estamos observando es que $P_1 \not\Rightarrow P_2$.

Otro problema es que el conjunto en cuestion en general solo tiene un elemento. Sea $Z=\{n \mid Pn \text{ es cierta}\}$ lo que pasa es que $Z = \{1\}$.

Vamos a escribir ahora de otra manera la demostracion y veamos si ahora queda más clara la trampa.

Demostración:

Sea A un conjunto con n+1 triángulos.

Sea $t_1 \in A$ y sea $B_1 = A - \{t_1\}$

Sea $t_2 \in A$, $t_2 \neq t_1$ y sea $B_2 = A - \{t_2\}$

Hipótesis de inducción. Todos los triángulos en B_1 tienen la misma área. Y también todos los tiángulos de B_2 tienen la misma área.

Sea $t \in (B_1 \cap B_2)$

área (t_1) = área (t) porque $t \in B_2$ y

área (t_2) = área (t) porque $t \in B_1$ por lo tanto

área (t_1) = área (t_2) = área (t)

Pero si no existe t tal que $t \in (B_1 \cap B_2)$ no podemos decir nada.

El problema está en que no siempre sucede que la intersección de B_1 con B_2 sea distinta del vacio y nosotros escribimos la demostración implicitamente como si siempre sucediera esto.

Entonces en general debemos tener claro todos y cada uno de los argumentos en una demostración y debemos pensar en ellos lo mas general posible, es decir, tenemos que pensar en todas las posibilidades que tengamos y para ellas, demostrarlo.

PROBLEMA.

Todo número natural es igual a su "sucesor".

La proposición la podemos escribir como:

Todo número natural k es igual al número k+1.

Demostración:

Suponemos que $k = k+1$ por lo tanto

$k+1 = k+1+1 = k+2$

o sea $k+1 = k+2$

De donde se tiene el siguiente

Corolario. Todos los números naturales son iguales.

Vemos pues que el error está en no tomar en cuenta todo el principio de inducción. Es por este tipo de errores, que al llevar a cabo una demostración debemos tener cuidado de no omitir ninguna de las 2 condiciones mencionadas en el Principio de Inducción Matemática.

Ahora haremos algunos problemas para familiarizarnos más con el método de la inducción matemática.

PROBLEMA.

Calcular la suma de los n primeros números naturales.

Este es un problema que ya hemos trabajado mucho en el capítulo anterior, incluso ya hemos demostrado por varios caminos cuánto vale esta suma, ahora solo lo demostraremos por Inducción para ilustrar una demostración por este método.

Proposición. La suma de los n primeros números naturales es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$

Demostración:

i) Para n=1

Tenemos que sumar hasta el natural 1 y esto da por resultado 1 que es lo mismo que $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1(2)}{2} = 1$

Por lo tanto la proposición es verdadera para n=1.

ii)Hipótesis de Inducción.

Suponemos que la proposición es verdadera n=k ,esto es:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Debemos demostrar que la proposición es verdadera para n=k+1, esto es:

Por Demostrar que $1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ (1)

Demostración:

Sabemos por hipótesis cuanto vale la suma hasta el natural número k, entonces

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = [1+2+3+\ldots+k] + (k+1) =$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$$

$$\frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Que es lo que queríamos demostrár en (1). Por lo tanto la proposición también es cierta para n=k+1 y con esto queda demostrado que la proposición es verdadera para todos los números naturales. O sea:

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo n en los naturales

PROBLEMA.

Calcular la suma de los n primeros números naturales.

Este es un problema que ya hemos trabajado mucho en el capítulo anterior, incluso ya hemos demostrado por varios caminos cuánto vale esta suma, ahora solo lo demostraremos por Inducción para ilustrar una demostración por este método.

Proposición. La suma de los n primeros números naturales es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$

Demostración:

i) Para n=1

Tenemos que sumar hasta el natural 1 y esto da por resultado 1 que es lo mismo que $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1(2)}{2} = 1$

Por lo tanto la proposición es verdadera para n=1.

ii)Hipótesis de Inducción.

Suponemos que la proposición es verdadèra n=k ,esto es:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Debemos demostrar que la proposición es verdadera para n=k+1, esto es:

Por Demostrar que $1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ (1)

Demostración:

Sabemos por hipótesis cuanto vale la suma hasta el natural número k, entonces

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = [1+2+3+\ldots+k] + (k+1) =$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$$

$$\frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Que es lo que queríamos demostrar en (1). Por lo tanto la proposición también es cierta para n=k+1 y con esto queda demostrado que la proposición es verdadera para todos los números naturales. O sea:

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo n en los naturales

EJERCICIOS.

1 .- Demostrar por inducción matemática:

$$(n)1 + (n-1)2 + \dots + 2(n-1) + 1(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

2 .- Demostrar por inducción que:

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

3 .- Demostrar:

$$(1+1/1)(1+1/2)(1+1/3)\dots(1+1/n) = n+1$$

4 .- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 > 0$ a menos que $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ para toda n en los naturales y toda x en los números reales.

5 .- Para toda n en los números naturales con $n>1$ demostrar:

$$1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \dots + 1/\sqrt{n} > \sqrt{n}$$

6 .- Demostrar que la media geometrica de un número finito de números positivos no es mayor que su media aritmética; es decir, para cualesquiera números positivos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$; $\sqrt{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{n}$

7 .- Demostrar que la fórmula obtenida en el problema de la "Torre de Hanoi" (del capítulo anterior), es cierta para todos los números naturales.

8 .- Demostrar que n rectas en el plano no pueden dividir a éste en más de 2^n regiones ajenas.

9 .- Demostrar que $2n-1$ es un impar para todo numero n en los naturales.

10.- Con base en el problema del Pin Pon, que vimos en el capitulo uno y retomamos al final ese mismo capítulo, demostrar conceptualmente la siguiente:

Proposición. Si N es el número de jugadores inscritos y $2^k < N \leq 2^{k+1}$ entonces el número de rondas es $k+1$.

(Esto se nota en los ejemplos que hicimos y es muy fácil de comprender si N es una potencia de 2, en particular. Se sugiere demostrarlo mediante la descomposición de N como: $N = 2^k + x$ con $x < 2^k$)

11.- Demostrar por inducción que el número de rondas que se efectuan en el problema del Pin Pon (primer problema de este trabajo) es m, donde $2^{m-1} < N \leq 2^m$ y N es el número de jugadores inscritos al torneo.

12.- Probar que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \qquad x \neq 1$$

13.- Probar que

$$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

14.- Probar que

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n! = (n+1)! - 1$$

15.- Probar que el producto de 3 números naturales consecutivos es divisible por 6.

16.- Observe que:

$1^2 = 1$

$3^2 = 2 + 3 + 4$

$5^2 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$

$7^2 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

$9^2 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13$

Demostrar que todo cuadrado impar $(2n+1)^2$ es igual a la suma de n enteros consecutivos del n+1.

17.- Un número natural es "travieso" si su representación en el sistema binario contiene una cantidad par de cifras "uno". Así, por ejemplo, los números:

$0 = 0_2$, $3 = 11_2$, $5 = 101_2$, $6 = 110_2$ y $15 = 1111_2$

son números traviesos.

Probar que:

a) $2^n + 1$ es travieso para toda n en los naturales.

b) $2^{2n} - 1$ es travieso para toda n en los naturales.

18.- Encontrar la suma de los primeros 1988 números traviesos.

19.- Demostrar por inducción matemática que el número de subconjuntos de un conjunto con N elementos es 2^N .

C A P I T U L O   III

COMBINATORIA

Cuando vimos el problema del Pin Pon, encontramos una manera de contar el número de parejas de un conjunto con n elementos. Cuando vimos el problema de las ternas, encontramos una manera de contar el número de ternas no ordenadas de un conjunto con n elementos. Si siguiéramos de esta forma, podemos preguntarnos si existe alguna manera de saber cuántas "cuartetas" tiene un conjunto con n elementos, o cuantos subconjuntos de 4 elementos tiene un conjunto de n elementos. Es más, podemos preguntarnos mas en general, ¿Cuál es número de subconjuntos de k elementos que tiene un conjunto con n elementos? Para responder a esta última pregunta vamos a proceder, como antes, viendo uno a uno los casos particulares.

Por ejemplo si k=1 necesitamos calcular el número de subconjuntos con 1 elemento de un conjunto de n elementos y esto es fácil de responder ya que existe un subconjunto de un elemento para cada uno de los n elementos del conjunto. Por lo tanto hay n subconjuntos con un elemento en un conjunto de n elementos.

Si k=2 la pregunta es ¿cuántos subconjuntos de 2 elementos tiene un conjunto de n elementos? Notemos que esta es la misma pregunta que ya contestamos en el problema del Pin Pon, ya que cuando contamos el número de parejas no ordenadas, contamos también los subconjuntos de 2 elementos. Incluso ya le habíamos dado un nombre al número de parejas de un conjunto de n elementos; habíamos hecho la convención de llamarle C_n^2 y por varios caminos sabíamos que $C_n^2 = (n(n-1))/2$ (ver capítulo de Problemas, Problemas y mas Problemas).

Si k=3 la pregunta es ¿cuál es el número de subconjuntos con 3 elementos de un conjunto con n elementos? También esta pregunta ya la habíamos respondido cuando hicimos el problema de las ternas. De nuevo notemos que es lo mismo contar ternas que subconjuntos con tres elementos.

Ahora sí vamos a recordar un poco cómo fué que analizamos el problema para encontrar que el número que buscamos es $C_n^3 = (n(n-1)(n-2))/6$.

Veamos qué hacíamos. Quitamos un elemento del conjunto y formamos un conjunto con n-1 elementos, de este último hacemos una lista de las parejas que podemos hacer con él y cada una de estas parejas la combinamos con el elemento que habíamos quitado por lo que tenemos así $((n-1)(n-2))/2$ ternas distintas en donde siempre aparece el elemento que habíamos quitado. Pero podíamos haber quitado al principio, cualquiera de los n elementos, por lo que hay $((n-1)(n-2))/2$ ternas por cada elemento, entonces tenemos en total $(n(n-1)(n-2))/2$ ternas. Pero de éstas hay que quitar las que se repiten y analizandolo, tenemos: Por ejemplo para la terna abc, formada de la pareja ab y agregándole c, hay 2 ternas más que son iguales a ella y éstas son la bca (que la contamos cuando al principio se quitó a a) y la terna acb (que contamos cuando quitamos al principio a b). Por lo tanto estamos contando 3 veces cada terna, entonces debemos dividir entre 3 para tener exactamente el número de ternas de un conjunto de n elementos que es:

$$(n(n-1)(n-2)/2)/3 = n(n-1)(n-2) / 6$$

Que era lo que buscábamos.

Ahora veamos cuántos subconjuntos con 4 elementos tiene un conjunto de n elementos.

Como en el caso anterior, quitemos del conjunto con n elementos, uno de sus elementos, ahora con el nuevo conjunto de n-1 elementos formemos las ternas, que ya sabemos que son $C_{n-1}^3 = ((n-1)(n-2)(n-3)) / 6$ y hagamos una lista con ellas. Ahora a esta lista le agregamos el elemento que habíamos quitado, por lo que tenemos una lista de $((n-1)(n-2)(n-3))/6$ subconjuntos con 4 elementos, en donde cada uno de ellos contiene al elemento que habíamos quitado. Pero todo esto podemos hacerlo para cada uno de los n elementos del conjunto por lo que se tienen en total:

(n(n-1)(n-2)(n-3))/6 subconjuntos con 4 elementos; ¡ pero de nuevo estamos repitiéndo muchos subconjuntos ! Contemos ahora cuántas son las repeticiones.

Por ejemplo si queremos contar los subconjuntos de 4 elementos del conjunto {a,b,c,d,e}.

Quitemos el elemento e y tenemos que las ternas del conjunto {a,b,c,d } son: ((4)(3)(2))/6 ternas como sigue:

abc , **abd** , **bcd** , **acd** ; a éstas se les agrega el elemento **e** y tenemos los 4 subconjuntos siguientes:

{a,b,c, e},{a,b,d, e},{b,c,d, e} y {a,c,d, e}

Ahora quitemos el elemento **d** y tenemos que las ternas de **{a, b, c, e}** son:

abc **abe** **bce** y **ace** agregándoles **d** tenemos los cuatro subconjuntos siguientes:

{a,b,c, d} , {a,b,e, d} , {b,c,e, d} y {a,c,e, d}

Quitando ahora al elemento c tenemos : las ternas de {a, b, d, e} son **abd**, **abe**, **bde** y **ade** y los subconjuntos de 4 elementos son:

{a,b,d, c}, {a,b,e, c}, {b,d,e, c} y {a,d,e, c}

Ahora quitando al elemento **b**; las ternas de **{a,c,d,e}** son:

acd ,**ace**, cde, y ade y los subconjuntos de 4 elementos son:

{a,c,d, b}, {a,c,e, b}, {c,d,e, b} y {a,d,e, b}

Por último quitando al elemento a tenemos: {b, c, d, e} cuyas ternas son: bcd, bce, cde y bde por lo que los subconjuntos de 4 elementos son:

{b,c,d, a},{b,c,e, a}, {c,d,e, a} y {b,d,e, a}

Tenemos que son 4 subconjuntos con 4 elementos por cada uno de los elementos del conjunto original, entonces son 4x5 = 20 subconjuntos. Veamos ahora las repeticiones:

El {a,b,c, e} se repite en {a,b,e, c}, {a,c,e, b} y en {b,c,e, a}

El {a,b,d, e} se repite en {a,b,e, d}, {a,d,e, b} y en {b,d,e, a}

El (b,c,d, e) se repite en (b,c,e, d), (b,d,e, c) y en (c,d,e, b)

El (a,c,d, e) se repite en (a,c,e, d), (a,d,e, c) y en (c,d,e, a)

El (a,b,c, d) se repite en (a,b,d, c), (a,c,d, b) y en (b,c,d, a)

Por lo que en este caso debemos dividir entre 4 la cuenta que habíamos obtenido; esto es, el número de subconjuntos de 4 elementos de un conjunto con 5 elementos es $(4x5)/4 = 5$.

En general las repeticiones son: por ejemplo para la "cuarteta" (a,b,c, n) se tienen las repeticiones (a,b,n, c), (a,c,n, b) y (b,c,n, a) (y solo esas repeticiones ya que estamos partiendo de ternas no ordenadas). Por lo que el número de subconjuntos con 4 elementos de un conjunto con n elementos es:

$$(n)(n-1)(n-2)(n-3)/(6x4) = (n)(n-1)(n-2)(n-3)/(2x3x4)$$

Veámoslo de otra forma. Llamemos $C_n{}^4$ al número de subconjuntos de 4 elementos de un conjunto con n elementos. Lo que queremos demostrar es que:

$$C_n{}^4 = (n)(n-1)(n-2)(n-3)/(2x3x4)$$

Si n=4 es claro que solo existe un subconjunto de 4 elementos que es el conjunto mismo. Y en la fórmula tenemos: $C_4{}^4 = (4)(3)(2)(1)/(2x3x4) = 1$, lo cual muestra que en este caso particular es cierta.

Ahora si n=5 tenemos que el número de subconjuntos de 4 elementos, ya sabemos, es 5; y en la fórmula tenemos: $C_5{}^4 = (5)(4)(3)(2)/(2x3x4) = 5$, que también funciona en este caso.

Si suponemos que la fórmula es cierta cuando n=k, debemos demostrar que para n=k+1 también es válida.

Nuestra hipótesis es $C_k{}^4 = (k)(k-1)(k-2)(k-3)/(2x3x4)$

Notemos que todos los subconjuntos de un conjunto con k elementos también son subconjuntos de un conjunto con k+1 elementos cuando se le agrega un elemento mas al conjunto original. Esto es, los subconjuntos de 4 elementos de un conjunto con k+1 elementos son todos los subconjuntos de 4 elementos de un conjunto con k elementos más los subconjuntos de 3 elementos de un conjunto con k elementos. Es decir, si tenemos el conjunto $(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})$ y queremos contar los subconjuntos de 4 elementos, podemos contar los subconjuntos de 4 elementos de $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, que serán los subconjuntos en que no aparece el elemento a_{k+1}, y sumarle todos los subconjuntos de 4 elementos en que sí aparece a_{k+1}, que serán todas las ternas del conjunto $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. O sea:

$$C_{k+1}^4 = C_k^4 + C_k^3$$

Ya habíamos observado antes esta construcción, en el problema de sumar números triangulares por ejemplo.

Por lo tanto para obtener C_{k+1}^4 podemos hacer uso de esta igualdad y tenemos:

$$C_{k+1}^4 = C_k^4 + C_k^3 = (k)(k-1)(k-2)(k-3)/(2x3x4) + (k)(k-1)(k-2)/(2x3) =$$

$$[(k)(k-1)(k-2)(k-3) + (4k)(k-1)(k-2)]/(2x3x4) =$$

$$(k)(k-1)(k-2)(k-3+4)/(2x3x4) =$$

$$(k+1)(k)(k-1)(K-2)/(2x3x4)$$

Que es la fórmula que buscábamos para n=k+1.

Así, lo que tenemos hasta ahora son las fórmulas para subconjuntos de 2, 3, y 4 elementos de un conjunto de n elementos. Ahora para subconjuntos de 5 elementos tenemos:

Llamemos C_n^5 el número de subconjuntos de 5 elementos de un conjunto con n elementos. Entonces estamos buscando una fórmula para encontrar C_n^5. De nuevo, empecemos con n's pequeñas para contarlos uno por uno. Por ejemplo si n=5 tenemos:

$C_5^5 = 1$ ya que de un conjunto con 5 elementos solo podemos formar 1 subconjunto con 5 elementos.

Si n=6

De nuevo por la observación que ya hemos hecho antes:

$C_6^5 = C_5^5 + C_5^4$ y ya sabemos calcularlas, por lo que

$C_6^5 = 1 + (5)(4)(3)(2)/(2x3x4) = 1 + 5 = 6$

Si n=7

$C_7^5 = C_6^5 + C_6^4 = 6 + (6)(5)(4)(3)/(2x3x4) = 6+15 = 21$

Pero ¿cuál será una fórmula general para C_n^5 ?

Siguiéndo el procedimiento que haciamos antes, hacemos una lista de los C_{n-1}^4 subconjuntos de 4 elementos y a esta lista le agregamos un elemento en cada conjunto con lo que por cada elemento del conjunto original se tienen C_{n-1}^4 conjuntos de 5 elementos de donde tenemos $n(C_{n-1}^4)$ conjuntos de 5 elementos, pero debemos descontar las repeticiones que son:

Por ejemplo la quinteta (a,b,c,d,n) se repite en las quintetas: (a,b,c,n,d), (a,b,d,n,c), (a,c,d,n,b) y (b,c,d,n,a), (Como antes, hacemos la aclaracion de que solo son esas repeticiones ya que estamos partiendo de cuartetas no ordenadas y entonces no pueden aparecer, por ejemplo, la quinteta (a,b,n,c,d) en las repeticiones porque querria decir que las cuartetas (a,b,c,n) y (a,b,n,c) son diferentes). Entonces el número de cuartetas multiplicado por n elementos, hay que dividirlo entre 5 repeticiones de cada uno. O sea:

$$C_n^5 = \frac{nC_{n-1}^4}{5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5x4x3x2}$$

Otra manera de contar las repeticiones para una quinteta dada es la siguiente:

Dado el conjunto (a,b,c,d) podemos agregar n (un elemento más) en cualquiera de las 5 posiciones siguientes: (a,b,c,d,n), (a,b,c,n,d), (a,b,n,c,d), (a,n,b,c,d) ó (n,a,b,c,d) por lo tanto, para cada conjunto de 5 elementos que tengamos hay 5 repeticiones, entonces tenemos de nuevo que:

$C_n^5 = (n)(C_{n-1}^4)/5 = (n)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)/(2x3x4x5)$

Y en general podemos decir que $C_n^k = (n)(C_{n-1}^{k-1})/k$ donde $(n)(C_{n-1}^{k-1})$ son los subconjuntos de k elementos en donde todavia hay muchas repeticiones y k son el número de repeticiones que hay en cada uno de ellos. Esto es, dado el conjunto $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ hay k distintos lugares en donde agregar el k'ésimo elemento, que producen el mismo conjunto, o sea:

$\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k-1}\} = \ldots = \{a_k, a_1, \ldots, a_{k-1}\}$

Y como podemos ir substituyendo C_{n-1}^{k-1} tenemos en general la siguiente fórmula:

$C_n^k = (n)(C_{n-1}^{k-1})/k = (n)(n-1)(C_{n-2}^{k-2})/(k)(k-1) =$

$(n)(n-1)(n-2)(C_{n-3}^{k-3})/(k)(k-1)(k-2) = \ldots =$

$(n)(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)/[(k)(k-1)(k-2)\ldots(2)$

Veamoslo ahora de otra forma más y demostremos que esta fórmula es cierta siempre, es decir, hay que demostrar que para todo n en los números naturales sucede que:

$C_n^k = (n)(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1) / (k)(k-1)(k-2) \ldots (2)$

Demostración por inducción en k.

Si k=1 queremos encontrar C_n^1 que ya sabemos que es n para cualquiera que sea n; y por la fórmula tenemos:

$C_n^1 = (n-1+1)/1 = n$ Por lo tanto es cierta la proposición para k=1

Hipótesis de Inducción: para k=l

$C_n^l = (n)(n-1)(n-2)\ldots(n-l+1)/(l)(l-1)\ldots(3)(2)(1)$

Por demostrar que para k=l+1 es cierta también la proposición.

Sabemos que $C_n^{l+1} = C_{n-1}^{l+1} + C_{n-1}^{l}$ entonces por la hipótesis de inducción tenemos:

$C_n^{l+1} = [(n-1)(n-2)\ldots(n-l-1)/(l+1)(l)(l-1)\ldots(2)(1)]$

$+ [(n-1)(n-2)\ldots(n-l)/(l)(l-1)(l-2)\ldots(2)(1)] =$

$[(n-1)(n-2)\ldots(n-l-1) + (l+1)(n-1)(n-2)\ldots(n-l)]/$

$[(l+1)(l)(l-1)(l-2)\ldots(2)(1)] =$

$[(n-1)(n-2)\ldots(n-l)](l+1+n-l-1)/(l+1)(l)(l-1)\ldots(2)(1) =$

$[(n)(n-1)(n-2)\ldots(n-l)]/[(l+1)(l)(l-1)\ldots(2)(1)] =$

$[n(n-1)(n-2)\ldots(n-l+1-1)]/[(l+1)(l)(l-1)\ldots(2)(1)]$

Que es lo que se quería demostrar.

De manera que ahora ya tenemos una fórmula para contar el número de subconjuntos de k elemento+s de un conjunto con n elementos y con ésta podemos responder a la pregunta de ¿cuántos subconjuntos tiene un conjunto con n elementos? que había quedado pendiente en el primer capítulo.

Ahora sí, la respuesta por este camino es:

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n$

Donde $C_n^0 = 1$ ya que es el subconjunto que no tiene elementos o sea el conjunto vacío.

Por lo que tenemos:

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$

PROBLEMA.

Si por alguna razón nos interesara ahora el orden en que aparecen los elementos, ¿cuántas parejas podemos tener de un conjunto con n elementos?

Como nos interesa el orden, son diferentes las parejas (a,b) y la (b,a) de modo que por cada pareja que tengamos (de las que ya sabíamos contar) ahora tendremos 2 parejas distintas, esto es:

Si C_n^2 es el número de parejas no ordenadas, entonces $2C_n^2$ es el número de parejas ordenadas distintas que podemos tener, o sea:

$2C_n^2 = 2(n(n-1)/2 = n(n-1)$

Y si ahora nos preguntásemos el número de ternas ordenadas de un conjunto con n elementos, lo que hacemos es: como ya conocemos el número de ternas no ordenadas, ahora solo tenemos que buscar el orden, esto es:

Por ejemplo en un conjunto con 4 elementos sabemos que hay C_4^3 ternas no ordenadas y si queremos contar las ternas ordenadas de ese mismo conjunto, no debemos quitar las repeticiones que quitábamos cuando contamos C_n^3. De manera que si tenemos la terna no ordenada abc, tenemos las ternas ordenadas: acb, bac, cab, bca cba. Así, por cada terna no ordenada se tienen 6 ternas ordenadas distintas, por lo que el número de ternas ordenadas es $6(C_4^3) = 6[(4)(3)(2)/6] = 24$. Y en general el número de ternas no ordenadas de un conjunto con n elementos es $6(C_n^3) = n(n-1)(n-2)$, que es lo mismo si pensamos en el número de parejas ordenadas de un conjunto con n-1 elementos y las combinamos con cada uno de los elementos de un conjunto con n elementos, ya que (n-1)(n-2) son las parejas ordenadas de un conjunto con n-1 elementos y a cada una de ellas la vamos a juntar con uno de los n elementos del conjunto, por lo que el número de ternas ordenadas de un conjunto con n elementos es n(n-1)(n-2).

Ahora para encontrar el número de "cuartetas" ordenadas de un conjunto con n elementos, tenemos:

Ya sabemos el número de "cuartetas" no ordenadas, y sabemos también cuántas son las repeticiones de cada una (que ya contamos en el problema del principio de este capítulo), entonces el número que buscamos es:

$$24(C_n^4) = 24[(n)(n-1)(n-2)(n-3)/(4x3x2)] = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

Si llamamos O_n^k al número de ordenaciones de k elementos tomados de un conjunto con n elementos, tenemos que lo que hemos encontrado hasta ahora es:

$O_n^2 = n(n-1)$, $O_n^3 = n(n-1)(n-2)$ y $O_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3)$

Que son las parejas ordenadas de un conjunto con n elementos, las ternas ordenadas de un conjunto con n elementos y las "cuartetas" ordenadas de un conjunto con n elementos, respectivamente.

Podemos conjeturar entonces que:

$O_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))$

Ahora debemos demostrar la conjetura para cualquier k en los números naturales.

Ya sabemos que si k=2,3,4 la fórmula es cierta, entonces debemos demostrar ahora que, si es verdadera para alguna k entonces es también verdadera para la siguiente, o sea que es cierta para k+1.

Tenemos por hipótesis que $O_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))$.

Tomamos una e esas ordenaciones y le adjuntamos uno de los n-k elementos que sobran en el conjunto y tenemos asi una ordenación de k+1 elementos, esto lo podemos hacer con cada uno de los n-k elementos, y para cada una de las ordenaciones de k elementos tomados del conjunto con n elementos. Por lo que:

$$O_n^{k+1} = O_n^k\ (n-k) = [n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))](n-k) = n(n-1)(n-2)...(n-[(k+1)-1]) = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))$$

Que es a lo que queríamos llegar, por lo tanto es cierto que para toda k en los números naturales se tiene:

$O_n^k = n(n-1)(n-2). . .(n-(k-1))$

Tenemos ya algunas fórmulas muy usadas en la Combinatoria y que nos ayudarán a resolver problemas cuyo comportamiento sea semejante a los que ya hemos resuelto. Esto es, existen problemas "tipo" para los cuales conviene tener una fórmula que nos ayude a avanzar en la resolución del problema, una vez que hemos analizado que su comportamiento es el mismo. Por ejemplo, ya hemos resuelto con todo detalle el problema de contar el número de ternas de un conjunto con n elementos, si por alguna razón, el procedimiento para resolver otro problema nos lleva a tener que contar C_n^3, ya no tenemos que volver a hacerlo "a pie", sino que ya podemos aplicar la fórmula que hemos demostrado que vale para cualquier valor de n en los números naturales. Lo mismo sucede con la fórmula de O_n^k, ya que existen muchos problemas que se resuelven de la misma manera y teniendo una fórmula general, podemos avanzar mucho mejor en los problemas de las matemáticas. Lo que debemos tener claro es que cuando querramos aplicar tal o cual fórmula para resolver un problema, debemos estar seguros de que el comportamiento del problema es totalmente equivalente al de aquél que generó la fórmula o aquél por medio del cual la descubrimos o bien a aquél que nos sirvió para demostrarla.

PROBLEMA

En un campeonato de fútbol participan 17 equipos. Los premios son medallas de oro, de plata y de cobre para los 3 primeros lugares. Suponiendo que no puede haber empates, ¿de cuántas formas distintas pueden ser distribuidas las medallas?

Representemos en un casillero los 3 lugares de los ganadores como sigue:

ORO PLATA COBRE

Para que la primera casilla se ocupe, hay 17 posibilidades distintas de hacerlo (cualquiera de los 17 equipos). Una vez que un equipo ha ocupado el primer lugar, hay 16 posibilidades de ocupar el segundo lugar y por último ya que hay 2 equipos designados como primer y segundo lugar, solo quedan 15 posibles equipos para ocupar el tercer lugar. Dado que por cada uno de los 17 posibles equipos para ocupar el primer lugar existen los 16 posibles para ocupar el segundo y por cada uno de estos existen los 15 para el tercero, tenemos que el número de formas de escoger los 3 lugares es:

$(17)(16)(15) = 4080$

Notemos que este es un caso particular de las O_n^3 , ya que estamos buscando ternas ordenadas de un conjunto. Esto es:

Sea $\{a_1, a_2, \ . \ . \ . \ , a_{17}\}$ el conjunto de los 17 equipos. Las ternas $a_1 a_2 a_3$ y $a_2 a_1 a_3$, por ejemplo, son distintas para este problema ya que no es lo mismo que a_1 tenga la medalla de oro y a_2 la de plata, que a_1 tenga la de plata y a_2 la de oro; por lo tanto si nos interesa el orden de las ternas. Entonces queremos encontrar O_{17}^3 que por la fórmula que ya conocemos es:

$O_{17}^3 = (17)(17-1)(17-2) = (17)(16)(15) = 4080$

Por lo que hay 4080 formas distintas de distribuir las medallas.

Con las fórmulas que hemos encontrado, podemos resolver muchos problemas clásicos en el análisis combinatorio, solo que no debemos buscar encajar luego luego una fórmula así como así, debemos analizar el problema y solo después de esto aplicar las fórmulas si es que alguna nos sirve, o alguna combinación de ellas, etc.

Veamos algunos problemas mas para ir avanzando en el análisis y comportamiento de los problemas y en la aplicación de las fórmulas.

PROBLEMA.

Dada una pareja como (a,b) ¿de cuántas formas se pueden ordenar sus elementos?

Solo de 2 formas: (a,b) y (b.a).

Si se tiene una terna como (a,b,c) ¿de cuántas formas se pueden ordenar de 3 en 3 sus elementos?

Haciendo las ternas tenemos:

(a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b) y (c,b,a)

De 6 formas distintas.

Y si tenemos un a n-ada, ¿de cuántas formas se pueden ordenar de n en n sus elementos?

Tenemos una forma para pensar cómo hacerlo en general.

Dada una cajita con n lugares ¿de cuántas formas podemos llenarla tomando a sus elementos de un conjunto que tiene n elementos?

1a. 2a. 3a. . . . na.

___ ___ ___ . . .

Para llenar la primera se tienen n posibilidades, pero una vez lleno el primer lugar, se tienen solo n-1 elementos para escoger uno que llenará el segundo lugar, para llenar el tercer lugar ya solo se tienen n-2 posibilidades y así sucesivamente para los demás lugares.

Por ejemplo. Dada una cajita con 4 lugares, tenemos 4 maneras de llenar el primer lugar, pero una vez lleno éste, tenemos 3 formas de llenar el segundo lugar, 2 formas para llenar el tercero y solo una para llenar el cuarto lugar. O sea:

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Haciendo, como antes, una tabla para tratar de descubrir el comportamiento tenemos:

Sea P_n el número de formas distintas de permutar los n elementos de un conjunto. Es decir, sea P_n= las permutaciones de un conjunto con n elementos, que es lo mismo que veníamos llamandole ordenaciones de n en n de un conjunto con n elementos.

P_1 es claro que es 1

P_2 ya lo habíamos calculado y son 2

P_3 también habíamos contado ya, y son 6

P_4 nos dió como resultado 24

Entonces tenemos la siguiente tabla:

n	P_n
1	1
2	2
3	6
4	24

¿Cuál es el incremento de un renglón a otro?

n	P_n	INCREMENTO
1	1	–
2	2	x 2
3	6	x 3
4	24	x 4

Vemos que la regla de crecimiento es, el renglon anterior multiplicado por la n en cada renglón.

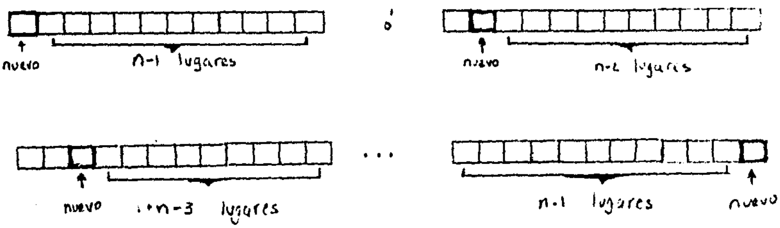
Ya contamos una a una las ternas, y nos dió 6 formas distintas de ordenarlas. Cuando tenemos 4 elementos a ordenar, resulta que para cada uno de estos 4 elementos existen 6 formas de ordenar los otros 3 elementos del conjunto, o sea:

Sea {a,b,c,d} el conjunto a ordenar, para tener el conjunto ordenado con el elemento a en primer lugar se tienen 6 posibilidades que son las formas de ordenar el conjunto {b,c,d}, el número de ordenaciones que tienen en primer lugar al elemento b también son 6 (las formas de ordenar el conjunto {a,c,d} y así sucede para cada uno de los cuatro elementos, teniendo como resultado; 4 elementos del conjunto, por 6, que es el número de formas de ordenar un conjunto con 3 elementos, nos dan 24 formas.

El resultado que acabamos de observar nos lleva a formular la siguiente conjetura:

$P_n = n(P_{n-1})$

Si ya tenemos escritas las permutaciones de n-1 elementos y nos dan un elemento mas, las permutaciones de n elementos serán $n(P_{n-1})$ porque por cada una de las permutaciones de n-1 elementos hay n formas de incluir al nuevo elemento: al principio, en el segundo lugar, en el tercero, . . . , en el último



Y como esto sucede para cada una de las distintas formas de permutar un conjunto de n-1 elementos, se tiene que es cierto que $n(P_{n-1}) = P_n$.

Entonces ya sabemos calcular P_n para cualquier n . Por ejemplo para permutar un conjunto con 5 elementos tenemos:

$P_5 = 5(P_4) = 5(24) = 5x4x3x2$

Ahora como notación escribiremos:

$P_n = nx(n-1)x(n-2)x. . .x3x2x1 = n!$

n! se llama "factorial de n" ó "n factorial"

PROBLEMA.

¿Existe alguna fórmula para calcular n! ?

Cuando vimos el segundo problema del Pin Pon, teniamos que hacer la suma 1+2+3+...+n y encontramos una fórmula (n(n+1)/2 que nos proporcionaba rápidamente este resultado. Ahora nos preguntamos si existirá alguna fórmula para encontrar rápidamente el producto 1x2x3x...xn.

¿Podrá el lector encontrar alguna fórmula que nos proporcione al menos una buena aproximación a n!?

Sabemos que existen fórmulas aproximadas para calcular el producto de los n primeros números naturales, una de ellas, que nos proporciona una buena aproximación a n! es la que se conoce como la fórmula de Stirling[10], que es la siguiente:

$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}$

Una convención que debemos hacer para que la igualdad $n! = n(n-1)!$ que hemos obtenido siga siendo válida para todos los números naturales es, que cero factorial debe ser igual a 1, esto es:

$0! = 1$

Es interesante la discusión en torno a esta convención. P_0 = las permutaciones de un conjunto con cero elementos y como no tiene elementos la única forma de ordenarlos es dejarlos como estan, o sea P_0 es 1. También para n=1 debe suceder que $P_1 = 1(P_0)$ y como 1! ya sabemos que es 1 entonces: $1! = 1(0!) = 1$ entonces también por este lado vemos que 0! debe ser 1.

Por necesidad y para "simplificarse las cosas" se conviene que $0! = 1$

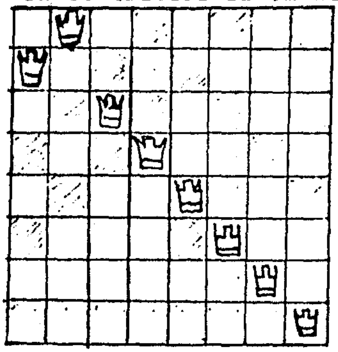
Ejemplo.

¿De cuántas formas se pueden colocar en el tablero de ajedrez 8 torres de tal forma que no esten en una misma horizontal o en una misma vertical?

Hagamos una sucesión de 8 cajitas. Cada una representa las hileras verticales del tablero de ajedrez y numeremos de 1 a 8 a las hileras horizontales del tablero. El problema ahora consiste en llenar las cajitas con los números del 1 al 8. Así, una disposición como 2,1,3,4,5,6,7,8 significa que en la primera vertical se encuentra una torre en el

(10) Stirling, James. Matemático inglés (1692-1770).

segundo lugar, en, la segunda vertical está una torre en el primer lugar, y así sucesivamente, o sea que la posición que se describe en el tablero es la siguiente:



Y es claro que es una de las soluciones al problema.

Entonces el problema consiste en contar ¿de cuántas formas se pueden llenar 8 cajitas con los números del 1 al 8? o bien, ¿de cuántas formas se pueden permutar 8 elementos? Y la respuesta nos la da luego luego la fórmula de las permutaciones o sea:

$P_8 = 8! = 8x7x6x5x4x3x2x1 = 40320$ formas de hacerlo.

PROBLEMA.

¿Cuántos miembros puede tener un club si en las credenciales solo es posible tener números con 5 cifras?

Empecemos por preguntarnos ¿cuántos miembros tendría el club si solo se permitieran números de credenciales con 1 cifra?

Es claro que el club tendría como máximo solo 10 miembros, o sea los que tuvieran las credenciales: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 y 9.

Ahora, si se permitiese que las credenciales tuviesen números de 2 cifras, ¿cuántos miembros tendría como máximo el club?

Podemos de inmediato pensar en los números de 2 cifras con dígitos del cero al nueve, y tenemos así que las credenciales permitidas serían: 00, 01, 02, 04, ... ,98 y 99. Y esta lista, sabemos que contiene 100 elementos. Entonces el club tendría como máximo 100 miembros.

Si se permitiera que las credenciales tuvieran números de 3 cifras, ¿cuántos miembros podría tener el club? De nuevo pensamos de inmediato en los números 000, 001,002, 003, 004, ... , 100, 101, 102, ... , 998 y 999. Y el número total de ellos es 1000, de modo que el club podría tener hasta 1000 miembros.

Si siguiéramos de esta manera, para 4 cifras tendríamos que contar cuantos números hay en la lista siguiente: 0000, 0001, 0002, ... , 9998 y 9999. Y ya sabemos que en esta lista hay 10000 números (desde el cero hasta el 9999). Por lo que podría haber 10000 miembros en el club con credenciales de 4 cifras.

Hagamos una tabla de los resultados que hemos obtenido:

# DE CIFRAS PERMITIDAS	# DE MIEMBROS DEL CLUB
1	10
2	100
3	1000
4	10000

¿Cuánto deberá ser para 5 cifras?

Es de esperarse que el resultado sea 100000 por lo que se observa en la tabla. Y efectivamente resulta que los números de 5 cifras son los de la lista: 00000, 00001, 00002, ... , 99999 que son exactamente 100000 (desde el 0 hasta el 99999).

Y con esto damos respuesta a la pregunta y sabemos que en el club puede haber a lo más 100000 miembros.

Ahora, si se nos pregunta ¿cuántos miembros puede haber en un club donde las credenciales tienen un número k de cifras? ¿cuál será nuestra respuesta?

Observando la tabla tenemos una hipótesis que se comprueba en estos 5 casos, que es:

Dado un número de cifras permitido n, el número de miembros que puede tener el club es 10^n.

Entonces si nuestra hipótesis fuera cierta para cualquier número natural, ya tendríamos la respuesta y contestaríamos simplemente que el club podría tener hasta 10^k miembros.

Ahora veamos el problema con otro esquema. Por ejemplo, para contar cuántos miembros puede haber en el club si solo se permiten credenciales con 2 cifras, podemos pensar que los números de credenciales se forman mediante llenar con cualquiera de los 10 dígitos, los lugares de un casillero de 2 lugares. Esto es, sea _ _ el casillero con 2 lugares en donde colocaremos los números. Debemos contar de cuántas formas distintas podemos colocar los 10 dígitos en los 2 lugares del casillero.

Para colocar una cifra en el primer lugar tenemos cualquiera de los 10 dígitos (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) y una vez que hemos colocado la primera cifra, tenemos otras 10 opciones para llenar la segunda casilla (de nuevo cualquiera de los 10 dígitos). Nótese que no importa cuál de las 10 cifras hayamos escogido en el primer lugar pra que en el segundo también tengamos 10 cifras para escoger, ya que podemos repetir los números, esto es, el número 77 por ejemplo puede ser un número de credencial, y no importa que se haya repetido la elección para el primer lugar con la elección para el segundo.

De modo que por cada una de las 10 cifras que podamos escoger en el primer lugar, tenemos 10 cifras para escoger en el segundo. En consecuencia, el número de credenciales con 2 cifras que puede haber es $10 \times 10 = 10^2 = 100$.

Para el caso en que se permita tener credenciales con 3 cifras, tenemos un casillero con 3 lugares. Para llenar el primer lugar hay 10 opciones (los 10 dígitos) y por cada uno de los dígitos que escojamos hay 10 opciones para llenar la segunda casilla; una vez llenas las 2 primeras, hay 10 opciones por cada una de las elecciones hechas para las 2 anteriores, para llenar la tercera casilla. Esto es, hay $(10 \times 10) \times 10 = 10^3 = 1000$ formas distintas de llenar tres casillas con uno de los 10 dígitos en cada una. O sea si se permiten credenciales de 3 cifras puede haber hasta 1000 miembros en el club.

Siguiendo así, si se permiten credenciales con k cifras tenemos que llenar un casillero de k lugares y en cada uno podemos poner cualquiera de los 10 dígitos. Para llenar la primera casilla hay 10 opciones, para la segunda (no importando que haya sucedido en la primera) hay 10 opciones, para la tercera también hay 10 y así sucesivamente para la k'ésima hay 10 opciones también, independientemente de qué hayamnos escogido en las k-1 anteriores. De manera que se tienen un total de $10 \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10 = 10^k$ formas diferentes de llenar el casillero y por consiguiente en el club puede haber hasta 10^k miembros.

Si por alguna razón, en el número de credenciales del club no se permitiese que hubiera ningún número con la cifra 8, ¿cuántos miembros podría tener el club si el número de cifras puede ser k?

El problema cambia solo en el número de opciones que tenemos para llenar los lugares del casillero. Ahora solo hay 9 opciones para cada uno de los k lugares del casillero, de modo que el número de credenciales sin algún 8 es:
$9 \times 9 \times 9 \times \ldots \times 9 = 9^k$.

Si llamamos OR_n^k al número de ordenaciones con repetición de n elementos tomados de k en k, notemos que lo que hemos hecho en el problema de las credenciales del club, es calcular las ordenaciones con repetición de 10 elementos tomados de 5 en 5 en el primer caso y las ordenaciones con repetición de 9 elementos tomados de k en k en el segundo, o sea: OR_{10}^5 en el primero y OR_9^k en el segundo.

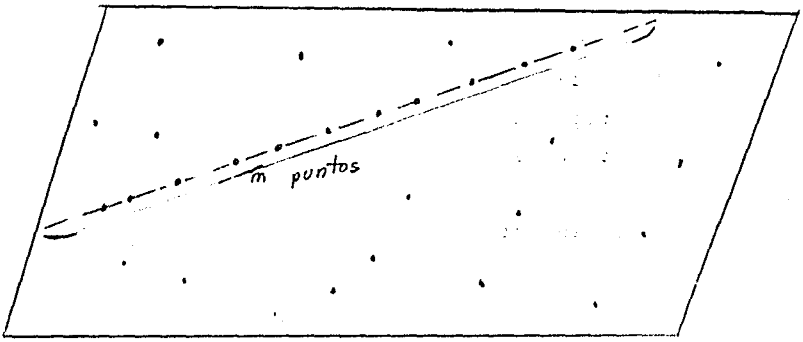
Nótese que se llaman ordenaciones con repetición porque está permitido repetir los elementos en una ordenación, el número de veces que sea necesario, es decir, para el primer caso del problema de las credenciales, los números 12312, 33312 y 33333 pueden ser números de credenciales.

Nótese también que por todo lo que hemos hecho, hemos demostarado que $OR_n^k = n^k$

Dejamos como ejercicio para el lector demostrarlo por inducción.

PROBLEMA.

Se tienen en el plano n puntos de los cuales ninguna terna es colineal, excepto m puntos que pertenecen a una recta.



¿Con cuántas rectas podemos unir estos puntos?

Si no se tuviera la restricción de los m puntos colineales, con los n puntos tendríamos que formar todas las parejas, o sea C_n^2 (las posibles rectas). A este número tenemos que restarle las parejas que forman entre si los m puntos colineales, que son C_m^2 y a que por ser colineales solo definen una recta y no C_m^2 rectas. Y por último debemos sumar la recta que definen los m puntos colineales. Por lo que el número de rectas con las cuales podemos unir estos puntos es:

$$C_n^2 - C_m^2 + 1$$

Otra pregunta para este mismo problema es: ¿Cuántos triángulos distintos podemos formar con vértices en dichos n puntos?

Sin tomar en cuenta la restricción de los m puntos colineales, el número de triángulos es C_n^3, pero si tomamos en cuenta la restricción, tenemos que restarle el número de triángulos que no es posible que se formen, esto es, las combinaciones de m elementos tomados de 3 en 3 porque las ternas de los puntos que son colineales no forman triángulos, por lo tanto el número de triángulos es:

$$C_n^3 - C_m^3$$

PROBLEMA.

Demostrar que $\Sigma(-1)^k C_n{}^k$ con $k=0,1,\ldots,n$ es cero para toda n en los números naturales.

Como siempre, empecemos por hacer una lista con los primeros casos para buscar un procedimiento general.

n=0 se tiene: $(-1)^0 C_0{}^0 = 1x0 = 0$

n=1 Tenemos: $(-1)^0 C_1{}^0 + (-1)^1 C_1{}^1 = 1 - 1 = 0$

n=2 $(-1)^0 C_2{}^0 + (-1)^1 C_2{}^1 + (-1)^2 C_2{}^2 = 1 - 2 - 1 = 0$

n=3 $(-1)^0 C_3{}^0 + (-1)^1 C_3{}^1 + (-1)^2 C_3{}^2 + (-1)^3 C_3{}^3 = 1-3+3-1= 0$

n=4 $(-1)^0 C_4{}^0 + (-1)^1 C_4{}^1 + (-1)^2 C_4{}^2 + (-1)^3 C_4{}^3 + (-1)^4 C_4{}^4 =$
$1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$

n=5 $\Sigma(-1)^k C_5{}^k$ con $k=0,1,\ldots,5$ $= 1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 =0$

Vemos que en general hay 2 casos: cuando n es par y cuando n es impar.

Si n es impar, tenemos n+1 sumandos de los cuales (n+1)/2 son positivos y (n+1)/2 son negativos y además por la identidad $C_n{}^k = C_n{}^{n-k}$ tenemos que los (n+1)/2 negativos son exactamente los mismos que los (n+1)/2 positivos, por lo tanto la suma es efectivamente cero.

Ahora veamos qué sucede si n es par.

Sea n=2m por lo tanto hay 2m+1 sumandos y el de enmedio es el sumando es el sumando número m+1 .

De los 2m+1 sumandos, m de ellos son iguales, incluso en signo, por pares (ya que $C_n{}^k = C_n{}^{n-k}$) y queda sin pareja el sumando de enmedio, entonces tenemos:

$$\Sigma(-1)^k C_n{}^k \text{ con } k=0,1,\ldots,n = 2(\Sigma(-1)^k C_n{}^k \text{ con } k=0,1,\ldots,m-1) + (-1)^m C_n{}^m =$$

Sustituyendo en cada sumando la fórmula $C_n{}^k = C_{n-1}{}^{k-1} + C_{n-1}{}^k$ tenemos:

$$2[C_{n-1}{}^0 - (C_{n-1}{}^0 + C_{n-1}{}^1) + (C_{n-1}{}^1 + C_{n-1}{}^2) + \ldots + (-1)^{m-1}(C_{n-1}{}^{m-2} + C_{n-1}{}^{m-1})] + (-1)^m (C_{n-1}{}^{m-1} + C_{n-1}{}^m) =$$

De donde, quitando paréntesis tenemos:

$$2[C_{n-1}{}^0 - C_{n-1}{}^0 - C_{n-1}{}^1 + C_{n-1}{}^1 + C_{n-1}{}^2 - C_{n-1}{}^2 - \ldots + (-1)^{m-1} C_{n-1}{}^{m-2} + (-1)^{m-1} C_{n-1}{}^{m-1}] + (-1)^m (C_{n-1}{}^{m-1} + C_{n-1}{}^m) =$$

Cancelando términos semejantes:

$$2(-1)^{m-1} C_{n-1}{}^{m-1} + (-1)^m C_{n-1}{}^{m-1} + (-1)^m C_{n-1}{}^m =$$

Sacando como factor común a $(-1)^{m-1}$ resulta:

$(-1)^{m-1}(2C_{n-1}{}^{m-1} - C_{n-1}{}^{m-1} - C_{n-1}{}^{m}) =$

$(-1)^{m-1}(C_{n-1}{}^{m-1} - C_{n-1}{}^{m})$ $\quad$ y como $n=2m$

$(-1)^{m-1}(C_{2m-1}{}^{m-1} - C_{2m-1}{}^{m}) = (-1)^{m-1}(0) = 0$ ya que:

$C_{2m-1}{}^{m-1} = C_{2m-1}{}^{2m-1-(m-1)} = C_{2m-1}{}^{m}$ (o sea que m es el complemento de m-1 para tener n-1 elementos)

Por lo tanto queda demostrado en general que

$\Sigma(-1)^k C_n{}^k$ $_{\text{con } k=0,1,\ldots,n} = 0$

Observación.

Cuando veamos la fórmula del binomio de Newton, se verá otra demostración de este problema. También con los ejercicios 18 y 19 del final de este capitulo, se puede encontrar otra forma de demostrar este hecho.

PROBLEMA.

Demostrar que $C_n^k = n! / (n-k)!\, k!$

Sabemos que $C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots(3)(2)}$

entonces multiplicamos arriba y abajo por $(n-k)!$ y tenemos:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)(n-k)!}{k(k-1)(k-2)\ \ldots\ (3)(2)(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Así, tenemos ya otra manera de escribir a C_n^k.

RECORDANDO EL SEGUNDO PROBLEMA DEL PIN PON.

Recordando el segundo problema del Pin Pon en donde se enfrentan todos los jugadores contra todos, veamos ahora una interpretación diferente que observó un alumno nuestro.

Suponiendo que una secretaria nos ayuda a hacer tarjetas que indiquen los 2 nombres de los participantes en un partido, esto es, en cada tarjeta estarán escritos 2 nombres (estas serán las tarjetas de participaciones, decia el alumno).

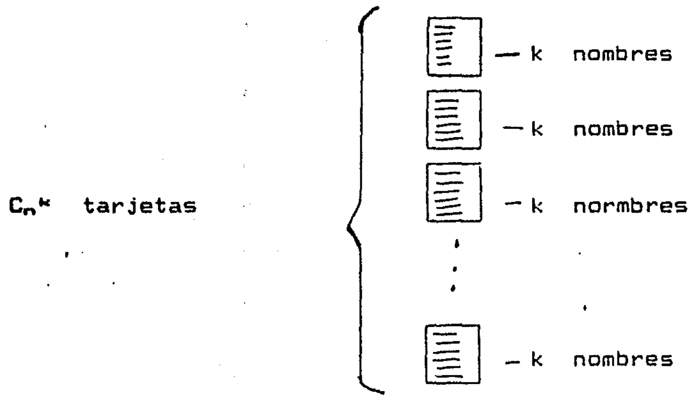
Ya sabemos, por lo que hemos discutido antes, que cuando la secretaria haga todas las tarjetas de participaciones habrá en total $n(n-1)/2$ tarjetas que son el número de partidas que se efectuan cuando hay n jugadores inscritos. Ahora contémoslo de otra manera.

Cuando la secretaria haya terminado de hacer las tarjetas, habrá escrito $n(n-1)$ nombres en total, ya que hay n participantes y cada uno debe jugar contra $n-1$ jugadores. Esto es, por ejemplo el nombre de Juan Pérez lo ha escrito $n-1$ veces, una por cada partida que juega Juan Pérez, y esto sucede para cada uno de los n jugadores.

El número de tarjetas es $C_n^2 = (n)(n-1)/2$, que ya sabíamos, y 2 nombres en cada tarjeta, por lo tanto tenemos que:

$n(n-1) = 2(C_n^2)$ que es el número de nombres que ha escrito en total la secretaria.

En esta manera de ver el problema, tenemos en cada tarjeta una pareja de jugadores y en total el número de tarjetas es el número de parejas que pueden formarse de un conjunto con n elementos que es C_n^2. ¿Qué sucederá si ahora queremos ver cuál es la relación que hay con C_n^k ? ó mas bien, ¿cuántos nombres escribirá la secretaria si ahora se tienen C_n^k tarjetas en las cuales hay k nombres en cada una?



Hay k nombres en cada tarjeta y son en total C_n^k tarjetas, por lo tanto hay escritos en total $k(C_n^k)$ nombres.

Pero ¿cuántas veces está escrito cada nombre?

Cada nombre está escrito en una tarjeta junto con k-1 nombres más, pero en esos k-1 nombres deben estar todas las combinaciones de n-1 nombres escogidos de k-1 formas, esto es, de los n nombres quitamos el que nos inteeresa y formamos todas las formas de escoger k-1 nombres con el resto y para cada una de estas formas existe una tarjeta en donde estan escritos los k-1 nombres y también el que quitamos al principio. O sea que cada nombre está escrito en C_{n-1}^{k-1} tarjetas. Y como tenemos en total n nombres, entonces la secretaria ha escrito en total $n(C_{n-1}^{k-1})$ nombres. De donde tenemos que:

$k\ C_n^k = n\ C_{n-1}^{k-1}$ para k y n en los números naturales.

Anora, ¿cómo lo demostramos de otra forma?

Demostración.

Sabemos que $C_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)/(k)(k-1)\ldots(2)(1)$

entonces $k(C_n^k)=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)k\ /(k)(k-1)\ldots(2)(1)=$

$n[(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)]/(k-1)(k-2)\ldots(2)(1) = nC_{n-1}^{k-1}$

Tenemos ahora una fórmula combinatoria que puede sernos útil después.

PROBLEMA.

Demostrar por fórmula, por inducción y/o conceptualmente que

$$C_n^{m+1} = [(n-m)/(m+1)]C_n^m$$

Demostración.

Por la fórmula de combinaciones tenemos:

$$C_n^{m+1} = n(n-1)(n-2)...(n-m-1+1)/(m+1)(m)(m-1)...(2)(1) =$$
$$n(n-1)(n-2)...(n-m-1+2)(n-m)/(m+1)(m)(m-1)...(2)(1) =$$
$$[(n-m)/(m+1)]C_n^m$$

Conceptualmente:

Demostración.

Tenemos un conjunto con n elementos y formamos los subconjuntos de m elementos (con $m \leq n$) o sea C_n^m. Si a cada una de las combinaciones de m elementos le adjuntamos sucesivamente un elemento de los restantes (n-m), que no aparecieron en dichas combinaciones, formaremos todas las posibles combinaciones de n elementos tomados de (m+1) en (m+1) elementos, o sea C_n^{m+1} .

Cuando tomamos en esa forma las nuevas combinaciones, cada una de ellas aparece m+1 veces repetida. Para verlo mejor veamos qué ocurre con una combinación particular, por ejemplo la combinación (1,2,3,...,m,m+1) esta puede aparecer de cualquiera de las m+1 formas siguientes:

A la combinación (2,3,...,m,m+1) agregándole el elemento 1,

a la combinación (1,3,...,m,m+1) agregándole el elemento 2,

.

.

.

a la combinación (1,2,3,...,m-1,m) agregándole el elemento m+1.

De donde vemos que se repite m+1 veces cada una, entonces tenemos que dividir el número de combinaciones encontradas por las m+1 repeticiones.

También tenemos que cada uno de las combinaciones de C_n^m genera n-m nuevas combinaciones de m+1 elementos con el procedimiento antes descrito por lo que tenemos que se forman $(n-m)C_n^m$ nuevas combinaciones de m+1 elementos pero, por lo que se vió en el párrafo anterior cada una de ellas está repetida m+1 veces, por lo tanto tenemos:

$$C_n^{m+1} = [(n-m)C_n^m]/(m+1) = [(n-m)/(m+1)]C_n^m$$

Tenemos así, una nueva forma de encontrar C_n^{m+1} a partir de C_n^m.

o

PROBLEMA.

Demostrar, usando lo que ya se sabe de combinatoria, que

$$kC_n^k = (n-k+1)C_n^{k-1}$$

Demostración.

Sabemos que $C_n^{m+1} = [(n-m)/(m+1)]C_n^m$

entonces $(m+1)C_n^{m+1} = (n-m)C_n^m$

si $k=m+1$ entonces $m=k-1$ y tenemos

$$kC_n^k = (n-k+1)C_n^{k-1}$$

por lo tanto tenemos también

$$(n-k+1)C_n^{k-1} = nC_{n-1}^{k-1}$$

¿Podrémos demostrarlo conceptualmente?

Recordando el problema de las rutas de una ciudad: TRIANGULO DE PASCAL Y FORMULA DEL BINOMIO.

Recordemos que en el problema de las rutas en una ciudad (que vimos en el capitulo I), dejamos pendiente la pregunta ¿cuántos caminos minimos hay para llegar a la esquina (i,j)? sea cual sea la esquina de que se trate y sin construir el esquema de todas las esquinas anteriores a ella.

Una vez que hemos encontrado en general cuánto es C_n^k ya podemos encontrar la respuesta que buscábamos.

Habíamos planteado que era necesario encontrar el número de formas de colocar i flechas hacia la derecha y j flechas hacia arriba en un casillero de $i+j$ lugares y esto lo podemos escribir como C_{i+j}^i que es lo mismo que C_{i+j}^j, entonces el número de caminos mínimos para llegar a la esquina (i,j) es:

$$C_{i+j}^i = \frac{(i+j)!}{i!j!}$$

Y siguiendo con el problema de las rutas de una ciudad, también allí vimos que podíamos tener un esquema con el número de caminos mínimos para llegar a cada esquina, como sigue:

1	5	15	35	70
1	4	10	20	35
1	3	6	10	15
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

número de caminos mínimos en cada esquina

De donde podemos ver que se obtiene el triángulo conocido como triángulo de Pascal[11], y que quizá todos ya conozcan y recuerden como se calcula o incluso, hasta recuerden para qué sirve.

En el problema que estamos recordando, encontramos que para llegar a una esquina dada, se necesita sumar el # de caminos mínimos para llegar a la esquina de la izquierda de ella mas el # de caminos mínimos para llegar a la esquina de abajo de ella; notemos que esto no es otra cosa mas que la regla para encontrar el triángulo de Pascal. Si en el esquema anterior, giramos hacia la izquierda unos 45°, lo que obtenemos es el siguiente esquema:

1 6 15 20 15 6 1
1 5 10 10 5 1
1 4 6 4 1
1 3 3 1
1 2 1
1 1
1

Que ahora sí podemos reconocer como el triángulo de Pascal que generalmente nos enseñan en el bachillerato, solo que invertido.

Y por lo que hemos visto en el párrafo anterior, el triángulo podemos escribirlo como:

$$C_6^2 \quad C_6^3 \quad C_6^4$$
$$C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4$$
$$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$$
$$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$$
$$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$$
$$C_1^0 \quad C_1^1$$
$$C_0^0$$

[11] Pascal, Blaise. Filósofo, matemático, teólogo y escritor francés. (1623-1662). Ver serie Sigma, vol.1 pp.61-64; vol. 4 pp.224-225.

Que si lo volvemos a girar como estaba antes y lo invertimos, tenemos el siguiente esquema:

C_0^0	C_1^1	C_2^2	C_3^3	C_4^4
C_1^0	C_2^1	C_3^2	C_4^3	C_5^4
C_2^0	C_3^1	C_4^2	C_5^3	C_6^4
C_3^0	C_4^1	C_5^2	C_6^3	C_7^4
C_4^0	C_5^1	C_6^2	C_7^3	C_8^4

Notemos que en estos dos esquemas y por la regla que se ha discutido en el problema de las rutas de una ciudad, se vuelve a ver la siguiente igualdad:

$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Y podemos hacer un esquema mas completo todavia, como sigue:

C_n^k n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1

En donde además podemos reconocer algunos de los números figurados que ya hemos trabajado como son: los números triangulares y los números piramidales. Veamos que en la primera columna del esquema anterior, estan solamente números unos, en la segunda los números naturales, en la tercera, los números triangulares y en la cuarta, los números piramidales. ¿Cuáles serán los que estan en las otras columnas?

Por fórmulas, sabemos que en la quinta columna estan los números $C_n^4 = \dfrac{n!}{4!(n-4)!}$ pero, ¿qué números son esos?

¿Serán también algunos de los números figurados?

Dejemos estas preguntas para pensarlas y que cada uno las trabaje por su cuenta hasta donde cada quien lo quiera.

Continuando con el triángulo de Pascal y sus utilizaciones, ya que por lo general se nos enseña a usarlo en las potencias de un binomio, veamos qué es lo que sucede con un binomio elevado a cualquier potencia.

Como siempre, empecemos por números pequeños.

$(x+y)^1 = x + y$

$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = (x+y)^2(x+y) = (x^2 + xy + yx + y^2)(x+y) =$

$x^3 + xxy + xyx + xy^2 + yx^2 + xy^2 + y^2x + y^3 =$

$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x+y)^4 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(x+y) =$

$x^4 + 3x^2yx + 3x^2y^2 + y^3x + x^3y + 3x^2y^2 + 3xy^3 + y^4$

$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

El coeficiente de cada término podemos encontrarlo de una manera semejante a la que se utilizó en el problema de las rutas de una ciudad, esto es, veamos que en el binomio al cuadrado el coeficiente de xy es el número de formas que podemos escoger un lugar para x en un casillero de 2 lugares ya que el término 2xy salió de sumar xy + yx . En el binomio al cubo, el término $3x^2y$, por ejemplo, salió de sumar los términos: xxy + xyx + yxx. Y en el binomio a la cuarta potencia, el término $4x^3y$ por ejemplo, salió de sumar los términos: xxxy + xxyx + xyxx + yxxx .

Así, veamos que en cada caso el coeficiente es el número de formas que tenemos para escoger un número determinado de x's en un casillero con un número dado de lugares disponibles.

Observemos además que en el binomio al cubo cada uno de los términos tiene el producto de 3 literales, esto es:

$(x+y)^3 = xxx + 3(xxy) + 3(xyy) + yyy$

En el binomio a la cuarta cada término tiene el producto de 4 literales, o sea:

$(x+y)^4 = xxxx + 4(xxxy) + 6(xxyy) + 4(xyyy) + yyyy$

Así, conjeturamos que en el binomio a la quinta potencia cada término tiene el producto de 5 literales por lo que debe tener 6 términos que, aunque no sabemos cuáles son los coeficientes sabemos que son de la forma:

$xxxxx + ?(xxxxy) + ?(xxxyy) + ?(xxyyy) + ?(xyyyy) + ?(yyyyy)$

Entonces ahora tenemos 2 preguntas pendientes: la primera, saber cuál es el coeficiente en cada uno de los términos de un binomio elevado a cualquier potencia y la segunda, saber cuántos términos tiene un binomio elevado a cualquier potencia.

Empezaremos por resolver la segunda pregunta. Sabemos que en el binomio $(x+y)^n$ al menos aparecen los términos x^n y y^n, es más, sabemos que son el primero y el último término respectivamente, pero ¿cuántos son los demás? Cada uno de los términos tiene que ser el producto de n literales porque para elevar $(x+y)^n$ lo que se hace es:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\ \ldots\ (x+y)(x+y)}_{n \text{ veces}}$$

Y para tener un término tenemos que nultiplicar una de las 2 literales en cada binomio por una de las 2 literales de todos los demás. Por ejemplo, el término x^2y^2 del binomio $(x+y)^4$ va a resultar de xxyy ó de xyxy ó de cualquier otro monomio que conste del producto de 2 x's y 2 y's, y lo que quiere decir en xxyy, por ejemplo, es que se escogió x en el primer factor, x en el segundo factor, y en el tercero y y también en el cuarto. Donde $(x+y)(x+y)(x+y)$ y $(x+y)$ son los 4 factores de que hablamos. Entonces siguiendo este razonamiento, que es válido en general, se tiene que cada término de $(x+y)^n$ tiene n literales. Ahora solo tenemos que contar cuántas son las formas que podemos tener para distribuir 2 literales en un producto de n de ellas. Esto podemos pensarlo como: si las n son x's se tiene el término

x^n; si n-1 son x's y 1 es y se tiene el término $x^{n-1}y$, y así sucesivamente hasta que tenemos el término en donde las n son y's qye es y^n; y como tenemos n lugares que pueden estar ocupados por 0,1,2,....,n x's (y por consiguiente por n, n-1,...,1,0 y's) decimos que hay n+1 términos en el binomio $(x+y)^n$. Que son:

$$\underbrace{xx\ldots x}_{n\text{ veces}},\ \underbrace{xx\ldots x}_{n-1\text{ veces}}y,\ \underbrace{xx\ldots x}_{n-2\text{ veces}}yy,\ \ldots\ldots,\ \underbrace{x}_{1\text{ vez}}yy\ldots y,\ yy\ldots y$$

Ahora tenemos que responder a la primera pregunta.

Sabemos que cada uno de los n+1 términos del binomio $(x+y)^n$ tiene el producto de n literales y que si tenemos 2 sumandos que constan de i x's y j y's ambos, podemos agruparlos y considerarlos en un solo término, y esto es por ejemplo en el término $6x^2y^2$ del binomio $(x+y)^4$ proviene de: xxyy + xyxy + xyyx + yxxy + yxyx + yyxx , que son las 6 formas distintas que se tiene de escoger 2 x's y 2 y's de un casillero de 4 lugares.

Entonces en general lo que buscamos para tener el coeficiente de cada término es el número de formas de escoger i lugares (para colocar las x's) de un casillero con n lugares disponibles. O lo que es lo mismo, buscamos cuántas palabras de n lugares con exactamente i x's podemos formar. Esto ya lo habiamos visto al resolver el problema de las rutas de una ciudad, pero ahora trataremos de encontrar la relación entre los coeficientes solamente trabajando con el binomio.

Sabemos que $(x+y)^n$ en su desarrillo tiene la forma:

$$x^n + (?)x^{n-1}y + (?)x^{n-2}y^2 + \ldots + (?)xy^{n-1} + y^n$$

Vamos a ponerles algún nombre a los coeficientes de este binomio y busquémos cuál es la regla que siguen éstos.

Sean $B_n{}^i$ los coeficientes del binomio $(x+y)^n$. O sea:

$$(x+y)^n = B_n{}^0x^n + B_n{}^1x^{n-1}y + \ldots + B_n{}^{n-1}xy^{n-1} + B_n{}^ny^n$$

Ya conocemos $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ de donde sabemos que $B_2{}^0 = 1$, $B_2{}^1 = 2$ y $B_2{}^2 = 1$.

Queremos descubrir cómo son los coeficientes de $(x+y)^3$ partiendo de que ya sabemos $(x+y)^2$ y de allí encontrar en general como se obtiene el siguiente binomio en términos del que ya conocemos.

Veamos cómo se obtiene $(x+y)^3$:

$(x+y)^3 = (B_2^0x^2 + B_2^1xy + B_2^2y^2)(x+y)$

Desarrollando el producto, primero multiplicando por x:

$B_2^0x^2x + B_2^1xyx + B_2^2y^2x$, y luego por y, tenemos:

$B_2^0x^2y + B_2^1xyy + B_2^2y^2y$, y agrupando términos semejantes sumamos como sigue:

$$\begin{array}{lllllll} & B_2^0x^3 + & B_2^1x^2y & + & B_2^2xy^2 & & \\ + & & B_2^0x^2y & + & B_2^1xy^2 & + & B_2^2y^3 \\ \hline & B_2^0x^3 + & (B_2^1+B_2^0)x^2y & + & (B_2^2+B_2^1)xy^2 & + & B_2^2y^3 \end{array}$$

De donde obtenemos:

$B_3^0 = B_2^0$; $B_3^1 = B_2^1 + B_2^0$; $B_3^2 = B_2^2 + B_2^1$ y $B_3^3 = B_2^2$

Y además por otro lado sabemos que:

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ por lo que tenemos: $B_3^0 = 1$; $B_3^1 = 3$; $B_3^2 = 3$ y $B_3^3 = 1$

¿Qué sucederá ahora con $(x+y)^4$?

$(x+y)^4 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(x+y) =$

$$\begin{array}{llllllllll} & x^4 & + & 3x^3y & + & 3x^2y^2 & + & xy^3 & & & \text{(todo por x)} \\ + & & & x^3y & + & 3x^2y^2 & + & 3xy^3 & + & y^4 & \text{(por y)} \\ \hline & x^4 & + & 4x^3y & + & 6x^2y^2 & + & 4xy^3 & + & y^4 & \end{array}$$

Donde el segundo coeficiente se obtuvo sumando el segundo coeficiente del desarrollo al cubo más el primer coeficiente del desarrollo al cubo, en símbolos:

$B_4^1 = B_3^1 + B_3^0$

Ahora debemos plantearlo en general, es decir, debemos asegurarnos que siempre sucede lo mismo y no solo para unos casos particulares.

$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y) =$

$$(B_n{}^0 x^n + B_n{}^1 x^{n-1}y + \dots + B_n{}^i x^{n-i}y^i + \dots + B_n{}^n y^n)(x+y) =$$

$$B_n{}^0 x^{n+1} + B_n{}^1 x^n y + \dots + B_n{}^i x^{n-i+1}y^i + \dots + B_n{}^n xy^n$$
$$+$$
$$B_n{}^0 x^n y + \dots + B_n{}^{i-1} x^{n-i+1}y^i + \dots + B_n{}^{n-1} xy^n + B_n{}^n y^{n+1}$$

$$B_n{}^0 x^{n+1} + (B_n{}^1 + B_n{}^0)x^n y^n + \dots + (B_n{}^i + B_n{}^{i-1})x^{n-i+1}y^i + \dots + (B_n{}^n + B_n{}^{n-1})xy^n + B_n{}^n y^{n+1}$$

Por lo tanto vemos que:

$B_{n+1}{}^0 = B_n{}^0$, $B_{n+1}{}^1 = B_n{}^0 + B_n{}^1$, ... ,

$B_{n+1}{}^i = B_n{}^{i-1} + B_n{}^i$, ... , $B_{n+1}{}^n = B_n{}^{n-1} + B_n{}^n$

$B_{n+1}{}^{n+1} = B_n{}^n$.

Por lo que en general la regla que siguen los coeficientes del binomio $(x+y)^n$ es:

$B_{n+1}{}^i = B_n{}^{i-1} + B_n{}^i$ para $i=0,1,2,\dots,n+1$

donde $B_n{}^{-1}$ y $B_n{}^{n+1}$ no tienen sentido y les damos el valor de cero.

Así, lo que podemos concluir de todo esto es que los números $B_n{}^k$ cumplen con lo siguiente:

$B_0{}^0 = 1$, $B_0{}^k = 0$ para toda k diferente de cero , y $B_{n+1}{}^k = B_n{}^k + B_n{}^{k-1}$ para toda k en los números naturales.

Y resulta que todo esto lo cumplen también los números que conocemos como $C_n{}^k$, entonces concluimos que $B_n{}^k = C_n{}^k$ siempre.

Ya podemos responder a la primera pregunta, el coeficiente del término $x^{n-i}y^i$ es $C_n{}^i$ o bien $C_n{}^{n-i}$ ya que como ya se vió antes $C_n{}^i = C_n{}^{n-i}$.

A la fórmula del desarrollo del binomio $(x+y)^n$ se le llama comúnmente **fórmula del binomio de Newton**, pero esta denominación es incorrecta desde el punto de vista de la historia de las matemáticas, ya que esta fórmula era bien conocida por los matemáticos del Asia Central y en Europa Occidental mucho antes que la conociera Newton[12] .

---

[12] Ver Vilenkin, N. ¿De cuántas formas? Editorial MIR. 1972 p. 122.

PROBLEMA.

Demostrar que $\Sigma(-1)^k C_n^k = 0$ con k= 0,1,2,...,n para toda n en los naturales.

Nòtese que este problema ya se resolvió en los ejercicios de combinatoria, ahora lo demostraremos de otra manera.

Veamos que es suficiente con sustituir $x=1$ y $y=-1$ el la fórmula del binomio de Newton y tenemos:

$0 = (1-1)^n = C_n^0 (1)^n (-1)^0 + C_n^1 (1)^{n-1} (-1)^1 +...+ C_n^n (1)^0 (-1)^n$

$= \Sigma(-1)^k C_n^k$ con $k=0,1,2,...,n$

Con lo que queda demostrada la proposicion.

Tambien relacionado con el binomio de Newton, encontramos en un libro del siglo pasado (que ya no encontramos la pàgina donde estaba el autor, pero si que está editado por la Caja de Ahorros de Francia y que se llama Fundamentos de Algebra), que la regla que proporciona como receta para calcular los coeficientes de un binomio a cualquier potencia es:

"Para encontrar el coeficiente de un tèrmino cualquiera, se multiplica el exponente de x en el tèrmino que precede, por el coeficiente de ese tèrmino, y se divide el producto por el lugar que ocupa este mismo termino"

En general, en los libros antiguos de Algebra, para calcular los coeficientes binomiales, se enseñaba la regla citada arriba.

Si tenemos que hacer $(x+y)^5$ la regla es:

El primer coeficiente es 1 para la potencia 5a. de x, o sea $(1)x^5y^0 = x^5$ es el primer termino de este binomio. Para el coeficiente del segundo termino se toma el coeficiente del primero, se multiplica por el exponente de x en el primero y se divide entre el exponente de y mas uno en el primer tèrmino, esto es: el coeficiente del segundo tèrmino es $1(5)/1 = 5$ por lo que el segundo termino es

$5x^4y^1$. Para el coeficiente del tercer término se multiplica el coeficiente del segundo por el exponente de x en este mismo y se divide entre el exponente de y, mas uno, o sea: $5(4)/2 = 10$ y así, el tercer término es $10x^3y^2$. Y así sucesivamente se tiene una fórmula para construir un binomio a cualquier potencia sin desarrollar el triángulo de Pascal.

Nótese que esta reglita no es otra mas que la fórmula que se demostró en uno de los ejercicios de combinatoria, o sea la igualdad siguiente:

$$C_n^{m+1} = [(n-m)/(m+1)]C_n^m$$

Y además sabemos que el desarrollo del binomio $(x+y)^n$ es:

$$C_n^0x^{n-0}y^0 + C_n^1x^{n-1}y^1 + \ldots + C_n^ix^{n-i}y^i + \ldots + C_n^nx^{n-n}y^n$$

APLICACIONES DE LA COMBINATORIA

PROBABILIDAD

En general, todos tenemos una idea intuitiva de lo que es la probabilidad. Por ejemplo, si lanzamos una moneda al aire, y preguntamos ¿cuál es la probabilidad de que caiga águila o sol?, todos pensaremos que la probabilidad de una u otro es la misma. Es decir, pensamos que con igual probabilidad puede caer águila o sol.

Si nos preguntamos ¿cuál es la probabilidad de que la moneda caiga águila? por ejemplo, de inmediato surge la pregunta ¿cómo podemos calcular esa probabilidad?. Analicemos más este ejemplo para obtener esa probabilidad.

Sabemos que la moneda puede caer solo de una de dos formas, (estamos considerando una moneda "honesta" y no tomaremos en cuenta la posibilidad de que cayera de canto), que son águila o sol, esto quiere decir que de los dos casos posibles estamos interesados en que suceda únicamente uno de ellos. A los casos que nos interesa que sucedan se les llama <u>casos favorables</u>. Y al total de casos que pueden suceder se les llama <u>casos posibles</u>.

La probabilidad en casos como éste, se calcula mediante el cociente de los casos favorables entre los casos posibles. De manera que en caso de la moneda (que estamos analizando) los casos favorables son uno y los casos posibles son dos, entonces para obtener la probabilidad de la moneda caiga águila consideramos el cociente:

casos favorables / casos posibles = 1 / 2 = ½

De esta forma, la probabilidad de que la moneda caiga águila es ½.

Y a su vez, la probabilidad de que la moneda caiga sol es tambien ½, como lo esperábamos intuitivamente.

Oservaciones:

1) En este caso, la probabilidad de los 2 eventos es la misma; en algunos casos, la probabilidad de los diferentes eventos en un experimento, es diferente. No

siempre sucede que la probabilidad de los distintos eventos sea la misma.

2) La suma de las probabilidades de todos los eventos de un experimento es siempre 1.

En este caso solo hay eventos que que pueden ocurrir:: que caiga sol o que caiga águila y la probabilidad de cada uno de estos eventos es ½, entonces se tiene: ½ + ½ = 1 que es la probabilidad de los casos posibles, o sea es la probabilidad de que suceda cualquier evento.

Por la definición misma de probabilidad, notemos que la probabilidad es siempre un número que está entre cero y uno.

Veamos ahora algunos ejemplos sencillos en donde calculemos, con la definicion ya establecida, la probabilidad de algunos eventos en varios experimentos.

PROBLEMA.

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado (honesto), caiga el número 6?

Los casos posibles son claramente 6. Y los casos favorables sólo uno, por lo que la probabilidad que se nos pregunta es 1/6 .

¿Cuál es la probabilidad de que caiga el 5?

Es claro que ésta probabilidad es también 1/6.

Notemos que en este experimento también sucede que la probabilidad de cada evento (que caiga 1, 2, 3, 4, 5 ó 6) es la misma, es decir, la probabilidad de que caiga cualquiera de los números es 1/6 para cada uno. Comprobemos de paso, que $1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 6(1/6) = 1$ que es la probabilidad de los casos posibles.

Ahora, si el experimento consiste en lanzar 2 dados , ¿Cuál es la probabilidad que caiga el número 12?.

Para que uno de los dados caiga en 6,, ya vimos que la probabilidad es 1/6 y para que el otro dado caiga en 6 también, la probabilidad es 1/6. Entonces la probabilidad de que caigan 12 es $(1/6)(1/6) = 1/36$. Se deben multiplicar las probabilidades, ya que por cada una de las posibles caras en que puede caer el primer dado, se tienen las 6 posibles caras en que puede caer el segundo dado; esto es, para que caiga 6 en el segundo dado, no importa que es lo que haya sucedido en el primero, se tiene una probabilidad de 1/6 .

Ahora veamoslo de otra forma.

Si queremos que al lanzar 2 dados caiga 12, la única forma de lograrlo es que ambos dados caigan en 6, esto es, los casos favorables son uno. Para los casos posibles tenemos que contar de cuántas formas pueden caer los dados, o sea: cada dado tiene 6 posibilidades y por cada una de éstas, el otro dado tiene 6 posibilidades tambien, entonces los casos posibles son: $6 \times 6 = OR_6^2 = 6^2 = 36$

De modo que la probabilidad de que 2 dados caigan en 12 es 1/36.

¿cuál es la probabilidad de que al lanzar 2 dados caiga el número 7?

Veamos los casos favorables:

Para que caiga 7, puede suceder cualquiera de las siguientes combinaciones de caras de los dados:

DADO 1	DADO 2
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1

Son 6 distintas combinaciones, entonces los casos favorables son 6. Los casos posibles ya sabemos que son 36, por lo tanto la probabilidad de que caiga 7 es: 6/36 = 1/6.

De donde observemos que es más probable que caiga 7 a que caiga 12, tal y como sucede en la realidad ¿no?.

¿Cuál es la probabilidad que caiga 4, por ejemplo?

Casos favorables:

DADO 1	DADO 2
1	3
2	2
3	1

Por lo tanto la probabilidad es: 3/36 = 1/12

Entonces la probabilidad de que caiga 4 es mayor que la probabilidad de que caiga 12 pero menor que la probabilidad de que caiga 7.

Nótese que este es un experimento en donde la probabilidad de cada uno de los eventos no es la misma, pero de cualquier manera, si sumamos las probabilidades de todos los eventos obtendremos la probabilidad de los eventos posibles, es decir, obtendremos 1.

El lector puede analizar más este experimento de los dados para obtener más resultados y comprobar que todo concuerda con lo que hemos experimentado todos en la vida diaria.

PROBLEMA.

Se tiene una urna con r bolas rojas y n bolass negras. Si extraemos una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea roja?.

Como antes, debemos encontrar los casos posibles y los casos favorables. Los casos posibles son el número total de bolas que tenemos en la urna, o sea, son r+n ya que podemos extraer cualquiera de las r+n bolas. Como solo nos interesa que salga una roja y tenemos en total r bolas rojas, los casos favorables son r; de donde la probabilidad de que la bola sea roja es: r/(r+n).

¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea negra?

Análogamente al anterior, la probabilidad que buscamos es: n/(r+n).

¿Qué sucede si sumamos ambas probabilidades?

$$\frac{r}{r+n} + \frac{n}{r+n} = \frac{r+n}{r+n} = 1$$

Como habíamos observado, la suma es la probabilidad de los casos posibles ya que estos 2 eventos son los únicos posibles en este experimento.

Si ahora quisiéramos extraer 2 bolas al mismo tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean rojas?

Como se observa, el problema es siempre el de contar los casos posibles y los casos favorables, entonces de alguna manera necesitamos saber contar y esto lo haremos en general con todo lo que hemos tratado de hacer en los tres capítulos anteriores en este trabajo.

Veamos cuales son los casos posibles. Debemos observar que el problema es sacar las dos bolas al mismo tiempo. Los casos posibles son todas las formas de escoger 2 bolas de las r+n que tenemos en total, o sea C_{n+r}^{2} .Y los casos favorables son todas las formas de escoger 2 bolas rojas de un total de r que disponemos, esto es $C_r{}^2$, por lo que la probabilidad de que las 2 bolas sean rojas es:

$(C_r{}^2) / (C_{n+r}{}^2)$

De manera similar, la probabilidad de que las 2 bolas sean negras es:

$(C_n{}^2) / (C_{n+r}{}^2)$

Ahora si se quiere encontrar la probabilidad de que una sea negra y otra roja, tenemos:

Los casos posibles son los mismos $C_{n+r}{}^2$, pero los casos favorables no son los mismos que en el evento anterior, éstos debemos contarlos de manera diferente. Se tienen n+r bolas, para sacar una negra tenemos n posibilidades y por cada una de estas se tienen r posibilidades de sacar una roja, esto es, los casos favorables son nr, de donde la probabilidad de sacar una negra y una roja es:

$(nr) / (C_{n+r}{}^2)$

Ahora sumemos las probabilidades de los tres únicos eventos en este experimento:

$$\frac{C_r{}^2}{C_{n+r}{}^2} + \frac{C_n{}^2}{C_{n+r}{}^2} + \frac{nr}{C_{n+r}{}^2} = \frac{C_r{}^2 + C_n{}^2 + nr}{C_{n+r}{}^2} =$$

$$\frac{r(r-1) + n(n-1) + 2nr}{(n+r)(n+r-1)} = \frac{(r+n)(n+r-1)}{(n+r)(n+r-1)} = 1$$

Veamos ahora cómo cambia la probabilidad al modificar un poco el experimento.

Se tiene una urna con n bolas negras y r bolas rojas. El experimento consiste en extraer una bola y anotar el color de ésta, luego regresarla a la urna y hacer una segunda extracción y anotar el colo de la segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de obtener, de esta manera, 2 bolas rojas?

Para la primera extracción tenemos que hay r/(r+n) posibilidades de sacar una bola roja y para la segunda extracción, como se regresa la bola a la urna, tenemos de nuevo $r/(r+n)$ posibilidades de sacar una bola roja, de manera que la probabilidad de sacar 2 rojas es:

$$\frac{r}{r+n} \times \frac{r}{r+n}$$

Ya que por cada una de las posibilidades en la primera extracción, tenemos todas las de la segunda.

Viéndolo ahora como los casos favorables entre los casos posibles, tenemos:

Los casos favorables en la primera extracción son r, pero por cada uno de éstos, hay r casos favorables en la segunda extracción por lo que son r^2 casos favorables al extraer las dos bolas.

Para los casos posibles tenemos que en la primera extracción son n+r, que ya habíamos analizado y para la segunda tenemos exactamente la misma situación, por lo que los casos posibles son n+r por cada uno de los n+r de la primera extracción. Así la probabilidad de extraer 2 bolas rojas es: $r^2 / (n+r)^2 = (r/[n+r])^2$

De la misma manera, la probabilidad de extraer 2 negras es: $(n/[n+r])^2$.

¿Cuál es la probabilidad de extraer una negra y una roja?

Para que la primera extracción sea roja se tienen $r/(n+r)$ posibilidades y para que la segunda sea negra se tienen $n/(n+r)$ posibilidades, por lo que la probabilidad de que la primera sea roja y la regunda negra es:

$$\frac{rn}{(n+r)^2}$$

De la misma manera, la probabilidad de que la primera sea negra y la segunda roja es:

$$\frac{nr}{(n+r)^2}$$

De modo que sumando los cuatro posibles eventos de este experimento tenemos:

$$\frac{r^2 + 2nr + n^2}{(n+r)^2} = 1$$

Que es, como esperábamos la probabilidad de los casos posibles o lo que se llama en Probabilidad el evento seguro.

¿Cuál es la probabilidad de extraer k bolas rojas?

Si debemos extraerlas las k juntas, la probabilidad es:

$C_r^k \ / \ C_{n+r}^k$

Si el experimento permite ir regresando las bolas a la urna, la probabilidad es:

$r^k \ / \ (n+r)^k$

PROBLEMA.

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 4 monedas salgan 2 soles y 2 águilas?

Representemos las 4 monedas como:

1 2 3 4

A A S S

Cada una de estas monedas tiene 2 opciones, por lo tanto el número de casos posibles es:

$2\times2\times2\times2 = OR_2^4 = 2^4$

Si se quiere que 2 monedas caigan en águila y 2 en sol, se tiene por ejemplo:

A A S S

Pero considerando todas las formas en que se pueden obtener 2 águilas y 2 soles, tenemos que C_4^2 son los casos favorabes.

De modo que la probabilidad de que 2 monedas caigan en águila y 2 en sol es:

$$\frac{C_4^2}{OR_2^4} = \frac{(4\times3)\div2}{2^4} = \frac{3}{8}$$

Dejamos al lector experimentar en las variantes que se ocurran a este problema.

PROBLEMA

Recordemos el problema de las urnas con r bolas rojas y n bolas negras en donde se permitía el reemplazo. Si p es la probabilidad de que saquemos una bola roja entonces $p = r/(n+r)$ y si q es la probabilidad de sacar una negra, tenemos que $q = n/(n+r)$. De modo que en efecto la probabilidad desacar una bola de cualquier color en una sola extracción (el evento seguro) es $p+q = r/n+r + n/n+r = 1$.

Ahora veamos qué sucede para una segunda extracción.

La probabilidad de sacar 2 bolas rojas en 2 extracciones con reemplazo es $r^2/(n+r)^2 = p^2$. La probabilidad de sacar 2 bolas negras es $n^2/(n+r)^2 = q^2$. Y por último la probabilidad de que sean de distinto color es $rn/(n+r)^2 + nr/(n+r)^2 = 2rn/(n+r)^2 = 2pq$.

De modo que la probabilidad de que sean de cualquier color (el evento seguro) es:

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2 = 1^2 = 1$$

¿Cuál esla probabilidad de que en 3 extracciones con reemplazo las 3 bolas sean rojas?

Como el experimento es con reemplazo, la probabilidad de sacar 3 rojas es p^3

¿Cuál es la probabilidad de sacar 2 bolas negras y una roja en 3 extracciones con reemplazo?

La probabilidad de sacar una negra en la primera extracción es q, la probabilidad de sacar una negra en la segunda extracción es q también y la probabilidad de sacar una roja en la tercera extracción es p. Pero no nos interesa en qué orden hayan ido saliendo las bolas, entonces tenemos que considerar también cuando hayan salido por ejemplo primero la roja y después las negras,o la roja en la segunda extracción, por lo que se tienen 3 eventos posibles que son: nnr, nrn y rnn; y la probabilidad de cada uno de ellos respectivamente es q^2p, qpq y pq^2. De manera que la probabilidad de sacar 2 negras y una roja en tres extracciones con reemplazo es:

$$q^2p + qpq + pq^2 = 3pq^2$$

De forma equivalente, la probabilidad de sacar 2 rojas y una negra es: $3qp^2$ y la probabilidad de sacar tres negras es q^3.

Ahora, ¿Cuál será la probabilidad del evento seguro en este experimento? Por un lado ya sabemos que ésta es 1, por otro sabemos que es la suma de todos los eventos posibles y además sabemos que la probabilidad de sacar una bola de cualquier color en una extracción es $(p+q)=1$, la probabilidad de sacar 2 bolas de cualquier color en 2 extracciones es $(p+q)(p+q)= (p+q)^2=1$ y entonces tenemos que la probabilidad del evento seguro en tres extracciones es:

$$1=(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$

Donde cada uno de los sumandos nos da la información de a qué evento se refiere esa probabilidad

EJERCICIO.

¿Cuál es la probabilidad de que en una extracción de m bolas con reemplazo, k de ellas sean rojas y m-k sean negras? Demostrarlo.

PROBLEMA

Se tiene cierto número de cajas con 25 artículos cada una y se quiere obtener el control de calidad, para lo cual se sacan 5 artículos de una caja y si ninguno está defectuoso, se aprueba la caja completa.

a) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar una caja si contiene exactamente un artículo defectuoso?

Los casos posibles son las combinaciones de 25 tomadas de 5 en 5, o sea C_{25}^{5}. Los casos favorables son las formas de escoger 5 artículos de los 24 que no son defectuosos, o sea C_{24}^{5} ya que solo hay un artículo defectuoso. Entonces la probabilidad de que se apruebe una caja que tiene exactamente un artículo defectuoso es: $\frac{C_{24}^{5}}{C_{25}^{5}}$

b) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar una caja, si contiene 2 artículos defectuosos?

Casos posibles $= C_{25}^{5}$

Casos favorables $= C_{23}^{5}$

Entonces la probabilidad de que se apruebe la caja con 2 artículos defectuosos es:

C_{23}^{5} / C_{25}^{5}

c) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar una caja que contiene 3 artículos defectuosos?

La probabilidad que se nos pregunta es:

C_{22}^{5} / C_{25}^{5}

PROBLEMA

Dado un grupo de 36 o más alumnos, podemos apostar a que al menos dos personas tienen el mismo cumpleaños y con mucha seguridad ganaremos la apuesta. ¿por qué? ¿cuál es la probabilidad de que 2 personas tengan el mismo cumpleaños en un grupo de 36 personas?

Para resolverlo, veamos primero cuál es la probabilidad de que los 36 alumnos tengan distinto cumpleaños, o sea, la probabilidad de que no haya 2 personas con el mismo cumpleaños.

Casos favorables:

$O_{365}^{36} = 365 \times 364 \times 363 \times \ldots \times 328$

Casos Posibles:

$OR_{365}^{36} = 365 \times 365 \times 365 \times \ldots \times 365 = 365^{36}$

Entonces la probabilidad de que los 36 cumpleaños sean distintos es:

$$\frac{O_{365}^{36}}{OR_{365}^{36}} = \frac{365 \times 364 \times \ldots \times 328}{365 \times 365 \times \ldots \times 365} = 0.16781789$$

Así, vemos que como la probabilidad de que los 36 alumnos tengan cumpleaños distinto es muy pequeña, podemos asegurar con una probabilidad muy alta que hay 2 personas, de las 36, que tienen el mismo cumpleaños y además conforme tengamos un grupo de personas mas grande, mayor es la probabilidad de ganar la apuesta de que hay 2 personas que tienen el mismo cumpleaños.

¿Qué cantidad de alumnos debe haber para que la apuesta sea pareja?

Generalmente la respuesta inmediata es 182 ó algún número muy cercano a él, puesto que $365 \div 2 = 182.5$, pero si analizamos más lo que hemos hecho tenemos que, por ejemplo para un grupo de 182 personas la probabilidad de que no haya 2 personas con el mismo cumpleaños es:

$$\frac{O_{365}^{182}}{OR_{365}^{182}} = \frac{365\times364\times363\times\ .\ .\ .\ \times185\times184}{365\times365\times365\times\ .\ .\ .\ \times365\times365} =$$

$$1 \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times\ .\ .\ .\ \times \frac{184}{365}$$

Y analizando este producto se observa que los primeros factores son: el primero es 1, el segundo es casi 1, el tercero también se parece mucho a 1, etc. etc. el penúltimo y el último ya son casi ½ ; así es que este producto, se hace pequeño muy rápido ya que todos sus factores son números menores que 1.

De manera que con 182 personas es claro que con mayor razón, o bien con mayor probabilidad, ganaremos la apuesta.

Haciendo el cálculo de las probabilidades de que no haya 2 personas con el mismo cumpleaños en un grupo de k alumnos tenemos la siguiente tabla:

# DE PERSONAS	PROBABILIDAD DE QUE NO HAYA 2 CON EL MISMO CUMPLEAÑOS
39	0.121780334
38	0.135932170
37	0.151265989
36	0.167817890
35	0.185616757
34	0.204683140
33	0.225028139
32	0.246524760
31	0.269545356
30	0.293683760
29	0.319031448
28	0.345538528
27	0.373140698
26	0.401759177
25	0.431300270
24	0.461655736
23	0.492702782
22	0.524304681
21	0.556311679
20	0.5885616

tabla 32

Con lo que podemos observar que si el número de personas fuera 23 la apuesta sería pareja. Es mas, si se tiene un grupo con un número menor de personas, podemos perder con mayor probabilidad.

Recomendación:

¡Antes de apostar, cuentese el número de personas que hay en el grupo!.

PROBLEMA

LEYES DE HARDY-WEIMBERG

G. Hardy era un matematico especialista en Teoría de Números, refutó con argumentos matemáticos a un critico de Mendel con respecto a que después de varios cruzamientos, los chícharos, o cualquier población, tendría solamente la característica dominante y desaparecería la recesiva.

Veamos como fué que lo hizo.

Las hipótesis son:

1) Hay 2 rasgos característicos para cada individuo.

2) Cualquier individuo, masculino o femenino, tiene la misma posibilidad de tener uno u otro rasgo.

3) La población es lo suficientemente grande para que todas las cruzas tengan la misma probabilidad de mezclarse.

Tomaremos como ejemplo el de los chícharos.

Uno de los mecanismos simples para la transmision de diversos rasgos y características mediante la herencia es llevado a cabo a través de pares de genes, cada uno de los cuales puede ser de dos tipos, por ejemplo A (amarillo) y V (verde). Un individuo (chícharo) puede tener cualquiera de las siguientes combinaciones: AA,AV ó VV (solo escribimos AV y no VA ya que genéticamente son la misma). Usualmente los chícharos (en este caso) con las combinaciones AA y AV son virtualmente iguales respecto a las características particulares, es decir, en este caso puede suceder que los 2 chícharos se vean amarillos. En tales casos el gene A se dice dominante respecto al gene V. Un individuo (chícharo) se dice que es <u>dominante</u> (D) respecto a esta característica si tiene los genes AA, recesivo (R) si tiene los genes VV y heterocigoto (H) si tiene la mezcla AV (ó VA que son la misma).

La suposición básica de la genética en la cruza es que los genes de los "hijos" se seleccionan al azar de los genes de los "padres"; es decir, es igualmente probable que uno u otro gene del par de genes de los "padres" sea transmitido al descendiente. El "hijo" de dos "padres" dominantes (AA) debe por tanto ser dominante ya que solo hay genes A disponibles para la transmisión. La cría de dos "padres" recesivos (VV), análogamente, debe ser recesivo. El "hijo" de un "padre" recesivo (VV) y uno dominante (AA) debe ser heterocigoto (AV). Si se cruzan un dominante (AA) y un heterocigoto (AV), la cría debe obtener un gene A del "padre" dominante y tiene una probabilidad de ½ de obtener un gene A o uno V del "padre" heterocigoto. Por lo tanto la cría puede ser dominante o heterocigoto con una probabilidad de ½.

Hagamos un esquema en donde pongamos todas las posibilidades.

♂ \ ♀	D AA	H AV	R VV
D·AA	AA	AA | AV AA | AV	AV
H:AV	AA | AA AV | AV	AA | AV AV | VV	AV | AV VV | VV
R:VV	AV	AV | VV AV | VV	VV

Donde de nuevo vemos que si se cruza un AA con un AV, la mitad de los descendientes serán AA y la otra mitad serán AV. Si se cruza un AV con otro AV, ¼ de los descendientes serán AA, ¼ serán VV y ½ serán AV.

Nos preguntamos ahora ¿Cuál es la probabilidad de encontrar uno dominante? ó ¿cuál es la proporción que guardan los dominantes en la población total?

Recordemos que dominante es D=AA.

Suponiéndo que todos se cruzan con todos y que existe el mismo promedio de "hijos" para cada uno:

Sea p(D) la probabilidad de encontrar dominante, esto es:

$$p(D) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{\# de individuos con AA}}{\text{\# total de individuos}} = \frac{D}{D+H+R}$$

Y la probabilidad de encontrar uno recesivo o bien uno heterocigoto será:

$$p(R) = \frac{\#\text{ de individuos con VV}}{\#\text{ total de individuos}} = \frac{R}{D + H + R}$$

$$p(H) = \frac{\#\text{de individuos con AV}}{\#\text{ total de individuos}} = \frac{H}{D + H + R}$$

Escribamos de nuevo la tabla sintetizando un poco los resultados como sigue:

♂ \ ♀	D	H	R
D	AA	AA | AV	AV
H	AA / AV	AA | AV / AV | VV	AV / VV
R	AV	AV | VV	VV

Sean N = D + H + R , p(R) = r , p(H) = h y p(D) = d los casos posibles y las probabilidades de encontrar un recesivo, heterocigoto o dominante respectivamente.

Ahora nos preguntamos ¿cuántos de cada uno hay en la sigüiente generación? ó ¿cuál es la proporción que guardan en la siguiente generación?

Llamemos D′, H′, R′ los de la siguiente generación.

¿Cuántos dominantes habrá?

En la siguiente generación tenemos que los AA provienen del ángulo superior izquierdo del último esquema como sigue:

	D	H	
D	AA	AA |	
H	AA	AA |	. . .

Entonces debemos sumar los cuatro casos en que resultan AA que son:

$DxD + DxH/2 + HxD/2 + HxH/4 = D^2 + DH + H^2/4 = (D+H/2)^2 = D'$

Donde como ya dijimos D' es el número de dominantes en la siguiente generación.

Así, el número de heterocigotos en la siguiente generación es:

$DH/2 + DR + HD/2 + HH/2 + HR/2 + RD + RH/2 =$

$DH + 2DR + H^2/2 + HR = D(H + 2R) + H(H/2 + R) =$

$2D(H/2 + R) + h(H/2 + R) = (2D + H)(H/2 + R) =$

$2(D + H/2)(R + H/2) = H'$

Y el número de recesivos en la siguiente generacion es:

$HH/4 + HR/2 + HR/2 + RR = H^2/4 + HR + R^2 =$

$(R + H/2)^2 = R'$

De donde sabemos que en total habrá:

$(D+H/2)^2 + 2(D+H/2)(R+H/2) + (R+H/2)^2 =$

$[(D+H/2) = (R+H/2)]^2 = (D + R + H)^2 = N^2$

Por lo tanto

$D' + H' + R' = N^2 = N'$

¿Cuáles serán ahora las nuevas proporciones?

$p(D') = d' = [(D+H/2)^2] / N^2 - [(D+H/2)/H]^2 =$

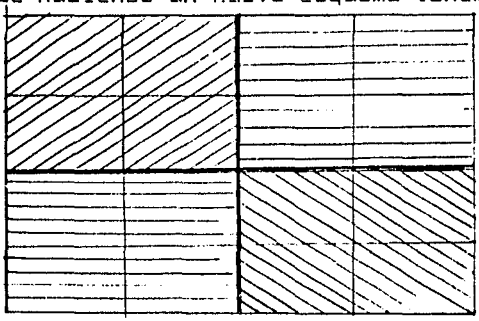
$(d + H/2N)^2 = (d + h/2)^2$

Y de la misma manera tenemos:

$h' = 2(d + h/2)(r + h/2)$

$r' = (r + H/2)^2$

De donde haciendo un nuevo esquema tenemos:



Y observemos que aunque empezáramos con alguna distribución que no cumpla con esta proporcion, lo que se obtiene en la segunda generación forzosamente tiene que cumplirla.

Ahora, contando cuantas A individuales había originalmente (en el esquema) se tiene:

Hay 2 A's por cada D y una A por cada H entonces tenemos en total 2D + H A's y contando cuantas hay en total (de las individuales) en el esquema tenemos:

2 letras por cada individuo y eran N individuos, por lo que en total hay 2N individuales, entonces;

$d' = d + h/2 = (2D + H)/2N$ que es la proporción de A individuales que hay en total

Sean $p = d + h/2$ y $q = r + h/2$ las proporciones de rasgos amarillos (A) ó verdes (V) que hay individualmente.

Nótese que $p+q=N$

La reglita que hemos encontrado es:

Primera generación: d, h, r , la proporción de genes individuales que hay es:

$p = d + h/2$ y $q = r + h/2$

Segunda generación: d', h', r' donde $d'=p^2$, $h'=2pq$ y $r'=q^2$ la proporción de genes individuales será:

$p'= d' + h'/2 = p^2 + pq = p(p+q) = p$

$q'= r' + h'/2 = q^2 + pq = q(p+q) = q$

De donde observamos que si cambian d,r y h , de todos modos las proporciones de genes individuales no cambian.

¿Qué sucedería en la tercera generación? ¿cuánto será d''?

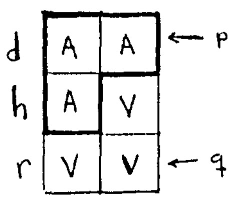
Veamos:

$d''= p'^2 = p^2 = d'$

$h''= 2p'q' = 2pq = h'$

$r'' = q'^2 = q^2 = r'$

De manera que la proporción entre ellos se mantendrá igual siempre.



La proporción entre los genes individuales siempre sera la misma.

		D		H		R	
		A	A	A	V	V	V
D	AA	AA	AA	AA	AV	AV	AV
		AA	AA	AA	AV	AV	AV
H	AV	AA	AA	AA	AV	AV	AV
		AV	AV	AV	VV	VV	VV
R	VV	AV	AV	AV	VV	VV	VV
		AV	AV	AV	VV	VV	VV

EJERCICIOS.

1 .- En un estante hay 12 libros. ¿De cuántas formas se pueden escoger 5 de éstos de modo que no haya 2 juntos?

¿Y si son n libros y se quieren sacar k de ellos de modo que no haya 2 juntos?

¿Y si son n libros y se quieren sacar k de ellos de modo que no haya m juntos?

2 .- Demostrar

$$C_{n+m}^{k} = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0$$

a) Por Inducción Matemática.

b) Conceptualmente, es decir, usando el concepto de "combinación" como subconjunto.

c) Usando la formula $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

d) Interpretar geometricamente los casos k=2 y k=3.

3 .- Ocho muchachas forman una ronda. ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar en circulo?

a) Si estuviesen paradas, sin moverse.

b) Si giraran(en su misma posicion de circulo)

c) Lo mismo, si son n muchachas.

4 .- En el juego del dominó, 4 jugadores dividen en partes iguales 28 fichas. ¿De cuántas formas pueden hacerlo?

5 .- ¿De cuántas maneras se pueden escoger en el tablero de ajedrez, una casilla blanca y una negra que no estén en una misma horizontal ni vertical?

6 .- ¿De cuántas maneras se pueden repartir 10 hongos blancos, 15 setas y 8 trufas entre 4 niños?

Analiza todas las posibilidades.

7 .- ¿Cuántos monomios de grado n en 2 variables con coeficiente 1 hay?

Ejemplo: de grado 1 solo son x y y o sea 2,
de grado 2 son x^2, xy y y^2 o sea 3.

¿Cuántos hay en k variables?

8 .- En un tablero de ajedrez, ¿ de cuántas formas se pueden colocar 8 torres de manera que si se puedan comer?

9 .- En un tablero de ajedrez, ¿de cuántas formas se pueden colocar 8 torres de manera que no se puedan comer?

10.- ¿Cuántas fichas de dominó se pueden formar suponiendo que se dispone de n símbolos?

11.- ¿Cuál es el número de itinerarios de longitud mínima que, sobre el tablero de ajedrez, puede seguir una torre para ir desde una esquina hasta la diagonalmente opuesta?

12.- Con n símbolos ¿cuántas palabras distintas de m letras se pueden construir?

13.- En una cierta ciudad, no había dos habitantes con igual cantidad de dientes. ¿Cuál puede ser la poblacion máxima de esta ciudad, si el mayor número de dientes es igual a 32?

14.- Dado un candado con cinco círculos con 12 letras cada uno. ¿Cuántas combinaciones infructuosas pueden realizarse en un candado así?

15.- Se tiene una computadora con 10000 celdas cada una de las cuales contiene 43 cifras binarias (0 ó 1). ¿En cuántos estados diferentes puede hallarse dicha computadora?

16.- Todas las personas que han habitado el actual territorio mexicano han intercambiado saludos de mano cierto número de veces. ¿Qué número de personas (par ó impar) se han saludado de mano un número impar de veces?

17.- ¿De cuántas formas se pueden dividir 33 muchachos en 3 equipos de futbol de 11 muchachos cada uno?

Generalizar al número de formas en que se pueden dividir nk objetos en conjuntos de n objetos cada uno.

18.- Demostrar:

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}$$

19.- Demostrar:

$$C_{k+m}^{k+1} = C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \ldots + C_{k+m-1}^k$$

20.- Encontrar los coeficientes de x^{29} y x^{37} en el desarrollo del binomio $(x+x^3)^{21}$.

21.- ¿Cuál es el mayor número de reinas que se pueden colocar en un tablero de ajedrez, de tal manera que ninguna pueda ser comida?

a) En un tablero de ajedrez de 8x8 .

b) En un tablero de nxn.

22.-Se tienen n puntos en el plano, ninguna terna es colineal. ¿Cuántas poligonales de k segmentos no cerradas y cuántas cerradas con vértices en dichos puntos pueden formarse?

23.- Dados p+q+r objetos distinto. ¿De cuántas formas podemos dividir dichos objetos en 3 grupos de suerte que el primer grupo contenga p objetos, el segundo q y el tercero contenga r objetos?+

24.- Demostrar:

$$C_k^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+2}^2 + \dots + C_{k+n-1}^{n-1} = C_{k+n}^{n-1}$$

o sea $\sum C_{k+i}^i$ con $i=0,1,\dots,n-1$ $= C_{k+n}^{n-1}$

25.- ¿De cuántas formas se pueden seleccionar 3 números tomados de los números 1,2,3,...,300 tales que su suma sea divisible por 3?

26.- Considere el siguiente arreglo triangular numérico:

				1				
			1	1	1			
		1	2	3	2	1		
	1	3	6	7	6	3	1	
1	4	10	16	19	16	10	4	1
.	.	.						

En la primera fila de este arreglo está solo el número uno, y los números en las siguientes filas se determinan mediante la siguiente regla: cada número es la suma de los tres números más cercanos a él en la fila anterior (esto es, la suma del del número inmediatamente arriba de él mas el de la derecha de ése, ma+s el de la izquierda de ése mismo). En la enésima fila de este arreglo hay 2n+1 números, denotaremos estos números como B_n^0, B_n^1, B_n^2, ... , B_n^{2n}.

21.- ¿Cuál es el mayor número de reinas que se pueden colocar en un tablero de ajedrez, de tal manera que ninguna pueda ser comida?

a) En un tablero de ajedrez de 8x8 .

b) En un tablero de nxn.

22.-Se tienen n puntos en el plano, ninguna terna es colineal. ¿Cuántas poligonales de k segmentos no cerradas y cuántas cerradas con vértices en dichos puntos pueden formarse?

23.- Dados p+q+r objetos distinto. ¿De cuántas formas podemos dividir dichos objetos en 3 grupos de suerte que el primer grupo contenga p objetos, el segundo q y el tercero contenga r objetos?+

24.- Demostrar:

$$C_k^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+2}^2 + \ldots + C_{k+m-1}^{m-1} = C_{k+m}^{m-1}$$

o sea ΣC_{k+i}^{i} con $i=0,1,\ldots,m-1$ $= C_{k+m}^{m-1}$

25.- ¿De cuántas formas se pueden seleccionar 3 números tomados de los números 1,2,3,...,300 tales que su suma sea divisible por 3?

26.- Considere el siguiente arreglo triangular numérico:

				1				
			1	1	1			
		1	2	3	2	1		
	1	3	6	7	6	3	1	
1	4	10	16	19	16	10	4	1
.	.	.						

En la primera fila de este arreglo está solo el número uno, y los números en las siguientes filas se determinan mediante la siguiente regla: cada número es la suma de los tres números más cercanos a él en la fila anterior (esto es, la suma del del número inmediatamente arriba de él mas el de la derecha de ése, ma+s el de la izquierda de ése mismo). En la enésima fila de este arreglo hay 2n+1 números, denotaremos estos números como B_n^0, B_n^1, B_n^2, ... , B_n^{2n}.

Pruebe que:

a) $B_n^0 + B_n^1 + B_n^2 + \ldots + B_n^{2n} = 3^n$

b) $B_n^0 - B_n^1 + B_n^2 - \ldots + B_n^{2n} = 1$

c) $(B_n^0)^2 + (B_n^1)^2 + (B_n^2)^2 + \ldots + (B_n^{2n})^2 = B_{2n}^{2n}$

27.- De una lista de 15 problemas sobre Combinatoria y problemas de Inducción, ¿cuántos exámenes diferentes pueden darse que incluyan 4 preguntas sobre cada uno de estos temas?

28.- Un circulo se divide en cuatro cuadrantes iguales. Se quiere pintar cada cuadrante de diferente color y se dispone de 9 distintos colores. ¿De cuántas maneras distintas puede quedar pintado el circulo?

29.- Si $O_{2n}^{4} = 127O_{2n}^{3}$, encontrar n.

30.- ¿Cuántos triángulos existen, cuyos vértices sean vértices de un hexágono convexo dado?

31.- Cada lado de un cuadrado se ha dividido en n partes. ¿Cuántos triángulos se pueden construir, cuyos vértices sean los puntos de división?

32.- Nueve pasajeros abordan un tren que consiste de 3 carros. Cada pasajero selecciona al azar en cual carro ha de viajar. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Viajen 3 personas en el primer carro?

b) Viajen 3 personas en cada carro?

c) Viajen de tal manera que queden distribuidos en los carros como: 2 en uno, 3 en otro y 4 en el otro carro?

C A P I T U L O IV

CONCLUSIONES.

Sabemos que esta forma de enseñanza requiere de más trabajo, tanto de parte del maestro como de parte del alumno, pero sabemos también que es más productiva tanto para unos como para otros. Muchas veces, en el proceso de buscar un camino distinto para resolver un problema, encontramos resultados que no imaginábamos que tuviesen algo que ver con el problema planteado; a veces hasta se tienen que demostrar resultados un tanto más complicados que el problema mismo cuando buscamos distintos caminos para resolverlo, pero creemos que esto es una ventaja, es ir aprendiendo al mismo tiempo tanto la teoría que va saliendo como los procesos que se siguen en la matemática misma para ir contruyendo toda la estructura formal que nos han mostrado siempre, y que nunca nos la explican o nunca lo entendemos porque no lo hemos llevado a la practica.

Viviendo los tropiezos, reconstruyendo la teoría necesaria, equivocándose y volviéndose a equivocar para después rectificar con todo conocimiento de lo que ocurre, en una palabra haciendo matemáticas, es como creo que se comprende mejor la misma.

El hacer que los alumnos traten de explicarse entre ellos mismos lo que han hecho, permite ver el problema de muchas maneras distintas, manifiesta que no todos tenemos que pensar un problema, matemático o no, de una misma forma. Les hace ver que en ocasiones debemos cambiar nuestra forma de "resolver problemas" por la simple forma de "comprender" el problema. Esto es, no existe una receta única para resolver problemas, sino en cada uno de ellos debemos buscar una forma propia de resolverlo, debemos adquirir un hábito de buscar formas y más formas de pensar.

Es muy importante que el alumno desarrolle su propia experiencia, que se pierda en el camino de buscar la respuesta a un problema, que aprenda en ese "perderse", que se vuelva a perder si es necesario y así es más seguro que cuando llegue a la respuesta correcta haya comprendido mejor un conocimiento. Claro está que no necesariamente todos los alumnos deben perderse antes de encontrar el camino correcto. No debe darle miedo a nadie el equivocarse en algún momento y después reconocer que se estaba equivocado.

Con este involucrar a los alumnos y hacer que ellos hagan matemáticas, se va construyendo la teoría y el lenguaje necesarios para la clase. Se va recapitulando y consolidando lo que los muchachos van "descubriendo". Se va avanzando en la generalización y abstracción de las matemáticas.

También se busca que los alumnos busquen soluciones geométricas, que busquen interpretaciones geométricas y en cierto sentido que los problemas que se les dan "cobren vida" de alguna manera, donde por cierto, la geometría es algo al alcance de muchos de ellos y que en la educación previa no se explota la intuición geométrica tanto como nos gustaría que se hiciera.

Es importante también ponerles problemas que tengan varias soluciones, que discutan ese tipo de problemas, que vivan situaciones reales y que comprueben que existen problemas que no solo tienen una solución e incluso hay problemas que no tienen solución alguna y que es necesario demostrar que en efecto no tienen solución.

Por último, algo que en general para el maestro es mas difícil, es dar además de la teoría que han ido redescubriendo sus alumnos, un panorama global de la matemática; un panorama que a su nivel les dé información de cuál es la teoría que estan construyendo, de dónde salió antes, que relación tiene con otras áreas y otros momentos, qué vínculo puede tener con problemas e investigaciones actuales, qué herramienta les proporciona, para qué les sirve, etc. Cuando el alumno se siente importante en cuanto a descubrir, construir, resolver, etc. es cuando podemos aprovechar más para que adquiera un conocimiento.

APENDICES

APENDICE a.

Recordemos que un número en base 2 se escribe solo con los dígitos 0 y 1 y recordemos que en el sistema en base 10, la posiciones de un dígito tienen un significado concreto. Por ejemplo el número 345 en base diez quiere decir que tenemos 5 unidades mas 4 decenas mas 3 centenas, esto es, 5 de 1, mas 4 de 10, mas 3 de 100; y lo representamos como $5x10^0 + 4x10^1 + 3x10^2 = 5 + 40 + 300 = 345$.

De manera similar, un número en base dos se escribe como:

Por ejemplo el 11001_2 es 1 de 1, mas 0 de 2, mas 0 de 4, mas 1 de 8, mas 1 de 16; o sea:

$1x2^0 + 0x2^1 + 0x2^2 + 1x2^3 + 1x2^4 = 11001_2$ (1)

Pero ¿porqué es esto?

Si en la ecuación (1) sumamos los números del lado izquierdo pero en lo que significa cada uno en base 10 tenemos:

$1 + 0 + 0 + 8 + 16 = 25$

De modo que 11001 en base 2 es lo mismo que 25 en base 10.

Y si quisiéramos hacerlo al revés, dado un número en base 10 pasarlo a base 2, ¿cómo lo hacemos?

Debemos dividir el número entre la mayor potencia de 2 que esté contenida en él, luego el residuo a su vez, dividirlo entre la potencia de dos mas grande que lo contenga y así sucesivamente. Veamos un ejemplo.

Se quiere saber qué número es en base 2 el número 541.

Las potencias de 2 son:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, . . .

entonces

$$512\,\overset{1}{\overline{)541}} \qquad 16\,\overset{1}{\overline{)29}} \qquad 8\,\overset{1}{\overline{)13}} \qquad 4\,\overset{1}{\overline{)5}} \qquad 1\,\overset{1}{\overline{)1}}$$

512 ⟌541, cociente 1	16 ⟌29, cociente 1	8 ⟌13, cociente 1	4 ⟌5, cociente 1	1 ⟌1, cociente 1
029	13	5	1	0

Y entonces tenemos que colocar en la posición que corresponda a las potencias de 2, esto es:

2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0	1

De manera que 512 se escribe en base 2 como:

1000011101_2

Pero esta forma presupone que conocemos las potencias de 2 y, para números muy grandes, no es muy práctica porque tendríamos que tener a la vista la lista de las potencias de 2. y recordando lo que nos han enseñado en el bachillerato, la receta es hacer las divisiones sucesivas entre 2, esto es:

Por ejemplo 541 en base dos se hace:

$$\begin{array}{ccccccc} 270 & 135 & 67 & 33 & 16 & 8 & 4 \\ 2\,\overline{)541} & 2\,\overline{)270} & 2\,\overline{)135} & 2\,\overline{)67} & 2\,\overline{)33} & 2\,\overline{)16} & 2\,\overline{)8} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 2\,\overline{)4} & 2\,\overline{)2} & 2\,\overline{)1} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Y se escriben los residuos del último al primero, esto es, 1000011101_2

Y ¿qué quiere decir esto en general?

Si N es un número en base 10 y queremos pasarlo a base 2, tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} C_0 & C_1 & C_2 & & C_n \\ 2\,\overline{)N} & 2\,\overline{)C_0} & 2\,\overline{)C_1} & \ldots & 2\,\overline{)C_{n-1}} \\ r_0 & r_1 & r_2 & & r_n \end{array}$$

donde $r_i \in (0,1)$ para toda $i \in N\ (0)$

Y el número se escribe como:

$r_n r_{n-1} \ldots r_3 r_2 r_1 r_0$ en base 2 y por el sistema posicional esto es:

$r_n 2^n + r_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + r_3 2^3 + r_2 2^2 + r_1 2^1 + r_0 2^0$ de donde al sumar estos números en base 10 tenemos:

$N = r_n 2^n + r_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + r_2 2^2 + r_1 2^1 + r_0 2^0$ en base 10.

Ahora, si $N = 2^n r_n + 2^{n-1} r_{n-1} + \ldots + 2^2 r_2 + 2^1 r_1 + r_0$ para pasarlo a base 2 tenemos:

$N = 2N_1 + r_0 = 2(2^{n-1} r_n + 2^{n-2} r_{n-1} + \ldots + 2r_2 + r_1) + r_0$

donde $N_1 = (2^{n-1} r_n + 2^{n-2} r_{n-1} + \ldots + 2r_2 + r_1)$ es el cociente y r_0 el residuo de dividir N entre 2.

Siguiendo con las divisiones tenemos:

$N_1 = 2N_2 + r_1 = 2(2^{n-2} r_n + 2^{n-3} r_{n-1} + \ldots + r_2) + r_1$ donde

$N_2 = 2^{n-2} r_n + 2^{n-3} r_{n-1} + \ldots + r_2$ es el cociente y r_1 el residuo de dividir N_1 entre dos.

Así sucesivamente tenemos que:

r_0 = residuo de $N/2$ y N_1 = cociente de $N/2$

r_1 = residuo de $N_1/2$ y N_2 = cociente de $N_1/2$

r_2 = residuo de $N_2/2$ y N_3 = cociente de $N_2/2$

.

.

.

r_n = residuo de $N_n/2$

De donde tenemos:

$N_2 = 2^{n-2} r_n + 2^{n-3} r_{n-1} + \ldots + r_2$

$N_3 = 2^{n-3} r_n + 2^{n-4} r_{n-1} + \ldots + r_3$

.

.

.

$N_{n-1} = 2^{n-n+1} r_n + r_{n-1} = 2r_n + r_{n-1}$

$N_n = r_n$ con $r_n = 1$ ya que si $r_n=0$ entonces no tiene sentido expresar a N como en la ecuación (1). Y si $r_n=0$ entonces n es el menor entero tal que $2^n > N$ y entonces n es el número de dígitos en base 2 que tiene el número N.

Si $r_n=1$ entonces n+1 es el menor entero tal que $2^{n+1} > N$ y así, n+1 es el número de dígitos de N en base 2.

Veamoslo en un ejemplo particular.

Sea N = 17, entonces

$N = 17 = 2(8) + 1 = 2(N_1) + r_1$

$N_1 = 8 = 2(4) + 0 = 2(N_2) + r_2$

$N_2 = 4 = 2(2) + 0 = 2(N_3) + r_3$

$N_3 = 2 = 2(1) + 0 = 2(N_4) + r_4$

$N_4 = 1 = 2(0) + 1 = 2(N_5) + r_5$

$N_5 = 0$

De modo que $N = r_5 r_4 r_3 r_2 r_1$ en base 2 por lo que

$17 = 10001_2$

Y 5 es el menor entero tal que

$2^5 = 32 > 17$ y además

5 es el número de dígitos que tiene 17 en su expansión binaria (que en nuestro problema era el número de rondas).

APENDICE b.

Queremos encontrar la solución general a la ecuación $x^2 - 2y^2 = -1$. ¿Cómo procederemos?

En general, las ecuaciones de la forma $x^2 - Ay^2 = -1$ ó $x^2 - Ay^2 = 1$ con A diferente de k^2 para alguna k en los naturales, son las llamadas ecuaciones de Pell, gracias al matemático inglés John Pell (1611-1685), quien tuvo poco que hacer con el problema en realidad. Este problema, ya había sido estudiado por los matemáticos de la India, e incluso se dice que por Arquímedes también[13].

Notemos que la condición A diferente de k^2 para alguna k en los naturales, es necesaria ya que si $A=k^2$ tenemos:

$$x^2 - Ay^2 = x^2 - k^2y^2 = (x-ky)(x+ky) = 1 \quad \text{ó}$$

$$x^2 - Ay^2 = x^2 - k^2y^2 = (x-ky)(x+ky) = -1$$

Esto ya nos proporciona fácilmente las soluciones que son, para el primer caso:

$$x-ky = 1 \quad y \quad x+ky = 1 \qquad \text{ó} \qquad x-ky = -1 \quad y \quad x+ky = -1$$

Ya que en los números enteros los divisores de 1 son 1 y -1.

De donde obtenemos que las soluciones son:

$x=1$ y $y=0$ o bien $x=-1$ y $y=0$.

Y para el segundo caso tenemos:

$$x-ky = 1 \quad y \quad x+ky = -1 \qquad \text{ó} \qquad x-ky = -1 \quad y \quad x+ky = 1$$

Porque en los enteros, los divisores de -1 son 1 y -1 también.

De donde obtenemos que las soluciones en este caso son:

$x=0$ y $y=1/k$ o bien $x=0$ y $y=-1/k$

Por lo que se observa que $x^2 - k^2y^2 = -1$ sólo tiene solución cuando $k=1$.

Y éstas, son todas las posibilidades, de modo que consideraremos el caso en que A no es un cuadrado.

---

[13] Ver artículo de Fermat, sobre la ecuación de Pell en el libro A Source Book in Mathematics, de D. Struik citado en la bibliografía.

Si la ecuación que buscáramos fuera de la forma $x^2 - Ay^2 = 1$, vemos que siempre tiene solución ya que al menos existe la solución trivial $x=1$ y $y=0$. Cuando la ecuación es de forma $x^2 - Ay^2 = -1$ no siempre existe solución ya que dependiendo del valor de A hay o no hay solución; como el caso del problema que queremos resolver es uno de éstos, vamos a ver el procedimiento que se sigue para darles solución, en el caso particular de $A=2$.

Recodemos que ya sabemos que $x^2 - 2y^2 = -1$ tiene al menos 3 soluciones que son:

$x=7$, $y=5$; $x=41$, $y=29$ y $x=239$, $y=169$

Ya hemos visto que si la ecuación en cuestión fuese $x^2 - Ay^2 = 1$ con $A=1$ por ejemplo, se podría factorizar y encontraríamos las 2 únicas soluciones. Si fuese $x^2 - Ay^2 = -1$ con $A=1$ también por factorización encontramos que tiene solo 2 soluciones. Entonces, un camino que se puede tratar de seguir para resolver $x^2 - 2y^2 = -1$ es buscar si existe alguna factorización que nos conduzca a las soluciones. Pero, esta ecuación no tiene factorización en los números enteros, es decir la factorización de esta ecuación es:

$$(x - \sqrt{2}\,y)(x + \sqrt{2}\,y) = -1 \qquad \text{(a)}$$

Y el número $\sqrt{2}$ no es un número natural, ni tampoco un número racional.

Pero por simple inspección, vemos que $x=1$, $y=1$ es una solución de (a) ya que $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$ entonces, aunque la factorizxación no esté en los números enteros, x y y si son números enteros y con esto basta para decir que sí son solución de (a).

El problema ahora es buscar cómo encontarar todas las soluciones a la factorización (a) que son todas las soluciones para $x^2 - 2y^2 = -1$.

Si trabajamos en el conjunto de los números de la forma $a + b\sqrt{2}$ con a y b en los enteros, quizá encontremos todas las soluciones a (a).

Reformulémos nuestro problema. Queremos encontrar todos los números de la forma $a + b\sqrt{2}$ con a,b en los enteros tales que satisfagan $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = -1$.

Entonces trabajaremos en el conjunto:

$Z(\sqrt{2}) = \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Z \}$

Notemos que $Z(\sqrt{2})$ es obviamente cerrado bajo la suma, y también es cerrado bajo el producto, o sea:

si $\alpha_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$ y $\alpha_2 = a_2 + b_2\sqrt{2}$ entonces existen a y $b \in Z$ tales que $a + b\sqrt{2} = (\alpha_1)(\alpha_2)$.

Demostración.

$$(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) = a_1a_2 + a_2b_1\sqrt{2} + a_1b_2\sqrt{2} + 2b_1b_2 = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_2b_1 + a_1b_2)\sqrt{2}$$

Sean $a = a_1a_2 + 2b_1b_2$ y $b = a_2b_1 + a_1b_2$ y como a_1, b_1, a_2 y $b_2 \in Z$ entonces a y $b \in Z$.

De manera equivalente puede probarse que $Z(\sqrt{2})$ cumple con todas las propiedades que cumplen los números enteros (y que caracterizan a Z como un dominio entero: es decir, un conjunto donde la suma y el producto tienen las propiedades usuales -de un anillo- y además se cumple que si $xy=0$ entonces $x=0$ ó $y=0$).

Sea $\alpha = a + b\sqrt{2}$ y llamémosle $\overline{\alpha} = a - b\sqrt{2}$ con a,b en los enteros, (Nótese que $\overline{\alpha} \in Z(\sqrt{2})$ también).

Nótese que en $Z(\sqrt{2})$ se cumple la siguiente proposición:

Proposición. Si $\alpha, \beta \in Z(\sqrt{2})$ se cumple $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$

Demostración.

Sean $\alpha=a+b\sqrt{2}$ y $\beta=c+d\sqrt{2}$ entonces

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})} = \overline{[ac + 2bd + (cb +ad)\sqrt{2}]} =$$
$$ac + 2bd - (cb + ad)\sqrt{2} = ac + 2bd - cb\sqrt{2} - ad\sqrt{2} =$$
$$(a - b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2}) = \overline{(a + b\sqrt{2})}\,\overline{(c + d\sqrt{2})} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$$

Ahora, nuestro problema es encontrar todas las α's tales que:

$$(\alpha)(\overline{\alpha}) = -1 \qquad \text{(b)}$$

Notemos que si α_0 es solución a (b), entonces $(\alpha_0)^{2n+1}$ también es solución ya que:

$(\alpha_0)(\overline{\alpha_0}) = -1$ implica $(\alpha_0)^{2n+1}(\overline{\alpha_0})^{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$

para toda n en los números naturales.

Y de aquí tenemos una infinidad de soluciones para (b).

Ahora, ¿cómo encontramos a todas las soluciones?

Encontremos la solución más pequeña y las potencias impares de ésta, serán todas las soluciones de (b).

Sabemos que $1+\sqrt{2}$ es solución a (b) y además veamos que $1+\sqrt{2}$ es el menor número de $Z(\sqrt{2})$ tal que a y b son positivos.

Sea $\alpha_0 = 1+\sqrt{2}$. Veamos un poco cómo son las potencias de α_0. La tabla siguiente muestra algunas de estas potencias.

n	$(\alpha_0)^n$
1	$1 + \sqrt{2}$
2	$3 + 2\sqrt{2}$
3	$7 + 5\sqrt{2}$
4	$17 + 12\sqrt{2}$
5	$41 + 29\sqrt{2}$
6	$99 + 70\sqrt{2}$
7	$239 + 169\sqrt{2}$
.	
.	
.	

Como ya se demostró, para los valores impares de n, obtenemos siempre soluciones a (b). Si llamamos (c) a la ecuación $(\alpha)\overline{(\alpha)} = 1$, entonces para los valores pares de n obtenemos siempre soluciones a la ecuación (c). Ya que si $(\alpha_0)\overline{(\alpha_0)} = -1$ entonces $(\alpha_0)^{2n}\overline{(\alpha_0)}^{2n} = (-1)^{2n} = 1$

De manera que si α_0 es el menor número en $Z(\sqrt{2})$ con a y b positivos, que satisface (b), entonces $(\alpha_0)^2$ es el menor número de $Z(\sqrt{2})$ con a y b positivos que satisface la ecuación (c). Y entonces para tener cualquier potencia impar de α_0 solo tenemos que ir multiplicando α_0 por $(\alpha_0)^2$ tantas veces como sea necesario.

Pero si podemos multiplicar por $(\alpha_0)^2$, también podemos <u>dividir</u> entre $(\alpha_0)^2$ (que es lo mismo que multiplicar por $\overline{(\alpha_0)}^2$). Esto significa que si partimos de cualquier solución α de (b) $\alpha\overline{(\alpha_0)}^2$ es otra solución "más chica". Con esta idea se puede ver que siempre podemos encontrar una solucion "más chica" que una solución dada, a menos que esta solucion sea α_0 misma (que al dividir entre $(\alpha_0)^2$ nos dá una solución con números negativos). Esto implica que al dividir una solución cualquiera por $(\alpha_0)^2$, $(\alpha_0)^4$, ... , $(\alpha_0)^{2n}$ en algún momento caeríamos en α_0. Luego las soluciones de la forma $(\alpha_0)^{2n+1}$ son <u>todas</u> las soluciones "positivas" de (b). Dejamos al lector verificar los detalles de estas afirmaciones.

De todo lo anterior tenemos que si β es solución de (b) entonces $\beta(\alpha_0)^2$ también lo es, y es la siguiente solución, esto es:

si $\beta = x + y\sqrt{2}$ entonces $\beta(\alpha_0)^2 = (x + y\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = (3x + 4y) + (3y + 2x)\sqrt{2} = -1$ o sea es solución a (b).

De donde obtenemos dos fórmulas para encontrar la siguiente solución a partir de cualquier solución que tengamos.

APENDICE c

Para que al lector le quede un poco mas en general la idea del curso de Algebra Supérior que hemos impartido en la Facultad de Ciencias, trascribimos a continuación un resumen del mismo.

UN CURSO DE ALGEBRA SUPERIOR.

Dirigido a estudiantes universitarios de primer año de Matemáticas y Física, (edades de 17 años en adelante).

El programa estándard en nuestra escuela es:

I. Primer semestre: 1) Análisis combinatorio e Induccion Matematica.
2) Espacios vectoriales y Sistemas de Ecuaciones lineales.

II. Segundo semestre: 1) Divisibilidad y Congruencias.
2) Polinomios y Ecuaciones.

Cubrimos estos temas tratando de:

1) Hacer que los estudiantes trabajen problemas concretos por sí mismos, sin exposición previa de la teoría, de modo que puedan encontrar sus propias soluciones.

2) Hacer que la teoría surja naturalmente de estos problemas y sus soluciones.

3) Mostrar aplicaciones de estas teorías a otros problemas en diferentes campos.

4) Insistir en la conveniencia de representaciones gráficas o pictóricas en la solución de problemas.

5) Discutir aspectos de las soluciones historicas reales dadas a algunos problemas, las relaciones entre el desarrollo de las matemáticas y el de la sociedad, el uso de la ciencia en nuestra sociedad, etc.

(Como siempre, las limitaciones de tiempo no nos permiten hacer todo esto tan minuciosamente como quisiéramos).

Los problemas que usamos en clase y en las tareas son los siguientes:

I.1 Combinatoria e Inducción.

a) Problema del torneo de Pin-Pon: n jugadores deben efectuar un torneo con las siguientes reglas: se forman parejas al azar; cada pareja juega un partido y los perdedores se descartan. Si n es impar, algún jugador tiene la suerte de llegar a la siguiente ronda sin jugar. Se repite este proceso con los jugadores restantes. ¿Cuántos partidos deben jugarse antes de tener un solo ganador? (Tomado de Halmos).

b) Barra de chocolate. Una barra de chocolate está formada de 8x4 pequeñas piezas. ¿Cuál es el número mínimo de veces que debe partirse la barra para tener separadas todas las pequeñas piezas? (Tomada del IREM de Estrasburgo).

Estos dos problemas nos permiten poner énfasis en la necesidad de desarrollar casos particulares estableciendo diversas conjeturas, probándolas, etc. La impresionantemente simple y clara solución a la que se llega finalmente, es sólo el resultado del arduo y "sucio" trabajo previo.

c) Segundo problema del Pin-Pon. Ahora debemos jugar un "round robin"; cada quien tiene que jugar contra todos los demás. ¿Cuántos partidos se juegan ahora?

Aquí obtenemos diferentes soluciones de parte de los estudiantes, les pedimos que prueben que todas ellas son correctas y que vean las relaciones entre ellas.

Introducimos una primera experiencia en inducción matemática observando la "ley de crecimiento" de las diferentes soluciones.

d) Conteo de ternas no ordenadas de un conjunto de n elementos.

(Repetimos los procedimientos antes descritos).

e) Número de subconjuntos de un conjunto de n elementos, número de diagonales de un polígono, número de regiones en las que puede dividirse un círculo mediante las cuerdas que unen los puntos de su frontera. Sumas de cuadrados, cubos, etc. (Más de inducción).

f) Encontrar un número triangular cuyo doble sea también un número triangular. (Después de que los estudiantes dan ejemplos, el maestro da una fórmula recursiva). Encontrar un número cuadradado cuyo doble es, también, un cuadrado. (Prueba por contradicción: el principio del Buen Orden; descenso infinito).

g) Problemas estándard de combinatoria: Combinaciones, permutaciones, etc. ¿Hay alguna fórmula para n!? (Como la que se encontró para la suma de los primeros n números naturales).

h) Triángulo de "Pascal". Combinaciones, coeficientes binomiales, número de rutas en una ciudad (Tomado de Polya). Identidades Combinatorias.

i) Pruebas estándard por inducción.

j) Aplicaciones a la Probabilidad, Física, Biología. (Problemas de los cumpleaños, estadísticas de Bose-Einstein, leyes de Hardy-Weimberg).

I.2 Espacios Vectoriales y Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Suponemos que los estudiantes tienen experiencia previa con problemas referentes a ecuaciones lineales, la idea principal es tratar de que se den las nociones de dependencia lineal, bases, etc., a través de problemas se encuentra la solución de ecuaciones lineales. Se mencionan algunos acertijos en conexión con determinantes y permutaciones pares e impares.

II.1 Divisibilidad y Congruencias.

a) Problema de las jarras: medir l litros con dos jarras con capacidad de m y n litros. ¿Cuáles números pueden medirse? (Conduce al máximo común divisor como combinación lineal de los números)!

b) Problemas estándard encaminados a las ecuaciones diofantinas.

c) Calendario Maya: consiste de 20 símbolos, digamos A,B,C,..., y 13 números; los días sucesivos son A1, B2, C3,...

d) Problemas de engranes: un engrane de n dientes está conectado con uno de m. Problemas de bolas de billar.

e) Algoritmo de Euclides también para números reales. Razón áurea y otros números irracionales.

f) Números primos y factorización. Se mencionan problemas resueltos y no resueltos en la teoría de números primos.

g) Problemas de horas, días de la semana, etc. que conducen a la idea de congruencia. Problemas de calendario: ¿En qué día de la semana es más frecuente que caiga el 1o. de enero? (Con distintas reglas respecto a los años bisiestos). Otros problemas que tienen periodicidad. La "prueba del nueve", etc.

h) Propiedades de congruencias, resolver congruencias lineales.

i) Clases de congruencias; se definen más o menos los anillos y los campos.

j) Codificación usando clases de congruencias. El código secreto de Rivest-Shamir-Adleman; se mencionan los teoremas de Fermat y Euler y el maestro los demuestra.

II.2 Polinomios y Ecuaciones.

Aquí nuevamente no se dan problemas concretos. Solución por radicales de ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grados. Se menciona la imposibilidad para las de quinto grado. Los números complejos se introducen como una necesidad para tratar el caso irreducible de la cúbica. Algebra y Geometría de números complejos. Un argumento geométrico para el Teorema Fundamental del Algebra.

El Teorema del Factor para polinomios abre el camino para una relación entre la solución de ecuaciones y una teoría de divisibilidad para polinomios, análoga a la de los enteros. Raíces comunes y raíces múltiples. Introducción a métodos numéricos. Regla de los signos de Descartes y métodos de Horner y Newton.

(Esto es un burdo bosquejo del curso. Se necesita precisar y completar más en varios puntos).

Los cursos a los que nos hemos referido aquí, han estado a cargo del Dr. Santiago López de Medrano y como ayudante Julieta Verdugo Díaz. (Ambos trabajando en el Grupo de Enseñanza de las Matemáticas, del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM).

B I B L I O G R A F I A

BIBLIOGRAFIA.

GOLOVINA, L. I. y YAGLOM, I. M. — Inducción el la Geometria. Ed. MIR. 1981

SOMINSKII, I. S. — El Método de la Inducción Matemática. Ed. LIMUSA 1982

GARDNER, MARTIN — ¡Ajá! Inspiración ¡ajá! Ed. LABOR 1981

VILENKIN, N. — ¿De cuántas formas? Combinatoria. Ed. MIR 1972

*COURANT Y ROBINS — ¿Qué es la Matemática? AGUILAR 1979

YAGLOM, A. M. y YAGLOM, I. M. — Challenging Mathematical Problems with elementary solutions Vol. 1 Combinatorial Analysis and Probability Theory. HOLDEN-DAY 1964

*POLYA, G. — Cómo Plantear y Resolver Problemas. TRILLAS 1984

*POLYA, G. — Matemáticas y Razonamiento Plausible. TECNOS 1966

*POLYA, G. — Mathematical Discovery

GARDER, MARTIN — Nuevos Pasatiempos Matemáticos. ALIANZA 1984

*LOPEZ DE MEDRANO, SANTIAGO — Lenguajes Simbólicos. ANUIES 1973

LOPEZ DE MEDRANO, SANTIAGO — Modelos Matemáticos. TRILLAS 1981

LIU, C.L. — Introduction to Combinatorial Mathematics. MC.GRAW HILL 1968

*ALEKSANDROV, KOLMOGOROV, LAURENT, — Mathematics its content, Methods and Meaning. MIT.PRESS 1969

BEAUMONT, R. A. y PIERCE, R. — The algebraic foundations of Mathematics. ADDISON-WESLEY 1963

DODGE, CLAYTON W. — Sets, Logic and numbers. PRINDLE, WEBER & SCHMIDT 1970

NORTHROP, EUGENE P. — Paradojas Matemáticas. UTEHA 1968

KASNER, E. y NEWMAN, J. — Matemáticas e Imaginación. SALVAT 1987

BEILER, ALBERT H. — Recreations in Theory of Numbers DOVER 1966

LUCHNIK, N. — Porqué me parezco a mi padre. MIR 1979

NEWMAN, JAMES R. — Sigma, El mundo de las Matemáticas. GRIJALBO 1969

KOYRÉ, ALEXANDRE — Estudios de Historia del Pensamiento científico. Bonaventura Cavalieri y la Geometría de los Continuos SIGLO XXI 1980

SMITH, DAVID EUGENE — History of Mathematics Vol II DOVER 1958

STRUIK, DIRK J. — Historia Concisa de las Matemáticas. IPN 1980

RADEMACHER, HANS Y TOEPLITZ OTTO — Números y Figuras. Matemáticas para todos ALIANZA 1970

COLERUS, EGMONT — Breve Historia de las Matemáticas DONCEL 1973

STRUIK, DIRK J. — A Source Book in Mathematics HARVARD UNIVERSITY PRESS 1969

anónimo — Elementos de Algebra. CAJA DE AHORROS DE FRANCIA. 18??

*HALMOS, P.R. — The teaching of problem solving articulo, American Mathematical Montly. Vol. 82, 466-470, 1975

*HALMOS, P.R.	The Heart of Mathematics. artículo, American Mathematical Montly. Vol. 87, 519-524, 1980
DAVIS, MARTIN	Hilbert's tenth Problem is unsolvable. artículo, American Mathematical Montly. Vol. 80, 233-269, 1973
GULLEN III, GEORGE	The smallest Prime factor of a Natural number. artículo, Mathematics Teacher, abril 1974
FERMAT, PIERRE DE	The "Pell" equation. artículo del libro A Source Book in Mathematics. 29-31 1969
BIDWELL, JAMES K.	Pascal's Triangle Revisited. artículo, Mathematics Teacher, mayo 1973
BASIL, SISTER MARY O.P.	Pascal's Pyramid. artículo, The Mathematics Teacher enero 1968
HARDY, G.H.	Discussion and correspondence, Mendelian proportions in a mixed population. artículo, Science julio 1908

NOTA.

Los libros marcados con "*" se recomiendan como lectura complementaria a los temas tratados en este trabajo.