38 24

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

EL TEOREMA DE GELFAND-MAZUR Y EL CALCULO FUNCIONAL SOBRE ALGEBRAS DE BANACH.

Tesis para obtener el título de :
MATEMATICO

Presenta :
SORIANO RAMIREZ VICENTE ANGEL

**

INTRODUCCION

Un álgebra de Banach es un álgebra lineal asociativa que como espacio vectorial, es un espacio de Banach cuya norma satisface la desigualdad multiplicativa $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$. Muchos espacios de Banach que se estudian en Análisis son al mismo tiempo algebras de Banach bajo una operación multiplicación. Un buen ejemplo es el espacio de las funciones absolutamente integrables con la convolución como multiplicación. Algunos ejemplos de Análisis motivaron a el estudio de espacios de Banach, un interés similar se despertará en el futuro para las algebras de Banach, ello depende sin duda de la existencia de apropiadas herramientas algebraicas , puesto que una gran parte del trabajo de álgebra se caracteriza por el estudio de propiedades universales lo cual es una limitación en los casos particularmente interesantes en Análisis. Son hasta el momento varios los trabajos en los cuales son tratadas las propiedades adicionales dadas por una operación multiplicación sobre un espacio de Banach entre ellos Nagumo con *Einige Analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen* y Yoshida con *On the group embedded in the metrical complete ring*, ambos publicados en 1936 tratan anillos métricos, Von Neumann en *Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren*, Murray y Von Neumann con *On rings of operators* y Stone con su artículo *Application of the theory of Boolean rings to general topology* proporcionan un fuerte impulso a el estudio de las algebras de operadores. También Wiener en su artículo *Tauberian theorems* y Beurling en *Sur les interales de Fourier absolument convergentes* publicados en 1932 y 1938 respectivamente son los pioneros en cuanto a la exposición de ciertas propiedades algebraicas de la convolución que son esenciales en algunos teoremas en análisis. Gelfand es uno de los fundadores de la teoría general de algebras de Banach cuyas primeras ideas sobre esta aparecieron en su publicación *On normed rings* elaborado en 1939 pero que salió publicado hasta 1941 en la U.R.S.S. La innovación de Gelfand consistió en el uso sistemático de la teoría elemental de la teoría de ideales para dar una demostración a el teorema de Mazur dado a conocer sin prueba en París en 1938 en un artículo llamado *Sur lea anneaux linéaires* y probado por Gelfand en *Normierte Ringe* en la U.R.S.S. hacia 1941, basandose en una generalización de el teorema de Liouville a funciones de valores vectoriales. También prueba un resultado que es trascendental en el caso de algebras conmutativas semisimples con identidad en donde asegura que cada una de estas algebras es insomorfa a un álgebra de funciones continuas sobre un espacio Hausdorff compacto. En ese tiempo Gelfand usó esta teoría para dar una prueba sencilla de el lema de Wiener que dice que el recíproco de una serie de Fourier absolutamente convergente es también una serie absolutamente convergente esto lo hizo en *Über absolut konvergente trigonometrische Reihen und Integrale* (1941), este hecho atrajo la atención a las algebras de Banach, que fué observada como una herramienta prometedora en Análisis pero un importante campo de investigación en álgebra. La teoría de algebras de Banach ha sido desarrollada desde entonces en dos lineas principales debido a la influencia algebraica y analítica. El énfasis analítico nos lleva a el estudio de ciertos casos particulares de algebras que tienen gran influencia dentro de la teoría de funciones. La influencia algebraica considera basicamente aspectos teóricos sobre su estructura encaminados a el tratamiento lo más general posible de las relaciones algebraicas dentro de esta estructura. Se puede preever aún la influencia del Análisis sobre la teoría de algebras de Banach y el desarrollo teórico algebraico puede en un futuro ser considerado como una disciplina independiente.

El trabajo consiste en primer lugar de una introducción a la teoría general de algebras de Banach proporcionando los conceptos básicos y definiciones que se ilustran con algunos ejemplos.

Un segundo capítulo trata exclusivamente algebras de Banach conmutativas en él se introduce el teorema de Gelfand-Mazur que es una herramienta importante dentro de la teoría, particularmente útil en el análisis posterior de los ideales máximos y funcionales lineales multiplicativos de un álgebra de Banach. En este esquema se analiza el espacio cuyos elementos son los ideales máximos para proseguir con un tratamiento sobre divisores topológicos de cero para algebras de Banach en general sobre los campos escalares $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, donde para finalizar la sección se proporciona una caracterización de los divisores topológicos de cero en términos de invertibilidad. Esta presentación es novedosa puesto que hasta el momento no se ha hecho su presentación en ningún trabajo de este caracter.

Un tercer capítulo se dedica a una presentación de el cálculo funcional sobre algebras de Banach, así como de una aplicación de este para contruir la exponencial en algebras de Banach proporcionando un principio de construcción de algunas otras funciones.

**

INDICE

1.1. CONCEPTOS BASICOS

DEFINICION 1.1.1: Un *álgebra* sobre un campo $\mathbb{K}$ (usualmente $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ dotado de una operación binaria, llamada multiplicación de $A\times A$ en A tal que ;

i) $x(yz) = (xy)z$

ii) $x(y+z) = xy + xz$; $(y + z)x = yx + zx$

iii) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

$x,y,z \in A$; $\alpha \in \mathbb{C}$.

Se dice que A es conmutativa si ;

iv) $xy = yx$,

y que A es un álgebra con identidad si existe un elemento $e \in A$ tal que

v) $ex = xe = x \qquad (x \in A)$.

DEFINICION 1.1.2.: Un *álgebra* A con una topología Hausdorff se llama *topológica* si las transformaciones ;

vi) $(x,y) \longrightarrow x + y$

vii) $(x,y) \longrightarrow xy$

viii) $(\lambda,x) \longrightarrow \lambda x$

de $A\times A \longrightarrow A$ y $\mathbb{K}\times A \longrightarrow A$ respectivamente son continuas.

A la continuidad de la operación (*vii*) se le llama continuidad conjunta del producto.

Sea A un álgebra topológica sobre $\mathbb{C}$. Denotemos por $\Phi(A)$ a la familia de todas las vecindades balanceadas del origen en A, i.e. si $U \in \Phi(A)$ entonces el origen $o \in \mathrm{int}(U)$ y $\lambda U \subseteq U$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$,$|\lambda| \leq 1$. La continuidad conjunta del producto es equivalente a la siguiente condición ; Para cada $U_\alpha \in \Phi(A)$ existe $U_\beta \in \Phi(A)$ tal que

$$(1) \qquad U_\beta^2 \subseteq U_\alpha$$

Demostración:

La expresión (1) significa que la multiplicación es conjuntamente continua en el origen, para demostrar esta continuidad en todo $A\times A$ se procede de la siguiente manera;

Para $x_o,y_o \in A$ y $V_\alpha \in \Phi(A)$ debemos encontrar un $V_\beta \in \Phi(A)$ de tal forma que si $x \in x_o+V_\beta, y \in y_o+V_\beta$ entonces

$$xy \in x_o+y_o + V_\alpha \text{ ó } (x_o+V_\beta)(y_o+V_\beta) \subseteq x_o+y_o+V_\alpha$$

pero esta última relación se cumple cuando $x_oV_\beta + V_\beta y_o + V_\beta^2 \subseteq V_\alpha$. Comencemos encontrando un U_β con $U_\beta^2 \subseteq U_\alpha$, de la continuidad de la multiplicación escalar hay un $\lambda \in (0,1]$ tal que $\lambda x_o,\lambda y_o \in U_\beta$ y seleccione V_β que cumpla : $\lambda^{-1}V_\beta \subseteq U_\beta$

así $\qquad x_oV_\beta + V_\beta y_o + V_\beta^2 \subseteq \lambda x_o\lambda^{-1}V_\beta + \lambda^{-1}V_\beta\lambda y_o + \lambda^2U_\beta^2 \subseteq 3U_\beta \subseteq V_\alpha$

con lo que se concluye la prueba.

Hay una clasificación de las algebras topologicas que se basa en considerar las propiedades del espacio topológico subyacente, así encontramos algebras métricas , localmente convexas, localmente acotadas, etc., cuando su espacio subyacente es métrico, local-convexo, local-acotado, etc., respectivamente.

DEFINICION 1.1.3.: Un álgebra de Banach es un álgebra topológica la cual tiene por espacio subyacente un espacio de Banach.

Un álgebra de Banach Λ no necesariamente tiene identidad multiplicativa (la cual si es que existe la podemos denotar por e). Si Λ no tiene identidad podemos sumergirla en un álgebra de Banach Λ con identidad, de la siguiente forma ;

Cada álgebra de Banach que no tenga identidad puede ser sumergida dentro de un álgebra de Banach que si la tenga, dicha álgebra se construye mediante el procedimiento de anexarle formalmente tal elemento e. Es decir, denotemos por Λ_1 al álgebra que es la suma directa de Λ con el campo escalar $\mathbb{C}$. Así

$$\Lambda_1 = \{(x,\alpha) ; x \in \Lambda \text{ y } \alpha \in \mathbb{C}\}$$

con las siguientes operaciones ;

$$(x,\alpha) + (y,\beta) = (x+y,\alpha+\beta)$$
$$\lambda(x,\alpha) = (\lambda x,\lambda\alpha)$$
$$(x,\alpha)(y,\beta) = (\alpha y+\beta x+xy+\alpha\beta),$$

es fácil ver que Λ_1 es un álgebra normada con identidad e y norma $\| (x,\alpha) \| = \| x \| + |\alpha|$.

La extensión Λ es un espacio completo (puede verse como el producto cartesiano de dos espacios de Banach) y su multiplicación continua pues para $x,y \in \Lambda$;$\lambda,\mu \in \mathbb{C}$, se tiene ;

$$\|(x,\lambda)(y,\mu)\| = \|(\lambda y+\mu x+xy+\lambda\mu)\| = |\lambda\mu| + \| \mu x+\lambda y+xy\| \leq$$
$$\leq |\lambda||\mu| + \|x\| \, |\mu| + \|y\| \, |\lambda| + \|x\| \, \|y\| =$$
$$= (|\lambda| + \|x\|) + (|\mu| + \|y\|) = \|(\lambda e + x)\| + \|(\mu e + y)\|$$

□

Claramente el álgebra $\Lambda^* = \{(x,0) ; x \in \Lambda\}$ es una subalgebra de Λ isomorfica e isométrica con Λ, a Λ_1 se le conoce como la unización de Λ.

Por esta construcción el estudio de las algebras de Banach puede ser reducido sin pérdida de generalidad y elegancia a considerar unicamente algebras de Banach con identidad.

El siguiente resultado es necesario para la teoría a desarrollar más adelante.

TEOREMA 1.1.4.: Sea Λ un álgebra de Banach entonces existe un espacio de Banach $\mathscr{X}$ tal que Λ es isomorfo a una subalgebra cerrada del álgebra $B(\mathscr{X})$ de todos los operadores acotados de $\mathscr{X}$ en sí mismo con la norma $\| T \| = \sup\limits_{\|x\|=1} \| Tx \|$.

Demostración:

Hacemos $\mathscr{X} = \Lambda$ si Λ tiene identidad, de otro modo ;

$$\mathscr{X} = \Lambda \oplus \{\lambda e\}$$

así $\mathscr{X}$ es álgebra de Banach y tiene identidad (Λ es subálgebra de $\mathscr{X}$). La transformación $\psi:\Lambda \longrightarrow B(\mathscr{X})$ definida por ;$\psi_x = T_x$, donde T es el operador multiplicación en Λ, es decir $T_x(y) = xy$ para toda $y \in \Lambda$, es un monomorfismo . Es fácil comprobar que :

$$T_{\lambda x+\mu y} = \lambda T_x + \mu T_y$$

$$T_{xy} = T_x T_y$$

para $x,y \in \Lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Además $T_0 = 0 \in B(\mathscr{X})$ y $T_x = 0$ sólo si $x = 0$. Esta primera parte muestra que ψ es isomorfismo algebraico, en seguida habrá que probar que ψ es homeomorfismo, para ello basta hacer ver que la norma $|||x||| = \|T_x\|$ y la norma en A son equivalentes. Por un lado tenemos :

$$(2) \quad |||x||| = \|T_x\| = \sup_{\|y\|\leq 1} \|xy\| \geq \|(xe/\|e\|)\| = \|x\|/\|e\|$$

por lo tanto $|||x|||\ \|e\| \geq \|x\|$, $|||.|||$ y $\|.\|$ serán normas equivalentes si podemos probar que el álgebra A es completa con la norma $|||.|||$. En efecto la función inyectiva $\psi: A \longrightarrow B(\mathscr{A})$ dada por $\psi(x) = T_x$ es continua por la desigualdad (2) y la transformación inversa $\psi^{-1}: \psi(A) \longrightarrow A$ será continua por el teorema de la función inversa de Banach, si probamos que $\psi(A)$ es álgebra de Banach, o sea que $\psi(A)$ es cerrada en $B(\mathscr{A})$. Demos $(T_{x_n})_n \longrightarrow T$ en $B(\mathscr{A})$, entonces para $y,z \in \mathscr{A}$ se tiene:

$$T_{x_n}(yz) = T_{x_n}(y)z,$$

por la asociatividad del producto. Debido a que $T_{x_n} \longrightarrow T$ en $B(\mathscr{A})$ y a que la multiplicación en $B(\mathscr{A})$ es continua se tiene, pasando a el límite , que $T(yz) = T(y)z$. Tomando $y = e$ tenemos $T(z)=Te)z$, donde $T(e) = \lim_n T_{x_n}(e) = \lim_n x_n = x_o$.

Así hemos demostrado que $T(x) = T(e)x = x_o z = T_{x_o}(x)$ para toda $x \in \mathscr{A}$, po lo tanto $T \in \psi(A)$ y las normas $|||.|||$ y $\|.\|$ son equivalentes.

□

COROLARIO 1.1.5.: Sea A un álgebra de Banach entonces existe una norma equivalente a la original en A que satisface las propiedades $i)$ $\|xy\| \leq \|x\|\ \|y\|$
$ii)$ Si A tiene identidad e, entonces $\|e\| = 1$.

Demostración:

Proponemos la norma $|||.|||$ del teorema anterior como la norma equivalente que satisface las propiedades requeridas como se probará a continuación. Sea $x,y \in A$ y $z \in B_1$ (la bola unitaria de A) ,entonces :

$\|T_{xy}(z)\| = \|T_x T_y(z)\| \leq \|T_x\|\ \|T_y(z)\| \leq \|T_x\|\ \|T_y\|\ \|z\| \leq \|T_x\|\ \|T_y\|$, así $\|T_{xy}\| \leq \|T_x\|\ \|T_y\|$ o bien $|||xy||| \leq |||x|||\ |||y|||$,para mostrar la segunda afirmación sea e la identidad en A, solo escribamos $|||e|||$:

$$|||e||| = \|T_e(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \{\|ex\|\} = \sup_{\|x\|=1} \{\|x\|\} = 1$$

□

1.2. COMPLEJIFICACION

Es conveniente desarrollar la teoría de algebras de Banach complejas dado que las algebras sobre el campo real vienen a ser un caso particular, también nos ahorramos el tratamiento para algebras sin identidad pues disponemos de la unización.

Podemos sumergir el álgebra real A en una cierta álgebra compleja normada $A_{\mathbb{C}}$. Sea $A_{\mathbb{C}}$ el producto cartesiano $A\times A$ en el cual las operaciones algebraicas son definidas así:

Para $(x,y),(u,v) \in A\times A$ y $\alpha+i\beta \in \mathbb{C}$ definimos

$$(x,y) + (u,v) = (x+u,y+v)$$
$$(\alpha+i\beta)(x,y) = (\alpha x-\beta y,\alpha y+\beta x)$$
$$(x,y)(u,v) = (xu-yv,xv+yu)$$

entonces $A_{\mathbb{C}}$ es un álgebra compleja, este conjunto es un espacio de Banach con la suma y multiplicación antes descritas y con la norma definida por la fórmula ;

$$|(x,y)| = \sup \{\|x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta\| + \|y \cos\theta + x \operatorname{sen}\theta\|\}$$

donde $\|.\|$ es la norma de A.

La inmersión $x \longrightarrow (x,0)$ de A en $A_{\mathbb{C}}$ es un isomorfismo homeomórfico (real) en vista de las desigualdades :

$$|(x,0)| = \sup_{\theta} \{\|x \cos\theta\| + \|x \operatorname{sen}\theta\|\} = \sup_{\theta} \{\|x\| (|\cos\theta| + |\operatorname{sen}\theta|)\}$$
$$= \|x\| \sup \{|\cos\theta| + |\operatorname{sen}\theta|\} = \|x\|\, 2^{1/2}.$$

en suma, [illegible]

Sólo nos resta probar que si A es completo con la norma $\|.\|$ entonces $A_{\mathbb{C}}$ es completo con la norma definida $|.|$. Sean $\{x_n\},\{y_n\}$ sucesiones de elementos del álgebra A, supongamos que $\{(x_n,y_n)\}_n$ es una sucesión de Cauchy en $A_{\mathbb{C}}$, entonces para toda $\varepsilon>0$ existe N tal que $n,m > N$ satisfacen $|(x_n,y_n) - (x_m,y_m)| < \varepsilon$ i.e.

$$\| x_n - x_m \| < \varepsilon\, 2^{1/2}$$

por lo tanto (x_n) es de Cauchy en A (análogamente $\{y_n\}$ es de Cauchy en A), se sigue que existen $x,y \in A$ por ser de Banach tal que $\{x_n\} \longrightarrow x$; $\{y_n\} \longrightarrow y$. Afirmamos que $\{(x_n, y_n)\} \xrightarrow[n]{} (x,y)$ i.e. que $\forall\, \varepsilon >0\ \exists\, N'$ tal que $\forall\, n > N' \to |(x_n,y_n) - (x,y)| < \varepsilon$, en efecto ;

$$|(x_n-x,y_n-y)| = \sup_{\theta} \{\|(x_n-x) \cos\theta - (y_n-y) \operatorname{sen}\theta\| +$$
$$+ \|(x_n-x) \operatorname{sen}\theta + (y_n-y) \cos\theta\|\}$$

desarrollaremos cada término de la expresión que se encuentra encerrada entre las llaves y al final escribimos la expresión resultante.

$$\|(x_n-x) \cos\theta - (y_n-y) \operatorname{sen}\theta\| =$$

$$= \|(x_n - x_m + x_m - x) \cos\theta - (y_n - y_m + y_m - y) \operatorname{sen}\theta\|$$

$$= \|[(x_n - x_m) + (x_n - x)] \cos\theta - [(y_n - y_m) + (y_m - y)] \operatorname{sen}\theta\|$$

$$= \|[(x_n - x_m) \cos\theta - (y_n - y_m) \operatorname{sen}\theta] + [(x_m - x) \cos\theta - (y_m - y) \operatorname{sen}\theta\|$$

$$\leq \|(x_n - x_m) \cos\theta - (y_n - y_m) \operatorname{sen}\theta\| + \|(x_m - x) \cos\theta - (y_m - y) \operatorname{sen}\theta\|$$

de igual modo

$$\|(y_n - y) \cos\theta + (x_n - x) \operatorname{sen}\theta\| =$$

$$= \|(y_n - y_m + y_m - y) \cos\theta + (x_n - x_m + x_m - x) \operatorname{sen}\theta\|$$

$$= \|[(y_n - y_m) + (y_m - y)] \cos\theta + [(x_n - x_m) + (x_m - x)] \operatorname{sen}\theta\|$$

$$= \|(y_n - y_m) \cos\theta + (x_n - x_m) \operatorname{sen}\theta] + [(y_m - y) \cos\theta + (x_m - x) \operatorname{sen}\theta]\|$$

$$\leq \|(y_n - y_m) \cos\theta + (x_n - x_m) \operatorname{sen}\theta\| + \|(y_m - y) \cos\theta + (x_m - x) \operatorname{sen}\theta\|$$

así la expresión total es

$$\leq \sup_\theta \{\|(x_n - x_m)\cos\theta - (y_n - y_m)\operatorname{sen}\theta\| + \|(y_n - y_m)\cos\theta + (x_n - x_m)\operatorname{sen}\theta\|$$

$$+ \|(x_m - x)\cos\theta - ((y_m - y)\operatorname{sen}\theta\| + \|(y_m - y)\cos\theta + (x_m - x)\operatorname{sen}\theta\|\}$$

$$\leq \sup \{\|(x_n - x_m)\cos\theta - (y_n - y_m)\operatorname{sen}\theta\| + \|(y_n - y_m)\cos\theta + (x_n - x_m)\operatorname{sen}\theta\|\} +$$

$$+ 2[|(x_m - x, 0)| + |(0, y_m - y)|]$$

$$\leq |(x_n, y_n) - (x_m, y_m)| + 2[2^{1/2}\|x_m - x\| + 2^{1/2}\|y_m - y\|]$$

$$= |(x_n, y_n) - (x_m, y_m)| + 2^{3/2}[\|x_m - x\| + \|y_m - y\|]$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/4(2^{3/2}) + \varepsilon/4(2^{3/2}) = \varepsilon$$

por lo tanto $A_{\mathbb{C}}$ es álgebra de Banach. Faltaría probar la submultiplicatividad de la norma, pero este desarrollo es largo y engorroso para incluirlo aquí.

$\square$

La siguiente proposicion dice que bajo una cierta condición un álgebra compleja que es álgebra de Banach real, también es álgebra de Banach compleja.

PROPOSICION 1.2.1.: Sea A un álgebra compleja la cual es un álgebra real normada con $|x|$, donde la transformación $x \longrightarrow ix$ es continua en esta norma. Entonces existe una segunda norma $\|x\|$ equivalente a $|x|$ con la que A es un álgebra normada compleja.

Demostración:

Defínase $\|x\| = \sup_\theta |e^{i\theta}x|$ entonces A es un álgebra normada compleja bajo $\|x\|$ excepto posiblemente que el elemento identidad no tenga norma igual a 1, esta falla se puede corregir mediante una multiplicación conveniente. Lo interesante es probar que $\|x\|$ es equivalente a $|x|$. En efecto bastara describir la continuidad de la transformación $x \longrightarrow ix$ i.e. $\exists\ \beta > 0$ constante tal que ;

$$|ix| \leq \beta|x| \qquad \forall\ x \in A$$

se sigue

$$|x| \leq \|x\| = \sup_\theta \{x \cos\theta + ix \operatorname{sen}\theta\}$$

$$\leq \sup_\theta \{|x \cos\theta| + |x \operatorname{sen}\theta|\}$$

$$\leq \sup_{\theta} \{|x| + |\iota x|\}$$
$$\leq \sup_{\theta} \{|x| + \beta|x|\}$$
$$= |x| (1 + \beta)$$

de aquí la equivalencia.

□

ALGEBRAS COCIENTES

Definición 1.2.2.: Sea Λ un álgebra, entonces $I \subseteq \Lambda$ se dice que es un ideal izquierdo (derecho) en Λ si I es un subespacio lineal de Λ tal que $xI \subseteq I$ ($Ix \subseteq I$), $x \in \Lambda, I \subseteq \Lambda$ además es llamado ideal bilateral si I es simultaneamente izquierdo y derecho en Λ. Un ideal izquierdo (derecho,bilateral) $I \subseteq \Lambda$ es propio si $I \neq \Lambda$, se dice que I es maximal si cuando $J \subseteq \Lambda$ es un ideal en Λ tal que $I \subseteq J$ ocurre que $I = J$ ó $J = \Lambda$. Además, $I \subseteq \Lambda$ se dice que es una subálgebra si I es un subespacio lineal tal que $x,y \in I$ implica que $xy \in I$.

Sea Λ un álgebra de Banach e I un ideal cerrado. En Λ/I introducimos la norma $|||X||| = \inf_{x \in X} \|x\|$ donde $\|.\|$ es la norma en Λ, entonces tenemos la siguiente :

PROPOSICION 1.2.3.: Λ/I es un álgebra de Banach.

Demostración :

Probamos de una vez que la $|||X||| = \inf_{x \in X} \|x\|$ es norma en el cociente Λ/I.

$i)$ $|||X||| \geq 0$ es claro.

$ii)$ Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y $X \in \Lambda/I$

$$|||\lambda X||| = \inf_{x \in X} \|\lambda x\| = \inf_{x \in X} |\lambda|\|x\| = |\lambda| \; |||X|||$$

$iii)$ $|||X + Y||| \leq |||X||| + |||Y|||$

En efecto ;

$$|||X + Y||| = \inf_{z \in X+Y} \|z\| = \inf_{x \in X ; y \in Y} \|x + y\| \leq \inf_{x \in X ; y \in Y} (\|x\| + \|y\|)$$

$$= \inf_{x \in X} \|x\| + \inf_{y \in Y} \|y\| = |||X||| + |||Y|||$$

$iv)$ Es inmediato que $|||[0]||| = 0$, inversamente supongamos que $|||X||| = 0$, entonces existe una sucesión $\{Y_n\}$ en $\Lambda, Y_n \in I$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_n \| X + Y_n \| = 0$. Afirmamos que $\{Y_n\}$ es de Cauchy en Λ. En efecto al considerar la relación ;

$\|Y_n - Y_m\| = \|X + Y_n - X - Y_m\| \leq \|X + Y_n\| + \|X + Y_m\| \longrightarrow 0$ cuando $n,m \longrightarrow \infty$

por lo tanto $Y_n \longrightarrow Y \in I$ por ser I cerrado.

Ahora bien $\|X + Y\| \leq \|X + Y_n\| + \|Y_n + Y\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty \Rightarrow \|X - Y\| = 0 \Rightarrow X - Y \in I$ por lo que $[X] = [0]$.

Ademas los resultados no paran ahí pues :

$$v) \quad |||XY||| = \inf_{z \in XY} \|z\| \leq \inf_{x \in X ; y \in Y} \|xy\|$$

$$\leq \inf_{x \in X ; y \in Y} \|x\| \|y\| = \inf_{x \in X} \|x\| \inf_{y \in Y} \|y\| = |||X||| \; |||Y|||$$

por último falta probar que es completo respecto a la norma así definida. Sea $\{x_n\}$ una sucesión fundamental de clases o sucesión de Cauchy i.e. $|||X_n - X_m||| \longrightarrow 0$ cuando $n,m \longrightarrow \infty$ entonces podemos elegir una subsucesión $\{X_{n_k}\}$ tal que la serie

$$\sum_k |||X_{n_{k+1}} - X_{n_k}|||$$

converge. Para un elememto $x_1 \in X_{n_1}$ podemos encontrar $x_2 \in X_{n_2}$

$$\text{tal que} \quad \|x_1 - x_2\| < 2\ |||X_{n_1} - X_{n_2}|||$$

además para este x_2 se puede encontrar $x_3 \in X_{n_3}$ tal que

$$\|x_2 - x_3\| < 2\ |||X_{n_2} - X_{n_3}|||$$

y así sucesivamente. Entonces también $\{x_n\}$ es de Cauchy y por tanto existe $x \in \Lambda$ al cual converge. Pero entonces la sucesión $\{X_{n_k}\}$ converge a la clase X que contiene a x, como $\{X_{n_k}\}$ es subsucesión arbitraria de $\{X_n\}$ se sigue que $X_n \longrightarrow X$ y por tanto Λ/I es completo.

□

Una observación importante sobre la topología de Λ/I ; La transformación homeomórfica de el álgebra Λ en Λ/I con respecto a un ideal cerrado que es obtenido al asignar a cada elemento $x \in \Lambda$ la clase X que lo contiene es una transformación continua abierta.

Para ello sea $V \subseteq \Lambda$ una esfera abierta con centro en el origen.

$$V = \{x \in \Lambda;\ \|x\| < \delta\}$$

y sea W la imágen de V en Λ/I. Por la definición de norma en el álgebra de las clases residuales Λ/I, la imágen consiste precisamente de las clases $X \in \Lambda/I$ para las cuales $\|X\| \le \delta$,por lo tanto W es un conjunto abierto en Λ/I. De la misma manera podemos ver que la imágen de cada esfera abierta en Λ es un conjunto abierto en Λ/I. Puesto que las esferas abietas forman un sistema de vecindades en Λ se sigue que cada conjunto abierto de Λ tiene una imágen abierta en Λ/I. O de otra manera supongase que C' en Λ/I es cerrado. Sea C la imágen inversa completa de C' y sea $x_i \in \{X_i\}$ $i \in \mathbb{N}$ una sucesión de Cauchy en C con límite $x \in X$ puesto que ;

$$|||\ X - X_n\ ||| < \|x - x_n\|$$

se tiene que $X = \lim_n X_n$ y por tanto pertenece a C', pero $x \in C$ y por lo tanto C es cerrado.

1.3. EJEMPLOS DE ALGEBRAS DE BANACH

Ejemplo 1: Sea $\mathscr{X}$ un espacio compacto Hausdorff y denote por $C(\mathscr{X})$ el conjunto de todas las funciones complejas continuas definidas sobre $\mathscr{X}$. Definimos las operaciones:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(\lambda f_1)(x) = \lambda f_1(x)$$

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$$

entonces resulta que $C(\mathscr{X})$ es un álgebra conmutativa con identidad sobre el campo $\mathbb{C}$.

Por una parte se infiere que cada $f \in C(\mathscr{X})$ es acotada ya que $\mathscr{X}$ es compacto y f continua, de esta forma es posible definir la norma de f por :

$$\| f \|_\infty = \sup_{x\in\mathscr{X}} \{|f(x)|\}$$

se verifica mediante un ejercicio de rutina que $\| f \|_\infty$ es en efecto una norma. $C(\mathscr{X})$ es completo con la norma así definida. En efecto;

Si (f_n) es de Cauchy entonces $|f_n(x)-f_m(x)| \leq \|f_n-f_m\|_\infty$ para cada $x \in \mathscr{X}$. Por lo tanto $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy de números complejos para cada $x \in \mathscr{X}$, por lo cual existe

$$f(x) = \lim_n f_n(x)$$

Es necesario mostrar que $f \in C(\mathscr{X})$ y que $\lim_n \|f - f_n\|_\infty = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$ se elige N tal que $n,m \geq N$ implica que $\|f-f_n\|_\infty < \varepsilon$, para $x' \in \mathscr{X}$ existe una vecindad U de x' tal que $|f_N(x')-f_N(x)|<\varepsilon$ para $x \in U$. Por lo tanto,

$$|f(x')-f(x)| \leq$$

$$\leq \lim_n|f_n(x')-f_N(x')|+|f_N(x')-f_N(x)|+\lim_n|f_N(x)-f_n(x)|$$

$$\leq 3\varepsilon$$

que implica la continuidad de f. Además, para $n \geq N$ y $x \in \mathscr{X}$ se tiene

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \lim_m f_m(x)| = \lim_m |f_n(x) - f_m(x)|$$

$$\leq \limsup_m \|f_n-f_m\|_\infty$$

entonces $\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$ y por tanto $C(\mathscr{X})$ es completo. De las propiedades del supremo se sigue la submultiplicatividad de la norma :

$$\|fg\|_\infty = \sup_{x\in\mathcal{X}} |(fg)(x)| = \sup_{x\in\mathcal{X}} |f(x)g(x)| \le \sup_{x\in\mathcal{X}} |f(x)|\,|g(x)|$$
$$= \sup_{x\in\mathcal{X}} |f(x)| \sup_{x\in\mathcal{X}} |g(x)| = \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

, por tanto $C(\mathcal{X})$ es álgebra de Banach.

□

Ejemplo 2: Sea $L^1(0,1)$ el espacio de las funciones absolutamente integrables sobre el intervalo $[0,1]$, la norma dada por

$$\| x \| = \int_0^1 | x(t) | \, dt$$

Por medio del teorema de Fubini es posible mostrar que para cada dos funciones $x(t), y(t)$ que pertenecen a $L^1(0,1)$ con el producto definido a través de la convolución

$$(x*y)(t) = \int_0^1 x(t-s)y(s)\, ds \qquad 0\le t\le 1$$

donde $x(t-s)=0$ si $s>t$. Se tiene que $x*y$ existe para toda t y además pertenece a $L^1(0,1)$, esta operación es asociativa, bilineal y la sustitución de s por $t-s$ muestra que también es conmutativa. Además , basandose unicamente en el teorema de Fubini se tiene :

$$\| x*y \| = \int_0^1 \left| \int_0^1 x(t-s)\, y(s)\, ds\right| dt$$
$$\le \int_0^1 \left\{ \int_0^1 | x(t-s)| \, | y(s)| \, ds \right\} dt$$
$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 | x(t-s) | \, dt \right\} y(s)\, ds$$
$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 | x(t) | \, dt \right\} y(s)\, ds$$
$$\le \int_0^1 | x(t) | \, dt \int_0^1 | y(s) | \, ds$$
$$= \| x \| \, \| y \|$$

Por lo tanto la convolución es continua respecto a ambos factores.

La completez de $L^1(0,1)$ es conocida y es un resultado de Análisis Funcional. □

Ejemplo 3: Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, denote por $L(\mathcal{X},\mathcal{X})$ el conjunto de las transfomaciones lineales de $\mathcal{X}$ en sí mismo, se definen la multiplicación en este espacio a través de la composición usual de las transformaciones lineales, afirmamos que

Sean S y T elementos de $L(\mathscr{X},\mathscr{X})$ y $x \in \mathscr{X}$. Entonces :

$$\|(S \circ T)(x)\| \leq \|S\| \, \|T(x)\| \leq \|S\| \, \|T\| \, \|x\| \qquad \forall x \in \mathscr{X}$$

tomando $x \in \mathscr{X}$ tal que $\|x\| \neq 0$ se tiene $\| S \circ T (x/\|x\|)\| \leq \|S\| \, \|T\|$ por lo tanto $\| S \circ T \| \leq \|S\| \, \|T\|$.

Ahora mostraremos que $L(\mathscr{X},\mathscr{X})$ es completo. Sea $\{S_n\}$ de Cauchy en $L(\mathscr{X},\mathscr{X})$, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe un N tal que $\|S_n - S_m\| < \varepsilon$ para $n,m \geq N$. Por lo tanto, si $x \in \mathscr{X}$, entonces tenemos $\|S_n(x) - S_m(x)\| \leq \|S_n - S_m\| \, \|x\| \leq \varepsilon \, \|x\|$ i.e. $\{S_n(x)\}$ es de Cauchy, para cada $x \in \mathscr{X}$, y por lo tanto converge a un elemento $S(x) \in \mathscr{X}$.

De la relación $S_n(x+y) = S_n(x) + S_n(y)$ se deduce en el paso a el límite que $S(x+y) = S(x) + S(y)$, análogamente $S(\lambda x) = \lambda S(x)$, se demuestra así que S es lineal. Finalmente de $\|S_n - S_m\| \leq \varepsilon$ para $n,m \geq N$ se deduce que $\|S_n(x) - S_m(x)\| \leq \varepsilon \, \|x\|$, así que $\|S(x)\| \leq (\|S_N\| + \varepsilon) \, \|x\|$ lo cual prueba que S es continua y por lo tanto está en $L(\mathscr{X},\mathscr{X})$, además $\|S - S_n\| \leq \varepsilon$ para $n \geq N$ de donde se infiere que la sucesión $\{S_n\}$ converge a S en $L(\mathscr{X},\mathscr{X})$.

$\therefore$ $L(\mathscr{X},\mathscr{X})$ es álgebra de Banach.

$\square$

Ejemplo 4: Sea $BV[0,1]$ el espacio de todas las funciones complejas de variación acotada sobre $[0,1]$ y nulas en 0 que además son continuas por la izquierda sobre $(0,1)$. Con las operaciones de adición , multiplicación y multiplicación por escalares puntual se tiene que $BV[0,1]$ es un álgebra.

Probaremos que $BV[0,1]$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_v = \sup \{ v_f(p) ; \ p$ partición de $[0,1]\}$ donde

$$v_f(p) = \sum_k |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

que está definida pues si f es de variación acotada entonces el conjunto $\{v_f(p) ; p \in \mathbb{P}[0,1]\}$ es acotado. Para mostrar que $BV[0,1]$ es un espacio de Banach recordaremos un resultado clásico de espacios de Banach ; "Si $\mathscr{X}$ es un espacio lineal normado entonces $\mathscr{X}$ es un espacio de Banach sii para cada sucesión $\{f_n\}$ de vectores en $\mathscr{X}$ la condición $\sum_n \|f_n\| < \infty$ implica la convergencia de $\sum_n f_n$."

para ello refierase CONWAY "A course in functional analysis".

Suponga que $\{\varphi_n\}$ es una sucesión de funciones en $BV[0,1]$ tal que $\sum_n \|\varphi_n\|_v < \infty$.

Puesto que $|\varphi_n(t)| \leq |\varphi_n(t) - \varphi_n(0)| + |\varphi_n(1) - \varphi_n(t)| \leq \|\varphi_n\|_v$ para $t \in [0,1]$, se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)$ converge absolutamente y uniformemente a la función φ definida sobre el $[0,1]$. Es inmediato que $\varphi(0) = 0$ y que φ es continua por la izquierda sobre $(0,1)$.

Sólo resta probar que ψ es de variación acotada y que

$$\lim_{n} \left\| \psi - \sum_{n=1}^{N} \psi_n \right\|_v = 0$$

En efecto sea $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} = 1$ alguna partición de $[0,1]$ entonces:

$$\sum_{i=0}^{k} |\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)| = \sum_{i=0}^{k} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t_{i+1}) - \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t_i) \right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(t_{i+1}) - \psi_n(t_i)|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{k} | \psi_n(t_{i+1}) - \psi_n(t_i) | \right\}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \| \psi_n \|_v$$

por lo tanto ψ es de variación acotada i.e. $\psi \in BV[0,1]$.

Además mediante la desigualdad :

$$\| \psi - \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \| =$$

$$\leq \sup \sum_{i=0}^{k} \left| (\psi - \sum_{n=1}^{N} \psi_n)(t_{i+1}) - (\psi - \sum_{n=1}^{N} \psi_n)(t_i) \right|$$

$$\leq \sup \sum_{i=0}^{k} \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \psi_n(t_{i+1}) - \sum_{n=N+1}^{\infty} \psi_n(t_i) \right|$$

$$\leq \sup \sum_{i=0}^{k} \sum_{n=N+1}^{\infty} | \psi_n(t_{i+1}) - \psi_n(t_i) |$$

$$\leq \sup \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} | \psi_n(t_{i+1}) - \psi_n(t_i) |$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \sup \sum_{i=0}^{k} | \psi_n(t_{i+1}) - \psi_n(t_i) |$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} \| \psi_n \|_v$$

es cierta para cada partición de $[0,1]$ y cada N así que en el proceso de límite, $N \longrightarrow \infty$ se tiene $\left\| \psi - \sum_{n=1}^{N} \psi_n \right\|_v \xrightarrow[N]{} 0$ entonces $\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n$ en la norma de $BV[0,1]$ y por lo tanto es completo.

Afirmamos que $\|fg\|_v \leq \|f\|_v \|g\|_v$. En efecto, puesto que

$$\|fg\|_v = \sup \{v_{fg}(p) ; p \in \mathbb{P}[0,1]\}$$

con $v_f(p) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k} | f(t_i)g(t_i) - f(t_{i-1})g(t_{i-1}) | \right\}$ sumando un cero de la forma $f(t_i)g(t_i) - f(t_i)g(t_i)$ y usando la desigualdad del triángulo.

$$v_{fg} = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k} | f(t_i) | \, | g(t_i) - g(t_{i-1}) | \right\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} | g(t_i) | \, | f(t_i) - f(t_{i-1}) |$$

$$\leq \|f\|_v \|g\|_v + \|f\|_v \|g\|_v$$

$$= 2 \, \|f\|_v \|g\|_v$$

se sigue que $\|fg\|_v \leq 2 \, \|f\|_v \, \|g\|_v$ lo cual prueba la continuidad de el producto.

$\square$

Ejemplo 5: Sea $\mathbb{F}$ el espacio de las funciones complejas de variable real que pueden ser desarrolladas en una serie trigonométrica absolutamente convergente con la norma dada por ;

$$\|z\| = \left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(\iota n t) \right\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$$

la serie en que se escribe $z = z(t)$ un elemento de este espacio está unicamente deteminada porque si multiplica con la operación convolución por la izquierda a $\exp(-\iota kt)$ se tiene ;

$$\exp(-\iota kt) * z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(\iota(n-k)t)$$

puesto que la convergencia es absoluta y uniforme entonces;

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\iota kt}\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{\iota(n-k)t}\,dt$$

$$\text{donde} \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{\iota(n-k)t}\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq k \\ c_k \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dt & \text{si} \quad n = k \end{cases}$$

de donde se infiere que ; $c_k = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} z(t)\; e^{-\iota kt}\,dt$

por lo tanto es única la representación a través de una serie i.e. los coeficientes están dados en forma única.

Además si

$$x(t) = \sum_k a_k \exp(\iota kt) \in \mathbb{F} \quad y \quad y(t) = \sum_k b_k \exp(\iota jt) \in \mathbb{F}$$

entonces también tenemos que $z(t) = x(t)y(t) \in \mathbb{F}$, puesto que el producto de las series absolutamente convergentes escritas anteriormente es también una serie absolutamente convergente

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(\iota nt)$$

$$\text{donde } c_n = \sum_{k+j=n}^{\infty} a_k b_j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j}\, b_j$$

más aún se tiene que

$$\|z\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_{n-j}|\,|b_j|$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_{n-j}|\,|b_j| \right\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| \sum_{j=-\infty}^{\infty} |b_j| = \|x\|\;\|y\|$$

por tanto la multiplicación es continua en la norma de $\mathbb{F}$ con respecto a ambos factores. ($\mathbb{F}$ es un álgebra de Banach con elemento unitario $x(t) \equiv 1$).

□

***

1.4. INVERTIBILIDAD Y CASI-INVERTIBILIDAD

En esta parte nos ocuparemos de analizar con detalle las nociones de invertibilidad y casi-invertibilidad en algebras de Banach. Comenzaremos definiendo dichos conceptos.

DEFINICION 1.4.1: Sea Λ un álgebra compleja normada con identidad, diremos que un elemento $r \in \Lambda$ es invertible (o regular) izquierdo (derecho) si existe otro elemento $s \in \Lambda$ tal que $sr = e$ ($rs = e$), al elemento s lo llamaremos inverso izquierdo (derecho) de r.

Cuando un elemento sea simultaneamente invertible por la izquierda y derecha simplemente diremos que es invertible en Λ en cuyo caso las inversas izquierda y derecha coinciden y son un elemento único, el inverso de r.

Denotese por

$$G^{i} = \{x \mid x \text{ es invertible izquierdo}\}$$

$$G^{d} = \{x \mid x \text{ es invertible derecho}\}$$

entonces

$$G = G^{i} \cap G^{d} = \{x \mid x \text{ es invertible}\}$$

resulta ser un grupo multiplicativo. Sin embargo no todo elemento de Λ es invertible lateral así daremos un nombre a los elementos restantes.

DEFINICION 1.4.2.: Si un elemento no es invertible izquierdo (derecho) entonces será llamado singular izquierdo (derecho).

Analogamente :

$$S^{i} = \{x \mid x \text{ es singular izquierdo}\}$$

$$S^{d} = \{x \mid x \text{ es singular derecho}\}$$

así $S = S^{i} \cup S^{d}$,dicho de otra manera x es singular si al menos le falla algún inverso. Una observación que es bueno recalcar es que un elemento de un álgebra real Λ es invertible sii es invertible en la complejificación del álgebra.

Estableceremos una propiedad importante de la norma en cualquier álgebra normada que nace de la pregunta sobre la existencia de

$$\lim_{n} \| x^{n} \|^{1/n}$$

y que proporciona un resultado básico en el estudio de algebras de Banach que está ligado con la existencia de elementos invertibles.

PROPOSICION 1.4.3. : El límite

$$\lim_{n} \| x^{n} \|^{1/n}$$

existe para cada $x \in \Lambda$ y cumple las siguientes propiedades :

i) $\nu(x) = \inf \|x^{n}\|^{1/n}$

ii) $0 \leq \nu(x) \leq \|x\|$

iii) $\nu(\alpha y) = |\alpha| \|x\|$

iv) $\nu(xy) = \nu(yx)$ y además $\nu(x^{k}) = \nu(x)^{k}$ $k \in \mathbb{N}$

v) Si $xy = yx$ entonces $\nu(xy) \leq \nu(x)\, \nu(y)$

$\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y)$

Demostración :

Iniciemos la prueba denotando por $\nu = \inf \|x^n\|^{1/n}$ y mostraremos que

$$\nu = \lim_n \|x^n\|^{1/n}$$

Para $\varepsilon > 0$ elegimos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^m\|^{1/m} < \nu + \varepsilon$. Para n arbitraria podemos escribir $n = pm + q$ con $0 \leq q \leq m-1$ así ;

$$\| x^n\|^{1/n} = \| x^{pm+q}\|^{1/n}$$

$$\leq \| x^m \|^{p/n}\| x \|^{q/n}$$

$$\leq \left\{\| x \| \right\}^{mp/n} \| x \|^{q/n}$$

$$\leq (\nu + \varepsilon)^{mp/n} \| x \|^{q/n}$$

donde $(pm)/n \xrightarrow[n]{} 1$; $q/n \xrightarrow[n]{} 0$ por tanto

$$\lim\sup_n \| x^n\|^{1/n} \leq \nu + \varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria y $\nu \leq \| x^n\|^{1/n}$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\lim\sup_n \| x^n\|^{1/n} \leq \nu \leq \lim\inf_n \| x^n\|^{1/n}$$

y así existe dicholímite y además $\lim_n \| x^n\|^{1/n} = \nu$.

Para probar *ii* sólo es necesario apelar a la propiedad multiplicativa de la norma ;

$$0 \leq \nu(x) \leq \lim_n \| x^n\|^{1/n}$$

puesto que es límite de una sucesión no negativa, además

$$\nu(x) = \inf_n \| x^n\|^{1/n} \leq \inf_n \left\{ \| x \|^n\right\}^{1/n} \leq \| x \|$$

Demostraremos *iii* a continuación :
Sea $x \in \Lambda$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\nu(x) = \lim_n \| (\alpha x)^n\|^{1/n}$$

$$= \lim_n (|\alpha|^n)^{1/n} \| x^n\|^{1/n}$$

$$= |\alpha| \lim_n \| x^n\|^{1/n}$$

$$= |\alpha| \nu(x)$$

Ahora se demuestra *iv*.

$$\nu(xy) = \lim_n \| (xy)^n\|^{1/n}$$

$$= \lim_n \|(xy)(xy)\ldots(xy)\|^{1/n}$$

$$= \lim_n \| x(yx)(yx)\ldots(yx)y \|^{1/n}$$

$$= \lim_n \| x\,(yx)^{n-1}\,y \|^{1/n}$$

$$\leq \lim_n \| x \|^{1/n} \|(yx)^{n-1}\|^{1/n} \| y \|^{1/n}$$

pero $\lim_n \| x \|^{1/n} = \lim_n \| y \|^{1/n} = 1$ de aquí se tiene que :

$$= \lim_n \| (yx)^{n-1} \|^{1/n} = \nu(yx)$$

la otra desigualdad es simétrica.

La igualdad $\nu(x^k) = \nu(x)^k$ $k \in \mathbb{N}$ se obtiene inmediatamente. En efecto :

$$\nu(x^k) = \lim_n \|(x^k)^n\|^{1/n}$$

$$= \lim_n \|(x^n)^k\|^{1/n}$$

$$= \lim_n \left\{ \| x^n \|^{1/n} \right\}^k$$

$$= \left\{ \lim_n \| x^n \|^{1/n} \right\}^k = \nu(x)^k$$

Para probar ν, suponemos que $xy = yx$ y probaremos que $\nu(xy) \leq \nu(x)\,\nu(y)$.

Asi, $$\nu(xy) = \lim_n \| (xy)^n\|^{1/n}$$

$$= \lim_n \| (xy)(xy)\ldots(xy)\|^{1/n}$$

$$= \lim_n \| x(yx)(yx)\ldots(yx)y \|^{1/n}$$

$$= \lim_n \| x(xy)(yx)\ldots(yx)y \|^{1/n}$$

$$= \lim_n \| (xx)(yy)x\ldots(yx)y \|^{1/n}$$

$$= \lim_n \| x^2y^2x(yx)(yx)\ldots(yx)x \|^{1/n}$$

$$= \lim_n \| x^2(y^2x)(yx)\ldots(yx)y \|^{1/n}$$

$$= \lim_n \| x^2(xy^2)(yx)\ldots(yx)y \|^{1/n}$$

$$= \lim_n \| (x^2x)(y^2y)x\ldots(yx)y \|^{1/n}$$

$$= \lim_n \| x^3y^3x(yx)\dots(yx)y \|^{1/n}$$

$$= \lim_n \| x^3y^3(xy)\dots(xy)\|^{1/n} = \dots$$

$$= \lim_n \| x^ny^n\|^{1/n}$$

$$\le \lim_n \| x^n\|^{1/n} \lim_n \| y^n\|^{1/n} = \nu(x)\ \nu(y)$$

la segunda parte tiene mayor dificultad, demostraremos que :

$$\nu(x+y) \le \nu(x) + \nu(y)$$

donde x e y conmutan, para hacer la prueba elegimos dos reales α,β tales que $\alpha > \nu(x)$; $\beta > \nu(y)$. Sea $a = \alpha^{-1}x$ y $b = \beta^{-1}y$ entonces :

$$\| (x+y)^n\|^{1/n} = \left\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\ y^{n-k} \right\|^{1/n}$$

$$\le \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k\ \beta^{n-k}\|a^k\|\ \|b^{n-k}\| \right\}^{1/n}$$

para cada n elijamos enteros n' y n'' tales que $n' + n'' = n$ y

$$\|a^{n'}\|\ \|b^{n''}\| = \max_{0\le k\le n} \| a^k\|\ \| b^{n-k}\|$$

entonces $$\nu(x + y) \le \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k\ \beta^{n-k}\|a^{n'}\|\ \|b^{n''}\| \right\}^{1/n}$$

$$=\left\{ (\alpha+\beta)^n\| a^{n'}\|\ \| b^{n''}\| \right\}^{1/n}$$

$$= (\alpha + \beta)\ \| a^{n'}\|^{1/n}\ \| b^{n''}\|^{1/n}$$,para toda n.

Hasta aquí lo único que hemos hecho ha sido acotar a $\nu(x + y)$, y necesitamos acotar a el miembro derecho de la desigualdad por $\nu(x) + \nu(y)$.

Ahora se elige una sucesión $\left\{ n_m \right\}_m$ tal que

$$\delta = \lim_{m\to\infty} \frac{n'_m}{n_m}$$ exista.

δ así elegido es límite de los cocientes n'_m/n_m por ello queda unicamente determinada la elección de n''_m para que $n_m=n'_m+n''_m$ se tiene también que :

$$1 = \frac{n'_m + n''_m}{n_m} = \frac{n'_m}{n_m} + \frac{n''_m}{n_m} \quad \text{así} \quad 1- \frac{n''_m}{n_m} = \frac{n'_m}{n_m}$$

por ello la sucesión que converge a δ está acotada por 1, y se observa que

$$\lim_m \frac{n''_m}{n_m} = 1-\delta$$

Podemos observar además que $0 \le \delta \le 1$ pues los terminos son cocientes de positivos y tales que $n'_t \le n_t$.

Ahora analicemos los posibles valores que puede tomar δ supongamos que $\delta \ne 0$ entonces necesariamente $n'_m \xrightarrow[m]{} \infty$ y tendremos :

$$\lim_m \left\| a^{n'_m} \right\|^{1/n_m} = \lim_m \left\{ \left\| a^{n'_m} \right\|^{1/n'_m} \right\}^{n'_m / n_m} = \nu(a)^{\delta} \le 1$$

esta última desigualdad es inmediata de la elección de a, como se desglosa a continuación ; $\nu(a) = \nu(\alpha^{-1}x) = |\alpha^{-1}|\ \nu(x)$ con $\alpha > \nu(x)$ así que $\nu(a) < 1$ y $\delta \in [0,1]$.

Si $\delta = 0$ entonces

$$\lim_m \sup \left\| a^{n'_m} \right\|^{1/n_m} \le \lim_m \left\| a \right\|^{n'_m/n_m} = 1$$

de cualquier manera en ambos casos tenemos :

$$\lim_m \sup \left\| a^{n'_m} \right\|^{1/n_m} \le 1,$$

mediante un argumento análogo se obtiene

$$\lim_m \sup \left\| b^{n''_m} \right\|^{1/n_m} \le 1,$$

de donde, $\nu(x+y) \le \alpha + \beta$ además esto es válido para toda $\alpha > \nu(x)$ y toda $\beta > \nu(y)$, y se infiere la desigualdad

$$\nu(x+y) \le \nu(x) + \nu(y)$$

□

Si Λ es conmutativa entonces se tiene por la propiedad υ que ν es una seminorma i.e. $\nu(x)$ se puede anular sin que x sea necesariamente cero, esto nos lleva a considerar a el conjunto de elementos del álgebra sobre los cuales se anula ν , al cual denotaremos en adelante por $\mathcal{N}$, en el caso en que $\mathcal{N} = \{0\}$ tenemos una norma en Λ, y nos podemos preguntar ¿ Cuándo coinciden $\nu(x)$ y $\| x \|$?, esto se responde con el siguiente :

LEMA 1.4.4. : Sea $x \in \Lambda$, entonces $\nu(x)$ coincide con $\| x \|$ sii $\|x^2\| = \|x\|^2$.

Demostración :

Supongamos que $\nu(x) = \|x\|$ entonces $\|x^2\| = \nu(x^2) = \nu(x)^2 = \|x\|^2$ por el resultado anterior, de ahí que la condición es necesaria. Ahora supongase que $\| x^2\| = \| x \|^2$, para toda $x \in \Lambda$ tenemos mediante un proceso iterativo $\| x^{2^k} \| = \| x \|^{2^k}$ $\forall$ k por consiguiente $\nu(x) = \lim_k \| x^{2^k} \|^{1/2^k} = \| x \|$.

□

Sería conveniente dar una definición formal para el conjunto $\mathcal{N}$, considere :

DEFINICION 1.4.5. : Un elemento x en un álgebra normada tal que $\nu(x) = 0$ es llamado topologicamente nilpotente.

$$\mathcal{N} = \{x \mid x \text{ es topologicamente nilpotente } \}$$

Observamos que todo elemento nilpotente es topologicamente nilpotente , ya que si x es nilpotente entonces habrá un $m \in \mathbb{N}$ tal que $x^m = 0$ asi

$$\lim_n \| x^n \|^{1/n} = \lim_t \| x^{m+t} \|^{1/n} = \lim_t \| 0\, x^t \|^{1/n} = \lim_t \| 0 \|^{1/n} = 0$$

el inverso no vale como se verá en un ejemplo del capitulo 2 de esta tesis.

Consideremos el álgebra de Banach $\mathbb{C}$ en donde $e = 1$ y la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k$ converge absolutamente para $x \in \mathbb{C}$ tales que $|1-x| < 1$ además el valor al que converge es $\sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}$ se sigue que x es invertible y el inverso de x está dado por

$$x^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k$$

esta construcción se hace para algebras de Banach en general en el siguiente :

LEMA 1.4.6. :Si A es un álgebra de Banach entonces cada elemento $r \in A$ tal que $\nu(e-r) < 1$ es invertible y su inverso está dado por la serie $r^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (e-r)^k$.

Demostración :

Supongamos que $\nu(e-r) < 1$, o sea $\lim_n \| (e-r)^n \|^{1/n} = \alpha < 1$ por lo tanto existen $\beta < 1$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\|(e-r)^n\| < \beta^n < 1$ para $n > N$ y como $\sum_n \beta^n$ converge entonces se sigue que $\sum_{n=0}^{\infty} \|(e-r)^n\|$ converge. Sea $Y_n = \sum_{k=0}^{n} (e-r)^k$, entonces si $n > m$ tenemos

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} (e-r)^k - \sum_{k=0}^{m} (e-r)^k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n} (e-r)^k \right\|$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{n} \|(e-r)^k\| \longrightarrow 0$$

cuando $n,m \longrightarrow \infty$ y por tanto (Y_n) converge a $r^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (e-r)^k$.

Ahora mostraremos que r^{-1} es el inverso :

$$r\ r^{-1} = r + \sum_{k=1}^{\infty} r(e-r)^k$$

$$= r + \sum_{k=1}^{\infty} (r-e)(e-r)^k + \sum_{k=1}^{\infty} (e-r)^k$$

$$= r + \sum_{k=1}^{\infty} (e-r)^k - \sum_{k=1}^{\infty} (e-r)^{k+1}$$

$$= r + (e - r) = e$$

de igual manera se prueba que $r^{-1}r = e$.

□

COROLARIO 1.4.7. : Si $\| e-r \| < 1$ entonces r es invertible.

Demostración :

Tenemos que $\nu(x) \leq \| x \|$, por lo tanto $\nu(e-r) < 1$ y por el teorema anterior vemos que r es invertible.

□

Como se sabe, un álgebra de Banach posee una doble estructura, y hasta el momento sólo se han analizado propiedades algebraicas, así que nos preguntamos sobre las propiedades topológicas de los elementos invertibles.

TEOREMA 1.4.8. : Sea Λ un álgebra de Banach y $r \in \Lambda$ invertible izquierdo (derecho) con inverso izquierdo (derecho) s, entonces cada $x \in \Lambda$ tal que $\|r-x\| < \| s\|^{-1}$ es también regular izquierdo (derecho). Por lo tanto se tiene que cada uno de los conjuntos G^{i}, G^{d} y G son abiertos.

Demostración :

Puesto que $\|e-sx\| = \|s(r-x)\| \leq \|s\| \ \|r-x\|$, la condición $\|r-x\| < \|s\|^{-1}$ implica ;

$$\|e-sx\| < \|s\| \ \|s\|^{-1} = 1$$

de donde se concluye que sx es invertible izquierdo y de la definición se sabe que existe un elemento $t \in \Lambda$ tal que $t(sx)=e$, si asociamos de otra forma se obtiene $(ts)x=e$, lo cual implica que x es también invertible izquierdo y la prueba concluye.

□

TEOREMA 1.4.9. : Para cada álgebra normada con identidad , la transformación $r \longrightarrow r^{-1}$ es un homeomorfismo de G en G.

Demostración :

Es suficiente con probar que la transformación $r \longrightarrow r^{-1}$ es continua. Supongamos que r, $r+h \in G$ y sea $(r+h)^{-1} = r^{-1}+k$ entonces nuestra tarea será mostrar que si $\|h\|$ es pequeña entonces también $\|k\|$ es pequeña, ya que $e = (r^{-1}+k)(r+h) = e+r^{-1}h+kr+kh$, entonces tenemos $r^{-1}h + kr + kh = 0$, ahora si multiplicamos por la derecha al elemento r^{-1} obtenemos $k = -r^{-1}hr^{-1}+khr^{-1}$. Por lo tanto $\| k \| \leq \| r^{-1}\|^2\|h\| + \| k \| \ \| h \| \ \| r^{-1}\|$.

Si $\|h\| \, \|r^{-1}\| < 1$ entonces $\|k\| - \|h\| \, \|h\| \, \|r^{-1}\| < \|r^{-1}\|^2 \, \|h\|$
$, \|k\| \, (1 - \|h\| \, \|r^{-1}\|) \le \|r^{-2}\| \, \|h\|,$

$$\text{por lo tanto} \quad \|k\| \le \frac{\|r^{-1}\| \, \|h\|}{1-\|h\| \, \|r^{-1}\|}$$

considerese $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon < \|r^{-1}\|$ y elijase $\delta = \varepsilon / 2\|r^{-1}\|^2$ entonces para $\|h\| < \delta$ obtenemos $\|h\| \, \|r^{-1}\| < \delta \, \|r^{-1}\| < 1/2$. Por lo tanto, $\|k\| < 2 \, \|r^{-1}\|^2 \|h\| < 2 \, \|r^{-1}\|^2 \, \delta = \varepsilon$, ya que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que la transformación en cuestión es continua lo cual concluye la prueba.

□

Podemos proporcionar ahora un resultado que nos ayude a clasificar a los elementos de $\mathcal{N}$ i.e. a los topologicamente nilpotentes.

PROPOSICION 1.4.10. : Sea Λ un álgebra de Banach con identidad e. Si $x \in \Lambda$ es topologicamente nilpotente entonces x es singular.

Demostración :

En efecto, supongamos que x es invertible entonces

$$1 = \| e \| = \| (x^{-1}x)^n \|^{1/n}$$

$$= \| (x^{-1})^n \, x^n \|^{1/n} \le \| (x^{-1})^n \|^{1/n} \, \| x^n \|^{1/n} \text{ ,para toda } n \in \mathbb{N},$$

simplemente considerando el proceso de límite tenemos :

$$1 \le \lim_n \|(x^{-1})^n\|^{1/n} \, \|x^n\|^{1/n} \le \|x^{-1}\| \, \lim_n \|x^n\|^{1/n}$$

lo cual contradice el hecho que :

$$\lim_n \| x^n \|^{1/n} = 0$$

por lo tanto x tiene que ser singular.

□

Sin embargo el recíproco de la afirmación anterior no es cierto como lo muestra el siguiente :

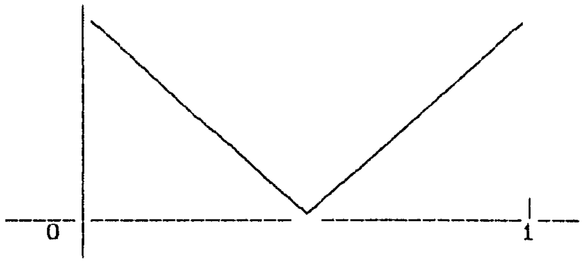
Ejemplo 1.4.11.:

Considere el espacio de Banach $C([0,1])$ con la norma del supremo :

$$\| f \| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \qquad \text{para} \qquad f \in C([0,1])$$

$$\text{Defina} \qquad f(x) = \begin{cases} -2x+1 & 0 \le x \le 1/2 \\ \\ 2x-1 & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \text{, cuya gráfica}$$

aparece a continuación.



Esta función es continua pero no es invertible. Además, ya que $f^n(0) = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\left\{\| f^n \|\right\}^{1/n} = 1$ y por lo tanto f no es nilpotente.

Recordemos que si A es un álgebra de Banach sin identidad entonces tenemos un mecanismo para agregarsela. Sea $A^{\sim}$ su unización. Supongase que el elemento $(e-x) \in A^{\sim}$, con $x \in A$ y que $(e-x)$ es invertible en $A^{\sim}$, entonces el inverso $(e-x)^{-1}$ es de la forma

$$(e-y), \text{ con } y \in A.$$

Lo anterior significa que $(e-x)(e-y)=e$.

Por lo tanto $e=e(e-y)-x(e-y)=e-y-x+xy$ con $x,y \in A$, con lo cual obtenemos que

$$(1) \qquad x+y-xy=0.$$

Así para que $(e-x)$, con $x \in A$, sea invertible se necesita que exista $y \in A$ tal que se cumple (1).

DEFINICION 1.4.12. : Sea $\eta : A \times A \longrightarrow A$ definido por $\eta(x,y)=x+y-xy$ para $x,y \in A$.

DEFINICION 1.4.13. : Sea A un álgebra de Banach sin identidad y $x \in A$ un elemento, x es casi-invertible izquierdo si existe un elemento $y \in A$ llamado su casi-inverso, tal que $\eta(x,y) = 0$.

(De igual manera se define casi-invertible derecho, si es simultaneamente casi-invertible izquierdo y derecho entonces se dice simplemente que es casi-invertible).

En tal caso se tiene $\eta(x,y) = 0 = \eta(y,x)$, a y se le llama casi-inverso y se le denota por x°.

Si $A^{\sim} = A \oplus \{\lambda e\}$ es posible definir la transformación

$$T : A \longrightarrow A^{\sim}$$
$$T(x) = e-x$$

a η regularmente se le denota por $(\circ)$ i.e. $\eta(x,y) = x \circ y$ observese que la multiplicación $(\circ)$ es transformada por T en la multiplicación usual :

$$\begin{aligned} T(\eta(x,y)) &= T(x \circ y) \\ &= e - x \circ y = e - x - y + xy \\ &= e - x - y(e-x) = (e-x)\,(e-y) \\ &= T(x)\, T(y) \end{aligned}$$

La transformación T lleva a el conjunto de los elementos casi-invertibles de A en el conjunto de los elementos invertibles $A^{\sim}$ inyectivamente. Por ello se sigue que el conjunto de los elementos casi-invertibles es un grupo con respecto a la operación $\circ$. La unidad de este grupo es el cero de A.

Nuestra tarea consiste en este momento en proporcionar algunos criterios para localizar facilmente algunos elementos casi-invertibles.

LEMA 1.4.14. : Sea $x \in A$ tal que $\nu(x)<1$, x es casi-invertible y

$$x^{\circ} = -\sum_{n=1}^{\infty} x^{n}$$

Demostración :

Similarmente con la prueba del lema 1.4.6. se ve que la sucesión

$$(Y_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x^{k} \right\}_n$$

es convergente a $y=\sum_{k=1}^{\infty} x^{k}$ en A. Por lo tanto se tiene

$$xY_n = Y_n x = -\sum_{k=1}^{n} x^{k+1}$$

$$= -\sum_{k=2}^{n+1} x^{k} = x - \sum_{k=1}^{n+1} x^{k}$$

$$= x + Y_{n+1} \qquad n \in \mathbb{N},$$

Pasando a el límite se obtiene $xy = yx = x + y$, así $\eta(x,y) = \eta(y,x) = 0$,

por lo tanto x es casi-invertible y además $y = x^{\circ}$.

□

Los elementos casi-invertibles como conjunto poseen la propiedad de ser un conjunto abierto como se muestra en el siguiente resultado.

TEOREMA 1.4.15. : El conjunto de todos los elementos casi-invertibles de un álgebra de Banach A es abierto.

Demostración :

Sea $A^{\sim} = A \oplus (\lambda e)$. Si x es un elemento casi-invertible de A, entonces existe $x^{\circ} \in A$ con la propiedad $\eta(x^{\circ},x) = 0$, ahora bien, para $y \in A$ se tiene

$$x^{\circ} \circ y = \eta(x^{\circ},y)$$

$$= x^{\circ}+y-x^{\circ}y = x^{\circ}+ y - x^{\circ}y - x^{\circ}x$$

$$= x^{\circ}+ y - x^{\circ}y - \eta(x^{\circ},x)$$

$$= x^{\circ}+ y - x^{\circ}y - x^{\circ} - x + x^{\circ} x$$

$$= y - x - x^{\circ}y + x^{\circ}x = (e-x^{\circ})(y-x)$$

en consecuencia ;

$$\| x^{\circ} \circ y \| \leq \| e - x^{\circ} \| \; \| y - x \|$$

así que para elementos y tales que $\| y - x \| \leq \dfrac{1}{\| e - x^{\circ} \|}$ se sigue de inmediato $\nu(x^{\circ} \circ y) \leq \| x^{\circ} \circ y \| \leq \| e - x^{\circ} \| \; \| y - x \| < 1$, por el lema anterior es casi-invertible para tales elementos y. De aquí se infiere que existe un $z \in A$ tal que $z^{\circ} \circ x^{\circ} \circ y = 0$, por ello cada elemento y es casi-invertible izquierdo. Mediante un argumento similar es posible probar que los elementos que satisfacen la desigualdad $\| y - x \| \leq \dfrac{1}{\| e - x^{\circ} \|}$ i.e. los elementos y que distan de x en menos de $\dfrac{1}{\| e - x^{\circ} \|}$ son también casi-invertibles derechos, i.e. se tiene la existencia de una vecindad de x consistente de elementos casi-invertibles lo cual justifica el teorema.

□

***

1.5. EL ESPECTRO

Una noción fundamental en la teoría de algebras de Banach es la de espectro. Si Λ es un álgebra de Banach compleja con identidad e, entonces se define el espectro de un elemento $x \in \Lambda$ como el conjunto de $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\lambda e - x$ (algunos autores consideran $x - \lambda e$) es no invertible o singular en Λ, ya que es conveniente extender esta definición a las algebras de Banach sin identidad, entonces hacemos la siguiente consideración. Sea $\lambda \neq 0$, entonces $(1/\lambda)(\lambda e - x) = e - (1/\lambda)x$ por lo tanto tenemos que λ está en el espectro de x si y sólo si $(1/\lambda)x$ es casi-singular, lo cual sería una buena definición de espectro en general.

Además cero está en el espectro de x si y sólo si x es no invertible. Toda esta discusión se formaliza en la siguiente :

DEFINICION 1.5.1. : Sea Λ un álgebra compleja y x algún elemento en Λ. Entonces el espectro de x en Λ, denotado por $\sigma(x)$ es el conjunto de $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, tales que $(1/\lambda)x$ es casi-singular, e incluye al cero si x es singular. Así, si Λ no tiene identidad entonces $0 \in \sigma(x)$ para toda $x \in \Lambda$. Observamos de nuevo si Λ tiene identidad e, entonces

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda e - x \text{ es no invertible en } \Lambda\}.$$

Observe que el espectro puede ser definido sobre un campo arbitrario de escalares, aquí nos ocuparemos de algebras complejas, en este caso el espectro de $x, \sigma(x)$ es compacto y no vacío. Esto puede fallar si el álgebra es real, por ello es útil su complejificación.

DEFINICION 1.5.2. : Sea Λ un álgebra real y x algún elemento de Λ. Entonces se define el espectro $\sigma(x)$ respecto a Λ como el espectro de x considerando este como un elemento de la complejificación $\Lambda_{\mathbb{C}}$ de Λ.

Es posible observar de esta definición que el espectro de un elemento no es necesariamente real y puede por tanto no estar contenido en el campo escalar de el álgebra.

El siguiente resultado proporciona una herramienta de uso frecuente en el desarrollo de la teoría puesto que fundamenta la demostración de la compacidad y no vacuidad del espectro.

Supongamos que $\nu(x) \neq 0$ y que la proposición es falsa en este caso.

La función $f(z) = (z^{-1}x)^{\circ}$ está definida y es continua para $|z| \geq \nu$, además tenemos en este caso que $\left(\frac{x}{z}\right)^{\circ} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{z}\right)^{n}$ donde $|z| \geq \nu$, mejor aún como tenemos que $\lim_{z\to\infty} z^{-1}x = 0$ la continuidad de la casi-inversa proporciona $\lim_{z\to\infty} \left(\frac{x}{z}\right)^{\circ} = 0$ por tanto f debe ser uniformemente continua para $|z| \geq \nu$.

En efecto :

Dada ε existe M tal que si $|z| > M \Rightarrow \| x/z \| < \varepsilon/2$ si $|z_1-z_2|<1$ y $|z_1|;|z_2| > M$

$$\Rightarrow \left\| \left(\frac{x}{z_1}\right)^{\circ} - \left(\frac{x}{z_2}\right)^{\circ} \right\| \leq \left\| \left(\frac{x}{z_1}\right)^{\circ} - \left(\frac{x}{z_2}\right)^{\circ} \right\| < \varepsilon$$

Considero el compacto $\{ z ; \nu(x) \leq |z| \leq M \}$, para $\varepsilon>0$ $\exists$ $\delta>0$ tal que si $|z_1-z_2| < \delta$ y $|z_1|;|z_2|<2M$ lo que puede pasar es que $|z_1|>M$ i.e. que

$$|z_2| = |z_2-z_1+z_1| \geq |z_1| - |z_2-z_1|$$
$$\geq 2M - |z_1-z_2| \geq 2M-M = M$$

pues $|z_1-z_2|<\delta$, por tanto se infiere que $|z_2|>M$ pero puesto que $|z_1|;|z_2|>M$ se tiene que es uniformemente continua.

□

Seleccionemos ahora $w_1,\ldots,w_n$ las raices complejas n-ésimas de la unidad y $\lambda \in \mathbb{C}$ un escalar fijo entonces $z_i = \lambda\ w_i$ $(i=1,\ldots,n)$. Por otra parte es posible hacer la descomposición en polinomios mónicos de grado uno, de la siguiente forma :

$$1 - \left(\frac{x}{z}\right)^{n} = \left(1 - \frac{x}{z}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{z}\right)$$

que escrita en término de la operación $(\circ)$ se escribe como :

$$\left(\frac{x}{z}\right) = \left(\frac{x}{z_1}\right) \circ \cdots \circ \left(\frac{x}{z_n}\right)$$

de donde se obtiene que $\left(\frac{x}{z}\right)^{n}$ es casi-invertible para cada n.

Si denotamos $R_j = -\left(\frac{x}{z_j}\right) + \left(\frac{x}{z_j}\right)^{2} + \ldots + \left(\frac{x}{z_j}\right)^{n-1}$ entonces se obtiene que $\left(\frac{x}{z}\right)^{n} = \left(\frac{x}{z}\right) \circ R_j$ por tanto también $\left(\frac{x}{z_j}\right)^{n}$ es casi-invertible y se tiene que :

$$f(z_j) = (z_j^{-1}\,x)^{\circ} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{z_j}\right)^n$$

además ;

$$R_j = \left(\left(\frac{x}{z}\right)^n\right)^{\circ} = R_j \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{z}\right)^n$$

$$=\left\{\left(1-\frac{x}{z_j}\right)\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{z}\right)^n\right)+\ldots+\left(1-\left(\frac{x}{z_j}\right)^{n-1}\right)\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{z}\right)^n\right)\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{z}\right)^n$$

Observemos que R_j tiene la forma $\dfrac{x^t}{w_j^t\, z_j^t}$ $1 \le t \le n-1$ y por

ejemplo si tomamos la raíz i-ésima :

$$\frac{x}{\lambda w_1}+\frac{x}{\lambda w_1^2}+\frac{x}{\lambda w_1^3}+\ldots+\frac{x}{\lambda w_1^n}=$$

$$=\frac{x}{\lambda}\left\{\left(\frac{1}{w_1}\right)+\left(\frac{1}{w_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{w_1}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{x}{\lambda}\left\{\frac{w_1^n-1}{w_1-1}\right\} = 0$$

tenemos por tanto : $R_1 + \ldots + R_n = 0$, entonces la suma

$$\sum_{j=1}^{n} f(z_j) = \sum_{j=1}^{n} R_j \circ \left(\left(\frac{x}{z_j}\right)^n\right)^{\circ} = n\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{z}\right)^n = n\left(\frac{x}{z}\right)^{\circ}$$

Usando el hecho que f es uniformemente continua, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu,\mu$ tales que $\nu < \mu$ (que no dependen de la n que se ha elegido) y $\|f(\nu_j)-f(\mu_j)\| < \varepsilon \qquad \forall\ j = 1,\ldots,n.$

Entonces :

$$\left\|\left(\left(\frac{x}{\nu}\right)^n\right)^{\circ}-\left(\left(\frac{x}{\mu}\right)^n\right)^{\circ}\right\|$$

$$=\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\nu_j)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\mu_j)\right\|$$

$$= \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\nu_j) - f(\mu_j) \right\|$$

$$\leq \left| \frac{1}{n} \right| \sum_{j=}^{n} \| f(\nu_j) - f(\mu_j) \| < \frac{1}{n}\, n\, \varepsilon = \varepsilon \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

De otra manera, puesto que $\nu < \mu$ se sigue que $\left\| \left(\left(\frac{x}{\nu} \right)^n \right)^{\circ} \right\| < \varepsilon$ para n grande, i.e. $\left(\left(\frac{x}{\nu} \right)^n \right)^{\circ} \longrightarrow 0$ cuando $\left(\frac{x}{\nu} \right)^n \xrightarrow[n]{} 0$.

Sin embargo esto es imposible puesto que $\left\| \left(\frac{x}{\nu} \right)^n \right\| \geq 1$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto la suposición $\alpha \notin \sigma(x)$ con $|\alpha| \geq \nu$ es falsa y el teorema debe ser cierto.

□

Un resultado que garantiza una forma más simple de encontrar el espectro de un elemento x en un álgebra sin identidad Λ propone que encuentre el espectro de x respecto a $\Lambda_1 = \Lambda \oplus \mathbb{C}e$, lo cual en algunos casos de algebras particulares resulta más sencillo.

TEOREMA 1.5.4. : Sea Λ un álgebra de Banach sin identidad. Si $x \in \Lambda$ entonces $\sigma_{\Lambda}(x) = \sigma_{\Lambda_1}(x)$.

Demostración :

Notamos primero que $0 \in \sigma_{\Lambda_1}(x)$, porque si supone que x es invertible en Λ_1, entonces existe algún $y \in \Lambda$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que $(x,0)(y,\alpha) = (xy+\alpha x,0) = (0,1)$ lo cual es imposible.

Ahora supongase que $\xi \in \sigma_{\Lambda}(x)$. Si $\xi=0$ entonces por el párrafo anterior se ve que $\xi \in \sigma_{\Lambda_1}(x)$. Si $\xi \neq 0$ entonces $\frac{x}{\xi}$ es casi-singular en Λ y por lo tanto en Λ_1. Además si supone que $\frac{x}{\xi}$ es casi-invertible en Λ_1, entonces existe $y \in \Lambda$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ para los cuales se tiene :

$$(x/\xi,0) \circ (y,\alpha) = (x/\xi,0) + (y,\alpha) - (x/\xi,0)(y,\alpha)$$

$$= (x/\xi + y - xy/\xi - \alpha x/\xi, x) = (0,0)$$

Consecuentemente $\alpha = 0$ y $\frac{x}{\xi} \circ y = 0$. Mediante un procedimiento análogo se obtiene $y \circ \frac{x}{\xi} = 0$, y también $\frac{x}{\xi}$ es casi-invertible en Λ, lo cual es una contradicción. Entonces $\frac{x}{\xi}$ es casi-simgular en Λ_1, por tanto $\sigma_{\Lambda}(x) \subset \sigma_{\Lambda_1}(x)$.

Inversamente, el párrafo anterior muestra que si $\xi \neq 0$ y $x-\xi e$ es singular en Λ_1, entonces $\frac{x}{\xi}$ es casi-singular en Λ, además $0 \in \sigma_{\Lambda_1}(x)$ por la primera parte de la prueba. Por lo tanto $\sigma_\Lambda(x) = \sigma_{\Lambda_1}(x)$.

□

PROPOSICION 1.5.5. : Sea Λ un álgebra de Banach. Si $x \in \Lambda$, entonces $\sigma(x)$ es un subconjunto compacto y no vacío de $\{\xi \in \mathbb{C};\ |\xi| \leq \|x\|\}$.

Demostración :

En vista del teorema anterior $\sigma_{\Lambda_1}(x) = \sigma_\Lambda(x)$ cuando Λ no tiene identidad, por ello podemos suponer sin pérdida de generalidad que Λ tiene una identidad e. Si suponemos que $\sigma(x)=\emptyset$ entonces $x-\xi e$ es invertible para cada $\xi \in \mathbb{C}$. Entonces sea x^* un funcional lineal continuo sobre Λ tal que $x^*(x^{-1}) = 1$, y considere la función $g:\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(\xi)=x^*[(x-\xi e)^{-1}]$, $\xi \in \mathbb{C}$.

Se puede probar que g es una función entera .

$$\frac{x^*((x-\lambda e)^{-1})-x^*((x-\lambda_o e)^{-1})}{\lambda-\lambda_o} =$$

$$x^*\left[\frac{(x-\lambda e)^{-1}-(x-\lambda_o e)^{-1}}{\lambda-\lambda_o}\right]$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda_o} \frac{1}{\lambda-\lambda_o} \quad x^*\left[(x-\lambda e)^{-1} - (x-\lambda_o e)^{-1}\right]$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda_o} \quad \frac{1}{\lambda-\lambda_o} x^*\left[(x-\lambda_o e)(x-\lambda e)^{-1}(x-\lambda_o e)^{-1}-(x-\lambda e)(x-\lambda e)^{-1}(x-\lambda_o e)^{-1}\right]$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda_o} \quad \frac{1}{\lambda-\lambda_o} \quad x^* \left[(\lambda-\lambda_o)(x-\lambda e)^{-1}(x-\lambda_o e)^{-1}\right]$$

$$= \lim_{\lambda-\lambda_o} \ x^* \left[(x-\lambda e)^{-1}(x-\lambda_o e)^{-1}\right] \qquad (2)$$

como tomar inversos es una función continua y como x^* es continua entonces se sigue que (2) adopta la forma :

$$x^*[\ ((x-\lambda e)^{-1})^2]$$

$\therefore$ g es entera.***

Para ello es suficiente ver que $\lim_{|\xi|\to\infty} g(\xi) = 0$. Pero si $\xi \neq 0$ es evidente que $(x-\xi e)^{-1} = (x/\xi - e)^{-1}/\xi$, por tanto de la continuidad de la inversión en A se deduce que

$$\lim_{|\xi|\to\infty} (x-\xi e)^{-1} = \lim_{|\xi|\to\infty} \frac{(x/\xi - e)^{-1}}{\xi} = 0$$

Entonces puesto que x^* es continuo obtenemos

$$\lim_{|\xi|\to\infty} g(\xi) = \lim_{|\xi|\to\infty} x^* [(x-\xi e)^{-1}] = x^*(0) = 0$$

Por tanto g es una función entera acotada y por el teorema de Liouville se ve que es constante, se sigue de inmediato que $g(\xi)=0$ $\xi \in \mathbb{C}$, lo cual contradice que $g(0) = 1$. Por tanto $\sigma(x) \neq \emptyset$.

Además si $\xi \in \mathbb{C}$ es tal que $|\xi| > \|x\|$ entonces $\|x/\xi\| < 1$ por tanto x/ξ es casi-invertible, aún más también se verifica que $\sigma(x) \subset \{\xi \in \mathbb{C}: |\xi| \leq \|x\|\}$.

Para mostrar que es cerrado bastará probar que el complemento del espectro es abierto, denotemos a tal conjunto por B.

Sea x tal que $\|x\|>0$, entonces

$$\left\| \frac{x}{\lambda} - \frac{x}{\xi} \right\| = \left| \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\xi} \right| \|x\|$$

por lo tanto $\left\|\frac{x}{\lambda}-\frac{x}{\xi}\right\| < \delta$ si $\left|\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\xi}\right| < \frac{\delta}{\|x\|}$, ahora bien como la función $1/z$ es continua en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, entonces existe $\delta_1>0$ tal que si $|\lambda-\xi|<\delta_1 \Rightarrow \left|\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\xi}\right|<\frac{\delta}{\|x\|} \Rightarrow \left\|\frac{x}{\lambda}-\frac{x}{\xi}\right\|<\delta \Rightarrow \frac{x}{\lambda}$ es invertible.

Por lo tanto B es abierto y $\sigma(x)$ es cerrado.

Si $\|x\|=0 \Rightarrow \sigma(x) = \{0\}$. Por lo tanto $\sigma(x)$ es un subconjunto cerrado de $\{\xi \in \mathbb{C}: |\xi| \leq \|x\|\}$ y también $\sigma(x)$ es compacto.

□

COROLARIO 1.5.6. : Bajo las hipótesis del teorema anterior se garantiza que $\max_{\xi\in\sigma(x)} |\xi| = \nu(x)$.

Demostración :

Por la proposición 1.5.3. de esta sección se tiene que $\nu(x)\leq \sup_{\xi\in\sigma(x)} |\xi|$ así que sólo será necesario probar que $\nu(x)\geq \sup_{\xi\in\sigma(x)} |\xi|$, nuevamente sólo se tratará el caso complejo. Supongamos que $\xi \in \mathbb{C}$ es tal que $\nu(x) < |\xi|$, entonces tenemos $\frac{1}{|\xi|}\nu(x) < 1$ i.e. que $\nu(\frac{x}{\xi}) < 1$, así que $\frac{x}{\xi}$ es casi-invertible. Por lo tanto si $\xi \in \sigma(x)$ entonces $|\xi| \leq \nu(x)$ por ello $\nu(x)\geq \sup_{\xi\in\sigma(x)} |\xi|$.

□

Con el resultado anterior se infiere que $\nu(x)$ tiene dos interpretaciones, tanto algebraica como topológica, $\max_{\xi\in\sigma(x)} |\xi|$ y $\lim_n \| x^n\|^{1/n}$ respectivamente, los cuales corresponden a la doble estructura de Λ.

DEFINICION 1.5.7. : El número $\nu_\Lambda(x)$ es llamado el radio espectral de x.

También nos interesa dar una caracterización de $\sigma_\Lambda(x)$ donde utilicemos las propiedades de Λ, para situar facilmente tal conjunto en algebras particulares. La siguiente proposición se centra basicamente en el caso real.

PROPOSICION 1.5.8. : Sea Λ un álgebra real y $x \in \Lambda$ considere el número $\alpha+\beta i=\gamma \in \mathbb{C}$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$ Si $\gamma=0$ entonces $\gamma \in \sigma(x)$ sii x es singular en Λ, pero si $\gamma\neq0$ entonces $\gamma \in \sigma_\Lambda(x)$ sii $|\gamma|^{-2}(2\alpha x-x^2)$ es casi-singular en Λ.

Demostración :

El proceso de complejificación funciona de tal manera que si $\Lambda_\mathbb{C}$ tiene identidad sii Λ la tiene y un elemento es invertible en $\Lambda_\mathbb{C}$ sii es invertible en Λ, así que para $\gamma=0$ se sigue la afirmación, cada elemento en $\Lambda_\mathbb{C}$ se escribe también como $u+iv$ con $u,v \in \Lambda$. Sea $\overline{u+iv} = u-iv$ i.e. generalizamos la noción del conjugado, de la misma forma $u+iv$ es casi-invertible sii $u-iv$ es casi-invertible.

Para $x \in \Lambda$: $\overline{\gamma^{-1}}\, x = \overline{\gamma}^{-1} x$ de igual modo $\gamma^{-1}x$ es casi-invertible en $\Lambda_\mathbb{C}$ sii $\overline{\gamma}^{-1} x$ es casi-invertible en $\Lambda_\mathbb{C}$

$$\left[\gamma^{-1}x \right]\circ\left[\overline{\gamma}^{-1} x \right] = \left[\overline{\gamma}^{-1} x \right]\circ\left[\gamma^{-1}x \right]$$

$$= \left[1-\overline{\gamma}^{-1} x \right]\left[1-\gamma^{-1}x \right] = |\gamma|^{-2}\left[2\alpha x - x^2 \right]$$

$\therefore$ $\frac{x}{\gamma}$ es casi-invertible en $\Lambda_\mathbb{C}$ sii $|\gamma|^{-2}\left[2\alpha x-x^2\right] \in \Lambda$ es casi-invertible en $\Lambda_\mathbb{C}$ y por lo tanto en Λ.

□

Una consecuencia que se desprende de este resultado, es que si considera Λ real entonces $\sigma_\Lambda(x)$ es autoconjugado, es decir $\xi \in \sigma_\Lambda(x)$ sii $\bar{\xi} \in \sigma_\Lambda(x)$, además para $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ entonces $\lambda \in \sigma_\mathbb{C}(x)$ sii $\lambda^{-1}x$ es casi-invertible.

PROPOSICION 1.5.9. : Sea Λ un álgebra compleja y $x \in \Lambda$ un elemento arbitrario, denote por $\sigma(x)$ su espectro respecto a Λ y por $\sigma(x)_r$ su espectro respecto a Λ pero visto como un álgebra real. Entonces $\sigma(x)_r$ es la unión de $\sigma(x)$ con sus complejos conjugados.

Demostración :

Por la definición de espectro $0 \in \sigma(x)_r$ sii $0 \in \sigma(x)$, así que supongase que $\lambda \neq 0$. Sea $\Lambda_{\mathbb{C}}$ la complejificación de Λ, sumergimos Λ en $\Lambda_{\mathbb{C}}$ con la siguiente regla :

$$\begin{aligned} \Lambda &\hookrightarrow \Lambda_{\mathbb{C}} \\ x &\longmapsto (x,0) \end{aligned}$$

Para $\lambda=\alpha+\beta i$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$ entonces :

$$\begin{aligned} \lambda x &\longmapsto (\lambda x,0) \\ \lambda(x,0) &= (\alpha x,\beta x) \end{aligned}$$

tal que si $\lambda(x,0)$ es casi-invertible en $\Lambda_{\mathbb{C}}$, debe existir $(s,t) \in \Lambda_{\mathbb{C}}$ que cumple ;

$$(\alpha x,\beta x)\cdot(S,T) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha xs+s-\alpha xs+\beta xt = 0 \text{ y } \beta x+t-\beta xs-\alpha xt = 0$$

pero aquí definimos $\omega = s+it$ en Λ se sigue de inmediato $(\lambda x)\circ\omega = 0$ (mediante el mismo razonamiento $\omega\circ(\lambda x)=0$ y λx es casi-invertible en Λ. Entonces $\sigma(x)_r$ contiene a $\sigma(x)$ y a su conjugado, en otras palabras es $\sigma(x)$ autoconjugado). Como en el campo escalar complejo se puede también determinar la parte real y compleja aquí se puede hacer, para ello supongase que λx y $\bar{\lambda}x$ son casi-invertibles en Λ, ahora defina :

$$s = \frac{(\lambda x)^{\circ} + (\bar{\lambda}x)^{\circ}}{2} \qquad \text{y} \qquad t = \frac{(\lambda x)^{\circ} - (\bar{\lambda}x)^{\circ}}{2i}$$

son elementos de Λ que cumplen :

$$0 = (\alpha x,\beta x)\circ(s,t) = (s,t)\circ(\alpha x,\beta x)$$

$\therefore$ $\lambda(x,0)$ es casi-invertible en $\Lambda_{\mathbb{C}}$. Se sigue que $\sigma(x)_r$ está contenido en la unión de $\sigma(x)$ con su complejo conjugado.

□

***

1.6. EL TEOREMA DE GELFAND-MAZUR

Ahora estamos en posibilidades de obtener el teorema de Gelfand-Mazur para algebras de división normadas, este resultado será expuesto en varias proposiciones para facilitar su presentación, como vimos en la sección del espectro el caso complejo es particularmente más fácil de establecer.

Inicialmente nos interesa dar una caracterización de las algebras de división normadas en término de su campo escalar.

TEOREMA 1.6.1. : Si Λ es un álgebra de Banach de división compleja entonces $\Lambda \cong \mathbb{C}$.

Demostración :

Sea Λ como en la hipótesis, como es de división entonces tiene identidad, así como también un elemento x no nulo que es regular. Ahora bien, $\sigma(x)$ no contiene a el cero para cada elemento no cero $x \in \Lambda$, y como $\sigma(x)$ es no vacío, existe $\xi \in \mathbb{C}$ tal que $\xi e-x$ es singular en Λ y esta última afirmación nos hace inferir que $x = \xi e$ pues $\xi e-x$ debe ser igual a cero que es el único elemento singular. Se sigue de inmediato que x es un número complejo múltiplo de la identidad, por lo tanto $\Lambda \cong \mathbb{C}$.

□

Nuestra pregunta es la siguiente : Podremos afirmar que si Λ es un álgebra de división normada real entonces $\Lambda \cong \mathbb{R}$? La respuesta es no en general, sin embargo la afirmación anterior se verifica si la igualdad $x^2+ y^2= 0$ implica $x = y = 0$.

COROLARIO 1.6.2. : Sea Λ un álgebra de Banach real de división. Si $x^2+ y^2=0$ implica $x = y = 0$ en Λ entonces $\Lambda \cong \mathbb{R}$.

Demostración :

Seleccionemos $\alpha \in \mathbb{C}$ arbitrario y considere ahora la subalgebra conmutativa maximal que contiene a "α", la cual denotamos por $\langle\alpha\rangle$, esta es un álgebra de división normada real, que se puede complejificar.

Si tomamos $\alpha+i\beta \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$ con $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$ entonces $\alpha^2+ \beta^2\neq 0$ ya que por la conmutatividad tenemos:

$(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)(\alpha^2+ \beta^2)^{-1} = e$

i.e. $\langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$ es también un álgebra de división normada compleja que satisface las hipótesis del resultado anterior por lo tanto los elementos de $\langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$ son números complejos múltiplos de la identidad, y se sigue de la definición de álgebra complejificada $\langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$ que los elementos de $\langle\alpha\rangle$ son múltiplos reales de la identidad, en particular α es también múltiplo de la identidad real, pero α fué elegido arbitrariamente, por lo cual se verifica la afirmación.

□

Dicha restricción $x^2+ y^2= 0$ implica que $x = y = 0$ sólo podría darse en el campo de los reales, en los complejos fallaría así que el álgebra podría ser isomorfa incluso a $\mathbb{C}$ en el caso que sea conmutativa, esta idea intuitiva se formaliza en el siguiente:

TEOREMA 1.6.3. : Si Λ es un álgebra conmutativa de Banach real de división, entonces Λ es isomorfa a $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Demostración :

Si la condición restrictiva en el teorema anterior se cumple entonces se sigue que $\Lambda \cong \mathbb{R}$.

Así que supongamos la existencia de elementos a y b no nulos tales que $a^2+ b^2= 0$. Como Λ es álgebra de división normada se sigue que $a \neq 0$ y $b \neq 0$ simultaneamente pues de otro modo :

$$\text{Si } a = 0 \text{ y } b \neq 0 \Rightarrow a^2+ b^2= b^2= 0$$

$$\therefore b = 0 \quad \nabla$$

Definimos $j^2= ab^{-1}$ para obtener $j^2 = -e$

$$j^2 = (ab^{-1})(ab^{-1}) = b^{-1}a^2b^{-1} = b^{-1}(-b^2)b^{-1}= (-b^2)(b^{-1})^2 = -e$$

Sea $\alpha+i\beta$ algún núnero complejo y para $x \in \Lambda$ definimos

$$(\alpha+\beta i)\, x = (\alpha+\beta j)\, x$$

para obetener mediante esta multiplicación por escalares a Λ como un álgebra compleja.

Por otra parte la transformación $x \longrightarrow ix$ es continua ya que $\| ix \| = \| jx\| \leq \|j\| \, \|x\|$ en la norma de Λ.

Por el último resultado visto en la parte de complejificación existe otra norma $|||.|||$ equivalente con $\|.\|$ tal que Λ con la norma $|||.|||$ es un álgebra normada compleja y como por hipótesis es álgeba con división entonces debe ser isomofa a $\mathbb{C}$, en virtud del primer teorema.

□

Sin embargo hasta el momento se ha estudiado algebras conmutativas, así que nuestra tarea inmediata consiste en analizar el caso no conmutativo.

TEOREMA 1.6.4. : Sea Λ un álgebra de Banach real de división. Entonces Λ es isomorfa a los reales, los complejos o los cuaternios.

Demostración:

Simplemente nos limitaremos a el caso no conmutativo pues los resultados anteriores cubren el otro caso. Tomamos $x \in \Lambda$, puesto que Λ tiene identidad y $\sigma(x) \neq \emptyset$, debe existir un número complejo $\xi = \alpha+\beta i$ de tal manera que :

$$|\xi|^2 - (2\alpha x - x^2) \text{es singular.}$$

En efecto, si esto no pasara entonces

$$|\xi|^2 - (2\alpha x - x^2) = (\alpha^2+\beta^2) - (2\alpha x-x^2) = ((\alpha+\beta i) - x)((\alpha-\beta i) - x)$$

por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} e &= \{|\xi|^2 - (2\alpha x-x^2)\}((\alpha+\beta i) - x) \\ &= ((\alpha+\beta i)-x)((\alpha-\beta i)-x)((\alpha+\beta i)-x) \end{aligned}$$

por lo tanto $\xi-x$ es invertible para cada ξ en $\mathbb{C}$, lo cual es una contradicción pues $\sigma(x)$ es no vacío para cada x, por tanto necesariamente

$$|\xi|^2-(2\alpha x-x^2)$$

es singular, para alguna $\xi \in \mathbb{C}$, y así

$$|\xi|^2-(2\alpha x-x^2) = 0$$

lo cual muestra que cada elemento de Λ satisface una ecuación cuadrática con coeficientes reales i.e. Λ algebraico y sus elementos de satisfacen polinomios de grado finito (igual a dos). La conclusión se obtiene aplicando el teorema de Frobenius, el cual asegura que cada álgebra de división finita sobre los reales es isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ó los cuaternios.

□

**

2.1. IDEALES MODULARES

DEFINICION 2.1.1.: Un ideal $I \subseteq \Lambda$ es llamado ideal modular izquierdo (derecho) si existe una identidad lateral derecha (izquierdo) modulo I, i.e. un elemento e_I^r (e_I^l) tal que $x-xe_I^r \in I$ ($x-e_I^l x \in I$) para cada $x \in \Lambda$. Obviamente los elementos e_I^r, e_I^l en esta definición pueden ser remplazados por algunos elementos e^r+m y e^l+m para algún $m \in I$.

Además observe que si I es ideal propio entonces se tiene que e_I^r no está en I (pues de otro modo $I=\Lambda$ y no sería propio) y si $I \subseteq J$ entonces también J es un ideal modular izquierdo (derecho) con la unidad e_I^r (e_I^l). Nuevamente un ideal I es llamado simplemente modular si es simultaneamente izquierdo y derecho, para esto debe existir su identidad módulo I i.e. un e_I tal que $x-xe_I$; $x-e_I x \in I$ para $x \in \Lambda$, de donde ;

$$e_I^l-e_I^l e_I^r \in I \text{ y } e_I^r-e_I^l e_I^r \in I$$

por lo que $e_I^r-e_I^l \in I$, en suma e_I^l puede ser elegido como e_I, formalizaremos las observaciones anteriores de mayor relevancia en la siguiente;

PROPOSICION 2.1.2.: Sea Λ un álgebra.

i) Si $I \subseteq \Lambda$ es un ideal propio modular izquierdo (derecho,bilateral) y e_I^r es una identidad lateral derecha módulo I entonces $e_I^r \notin I$.

ii) Si $I \subseteq \Lambda$ es un ideal modular izquierdo (derecho, bilateral) y $J \subseteq \Lambda$ es un ideal izquierdo (derecho,bilateral) tal que $I \subseteq J$, entonces J es modular. Además, si e es una identidad módulo I entonces e es una identidad módulo J.

iii) Si $I \subseteq \Lambda$ es un ideal bilateral propio modular entonces Λ/I es un álgebra con identidad.

Demostración:

Si I es un ideal propio izquierdo modular y e_I^r es una identidad módulo I, entonces la suposición que $e_I^r \in I$ implica que $xe_I^r \in I$, para cada $x \in \Lambda$, y x puede ser expresado de la siguiente manera; $x = x\, e_I^r - (x\, e_I^r - x) \in I \quad (x \in \Lambda)$ contradiciendo que I sea propio. Por lo tanto $e_I^r \notin I$.

Para mostrar *ii* habrá que hacer notar que e_I^r es una identidad módulo es ideal izquierdo modular I, entonces $xe_I^r-x \in I$ pero $I \subseteq J$ y $x \in \Lambda$, y también J es modular con e_I^r una identidad módulo J.

Por último es evidente por la proposición 1 de algebras cociente que Λ/I es un álgebra y también $e + I$ es una identidad para Λ/I, donde $e \in \Lambda$ es una identidad módulo I ya que :

$(e + I)(x + I) = ex + I = x + I = xe + I = (x + I)(e + I)$

con $x \in \Lambda$ puesto que $ex - x \in I$ y $xe - x \in I$, $x \in I$.

□

Nuestra pregunta es si dado un ideal izquierdo propio modular $I \subseteq \Lambda$ siempre es posible encontrar un ideal máximo izquierdo modular que lo contenga propiamente, la respuesta se encuentra en la siguiente:

PROPOSICION 2.1.3.: Sea Λ un álgebra, si $I \subseteq \Lambda$ es un ideal izquierdo propio modular (derecho, bilateral) entonces existe un ideal izquierdo máximo modular (derecho,bilateral) $M \subseteq \Lambda$ tal que $I \subseteq M$.

Demostración :

Supongamos que I es como en la hipótesis y e_I^r es una identidad módulo I, sea $\mathfrak{S}$ la colección de todos los ideales propios izquierdos $K \subseteq \mathfrak{S}$ tales que $I \subseteq K$. Se sigue que $\mathfrak{S} \neq 0$ (al menos $I \in \mathfrak{S}$). Cada $K \in \mathfrak{S}$ es un ideal propio izquierdo modular y e_I^r es una identidad módulo K (por la proposición anterior).

Más aún,$e_I^r \notin K$ para cada $K \in \mathfrak{S}$. Ahora es conveniente introducir un orden parcial en $\mathfrak{S}$ a través del relacional "$\subset$" de la siguiente manera :

Decimos que $K_1 > K_2$ si $K_1 \supset K_2$ para $K_i \in \mathfrak{S}$. Si $\{K_\alpha\}$ es un subconjunto linealmente ordenado de $\mathfrak{S}$, entonces se tiene que

$$K = \bigcup_\alpha K_\alpha$$

es un ideal propio izquierdo modular en Λ que además contiene a I, (claro pues cada K_α lo contiene) y K no es todo Λ pues $e_I^r \notin K$. Así que aplicando el lema de Zorn a $\mathfrak{S}$ se infiere la existencia de un elemento maximal $M \in \mathfrak{S}$, i.e. M es un ideal maximal izquierdo modular tal que contiene a I. $M \supset I$

□

Una consecuencia de este resultado se enuncia en seguida.

COROLARIO 2.1.4.: Sea I un ideal modular propio en Λ con identidad e_I^r entonces

$$I \cap \{x \in \Lambda;\ \|e_I^r - x\| < 1\} = \emptyset$$

Demostración :

Como $\|e_I^r - x\| < 1$ entonces $e_I^r - x$ es casi regular, i.e. existe $(e_I^r - x)^\circ$; entonces

$$(e_I^r - x)^\circ + e_I^r - x - (e_I^r - x)^\circ e_I^r + (e_I^r - x)^\circ x = 0$$

de donde

$$e_I^r = ((e_I^r - x)^\circ e_I^r - (e_I^r - x)) + x - (e_I^r - x)^\circ x$$

Supongase que $x \in I$,entonces tendremos que $e_I^r \in I$ contrariamente a lo demostrado en una proposición anterior.

□

COROLARIO 2.1.5.: La cerradura de un ideal modular propio es un ideal modular propio.

Demostración :

Sea e_I^l una identidad izquierda de Λ módulo un ideal modular derecho I tal que $x - e_I^l x \in I$, $\forall\ x \in \Lambda$. Probaremos que

$$\| e_I^l - j \| \geq 1 \quad \forall j \in I$$

Supongamos lo contrario es decir que $\|e_I^l - j\| < 1$ para alguna $j \in I$ entonces por las proposiciones de regularidad $e_I^l - j$ es casi-invertible. Denotemos por ι su casi-inversa. Entonces

$$(e_I^l - j) + \iota - (e_I^l - j)\iota = 0$$

esto da $e_I^l = j + e_I^l \iota - \iota - j\iota$ pero ello implica que e_I^l se halla a una distancia positiva de I se ve que la cerradura de I es también un ideal modular derecho distinto de Λ.

□

COROLARIO 2.1.6.: Cada ideal modular maximal es cerrado.

***

2.2. FUNCIONALES LINEALES MULTIPLICATIVOS E IDEALES MAXIMOS.

Concentraremos nuestra atención desde esta sección y en las que siguen unicamente en algebras de Banach conmutativas, esta restricción será impuesta porque una parte importante de la teoría de algebras de Banach es desarrollada exclusivamente para estas algebras. Nos referimos a la teoría de representación de Gelfand, dicha teoría se basa en que el álgebra cociente de un álgebra de Banach conmutativa módulo un ideal máximo es un álgebra de división y por ello aplicando el teorema de Gelfand-Mazur el álgebra cociente es isomorfa a $\mathbb{C}$. Por lo tanto los ideales máximos regulares en un álgebra de Banach conmutativa determinan homomorfismos de A sobre $\mathbb{C}$ y usando esos homomorfismos podemos construir el álgebra de funciones continuas sobre un cierto espacio topológico Hausdorff localmente compacto. La siguiente afirmación es válida para algebras conmutativas la cual se plasma en un resultado puramente algebraico y sólo la enunciaremos para tenerla presente.

PROPOSICION 2.2.1. : Sea A un álgebra conmutativa. Si $M \subset A$ es un ideal maximo regular, entonces A/M es álgebra de división.

DEFINICION 2.2.2. : Sea A un álgebra de Banach con identidad (o sin ella). Un funcional homogeneo y aditivo lineal (no necesariamente continuo) definido sobre A es llamado funcional lineal multiplicativo si

i) $f(xy) = f(x)\, f(y)$

ii) $f(x) \neq 0$, para alguna $x \in A$.

A el conjunto de tales funcionales se le denota usualmente por $\mathfrak{M}'(A)$ ya que depende de el álgebra sobre la cual estén definidas, ó simplemente $\mathfrak{M}'$.

A continuación se establecerá la conexión entre los funcionales lineales multiplicativos de un álgebra A con identidad e y sus ideales máximos.

TEOREMA 2.2.3. : Sea A un álgebra de Banach con identidad e. Entonces hay una correspondencia uno a uno entre los funcionales lineales multiplicativos no nulos y los ideales máximos de codimensión uno. Precisamente si f es un funcional lineal multiplicativo no nulo entonces $f^{-1}(0)$ es un ideal máximo de codimensión uno y dado un ideal máximo de codimensión uno M, hay un funcional multiplicativo no nulo $f: A \longrightarrow \mathbb{C}$ con $M = f^{-1}(0)$.

Demostración :

Si f es un funcional lineal multiplicativo no nulo, entonces se ve facilmente que el conjunto

$\ker f = \{x \in A ; f(x) = 0\} = M_f$

es un ideal, además M_f es un subespacio de codimensión uno, por lo tanto M_f es un ideal máximo. Inversamente : Si M es un ideal máximo de A entonces es cerrado, lo cual implica que A/M es un álgebra de división normada y por el teorema de Gelfand-Mazur se tiene que $\Lambda/M \cong \mathbb{C}$

El homomorfismo natural

$$f_M:\Lambda \longrightarrow \Lambda/M \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$$

es un funcional lineal multiplicativo.

Por ser f_M el homomorfismo canónico se tiene que $f_M(e)=1$. Además tenemos que $M=\ker f_M$, se desprende de la primera parte de esta demostración que

$$M_{f_M} = M$$

Analogamente se obtiene que $f_{M_f} = f$.

□

Un análogo para algebras sin identidad se establece en el siguiente :

TEOREMA 2.2.4. : Sea Λ un álgebra de Banach conmutativa compleja sin identidad. Entonces existe una correspondencia uno a uno entre funcionales lineales multiplicativos de Λ y los ideales modulares máximos de Λ.

Demostración :

Si M es un ideal modular máximo de Λ entonces es cerrado como se probó en la sección 2.1. y el álgebra cociente es isomorfa a $\mathbb{C}$ puesto que esta álgebra cociente tiene identidad y no tiene ideales propios . El homomorfismo natural f_M: $\Lambda \longrightarrow \Lambda/M \cong \mathbb{C}$ es un funcional lineal multiplicativo.

Inversamente, si f es un funcional lineal multiplicativo entonces el conjunto

$$M=\{x\in\Lambda; f(x)=0\}$$

es un ideal modular ya que existe $x\in\Lambda$ tal que $f(x)\neq 0$, por lo tanto existe $e\ \in\Lambda$ tal que $f(e\ )=1$ y para cada $x\in\Lambda$ se tiene

$$f(x-e_Mx)=f(x)-f(e_M)f(x)=0$$

i.e. $x-e_Mx \in M$, se infiere que el elemento e_M es identidad módulo M y el ideal M es modular entonces claramente es un ideal máximo , ya que es un subespacio de codimensión uno.

Para demostrar que la correspondencia entre ideales máximos modulares y funcionales lineales multiplicativos es uno a uno se procede como en 2.2.3.

□

COROLARIO 2.2.5. : En cada álgebra conmutativa con identidad existe al menos un funcional lineal multiplicativo.

Demostración :

Si Λ es el campo complejo entonces la identidad es tal funcional. Si Λ no es campo entonces existen elementos $x \in \Lambda$ los cuales no sonm invertibles si x es uno de tales elementos entonces $x\Lambda$ es un ideal, el cual puede ser sumergido en un ideal máximo.

Entonces el álgebra Λ tiene un ideal máximo o equivalentemente un funcional lineal multiplicativo.

$\square$

Ya hemos tenido ocasión de observar que los funcionales lineales multiplicativos son básicos en los problemas concernientes a algebras de Banach conmutativas, i.e. forman un contexto de estudio natural de las algebras complejas.

TEOREMA 2.2.6. : Cada funcional lineal multiplicativo en un álgebra de Banach Λ es continuo. Es decir, $|f(x)| \leq \|x\|$ para $x \in \Lambda$.

Demostración :

El caso $f \equiv 0$ es obvio.

Para probar la desigualdad supongase que para algún $x \in \Lambda$ se tiene $|\lambda| = |f(x)| > \|x\|$. Como $\lambda \neq 0$ entonces x/λ es casi-invertible y su casi-inverso está dado por

$$y = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^n$$

, por lo tanto $\frac{xy}{\lambda} + \frac{x}{\lambda} - y = 0$, que a su vez implica $f(y)+1-f(y)=0$ lo cual es absurdo. Por lo tanto $|f(x)| \leq \|x\|$ $\forall x \in \Lambda$, y así f es continua.

$\square$

DEFINICION 2.2.7. : Sea Λ un álgebra de Banach y x un elemento de Λ. Definimos la función $x^{\wedge}(M)$ sobre $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'(\Lambda)$ mediante la fórmula

$$x^{\wedge}(M) = f_M(x).$$

A esta función se le llama la transformación de Gelfand de el elemento $x \in \Lambda$, y por el corolario 2.2.7. se tiene ;

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}'} |x^{\wedge}(M)| \leq \|x\|$$

Denotemos por $C_B(\mathfrak{M}')$ al álgebra de Banach de todas las funciones definidas sobre $\mathfrak{M}'$, con valores complejos y acotadas con la norma

$$\| \varphi \|_{\infty} = \sup_{M \in \mathfrak{M}'} |\varphi(M)| \tag{1}$$

El siguiente resultado es una consecuencia de la definición y la relación (1).

PROPOSICION 2.2.8. : La transformación $\mathscr{H} : x \longrightarrow x^{\wedge}$ es un homomorfismo continuo (llamado la representación de Gelfand) de el álgebra de Banach Λ en el álgebra $C_B(\mathfrak{M}')$. La imágen de la identidad de Λ (e) bajo el homomorfismo es la función constante $e^{\wedge}(M)=1$. Cada funcional lineal multiplicativo sobre Λ es de la forma $f(x) = x^{\wedge}(M_o)$, donde M_o es un punto fijo en $\mathfrak{M}'$.

Demostración :

La transformación $x \longrightarrow x^{\wedge}$ es un homomorfismo de Λ sobre el álgebra $\Lambda^{\wedge} = \{x^{\wedge}: \ x \in \Lambda\}$ de funciones continuas de valores complejos sobre $\mathfrak{M}'$. Además la estimación :

$$\| x^{\wedge}\|_{\infty} = \sup_{t\in\mathfrak{M}'(\Lambda)} |x^{\wedge}(t)|$$

$$= \sup_{t\in\mathfrak{M}'(\Lambda)} |t(x)|$$

$$\leq \sup_{t\in\mathfrak{M}'(\Lambda)} \|t\| \ \|x\| \leq \| x \|$$

revela que $x^{\wedge}$ es una función continua acotada y que la transformación $x \longrightarrow x^{\wedge}$ es decreciente en norma.

Si tiene identidad, entonces $e^{\wedge}(t) = 1$, $t \in \mathfrak{M}'$, de donde se sigue que $\Lambda^{\wedge}$ contiene funcionales constantes.

Se puede mostrar (cosa que no haremos aquí) que si $\hat{\Lambda}$ denota la imágen de Λ bajo $\mathscr{X}$; $\Lambda^{\wedge} = \mathscr{X}(\Lambda) \subset C_B(\mathfrak{M}')$ $\Lambda^{\wedge}$ (posiblemente no completo) es un álgebra normada con la norma

$$\|x\|_s = \sup_{M\in\mathfrak{M}'} |x^{\wedge}(M)|$$

Ahora enunciaremos un resultado importante para las aplicaciones.

PROPOSICION 2.2.9. : Un elemento $x \in \Lambda$ es invertible sii $\hat{\Lambda}(M) \neq 0 \ \forall \ M \in \mathfrak{M}'$ en este caso $(x^{-1})^{\wedge}(M) = [x^{\wedge}(M)]^{-1}$

Demostración :

Si $x^{\wedge}(M_o) = 0$ entonces $x \in M_o$ y x no puede ser invertible en Λ. Reciprocamente si x no es invertible entonces $x\Lambda$ es un ideal propio de Λ y entonces está contenido en algún ideal máximo M_o por lo tanto tenemos que $x^{\wedge}(M_o)=0$. La fórmula $(x^{-1})^{\wedge}(M) = [x^{\wedge}(M)]^{-1}$ se sigue de inmediato de mostrar que si $f \in \mathfrak{M}'(\Lambda)$ y x es un elemento invertible en Λ entonces $f(x^{-1})=[f(x)]^{-1}$ lo cual es cierto pues si $f \in \mathfrak{M}'(\Lambda)$, entonces

$$1 = f(e) = f(x\ x^{-1}) = f(x)f(x^{-1})$$

$$\rightarrow \quad f(x)f(x^{-1}) = 1 = f(x)\ [f(x)]^{-1}$$

pero el inverso es único. Por lo tanto $f(x^{-1})=[f(x)]^{-1}$, de ahí el resultado.

□

Ejemplo : Considere $\Lambda = \ell_1(\mathbb{Z})$ con la convolución como operación multiplicativa. Los elementos de Λ son sucesiones $x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Λ es un espacio normado con $\| x \| = \sum_{i\in\mathbb{Z}} |x_i| < \infty$ como norma.

(Se recuerda que la multiplicación se define por $z=x*y$ con $z=\{z_n\}$ tal que $z_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_{n-k}y_k$)

Se tiene ;

$$\| x*y \| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_{n-k}\, y_k \right|$$

$$\leq \sum_{n,k\in\mathbb{Z}} |x_{n-k}|\ |y_k|$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |y_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_{n-k}|$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |y_k|\ \|x\| = \|x\|\ \|y\|$$

Ahora checamos que es un álgebra conmutativa :

Si $x*y = z$ donde $z_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_{n-k}y_k$ haciendo $t = n-k$ $k \in \mathbb{Z}$ y $k = n-t$ $t \in \mathbb{Z}$ entonces $z_n = \sum_{t\in\mathbb{Z}} x_{n-(n-t)}y_{n-t} = \sum y_{n-t}x_t$ por lo tanto $z= y*x$ se sigue la igualdad requerida.

Aún más Λ tiene elemento identidad pues considere el elemento

$$\ell = \{ \ell_0=1 \ ,\ \ell_i=0\ \forall\ i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$$

en efecto ;

Supongase que $\ell*x = y$ con x elemento arbitrario en Λ, hay que demostrar que $y = x$

$$y_n= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \ell_{n-k}x_k = \ldots+0+0+1\cdot x_n+0+0+\ldots = x_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$$\rightarrow y = \{y_n\} = \{x_n\} = x$$

Hacemos ahora $x_0=\left\{\delta_{1,n}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ tenemos que $x_0\in G(\Lambda)$ (o simplemente G) puesto que $x_o^{-1} = \left\{\delta_{-1,n}\right\}_{-\infty}^{\infty}$.

Sea $F \in \mathfrak{M}(\Lambda)$, podemos ver que $|F(x_o)| = 1$. En efecto puesto que $\|x_o\| = \|x_o^{-1}\| = 1$ y $\|F\| = 1$, se tiene que $|F(x_o)| \le \|F\| \, \|x_o\| = 1$ y $|F(x_o)|^{-1} = |F(x_o^{-1})| \le \|F\| \, \|x_o^{-1}\| = 1$ entonces $F(x_o) = e^{it}$ con $0 \le t \le 2\pi$.

Tomando un elemento arbitrario $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \Lambda$ vemos que ;

$$x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n x_o^n \quad \text{y también } F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n F(x_o)^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{it} \quad \text{i.e.}$$

$F(x)$ es el valor de las series de Fourier con coeficientes $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en algún punto t, $0 \le t \le 2\pi$, el funcional es multiplicativo puesto que :

$$F(x \cdot y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_{n-k} \, y_k \Big) \, e^{int}$$

$$= \sum_{n,k\in\mathbb{Z}} x_{n-k} e^{i(n-k)t} \, y_k e^{ikt}$$

$$= \sum_k y_k e^{ikt} \sum_p x_p e^{ipt} = F(x) \, F(y)$$

Donde inclusive se puede identificar a los funcionales F (ideales máximos de Λ) con los puntos de el círculo unitario

$$\{e^{it} : 0 \le t < 2\pi \}$$

y puede tratar las transformaciones de Gelfand como funciones periódicas $x\hat{}(t) = \sum_n x_n \, e^{int}$ pero puesto que las series en que se expresa $F(x)$ son uniformemente convergentes, las transformaciones de Gelfand son funciones continuas sobre el círculo unitario y por la proposición 2.2.3. se identifica el espacio de ideales máximos $\mathfrak{M}(\Lambda)$ con el círculo unitario del plano complejo.

□

2.3. EL ESPACIO DE LOS IDEALES MAXIMOS

El hecho de que la representación de Gelfand sea continua no es casual. Descubriremos que el conjunto $\mathfrak{M}'$ de ideales máximos de A puede ser dotado de una topología de tal manera que resulta ser un espacio topológico compacto (localmente compacto en el caso de algebras de Banach sin identidad) y las funciones $x^\wedge$ resulten ser continuas. Esta topología es conocida como la topología de Gelfand. $\mathfrak{M}'$ con esta topología es denotada simplemente por $\mathfrak{M}$.

DEFINICION 2.3.1 : Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementos arbitrarios de A y sea ε un número arbitrario positivo. La vecindad $V[M_o; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon]$ de el ideal máximo M_o está definida como el conjunto de todos los ideales máximos M para los cuales las desigualdades

$$|x_i^\wedge(M) - x_i^\wedge(M_o)| < \varepsilon \qquad i=1,\ldots,n$$

son válidas, i.e.

$$V[M_o; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon] = \{M: |x_i^\wedge(M) - x_i^\wedge(M_o)| < \varepsilon\}$$

PROPOSICION 2.3.2. : El espacio $\mathfrak{M}$ de todos los ideales máximos de un álgebra A con la topología definida por las bases locales definidas anteriormente, es un espacio topológico Hausdorff.

Demostración :

i) La intersección de dos vecindades de un punto M_o contiene otra de tales vecindades, en efecto para $V[M_o; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon]$ y $V[M_o; y_1, \ldots, y_m; \delta]$ se tiene que

$$V[M_o; x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m; \rho] \subset V[M_o; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon] \cap V[M_o; y_1, \ldots, y_m; \delta]$$

donde $\rho = \min\{\varepsilon, \delta\}$.

ii) Si se tiene que : $M_1 \in V[M_o; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon] =: V_o$ entonces existe un vecindad V_1 de M_1 de la forma usada en la definición 2.3.1., contenida en V_o. Esto se concluye ya que si $M_1 \in V[M_o; x_1, \ldots x_n; \varepsilon] = V_o$ entonces proponemos

$$V_1 = V[M_1; x_1, \ldots, x_n; \min_{i \le n}\{\varepsilon - |x_i^\wedge(M_1) - x_i^\wedge(M_o)|\}]$$

y se sigue de inmediato que $V_1 \subset V_o$.

Para cada dos puntos distintos M_1 y $M_2 \in \mathfrak{M}$ existen vecindades ajenas. Para mostrarlo sean $M_1 \neq M_2$ entonces existe $x_o \in M_1 \setminus M_2$ tal que $x_o^{\wedge}(M_1) \neq x_o^{\wedge}(M_2)$ y las vecindades $V[M_1; x_o; \varepsilon/2]$, $V[M_2; x_o; \varepsilon/2]$ son ajenas para $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < |x_o^{\wedge}(M_1) - x_o^{\wedge}(M_2)|$.

□

PROPOSICION 2.3.3. : El espacio $\mathfrak{M}(\Lambda)$ de un álgebra de Banach Λ (con la topología de la definición 2.3.1.) es compacto.

Demostración :

Para cada $x \in \Lambda$ consideremos el disco cerrado :

$$D(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} ; |\lambda| \leq \|x\|\}$$

Sea $\mathbb{D} = \prod_{x \in \Lambda} D(x)$ el producto topológico de todos estos discos. Como sabemos si $\{\lambda_x^{(0)}\} \in \mathbb{D}$, entonces una vecindad fundamental de $\{\lambda_x^{(0)}\}$ en $\mathbb{D}$, esta definida de la siguiente manera :

$$V(\{\lambda_x^{(0)}\}; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \left\{ \{\lambda_x^{(0)}\} : |\lambda_{x_i}^{(0)} - \lambda_{x_i}| < \varepsilon, \ i = 1, \ldots, n \right\}$$

donde $x_1, \ldots, x_n$ es una colección arbitraria finita de elementos de Λ. Ya que cada $D(x)$ es compacto, entonces tenemos por el teorema de Tychonov que $\mathbb{D}$ es también compacto.

En virtud de la desigualdad $|x(M)| \leq \|x\|$, a cada ideal máximo M le corresponde un punto $M' = \{\mu_x\} \in \mathbb{D}$, donde $\mu_x = x(M)$. Además por la condición de separabilidad iii de la proposición anterior , dos ideales máximos distintos corresponden a puntos distintos, i.e. ellos defieren al menos en una coordenada y son por tanto distintos. De este modo, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Lambda)$ es transformado uno a uno sobre una parte $\mathfrak{M}'$ de el espacio $\mathbb{D}$.

Resumiendo, sea $\varphi : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbb{D}$ la transformación dada por

$$\varphi(M) = \left\{ x^{\wedge}(M) \right\}_{x \in \Lambda}$$

φ está bien definida ya que como se hizo ver $|x^{\wedge}(M)| \leq \|x\|$ para toda $x \in \Lambda$. Además se tiene que si M_1, M_2 están en $\mathfrak{M}$ y $M_1 \neq M_2$, entonces existe $x \in \Lambda$ tal que $x \in M_1$ y $x \notin M_2$ por lo tanto tenemos :

$$x(M_1) = 0 \qquad y \qquad x(M_2) \neq 0$$

lo cual implica que $\varphi(M_1) \neq \varphi(M_2)$, por otro lado si comparamos la topología de $\mathfrak{M}$ y la topología del producto restringida a $\varphi(M)$

observaremos que la transformación φ es un homeomorfismo sobre de $\mathfrak{M}$ en $\varphi(\mathfrak{M})$.

Si comprobamos que $\varphi(\mathfrak{M})$ es cerrado en $\mathbb{D}$ entonces tendremos que éste y por lo tanto también $\mathfrak{M}$ sean compactos.

Para comprobar que $\varphi(\mathfrak{M})$ es cerrado en $\mathbb{D}$. Sea $\Omega=\{\lambda_x\}, x\in\Lambda$, un punto de $\mathbb{D}$ que es de acumulación de $\varphi(\mathfrak{M})$. Demostraremos que $\Omega\in\varphi(\mathfrak{M})$ i.e. que existe un ideal máximo M_o tal que $\lambda_o=x^{\wedge}(M_o)$ $\forall x\in\Lambda$ para este fín mostraremos que :

$$\begin{array}{ll} i) & \lambda_{x+y}=\lambda_x+\lambda_y \\ ii) & \mu\lambda_x=\lambda_{\mu x} \\ iii) & \lambda_{xy}=\lambda_x\lambda_y \qquad\qquad (\mu\in\mathbb{C}, x,y\in\Lambda) \end{array}$$

La prueba de las dos primeras son similares a la de *iii*. Para comprobar *iii* considere la vecindad de Ω determinada por los elementos e,x,y,xy y un número positivo arbitrario ε.

Puesto que Ω es de acumulación de $\varphi(\mathfrak{M})$ podemos encontrar un punto $M^*\in\mathfrak{M}'$ perteneciente a esta vecindad, i.e. para algún $M\in\mathfrak{M}$ se tiene

$$|\lambda_e-e(M)|=|\lambda_e-1|<\varepsilon$$

$$|\lambda_x-x(M)|<\varepsilon \quad , \quad |\lambda_y-y(M)|<\varepsilon$$

$$|\lambda_{xy}-xy(M)|=|\lambda_{xy}-x(M)y(M)|<\varepsilon$$

pero entonces

$$|\lambda_{xy}-\lambda_x\lambda_y|\le|\lambda_{xy}-x(M)y(M)|+|x(M)[y(M)-\lambda_y]|+|\lambda_y[x(M)-\lambda_x]|$$

$$<\varepsilon(1+\|x\|+\|y\|)$$

puesto que ε es arbitrario se sigue que

$$\lambda_{xy}=\lambda_x\lambda_y$$

$$\lambda_e=1$$

Entonces la correspondencia $x\longrightarrow\lambda_x$ es una transformación homeomórfica de Λ en el campo de los números complejos, el núcleo de esta transformación es entonces un ideal máximo M_o tal que :

$$x(M_o)=\lambda_x \qquad\qquad \forall x\in\Lambda$$

□

PROPOSICION 2.3.4. : Sea $\mathfrak{M}'$ el espacio de todos los ideales máximos de un álgebra de Banach conmutativa, topologizada de manera que:

1) $\mathfrak{M}'$ es compacto.

2) Las funciones $x^{\wedge}(M)$ son continuas sobre $\mathfrak{M}'$. Entonces $\mathfrak{M}'$ es homeomórfico a $\mathfrak{M}$, donde $\mathfrak{M}$ es el espacio de esos ideales máximos, topologizado de acuerdo con la definición 2.3.1.

Demostración :

La transformación de $\mathfrak{M}'$ sobre $\mathfrak{M}$ que asocia a cada ideal máximo $M\in\mathfrak{M}'$ el mismo $M\in\mathfrak{M}$ es uno a uno. En consecuencia de la condición 2) la imágen inversa en $\mathfrak{M}'$ de cada vecindad de $\mathfrak{M}$ y por lo tanto de cada abierto, de $\mathfrak{M}$ es abierto en $\mathfrak{M}'$. Entonces la transformación de $\mathfrak{M}'$ sobre $\mathfrak{M}$ es continua. Pero puesto que $\mathfrak{M}'$ y $\mathfrak{M}$ son compactos (condición 1) y $\mathfrak{M}$ es siempre un espacio Hausdorff la transformación inversa es también continua (teorema de continuidad sobre espacios topológicos Hausdorff) i.e. $\mathfrak{M}'$ es homeomórfico a $\mathfrak{M}$.

□

PROPOSICION 2.3.5. : Sea Λ un álgebra de Banach sin identidad entonces el espacio de los ideales máximos es localmente compacto.

Demostración :

Considere el álgebra con identidad $\Lambda_1=\Lambda\oplus\mathbb{C}e$ y el funcional lineal multiplicativo $f:\Lambda\longrightarrow\mathbb{C}$ para el cual definimos otro funcional

$$f':\Lambda_1\longrightarrow\mathbb{C}$$

$$f'(a,\lambda)=f(a)+\lambda$$

se observa que f' es lineal multiplicativo con el producto de el álgebra Λ_1. Pero también se tiene que $f':\Lambda\longrightarrow\mathbb{C}$ induce un funcional $f:\Lambda\longrightarrow\mathbb{C}$, simplemente considere $f=f'|\Lambda$. Se ve que la transformación de $\mathfrak{M}'\cup\{0\}\longrightarrow\mathfrak{M}'(\Lambda_1)$ es 1-1 . Cabe observar que $\mathfrak{M}(\Lambda_1)$ es compacto y ambos conjuntos poseen la misma topología ello significa que a $\mathfrak{M}(\Lambda)$ al agregarle un punto es compacto i.e. $\mathfrak{M}(\Lambda)\cup\{0\}$ es compacto y por tanto $\mathfrak{M}(\Lambda)$ es localmente compacto.

□

Podemos dar la topología en el conjunto de ideales máximos sin hacer uso necesariamente de todos los elementos del álgebra.

DEFINICION 2.3.6. : Un conjunto $\mathfrak{G}$ de de elementos de un álgebra de Banach Λ es llamado un sistema de generadores de esta álgebra si la más pequeña subalgebra cerrada con identidad que continene a $\mathfrak{G}$ es el álgebra total.

Observe que el elemento identidad no ha sido incluído entre los generadores.

TEOREMA 2.3.7. : El conjunto $\{\mathfrak{W}\}$ formado por vecindades de la forma $V[M;x_1,..,x_n;\varepsilon]$ donde x_i varía sobre todos los elementos de un sistema $\mathfrak{G}$ de generadores de Λ, es un sistema fundamental de vecindades en $\mathfrak{M}$.

Demostración :

Para hacer la prueba, hay que ver que cada vecindad $V[M;y_1,..,y_m;\varepsilon]$ contiene una vecindad de $\{\mathfrak{W}\}$. Para ello considere a los polinomios $P_1(x_1,...,x_n),...,P_m(x_1,...,x_n)$, que difieren en norma de los correspondientes elementos $y_1,..,y_m$ en menos de $\varepsilon/3$, sea δ tal que $V[M;x_1,...,x_n;\delta]$ está contenida en $V[M;P_1,...,P_m;\varepsilon/3]$. esta δ existe por la continuidad de la suma, el producto y la transformación de Gelfand. Entonces tendremos que la vecindad $V[M;x_1,...,x_n;\delta]$ de $\{\mathfrak{W}\}$ está contenida en $V[M;y_1,...,y_n;\varepsilon]$ pues ;Sea $M\in V[M_o,x_1,,x_n;\delta]$ entonces $M\in V[M_o;y_1,,y_m;\varepsilon]$ i.e.

$$|y_i^\wedge(M_o)-y_i^\wedge(M)|\le|y_i^\wedge(M_o)-P_i^\wedge(M_o))|+|P_i^\wedge(M_o)-P_i^\wedge(M)|+|P_i^\wedge(M)-y_i^\wedge(M)|$$
$$\le\|P_i-y_i\| +|P_i^\wedge(M_o)-P_i^\wedge(M)|$$
$$\le 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

$\forall$ M_o en esta vecindad y $\forall i=1,...,n$.

$\therefore$ es un sistema fundamental de vecindades de M.

□

PROPOSICION 2.3.8. : Si Λ tiene un número finito de generadores $x_1,...,x_n$, entonces $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(\Lambda)$ es homeomórfico a un subconjunto cerrado y acotado de el espacio complejo n-dimensional.

Demostración :

$$M \longrightarrow (x_1(M),\ldots,x_n(M))$$

es una transformación continua de valores singulares de $\mathfrak{M}$ sobre algún subconjunto $\mathfrak{M}'$ cerrado y acotado del espacio complejo n-dimensional. Mostraremos que esta transformación es 1-1, puesto $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ son espacios compactos Hausdorff entonces es continua sobre ambos, en otras palabras $\mathfrak{M}$ es homeomórfico a $\mathfrak{M}'$.

Supongase que tiene dos puntos M_1 y M_2 transformados sobre el mismo punto de $\mathfrak{M}'$. Esto significa que

$$x_1(M_1)=x_1(M_2)$$
$$x_2(M_1)=x_2(M_2)$$
$$\ldots\quad x_n(M_1)=x_n(M_2)$$

Entonces para cada polinomio P formado por $x_1,\ldots,x_n$ se tiene $P(M_1)=P(M_2)$ y puesto que $x_1,\ldots,x_n$ son generadores del álgebra Λ, se satisface la igualdad $x(M_1)=x(M_2)$ $\forall x\in\Lambda$.

Pero en ese caso por la condición de separabilidad iii de la proposición 2.3.2. se tiene que $M_1=M_2$.

$\square$

Este resultado implica que si Λ tiene un solo generador entonces $\mathfrak{M}$ es homeomorfo a un conjunto cerrado y acotado de puntos de el plano complejo.

2.4. LA NORMA ESPECTRAL Y EL RADICAL.

En toda esta sección supondremos que Λ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad e. La transformación $x \longrightarrow \hat{x}$ $(x\in\Lambda)$ define un homomorfismo de Λ sobre el álgebra $\Lambda^\wedge=\{x^\wedge : x\in\Lambda\}$ de funciones de valores complejos sobre $\mathfrak{M}(\Lambda)$. Además la estimación :

$$\|x^\wedge\|_\infty = \sup_{M\in\mathfrak{M}(\Lambda)} |x^\wedge(M)| = \sup_{M\in\mathfrak{M}(\Lambda)} |f_M(x)| \leq \sup_{f_M\in\mathfrak{M}(\Lambda)} \|f_M\| \, \|x\| \leq \|x\|$$

revela que cada $x^\wedge$ es una función continua acotada y que la transformación $x \longrightarrow x^\wedge$ es decreciente en norma.

Además para cada $x\in\Lambda$, se tiene $\|x^\wedge\|_\infty \leq \|x\|$, y podemos definir la norma espectral en estos términos.

DEFINICION 2.4.1. : Sea $x\in\Lambda$, la norma espectral de un elemento x es el número :

$$\|x\|_s = \max_{M\in\mathfrak{M}} |x^\wedge(M)| \leq \|x\|$$

o equivalentemente $\|x\|_s = \max\{|\lambda| : \lambda\in\sigma(x)\}$

con $\sigma(x)$ es el espectro de x, ello justifica el término de norma espectral.

La equivalencia en la definición de norma espectral se prueba a continuación :

PROPOSICION 2.4.2. : El espectro de un elemento x, $\sigma(x)$ coincide con el conjunto de valores tomados por las funciones $x^\wedge(M)$.

Demostración :

Si $x^\wedge(M_o) = \lambda_o$, entonces $(x-e\lambda_o)(M_o)=0$, por ello $x-\lambda_o e\in M_o$ y por tanto $(x-\lambda_o e)^{-1}$ no existe.

Inversamente si $(x-\lambda_o e)^{-1}$ no existe, entonces $(x-\lambda_o e)(M)$ se anula en algún ideal máximo M_o, i.e. $x^\wedge(M_o)=\lambda_o$.

TEOREMA 2.4.3. : Para cada $x\in\Lambda$ existe el límite

$$\lim_n \|x^n\|^{1/n} = \|x\|_s .$$

Demostración :

De la desigualdad $\sup_{M\in\mathfrak{M}}|x^\wedge(M)| = \max_{M\in\mathfrak{M}}|x^\wedge(M)| \le \|x\|$ se sigue que para toda $f\in\mathfrak{M}$ tenemos $|f(x)| = |f(x^n)|^{1/n} \le \|x^n\|^{1/n}$ por lo tanto

$$\|x\|_s \le \lim_n \inf \|x^n\|^{1/n}$$

así que sólo hace falta probar;

$$\lim_n \sup \|x^n\|^{1/n} \le \|x\|_s$$

Para ello consideremos un funcional lineal fijo $F\in\Lambda'$ escribimos

$$\varphi_F(\lambda) = F[(e-\lambda x)^{-1}]$$

tenemos que φ es una función analítica en el disco abierto

$$\mathbb{D} = \{\lambda\in\mathbb{C} ; |\lambda| < 1/\|x\|_s\}$$

(entera en caso que $\|x\|_s = 0$, como en la observación que antecede a esta proposición). Un cálculo directo muestra que

$$\varphi_F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} F(x^n)\lambda^n$$

esta serie converge para toda λ tal que $|\lambda| < 1/\|x\|_s$, lo cual resulta de simplemente calcular el radio de convergencia.

Para cada λ tenemos ; $\lim_n F(x^n)\lambda^n = \lim_n F[(\lambda x)^n] = 0$

pero $F\in\Lambda'$es arbitraria, así que la igualdad vale $\forall F\in\Lambda'$ por consiguiente la sucesión $\{(\lambda x)^n\}$ converge debilmente a cero y por tanto es acotada, i.e. $\exists\ C_\lambda$ tal que ;

$$\|x^n\| \le C_\lambda \big/ |\lambda|^n . \qquad \text{para } n=1,2,\ldots$$

se sigue que

$$\lim \sup \|x^n\|^{1/n} \le \lim \sup \left[C_\lambda |\lambda|^{-n}\right]^{1/n} = |\lambda|^{-1},$$

para toda λ con $|\lambda| < 1/\|x\|_s$, esto significa que

$$\lim_n \sup \|x^n\|^{1/n} = \|x\|_s .$$

que es lo que se quería probar.

□

COROLARIO 2.4.4. : Sea $|||\circ|||$ una norma equivalente a la norma original en A entonces existe el límite $\lim_n |||x^n|||^{1/n}$ y se tiene

$$\lim_n |||x^n|||^{1/n} = \|x\|_s$$

Prueba :

Copiese tal cual la prueba anterior, usando una constante $C'_\lambda = C_1 C_\lambda$ en lugar de C_λ; C_1 resulta de que $|||\circ|||$ es una norma equivalente con la original.

□

COROLARIO 2.4.5. : Sea A_o una subálgebra de A y sea $x \in A_o$ si $\sigma(x)$ denota el espectro de x en A y $\sigma_o(x)$ denota el espectro de x respecto a A_o, entonces la igualdad

$$\max \ \{|\lambda| ; \lambda \in \sigma(x)\} = \max \ \{|\lambda| ; \lambda \in \sigma_o(x)\}$$

vale o equivalentemente

$$\max_{M \in \mathbb{M}(A)} |\hat{x}(M)| = \max_{M \in \mathbb{M}(A_o)} |\hat{x}(M)|$$

se sigue también de la fórmula :

$$\|x\|_s = \max_{M \in \mathbb{M}} |\hat{x}(M)| .$$

De la igualdad $\|x\|_s = \lim_n \|x^n\|^{1/n}$ y por lo visto en la sección 1.4. de esta tesis se sigue que $\|\circ\|_s$ es una seminorma submultiplicativa, continua y tal que $\|e\|_s = 1$.

Demostración :

Se sigue de la igualdad

$$\|x\|_s = \max_{M \in \mathbb{M}} |\hat{x}(M)| , \text{ que}$$

$$\max_{M \in \mathbb{M}(A)} |\hat{x}(M)| = \|x\|_s = \max_{M \in \mathbb{M}(A_o)} |\hat{x}(M)|$$

□

COROLARIO 2.4.6. : Sea A un álgebra de Banach (un álgebra posiblemente no conmutativa) con norma $\|.\|$. Entonces para cada $x \in A$ existe el límite

$$\lim_n \|x^n\|^{1/n} = \|x\|_s \leq \|x\|;$$

si además $xy=yx$ para $x,y \in A$ entonces también se tiene

$$\|x+y\|_s \leq \|x\|_s + \|y\|_s$$

y $$\|xy\|_s \leq \|x\|_s \|y\|_s.$$

Prueba:

Vease proposición 1.4.3.

□

DEFINICION 2.4.7. : En vista de que en un álgebra no conmutativa, no necesariamente $\|x\|_s$ es una norma entonces definimos en general el radio espectral de x como el número:

$$\lim_n \|x^n\|^{1/n}.$$

Existen sin embargo otras caracterizaciones de norma espectral, una de las más interesantes es la siguiente:

Sea A un álgebra de Banach con una norma $\|x\|$. Una norma admisible es una norma $\|x\|_a$ equivalente a la norma $\|x\|$, que satisface las condiciones ;

i) $\|xy\|_a \leq \|x\|_a \|y\|_a$

ii) $\|e\|_a = 1$

Si A denota el conjunto de todas las normas admisibles en A, la norma espectral viene a ser "la más pequeña de las normas admisibles" en el siguiente sentido.

PROPOSICION 2.4.8. : Sea A un álgebra de Banach ; entonces

$$\|x\|_s = \inf\{\|x\|_a : \|\circ\|_a \in \mathsf{A}\}.$$

Demostración :

Es suficiente demostrar que si $x_o \in A$ y $\|x_o\|_s < 1$, entonces existe una norma admisible $\|\circ\|^*$ tal que $\|x_o\|^* \leq 1$. Ya que si $\|x_o\|=\alpha$, entonces dado $\alpha+\varepsilon$, con $\varepsilon>0$, entonces $\frac{x_o}{\alpha+\varepsilon}$ es tal que $\left\|\frac{x_o}{\alpha+\varepsilon}\right\|<1$, por lo tanto existe $\|\circ\|^*$ admisible tal que $\|x_o\|^* \leq 1$.

Cada elemento de Λ se puede ser escrito (no unicamente) a través de la suma

$$x=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_o^k$$

para $a_k \in \Lambda$, $x_o^o=e$ y sólo un número finito de a_k son distintas de cero. Nosotros definimos

$$\|x\|^{*}=\inf \sum_k \|a_k\|$$

donde el ínfimo tomado sobre todas las posibles representaciones de x en la forma

$$x=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_o^k$$

se infiere que $\|x_o\|^{*}\leq 1$; también esta proposición se puede mostrar si $\|.\|^{*}$ es una norma admisible.

Si $y=\sum_k b_k x_o^k$ entonces $xy=\sum_k c_k x_o^k$ donde el término c_k adquiere la forma $c_k=\sum_l a_{k-l} b_l$, y se sigue que :

$$\|xy\|^{*}\leq \sum_k \|c_k\| \leq \sum_k \|a_{k-l}\|\|b_l\| = \sum_k \|a_k\| \sum_k \|b_l\|$$

para todas las posibles representaciones de x e y en forma de serie ,en particular para el ínfimo de estas, i.e.

$$\|xy\|^{*}\leq \inf\left\{ \sum_k \|a_k\| \sum_l \|b_l\| \right\} = \|x\|^{*}\|y\|^{*}$$

La subaditividad de la funcional $\|x\|^{*}$ se prueba de manera similar pues

$$x + y = \sum_k a_k x_o^k + \sum_k b_k x_o^k = \sum_k (a_k+b_k)x_o^k$$

así

$$\|x+y\|^{*}= \inf \sum_k \|a_k+b_k\| \leq \inf \left\{ \sum_k \|a_k\|+\|b_k\| \right\} = \|x\|^{*}+\|y\|^{*}.$$

También debemos probar que $\|x\|^{*}$ es equivalente a la norma $\|x\|$ con lo cual implicitamente mostramos que $\|x\|^{*}$ en efecto es una norma (ya que sólo hemos probado que $\|x\|^{*}$ es seminorma) ojo

$\ldots + 0x_0^4 + 0x_0^3 + \ldots$

entonces tenemos que $\|x\|^* \leq \|x\| \quad \forall x \in A$, por otro lado, puesto que $\|x_0\|_s < 1$ entonces por la igualdad $\lim\limits_n \|x^n\|^{1/n} = \|x\|_s$ se tiene que la sucesión $\{\|x_0^n\|\}$ es acotada i.e. existe $C>0$ tal que $\|x_0^n\| \leq C$ así que:

$$\|x\| \leq \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k \Big\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| \; \|x_0^k\|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} C \; \|x_0^k\| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \|x_0^k\|$$

en particular para el ínfimo de las posibles representaciones

$$\|x\| \leq C \; \|x\|^*$$

y por ello las dos normas son equivalentes.

Para demostrar que $\|e\|^* = 1$ bastará observar que $\|x\|_s \leq \|x\|^* \leq \|x\|$ para cada $x \in A$.

La segunda desigualdad se prueba en la demostración anterior y la primera desigualdad se sigue de

$$\|x\|_s = \max_{M \in \mathfrak{M}} |x^\frown(M)| \leq \|x\|$$

$\square$

La transformación de Gelfand de un álgebra de Banach conmutativa en $C_B(\mathfrak{M}')$ no es necesariamente inyectiva, sin embargo cuando esto pasa la representación es un isomorfismo de A sobre $\hat{A}$. En este caso el estudio de A vía su representación $A^\frown$ facilita un método cómodo de abordarlo. Sería deseable analizar cuando dicha transformación es inyectiva para lo cual definimos el concepto de radical.

$$\{x \in A : \|x\|_s = 0\} = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$$

DEFINICION 2.4.9. : El subconjunto de un álgebra A definido por

$$\{\, x \in A \; ; \; \|x\|_s = 0 \,\} = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$$

es llamado el radical de A y se denota por $rad(A)$.

De la igualdad $\|x\|_s = \lim\limits_n \|x^n\|^{1/n}$ se observa que un elemento x pertenece a el radical sii $\lim\limits_n \|x^n\|^{1/n} = 0$. Tales elementos son también llamados elementos nilpotentes generalizados por analogía a los elementos nilpotentes, i.e. que cumplen que $x^n=0$ para algún entero n, de acuerdo con esto cada elemento nilpotente está en el radical, i.e.

$$\mathcal{N} \subset rad(A)$$

PROPOSICION 2.4.10. : El radical es un ideal cerrado.

Demostración :

Habrá que probar que $rad(A)= \{x\in A; \|x\|_{\sigma}=0\}$ es cerrado, en efecto;

La intersección de cualquier colección de conjuntos cerrados es cerrada en A.

Para $x\in A$ y $rad(A)\subset A$

$$\begin{aligned} x\,rad(A) &= \{xy \ ; \ y\in rad(A) \ \} \\ &= \{xy \ ; \ y\in M \ \forall \ M\in \mathfrak{M} \ \} \\ &= \{xy \ ; \ xy\in M \ \forall \ M\in \mathfrak{M} \ \} \\ &= \{ \ z \ ; \ z\in M \ \forall \ M\in \mathfrak{M} \ \} \\ &= \{z; \ z\in rad(A) \ \} = rad(A) \end{aligned}$$

□

Un criterio para localizar elementos en el $rad(A)$ se enuncia a continuación :

TEOREMA 2.4.11. : Sea A un álgebra de Banach, $x\in A$ entonces $x\in rad(A)$ sii el inverso de $(e+xy)^{-1}$ existe para toda $y\in A$.

Demostración :

Suponga inicialmente que $x\in rad(A)$, entonces para cada $f\in \mathfrak{M}$ y cada $y\in A$ se tenemos

$$f(e+xy) = f(e) + f(x)f(y) = 1$$

por la definición de radical y la desigualdad $\|x\|_{\sigma} = \ \leq \ \|x\|$ se sigue por la proposición (de funcionales lineales multiplicativos ; Prop . Un elemento $x\in A$ es invertible sii $\hat{x}(M)\neq 0$ $\forall M\in \mathfrak{M}$' en este caso $(x^{-1}(M)=[\hat{x}(M)]^{-1}.)$ el elemento $e+xy$ es invertible en A.

Inversamente si $x\notin rad(A)$, entonces existe un funcional $f_{\sigma}\in \mathfrak{M}$ tal que $\alpha=f_{\sigma}(x)\neq 0$ por ello $f_{\sigma}(e+(-e/\alpha)x)\neq 0$ y el elemento $e+(-e/\alpha)x$ no es invertible en A.

□

**

2.5. ALGEBRAS SEMISIMPLES

Nos interesa saber que propiedades posee el núcleo de la transformación de Gelfand con respecto a el álgebra A, para ello también se puede usar el concepto de radical pues como vimos en la sección anterior :

$$\text{rad}\,(A) = \left\{ x \in A \;;\; \lim_n \| x^n \|^{1/n} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in A \;;\; \nu(x) = 0 \right\}$$

$$= \text{Ker}\,(x \longrightarrow \hat{x} \,)$$

$$= \left\{ x \in A ; x \text{ es topologicamente nilpotente} \right\}$$

Se vió también al mostrar la existencia e igualdad del límite

$$\nu(x) = \lim_n \| x^n \|^{1/n}$$

y algunas de sus propiedades, que $\nu(x)$ casi era norma de no ser por elementos no cero que bajo ν se anulaban, mencionabamos que una solución para hacer de ν una norma era considerar el cociente $A/\ker(\nu)$, pero con ello no sería un análisis directo del álgebra A. Ahora describimos las algebras que si pueden ser dotadas de una norma con $\nu(x)$.

DEFINICION 2.5.1. : Sea A un álgebra de Banach decimos que A es semisimple cuando *rad*$(A)=\{0\}$. A es semisimple sii el homomorfismo de Gelfand es isomorfismo algebraico.

Es posible determinar la estructura topologica unicamente a través de la estructura algebraica en el caso de algebras semisimples y conmutativas.

En este sentido formularemos las siguientes proposiciones.

PROPOSICION 2.5.2. : Sean A' y A'' dos algebras de Banach y supongamos que ϕ es un homomorfismo algebraico de el álgebra A' en el álgebra semisimple A'' entonces ϕ es continua.

Demostración :

Para mostrar esto será suficiente ver que si $\phi \not\equiv 0$ entonces el conjunto Graf $\eta = \{ (x,\phi(x)) \in A' \times A''$ con $x \in A' \}$ es cerrado en el correspondiente producto $A' \times A''$, en otras palabras que si elegimos una sucesión tal que $x_n \xrightarrow[n]{} x_o$ y $\phi(x_n) \longrightarrow L$ entonces $L = \phi(x_o)$.

Sea $f \in \mathfrak{M}(A'')$ y $f^{*} = f\phi$

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "f^{*}"'] & A'' \arrow[d, "f"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Como ϕ no es identicamente nula y $rad(A')=\{0\}$ entonces se sigue que $f^{*} \in \mathfrak{M}(A')$ y de acuerdo a la proposición de continuidad de funcionales lineales multiplicativos :

$$f^{*}(x_n) \longrightarrow f^{*}(x_o)$$

con $f^{*}(x_o) = (f \circ \phi)(x_o) = f(\phi(x_o))$ i.e. $f(\phi(x_n)) \longrightarrow f(L)$ donde sólo se sabe que las imagenes de L y $\phi(x_o)$ coinciden bajo f. i.e. $f(L) = f(\phi(x_o))$ pero f es funcional lineal multiplicativo, así $f(L)-f(\phi(x_o)) = f(L-\phi(x_o)) = 0$ para cada $f \in \mathfrak{M}(A'')$. Como A'' es semisimple se sigue que $L = \phi(x_o)$.

□

Otro resultado interesante por su contenido se enuncia a continuación ;

PROPOSICION 2.5.3. : Supongamos que las algebras de Banach A' y A'' son algebraicamente isomorfas y una de ellas es semisimple entonces ambas son topologicamente isomorfas.

Demostración :

Supongamos que $A' \xrightarrow{\eta} A''$ es isomorfismo algebraico, entonces , ambas A' y A'' son semisimples. Por la proposición anterior η y η^{-1} son continuas. i.e. A' y A'' son topologicamente isomorficas.

□

Se puede obsevar que en estas algebras basta conocer su estructura algebraica para tener unicamente determinada su estructura topológica. Una consecuencia inmediata de las proposiciones anteriores se enuncia y prueba a continuación.

COROLARIO 2.5.4. : Cada endomorfismo (automorfismo algebraico) de un álgebra de Banach semisimple es continuo.

Demostración :

Sea ∇ un automorfismo de A dado i.e. una transformación uno a uno del álgebra en sí misma con las propiedades ;

i) Si $x \overset{\nabla}{\longmapsto} x'$ entonces $\lambda x \overset{\nabla}{\longmapsto} \lambda x'$ para $\lambda \in \mathbb{C}$.

ii) Si $x \overset{\nabla}{\longmapsto} x'$ y $y \overset{\nabla}{\longmapsto} y'$ entonces

$$x+y \overset{\nabla}{\longmapsto} x'+y' \quad \text{y} \quad xy \overset{\nabla}{\longmapsto} x'y'$$

Podemos pensar a este automorfismo como un isomorfismo algebraico entre el álgebra A de las funciones x y el álgebra A' de las correspondientes funciones x'. Usando la proposición anterior las algebras A y A' son topologicamente isomorfas, i.e. la convegencia de cualquier sucesión $(x_n) \subset A$ es equivalente a la convergencia de su correspondiente sucesión $\{x'_n\} \subset A'$, lo cual muestra que el automorfismo es continuo.

$\square$

COROLARIO 2.5.5. : Si la imágen $\hat{A}$ de un álgebra semisimple A es completa en la norma $\|.\|_s$, entonces la norma en A es equivalente a la norma espectral.

Demostración :

Si la imágen $\hat{A}$ de un álgebra semisimple es completa con $\|.\|_s$ y $\|.\|$ es la norma en A, entonces $\exists$ $(A,\|.\|) \xrightarrow{\mu} (\hat{A},\|.\|_s)$ tal que μ es isomorfismo algebraico, pero $\hat{A}$ es completa con $\|.\|_s$ entonces $(A,\|.\|_s)$ es álgebra de Banach. Por lo tanto μ es isomorfismo topológico,así :

$$\| \mu(x) \|_s \leq \| \hat{x} \|_s \leq c \| x \| \text{ para algún } c > 0 \text{ en } \mathbb{R}$$

de aquí se deduce que μ^{-1} es continua $\| \mu^{-1}(\hat{x}) \| = \|x\| \leq d \quad \|\hat{x}\|_s$ para d>0 por tanto $\|.\|$ y $\|.\|_s$ son equivalentes.

$\square$

Este último resultado constituye una generalización del teorema de Eidelheit.

Un resultado que es de particular interés pues se utilizará más adelante se enuncia a continuación :

PROPOSICION 2.5.6. : Si A es un álgebra de Banach bajo las normas $\|\circ\|_1$ y $\|\circ\|_2$. Si $(A,\|\circ\|_1)$ es semisimple, entonces $\|\circ\|_1$ y $\|\circ\|_2$ son normas equivalentes sobre A.

Prueba :

Considere la transformación

$$T:(A,\|\circ\|_2) \longrightarrow (A,\|\circ\|_1)$$

definido por $T(x)=x$; $x\in A$. Evidentemente T es un homomorfismo de algebras y por el primer teorema de esta sección es continuo. Entonces existe algún K>0 tal que $\|x\|_1 \leq K\|x\|_2$, $x\in A$. Además puesto que $(A,\|\circ\|_1)$ y $(A,\|\circ\|_2)$ son espacios de Banach ello implica que por el teorema de las dos normas $\|\circ\|_1$ y $\|\circ\|_2$ sean equivalentes.

$\square$

**

2.6. DIVISORES TOPOLOGICOS DE CERO

Sabemos que las algebras de Banach poseen una doble estructura, a saber algebraica y topológica, por ello es que si queremos extender o generalizar los conceptos algebraicos usuales tales como los divisores de cero a algebras de Banach debemos tener presente su naturaleza topológica.

DEFINICION 2.6.1. : Sea A un álgebra de Banach y $x\neq 0$ un elemento de A, decimos que x es un divisor topológico de cero, si existe una sucesión $\{x_n\}\subset A$ tal que $\|x_n\|=1$ y $\lim_n x_n x=0$.

Observación : Para el caso de algebras no conmutativas tenemos el concepto de divisores topológicos de cero izquierdos o derechos según el orden de los factores en la multiplicación y simplemente divisores topológicos de cero a los elementos que cumplan simultaneamente ambas propiedades.

Se puede dar una definición equivalente de divisor topológico de cero :

Un divisor topológico de cero es un elemento $x\in A$ para el cual existe $\{x_n\}\subset A$ con

i) $\|x_n\|\geq\delta>0$ para algún $\delta\in\mathbb{R}$ y además

ii) $\lim_n x_n x=0$.

Para mostrar la equivalencia supongase que $\|x_n\|=1 \Rightarrow \|x_n\|\geq\delta>0$ para algún $\delta>0$ considere $\{x_n'\}=\left\{x_n/\|x_n\|\right\}$ entonces $\|x_n'\|=1$,

además $$\lim_n \frac{x_n x}{\|x_n\|}\leq \lim_n \frac{x_n x}{\delta} = \frac{1}{\delta}\lim_n x_n x = \frac{1}{\delta}\,0 = 0.$$

La siguiente proposición se sigue inmediatamente de la definición.

PROPOSICION 2.6.2. : Los divisores topológicos de cero no pueden ser invertibles.

Demostración :

Para la hacer la prueba supondremos que existe x^{-1}, para x un divisor topológico de cero de A. Entonces sea la sucesión $\{y_n\}\subset A$ la requerida en la definición.

Si $\lim_n xy_n = 0$ entonces $\lim_n y_n = \lim_n x^{-1}xy_n = 0$ es válido, por tanto las condiciones i y ii de la definición son incompatiblesy por ello x no puede ser divisor topológico de cero. □

Mostraremos en seguida una generalización a Gelfand-Mazur para algebras conmutativas usando el concepto antes definido.

PROPOSICION 2.6.3. : Sea A un álgebra de Banach compleja conmutativa con identidad, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes ;

-A no tiene divisores topológicos de cero.

-A es isomorfa a el campo de los números complejos.

Demostración :

La prueba se puede hacer mostrando que si A no es el campo de los números complejos entonces A tiene divisores topológicos de cero, el inverso se infiere facilmente. Retomemos la suposición que A contiene un elemento x_o el cual no es igual a λe para algún $\lambda\in\mathbb{C}$, probaremos que si

$$\lambda_o\in \overline{\mathbb{C}\setminus\sigma(x_o)}\cap\sigma(x_o)$$

i.e. si λ_o está en la frontera del espectro de x_o (que por cierto es no vacío) entonces el elemento $x_o-\lambda_o e$ es un divisor topológico de cero en A.

Tomamos una sucesión de números $\{\lambda_n\}$ no contenida en $\sigma(x_o)$, la cual converge a λ_o. Los elementos $x_o-\lambda_n e$ son invertibles en A. Haciendo : $Y_n=(x_o-\lambda_n e)^{-1}/\|(x_o-\lambda_n e)^{-1}\|$ tenemos que $\|Y_n\|=1$ y además :

$$\|(x_o-\lambda_n e)^{-1}\| \geq \|(x_o-\lambda_n e)^{-1}\|_s = \max_{f\in\mathfrak{M}} |f(x_o)-\lambda_n|^{-1}\geq |\lambda_o-\lambda_n|^{-1}\xrightarrow[n]{}\infty$$

de aquí ;

$$\|(x_0-\lambda_0 e)Y_n\| \leq \|(x_0-\lambda_n e)Y_n\| + |\lambda_n-\lambda_0| \, \|Y_n\| =$$

$$= \|(x_0-\lambda_n e)^{-1}\|^{-1} + |\lambda_0-\lambda_n| \xrightarrow[n]{} 0$$

□

COROLARIO 2.6.4. : El resultado anterior es válido también para algebras de Banach complejas no conmutativas con identidad.

Demostración :

En efecto, cualquiera de tales algebras contiene una subálgebra conmutativa no isomorfa a el campo complejo ; i.e. si A es no conmutativa y todas las subalgebras conmutativas son isomorfas a $\mathbb{C}$ entonces A es isomorfa a $\mathbb{C}$, como se demuestra a continuación : Tomemos $x\in A$, sea $\langle e,x\rangle$ la subálgebra compleja generada por x y por e, que viene a ser la cerradura en A de los polinomios de x incluyendo términos constantes, evidentemente $\langle e,x\rangle$ es conmutativa, si $\langle e,x\rangle\cong\mathbb{C}$ entonces x es invertible y satisface un polinomio de grado dos con coeficientes reales, pero $x\in A$ fué elegido arbitrariamente, así que A es campo y cualquier elemento satisface un polinomio con coeficientes reales de grado dos y por un teorema de Frobenius se tiene que A es $\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$ ó $\mathbb{Q}$ salvo isomorfismo. $\mathbb{R}$ obviamente no es álgebra compleja y $\mathbb{Q}$ tampoco lo es, como se puede ver por ejemplo con la siguiente relación :

$$i(jk)\neq j(ik),$$

donde i,j,k son generadores de $\mathbb{Q}$, e $i\in\mathbb{C}$, así que sólo le queda ser isomorfa a $\mathbb{C}$ por tanto $A\cong\mathbb{C}$ con A no conmutativa lo cual es una contradicción.

De aquí se concluye que hay una subálgebra conmutativa en A no isomorfa a $\mathbb{C}$, esa subálgebra tiene divisores topológicos de ceropor la proposición anterior y el álgebra misma tiene divisores topológicos de cero.

□

En seguida se prueba un resultado que generaliza el teorema de Gelfand-Mazur apelando a los resultados anteriormente expuestos.

TEOREMA 2.6.5. : Sea A un álgebra de Banach compleja (no necesariamente conmutativa ni con identidad) entonces solo una de las afirmaciones es cierta en cada caso.

-A tiene divisores topológicos de cero.

-A es isomorfo a el campo de los números complejos.

Demostración :

Como en la demostración anterior se puede observar que A tiene una subálgebra conmutativa no isomorfa a $\mathbb{C}$. Así, sin pérdida de generalidad podemos suponer que A es conmutativa. Probaremos que si A no es isomorfa a $\mathbb{C}$, entonces tiene divisores topológicos de cero. Como A no tiene identidad, entonces haciendo $A_1=A\oplus\{\lambda e\}$, A_1 tiene divisores topológicos de cero por el teorema anterior. Entonces existen elementos $x_n\in A$ y números $\lambda_n\in\mathbb{C}$,$n\in\mathbb{N}$ tales que $\|x_n\|+|\lambda_n|=1$,$n\in\mathbb{N}$ y

$$\lim_n \|(x_o+\lambda_o e)(x_n+\lambda_n e)\|=0$$

claramente $x_o\neq 0$. La sucesión $\{\lambda_n\}$ es acotada por tanto podemos suponer que converge $\lambda_n \xrightarrow[n]{} \lambda$.

De aquí :

$\lim_n \|(x_o+\lambda_o e)(x_n+\lambda e)\|=0$, como A no tiene identidad entonces $\lambda_o\lambda=0$. Así que ocurren tres casos.

Si $\lambda_o=\lambda=0$, entonces el álgebra A misma tiene divisores topológicos de cero.

Consideramos los dos casos que subsisten.

i) $\lambda_o=0$ y $\lambda\neq 0$. Entonces $x_o(x_n+\lambda e)\longrightarrow 0$. Supongamos primero que la sucesión $\{x_n\}$ es convergente y $x_n \xrightarrow[n]{} y$. Entonces $x_o(y+\lambda e)=0$ y $\exists z\in A$ tal que $u=z(y+\lambda e)\neq 0$, puesto que de otro modo el elemento $-y/\lambda$ sería una identidad de el álgebra A, contrariamente a la suposición.

Entonces $u\in A$ y $ux_o=0$, obteniendo que A tiene divisores de cero y automaticamente también divisores topológicos de cero. Si la sucesión $\{x_n\}$ es divergente, entonces existe $\delta>0$ y una sucesión de índices $k_n \longrightarrow\infty$ tales que $\|x_n-x_{k_n}\|\geq\delta$ de donde :

$$x_o(x_n-x_{k_n}) = x_o(x_n+\lambda e)-x_o(x_{k_n}+\lambda e) \xrightarrow[n]{} 0$$

y x_o es un divisor topológico de cero porque satisface la definición equivalente de divisor topológico de cero.

□

Es claro que el concepto de divisor topológico de cero es más general que el de divisor de cero pero el inverso no siempre es válido como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.

Considere $C([0,1])$ el espacio de las funciones complejas definidas sobre $[0,1]$ y continuas sobre este intervalo con la norma dada por :

$$\|x\| = \max_{0 \le t \le 1} |x(t)|.$$

Y sea $x(t)$ en $C([0,1])$ tal que es igual a cero solo en el punto $t=0$, dicha función no es un divisor ordinario de cero. Además si considera la sucesión $x_n(t)$ positiva y que sólo se anula en $[1/n,1]$, que alcanza su máximo valor en $[0,1/n]$ con $\|x_n(t)\|=1$, obviamente $xx_n \xrightarrow[n]{} 0$ por tanto $x(t)$ es un divisor topológico de cero.

Aún más cada elemento que no tenga inverso en un álgebra no es necesariamente divisor topológico de cero, ello se mostrará con otro ejemplo.

Ejemplo 2.

Sea l_1 el espacio $\left\{x;\ x=\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n \text{ tal que } x_n \in \mathbb{C} \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$

con la norma definida por ;

$$\|x\| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

y la multiplicación en l_1 por la convolución.

Se observa que x es invertible en l_1 solo si $x_0 \neq 0$, si tomo la serie z, entonces no es invertible puesto que su término independiente es nulo, sin embargo tampoco es divisor topológico de cero como se prueba a continuación ;

En efecto, para cualquier $y=\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n \in l_1$ se tiene ;

$$zY = z\sum_{n=0}^{\infty} Y_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n z^{n+1}$$

entonces también se infiere de inmediato que ;

$$\|zY\| = \|Y\|$$

si ocurriera que z es un divisor topológico de cero entonces existiría $\{Y^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset l_1$ tal que $\|Y^{(m)}\|=1$, de aquí se tiene

$$0 = \lim_m \|zY^{(m)}\| = \lim_m \|Y^{(m)}\|$$

lo cual sería una contradicción. Por tanto no puede ser divisor topológico de cero.

□

Una proposición que es fundamentalmente una construcción de los divisores topológicos de cero que es de gran utilidad para proporcionar ejemplos, se enuncia en seguida:

PROPOSICION 2.6.6. : Sea x un elemento arbitrario de un álgebra normada conmutativa A y λ_o un punto en la frontera del espectro $\sigma(x)$ i.e. de el conjunto de valores $x\hat{}(M)$, entonces $x-\lambda_o e$ es un divisor topológico de cero.

Demostración :

En efecto considere (λ_n) una sucesión que no pertenece a el conjunto de valores $x\hat{}(M)$ y tal que

$$\lambda_n \xrightarrow[n]{} \lambda_o .$$

Los elementos $(x-\lambda_o e)^{-1}$existen en A;

Haciendo $Y_n=(x-\lambda_n e)^{-1} \big/ \|(x-\lambda_n e)^{-1}\|$ tenemos $\|Y_n\|=1$ y además ;

$$\|(x-\lambda e)^{-1}\| \geq \max_{M\in\mathfrak{M}} |x\hat{}(M)-\lambda_n|^{-1} \geq |\lambda_o-\lambda_n|^{-1} \xrightarrow[n]{} \infty$$

se tiene $$(x_o-\lambda_o e)Y_n=(x-\lambda_n e)Y_n+(\lambda_n-\lambda_o)Y_n$$

$$= \frac{e}{\|(x-\lambda_n e)^{-1}\|} + (\lambda_n-\lambda_o)Y_n \xrightarrow[n]{} 0$$

de aquí se sigue que $x-\lambda_o e$ es divisor topológico de cero.

□

Observe que esta proposición es válida para un álgebra A normada conmutativa, lo cual ya representa un avance en la caracterización de tales elementos.

Hasta el momento no se ha estudiado a los divisores topológicos de cero para algebras de Banach reales, los siguientes resultados son los análogos a los ya enunciados para algebras de Banach complejas.

TEOREMA 2.6.7. : Sea A un álgebra de Banach conmutativa real con identidad e entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes ;

-A no tiene divisores topológicos de cero.

-A es isomorfa a el campo real o a el campo complejo.

Demostración :

Supongamos que $A \not\cong \mathbb{R},\mathbb{C}$ por el teorema de Gelfand-Mazur existe $x_o \in A$ tal que $x_o^{-1} \notin A$ tomamos :

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & A_{\mathbb{C}} \\ |||\cdot||| & & \|\cdot\| \end{array}$$

la complejificación $A_{\mathbb{C}}$ de A, entonces $0 \in \sigma(x_o)$; sea

$r_o \in \mathbb{D} = (\overline{\mathbb{C} \setminus \sigma(x_o)} \cap \sigma(x_o)) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ ya que $0 \in \sigma(x_o)$.

Sea $r \in \mathbb{D}$ entonces $(x - r_o e)$ es divisor topológico de cero.

Tomamos ahora la sucesión de números $\{r_n\} \subset \sigma(x_o)$ tal que $r_n \xrightarrow[n]{} r$, entonces los elementos $x - r_o e$ son invertibles en A, en virtud de el teorema ("un elemento $x \in A$ es invertible sii $x\hat{}(M) \neq 0$ $\forall M \in \mathfrak{M}$' en este caso $x^{-1}\hat{}(M) = [x\hat{}(M)]^{-1}$") haciendo ;

$$Y_n = (x_o - r_n e)^{-1} \Big/ \|(x_o - r_n e)^{-1}\|$$

entonces $\|Y_n\| = 1$ y $|||(x_o - r_n e)^{-1}||| \geq |||(x_o - r_n e)^{-1}|||_s$

$$= \max_{f \in \mathfrak{M}_{A_{\mathbb{C}}}} |f(x_o) - r_n|^{-1} \geq |r_o - r_n|^{-1} \xrightarrow[n]{} \infty$$

$$\Rightarrow |||(x_o - r_n e)^{-1}||| \xrightarrow[n]{} \infty$$

como $|||\cdot|||$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes se sigue que ;

$$\|(x_o - r_n e)^{-1}\| \xrightarrow[n]{} \infty$$

por lo tanto $\|(x_o - re)Y_n\| \leq \|(x_o - re)Y_n\| + |r_o - r_n| \xrightarrow[n]{} 0$

$\therefore$ A tiene divisores topológicos de cero.

□

COROLARIO 2.6.8. : El resulatado anterior también es válido para algebras de Banach reales no conmutativas con identidad.

Demostración :

En efecto cualquiera de tales algebras contiene una suálgebra conmutativa no isomorfa a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$; pues si A es no conmutativa y todas las subalgebras conmutativas son isomorfas a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ entonces A es isomorfa a $\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$ o $\mathbf{Q}$, como se demuestra a continuación : sea $x \in A$ y considere $\langle e, x\rangle$ la subálgebra real generada por x y por e, que viene a ser la cerradura en A de los polinomios de x incluyendo términos constantes, evidentemente $\langle e,x\rangle$ es conmutativa, si $\langle e,x\rangle \cong \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, entonces x es invertible y satisface un polinomio de grado dos con coeficientes reales y por un teorema de Frobenius $A \cong \mathbb{R}$,$\mathbb{C}$ ó $\mathbf{Q}$ salvo isomorfismo $\mathbf{Q}$ no es un álgebra real como se ve en la relación ;

$$i(jk) \neq (ij)k$$

donde i,j,k son los generadores de $\mathbf{Q}$ por ello puede ser isomorfa a $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ con la hipótesis A no conmutativa lo cual es una contradicción. De aquí se concluye que hay una subálgebra conmutativa en A no isomorfa a $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, esa subálgebra tiene divisore topológicos de cero por la proposición anterior y el álgebra misma tiene divisores topológicos de cero.

□

TEOREMA 2.6.9. : Sea A un álgebra de Banach real entonces A tiene divisores topológicos de cero o es isomorfo a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbf{Q}$.

Demostración :

Copiese la demostración de el teorema 2.6.5. cambiando los escalares complejos λ por escalares reales r.

□

Como se ha visto en las algebras conmutativas con identidad no coinciden los divisores topológicos de cero con los elementos singulares, estudiaremos un caso especial de algebras para las cuales esto es cierto, pero antes son necesarios algunos preliminares.

DEFINICION 2.6.10 : Sea Λ un álgebra de Banach conmutativa semisimple autoadjunta. Si $x\in\Lambda$ entonces denote por x^* el único elemento tal que :

$$\widehat{x^*} = \overline{\hat{x}}.$$

Dado $x\in\Lambda$, se sabe que existe algún $y\in\Lambda$ tal que $\hat{y}=\overline{\hat{x}}$. Puesto que Λ es semisimple este elemento es único.

PROPOSICION 2.6.11. : Sea Λ un álgebra de Banach conmutativa semisimple autoadjunta. Entonces

$i)$ $(x+y)^* = x^* + y^*$

$(xy)^* = x^* y^*$

$(\alpha x)^* = \bar{\alpha}\, x^*$ para $x,y\in\Lambda$ y $\alpha\in\mathbb{C}$.

$ii)$ La transformación $*:\Lambda \longrightarrow \Lambda$ definida por $*:x \longrightarrow x^*$, $x\in\Lambda$ es un isomorfismo topológico antilineal de Λ en sí mismo.

Demostración :

$$\widehat{(x+y)^*} = \overline{\widehat{x+y}} = \overline{\hat{x} + \hat{y}} = \overline{\hat{x}} + \overline{\hat{y}} = \widehat{x^*} + \widehat{y^*}$$

$$\therefore\ x+y \longrightarrow x^* + y^*$$

$$\widehat{(xy)^*} = \overline{(\widehat{xy})} = \overline{\hat{x}\,\hat{y}} = \overline{\hat{x}}\ \overline{\hat{y}} = \widehat{x^*}\ \widehat{y^*}$$

$$\therefore\ xy \longrightarrow x^* y^*$$

$$\widehat{(\alpha x)^*} = \overline{(\widehat{\alpha x})} = \overline{\alpha\, \hat{x}} = \bar{\alpha}\, \overline{\hat{x}} = \bar{\alpha}\, \widehat{x^*}$$

$$\therefore\ \alpha x \longrightarrow \bar{\alpha}\, x^*$$

Demostraremos ahora explicitamente que $*$ es isomorfismo topológico. Para ello introduciremos una nueva norma en Λ definida por $\|x\|_c=\|x^*\|$, $x\in\Lambda$, resulta rutinario probar que tal relación es efectivamente una norma, por ejemplo si $\|x\|_c=0$ entonces $\|x^*\|=0$ y también $x^*=0$. Donde $\overline{\hat{x}}=0$ lo cual implica que $\hat{x}=0$ y por lo tanto $x=0$ pues Λ es semisimple, además $\|\cdot\|_c$ esw una norma con la cual Λ es también completo, pues suponga que (x_n) es existe una subsucesión $(t'_{n_k})_k$ tal que $x^* t_{n_k} \xrightarrow[k]{} 0$ pero entonces se infiere

$$x^* t_{n_k} = (x t^*_{n_k})^* \xrightarrow[k]{} 0$$

(en un álgebra sin radical la involución es continua). i.e. $\inf_n \|t_n\| > 0$ implica que $\inf_n \|t^*_n\| > 0$ así que x es un divisor topológico de cero.

□

COROLARIO 2.6.13. : Si $\|xy\| = \|x\| \|y\|$ para x, y arbitrarios en A un álgebra de Banach conmutativa, entonces A es el campo de los números complejos.

Demostración :

En efecto, A no tiene divisores topológicos de cero puesto que de no ser así ; existiría (y_n) tal que $\|y_n\| = 1$ y $x \neq 0$ donde

$$0 = \lim_n \|xy_n\| = \lim_n \|x\| \|y_n\| = \|x\| \lim_n \|y_n\| \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

lo cual es una contradicción. Por la proposición 2.6.3. se infiere el resultado.

□

Una pregunta natural es si puede existir un álgebra de Banach para la cual el radical es ella misma. La respuesta la proporciona el siguiente ejemplo:

Considere el espacio $L^1(0,1)$ con la norma

$$\|x\|=\int_0^1 |x(t)|dt$$

y con la multiplicación convolución

$$(x*y)(t)=\int_0^1 x(t-\tau)y(\tau)d\tau$$

se puede mostrar como en la sección 1.6. de ejemplos que $\|x*y\|\le\|x\|\|y\|$ y también es un álgebra de Banach. En efecto esta es un álgebra conmutativa que no tiene identidad.

Se puede observar que si $x\in L^1(0,1)$ tenemos que $x(t)=0$ para $0\le t\le\varepsilon$, entonces $(x*x)(t)=0$ para $0\le t\le 2\varepsilon$ y por inducción para la n-ésima potencia de convolución $x^n(t)=0$ para $0\le t\le n\varepsilon$. Entonces $x^n=0$ para n suficientemente grande. Pero los elementos en $L^1(0,1)$ que se anulan sobre el intervalo $0\le t\le\varepsilon$ forman un subconjunto denso en esta álgebra $L^1(0,1)$ (esto es posible por como está definida la norma) y por ello $L^1(0,1)$ coincide con el radical. Además, el álgebra $A=L^1(0,1)\oplus e\mathbb{C}$ posee un solo ideal máximo igual a $rad(A)=L^1(0,1)$. Esto se puede analizar de la siguiente manera :

tomese $x=x(t)\equiv 1$ así tenemos que $x^n=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ así que x genera todas los polinomios y estos son densos en el espacio $L^1(0,1)$, además

$$\|x^n\| = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 t^{n-1}dt = \frac{1}{n!}$$

de donde :

$$\left\{\|x^n\|\right\}^{1/n} \xrightarrow[n]{} 0$$

$\therefore$ x es un elemento nilpotente generalizado y $x \in rad(\Lambda)$. Puesto que el radical es un ideal entonces $xp(x) \in rad(\Lambda)$, donde p es algún polinomio con coeficientes complejos. Cada elemento $y \in L^1(0,1)$ es punto límite de tales polinomios, y como el radical es cerrado, contiene a $L^1(0,1)$. Por otro lado ningún elemento $y=z+\lambda e$ con $z \in L^1(0,1)$ y $\lambda \neq 0$, pertenece a el radical porque el funcional definido por $f(z+\lambda e)=\lambda$ está en $\mathfrak{M}(\Lambda)$ y $f(y)=\lambda \neq 0$ de donde $L^1(0,1)=rad(\Lambda)$.

En la siguiente sección se analizarán algebras Λ que cumple que $rad(\Lambda)=\{0\}$.

de Cauchy en $(A,\|\circ\|_c)$, entonces evidentemente (x_n^*) es una sucesión de Cauchy en $(A,\|\circ\|)$ y también existe algún $y\in A$ tal que :

$$\lim_n \|x_n^*-y\| = 0$$

si proponemos $x=y^*$ se observa que :

$$\lim_n \|x_n-x\|_c = \lim_n \|x_n^*-x^*\| = \lim_n \|x_n^*-y\| = 0$$

entonces $(A,\|\circ\|_c)$ es un espacio de Banach. Se sigue que $(A,\|\circ\|_c)$ y $(A,\|\circ\|)$ son ambas algebras de Banach conmutativas y $(A,\|\circ\|)$ es semisimple, por la proposición 2.5.6. se tiene que $\|\circ\|_c$ y $\|\circ\|$ son normas equivalentes. Entonces en particular existen $K_1>0$ y $K_2>0$ tales que : $K_2\|x\|\le\|x\|_c\le K_1\|x\|$, $x\in A$ y también $*$ es un isomorfismo topológico.

□

PROPOSICION 2.6.12. : Sea A un álgebra conmutativa simétrica autoadjunta sin radical. Entonces $x\in A$ es divisor topológico de cero sii x no tiene inverso en A.

Demostración :

Si x es divisor topológico de cero entonces por la proposición 2.6.2. de esta sección se tiene que x no es invertible. Supongamos ahora que no tiene inverso en A y supongamos además que $x^*\in A$ es tal que $\hat{x}^*(M)=\overline{x(M)}$ para toda $x\in A$. Entonces 0 es un punto frontera de el conjunto de valores de la función $(xx^*)(M)$ y por el resultado expuesto en la proposición 2.6.6. , xx^* es un divisor topológico de cero i.e. $\exists\ (t_n)\subset A$ tal que $\inf_n \|t_n\| > 0$ y así :

$$xx^*t_n=x(x^*t_n) \xrightarrow[n]{} 0$$

ahora si $\inf_n \|x^*t_n\| > 0$, entonces haciendo $t_n'=x^*t_n$ se concluye el resultado. Si esto no ocurre i.e. si $\inf_n \|x^*t_n\|=0$ no pasa,

**

2.7 CARACTERIZACION DE LOS DIVISORES TOPOLOGICOS DE CERO EN TERMINOS DE INVERTIBILIDAD

Una caracterización importante en términos de invertibilidad para los divisores topológicos de cero es que estos son exactamente los elementos permanentemente singulares.

DEFINICION 2.7.1. : Sean Λ,Γ algebras de Banach conmutativas con identidad e, Γ es llamada una extensión o superálgebra de Λ si contiene una subálgebra Λ' que contenga una identidad e y sea isomorfa a Λ. Será llamada extensión isométrica si Λ' es isométrica a Λ, se le denotará simplemente por $\Lambda \ll \Gamma$.

DEFINICION 2.7.2. : Un elemento $x \in \Lambda$ $(x \neq 0)$ es permanentemente singular si x no es invertible en cada extensión de Λ.

PROPOSICION 2.7.3. : Sea Λ un álgebra de Banach conmutativa con identidad e. Un elemento $\rho \in \Lambda$ es permanentemente singular sii ρ es un divisor topológico de cero.

Demostración :

Un ρ divisor topológico de cero en Λ es un divisor topológico de cero en Γ cualquier extensión de Λ. Además los divisores topológicos de cero no son invertibles por lo tanto ρ no es invertible en cada extensión de Λ, i.e. ρ es permanentemente singular.

Inversamente, suponga que ρ no es un divisor topológico de cero y $\rho\neq 0$, entonces hay que construir una extensión $\Gamma \gg \Lambda$ tal que ρ sea invertible en Γ. Para esto considere Λ' el álgebra que tiene por elementos las series de potencias formales

$$x'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n$$

con $x_n \in \Lambda$, dotado de la norma

$$\| x' \| = \sum_{n=0}^{\infty} \| x_n \| < \infty$$

Es fácil ver que Λ' con la norma $\|.\|$ es un álgebra de Banach con la multiplicación de Cauchy para series de potencias, además Λ' es una extensión isométrica de Λ pues se tiene la asignación $x \longrightarrow x'(t) \equiv x$ donde a un elemento $x \in \Lambda$ le corresponde una serie "constante" $x' \in \Lambda'$.

De la hipótesis se sigue que $\gamma = \inf\limits_{\|y\|=1} \|\rho y\| > 0$ aunque también se puede suponer que $\inf\limits_{\|y\|=1} \|\rho y\| \geq 1$ si se considera ρ/γ en lugar de ρ, de aquí que $\|\rho y\| \geq \|y\| \quad \forall y \in \Lambda$.

Ahora nos fijamos en el ideal $I=(e-\rho\cdot t)\Lambda' \subset \Lambda'$ y consideramos el álgebra cociente $\Gamma = \Lambda'/I$. Aquí denotamos por $[x(t)]$ a la clase lateral del elemento $x(t) \in \Lambda'$. Por la forma en la que esta definida la multiplicación en Λ' se tiene que :

$$[e]=[\rho][t],$$

y así $[\rho]\in G(\Gamma)$, siempre que $[e]\neq 0$, i.e. que $I\neq\Lambda'$. Probaremos que la transformación

$$\begin{array}{c} \Lambda \longrightarrow \Gamma \\ x \longmapsto [x] \\ x \longrightarrow x(t)\equiv x \longrightarrow [x] \end{array}$$

de Λ en Γ es una isometría. Esto probará que $[e]\neq 0$, y que Γ es una extensión de Λ. Para probar la afirmación anterior usaremos las siguientes estimaciones :

$$(1) \qquad \|[x]\| = \inf_{y(t)\in\Lambda'} \|x+(e-\rho t)y(t)\| \leq \|x\|$$

por otro lado

$$\Big\|x-(e-\rho t)\sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n\Big\| = \Big\|x-y_o+\sum_{n=1}^{\infty}(\rho y_{n-1}-y_n)t^n\Big\|$$

$$= \| x-y_o\| + \sum_{n=1}^{\infty}\| \rho y_{n-1}-y_n\|$$

$$\geq \| x-y_o\| + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\|\rho y_{n-1}\| - \|y_n\| \Big)$$

$$\geq \| x-y_o\| + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\|y_{n-1}\| - \|y_n\| \Big)$$

donde $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k}\Big(\|y_{n-1}\| - \|y_n\| \Big) = \lim_{k\to\infty} \| y_o\| - \| y_k\| = \| y_o\|$

la última igualdad se obtiene de la convergencia de la serie. De aquí que $\| [x] \| \geq \| x-y_o\| + \| y_o\| \geq \| x \|$. Así se tiene la igualdad $\| [x] \| = \| x \| \ \forall \ x \in \Lambda$, i.e. Γ es una extensión isométrica de Λ tal que el elemento ρ resultó ser invertible en Γ.

$\square$

El resultado es bastante útil solo que aquí hay un problema, que [illegible] una extensión comün para tales elementos. Recordemos que en el capitulo uno de esta tesis haciamos hincapié en el caracter más general que tiene el concepto de divisor topológico de cero respecto a el de divisor de cero, en ese momento nos pudimos preguntar entonces ¿ bajo qué condiciones coinciden ?

TEOREMA 2.7.4. : Sea Λ un álgebra de Banach (no necesariamente conmutativa, la existencia de la identidad se supone). Entonces existe Γ un álgebra de Banach tal que es isomorfa a una subálgebra de Γ en la que cada divisor topológico de cero es un divisor de cero en Γ.

Demostración :

Considere el álgebra Λ^{*} que consiste de las sucesiones $x = \{x_n\} \subset \Lambda$ tales que $|||x|||=\lim_n \sup \|x_n\| < \infty$ y sea

$$N=\{x\in\Lambda^{*} : |||x|||=0\}$$

entonces $\Gamma = \Lambda^{*}/N$ es álgebra de Banach con la norma $|||.|||$. Γ posee una subálgebra Λ_o isométrica a Λ, tal subálgebra es precisamente la subálgebra que tiene por elementos las sucesiones constantes. Si $x_n x \xrightarrow[n]{} 0$, $\| x_n \| = 1$ y $x_o \neq 0$, entonces las sucesiones $\{x_o\}$ y $\{x_n\}$ son elementos de Γ las cuales son divisores de cero y la clase que contiene a la sucesión $\{x_o\}$ está en Λ_o.

□

**

3. CALCULO FUNCIONAL

Nos preguntamos que significado tiene que una función sea analítica en algebras de Banach.

DEFINICION 3.1.1. : Sean A un espacio de Banach, Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f:\Omega \longrightarrow A$. Se dice que f es analítica en Ω si para cada $\lambda_o \in \Omega$ existe el siguiente límite :

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o} \frac{1}{\lambda-\lambda_o}(f(\lambda)-f(\lambda_o)),$$

i.e. , si para cada λ_o, existe $y_o \in A$ tal que para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $|\lambda-\lambda_o|<\delta$, entonces

$$\|(f(\lambda)-f(\lambda_o))(\lambda-\lambda_o)^{-1} - y\| < \varepsilon$$

es obvio que y_o es único con esta condición. A y_o lo denotamos como se hace usualmente por $f'(\lambda_o)$ y la función $f':\Omega \longrightarrow A$ definida por f' en $\lambda_o = f'(\lambda_o)$ se le llama la derivada de f.

PROPOSICION 3.1.2. : Sean $\mathscr{X}$ un espacio de Banach, Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $f:\Omega \longrightarrow \mathscr{X}$ una función analítica y $f^* \in \mathscr{X}^*$. Entonces la transformación :

$$z \longmapsto f^*(f(z))$$

es una función compleja que es analítica sobre Ω.

Demostración :

En efecto ;

$$\left\{ f^*(f(z_o))\right\}' = \lim_{z\to z_o} \frac{f^*(f(z))-f^*(f(z_o))}{z - z_o}$$

$$= \lim_{z\to z_o} \frac{1}{z - z_o} f^*(f(z)-f(z_o))$$

$$= \lim_{z\to z_o} f^*\left[\frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}\right]$$

$$= f^*\left[\lim_{z\to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}\right] = f^*(f'(z_o))$$

El concepto de la integral a lo largo de una curva, de una función con dominio complejo y codominio un espacio o un álgebra de Banach también será de utilidad en lo que sigue, por lo cual procedemos a definirla.

Sea $\gamma:[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ de variación acotada, analogamente si γ es una curva rectificable en Ω y f es una función continua definida en una vecindad de $\{\gamma\}$ con valores en $\mathscr{X}$, entonces $\int_\gamma f$ se puede definir analogamente a como se hace para funciones de valores escalares, i.e. como el límite en $\mathscr{X}$ de las sumas de la forma :

$$\sum_j \left[\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\right] f(t_j') \qquad t_{j-1}\leq t_j'\leq t_j$$

Observación : Si f es una función definida en una vecindad de la curva γ en $\mathbb{C}$, entonces escribiremos $f(t)$ donde $t \in [a,b]$ en lugar de escribir $f(\gamma(t))$. Todo esto es para simplificar la escritura.

TEOREMA 3.1.3. : Sea $\mathscr{X}$ un espacio de Banach y $\gamma:[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ de variación acotada y suponga que $f:[a,b] \longrightarrow \mathscr{X}$ es continua. Entonces hay un elemento $I \in \mathscr{X}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ tal que si $p = \{t_o<t_1<\ldots<t_m\}$ es una partición de $[a,b]$ con

$$\|p\|=\max\{(t_k-t_{k-1}):1\leq k\leq m\} \leq \delta$$

entonces

$$\left\| I - \sum_k f(t_k')(\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1}))\right\| < \varepsilon$$

para cualquier elección arbitraria de puntos t_k' en el intervalo $[t_{k-1},t_k]$.

Este elemento I es llamado la integral de f con respecto a γ sobre $[a,b]$ y es denotado por :

$$I = \int_a^b f d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t))\, d\gamma(t) \text{ o simplemente } \int_\gamma f$$

Demostración :

Puesto que f es continua sobre un compacto se tiene que f es uniformemente continua ; entonces podemos encontrar inductivamente números positivos $\delta_1>\delta_2>\ldots$ tal que si $|s-t|<\delta_m$ se tiene $|f(s)-f(t)|<1/m$.

Para cada $m \geq 1$ sea $\mathbb{P}_m$ la colección de todas las particiones tales que $\|p\| < \delta_m$, observamos que $\mathbb{P}_1 \supset \mathbb{P}_2 \supset \mathbb{P}_3 \supset \ldots$ finalmente defina $\mathbb{F}_m$ como la cerradura del conjunto ;

$$(1) \quad \left\{ \sum_{k=1}^n f(t_k')(\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})) : p \in \mathbb{P}_m \text{ y } t_{k-1}\leq t_k'\leq t_k \right\}$$

se verifica que : $\mathbb{F}_1 \supset \mathbb{F}_2 \supset \mathbb{F}_3 \supset \ldots$ y además diam $\mathbb{F}_m \leq \frac{2}{m}V(\gamma)$, donde $V(\gamma)$ denota la longitud de la curva γ, (lo cual se mostrará en un anexo a la demostración, anexo 1).

De donde, por el teorema de Cantor se sigue que existe exactamente un elemento $I \in \mathscr{X}$ tal que $I \in \mathbb{F}_m$ para cada m≥1.

Habrá que hacer ver que el elemento $I \in \mathscr{X}$ cumple con las propiedades requeridas en el teorema ; en efecto sea $\varepsilon > 0$ y $m > \frac{2}{\varepsilon}V(\gamma)$, entonces $\varepsilon > \frac{2}{m}V(\gamma) \geq \text{diam}\ (\mathbb{F}_m)$. Puesto que $I \in \mathbb{F}_m$, $\mathbb{F}_m \subset B(I,\varepsilon)$. Entonces si $\delta = \delta_m$ el teorema se justifica.

□

Anexo 1 : En la prueba del resultado anterior se ha utilizado que $\mathbb{F}_1 \supset \mathbb{F}_2 \supset \mathbb{F}_3 \supset \ldots$,lo que se sigue trivialmente de que $\mathbb{P}_1 \supset \mathbb{P}_2 \supset \mathbb{P}_3 \supset \ldots$, para mostrar que el diámetro de el conjunto

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} f(t_k')(\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})) ; p \in \mathbb{P}_m \quad t_{k-1} \leq t_k' \leq t_k \right\}$$

es menor o igual que $\frac{2}{m}V(\gamma)$ se puede exponer en dos etapas:

Primera :

Sea $m \geq 1$ fijo y $P \in \mathbb{P}_m$, para el primer paso habrá que mostrar que si $P \subset Q$ (y por tanto $Q \in \mathbb{P}_m$) entonces

$$|\sigma(P)-\sigma(Q)| < {}^1\!/_m\, V(\gamma)$$

sin pérdida de generalidad supondremos que Q contiene un punto más que P. Sea $t_{j-1} \leq t^* \leq t_j$ con $1 \leq j \leq m$ y suponga que $P \cup \{t^*\} = Q$ y u,u' tales que $t_{j-1} \leq u \leq t^*$; $t^* \leq u' \leq t_j$ entonces se obtiene

$$\sigma(Q) = \sum_{k \neq j} f(t_k')(\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})) + f(u)(\gamma(t^*)-\gamma(t_{j-1})) + f(u')(\gamma(t_j)-\gamma(t^*))$$

entonces usando el hecho de que $|f(r)-f(r')| < 1/m$ para $|r-r'| < \delta_m$ se obtiene la estimación siguiente de la diferencia de las sumas :

$$|\sigma(P)-\sigma(Q)| = \Bigg| \sum_{k \neq j} \Big[(f(t_k')-f(t_k''))(\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})) +$$

$$f(t_j')(\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})) - f(u)(\gamma(t^*)-\gamma(t_{j-1})) - f(u')(\gamma(t_j)-\gamma(t^*)) \Big] \Bigg|$$

$$\leq \frac{1}{m} \sum_{k\neq j} |\ \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\ | + |\ (f(t_j')-f(u))(\gamma(t^*)-\gamma(t_{j-1}))\ | +$$

$$+\ |\ (f(t_j')-f(u'))(\gamma(t_j)-\gamma(t^*))\ |$$

$$\leq \frac{1}{m} \sum_{k\neq j} |\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})| + \frac{1}{m} |\gamma(t^*)-\gamma(t_{j-1})| + \frac{1}{m}\ |\ \gamma(t_j)-\gamma(t^*)\ |$$

$$\leq \frac{1}{m} V(\gamma)$$

Segunda :

Sea P y R particiones arbitrarias en $\mathbb{P}_m$. Entonces sea $Q = P \cup R$ una partición que es simultaneamente refinamiento tanto de P como de R. Usando la primera parte se sigue que

$$|\ \sigma(P) - \sigma(R)\ | \leq |\sigma(P)-\sigma(Q)| + |\sigma(Q)-\sigma(R)| \leq \frac{2}{m} V(\gamma)$$

como $\mathbb{F}_m$ es la cerradura del conjunto (1) entonces se tiene que

$$\text{diam } \mathbb{F}_m \leq \frac{2}{m} V(\gamma).$$

□

Se sigue inmediatamente de la definición de integral las propiedades de linealidad de esta.

Suponga que $\exists\ \int_b^a f(\gamma(t))d\gamma(t)$ y $\int_b^a g(\gamma(t))d\gamma(t)$ entonces $f+g$ es integrable , puesto que

$$\lim_n s(f+g,\gamma,P_n) = \lim_n s(f,\gamma,P_n) + \lim_n s(g,\gamma,P_n)$$

$$= \int_b^a f(\gamma(t))d\gamma(t) + \int_b^a g(\gamma(t))d\gamma(t)$$

analogamente se tiene que

$$\int_b^a (\lambda f)(\gamma(t))d\gamma(t) = \lambda \int_b^a f(\gamma(t))d\gamma(t)$$

□

Se tiene también de la definición que :

$$f\left[\int_b^a g(\gamma(t))d\gamma(t)\right] = \int_b^a f(g(\gamma(t)))d\gamma(t)$$

Demostración :

$$\int_\gamma g = \lim_n \sum_{i=1}^{n} [\ \gamma(t_i)-\gamma(t_{j-1})]\ g(t_i')$$

$$f\left(\int_\gamma g \right) = f\left(\lim_n \sum_{i=1}^{n} (\ \gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1}))g(t_i')\right)$$

$$= \lim_n f\left[\sum_{i=1}^{n}(\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1}))g(t_i')\right]$$

$$= \lim_n \sum_{i=1}^{n} f\left((\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1}))g(t_i')\right)$$

$$= \lim_n \sum_{i=1}^{n}(\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1}))f(g(t_i')) = \int_\gamma f(g)$$

para f un funcional lineal continuo. Cabe hacer hincapié que la integral de la derecha es simplemente la integral usual para funciones de valores complejos.

Al igual que para funciones de valores complejos se tiene aquí :

TEOREMA 3.1.4. (DE CAUCHY) : Si $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach y Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $f:\Omega \longrightarrow \mathcal{X}$ es una función analítica y $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m$ son curvas cerradas rectificables en Ω tales que $\sum_{j=1}^{m} n(\gamma_j,a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}\setminus\Omega$ entonces $\sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f = 0$.

Demostración :

Si $F \in \mathcal{X}^*$ entonces ;

$$F\left[\sum_{j=1}^{m}\int_{\gamma_j} f\right] = \sum_{j=1}^{m} F\left[\int_{\gamma_j} f\right] = \sum_{j=1}^{m}\int_{\gamma_j} F(f) = 0,$$

por la versión escalar del teorema de Cauchy, como esto ocurre $\forall F\in\mathcal{X}^*$ se sigue que $\sum_{j=1}^{m}\int_{\gamma_j} f = 0$.

□

DEFINICION 3.1.5. : Una curva cerrada rectificable es positivamente orientada si para cada $a \in \mathbb{C}\setminus\{\gamma\}$, $n(\gamma,a)$ es 0 ó 1. En este caso el lado interior de γ denotado por *Den* γ es definido por :

$$Den\ (\gamma) = \{\, a \in \mathbb{C}\setminus\{\gamma\}\ ;\ n(\gamma,a) = 1\}$$

el lado exterior es denotado por *Fue* y se define por ;

$$Fue\ (\gamma) = \{\, a \in \mathbb{C}\setminus\{\gamma\};n(\gamma,a) = 0\}.$$

Una curva $\eta:[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ es simple si $\gamma(s)=\gamma(t)$ implica que s=t o bien s=0 y t=1. El teorema de la curva de Jordan muestra que si γ es una curva cerrada rectificable simple entonces $\mathbb{C}\setminus\{\gamma\}$ tiene dos componentes y $\{\gamma\}$ es la frontera de alguna de ellas. Por lo tanto $n(\gamma,a)$ toma dos valores en uno de ellos el 0 y en el otro ±1 según la orientación de γ.

Si $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\}$ es una colección de curvas cerradas rectificables entonces Γ es positivamente orientada si ;

$i)$ $\{\gamma_i\} \cap \{\gamma_j\} = 0$ para $i \neq j$.

$ii)$ Para a en $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \{\gamma_j\}$ $n(\Gamma, a) := \sum_{j=1}^{m} n(\gamma_j, a)$ es 0 ó 1.

el lado interior de Γ ($Den\ \Gamma$) es definido por $Den\ \Gamma \equiv \{a; n(\Gamma,a)=1\}$ y el lado exterior $Fue\ \Gamma \equiv \{a; n(\Gamma,a) = 0\}$.

Nuestro objetivo ahora es hacer cálculo funcional sobre algebras de Banach para ello se establecerán ciertos preliminares basados en variable compleja.

Para ello se proporciona una resultado interesante y lo suficientemente intuitivo para ser interpretado geométricamente.

PROPOSICION 3.1.6. : Sea $\mathbb{K}$ un subconjunto compacto de una región $\mathbb{E}$ del plano $\mathbb{C}$. Entonces existen segmentos rectos $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ en $\mathbb{E} \setminus \mathbb{K}$ tales que para cada función compleja, analítica en $\mathbb{E}$ se tiene

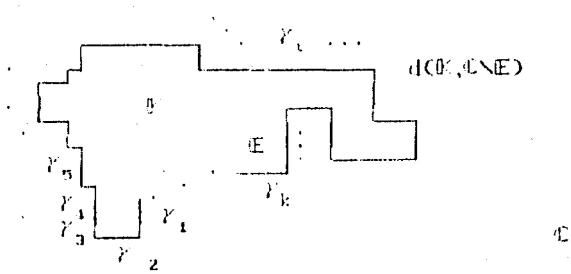
$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

para toda $z \in \mathbb{K}$. Los segmentos forman un cerco alrededor de el conjunto $\mathbb{K}$.

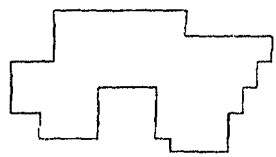
Demostración :

Podemos suponer que $\mathbb{K} = \overline{(\mathrm{int}\ \mathbb{K})}$. Sea $0 < \delta < \frac{1}{2} d(\mathbb{K}, \mathbb{C} \setminus \mathbb{E})$ y trazamos una cuadrícula de rectas verticales y horizontales en el plano de tal forma que dos rectas consecutivas se encuentran separadas una distancia menor que δ.

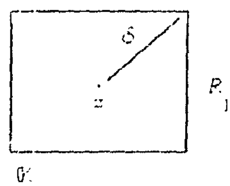
Sean $R_1, \ldots, R_m$ los rectangulos de esta cuadrícula que intersecan a $\mathbb{K}$ (recuerdese que $\mathbb{K}$ es compacto).



Denotemos por ∂R_j a la frontera de R_j , con $1\le j\le m$, recorrida como un polígono en el sentido contrario a la manecillas del reloj.

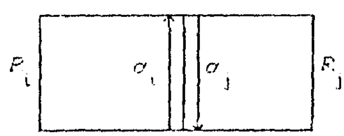


Sea z $\in$ R_j,$1\le j\le m$ entonces se infiere que $d(z,\partial K)<\sqrt{2}\delta$. También muchos de los lados



de los rectangulos R_j pueden intersecarse. Supongase que R_j y R_ι tienen en común un lado y sea σ_j y σ_ι los segmentos rectos en ∂R_j y ∂R_ι respectivamente, tales que

$$R_j \cap R_\iota = \{\sigma_j\} = \{\sigma_\iota\}$$



Por las direcciones de ∂R_j y ∂R_ι ,σ_j y σ_ι son recorridas en sentidos opuestos. Así si, ρ es una función continua sobre $\{\sigma_j\}$ se tiene :

$$\int_{\sigma_j} \rho + \int_{\sigma_\iota} \rho = 0$$

Sean $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ los segmentos dirigidos de línea que constituyen exactamente un lado de uno de los R_j con $1\le j\le m$. Entonces se obtiene la siguiente relación ;

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \varphi = \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial R_j} \varphi$$

para cada función continua φ sobre $\bigcup_{j=1}^{m} \partial R_j$.

Se puede asegurar que cada γ_k esta en $\mathbb{E}\setminus\mathbb{K}$. En efecto pues si alguna de estas γ_k interseca a $\mathbb{K}$, entonces, se ve facilmente que dos rectangulos tendrían por lado simultaneamente a γ_k y ambos intersecan a $\mathbb{K}$. Que γ_k sea lado común de dos rectangulos $R_1,\ldots,R_m$ contradice la elección de los γ_k. Si z pertenece a $\mathbb{K}$ y no es frontera de algún R_j , entonces :

$$\varphi(w) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{f(w)}{w - z} \right)$$

es continua sobre $\bigcup_{j=1}^{m} \partial R_j$ para $f \in \mathscr{R}(\mathbb{E})$. Se sigue de (1) que :

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_j} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

pero z pertenece a el interior de exactamente uno de los R_j. Si $z \notin R_j$ entonces : $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_j} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0$; y si $z \in R_j$ esta integral es simplemente f(z) por la fórmula integral de Cauchy. Entonces (2) proporciona

$$(3) \qquad f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

cuando $z \in \mathbb{K}\setminus\bigcup_{j=1}^{m}\partial R_j$. Pero ambos lados de esta última igualdad son funciones continuas sobre $\mathbb{K}$, ya que cada γ_k es ajeno a $\mathbb{K}$. Ahora bien, estas funciones coinciden en un subconjunto denso de $\mathbb{K}$. Entonces se sigue que (3) es cierto $\forall z \in \mathbb{K}$.

□

Se observa que si $\Gamma=\{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m\}$ y cada γ_j es rectificable entonces es posible definir $\int_\Gamma f$ de la siguiente manera :

$$\int f(\Gamma)d\Gamma = \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} f(\gamma_i)d\gamma_i \ ,$$

cuando f es continua en una vecindad de $\{\Gamma\}$.

Sea Λ un álgebra de Banach con identidad y sea $a \in \Lambda$. Uno de los principales usos de la proposición anterior ocurre cuando $\mathbb{K}=\sigma(a)$. Si $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica y $\sigma(a) \subseteq \Omega$,entonces se puede definir un elemento f(a) en Λ por :

$$(4) \qquad f(a)= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)(z-a)^{-1}dz$$

donde Γ es como en la proposición con $\mathbb{K}=\sigma(a)$ pero para ello primero es necesario mostrar que (4) no depende de la elección de la curva Γ, en otras palabras hay que probar que f(a) está bien definido.

PROPOSICION 3.1.7. : Sea Λ un álgebra de Banach con identidad, sea $a \in \Lambda$ y Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ tal que $\sigma(a)\subset\Omega$. Si $\Gamma = \{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m\}$ y $\Delta = \{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_k\}$ son dos colecciones de curvas en Ω positivamente orientadas y tales que $\sigma(a)\subseteq Den\Gamma$ y $\sigma(a)\subseteq Den\Delta$, si $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica, entonces

$$\int_\Gamma f(z)(z-a)^{-1}dz = \int_\Delta f(z)(z-a)^{-1}dz$$

Demostración :

Si $1\le j\le k$ sea γ_{m+j} la curva definida por $\gamma_{m+j}(t)=\tau_j(1-t)$ para $0\le t\le 1$. Si $z \notin \Omega\setminus\sigma(a)$ entonces $z \in \mathbb{C}\setminus\Omega$ o bien $z \in \sigma(a)$. Si ocurre que $z\in\mathbb{C}\setminus\Omega$, entonces :

$$\sum_{j=1}^{m+k} n(\gamma_j;z) = n(\Gamma,z)-n(\Delta,z) = 0-0 = 0$$

Si $z \in \sigma(a)$ entonces :

$$\sum_{j=1}^{m+k} n(\gamma_j;z) = n(\Gamma,z)-n(\Delta,z) = 1-1 = 0$$

entonces $\Theta = \left\{ \gamma_j;1\le j\le m+k \right\}$ es un sistema de curvas cerradas en $\mathbb{U}=\Omega\setminus\sigma(a)$ tal que $n(\Theta,z) = 0 \ \forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{U}$.

Puesto que $z \longmapsto f(z)(z-a)^{-1}$ es analítica sobre $\mathbb{U}$ el teorema de Cauchy implica

$$0 = \int_{\Theta} f(z)(z-a)^{-1}dz = \int_{\Gamma} f(z)(z-a)^{-1}dz - \int_{\Delta} f(z)(z-a)^{-1}dz$$

□

DEFINICION 3.1.8. : Sea Λ un álgebra de Banach conmutativa con identidad e y φ una función de valores complejos de variable compleja definida en un subconjunto $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$. La función φ se dice que actúa sobre el elemento $x \in \Lambda$ si $\sigma(x) \subset \mathbb{D}$ y $\varphi[x^\wedge(\cdot)] \in \Lambda^\wedge$.

Ahora proporcionamos un resultado esencial en el cálculo funcional sobre algebras de Banach.

OBSERVACION : Cada función entera actúa sobre cada elemento de un álgebra de Banach Λ. Denotemos por

$$\varphi(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$$

una función entera, puesto que por la sustitución formal de x en lugar de λ se obtiene la serie $\sum a_n x^n$, la cual es claramente convergente en Λ a un elemento y. Entonces se tiene :

$$y^\wedge(M) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [x^\wedge(M)]^n = \varphi(x^\wedge(M))$$

también que la función actúa sobre x. La convergencia se ve con la siguiente relación :

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} x^n a_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x^n a_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\| \; |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n |a_n| < \infty$$

puesto que $\varphi(\lambda)$ es entera converge absolutamente en todo punto del plano $\mathbb{C}$, además se puede ver que actúa :

$$y^\wedge(M) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^\wedge(M) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)^\wedge(M) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n)^\wedge(M)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^\wedge)^n(M)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^\wedge(M))^n=\varphi(x^\wedge(M)).$$

TEOREMA 3.1.8. Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad e y ρ analítica sobre un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{C}$. Entonces ρ actúa sobre cada elemento $x \in A$ tal que $\sigma(x) \subset \Omega$, en otras palabras, para cada $x \in A$ $\exists$ $y \in A$ para la cual la igualdad

$$f(y) = \rho[f(x)]$$

es cierta para cada funcional $f \in \mathfrak{M}(A)$.

Demostración :

Sea $x \in A$ fijo tal que $\sigma(x) \subset \Omega$. Puesto que $\sigma(x)$ es compacto es posible cubrirlo con un número finito de componentes de Ω. Entonces podemos suponer que Ω tiene un número finito de componentes. La distancia entre los conjuntos $\sigma(x)$ y $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es positiva y en consecuencia, la proposición 3.1.6. garantiza la existencia de un sistema de arcos compactos rectificables en Ω, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ que unidos sirven de cerco para un conjunto abierto Ω_o con $\sigma(x) \subset \Omega_o \subset \Omega$.

Los valores de ρ en Ω_o están dados por la fórmula de Cauchy

$$\rho(\xi) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{\rho(\lambda)}{\lambda - \xi}\, d\lambda$$

que proporciona la sustitución formal

$$y = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \rho(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda,$$

observamos que la integral está bien definida pues la función ;

$$x(\lambda) = \rho(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}$$

es continua a lo largo de cada arco γ_k. Además ;

$$f(y) = f\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \rho(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} f\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} \rho(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(\rho(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}) d\lambda$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \rho(\lambda) f((\lambda e - x)^{-1}) d\lambda$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - f(x)}\, d\lambda = \varphi(f(x))$$

$\forall\ f \in \mathfrak{M}$, donde las curvas γ_k rodean a $\varphi(x)$. Consecuentemente el teorema es cierto.

□

PROPOSICION 3.1.10. : Cada elemento y que satisface la relación que se menciona en el teorema 3.1.9. es unicamente determinado por x sii Λ es un álgebra semisimple.

Demostración :

Supongamos que para alguna $x \in \Lambda$ existen y_1, y_2 ,$(y_1 \neq y_2)$,tales que :

$$y_1 = \varphi(x) \qquad y \qquad y_2 = \varphi(x).$$

o sea, que para cada $f \in \mathfrak{M}(\Lambda)$ tenemos

$$f(y_1) = \varphi(f(x)) \qquad y \qquad f(y_2) = \varphi(f(x)).$$

Por lo tanto $f(y_1 - y_2) = 0$ para toda $f \in \mathfrak{M}(\Lambda)$, lo cual significa que existe $y_1 - y_2 \neq 0$ que pertenece al radical de Λ y Λ no es semisimple, por lo tanto si y esta determinado unicamente, entonces Λ es semisimple.

Inversamente si Λ es semisimple y tenemos que

$$y_1 = \varphi(x) = y_2$$

entonces razonando como antes se ve que $y_1 = y_2$.

□

Se puede probar que el elemento y asignado a x y φ, es unicamente determinado por los requerimientos adicionales, como la asignación de un homomorfismo cuando x es fijo y φ tiene rango sobre las funciones holomorfas, más precisamente :

DEFINICION 3.1.11. : Sea $\mathbb{D}$ un subconjunto compacto de el plano complejo $\mathbb{C}$. Sea $\Lambda_{\mathbb{D}}$ el álgebra de todas las funciones holomorfas en una vecindad de $\mathbb{D}$ (esta dependiendo de la funcion). Una sucesión $\{\varphi_n\} \subset \Lambda_{\mathbb{D}}$ se dice que converge si todas las funciones φ_n convergen uniformemente en esta vecindad. El espacio $\Lambda_{\mathbb{D}}$ es completo en el sentido de esta convergencia.

TEOREMA 3.1.12. : Sea Λ un álgebra de Banach conmutativa con identidad e y sea $\mathbb{D}$ un subconjunto compacto de el plano complejo $\mathbb{C}$. Sea $x \in \Lambda$ un elemento fijo el cual tiene espectro $\sigma(x) \subset \mathbb{D}$. Entonces existe exactamente una transformación ;

$$F_x : \varphi \longrightarrow y=\varphi(x)$$

de $\Lambda_{\mathbb{D}}$ en Λ que satisface las siguientes condiciones ;

i) Si $\varphi(\lambda)=\lambda$ entonces $\varphi(x)=x$.

ii) Si $\varphi(\lambda)=1$ entonces $\varphi(x)=e$.

iii) Si $\varphi(\lambda)=\alpha\varphi_1(\lambda)+\beta\varphi_2(\lambda)$ entonces $\varphi(x)=\alpha\varphi_1(x)+\beta\varphi_2(x)$ con $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$. .

iv) Si $\varphi(\lambda)=\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)$ entonces $\varphi(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x)$.

v) Si $\varphi_n \xrightarrow[n]{} 0$ en $\Lambda_{\mathbb{D}}$ entonces $\varphi_n(x) \xrightarrow[n]{} 0$ en Λ.

aún más esta transformación está determinada por la regla :

$$y = \sum \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \varphi(\lambda)(\lambda e-x)^{-1} d\lambda$$

Demostración :

Bastará con probar que la transformación descrita en el enunciado satisface las propiedades $i, \ldots, v$.

i) Para demostrar este inciso considere la expansión

$$(\lambda e-x)^{-1}=\lambda^{-1}e + \lambda^{-2}x + \lambda^{-3}x^2 + \ldots$$

válida para escalares λ tales que $|\lambda|>\|x\|$, entonces la función $\varphi(\lambda)\equiv\lambda$ satisface la igualdad

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R} \lambda(\lambda e-x)^{-1} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} x^n d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|\lambda|=R} \frac{d\lambda}{\lambda^n} x^n = x$$

donde $R > \max\{|\xi| : \xi \in \mathbb{D}\}$.

ii se prueba de manera similar, *iv* se justifica si comprobamos la igualdad ;

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} (\lambda e-x)^{-1}\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} (\lambda e-x)^{-1}\varphi_1(\lambda)d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} (\mu e-x)^{-1}\varphi_2(\mu)d\mu$$

donde γ es un sistema de curvas cerradas que rodean a el conjunto $\mathbb{D}$ y contenidas en la intersección $V=U_1 \cap U_2$ de los conjuntos donde φ_1 y φ_2 son holomorfas. Por un lado el valor de la integral no depende de la curva de integración (proposición 3.1.7.) entonces la curva γ se puede reemplazar por una curva mas grande (i.e. que la fórmula integral de Cauchy con la integración a lo largo de Δ define una función holomorfa en cada punto de γ) y homotópica a γ pero que esté contenida en V, a esa curva le llamaremos Δ. Ya que se ha hecho tal reemplazo el lado derecho de la igualdad adquiere la forma

$$- \frac{1}{4\pi^2} \int_\gamma \int_\Delta (\lambda e-x)^{-1}(\mu e-x)^{-1}\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\mu)d\lambda d\mu =$$

$$- \frac{1}{4\pi^2} \int_\gamma \int_\Delta \frac{\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)}{\mu - \lambda} \left[(\lambda e-x)^{-1}-(\mu e-x)^{-1}\right]d\lambda d\mu$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda e-x)^{-1}\varphi_1(\lambda) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Delta \frac{\varphi_2(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu \right\} d\lambda \ +$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_\Delta (\mu e-x)^{-1}\varphi_2(\mu) \left\{ \int_\gamma \frac{\varphi_1(\lambda)}{\mu - \lambda} d\lambda \right\} d\mu$$

pero $\dfrac{\varphi_1(\lambda)}{\mu - \lambda}$ es una función holomorfa de la variable λ para cada $\mu\in\Delta$ fija i.e. se tiene que $\displaystyle\int\frac{\varphi_1(\lambda)}{\mu - \lambda} d\lambda = 0$ por tanto se sigue que la igualdad es válida.

Para mostrar ν inicialmente se puede observar que se cumple la relación :

$$\|\varphi(x)\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \varphi(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}d\lambda \right\|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma |\varphi(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}| \ d|\lambda|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma |\varphi(\lambda)| \ \|(\lambda e-x)^{-1}\| \ d|\lambda|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \max_{\lambda\in\gamma} |\varphi(\lambda)| \ \max_{\lambda\in\gamma} \|(\lambda e-x)^{-1}\| \ d\lambda$$

$$\leq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d|\lambda| \max_{\lambda\in\gamma} |\varphi(\lambda)| \max_{\lambda\in\gamma} \|(\lambda e-x)^{-1}\|$$

$$= \frac{1}{2\pi} |\lambda| \max_{\lambda\in\gamma} |\varphi(\lambda)| \max_{\lambda\in\gamma} \|(\lambda e-x)^{-1}\|$$

con $|\lambda|$ = longitud de γ.

Ahora mostraremos que si la transformación $F_x:\Lambda_{\mathbb{D}} \longrightarrow \Lambda$ satisface las condiciones del enunciado entonces está definida precisamente por $F_x(\varphi)=\varphi(x)$ con $\varphi(x)$ con la fórmula del enunciado.

Sea $\varphi\in\Lambda_{\mathbb{D}}$, si $\lambda_o\notin \mathbb{D}$ entonces $(\lambda-\lambda_o)^{-1}\in \Lambda_{\mathbb{D}}$ para $\lambda\in\mathbb{D}$ y $F_x[(\lambda-\lambda_o)^{-1}]=(x-\lambda_o e)^{-1}$, por i,ii,iii, y iv.

Cada función holomorfa definida sobre un conjunto abierto $\mathbb{U}$ se puede escribir como

$$(5) \qquad \varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - \lambda}\, d\xi$$

donde γ es una curva cerrada (o bien un sistema de curvas cerradas) contenida en $\mathbb{U}$ y que contiene a su vez a $\mathbb{D}$ en $Den\gamma$. La integral de la expresión (5) es el punto límite de la sucesión

$$\varphi_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{k_n} \frac{\varphi(\xi'_{n,k})(\xi_{n,k+1} - \xi_{n,k})}{\xi'_{n,k} - \lambda}$$

esta sucesión converge uniformemente sobre γ, entonces también en alguna vecindad de $\mathbb{D}$. Puesto que

$$F_x(\varphi_n) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{k_n} \varphi(\xi'_{n,k})(\xi_{n,k+1} - \xi_{n,k})(\xi'_{n,k} e - x)^{-1}$$

entonces la sucesión $F_x(\varphi_n)$ converge en Λ, por la condición v y $\lim_n F_x(\varphi_n)=F_x(\varphi)$ o de otra manera ;

$$\lim_n F_x(\varphi_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \varphi(\lambda)(\lambda e-x)^{-1} d\lambda = \varphi(x)$$

y también se concluye $F_x(\varphi)=\varphi(x)$.

□

TEOREMA 3.1.9. : Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad e y φ analítica sobre un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{C}$. Entonces φ actúa sobre cada elemento $x\in A$ tal que $\sigma(x)\subset\Omega$, en otras palabras, para cada $x\in A$ $\exists$ $y\in A$ para la cual la igualdad

$$f(y)=\varphi[f(x)]$$

es cierta para cada funcional $f\in\mathfrak{M}(A)$.

Demostración :

Sea $x \in A$ fijo tal que $\sigma(x) \subset \Omega$. Puesto que $\sigma(x)$ es compacto es posible cubrirlo con un número finito de componentes de Ω. Entonces podemos suponer que Ω tiene un número finito de componentes. La distancia entre los conjuntos $\sigma(x)$ y $\mathbb{C}\setminus\Omega$ es positiva y en consecuencia, la proposición 3.1.6. garantiza la existencia de un sistema de arcos compactos rectificables en Ω, $\gamma_1,\gamma_2,\ldots\gamma_m$ que unidos sirven de cerco para un conjunto abierto Ω_o con $\sigma(x)\subset\Omega_o\subset\Omega$.

Los valores de φ en Ω_o están dados por la fórmula de Cauchy

$$\varphi(\xi) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - \xi}\, d\lambda$$

que proporciona la sustitución formal

$$y = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \varphi(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}d\lambda,$$

observamos que la integral está bien definida pues la función :

$$x(\lambda) = \varphi(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}$$

es continua a lo largo de cada arco γ_k. Además :

$$f(y) = f\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \varphi(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}d\lambda \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} f\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \varphi(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}d\lambda \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(\varphi(\lambda)(\lambda e-x)^{-1})d\lambda$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \varphi(\lambda)f((\lambda e-x)^{-1})d\lambda$$

**

3.2. CEROS DE FUNCIONES ENTERAS

Aquí mostraremos algunas aplicaciones. Si x es un elemento de un álgebra de Banach conmutativa A con identidad y f es una función entera no constante tal que f(x)=0, entonces existe algún entero no negativo n y $b_k \in \mathbb{C}$ k=0,1,...,n tal que

$$\sum_{k=0}^{n} b_k x^k = 0$$

con no todas las b_k nulas.

Tal afirmación es evidentemente cierta para los polinomios por lo cual resulta razonable el planteamiento del siguiente resultado ;

PROPOSICION 3.2.1. : Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad y sea $x \in A$. Si existe una función entera no constante tal que f(x)=0, entonces existe un polinomio no constante p tal que p(x)=0.

Demostración :

Por la observación hecha en 3 se sabe que $f(x) \in A$ para cada función entera f y que $f(x)^\wedge(M)=f[x^\wedge(M)]$ para $M \in \mathfrak{M}(A)$ la colección de todos los ideales máximos regulares de A.

Puesto que f(x)=0 entonces se tiene $f[x^\wedge(M)]=0$ $M \in \mathfrak{M}(A)$ que simplemente indica que f es identicamente nulo sobre $\sigma(x)$ el cual por otra parte es compacto y los ceros de una función entera son aislados, de lo cual se concluye que $\sigma(x)$ es finito, i.e.

$$\sigma(x)=\{t_1,t_2,\ldots,t_j\}$$

denotemos por m_r la multiplicidad del cero α_r de f (para r=1,...,j)

Defina

$$p(t)=\prod_{r=1}^{j} (t-\alpha_r)^{m_r}$$

así al escribir f(t)=p(t)g(t) se infiere que g(t) resulta ser una función entera pues si $m_r \le grado(p)$ $\forall r$ al dividir por términos con tal exponente, los exponentes de cada sumando sólo cambiarán hasta en *grado*(p) y el exponente de el i-ésimo término de la serie resulta der precisamente *i-grado*(p). Aún más g no se anula en $\sigma(x)$, esta es la razón por la que 1/g es analítica en cada vecindad U de $\sigma(x)$ i.e. 1/g está definida y además

$$\frac{1}{g}(x) = (g(x))^{-1}$$

de este modo

$$0 = 0\cdot(g(x))^{-1}= p(x)g(x)(g(x))^{1} = p(x)\cdot(g(x)(g(x))^{-1}) = p(x)$$

□

**

LAS COMPONENTES CONEXAS DE LA IDENTIDAD EN G.

Si A es un álgebra de Banach conmutativa con identidad e entonces es posible afirmar que el conjunto de los elementos invertibles en A, es un subgrupo abierto de A. En esta parte se exhibirán resultados concernientes a un tipo especial de álgebras de Banach llamadas semisimples analizadas en 2.5. de esta tesis, en las que ocurre que la componente conexa de e es el conjunto cuyos elementos son de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{con } x \in A$$

Esta expresión resulta familiar y es la versión para álgebras de Banach de la exponencial.

LEMA 3.2.1. : Suponga que A es un álgebra de Banach semisimple con identidad. Si $x,y \in A$, entonces

$i)$ $\exp(x) \in A$.

$ii)$ $\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$iii)$ $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$

Demostración :

Como se vió en la sección 3 referente a el cálculo funcional , que si φ es una función compleja entera y

$$\varphi(z)= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$a_n \in \mathbb{C}$, $n=0,1,2,\ldots$ para toda $z \in \mathbb{C}$, entonces φ actúa sobre cada elemento x de un álgebra de Banach A de la siguiente manera ;

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Por lo tanto haciendo uso del teorema 3.1.12. tenemos que ;

$$\exp(x)= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \right) (x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Para mostrar iii simplemente hay que multiplicar las series definidas por $\exp(x)$ y $\exp(y)$ y arreglar de manera conveniente, haciendo uso de la descomposición de $(a+b)^n$ como una suma de productos alternados y con coeficientes ciertas expresiones de combinatoria.

□

LEMA 3.2.2. : Sea A un álgebra de Banach conmutativa semisimple con identidad e. Si $x \in A$ y $\|e-x\|<1$, entonces existe algún $y \in A$ tal que $\exp(y)=x$.

Demostración :

Puesto que $\|e-x\|<1$ se sigue que x es invertible, de donde se infiere que no contiene a 0 en el conjunto compacto *Rango*$(x^\wedge)$. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ tal que *Rango*$(x^\wedge) \subset \Omega$ y $0 \notin \Omega$. Entonces $f(\lambda)=\log \lambda$, $\lambda \in \Omega$ es analítica sobre Ω, y por el teorema 2? del Cálculo funcional se sigue que $y=f(x) \in A$ donde :

$$y^\wedge(M)=\log x^\wedge(M), \quad M \in \mathfrak{M}(A)$$

pero $\exp(y) \in A$ y

$$\exp(y)^\wedge(M) = \exp(y^\wedge(M)) = \exp(\log x^\wedge(M)) = x^\wedge(M)$$

$M \in \mathfrak{M}(A)$, de donde se concluye que $\exp(y)=x$ de la hipótesis que A es semisimple.

□

Estos lemas sustentan la prueba de el siguiente :

TEOREMA 3.2.3. : Sea A un álgebra de Banach semisimple y conmutativa con identidad e y sea $\exp(A)=\exp(x)|x \in A\}$ entonces $\exp(A)$ es la componente conexa de e en G el conjunto de todos los elementos invertibles en A.

Demostración :

Por el lema 3.2.1. es fácil ver que $\exp(x)\exp(-x)=\exp(0)=e$ para $x \in A$, y también que $e \in \exp(A \subset G$. Además si $x \in A$ entonces se sigue que $\eta(t)=\exp(tx)$, $0 \leq t \leq 1$ define una curva continua en $\exp(A)$ de e a $\exp(x)$, por lo cual se infiere que $\exp(A)$ es conexa. De este modo $\exp(A)$ está contenida en la componente conexa de e en G. Pero falta probar que $\exp(A)$ es precisamente esta componente conexa, en lugar de probar la otra contención le damos la vuelta a el problema y mostraremos que $\exp(A)$ es simultaneamente abierto y carrado en G.

En efecto, suponga que $y=\exp(x)$ y sea $z \in A$ tal que ;

$$\|y-z\| < 1/\|y^{-1}\|$$

se tiene por un lado $\|e-y^{-1}z\| = \|y^{-1}y-y^{-1}z\| \leq \|y^{-1}\| \; \|y-z\| < 1$. En virtud del lema 4.4.2. debe existir algún elemento $w\in\Lambda$ de tal manera que $\exp(w)=y^{-1}z$ por lo tanto

$$z = y\exp(w) = \exp(x)\exp(w) = \exp(x+w)$$

donde $z\in\exp(\Lambda)$ y se concluye que $\exp(\Lambda)$ es abierto. Ahora suponga que $y\in G$ con $y \in \overline{\exp(\Lambda)}$. Entonces existe algún $z=\exp(x)$ tal que $\|y-z\|<1/\|y^{-1}\|$, argumentando igual que antes se obtiene que $y^{-1}z\in\exp(\Lambda)$. Por tanto $y\in\exp(\Lambda)$ i.e.

$$\overline{\exp(\Lambda)} \subset \exp(\Lambda)$$

$\therefore$ $\exp(\Lambda)$ es cerrado. En suma se concluye la prueba pues se ha mostrado que $\exp(\Lambda)$ es la componente conexa de e en G.

□

Los lemas se pudieron haber sido establecidos en el caso general vía argumentos de series de potencias pero aún en la manera en que los establecimos resulta poco accesible demostrarlos por la cantidad de cálculos que se tienen que efectuar, la otra forma de establecerlos cuenta con muchas menos posibilidades de ser expuesta brevemente.

La discusión en torno a $\exp(\Lambda)$ y G provee de varios resultados interesantes. Recuerde que la transformación $x \longrightarrow x^{-1}$ es continua de donde se deduce que G es un grupo topológico, en seguida se trata de realizar un análisis más detallado de este grupo.

PROPOSICION 3.2.4. : Sea Λ un álgebra de Banach y G el grupo de los elementos invertibles en Λ y $\exp(\Lambda)$ la componente conexa de la identidad en G. Entonces $\exp(\Lambda)$ es un subgrupo normal abierto y cerrado de G, donde las clases de $\exp(\Lambda)$ son las componentes de G y $G/\exp(\Lambda)$ es un grupo discreto.

Demostración :

Puesto que G es un subgrupo abierto en un espacio localmente-conexo sus componentes son subconjuntos abiertos y cerrados de G. Además si $x,y\in G$ entonces $x\exp(\Lambda)$ es un subconjunto conexo de G el cual contiene xy y x. Por lo tanto $\exp(\Lambda) \cup x\exp(\Lambda)$ es conexo y está contenido en $\exp(\Lambda)$. Entonces se sigue que xy está en $\exp(\Lambda)$ y así $\exp(\Lambda)$ es un semigrupo.

Similarmente $x^{-1}\exp(\Lambda)\cup\exp(\Lambda)$ es conexo, por tanto contenido en $\exp(\Lambda)$ y es por esto que $\exp(\Lambda)$ resulta ser un subgrupo de G.

Como antes suponga que $x\in G$, entonces el grupo conjugado $x\exp(\Lambda)x^{-1}$ es un subconjunto conexo que contiene a la identidad y por tanto

$$x\exp(\Lambda)x^{-1}=\exp(\Lambda)$$

de donde $\exp(\Lambda)$ es un subgrupo normal de G y por tanto $G/\exp(\Lambda)$ es un grupo.

Como $x\exp(\Lambda)$ es un subconjunto abierto y cerrado simultaneamente en G por la demostración de el teorema 4.4.3. para cada $x\in G$, las clases de $\exp(\Lambda)$ son las componentes de G.

Para concluirla demostrar, $G/\exp(\Lambda)$ es discreto ya que $\exp(\Lambda)$ es un subconjunto abierto y cerrado de G.

□

Algunos autores llaman a $G/\exp(\Lambda)$ el grupo de los índices abstractos de Λ.

DEFINICION 3.2.5. : Si Λ es un álgebra de Banach entonces el grupo abstracto de índices denota $\mathfrak{I}_\Lambda$ es el grupo cociente discreto $G/\exp(\Lambda)$, además el índice abstracto es el homomorfismo natural γ de Λ a $\mathfrak{I}_\Lambda$.

Ejemplo 3.2.6. :

Considere $\mathscr{X}$ un espacio compacto Hausdorff y sea G el conjunto de los elementos invertibles de $C(\mathscr{X})$, i.e. f en $C(\mathscr{X})$ está en G sii $f(x)\neq 0$ $\forall x\in\mathscr{X}$, así G sólo consiste de las funciones continuas de $\mathscr{X}$ a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Puesto que G es localmente arcoconexo, una función f está en $\exp(\Lambda)$ si existe un arco continuo $\left\{f_\lambda\right\}_{\lambda\in[0,1]}$ de funciones en G tal que $f_o=e$ y $f_1=f$.

Si definimos

$$\varphi:\mathscr{X}\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$$
$$\varphi(x,\lambda)=f_\lambda(x)$$

entonces φ es continua, y además ;

$$\varphi(x,0)=f_o(x)=e$$
$$\varphi(x,1)=f_1(x)=f(x) \qquad \forall x\in\mathscr{X}$$

Por tanto f es homotópica a la función constante 1, inversamente si g es una función en G la cual es homotópica a 1 entonces $g\in\exp(\Lambda)$. De manera análoga dos funciones g_1,g_2 en G representan el mismo elemento de $G/\exp(\Lambda)$ sii g_1 es homotópica a g_2. Entonces $G/\exp(\Lambda)$ ni más ni menos que el grupo de las clases de homotopía de transformaciones de $\mathscr{X}$ a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y se le denota $\mathfrak{I}_\Lambda$.

DEFINICION 3.2.7. : Si $\mathscr{X}$ es un espacio compacto Hausdorff entonces el primer grupo de cohomotopía $\Pi'(\mathscr{X})$ de $\mathscr{X}$ es el grupo de las clases de homotopía de transformaciones continuas de $\mathscr{X}$ a el círculo unitario en el plano complejo $\mathbb{D}$ con multiplicación puntual.

TEOREMA 3.2.8. : Si $\mathscr{X}$ es un espacio Hausdorff compacto entonces el grupo abstracto de índices $\mathfrak{I}_\Lambda$ de $C(\mathscr{X})$ y $\Pi'(\mathscr{X})$ son naturalmente isomorfos.

Demostración :

Definase ψ de $\Pi'(\mathscr{X})$ a $\mathfrak{I}_\Lambda$ como sigue :

Una función continua f de $\mathscr{X}$ a $\mathbb{D}$ determina primero un elemento $\{f\}$ de $\Pi'(\mathscr{X})$ y segundo una función invertible sobre $\mathscr{X}$, determina una clase $f+\exp(\Lambda)$ de $\mathfrak{I}_\Lambda$. Así que nosotos definimos

$$\psi(\{f\})=f+\exp(\Lambda)$$

Primero habá que mostra que tal función está bien definida i.e. que no depende del representante elegido, en efecto:

Sea g una función continua de $\mathscr{X}$ a $\mathbb{D}$ tal que $\{f\}=\{g\}$ entonces f es homotópico a g y por tanto $f+\exp(\Lambda)=g+\exp(\Lambda)$ además puesto que la multiplicación en ambos $\Pi'(\mathscr{X})$ y G está definida puntualmente, la transformación ψ resulta ser un homomorfismo. Ahora solo hay que mostrar que ψ es uno a uno y sobre.

Para mostrar que ψ es sobre sea f un elemento invertible de $C(\mathscr{X})$. Defina ahora la función

$$F(x,t)=f(x)/|f(x)|^t$$

Entonces F es continua, $F(x,0)=f(x)$ para $x\in\mathscr{X}$ y $g(x)=F(x,1)$ tiene módulo 1 para $x\in\mathscr{X}$. Donde $f+\exp(\Lambda)=g+\exp(\Lambda)$ y por tanto ψ es sobre.

Si f y g son funciones continuas de $\mathscr{X}$ a $\mathbb{D}$ tales que $\psi(\{f\})=\psi(\{g\})$ entonces f es homotópico a g en las funciones en G, i.e. existe una función $G:\mathscr{X}\times[0,1]\longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tal que $G(x,0)=f(x)$ y $G(x,1)=g(x)$ para $x\in\mathscr{X}$. Si además definimos :

$$F(x,t)=G(x,t)/|G(x,t)|$$

entonces F es continua y se establece que f y g son homotópicas en la clase de funciones continuas de $\mathscr{X}$ a $\mathbb{D}$. En estos términos $\{f\}=\{g\}$ y por tanto ψ es uno a uno lo cual completa la prueba.

□

Con ayuda de este resultado se infiere la siguiente afirmación :

COROLARIO 3.2.9. : Si $\mathcal{X}$ es un espacio Hausdorff compacto, entonces $\mathfrak{I}_\Lambda$ es naturalmente isomorfo a el prime grupo de cohomología de ČECH $\mathcal{H}^1(\mathcal{X},\mathbb{Z})$ con coeficientes enteros.

La demostración de este resultado es objeto de estudio en topología algebraica y se prueba que $\Pi'(\mathcal{X})$ y $\mathcal{H}^1(\mathcal{X},\mathbb{Z})$ son naturalmente isomorfos.

En particular para $\mathcal{X}=\mathfrak{M}$ dotado de la topología de Gelfand visto en el capítulo 2 de esta tesis se infiere el teorema de Arens-Royden, resultado que a su vez proporciona consecuencias importantes también dentro de la topología algebraica.

***

BIBLIOGRAFIA

I. Conway,J. *A course in Functional Analysis.* Springer Verlag. (1985).

II. Gelfand,I. Raikov,D. y Shilov,G. *Commutative normed rings.* Chelsea. (1964).

III. Landau,E. *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie.* Chelsea. (1946).

IV. Larsen,R. *Banach algebras an introduction.* Marcel Dekker. (1973).

V. Rickart,C. *General theory of Banach Algebras.* Robert E.Krieger. (1974).

VI. Żelazko,W. *Banach Algebras.* PWN-Elsevier. (1973).

VII. Żelazko,W. *On ideal theory in Banach and Topological Algebras.* Monografías del Instituto de Matemáticas. U.N.A.M. No. 15 (1984).