2/3

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

''SIMETRIAS DE LA ECUACION DE GEODESICAS Y LAGRANGIANOS S - EQUIVALENTES''

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN FISICA

P R E S E N T A

DIEGO DEL CASTILLO NEGRETE

MEXICO, D.F. 1988

I N D I C E

INDICE DE TABLAS

C A P I U L O   I :

I N T R O D U C C I O N

1.- Ecuaciones diferenciales y constantes de movimiento.-

Muchos problemas en física conducen al planteamiento de ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo:

$$\frac{d^2q^i}{dt^2} = F^i(q^i, \dot{q}^i, t) \qquad i,j=1,\dots,n \tag{1.1}$$

Tal es el caso por ejemplo de la ecuación de movimiento de una partícula en donde de acuerdo con la segunda ley de Newton el miembro derecho de (1) representa la fuerza que actua sobre esta y el término de la izquierda su aceleración.

En la solución de ecuaciones del tipo (1) juegan un papel muy importante las constantes de movimiento, que son funciones que dependen en general de las posiciones, las velocidades y el tiempo:

$$C = C(q^i, \dot{q}^i, t) \tag{1.2}$$

y que están caracterizadas por el hecho de que satisfacen:

$$\frac{\partial C}{\partial \dot{q}^i} F^i + \frac{\partial C}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \tag{1.3}$$

Una solución particular de (1) puede ser visualizada como el movimiento de un punto a lo largo de una trayectoria determinada en un espacio M de 2n+1 dimensiones de coordenadas (q^i, $\dot{q}^i$, t). La condición (3) que define a las constantes de movimiento puede ser entonces interpretada diciendo que una constante es una función cuya derivada direccional a lo largo de las trayectorias que representan a las soluciones de (1) es igual a cero.

Las constantes de movimiento de un sistema son muy importantes ya que el conocimiento de alguna o algunas de éstas nos permite simplificar el problema que deseamos resolver.

Supongamos por ejemplo que queremos resolver (1) y que hemos encontrado una constante C . El valor de dicha constante dependerá de las condiciones iniciales:

$$C = C(q_0^i, \dot{q}_0^i, t_0) \qquad (1.4)$$

y por lo tanto, si para unas condiciones iniciales sustituimos (1.4) en (1.2) entonces tendremos una ecuación que en principio podremos despejar para alguna de las velocidades $\dot{q}^k$ llegando a:

$$\dot{q}^k = f(q^j, \dot{q}^i, t) \qquad i \neq k \qquad (1.5)$$

Observemos que al hacer esto hemos pasado del problema inicial que consistía en la solución de n ecuaciones diferenciales de segundo orden al problema de resolver n-1 ecuaciones de segundo orden (para q^i $i \neq k$)y una ecuación de primero (para $\dot{q}^k$).En particular, si n=1 tenemos que el haber encontrado una constante de movimiento permite reducir el problema al cálculo de una integral. .

La ecuación (1.2) puede interpretarse como la ecuación de una familia de hipersuperficies C=constante en el espacio de 2n+1 dimensiones. Para unas condiciones iniciales dadas, la ecuación (1.4) fija un valor de c y tenemos una hipersuperficie específica en el espacio M. Siguiendo esta idea, podemos considerar que la ecuación (1.3) afirma que el vector normal a la hipersuperficie c=constante:

$$\bar{n} = \bar{\nabla} C = \left(\frac{\partial C}{\partial q^i}, \frac{\partial C}{\partial \dot{q}^i}, \frac{\partial C}{\partial t} \right)$$

es ortogonal al vector tangente de la trayectoria que describe la solución de (1.1):

$$\vec{W} = (\dot{q}^i, F^i, t)$$

esto es, la trayectoria del sistema se encuentra contenida totalmente en la hipersuperficie c=const.

Tenemos entonces que en principio las trayectorias de (1.1) pueden ser totalmente arbitrarias , La existencia de una constante C restringe las trayectorias a la hipersuperficie S1 definida en (1.2), si encontramos una nueva constante C', la trayectoria se encontrará en la intersección de S y S' y así sucesivamente, mostrando esto como las constantes de movimiento nos permiten simplificar el problema que deseamos resolver.

2.- Formulación Lagrangiana y teorema de Noether.-

Uno de los métodos mas eficientes para la busqueda de constantes de movimiento se basa en el estudio de las propiedades de simetría del sistema.

Antes de pasar a la explicación de lo que entendemos por simetría de un sistema, quisieramos discutir las ideas básicas de la formulación Lagrangiana de un sistema.

De acuerdo con la mecánica Newtoniana, la evolución temporal de un sistema de partículas esta descrita mediante las ecuaciones (1.1) donde la función F^i para cada i=1,.....,n representa la fuerza que actua sobre la partícula i-ésima .Debido a ésto, para encontrar las ecuación que describen la dinámica de un sistema necesitamos conocer todas las fuerzas que actúan sobre éste. En ocasiones ésto puede ser muy complicado, por ejemplo, cuando actúan fuerzas de constricción, lo cual introduce una limitación en el planteamiento de las ecuaciones de movimiento en el marco de la mecánica de Newton. (L-1970)

Una alternativa de solución a este problema es la formulación Lagrangiana, que tiene como idea central caracterizar al sistema completo mediante una sola función escalar en lugar de caracterizarlo a trave del conjunto de todas la fuerzas que actuan sobre este.

La formulación Lagrangiana se basa en el principio de Hamilton que afirma que para todo sistema conservativo existe una función escalar $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ denominada Lagrangiano definida como:

$$L = T - V \qquad (1.6)$$

(donde T es la energia cinética del sistema y V su energía potencial) tal que la integral de linea de L a lo largo de la trayectoria del sistema entre dos puntos: $P=(q^i, \dot{q}^i, t)$ y $Q=(q^i, \dot{q}^i, t)$ en el espacio M de 2n+1 dimensiones:

$$\int_P^Q L(q^i, \dot{q}^i, t)\, dt \qquad (1.7)$$

es un extremo con respecto de cualquier otra trayectoria que una a dichos puntos.

Aplicando las técnicas propias del cálculo de variaciones se puede demostrar que la condición que deben de cumplir las funciones $q^i(t)$ para que la trayectoria en cuestión satisfaga el principio de Hamilton es que satisfagan las ecuaciones de Euler-Lagrange: (G-1980)

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0 \qquad (1.8)$$

Dentro del contexto de la formulación Lagrangiana, podemos dar una definición de simetría de un sistema, diciendo que una transformación infinitesimal generada por un campo vectorial η es una simetría (que denominaremos Noetheriana) si mantiene invariante a la función L ,esto es, si la derivada direccional de L a lo largo de las curvas integrales de η en el espacio M es igual a cero o igual a una derivada total.

El teorema de Noether, uno de los resultados centrales de la formulación Lagrangiana, afirma que a cada transformación Noetheriana le podemos asociar una constante de movimiento.

El diagrama que a continuación presentamos, muestra esquemáticamente los pasos que hemos descrito para obtener constantes de movimiento de un sistema. El paso (1) consiste en dar una formulación Lagrangiana del sistema, el segundo (2) en construir simetrías Noetherianas para el Lagrangiano L y el tercero (3) en aplicar el teorema de Noether.

$$\begin{array}{c} \text{SISTEMA} \\ \Downarrow \\ \text{FORMULACION LAGRANGIANA} \\ \Downarrow \\ \text{SIMETRIAS NOETHERIANAS} \\ \Downarrow \\ \text{CONSTANTES DE MOVIMIENTO} \end{array} \tag{1.9}$$

3.- El problema inverso del cálculo de variaciones y los lagrangianos s-equivalentes.-

En la presente sección y la que sigue ,quisiéramos discutir las limitaciones y posibilidades que presenta el esquema anteriormente mencionado.

Dentro del primer paso para la obtención de constantes, podríamos hacer dos preguntas:

1.- ¿Siempre podemos dar una formulación Lagrangiana de un sistema?

2.- Dado un sistema, su formulación Lagrangiana es única?

Las respuestas a estas preguntas estan relacionadas estrechamente con el problema inverso del cálculo de variaciones que tiene como objeto estudiar la existencia y multiplicidad de Lagrangianos para un sistema dado.

En este momento conviene hacer una distincion entre sistemas de segundo orden de tipo (1.1) y sistema de primer orden del tipo:

$$\dot{x}^a = f^a(x^b, t) \tag{1.10}$$

Asimismo, tenemos que diferenciar entre Lagrangianos para sistemas de la forma (1.1) y Lagrangianos para sistemas de la forma (1.10). A los primeros les llamaremos Lagrangianos de segundo orden ya que sus ecuaciones de Euler-Lagrange serán de segundo orden , en tanto que a los otros los llamaremos Lagrangianos de primer orden por ser lineales en las velocidades y conducir a ecuaciones de primer orden.

Las respuestas a las preguntas anteriormente planteadas son:

R1.- No todo sistema de segundo orden tiene un Lagrangiano.(Helmholtz 1887)

R2.- Todo sistema de primer orden del tipo (1.10) tiene un número infinito de Lagrangianos (H-U 1981)

R3.- En general la pregunta de si el Lagrangiano es único no tiene solución definitiva. Sin embargo, en una y dos dimensiones (esto es para i=1 e i=2 en (1))el problema fue resuelto por Darboux en 1891 y por Douglas en 1941 respectivamente para sistemas de segundo orden. (H-S 1982). .

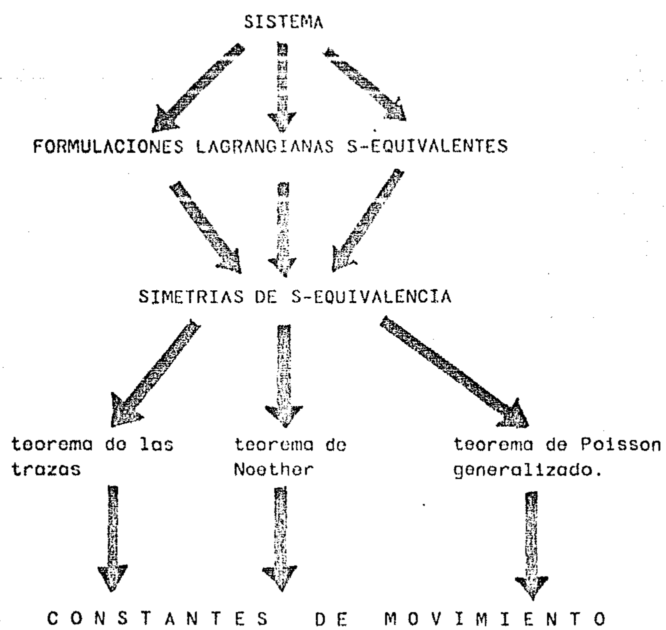
Diremos que dos Lagrangianos son s-equivalentes si sus ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes tiene las mismas soluciones.

Debido a lo anterior observamos una limitación asi como una nueva posibilidad del esquema (2.9) ya que en general el paso (1) puede no existir o ser múltiple.

La existencia de Lagrangianos s-equivalentes nos permite extender el concepto de simetría Noetheriana ya que si un sistema admite un conjunto de Lagrangianos $(L_{(A)})$ s-equivalentes, podemos ampliar el concepto de simetría diciendo que ℓ es una simetría (que llamaremos de s-equivalencia) si pasa de un lagrangiano $L_{(m)}$ a otro $L_{(n)}$ s-equivalente.

Por último, tenemos que indicar de que manera podemos generalizar el paso (3) del esquema (1.9) ya que no sería de gran utilidad haber extendido el concepto de simetría Noetheriana si no contamos con un método para asociar constantes a simetrías de s-equivalencia. Según veremos en los capítulos siguientes básicamente existen dos métodos para asociar dichas constantes: el teorema de las trazas (H-H 1981) y una generalización del teorema de Poisson de la mecánica Hamiltoniana (H-N-P+ 1986).

El diagrama que presentamos a continuación muestra las extenciones de (9) que acabamos de mencionar.



4.- Aplicaciones a ecuaciones diferenciales de geodésicas en un espacio de Riemann.

En las secciones anteriores hemos descrito la manera en que los conceptos de lagrangianos s-equivalentes y de simetrías de s-equivalencia permiten hacer un estudio más completo de las simetrías y constantes de movimiento de un sistema. El objetivo del presente trabajo es aplicar las ideas anteriores a sistemas de ecuaciones que describen el movimiento a lo largo de geodésicas en un espacio de Riemann.

El estudio de las simetrías de la ecuación de geodésicas se restringe normalmente a la consideración de simetrías Noetherianas puntuales (i.e., que no dependen de la velocidad). Este tipo de simetrías se denominan movimientos (o isometrías) y son generados por los llamados vectores de Killing. El teorema de Noether nos permite asociar una constante a dichas transformaciones.

Por otro lado, dentro de la búsqueda de constantes de movimiento para la ecuación de geodésicas juegan un papel muy importante los conceptos de:

1.- Tensor de Killing.

2.- Simetrías del espacio.

Los tensores de Killing son tensores de valencia dos que satisfacen una ecuación que es una generalización más o menos directa de la ecuación de los vectores de Killing y que nos permiten construir constantes de movimiento cuadráticas en el momentum. Este tipo de tensores cobraron mucha importancia cuando se observó que el problema de la geodésicas en la métrica de Kerr se podía integrar debido a la existencia de un tensor de Killing que proporcionaba una constante de movimiento extra (llamada constante de Carter) además de las tres constantes asociadas a la energía, la masa en reposo y la componente de momento angular en la dirección del eje de giro de la masa creadora del campo.

Sin embargo, a pesar de su gran utilidad, los tensores de Killing carecen de una

interpretación geometrica del tipo de la de los vectores de Killing o analoga.
Por otro lado, las simetrías del espacio incluyen transformaciones del espacio de Riemann que dejan invariante alguna propiedad de éste, por ejemplo: su métrica, su conexión, su tensor de curvatura, el ángulo entre los vectores del espacio, etc.
En general estas transformaciones no son simetrías de las geodésicas. Esto es, podemos hacer en un espacio una transformación que deje invariante al tensor de curvatura pero que no mapée las geodésicas en sí mismas.
La importancia de las simetrías del espacio radica en el hecho de a cada una de estas simetrías le podemos asociar una (o varias) constante(s) de movimiento de la geodésicas de ese espacio. (K-L 1981).
Podemos entonces plantearnos la siguiente interrogante:

¿Que relación tienen los tensores de Killing y las simetrías del espacio con las simetrías de las geodésicas?

En este trabajo damos una respuesta a esta interrogante introduciendo el concepto de mapeadores especiales de simetría (MES), que son tensores que mapean el vector tangente a la geodésica en una simetría de esta. Veremos en los capítulos siguientes que a cada simetría del espacio le podemos asociar un MES y que los tensores de Killing son un caso particular de dichos mapeadores de simetría. Al hacer esto, veremos que a cada simetría del espacio le podemos asociar una simetría lineal en la velocidad de las geodésicas.Dichas simetrías serán no puntuales y en ocasiones serán no Noetherianas.
La idea de los MES no solo permite dar una interpretación de las simetrías del espacio y de los tensores de Killing, tambien junto con las técnicas propias del formalismo de los Lagrangianos s-equivalentes, permite deducir las constantes asociadas a este tipo de objetos geométricos de manera sistemática.

Parte del presente trabajo esta dedicada a la deducción de las constantes de movimiento asociadas a los Tensores de Killing y a las simetrías del espacio conocidas en la literatura (K-L 1981).

Asi mismo, veremos como el formalismo de los Lagrangianos s-equivalentes nos permite en oca iones encontrar constantes de movimiento nuevas.

El estudio de los MES en movimiento geodésico, forma parte de una problemática mas amplia que consiste en estudiar para un sistema dado los operadores que mapean simetrías arbitrarias del sistema en simetrías del mismo. A todo operador que cumpla esta propiedad lo llamaremos mapeador universal de simetrías (MUS) y según veremos la existencia de un MUS para un sistema dado esta estrechamente relacionada con la existencia de Lagrangianos s-equivalentes.

Por último quisiéramos mencionar que el estudio de los mapeadores de simetría como método para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias está fuertemente motivado por el éxito que han tenido tales ideas en la solución de problemas no lineales descritos por ecuaciones diferenciales parciales, como es el caso de la ecuación de Korteweg de Vries y otras (O - 1986).

CAPITULO II:

LAGRANGIANOS DE PRIMER ORDEN

INTRODUCCION.-

En este capítulo revisaremos el formalismo de los Lagrangianos de primer orden. Comenzaremos en la primera sección con una discusión del problema inverso del cálculo de variaciones para sistemas de ecuaciones de primer orden y mostraremos como construir en principio un numero infinito de Lagrangianos a partir de las constantes de movimiento. Daremos también las condiciones para que una función sea Lagrangiano de un sistema dado. (H-U 1981)

Pasaremos luego, en la sección dos, al estudio de la ecuación de simetría, donde demostraremos que para analizar las propiedades de simetría de un sistema basta considerar transformaciones de simetría locales ($\delta t = 0$).

En la tercera sección se define el concepto de simetría Noetheriana y se demuestra el teorema de Noether que permite asociar una constante de mmovimiento a cada simetría Noetheriana. Asi mismo, en esta sección enunciaremos el teorema inverso de Noether que asocia una simetría a cualquier constante de movimiento. Dicho teorema es demostrado mas adelante en la sección cinco.

La sección cuatro contiene una discusión sobre simetrías no-Noetherianas; se define la noción de Lagrangiano s-equivalente y se demuestra el teorema de las trazas.

En la sección cinco se lleva cabo la formulación geométrica de algunas de las ideas anteriores y se muestra como obtener mas constantes de movimiento a partir de simetrías arbitrarias.

En la siguiente sección se demuestra un resultado fundamental que afirma que el conjunto de las transformaciones de s-equivalencia coincide con el conjunto de transformaciones de simetría de la ecuación para sistemas de primer orden.

Por último , en la sección siete introducimos el concepto de mapeador de simetría como una idea nueva útil para el estudio de las simetrías de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Al inicio de esta sección se da una breve explicación de como los mapeadores de simetría han permitido resolver algunos problemas no lineales para sistemas descritos por ecuaciones diferenciales parciales. Asi mismo, demostramos un resultado que establece la conexión entre los mapeadores de simetría y los Lagrangianos s-equivalentes.

1.-EL PROBLEMA INVERSO DEL CALCULO DE VARIACIONES

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{x}^a = f^a(x^b, t) \qquad a, b = 1, \ldots, 2n \tag{2.1}$$

el problema inverso (no restringido) del cálculo de variaciones (H-S 1982) lleva al estudio de una funcion L tal que las soluciones de:

$$E_a L = 0 \tag{2.2}$$

coincidan con las soluciones de (2.1) donde E_a es el operador de Euler-Lagrange que se define como:

$$E_a \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^a} - \frac{\partial}{\partial x^a} \qquad a = 1, \ldots, 2n \tag{2.3}$$

Llamaremos lagrangiano de primer orden a la funcion L debido a que sus ecuaciones de Euler-Lagrange serán ecuaciones de primer orden.
Observemos que:

$$E_a L = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^a \partial \dot{x}^b}\right) \ddot{x}^b + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^b \partial \dot{x}^a}\right) \dot{x}^b + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}^a} - \frac{\partial L}{\partial x^a}\right)$$

De donde las ecuaciones (2.2) son en general de segundo orden y por lo tanto para que sean equivalentes a (2.1) debemos pedir que se anule el coeficiente que contiene segundas derivadas de x^a ,esto es:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^a \partial \dot{x}^b} = 0$$

la solución mas general de esta ecuación es que L sea una función lineal en las velocidades:

$$L = \ell_a(x^b, t)\, \dot{x}^a + \ell_0(x^b, t) \tag{2.4}$$

donde ℓ_a y ℓ_0 son funciones por determinar.
Si aplicamos el operador de Euler-Lagrange a (2.4) llegamos a las ecuaciones de Lagrange de primer orden:

$$\left(\frac{\partial \ell_b}{\partial x^a} - \frac{\partial \ell_a}{\partial x^b} \right) \dot{x}^a = \frac{\partial \ell_0}{\partial x^b} - \frac{\partial \ell_b}{\partial t} \tag{2.5}$$

Si definimos:

$$\sigma_{ab} \equiv \frac{\partial \ell_a}{\partial x^b} - \frac{\partial \ell_b}{\partial x^a} \tag{2.6}$$

entonces podemos plantear el problema inverso como el problema de encontrar 2n+1 funciones ℓ_a , ℓ_0 que satisfagan:

$$a) \quad \sigma_{ab} f^a = -\frac{\partial \ell_0}{\partial x^b} + \frac{\partial \ell_b}{\partial t}$$

$$b) \quad \det \sigma_{ab} \neq 0 \tag{2.7}$$

Se puede demostrar que siempre existen funciones ℓ_0 , ℓ_a que satisfacen (2.7) y por lo tanto siempre existe solución para el problema inverso del cálculo de variaciones en primer orden. (H-U 1981)
A continuación mostraremos cómo podemos encontrar Lagrangianos para el sistema (2.1) a partir de sus constantes de movimiento (H-U 1981),(H-H-S 1983).
Sabemos que el sistema (2.1) tiene siempre 2n constantes de movimiento independientes:

$$C^{(a)} (x^b, t) \tag{2.8}$$

debido a ésto el sistema:

$$\dot{C}^{(a)} = 0 \tag{2.9}$$

es equivalente a (2.1).
Un Lagrangiano para (2.9) se puede construir facilmente como:

$$L = C^{(1)}\dot{C}^{(2)} + C^{(3)}\dot{C}^{(4)} + \;\ldots\ldots C^{(2n-1)}\dot{C}^{(2n)} \qquad (2.1\emptyset)$$

Usando (2.8) podemos escribir (2.1∅) en términos de x^a y t :

$$\dot{C}^{(a)} = \frac{\partial C^{(a)}}{\partial x^b}\dot{x}^b + \frac{\partial C^{(a)}}{\partial t}$$

y como $C^{(a)}$ es constante de movimiento:

$$\frac{\partial C^{(a)}}{\partial x^b} f^b + \frac{\partial C^{(a)}}{\partial t} = 0$$

definiendo:

$$l_a(x^b,t) = C^{(1)}\frac{\partial C^{(2)}}{\partial x^a} + \ldots\ldots + C^{(2n-1)}\frac{\partial C^{(2n)}}{\partial x^a} \qquad (2.11)$$

podemos escribir (2.1∅) como:

$$L \equiv l_a(x^b,t)(\dot{x}^a - f^a) \qquad (2.12)$$

Esto es, si conocemos 2n constantes de movimiento independientes construimos l_a con (2.11) y mediante (2.12) obtenemos un Lagrangiano L escrito como combinación lineal de las ecuaciones de movimiento.
Lo anterior puede considerarse como una prueba constructiva de existencia de solución del problema inverso del Cálculo de Variaciones en primer orden.
A continuación, veremos las condiciones que debe cumplir l_a para que (2.12) sea un Lagrangiano de (2.1). (H-N-P+ 1985)
Las ecuaciones de Euler-Lagrange de (2.12) son :

$$\left(\frac{\partial l_b}{\partial x^a} - \frac{\partial l_a}{\partial x^b}\right)\dot{x}^a = \frac{\partial(-l_a f^a)}{\partial x^b} - \frac{\partial l_b}{\partial t} \qquad (2.13)$$

Si suponemos que (2.1) se cumple entonces la anterior expresión se transforma en:

$$\frac{\partial l_a}{\partial t} + \frac{\partial l_a}{\partial x^b} f^b + \frac{\partial f^b}{\partial x^a} l_b = 0$$

de donde si definimos:

$$\frac{\overline{d}}{dt} \equiv f^a \frac{\partial}{\partial x^a} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{2.14}$$

tenemos que l_a debe satisfacer:

$$\frac{\overline{d l_a}}{dt} + \left(\frac{\partial f^b}{\partial x^a} \right) l_b = 0 \tag{2.15}$$

Usando (2.15) tenemos que el operador de E-L , E_a aplicado sobre un Lagrangiano de la forma (2.12) da como resultado:

$$E_a L = \sigma_{ab} (\dot{x}^b - f^b) \tag{2.16}$$

y por lo tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange para (2.12) son:

$$\sigma_{ab} (\dot{x}^b - f^b) = 0 \tag{2.17}$$

por lo que, las soluciones de (2.2) seran soluciones de (2.1) si se cumple que:

$$\det \ \sigma_{ab} \neq 0 \tag{2.18}$$

Esto es, (2.15) y (2.18) son las condiciones necesarias y suficientes para que (2.12) sea un Lagrangiano de (2.1). Donde las funciones l se obtienen a partir de 2n constantes de movimiento independientes del sistema usando la expresión (2.11) o resolviendo (2.15).
Por último, deduciremos la ecuación de movimiento de σ :
De (2.6):

$$\frac{\overline{d \sigma_{ab}}}{dt} = \frac{\overline{d}}{dt} \left(\frac{\partial l_a}{\partial x^b} \right) - \frac{\overline{d}}{dt} \left(\frac{\partial l_b}{\partial x^a} \right)$$

usando (2.14) tenemos que:

$$\frac{\overline{d}}{dt}\left(\frac{\partial l_a}{\partial x^b}\right) = \frac{\partial}{\partial x^b}\left(\frac{\overline{d}\, l_a}{dt}\right) - \left(\frac{\partial l_a}{\partial x^c}\right)\left(\frac{\partial f^c}{\partial x^b}\right)$$

introduciendo esta identidad en la expresión anterior y usando (2.15) se tiene:

$$\frac{\overline{d}\sigma_{ab}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x^b}\left(l_c \frac{\partial f^c}{\partial x^a}\right) - \frac{\partial l_a}{\partial x^c}\frac{\partial f^c}{\partial x^b} + \frac{\partial}{\partial x^a}\left(l_c \frac{\partial f^c}{\partial x^b}\right) + \\ + \frac{\partial l_b}{\partial x^c}\frac{\partial f^c}{\partial x^a}$$

usando que las derivadas parciales conmutan e introduciendo la definición (2.6) tenemos finalmente:

$$\frac{\overline{d}\sigma_{ab}}{dt} + \sigma_{cb}\frac{\partial f^c}{\partial x^a} + \sigma_{ac}\frac{\partial f^c}{\partial x^b} = 0 \qquad (2.19)$$

2.-ECUACION DE SIMETRIA

Diremos que una transformación infinitesimal:

$$\begin{cases} \tilde{x}^a = x^a + \varepsilon\, \eta^a \\ \tilde{t} = t + \varepsilon \cdot \eta^0 \end{cases} \qquad (2.20)$$

es una transformación de simetría (H 1984b) (H-Z 1985) (H-N-P+ 1986) si mapea las soluciones de (2.1) en soluciones del mismo sistema. Esto es si, a primer orden en ε :

$$\frac{d\tilde{x}^a}{d\tilde{t}} = f^a(\tilde{x}^b, \tilde{t}) \qquad (2.21)$$

siempre que (2.1) se cumpla.
Usando la regla de la cadena y despreciando términos en ε^2 tenemos:

$$\frac{d\tilde{x}^a}{d\tilde{t}} = \frac{dx^a}{dt} - \varepsilon\frac{dx^a}{dt}\frac{d\eta^0}{dt} + \varepsilon\frac{d\eta^a}{dt}$$

$$f^a(\tilde{x}^b, \tilde{t}) = f^a(x^b, t) + \varepsilon\frac{\partial f^a}{\partial x^b}\eta^b + \varepsilon\frac{\partial f^a}{\partial t}\eta^0$$

Suponiendo (2.1), la condición (2.21) nos lleva entonces a la ecuación de simetría:

$$\frac{\overline{d\eta^a}}{dt} - \left(\frac{\partial f^a}{\partial x^b}\right)\eta^b = f^a\frac{\overline{d\eta^0}}{dt} + \left(\frac{\partial f^a}{\partial t}\right)\eta^0 \qquad (2.22)$$

A continuación demostraremos que basta que consideremos solamente las transformacionesloca les ($\delta t = 0$).(H 1984b),(H-Z 1985).
Para esto conviene utilizar la siguiente notación:

$$f^\mu = \begin{cases} f^a \\ 1 \end{cases} \qquad x^\mu = \begin{cases} x^a & \mu = a = 1,\ldots,2n \\ t & \mu = 0 \end{cases} \qquad (2.23)$$

La ecuación se escribe entonces como:

$$\frac{\overline{d\eta^\mu}}{dt} - \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu}\,\eta^\nu = \frac{\overline{d\eta^0}}{dt}\,f^\mu \qquad (2.24)$$

$$\mu,\nu = 0,1,\ldots,2n$$

Observemos que la ecuación (2.22) tiene 2n componentes en tanto que (2.24) tiene 2n+1. Esto se debe a que, como consecuencia de las definiciones (2.23), la componente $\mu = 0$ de (2.24) es una identidad en tanto que el resto de las componentes son ecuaciones que han de satisfacerse solo si η es una simetría y coinciden con las 2n componentes de (2.22).
Es fácil ver que:

$$\eta^\mu = \Lambda\, f^\mu \qquad (\eta^0 = \Lambda)$$

es una solución de (2.24) para toda función Λ ,y por lo tanto, si η es solución de (2.24) entonces:

$$\eta^\mu - \Lambda\, f^\mu$$

tambien es una solución.
Como consecuencia de ésto, si tenemos una simetría η^μ con $\eta^0 \neq 0$ podemos construir otra simetría equivalente $\tilde{\eta}$ tal que $\tilde{\eta}^0 = 0$ definiendo:

$$\tilde{\eta}^{\mu} = \eta^{\mu} - \eta^{0} f^{\mu} \qquad (2.25)$$

Debido a este resultado, consideraremos en lo que sigue unicamente transformaciones del tipo:

$$\begin{cases} \tilde{x}^{a} = x^{a} + \varepsilon\,\eta^{a} \\ \delta t = 0 \end{cases} \qquad (2.26)$$

la ecuación de simetría será entonces:

$$\frac{d\eta^{a}}{dt} - \left(\frac{\partial f^{a}}{\partial x^{b}}\right) \eta^{b} = 0 \qquad (2.27)$$

3.-EL TEOREMA DE NOETHER

El teorema de Noether, uno de los resultados centrales de la formulación de teorías Lagrangianas, permite asociar una constante de movimiento a cada transformación Noetheriana de simetría del Lagrangiano.
Supongamos que tenemos una transformación infinitesimal del tipo:

$$\begin{cases} \tilde{x}^{a} = x^{a} - \varepsilon\,\eta^{a} \\ \delta t = 0 \end{cases} \qquad (2.28)$$

A partir de dicha transformación y del Lagrangiano L del sistema, definimos una nueva función Lagrangiana $\tilde{L}$ mediante la condición :

$$\tilde{L}(\tilde{\chi}^a, \dot{\tilde{\chi}}^a, t) \equiv L(\chi^a, \dot{\chi}^a, t) \tag{2.29}$$

Definimos entonces la variación funcional del Lagrangiano como:

$$\delta L \equiv \tilde{L}(\chi^a, \dot{\chi}^a, t) - L(\chi^a, \dot{\chi}^a, t) \tag{2.30}$$

De acuerdo con esto, diremos que (2.28) es una transformación Noetheriana si:

$$\delta L = -\varepsilon \frac{d\varphi(\chi^a, t)}{dt} \tag{2.31}$$

En la sección 6 del presente capítulo, demostraremos que este tipo de transformaciones son un subconjunto del conjunto de simetrías de la ecuación de movimiento. El teorema de Noether (H-G 1984),(H-N-P+ 1986) afirma entonces que si η es una transformacion Noetheriana se tiene que:

$$K = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right) \eta^a + \varphi \tag{2.32}$$

es una constante de movimiento.
La definición (2.29) es natural en el sentido de que el Lagrangiano es un escalar y por lo tanto, si tenemos dos sistemas de coordenadas $\{x\}$ y $\{\tilde{x}\}$ en los que el Lagrangiano se representa por funciones L y $\tilde{L}$ respectivamente se debe tener que el valor de ambas funciones en un mismo punto $P = (x) = (\tilde{x})$ del espacio de configuración debe de coincidir que es precisamente lo que afirma (2.29).
Debemos observar sin embargo que en general la forma funcional de L y $\tilde{L}$ será diferente. La función δL definida en(2.30) nos da precisamente la diferencia de L y $\tilde{L}$ consideradas ambas como funciones de las coordenadas $\{x\}$.
Demostración del teorema:
de (2.29) y (2.30) tenemos que :

$$\delta L = \tilde{L}(\chi^a, \dot{\chi}^a, t) - \tilde{L}(\tilde{\chi}^a, \dot{\tilde{\chi}}^a, t)$$

expandiendo en serie de Taylor $\tilde{L}$ en torno a $\varepsilon = 0$ despreciando términos en ε^2

$$\delta L = -\varepsilon \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \varepsilon} \right)$$

$$\delta L = \varepsilon \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{x}^a} \left(\frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial \varepsilon} \right) - \varepsilon \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{x}}^a} \left(\frac{\partial \dot{\tilde{x}}^a}{\partial \varepsilon} \right)$$

Usando (2.28) tenemos que a orden ε:

$$\delta L = \varepsilon \left(\frac{\partial L}{\partial x^a} \right) \eta^a + \varepsilon \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) \dot{\eta}^a \qquad (2.33)$$

Con esta expresión para δL la demostración de que K es constante es inmediata:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) \eta^a + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) \frac{d\eta^a}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}$$

usando (2.31) y (2.33) tenemos que:

$$\frac{dK}{dt} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^a} \right] \eta^a$$

y por lo tanto:

$$\overline{\frac{dK}{dt}} = 0$$

Supongamos ahora que tenemos una transformación no local del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}^a = x^a - \varepsilon \eta^a \\ \tilde{t} = t - \varepsilon \eta^0 \end{array} \right. \qquad (2.34)$$

En este caso, el nuevo Lagrangiano quedará definido mediante la condición:

$$\tilde{L} \left(\tilde{x}^a, \frac{d\tilde{x}^a}{d\tilde{t}}, \tilde{t} \right) d\tilde{t} = L \left(x^a, \frac{dx^a}{dt}, t \right) dt \qquad (2.35)$$

la variación funcional de L se definirá del mismo modo que antes y diremos que

(2.34) es Noetheriana si δL satisface (2.31).
De acuerdo con lo dicho en la sección anterior podemos definir a partir de (2.34) una nueva transformación local:

$$\begin{cases} \tilde{\chi}^a = \chi^a - \varepsilon \gamma^a \\ \delta t = 0 \end{cases} \qquad (2.36)$$

donde:

$$\gamma^a = \eta^a - \dot{\chi}^a \eta^0 \qquad (2.37)$$

Si llamamos δL a la variación funcional del Lagrangiano en la transformación (2.34) y $\delta L'$ la variación correspondiente en (2.36), es fácil demostrar que:

$$\delta L' = \delta L - \varepsilon \frac{d}{dt}(L\eta^0) \qquad (2.38)$$

y por lo tanto (2.34) es Noetheriana si y solo si (2.36) lo es.
Supongamos ahora que tenemos una simetría Noetheriana η del tipo (2.34).A partir de ésta construímos la simetría γ mediante (2.36) y debido a (2.38) es Noetheriana .Aplicando el teorema de Noether a γ se tiene que:

$$K = \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}^a} \gamma^a + \varphi'$$

es una constante, donde φ' esta definida como:

$$\delta L' = -\varepsilon \frac{d\varphi'}{dt} \qquad (2.39)$$

Debido a (2.37) podemos escribir K como:

$$K = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}^a}\right)\eta^a - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}^a}\right)\dot{\chi}^a \eta^0 + \varphi'$$

como η es una simetría Noetheriana:

$$\delta L = -\varepsilon \frac{d\varphi}{dt}$$

y por lo tanto de (2.38) y (2.39)

$$\varepsilon \frac{d\varphi'}{dt} = \varepsilon \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\varepsilon L \eta^0 \right) ,$$

esto es;

$$\varphi' = \varphi + L \eta^0$$

de donde concluimos que la constante de movimiento asociada a una simetría Noetheriana no local es:

$$K = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right)\eta^a + \left[L - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right)\dot{x}^a \right]\eta^0 + \varphi \quad (2.40)$$

El teorema de Noether permite asociar una constante de movimiento a cada transformación de simetría que satisfaga (2.31).
Existe un resultado recíproco que permite asociar una simetría (Noetheriana) a cualquier constante de movimiento.
Este resultado conocido como Teorema inverso de Noether afirma que si K es una constante entonces:

$$\eta^a = (\sigma^{-1})^{ab}\left(\frac{\partial K}{\partial x^b}\right) \quad ; \quad \eta^0 = 0 \quad (2.41)$$

es una simetría Noetheriana, donde σ^{-1} es la inversa de la matriz σ_{ab} definida en (2.6).
La demostración de este resultado será hecha en la sección 5 del presente capítulo donde desarrollaremos un lenguaje geométrico con el cual es posible escribir las ideas y pruebas de la teoría de Lagrangianos de primer orden de manera compacta y elegante.

4.-SIMETRIAS NO-NOETHERIANAS Y LAGRANGIANOS S-EQUIVALENTES

Como mencionamos al principio de la sección anterior, cuando tenemos el Lagrangiano L de un sistema y una transformación η podemos definir un nuevo Lagrangiano $\tilde{L}$ como:

$$\tilde{L} = L + \delta L \tag{2.42}$$,

donde δL esta definido por (2.33).
Observemos que:

$$E_a\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \equiv 0 \tag{2.43}$$

para toda función φ y por lo tanto la condición de simetría Noetheriana se puede reescribir como:

$$E_a\, \delta L \equiv 0 \tag{2.44}$$

y de acuerdo con (2.42) tenemos que:

$$E_a L = E_a \tilde{L} \tag{2.45}$$

Esto es, las simetrías Noetherianas son aquellas simetrías que pasan de un Lagrangiano L a otro $\tilde{L}$ de tal forma que las ecuaciones se mantengan invariantes.
Una generalización natural de esta idea es considerar simetrías ? tales que transformen a las ecuaciones de Euler-Lagrange covariantemente, esto es:

$$E_a \tilde{L} = \Omega_a{}^b\, E_b L \tag{2.46}$$

Estas simetrías no mantienen invariantes a las ecuaciones pero si el espacio de soluciones. Ya que toda solución de $E_a L = 0$ es solución de $E_a \tilde{L} = 0$ y viceversa (suponiendo que $\det \Omega \neq 0$)
De acuerdo con (2.42) este tipo de transformaciones deben satisfacer:

$$E_a\, \delta L = \Lambda_a{}^b\, E_b L \tag{2.47}$$

A las simetrías que cumplen (2.47) las denominaremos taransformaciones no-Noetherianas o de s-equivalencia. (H-1984),(H-G-1984),(H-N-P+ 1985).
Observemos que en tanto para las simetrías Noetherianas $E_a \delta L = 0$,para las simetrías de s-equivalencia ésto solo ocurre cuando suponemos que se cumplen las ecuaciones de movimiento, ésto es:

$$E_a\, \delta L \Big|_{E_b L = 0} = 0 \tag{2.48}$$

En general, diremos que dos Lagrangianos son s-equivalentes si sus ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes tienen las mismas soluciones, y por lo tanto, las transformaciones de s-equivalencia son aquellas que nos permiten pasar de un Lagrangiano a otro s-equivalente.

La matríz Λ que aparece en (2.47) debe depender tanto del Lagrangiano original como de la transformación de simetría. A continuación encontraremos la forma explícita de dicha matríz cuando tenemos un Lagrangiano del tipo (2.12) y una simetría local.

La variación funcional (2.33) del Lagrangiano ante una transformación η se puede escribir como; (2.33) :

$$\delta L = \varepsilon\left[\frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right)\right]\eta^a + \frac{d}{dt}\left[\varepsilon\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\,\eta^a\right] \tag{2.49}$$

Usando (2.3),(2.16) y la forma explícita de L tenemos:

$$\delta L = \varepsilon\left[\frac{d}{dt}\left(l_a \eta^a\right) - \eta^a \sigma_{ab}\left(\dot{x}^b - f^b\right)\right] \tag{2.50}$$

si definimos:

$$l_b^{\,*} = \sigma_{ab}\,\eta^a \tag{2.51}$$

$$\sigma_{ab}^{\,*} = \frac{\partial l_a^{\,*}}{\partial x^b} - \frac{\partial l_b^{\,*}}{\partial x^a} \tag{2.52}$$

entonces, debido a (2.43):

$$E_a\,\delta L = \varepsilon\, E_a\left[\,l_b^{\,*}\left(\dot{x}^b - f^b\right)\right] \tag{2.53}$$

Si η es una transformación de simetría, usando (2.27) y (2.19) se tiene que:

$$\frac{\overline{d l_a^{\,*}}}{dt} = \left(\frac{\overline{d\sigma_{ab}}}{dt}\right)\eta^b + \sigma_{ab}\left(\frac{\overline{d\eta^b}}{dt}\right)$$

$$= -\left(\sigma_{ac}\frac{\partial f^c}{\partial x^b} + \sigma_{cb}\frac{\partial f^c}{\partial x^a}\right)\eta^b + \sigma_{ab}\left(\frac{\partial f^b}{\partial x^c}\,\eta^c\right)$$

de donde:
$$\frac{d l_a^*}{dt} + l_b^* \frac{\partial f^b}{\partial x^a} = 0$$

(2.54)

Esto es, el Lagrangiano construido en (2.51) es un buen Lagrangiano para el sistema (2.1) en el sentido de que todas las soluciones de la ecuación (2.1) son soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange para:

$$L^* = l_a^* (\dot{x}^a - f^a)$$

ver (2.15).

El resultado recíproco solo se tiene cuando:

$$\det \sigma_{ab}^* \neq 0$$

condición que no siempre se cumple aún cuando η sea simetría.

Debido a que l^* satisface (2.54) tenemos usando (2.16) que:

$$E_a \left[l_b^* (\dot{x}^b - f^b) \right] = \sigma_{ab}^* (\dot{x}^b - f^b)$$

y por lo tanto, ante una transformación arbitraria de simetría:

$$E_a \delta L = \sigma_{ab}^* (\dot{x}^b - f^b) \qquad (2.55)$$

De (2.16) y (2.55) tenemos finalmente que:

$$E_a \delta L = \sigma_{ac}^* \left(\sigma^{-1} \right)^{cb} E_b L$$

demostrando ésto que la matriz Λ de la expresión (2.47) tiene la forma:

$$\Lambda_a{}^b = \sigma_{ac}^* \left(\sigma^{-1} \right)^{cb} \qquad (2.56)$$

Cuando la simetría es Noetheriana:

$$\sigma^{*}_{ab} = 0$$

y (2.40) nos da la constante de movimiento asociada.
En el caso de que η sea una simetría de s-equivalencia no podemos aplicar el teorema de Noether. Sin embargo, existe un resultado conocido como el teorema de las trazas que nos permite encontrar constantes de movimiento para simetrías no-Noetherianas con la ventaja adicional de que podemos asociar varias constantes de movimiento a una simetría. (HH 1981), (H-G 1984)
El teorema de las trazas, afirma que si definimos:

$$I_k \equiv tr_3 \left[\Lambda^k \right] \tag{2.57}$$

entoces:

$$I_k = cte. \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n \tag{2.58}$$

Demostración:

$$\frac{d\Lambda_a{}^b}{dt} = \sigma^{*}_{ac} \left(\frac{d\sigma^{-1\,cb}}{dt} \right) + \left(\frac{d\sigma^{*}_{ac}}{dt} \right) \sigma^{-1\,cb}$$

$$\frac{d\sigma^{-1\,ce}}{dt} = -\left(\sigma^{-1}\right)^{cb} \left(\frac{d\sigma_{bd}}{dt} \right) \left(\sigma^{-1}\right)^{de}$$

de donde:

$$\frac{d\Lambda_a{}^b}{dt} = -\sigma^{*}_{ac} \left(\sigma^{-1}\right)^{ce} \left(\frac{d\sigma_{ed}}{dt} \right) \left(\sigma^{-1}\right)^{db} + \left(\frac{d\sigma^{*}_{ac}}{dt} \right) \left(\sigma^{-1}\right)^{cb}$$

usando (2.19) en esta expresión realizando los productos indicados, simplificando y usando la definición de Λ (2.56) se tiene:

$$\frac{d\Lambda_a{}^b}{dt} = \Lambda_a{}^c \frac{\partial \rho^b}{\partial x^c} - \Lambda_c{}^b \frac{\partial \rho^c}{\partial x^a} \qquad (2.59)$$

Esta es la ecuación de movimiento de Λ y a partir de ella es inmediato demostrar el teorema:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{trz}[\Lambda^k] = k \operatorname{trz}\left[\Lambda^{k-1} \frac{d\Lambda}{dt}\right] \qquad (2.60)$$

y sustituyendo (2.59):

$$\frac{dI_k}{dt} = \Lambda^{k-1}{}_b{}^a \left\{ \Lambda_a{}^c \frac{\partial \rho^b}{\partial x^c} - \Lambda_c{}^b \frac{\partial \rho^c}{\partial x^a} \right\}$$

$$= \Lambda^k{}_b{}^c \frac{\partial \rho^b}{\partial x^c} - \Lambda^k{}_c{}^a \frac{\partial \rho^c}{\partial x^a} = 0$$

5.-FORMULACION GEOMETRICA

Mostraremos a continuación como las ecuaciones fundamentales de la teoría Lagrangiana de primer orden se pueden escribir en términos geométricos con los conceptos de derivada de Lie y derivación exterior. (H-N-P+ 1986)
La derivada de Lie de una función f a lo largo de un campo vectorial V se define como la derivada direccional de f en la dirección V (S-1980):

$$\mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{f} \equiv \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x^a}\right) V^a \qquad (2.61)$$

La derivada de Lie de un vector W a lo largo de V se define como el conmutador de V y W:

$$\mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{W} \equiv [\bar{V}, \bar{W}] \qquad (2.62)$$

donde:

$$[\bar{V}, \bar{W}]^a \equiv V^b\left(\frac{\partial W^a}{\partial x^b}\right) - W^b\left(\frac{\partial V^a}{\partial x^b}\right) \qquad (2.63)$$

A partir de (2.61) y (2.62) se puede calcular, usando las propiedades de la derivada de Lie , $\mathcal{L}_V T$ donde T es un tensor de cualquier tipo. En particular tenemos:

$$(\mathcal{L}_V \tilde{\omega})_a = V^b\left(\frac{\partial \omega_a}{\partial x^b}\right) + \omega_b\left(\frac{\partial V^b}{\partial x^a}\right) \qquad (2.64)$$

donde $\tilde{\omega}$ es una uno-forma.

$$(\mathcal{L}_{\bar{V}} T)_{ab} = \left(\frac{\partial T_{ab}}{\partial x^c}\right) V^c + \left(\frac{\partial V^c}{\partial x^a}\right) T_{cb} + \left(\frac{\partial V^c}{\partial x^b}\right) T_{ac} \qquad (2.65)$$

$$(\mathcal{L}_{\bar{V}} T)_a{}^b = \left(\frac{\partial T_a{}^b}{\partial x^c}\right) V^c + \left(\frac{\partial V^c}{\partial x^a}\right) T_c{}^b - \left(\frac{\partial V^b}{\partial x^c}\right) T_a{}^c \qquad (2.66)$$

Listaremos a continuación un conjunto de identidades de la derivada de Lie que seran de utilidad en los cálculos que haremos mas adelante:

$$\mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{W} = -\mathcal{L}_{\bar{W}} \bar{V} \qquad (2.67)$$

$$\mathcal{L}_{\bar{V}+\bar{W}} \bar{U} = \mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{U} + \mathcal{L}_{\bar{W}} \bar{U} \tag{2.68}$$

$$\mathcal{L}_{\bar{V}} (f \bar{W}) = (\mathcal{L}_{\bar{V}} f) \bar{W} + f (\mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{W}) \tag{2.69}$$

$$\mathcal{L}_{[\bar{V}, \bar{W}]} = [\mathcal{L}_{\bar{V}} , \mathcal{L}_{\bar{W}}] \tag{2.70}$$

$$\partial_t \left(\mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{W} \right) = \mathcal{L}_{(\partial_t \bar{V})} \bar{W} + \mathcal{L}_{\bar{V}} \left(\partial_t \bar{W} \right) \tag{2.71}$$

Por otro lado la derivada exterior de una k-forma (Sp 1982):

$$\omega^k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k = 1}^{n} \omega_{i_1 \cdots i_k} \, d\chi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\chi^{i_k} \tag{2.72}$$

es una k+1 forma definida como:

$$d\omega^k \equiv \sum_{i_1 < \cdots < i_k = 1}^{n} \sum_{\alpha = 1}^{n} \left(\frac{\partial \omega_{i_1 \cdots i_k}}{\partial \chi^\alpha} \right) d\chi^\alpha \wedge d\chi^{i_1} \cdots d\chi^{i_k} \tag{2.73}$$

Una de las relaciones fundamentales entre la derivada exterior y la derivada de Lie afirma que: (S 198)

$$\mathcal{L}_{\bar{V}} \tilde{\omega}^k = (d\omega^k)(\bar{V}) + d[\omega^k(\bar{V})] \tag{2.74}$$

Además, se tiene que ambas derivadas conmutan:

$$\mathcal{L}_{\bar{V}} [d\omega^k] = d[\mathcal{L}_{\bar{V}} \omega^k] \tag{2.75}$$

De acuerdo con este lenguaje, diremos que un Lagrangiano de (2.1) del tipo (2.12) es una uno-forma:

$$\tilde{\ell} = \ell_a \, dx^a \tag{2.76}$$

que satisface:

$$(\mathcal{L}_{\tilde{f}} + \partial_t)\,\tilde{\ell} = 0 \tag{2.77}$$

Usando (2.64) es inmediato demostrar que (2.15) es equivalente a (2.77).
A partir de $\tilde{\ell}$ definimos la dos-forma $\tilde{\sigma}$ como la derivada exterior de $\tilde{\ell}$ con signo negativo:

$$\tilde{\sigma} = -d\tilde{\ell} \tag{2.78}$$

a σ definida así la denominaremos forma simpléctica asociada a $\tilde{\ell}$.
en componentes, tenemos :

$$\tilde{\sigma} = -d\tilde{\ell} - d\left(\sum_{a=1}^{2n} \ell_a \, dx^a\right) = \sum_{a=1}^{2n}\sum_{b=1}^{2n} \frac{\partial \ell_a}{\partial x^b} dx^b \wedge dx^a$$

$$= \sum_{a=1}^{2n}\sum_{b=1}^{2n} \frac{\partial \ell_a}{\partial x^b} dx^a \wedge dx^b = \sum_{a<b=1}^{2n} \left(\frac{\partial \ell_a}{\partial x^b} - \frac{\partial \ell_b}{\partial x^a}\right) dx^a \wedge dx^b$$

y por lo tanto de acuerdo con (2.72):

$$\sigma_{ab} = \frac{\partial \ell_a}{\partial x^b} - \frac{\partial \ell_b}{\partial x^a}$$

en concordancia con la definición (2.6).
Las ecuaciones de Euler-Lagrange se escriben como:

$$\tilde{\sigma}(\dot{x} - f) = 0 \tag{2.79}$$

De donde, para que las ecuaciones de movimiento (2.1) sean implicadas por (2.79) se debe pedir que la dos-forma sea no degenerada, ésto es:

si para todo $\bar{A}$, $\tilde{\sigma}(\bar{A},\bar{B})=0$ entonces $\bar{B}=0$ (2.80)

En coordenadas esta condición se formula pidiendo que:

$$\det \sigma_{ab} \neq 0$$

De la definición de $\tilde{\sigma}$ y del hecho de que la segunda derivada exterior de toda k-forma se anula : (Sp 1982)

$$d\,d\,\omega^k = 0 \tag{2.81}$$

concluimos que:

$$d\tilde{\sigma} = 0 \tag{2.82}$$

es decir $\tilde{\sigma}$ es una dos-forma cerrada.
Por otro lado, usando (2.75), (2.77) y (2.78) se tiene que:

$$(\mathcal{L}_{\bar{\rho}} + \partial_t)\tilde{\sigma} = 0 \tag{2.83}$$

A partir de (2.62) podemos escribir la ecuación de simetría (2.27) como:

$$(\mathcal{L}_{\bar{\rho}} + \partial_t)\bar{\eta} = 0 \tag{2.84}$$

así mismo, diremos que C es una constante de movimiento si:

$$(\mathcal{L}_{\bar{\rho}} + \partial_t)\, C = 0 \tag{2.85}$$

De acuerdo con este lenguaje, diremos que una transformación de simetría es Noetheriana, si:

$$\mathcal{L}_{\bar{\eta}}\tilde{\sigma} = 0 \tag{2.86}$$

usando (2.74) y (2.82) tenemos que esta condición equivale a pedir que:

$$d\,[\,\tilde{\sigma}(\bar{\eta})\,] = 0 \tag{2.87}$$

usando la notación del capítulo anterior ésto es lo mismo que pedir:

$$\tilde{\sigma}^{*} = 0 \qquad (2.88)$$

y debido a (2.55) esto último implica :

$$E_a\, \delta L = 0 \qquad (2.89)$$

de donde concluimos que las definiciones (2.80) y (2.89) son equivalentes.
En general, una transformación de s-equivalencia η será una transformación de simetría η tal que :

$$\mathcal{L}_{\bar{\eta}}\, \tilde{\sigma} \neq 0 \qquad (2.90)$$

Esto es equivalente a pedir que :

$$\tilde{\sigma}^{*} \neq 0 \qquad (2.91)$$

lo cual implica que la expresión (2.55) de $E_a \delta L$ se anulará solo si suponemos que se cumplen las ecuaciones de movimiento, y por lo tanto (2.91) equivale a pedir que:

$$E_a\, \delta L \Big|_{E_b L = 0} = 0$$

lo cual muestra que la definición de transformación de s-equivalencia (2.90) dada coincide con la enunciada en la seccion anterior.
El teorema de Noether afirma que si η es una simetría Noetheriana, esto es que satisface (2.84) y (2.86) entonces:

$$C = K - \int \varphi(t)\, dt \qquad (2.92)$$

es una constante de movimiento, donde K y φ son funciones definidas mediante:

$$\tilde{\sigma}(\bar{\eta}) = dK \qquad (2.93)$$

$$(\mathcal{L}_{\bar{\xi}} + \partial_t)\, K = \varphi(t) \qquad (2.94)$$

Demostración:

Como η satisface (2.86) tenemos, usando (2.74) y (2.82) que:

$$0 = \mathcal{L}_{\bar{\eta}} \tilde{\sigma} - d[\tilde{\sigma}(\bar{\eta})]$$

de donde, aplicando el lema de Poincaré (Sp-1982) concluimos que:

$$\tilde{\sigma}(\bar{\eta}) = dK$$

para alguna función K, y por lo tanto (2.93) esta bien definida.
Por otro lado, como η es simetría de la ecuación, cumple (2.82) de donde, derivando (2.93) y usando (2.83):

$$[(\mathcal{L}_{\bar{f}} + \partial_t)\tilde{\sigma}](\bar{\eta}) + \tilde{\sigma}[(\mathcal{L}_{\bar{f}} + \partial_t)\eta] = (\mathcal{L}_{\bar{f}} + \partial_t)(dK)$$

$$0 = (\mathcal{L}_{\bar{f}} + \partial_t)(dK)$$

conmutando las derivadas:

$$d[(\mathcal{L}_{\bar{f}} + \partial_t) K] = 0$$

de donde φ definida en (2.94) satisface:

$$d\varphi = 0$$

lo cual implica que φ es a lo más una función del tiempo.
Con lo anterior, la demostración de C es una constante es inmediata:

$$(\mathcal{L}_{\bar{f}} + \partial_t)C = (\mathcal{L}_{\bar{f}} + \partial_t)K - (\mathcal{L}_{\bar{f}} + \partial_t)\int \varphi(t)\,dt$$

usando la definición de φ :

$$= -\varphi - \partial_t\left(\int \varphi(t)\,dt\right) - \mathcal{L}_{\bar{f}}\left(\int \varphi(t)\,dt\right)$$

y como φ solo depende de t:

$$\mathcal{L}_{\bar{f}}\left(\int \varphi(t)\,dt\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int \varphi(t)\, dt\right) = \varphi$$

con lo cual:

$$(\mathcal{L}_{\rho} + \partial_t)\, C = +\varphi - \varphi = 0$$

Por otro lado, el teorema inverso de Noether (2.41) se formula diciendo que si C es una constante, entonces el vector γ definido como:

$$\tilde{\sigma}(\bar{\gamma}) = dC \tag{2.95}$$

es una simetría Noetheriana.
Demostración:
Derivando (2.95) y usando (2.83) y (2.85):

$$\tilde{\sigma}\left[\, (\mathcal{L}_{\bar{\rho}} + \partial_t)\, \bar{\gamma}\, \right] = 0$$

de donde, usando la no-degeneración de σ concluimos que:

$$(\mathcal{L}_{\bar{\rho}} + \partial_t)\, \bar{\gamma} = 0$$

Lo cual prueba que γ es una simetría de la ecuación.
Para probar que es Noetheriana usamos (2.74) y (2.81):

$$\mathcal{L}_{\bar{\gamma}}\, \tilde{\sigma} = d\left[\, \tilde{\sigma}(\bar{\gamma})\right] = d[dC] = 0$$

Antes de pasar a la formulación del teorema de las trazas y a la deducción de constantes diferentes a las relacionadas con el teorema de Noether, enunciaremos el siguiente resultado que se prueba directamente a partir de (2.77), (2.83), (2.84) y (2.85):
Si η , γ son simetrías , ℓ un lagrangiano y σ una forma simplectica, entoces:

$$\mathcal{L}_{\bar{\eta}}\, \bar{\gamma} \quad = \quad \text{es una simetría} \tag{2.96}$$

$$\mathcal{L}_{\bar{\eta}}\, \tilde{\ell} \quad = \quad \text{es un lagrangiano} \tag{2.97}$$

$$\mathcal{L}_{\bar{\eta}} \tilde{\sigma} = \quad \text{es una forma simpléctica} \tag{2.98}$$

Usando (2.74) es inmediato observar que $\tilde{\sigma}^*$ definido en la sección anterior, coincide con (2.98) esto es:

$$\mathcal{L}_{\bar{\eta}} \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^* \tag{2.99}$$

de donde:

$$d [\mathcal{L}_{\bar{\eta}} \tilde{\ell}] = d \tilde{\ell}^*$$

y por lo tanto:

$$\tilde{\ell}^* = \mathcal{L}_{\bar{\eta}} \tilde{\ell} + d \psi \tag{2.100}$$

A partir de $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\sigma}^*$ definimos el tensor Λ como:

$$\tilde{\sigma}^* = \tilde{\sigma} \Lambda \tag{2.101}$$

derivando esta ecuación se tiene que:

$$0 = \tilde{\sigma} [(\mathcal{L}_{\rho} + \partial_t) \Lambda]$$

y usando la no-degeneración de $\tilde{\sigma}$ concluimos:

$$(\mathcal{L}_{\rho} + \partial_t) \Lambda = 0 \tag{2.102}$$

De la ecuación (2.66) es facil darse cuenta de que (2.102) es equivalente a (2.59), ecuación a partir de la cual resulta inmediata la demostración del teorema de las trazas (2.57).
Asociada a toda simetría η de la ecuación de movimiento, tenemos la constante:

$$J = \tilde{\ell} (\bar{\eta}) \tag{2.103}$$

La demostración de que J es constante, se sigue directamente de (2.77), (2.83) y (2.84).

Así mismo, si η es una simetría y C_1 es una constante, entonces:

$$C_2 = \mathcal{L}_{\bar{\eta}}\, C_1 \tag{2.104}$$

es una constante.
Demostración:

$$(\mathcal{L}_{\bar{\rho}} + \partial_t)\, C_2 = \mathcal{L}_{\bar{\rho}}\, \mathcal{L}_{\bar{\eta}}\, C_1 + \partial_t(\mathcal{L}_{\bar{\eta}}\, C_1)$$

usando (2.70) y (2.69):

$$(\mathcal{L}_{\bar{\rho}} + \partial_t)\, C_2 = \mathcal{L}_{\bar{\eta}}\, \mathcal{L}_{\bar{\rho}}\, C_1 + \mathcal{L}_{[\bar{\rho},\bar{\eta}]}\, C_1 + \mathcal{L}_{\bar{\eta}}(\partial_t C_1) +$$
$$+ \mathcal{L}_{(\partial_t \bar{\eta})}\, C_1 = \mathcal{L}_{\eta}\left[(\mathcal{L}_{\bar{\rho}} + \partial_t)C_1\right] + \mathcal{L}_{-(\partial_t \bar{\eta})}\, C_1 + \mathcal{L}_{(\partial_t \bar{\eta})}\, C_1$$

donde hemos usado la ecuacion de simetría.
De esta última ecuación como C_1 es constante tenemos:

$$(\mathcal{L}_{\bar{\rho}} + \partial_t)\, C_2 = 0$$

Por otro lado, si tenemos dos simetrías η y γ entonces:

$$M = \tilde{\sigma}(\bar{\eta}, \bar{\gamma}) \tag{2.105}$$

es una constante, lo cual se sigue directamente de (2.83) y (2.84).
A continuación mostraremos como la obtención de las constantes (2.104) y (2.105) se puede considerar como una generalización del teorema de Poisson el cual afirma que si f y g son dos constantes de movimiento de un sistema hamiltoniano, entonces la función h definida como:

$$h = \{f, g\} \tag{2.106}$$

es una constante de movimiento, donde $\{f,g\}$ es el corchete de Poisson de f y g definido como:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p^i} - \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p^i} \tag{2.107}$$

Este teorema permite en ocaciones obtener constantes de movimiento nuevas a partir de otr conocidas. (L-L 19),(G-19).
Definiendo:

$$\chi^a = \begin{cases} q^i & ; \; a = 1, \dots n \\ p^i & ; \; a = n+1 \dots 2n \end{cases} \qquad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.1Ø8)$$

podemos escribir (2.1Ø7) como:

$$\{f, g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial \chi^a}\right)(\sigma^{-1})^{ab}\left(\frac{\partial g}{\partial \chi^b}\right) \qquad (2.1Ø9)$$

usando en teorema inverso de Noether (2.41) tenemos que como g es una constante:

$$\eta^a = (\sigma^{-1})^{ab}\left(\frac{\partial g}{\partial \chi^b}\right) \qquad (2.11Ø)$$

es una simetría y por lo tanto:

$$\{f, g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial \chi^a}\right) \eta^a$$

de donde, usando la definición de derivada de Lie de una función a lo largo de un campo vectorial (2.66) concluimos que:

$$\{f, g\} = \mathcal{L}_\eta f \qquad (2.111)$$

Tenemos entonces que, dentro del contexto de la mecánica Hamiltoniana el teorema de Poisson se puede formular diciendo que la derivada de Lie de una constante a lo largo de una simetría Nootheriana es una constante.
Formulado así el teorema de Poisson es inmediato observar que (2.1Ø4) es una generalizacion de tal resultado para simetrías de cualquier tipo.
Siguiendo argumentos análogos se puede demostrar que (2.1Ø5) es también una generalización del teorema de Poisson:
La ecuación (2.1Ø9) se puede escribir como:

$$\{f,g\} = \sigma_{ab}\left[(\sigma^{-1})^{bc}\left(\frac{\partial f}{\partial x^c}\right)\right]\left[(\sigma^{-1})^{ad}\left(\frac{\partial g}{\partial x^d}\right)\right] \qquad (2.112)$$

y debido a que f y g son constantes tenemos, en virtud del teorema inverso de Noether, que:

$$\eta_1^{\ b} = (\sigma^{-1})^{bc}\frac{\partial f}{\partial x^c}$$

$$\eta_2^{\ d} = (\sigma^{-1})^{ad}\frac{\partial g}{\partial x^d} \qquad (2.113)$$

son simetrías Noetherianas y:

$$\{f,g\} = \sigma_{ab}\,\eta_1^a\,\eta_2^b \qquad (2.114)$$

Esto es, podemos formular el teorema de Poisson diciendo que si η_1 y η_2 son dos simetrias Noetherianas entonces:

$$\sigma_{ab}\,\eta_1^a\,\eta_2^b = cte \qquad (2.115)$$

es una constante.
Esta formulación lleva a la conclusión de que (2.1Ø5) es una generalización del teorema para cuando las simetrías son no-Noetherianas.

6.- SIMETRIAS DE S-EQUIVALENCIA Y SIMETRIAS DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO.

En esta sección demostraremos que el conjunto de las simetrías de s-equivalencia coincide con el conjunto de simetrías de la ecuación de movimiento. (H-Z 1985)
Trabajaremos en 2n+1 dimensiones considerando al tiempo t como una coordenada éxtra. Para esto, usaremos indices griegos μ,ν que tomarán valores desde Ø hasta 2n. Las coordenadas de un punto en este espacio serán :

Dado un Lagrangiano ℓ_a en 2n dimensiones definimos ℓ_μ como:

$$\ell_\mu = \begin{cases} \ell_a & ; \mu = 1, \dots 2n \\ -\ell_a f^a & ; \mu = 0 \end{cases} \tag{2.116}$$

asi mismo, si η es una simetría, entonces:

$$\eta^\mu = \begin{cases} \eta^a & ; \mu = 1, \dots, 2n \\ 0 & ; \mu = 0 \end{cases} \tag{2.117}$$

las ecuaciones de movimiento serán entonces de la forma:

$$\frac{d x^\mu}{d \tau} = f^\mu \tag{2.118}$$

Supongamos que $\tau = t$ lo que lleva a definir f^μ como:

$$f^\mu = \begin{cases} f^a & ; \mu = 1, \dots, 2n \\ 1 & ; \mu = 0 \end{cases} \tag{2.119}$$

Con esta definiciones es inmediato observar que el Lagrangiano (2.12) se puede escribir como: (en 2n+1 dimensiones).

$$L = \tilde{\ell}(\dot{X}) \tag{2.120}$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.5) resultan ser:

$$\left(\frac{\partial \ell_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \ell_\nu}{\partial x^\mu} \right) \dot{x}^\nu = 0 \tag{2.121}$$

Si denotamos por d la derivada exterior y definimos:

$$\tilde{\sigma} = -d\tilde{\ell} \tag{2.122}$$

podemos escribir (2.121) como:

$$\tilde{\sigma}(\dot{X}) = 0 \qquad (2.123)$$

si tenemos una simetría η definimos:

$$\tilde{\ell}^* = \mathcal{L}_\eta \tilde{\ell} \qquad (2.124)$$

usando (2.64),(2.116) y (2.117) tenemos que en componentes:

$$\ell_\mu^* = \begin{cases} \eta^b \left(\dfrac{\partial \ell_a}{\partial x^b}\right) + \ell_b \left(\dfrac{\partial \eta^b}{\partial x^a}\right) & \mu = 1, \ldots, 2n \\[2ex] \ell_b \left(\dfrac{\partial \eta^b}{\partial t}\right) - \eta^b \left(\dfrac{\partial \ell_a f^a}{\partial x^b}\right) & \mu = 0 \end{cases}$$

y por lo tanto:

$$\tilde{\ell}^*(\dot{X}) = \left(\frac{\partial \ell_a}{\partial x^b}\right) \eta^b \dot{x}^a - \eta^b \left(\frac{\partial \ell_a f^a}{\partial x^b}\right) + \dot{\eta}^b \ell_b$$

comparando esta expresión con (2.33) tenemos fácilmente que:

$$\delta L = \varepsilon\, \tilde{\ell}^*(\dot{X}) \qquad (2.125)$$

si definimos:

$$\tilde{\sigma}^* = -d\tilde{\ell}^* \qquad (2.126)$$

entonces, tenemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange de δL son:

$$\tilde{\sigma}^*(\dot{X}) = 0 \qquad (2.127)$$

En esta notación, la condición de que η sea una transformación de s-equivalencia es:

$$\tilde{\sigma}^{*}(\bar{f}) = 0 \tag{2.128}$$

Por otro lado, debido a (2.117) la condición de que η sea una simetría se formula en 2n+1 dimensiones como:

$$\mathcal{L}_{\bar{f}}\,\bar{\eta} = 0 \tag{2.129}$$

Habiendo formulado las ecuaciones básicas en 2n+1 dimensiones, la demostración del resultado es inmediata.
Como (2.120) es un Lagrangiano para el sistema (2.1) tenemos de (2.123) que

$$\tilde{\sigma}(\bar{f}) = 0 \tag{2.130}$$

tomando la derivada de Lie de esta ecuación al lo largo de η resulta:

$$(\mathcal{L}_{\bar{\eta}}\tilde{\sigma})(\bar{f}) + \tilde{\sigma}(\mathcal{L}_{\bar{\eta}}\bar{f}) = 0$$

Como la derivada de Lie y la derivada exterior conmutan usando (2.122) y (2.124) tenemos:

$$\tilde{\sigma}^{*}(\bar{f}) + \tilde{\sigma}(\mathcal{L}_{\bar{\eta}}\bar{f}) = 0 \tag{2.131}$$

Supongamos ahora que η es una transformación de simetría, entonces:

$$\mathcal{L}_{\bar{f}}\,\bar{\eta} = -\mathcal{L}_{\bar{\eta}}\,\bar{f} = 0$$

y (2.131) nos lleva directamente a (2.128). Esto es, todas las simetrías de la ecuación son simetrías de s-equivalencia. Un caso particular ocurre cuando (2.130) se cumple debido a que $\sigma^{*} = 0$, en este caso la transformación es Noetheriana, lo cual prueba que las simetrías de Noether son un subconjunto de las simetrías de la ecuación de movimiento.
Por otro lado, si η es de s-equivalencia (2.128) y (2.131) conducen a:

$$\tilde{\sigma}(\mathcal{L}_{\bar{\eta}}\bar{f}) = 0 \tag{2.132}$$

Debido a que la matríz $\sigma_{\mu\nu}$ es antisimétrica y de dimensión 2n+1 se tiene que

$$\det \sigma_{\mu\nu} = 0 \qquad (2.133)$$

sin embargo:

$$\det \sigma_{ab} \neq 0$$

y por lo tanto concluimos que el rango de $\sigma_{\mu\nu}$ es 2n, razón por la cual solo existe un eigenvector con eigenvalor cero para $\sigma_{\mu\nu}$.(2.130) afirma que f es un eigenvector de este tipo y por lo tanto debido a (2.132) debe de ser paralelo al vector $\mathcal{L}_{\eta} f$ esto es:

$$\mathcal{L}_{\bar{\eta}} f = k f \qquad (2.134)$$

de donde :

$$\bar{\eta}' = \bar{\eta} - \Lambda \bar{f} \qquad \Lambda = \mathcal{L}_{\bar{f}} k$$

es tal que :

$$\mathcal{L}_{\bar{f}} \bar{\eta}' = 0 \qquad (2.135)$$

En la sección tres demostramos que las simetrías η y η' eran equivalentes y por lo tanto concluímos que η es efectivamente una simetría de la ecuación de movimiento.

7.- MAPEOS DE SIMETRIAS Y LAGRANGIANOS S-EQUIVALENTES.-

Un camino para encontrar las simetrías de un sistema es resolviendo la ecuación de simetría correspondiente.
En ocasiones la solución de tal ecuación puede resultar complicada lo cual conduce a considerar metodos alternativos para encontrar simetrías.
Uno de tales metodos se basa en la busqueda de tensores que mapean una simetría en otra.
La existencia de tales tensores esta estrechamente relacionada con la existencia de Lagrangianos equivalentes. Un resultado importante que demostraremos en esta sección es que para todo sistema que tenga al menos dos

Lagragianos s-equivalentes podemos contruir un maneador de simetrías .
A continuación comentaremos como es que en algunas ocasiones la existencia de cuando menos dos Lagrangianos s-equivalentes permite resolver un problema especifico:
Supongamos que el sis tema (2.1) posée dos Lagrangianos $\tilde{\mathcal{L}}$ y $\tilde{\mathcal{L}}^*$ s-equivalentes. Supongamos ahora que hemos encontrado una constante φ_1 del sistema.
Usando el teorema inverso de Noether para el Lagrangiano $\tilde{\mathcal{L}}$ podemos encontrar una simetría η_1 .En el caso de que esta simetría sea Noetheriaña para el Lagrangiano $\tilde{\mathcal{L}}^*$ entonces podemos aplicar el teorema de Noether y encontrar una constante φ_2 .
A partir de φ_2 podemos construir la simetría η_2 Noetheriana para el Lagrangiano $\tilde{\mathcal{L}}$ y con ella, suponiendo que sea NOetheriana para $\tilde{\mathcal{L}}^*$ también, encontrar una constante φ_3, siguiendo el método anteriormente descrito.
Iterando este procedimiento podemos obtener a partir de φ_1 un número infinito de constantes φ_i y a partir de la simetría η_1 un número infinito de simetrías.
El siguiente diagrama muestra esquematicamente este método.
Denotaremos con T.N.* la aplicación del teorema de Noether para el Lagrangiano $\tilde{\mathcal{L}}^*$, ésto es, el paso de una simetría η Noetheriana para $\mathcal{L}^*$ a una constante de movimiento.
Asi mismo, denotaremos por T.IN. la aplicación del teorema inverso de Noether que permite pasar de una constante a una simetría Noetheriana del Lagrangiano $\tilde{\mathcal{L}}$:

$$\begin{tikzcd}
\varphi_1 \arrow[r, "TIN"] & \bar{\eta}_1 \arrow[dl, "TN^*"'] \\
\varphi_2 \arrow[r, "TIN"] & \eta_2 \arrow[dl, "TN^*"'] \\
\varphi_3 \arrow[r, dashed, no head] & \vdots \\
\vdots &
\end{tikzcd} \qquad (2.36)$$

Este método se ha aplicado a la solución de algunos problemas con número infinito de grados de libertad. (O-1986)

Se puede demostrar además que estas constantes y simetrías estan en involución, ésto es:

$$\{ \varphi_l , \varphi_i \} = 0 \qquad [\bar{\eta}_i , \bar{\eta}_i] = 0$$

donde $\{,\}$ representa el corchete de Poisson asociado a σ o σ^* definido en (2.104).

Este método recursivo se basa en la hipótesis fundamental de que cada una de las simetrías η_i es Noetheriana tanto para ℓ como para ℓ^*.

El paso de η_i a η_{i+1} se hace aplicando el teorema de Noether para ℓ y el teorema inverso para ℓ^* y se puede mostrar que esto es equivalente a mapear η_i en η_{i+1} usando la matriz Λ.

Vemos asi que la condición que debe cumplirse para que el metodo anterior funcione es que Λ mapee simetrías Noetherianas en simetrías del mismo tipo.

Aun cuando parece muy restrictiva esta condición, quisieramos mencionar que existen sistemas para los cuales se puede encontrar mapeos de simetrías de este tipo y que debido a ésto se pueden resolver completamente.

Tales sistemas poseen sin embargo un numero infinito de grados de libertad y se representan mediante ecuaciones diferenciales parciales. Uno de los ejemplos mas conocidos de este tipo de sistemas es el representado por la ecuación de Kortweg de-Vries que es una ecuacion parcial no lineal. (O-1986)

En la referencia (O -1986) se encuentra la explicación de como se puede resolver esta ecuación y otras ecuaciones parciales no lineales usando el metodo anteriormente descrito.

En el presente trabajo nos restringiremos a sistemas con un número finito de grados de libertad representados por ecuaciones diferenciales ordinarias.

Creemos que la idea de mapeos de simetría que ha resultado tener tanto éxito en la integración de ecuaciones parciales no lineales puede conducir a resultados utiles cuando se aplica a ecuaciones ordinarias.

En el capítulo 5 ,estudiaremos los mapeos especiales de simetría para la ecuación de geodésicas en un espacio de Riemann. Aun cuando este tipo de mapeo es el más básico, veremos como permite unificar algunas ideas interesantes sobre las simetrías de las geodésicas así como también conduce en ocasiones a resultados nuevos.Esto, creemos nosotros, es una motivación para realizar un estudio sistemático sobre los mapeos de simetrías de ecuaciones ordinarias, como un método alternativo para resolverlas.

Diremos que $K^a{}_b$ es un mapeador universal de simetrías si para toda simetría η^b se tiene que:

$$K^a{}_b \, \eta^b$$

es una simetría.

La ecuación que debe de satisfacer tal tensor se obtiene de (2.61):

$$0 = (\mathcal{L}_{\bar{f}} + \partial_t) (K^a{}_b \, \eta^b) = [(\mathcal{L}_{f} + \partial_t) K^a{}_b] \eta^b$$

y como η^b es una simetría arbitraria tenemos:

$$(\mathcal{L}_{\bar{\rho}} + \partial_t) K^{a}{}_{b} = 0 \tag{2.137}$$

Por otro lado, llamaremos mapeador particular de simetrías a cualquier tensor tal que al ser aplicado sobre una simetría especifica η_0 da como resultado una nueva simetría. La ecuación que debe de satisfacerse en este caso es:

$$\left[(\mathcal{L}_{\bar{\rho}} + \partial_t) K^{a}{}_{b} \right] (\eta_0^{\,b}) = 0 \tag{2.138}$$

Todo sistema del tipo (2.2) tal que;

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = 0$$

tiene una simetría η_0 dada por:

$$\bar{\eta}_0 = \alpha \, \bar{\rho} \tag{2.139}$$

donde α es una constante de movimiento.
Debido a ésto, los mapeadores de simetría que mapean al campo ρ en una simetría resultan importantes y los denominaremos mapeadores especiales de simetria (MES).
En el capítulo 4 daremos la forma explicita de la ecuación (2.138) con ρ siendo el campo vectorial que define a la ecuación de las geodésicas en un espacio de Riemann.
Existe una conexión muy estrecha entre los mapeadores de simetría y los Lagrangianos s-equivalentes.
Observemos primero que nada que debido a (2.102) la matríz Λ satisface (2.137) y por lo tanto, tenemos el importante resultado de que tal matríz es un mapeador universal de simetrías.
De esta forma nos damos cuenta de que los simetrías no-Noetherianas de una ecuación son mas ricas en contenido, no solo podemos asociarles varias constantes de movimiento, tambien podemos contruir mapeadores universales de simetrías a partir de ellas.

CAPITULO III:

LAGRANGIANOS DE SEGUNDO ORDEN

INTRODUCCION .-

En esto capítulo analizaremos las características generales del formalismo de los Lagrangianos de segundo orden y su relación con los Lagrangianos de primer orden.

En la sección uno discutiremos el problema inverso del cálculo de variaciones en segundo orden y mostraremos como construir Lagrangianos de segundo orden (en el caso de que éstos existan) a partir de las constantes de movimiento del sistema.

Estos Lagrangianos se escriben como combinación lineal de las ecuaciones de movimiento y se dan las condiciones que deben de cumplirse para que las ecuaciones Euler-Lagrange correspondientes tengan las mismas soluciones que las ecuaciones de movimiento originales. Asimismo se demuestra que, aún cuando los Lagrangianos anteriormente mencionados dependen de las aceleraciones, difieren de Lagrangianos independientes de éstas por una derivada total.

En la sección dos mostramos cómo se puede construir a partir de un Lagrangiano de segundo orden uno de primero y se calcula la matríz simpléctica correspondiente.

La sección tres inicia con la obtención de la ecuación de simetría de segundo orden y se muestra cómo obtener partiendo de una solución de dicha ecuación una solución de la ecuación de simetría de primer orden.

A continuación se utiliza la conexión entre Lagrangianos de primero y segundo orden estudiada en la sección anterior para obtener constantes de movimiento usando los resultados del capítulo dos.

Por último en la sección cuatro se define la noción de mapeador de simetría para un sistema de segundo orden y se muestra la conexión con los mapeadores de simetría de primer orden definidos anteriormente.

1.-EL PROBLEMA INVERSO DEL CALCULO DE VARIACIONES EN SEGUNDO ORDEN.-

El problema inverso (no restringido) del cálculo de variaciones en segundo orden (H-S 1982) consiste en encontrar una función L tal que las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange para dicha función coincidan con las soluciones del sistema:

$$\ddot{q}^{i} = F^{i}(q^{i}, \dot{q}^{i}, t) \qquad (3.1)$$

Llamaremos Lagrangiano de segundo orden a toda función L que satisfaga la condición anterior, debido a que en este caso las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes serán ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.
Todo sistema del tipo (3.1) se puede escribir como un sistema de primer orden en 2n variables.
Una manera de hacer esto es definiendo:

$$\chi^{a} = \begin{cases} q^{i} & ; \quad a = 1, \ldots, n \\ \dot{q}^{i} & ; \quad a = n+1, \ldots 2n \end{cases} \qquad (3.2)$$

$$f^{a} = \begin{cases} \dot{q}^{i} & ; \quad a = 1, \ldots, n \\ F^{i}(q^{i}, \dot{q}^{i}, t) & ; \quad a = n+1, \ldots, 2n \end{cases} \qquad (3.3)$$

en cuyo caso el sistema (3.1) es equivalente a:

$$\dot{\chi}^{a} = f^{a}(\chi^{b}, t) \qquad (3.4)$$

En el capítulo anterior, mostramos que (3.4) tiene un número infinito de Lagrangianos.
En particular si:

$$C^{(a)}(\chi^{b}, t)$$

son 2n constantes de movimiento independientes entonces:

$$L = C^{(1)} \dot{C}^{(2)} + \quad \ldots \quad + C^{(2n-1)} \dot{C}^{(2n)} \qquad (3.5)$$

es un Lagrangiano de primer orden de (3.4).
A continuación, consideraremos las funciones $C^{(a)}$ como constantes del sistema (3.1) y veremos bajo que condiciones (3.5) es un Lagrangiano de segundo orden de (3.1). (H-H-S 1983),(H-1984),(H-N-P+ 1986).
Primero que nada, escribiremos (3.5) en función de $q^{i}, \dot{q}^{i}, t$:

$$\dot{C}^{(a)} = \left(\frac{\partial C^{(a)}}{\partial \dot{q}^i}\right)\ddot{q}^i + \left(\frac{\partial C^{(a)}}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i + \frac{\partial C^{(a)}}{\partial t} \qquad (3.6)$$

si definimos:

$$\frac{\overline{d}}{dt} = F^i\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\right) + \dot{q}^i\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) + \frac{\partial}{\partial t} \qquad (3.7)$$

entonces, como $C^{(a)}$ es una constante de movimiento:

$$\frac{\overline{d}C^{(a)}}{dt} \equiv 0 \qquad (3.8)$$

y por lo tanto, de (3.6) y (3.7) tenemos que:

$$\dot{C}^{(a)} = \frac{\partial C^{(a)}}{\partial \dot{q}^i}\left(\ddot{q}^i - F^i\right) \qquad (3.9)$$

Debido a ésto, definiendo:

$$\mu_i \equiv C^{(1)}\frac{\partial C^{(2)}}{\partial \dot{q}^i} + \dots + C^{(2n-1)}\frac{\partial C^{(2n)}}{\partial \dot{q}^i} \qquad (3.1\emptyset)$$

podemos escribir (3.5) como:

$$L = \mu_i(q^i, \dot{q}^i, t)\left(\ddot{q}^i - F^i\right) \qquad (3.11)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para una función L se obtienen a partir del principio de Hamilton:

$$\delta \int L\, dt = 0 \qquad (3.12)$$

Cuando la función L depende de q^i, $\dot{q}^i$, t la variación de la integral nos lleva a ecuaciones del tipo:

$$E_i\, L = 0 \tag{3.13}$$

donde E_i es el operador de Euler-Lagrange definido en (2.3)
Sin embargo, cuando L es función de q^i, $\dot{q}^i$, t y $\ddot{q}^i$ como es el caso del Lagrangiano (3.11), la variación de la integral da como resultado las ecuaciones:

$$G_i\, L = 0 \tag{3.14}$$

donde G_i es el operador de Euler-Lagrange dependiente de los aceleraciones definido como:

$$G_i \equiv -\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial}{\partial \ddot{q}^i}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial}{\partial q^i} \tag{3.15}$$

A continuación, aplicaremos el operador G_i a (3.11) y veremos bajo que condiciones (3.14) y (3.1) son equivalentes.

$$\begin{aligned} G_i\, L = & -\frac{d^2 \mu_i}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\ddot{q}^i \frac{\partial \mu_i}{\partial \dot{q}^i}\right) - \ddot{q}^i\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial q^i}\right) - \\ & - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mu_i F^i}{\partial \dot{q}^i}\right) + \left(\frac{\partial F^i \mu_i}{\partial q^i}\right) \end{aligned} \tag{3.16}$$

La función μ_i depende de $\dot{q}^i$ y por lo tanto $G_i L$ tendrá términos que contienen a las terceras derivadas de q debido a que $G_i L$ contiene segundas derivadas de de μ_i.
Desarrollando la expresión (3.16) tenemos:

$$G_i\, L = \left(\frac{\partial \mu_k}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mu_i}{\partial \dot{q}^k}\right)\dddot{q}^k + M_i(\ddot{q}^i, \dot{q}^i, q^i; t)$$

debido a ésto, la primera condición que debemos pedir para que (3.14) y (3.1) sean equivalentes es que ambas ecuaciones sean de segundo orden; esto exige que el coeficiente del término que contiene terceras derivadas de $G_i L$ se anule, ésto es:

$$\frac{\partial \mu_k}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mu_i}{\partial \dot{q}^k} = 0 \tag{3.17}$$

Si suponemos que se cumplen las ecuaciones (3.1) entonces, de (3.16) tenemos:

$$G_i L = -\frac{\bar{d}^2 \mu_i}{dt^2} + \frac{\bar{d}}{dt}\left(F^j \frac{\partial \mu_j}{\partial \dot{q}^i} \right) - F^j \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial q^i} \right) -$$

$$- \frac{\bar{d}}{dt}\left[\mu_j \frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i} \right] - \frac{\bar{d}}{dt}\left[F^j \frac{\partial \mu_j}{\partial \dot{q}^i} \right] + \mu_j \left(\frac{\partial F^j}{\partial q^i} \right) + F^j \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial q^i} \right).$$

y por lo tanto las ecuaciones (3.14) se cumplirán si:

$$\frac{\bar{d}}{dt}\left[\frac{\bar{d}\mu_i}{dt} + \mu_j \frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i} \right] - \mu_j \left(\frac{\partial F^j}{\partial q^i} \right) = 0 \qquad (3.18)$$

A continuación escribiremos (3.14) explícitamente usando las condiciones (3.17) y (3.18).
De (3.16) tenemos que:

$$G_i L = -\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mu_i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial \mu_i}{\partial \dot{q}^k} \ddot{q}^k + \frac{\partial \mu_i}{\partial t} \right] + \frac{d}{dt}\left(\ddot{q}^j \frac{\partial \mu_j}{\partial \dot{q}^i} \right) -$$

$$- \ddot{q}^j \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial q^i} \right) - \frac{d}{dt}\left(\mu_j \frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{d}{dt}\left(F^j \frac{\partial \mu_j}{\partial \dot{q}^i} \right) + F^j \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial q^i} \right) + \mu_j \left(\frac{\partial F^j}{\partial q^i} \right)$$

usando (3.17) podemos simplificar esta expresión y escribir:

$$G_i L = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{d}\mu_i}{dt} \right) - \ddot{q}^j \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial q^i} \right) + F^j \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial q^i} \right) - \frac{d}{dt}\left(\mu_j \frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i} \right) + \mu_j \left(\frac{\partial F^j}{\partial q^i} \right)$$

de donde:

$$G_i L = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{d}\mu_i}{dt} + \mu_j \frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i}\right) + \mu_j\left(\frac{\partial F^j}{\partial q^i}\right) - \left(\ddot{q}^j - F^j\right)\left(\frac{\partial \mu_j}{\partial q^i}\right)$$

usando (3.18):

$$G_i L = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{d}\mu_i}{dt} + \mu_j \frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i}\right) + \frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\bar{d}\mu_i}{dt} + \mu_j \frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i}\right) -$$

$$- \left(\ddot{q}^j - F^j\right)\left(\frac{\partial \mu_j}{\partial q^i}\right)$$

dobido a (3.7) esta expresión es equivalente a:

$$G_i L = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\left(\frac{\bar{d}\mu_i}{dt} + \mu_k \frac{\partial F^k}{\partial \dot{q}^i}\right)\left(\ddot{q}^j - F^j\right) - \frac{\partial \mu_j}{\partial q^i}\left(\ddot{q}^j - F^j\right)$$

y por lo tanto, si definimos:

$$A_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\left[\frac{\bar{d}\mu_i}{dt} + \mu_k \frac{\partial F^k}{\partial \dot{q}^i}\right] + \frac{\partial \mu_j}{\partial q^i} \qquad (3.19)$$

llegamos a;

$$G_i L = -A_{ij}\left(\ddot{q}^j - F^j\right) \qquad (3.20)$$

De donde concluimos que (3.14) implicará a (3.1) si:

$$\det A_{ij} \neq 0 \qquad (3.21)$$

En resumen tenemos que todo sistema de segundo orden del tipo (3.1) tiene un Lagrangiano de segundo orden de la forma (3.11) si las funciones satisfacen (3.17) ,(3.18) y (3.21). La condición (3.17) evita que aparezcan terceras derivadas en la ecuación de Euler-Lagrange de L; la condición (3.18)

garantiza que todas las soluciones (3.1) sean soluciones de (3.14) en tanto que la condición (3.21) implica lo recíproco.
Como mencionamos en el capítulo uno, el problema inverso del cálculo de variaciones en segundo orden no tiene siempre solución, esto es, existen sistemas de segundo orden para los cuales no es posible encontrar funciones que satisfagan las condiciones mencionadas anteriormente.
Sin embargo, cuando el sistema (3.1) admita un Lagrangiano de segundo orden, la ecuacion (3.10) nos da un método para construir un Lagrangiano del tipo (3.11) a partir de las constantes de movimiento. En este caso, las únicas condiciones que se deben de satisfacer es que todas las constantes sean independientes y que μ_i definido en (3.10) satisfaga (3.17).
El Lagrangiano (3.11) es poco usual en el sentido de que depende explicitamente de las aceleraciones.
Sin embargo, dicho Lagrangiano, difiere de otro independiente de éstas por una derivada total:

$$\tilde{L}(q^i,\dot{q}^i,t) = L(q^i,\dot{q}^i,\ddot{q}^i,t) + \frac{dg}{dt} \tag{3.22}$$

Veamos como se construye $\tilde{L}$:
La condición (3.17) implica que existe una función g tal que:

$$\mu_i = -\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{q}^i}\right) \tag{3.23}$$

de donde:

$$L = \mu_i(\ddot{q}^i - F^i) = -\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{q}^i}\right)\ddot{q}^i - \mu_i F^i =$$

$$= -\frac{dg(q^i,\dot{q}^i,t)}{dt} + \left(\frac{\partial g}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) - \mu_i F^i$$

y por lo tanto si definimos:

$$\tilde{L}(q^i,\dot{q}^i,t) = \left(\frac{\partial g}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) - \mu_i F^i$$

tenemos (3.22).
Observemos que $\tilde{L}$ se puede escribir como:

$$\tilde{L} = \overline{\frac{dg}{dt}} \tag{3.24}$$

2.- LAGRANGIANOS DE SEGUNDO ORDEN Y LAGRANGIANOS DE PRIMER ORDEN:

Al principio de la sección anterior, mostramos como todo sistema de segundo orden se puede escribir como uno de primer orden. Existe una relación análoga entre Lagrangianos que afirma que todo Lagrangiano de segundo orden da origen a un Lagrangiano de primer orden. (H-N-P+ 1986), lo recíproco no es cierto ya que, según hemos mencionado, existen ecuaciones de segundo orden que no tienen lagrangianos aun cuando sus versiones de primer tienen siempre un número infinito de éstos. (H-U 1981), (H-S 1982).
Si tenemos un sistema del tipo (3.1) que posée un lagrangiano de la forma (3.11), entonces, el sistema de primer orden correspondiente (2.4) tiene un lagrangiano del tipo (2.12) definido como:

$$l_a = \begin{cases} -\left(\dfrac{d\mu_a}{dt} + \mu_b \dfrac{\partial F^b}{\partial \dot{q}^a}\right) ; & a,b = 1,\dots,n \\ \mu_a ; & a = n+1,\dots,2n \end{cases} \tag{3.25}$$

de acuerdo con lo discutido en la secc. 1 del capítulo anterior, necesitamos verificar que:

$$\overline{\frac{dl_a}{dt}} + \left(\frac{\partial f^b}{\partial x^a}\right) l_b = 0 \tag{3.26}$$

donde l_a esta definido en (3.25), f^a en (3.3) y x^a en (3.2).
para a > n (3.26) es

$$\frac{\bar{d}\mu_i}{dt} + \mu_k \frac{\partial F^k}{\partial \dot{q}^i} + l_i = 0$$

que se cumple por definición de l_a.
para a <=n tenemos:

$$\frac{\bar{d} l_i}{dt} + l_b \frac{\partial f^b}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\bar{d} l_i}{dt} + l_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} + \mu_j \frac{\partial F^j}{\partial q^i}$$

sustituyendo (3.25):

$$= -\frac{\bar{d}}{dt}\left[\frac{\bar{d}\mu_i}{dt} + \mu_k \frac{\partial F^k}{\partial \dot{q}^i} \right] + \mu_j \frac{\partial F^j}{\partial q^i}$$

esta última expresión es igual a cero en virtud de (3.18) y por lo tanto l_a definido en (3.25) es un lagrangiano de primer orden para (3.4).
A continuación, calcularemos las componentes σ_{ab} de la dos forma $\tilde{\sigma}$ asociada al lagrangiano (3.25) a partir de (2.6), en lo que sigue se supone que los índices i, j, k, toman valores de 1 hasta n:

$$B_{ij} = \sigma_{ij} = \frac{\partial l_i}{\partial x^j} - \frac{\partial l_j}{\partial x^i}$$

y por lo tanto de (3.25) tenemos que:

$$B_{ij} = -\frac{\partial}{\partial q^j}\left[\frac{d\mu_i}{dt} + \mu_k \frac{\partial F^k}{\partial \dot{q}^i} \right] + \frac{\partial}{\partial q^i}\left[\frac{d\mu_j}{dt} + \mu_k \frac{\partial F^k}{\partial \dot{q}^j} \right] \qquad (3.27)$$

$$-A_{ij} = \sigma_{i\,j+n} = \frac{\partial l_i}{\partial x^{j+n}} - \frac{\partial l_{j+n}}{\partial x^i}$$

de donde:

$$A_{ij} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\left[\frac{\bar{d}\mu_i}{dt} + \mu_k \frac{\partial F^k}{\partial \dot{q}^i} \right] + \frac{\partial \mu_j}{\partial q^i} \qquad (3.28)$$

por ultimo:

$$C_{ij} = \sigma_{i+n\ j+n} = \frac{\partial l_{i+n}}{\partial x^{j+n}} - \frac{\partial l_{j+n}}{\partial x^{i+n}}$$

ésto es:

$$C_{ij} = \frac{\partial \mu_i}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial \mu_j}{\partial \dot{q}^i} \qquad (3.29)$$

Supongamos ahora que tenemos un lagrangiano que no depende de las aceleraciones; para este tipo de lagrangianos conviene definir:

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \dot{q}^i\, \partial \dot{q}^j} \qquad (3.30)$$

$$T_{ij} = \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} - \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} \qquad (3.31)$$

De acuerdo con lo dicho en la sección anterior podemos construir un lagrangiano del tipo (3.11) donde:

$$L = \mu_i \left(\ddot{q}^i - F^i \right) \qquad \mu_i = -\frac{\partial g}{\partial \dot{q}^i} \qquad \tilde{L} = \frac{\overline{d g}}{dt}$$

debido a esto tenemos que:

$$W_{ij} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\left(\frac{\overline{dg}}{dt}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{q}^i}\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left[\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{q}^j}\right)\dot{q}^k + \mu_k \frac{\partial F^k}{\partial \dot{q}^j} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial \dot{q}^k}\right) F^k + \frac{\partial \mu_j}{\partial t}\right]$$

y de (2.28) tenemos finalmente que:

$$W_{ij} = -A_{ij} \tag{3.32}$$

por otro lado:

$$\frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \dot{q}^i \, \partial \dot{q}^j} = \frac{\partial}{\partial q^j}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{\bar{d} g}{dt} \right) \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q^j}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial q^i} \right) + \frac{\bar{d} \mu_i}{dt} + \mu_k \left(\frac{\partial F^k}{\partial \dot{q}^i} \right) \right]$$

y por lo tanto, de (3.27) y (3.31) concluimos:

$$T_{ij} = -B_{ij} \tag{3.33}$$

Por último:

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 g}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} - \frac{\partial^2 g}{\partial \dot{q}^j \, \partial \dot{q}^i}$$

de donde:

$$C_{ij} = 0 \tag{3.34}$$

De esta manera vemos que todo lagrangiano de segundo orden del tipo $\tilde{L}(q^i, \dot{q}^i, t)$ tiene asociada una matríz simpléctica de la forma:

$$\sigma_{ab} = \begin{pmatrix} -T & W \\ -W & 0 \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

3.-ECUACION DE SIMETRIA Y CONSTANTES DE MOVIMIENTO.-

Diremos que una transformación del tipo:

$$\begin{cases} \tilde{q}^i = q^i + \varepsilon \eta^i(q^j, \dot{q}^j, t) \\ \delta t = 0 \end{cases} \qquad (3.36)$$

es una transformación de simetría de la ecuación (3.1) si mapea el espacio de soluciones de la ecuación en si mismo. (H-1984a),(H-1984b)
De (2.36) tenemos que:

$$\frac{d\tilde{q}^i}{d\tilde{t}} = \frac{dq^i}{dt} + \varepsilon \frac{d\eta^i}{dt} + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{d^2\tilde{q}^i}{d\tilde{t}^2} = \frac{d^2q^i}{dt^2} + \varepsilon \frac{d^2\eta^i}{dt^2} + O(\varepsilon^2)$$

$$F^k(\tilde{q}^j, \dot{\tilde{q}}^j, \tilde{t}) = F^k(q^j, \dot{q}^j, t) + \varepsilon\left[\left(\frac{\partial F^k}{\partial q^i}\right)\eta^i + \left(\frac{\partial F^k}{\partial \dot{q}^i}\right)\dot{\eta}^i\right] + O(\varepsilon^2)$$

y por lo tanto si suponemos que se cumple (3.1) la condición que debe de satisfacerse para que:

$$\frac{d^2\tilde{q}^i}{d\tilde{t}^2} = F^i(\tilde{q}^j, \dot{\tilde{q}}^j, \tilde{t})$$

es:

$$\frac{\overline{d^2\eta^i}}{dt} - \left(\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j}\right)\frac{\overline{d\eta^j}}{dt} - \frac{\partial F^i}{\partial q^j}\eta^j = 0 \qquad (3.37)$$

Esta es la ecuación de simetría de segundo orden.
Por un argumento análogo al dado en la sección 2 del capítulo anterior basta que consideremos transformaciones tales que: $\delta t = 0$.
Si tenemos transformaciones del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{q}^i = q^i + \varepsilon\, \eta^i(q^j, \dot{q}^j, t) \\ \tilde{t} = t + \varepsilon\, \eta^0(q^j, \dot{q}^j, t) \end{array} \right. \tag{3.38}$$

podemos construir una transformación equivalente $\tilde{\eta}$ que no cambie el tiempo definiendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\eta}^i = \eta^i - \dot{q}^i \eta^0 \\ \tilde{\eta}^0 = 0 \end{array} \right. \tag{3.39}$$

En ocasiones conviene sin embargo considerar directamente las transformaciones con $\delta t \neq 0$ en cuyo caso se puede demostrar que para (3.38) la ecuación de simetría es: (H 1984a)

$$\frac{\bar{d}^2\eta^i}{dt} - 2F^i\frac{\bar{d}\eta^0}{dt} - \dot{q}^i\frac{\bar{d}^2\eta^0}{dt} - \frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j}\left(\frac{\bar{d}\eta^j}{dt} - \dot{q}^j\frac{\bar{d}\eta^0}{dt}\right) - \frac{\partial F^i}{\partial q^j}\eta^j - \frac{\partial F^i}{\partial t}\eta^0 = 0 \tag{3.40}$$

Existe una estrecha relación entre las soluciones de la ecuación de simetría de segundo orden y las soluciones de la ecuación de simetría de primer orden expresada en el siguiente resultado:
Si η^i satisface (3.37) entonces γ^a definida como:

$$\gamma^a = \left\{ \begin{array}{ll} \eta^i & ;\ a \quad 1, \ldots, n \\ \dfrac{\bar{d}\eta^i}{dt} & ;\ a \quad n+1, \ldots, 2n \end{array} \right. \tag{3.41}$$

satisface (2.27).
Demostración:
la componente a<=n de (2.27) es:

$$\frac{\bar{d}\gamma^i}{dt} - \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^b}\right)\gamma^b = 0$$

de (3.2) y (3.3) tenemos que:

$$\frac{\bar{d}\gamma^i}{dt} - \gamma^{i+n} = 0$$

lo cual es cierto por definición de γ^a.

Por otro lado, la componente a>n de (2.27) es:

$$\frac{\bar{d}\gamma^{i+n}}{dt} - \left(\frac{\partial f^{i+n}}{\partial x^b}\right)\gamma^{b} = 0$$

usando (3.2),(3.3) y (3.41) se tiene;

$$\frac{\bar{d}^2\eta^i}{dt^2} - \left(\frac{\partial F^i}{\partial q^j}\right)\eta^j - \left(\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j}\right)\dot{\eta}^j = 0$$

pero esta ecuación se cumple debido a que hemos supuesto que η^i es una simetría, con lo cual hemos demostrado el resultado deseado.
A continuación discutiremos los diferentes métodos que hay para asociar constantes de movimiento a transformaciones de simetria de segundo orden.
Para ésto, serán de gran utilidad los resultados obtenidos en el capítulo 2 y la conexión entre el formalismo de primer orden y el formalismo de segundo orden que hemos estado haciendo evidente a lo largo de este capítulo.
Cuando tengamos un Lagrangiano de segundo orden el primer paso sera construir la matriz σ_{ab} correspondiente. Si el Lagrangiano no depende de las aceleraciones, σ_{ab} tendrá la forma (3.35) en tanto que si éste está escrito como combinación lineal de las ecuaciones de movimiento la matríz simpléctica vendrá dada por (3.27), (3.28) y (3.29).
A continuación, a partir de la simetría η^i, solución de la ecuación de simetría de segundo orden, construimos mediante (3.41) una solución γ^a de la ecuación de simetría de primer orden.
Con σ y γ calculamos el nuevo Lagrangiano $\mathcal{L}^*$ de acuerdo con (2.57) y a partir de este σ^* usando (2.52).
Si $\sigma^* = 0$ entonces, diremos que la simetría es Noetheriana y concluiremos que (2.32) es una constante de movimiento.
Por otro lado, si $\sigma^* \neq 0$ tenderemos una simetría no-Noetheriana y podremos construir varias constantes de movimiento usando el teorema de las trazas (2.60).
Ademas, tenemos de acuerdo con (2.103) que J es una constante y que si tenemos dos simetrías y una costante, el producto de la forma simpléctica por las dos simetrías es una constante asi como también lo es la derivada de Lie de cualquier constante a lo largo de una simetría debido a (2.104) y (2.105).

C A P I T U L O   I V :

M O V I M I E N T O   G E O D E S I C O   Y   L A G R A N G I A N O S

S-E Q U I V A L E N T E S

INTRODUCCION.-

En este capítulo aplicamos las ideas desarrolladas anteriormente a sistemas de ecuaciones que describen el movimiento a lo largo de geodésicas en un espacio de Riemann.

En la primera sección damos las definiciones y propiedades de los conceptos básicos de la Geometría Riemanniana :variedad diferenciable, tensor, métrica ,conexión afin y curvatura.

En la sección dos se deduce la ecuación de simetría de las geodésicas, la cual es una generalización de la ecuación de desviación geodésica y permite trabajar con transformaciones de simetría no puntuales,ésto es,que dependen de las velocidades.

La sección tres contiene la formulación Lagrangiana de la ecuación de geodésicas. Se obtiene primero el Lagrangiano usual independiente de las aceleraciones y luego, estableciendo una analogía con la ecuación de movimiento de la partícula libre, se deduce un Lagrangiano de segundo orden combinación lineal de las ecuaciones de movimiento a partir del cual se llega al Lagrangiano de primer orden correspondiente.

En la siguiente sección se encuentran algunas soluciones particulares de la ecuación de simetría. Se dan dos transformaciones que son simetrías para cualquier tipo de métrica y se estudian los vectores de Killing, las colineaciones afines y los vectores covariantemente constantes.

Por último, en la sección cinco asociamos las constantes de movimiento a las simetrías encontradas anteriormente usando las técnicas del capítulo dos.

1.- CONCEPTOS GENERALES DE GEOMETRIA RIEMANNIANA.-

A continuación haremos un breve resumen de los conceptos básico de la geometría riemanniana basandonos en las referencias: (Sp-1982),(S-1985),(MTW-1973).
Diremos que un conjunto es una variedad diferenciable n-dim sional si para todo punto $P \in M$ existe una vecindad $U \subset M$ tal que $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ donde ϕ es una funcion de M en $\mathbb{R}^n$.
Para cualquier $P \in M$, $\phi(P) \in \mathbb{R}^n$ y por lo tanto diremos que $x^\alpha(P)$ son las coordenadas de P y que (x^α) es un sistema de coordenadas de M.
Ademas, si una misma vecindad $B \subset M$ es mapeada por dos funciones diferentes ϕ, ψ, entonces debe cumplirse que el paso de $\phi(P)$ a $\psi(P)$ sea una transformación de coordenadas continua y diferenciable (ella y su inversa) para todo $p \in B$.
A cada punto de P de M le podemos asociar un espacio vectorial T_pM llamado espacio tangente y formado por el conjunto de vectores tangentes a M en P.
El espacio dual de T_pM lo denotaremos como T^*_pM y será el espacio vectorial formado por el cojunto de las 1-formas de M en P.
Si (x^α) es un sistema de coordenadas de M entonces los vectores tangentes a las curvas coordenadas $(\hat{e}^\alpha_p)$ son una base de T_pM y sus 1-formas duales $(\tilde{dx}^\alpha_p)$ una base de T^*_pM para todo $P \in M$.
De acuerdo con esto para cualesquiera vectores $\bar{V}$ y 1-formas $\tilde{\omega}$ tenemos:

$$\bar{V} = V^\alpha \hat{e}_\alpha \tag{4.1}$$

$$\tilde{\omega} = \omega_\alpha dx^\alpha \tag{4.2}$$

En todas las ecs. que siguen, los indices griegos tomaran valores de 1 a n y usaremos la convención de Einstein según la cual, cuando dos indices se repitan en una expresión estando uno arriba y el otro abajo se supondrá que se está sumando sobre dichos indices, por ejemplo:

$$V^\alpha W_\alpha \equiv \sum_{\alpha=1}^{n} V^\alpha W_\alpha$$

Un tensor de tipo (r,s), r-veces contravariante y s-veces covariante es una función multilineal del tipo:

$$(T^*_pM)^r \times (T_pM)^s \longmapsto \mathbb{R}$$

Mediante la operación de producto tensorial $\otimes$ podemos formar una base del conjunto de tensores del tipo (r,s) a partir de $(\hat{e}_\alpha)$ y $(\tilde{dx}^\alpha)$ como : (Sp 1982)

$$\{ \hat{e}_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{\alpha_r} \otimes \tilde{dx}^{\beta_1} \otimes \cdots \tilde{dx}^{\beta_s} \}$$

de acuerdo con ésto, un tensor arbitrario T se representará como:

$$T = T^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}{}_{\beta_1 \cdots \beta_s}\, \hat{e}_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{d}x^{\beta_s} \tag{4.3}$$

y diremos que:

$$T^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}{}_{\beta_1 \cdots \beta_s} = T(\tilde{d}x^{\alpha_1}, \ldots\ldots, \hat{e}_{\beta_s}) \tag{4.4}$$

son las componentes de T en las coordenadas (x^{α}).

A partir de un tensor T de tipo (Ø,r), la operación de simetrización define un tensor T^S de tipo (Ø,r) como:

$$T^S \equiv T_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)}\, dx^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\alpha_r} \tag{4.5}$$

$$T_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)} \equiv \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} T_{\alpha_{\sigma(1)} \cdots \alpha_{\sigma(r)}} \tag{4.6}$$

donde S es el conjunto de permutaciones de los numeros 1 a r.

Asi mismo, la operación de antisimetrización produce un tensor T^A de la forma:

$$T^A \equiv T_{[\alpha_1, \ldots, \alpha_r]}\, dx^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\alpha_r} \tag{4.7}$$

$$T_{[\alpha_1, \ldots, \alpha_r]} \equiv \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sgn}\sigma \; T_{\alpha_{\sigma(1)} \cdots \alpha_{\sigma(r)}} \tag{4.8}$$

donde $\operatorname{sgn}\sigma$ es el signo de la permutación que es + si σ es par y − si es impar .

De acuerdo con esto, diremos que T es simétrico si:

$$T = T^S \tag{4.9}$$

y que T es antisimétrico si

$$T = T^A \tag{4.10}$$

Si a cada punto P de M asociamos un tensor g de tipo (Ø,2) simetrico, no singular (det=Ø) y cuyas componentes sean funciones diferenciables, diremos que hemos asignado una metrica a M y llamaremos a g tensor metrico.

Si para todo V≠Ø, g(v,v)>Ø diremos que M es una variedad riemanniana, en tanto

que si g no es definido positivo para todo vector $\bar{V}$ diremos que M es una variedad pseudo-riemanniana. Todo lo que diremos a continuación será independiente de esta última propiedad de la métrica, por lo que los resultados que siguen son aplicables en ambos casos.
De acuerdo con (4.3) en un sistema de coordenadas (x^{α}) tenemos:

$$g = g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta} \qquad (4.11)$$

En todo punto $P_0 \in M$ podemos construir un sistema de coordenadas, llamado sistema localmente plano, tal que las componentes de g en dicho sistema satisfagan

$$g_{\alpha\beta}(P_0) = \eta_{\alpha\beta} \qquad \left.\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}\right|_{P_0} = 0 \qquad (4.12)$$

donde $\eta_{\alpha\beta}$ es una matríz diagonal cuyas entradas son +1 o -1.
Como la métrica es un tensor de tipo (0,2) entonces para cualquier vector $\bar{V}$, $g(\bar{V},\ )$ es un tensor (0,1) esto es una uno-forma y por lo tanto g mapea vectores en uno formas:

$$\bar{V} \longrightarrow g(\bar{V},\ ) \qquad (4.13)$$

En componentes dicho mapeo resulta:

$$V^{\alpha} \longrightarrow g_{\alpha\beta} V^{\alpha} \qquad (4.14)$$

Esta operación es uno a uno, debido a que g es no singular, y por lo tanto a toda uno-forma $\tilde{W}_{\alpha}$ le podemos asociar un vector de componentes W^{α} mediante:

$$W_{\alpha} \longrightarrow g^{\alpha\beta}\, W_{\alpha} \qquad (4.15)$$

donde $g^{\alpha\beta}$ es la matriz inversa de $g_{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\beta}\, g^{\beta\gamma} = \delta^{\gamma}_{\alpha} \qquad (4.16)$$

Estas dos operaciones se pueden extender a tensores de cualquier tipo. Por ejemplo, si T es (r,s) de componentes:

$$T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_s}$$

entonces:

$$g_{\gamma\alpha_i}\, T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_s} = T^{\alpha_1 \ldots\ \ldots \alpha_r}{}_{\gamma}{}_{\beta_1 \ldots \beta_s}$$

son las componentes de un tensor de tipo (r-1,s+1).

Además de la métrica, a toda variedad diferenciable le podemos asignar una conexión afín ∇ que es un mapeo que asocia a cualesquiera dos campos vectoriales $\bar{V}$ y $\bar{W}$ un campo vectorial $\bar{Z}$:

$$\bar{Z} = \nabla_{\bar{V}} \bar{W}$$

denominado derivada covariante de $\bar{W}$ a lo largo de $\bar{V}$ con las siguientes propiedades:

$$
\begin{aligned}
&\text{A)} \quad \nabla_{\bar{V}} (\bar{W}_1 + \bar{W}_2) = \nabla_{\bar{V}} \bar{W}_1 + \nabla_{\bar{V}} \bar{W}_2 \\
&\text{B)} \quad \nabla_{\bar{V}_1 + \bar{V}_2} \bar{W} = \nabla_{\bar{V}_1} \bar{W} + \nabla_{\bar{V}_2} \bar{W} \\
&\text{C)} \quad \nabla_{\varphi \bar{V}} \bar{W} = \varphi \nabla_{\bar{V}} \bar{W} \\
&\text{D)} \quad \nabla_{\bar{V}} \varphi \bar{W} = \varphi \nabla_{\bar{V}} \bar{W} + (\mathcal{L}_V \varphi) \bar{W}
\end{aligned}
\qquad (4.17)
$$

donde φ es una función escalar.
Si tenemos un sistema de coordenadas (x^α) entonces definimos los símbolos de Christoffel asociados a la conexión como las funciones gama tales que:

$$\nabla_{\hat{e}_\beta} \hat{e}_\gamma \equiv \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \hat{e}_\alpha \qquad (4.18)$$

Usando (4.17) y (4.18) tenemos que:

$$(\nabla_{\bar{V}} \bar{W})^\alpha = \left(\frac{\partial W^\alpha}{\partial x^\gamma}\right) V^\gamma + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} W^\beta V^\gamma \qquad (4.19)$$

En ocasiones conviene considerar la derivada covariante de un campo vectorial $\bar{W}$ a lo largo de una dirección arbitraria. El resultado de esta operación es un campo tensorial del tipo (1,1) denominado simplemente derivada covariante de $\bar{W}$. En un sistema de coordenadas (x^α), la derivada covariante de $\bar{W}$ es:

$$\nabla \bar{W} = W^\alpha{}_{;\beta}\, \hat{e}_\alpha \otimes dx^\beta \qquad (4.20)$$

donde:

$$W^{\alpha}{}_{;\beta} \equiv W^{\alpha}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} W^{\gamma} \qquad (4.21)$$

definiendo:

$$W^{\alpha}{}_{,\beta} \equiv \frac{\partial W^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \qquad (4.22)$$

De (4.19) y (4.21) tenemos entonces:

$$\left(\nabla_{V} W\right)^{\alpha} = W^{\alpha}{}_{;\beta} V^{\beta} \qquad (4.23)$$

Si $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son dos campos vectoriales cualesquiera, $\tilde{\omega}$ una uno-forma y $\bar{W}$ un vector, entonces:

$$\nabla_{\bar{V}} \left[\tilde{\omega}(\bar{W}) \right] = \left(\nabla_{\bar{V}} \tilde{\omega}\right)(\bar{W}) + \tilde{\omega}\left(\nabla_{\bar{V}} \bar{W}\right) \qquad (4.24)$$

$$\nabla_{\bar{V}} \left[\bar{A} \otimes \bar{B}\right] = \left(\nabla_{\bar{V}} \bar{A}\right) \otimes \bar{B} + \bar{A} \otimes \left(\nabla_{\bar{V}} \bar{B}\right) \qquad (4.25)$$

La ecuación (4.24) nos permite calcular la derivada covariante de las uno-formas duales a los vectores base:

$$\nabla_{\hat{e}_{\alpha}} \tilde{d}x^{\beta} = -\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma} \tilde{d}x^{\gamma} \qquad (4.26)$$

De (4.18),(4.26) y (4.25) podemos calcular la derivada covariante de un tensor arbitrario. Por ejemplo si tenemos un tensor de tipo (Ø,2) entonces:

$$\nabla_{\hat{e}_{\gamma}} T = \left(\nabla_{\hat{e}_{\gamma}} T_{\alpha\beta}\right) dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta} + T_{\alpha\beta} \left(\nabla_{\hat{e}_{\gamma}} dx^{\alpha}\right) \otimes dx^{\beta} +$$

$$+ T_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} \otimes \nabla_{\hat{e}_{\gamma}} dx^{\beta}$$

y por lo tanto:

$$\nabla_{\hat{e}_{\gamma}} T = T_{\alpha\beta;\gamma}\, dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta}$$

donde:

$$T_{\alpha\beta;\gamma} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - T_{\mu\beta} \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} - T_{\alpha\mu} \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} \qquad (4.27)$$

Para un tensor de tipo (Ø,1), ésto es, para una uno-forma, (4.24) lleva directamente a:

$$\omega_{\mu;\nu} = \omega_{\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,\omega_{\alpha} \qquad (4.28)$$

Asi mismo, para un tensor de tipo (2,0) tenemos:

$$K^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = K^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} + K^{\sigma\beta}\,\Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma} + K^{\alpha\sigma}\,\Gamma^{\beta}_{\gamma\sigma} \qquad (4.29)$$

La definición de derivada covariante dada en (4.5), es independiente de la métrica. Sin embargo, si tenemos un espacio con métrica conviene definir la derivada covariante pidiendo, ademas de (4.5) la condición de compatibilidad:

$$\nabla g = 0$$

Esta condición es muy importante porque, como veremos a continuación, determina unívocamente la conexión a partir de la métrica y ademas da una interpretación geométrica de la derivada covariante.
Usando (4.28), tenemos que la condición de compatibilidad implica:

$$g_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}\,g_{\mu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\,g_{\alpha\mu} = 0$$

De esta ecuación podemos despejar los símbolos de Christoffel obteniendo:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}\left(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}\right) \qquad (4.30)$$

Esto es, podemos calcular la derivada covariante a partir de la métrica y de sus primeras derivadas parciales.
Observemos que (4.30) implica que la conexión es simétrica:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$$

A partir de (4.30) tenemos la identidad:

$$\Gamma^{\beta}_{\gamma\alpha}\,P^{\gamma}P_{\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial X^{\alpha}}\right)P^{\mu}P^{\nu} \qquad (4.31)$$

A continuación, demostraremos un par de identidades que serán de gran utilidad en los cálculos que haremos mas adelante.
Primero observemos que debido a (4.28):

$$2\,\xi_{(\mu;\nu)} = \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} - 2\,\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,\xi_{\alpha}$$

y usando (4.15):

$$2\,\xi_{(\mu;\nu)} = \left\{ g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - 2\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\, g_{\sigma\alpha} \right\} \xi^{\alpha} + g_{\mu\alpha}\,\xi^{\alpha}{}_{,\nu} + g_{\nu\alpha}\,\xi^{\alpha}{}_{,\mu}$$

y de la identidad (4.30) concluimos que:

$$\xi_{(\mu;\nu)} = \frac{1}{2}\left\{ g_{\mu\nu,\alpha}\,\xi^{\alpha} + g_{\mu\alpha}\,\xi^{\alpha}{}_{,\nu} + g_{\nu\alpha}\,\xi^{\alpha}{}_{,\mu} \right\} \qquad (4.32)$$

multiplicando por la métrica la identidad (4.29) llegamos a:

$$K^{\alpha\beta;\gamma} = g^{\mu\gamma} K^{\alpha\beta}{}_{,\mu} + K^{\sigma\beta} g^{\mu\gamma} \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} + K^{\alpha\sigma} g^{\mu\gamma} \Gamma^{\beta}_{\sigma\mu}$$

y usando que:

$$g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} = -\left\{ g^{\alpha\sigma}\,\Gamma^{\beta}_{\sigma\gamma} + g^{\beta\sigma}\,\Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma} \right\}$$

que es una consecuencia del hecho de que la derivada covariante de g es cero, se tiene la identidad:

$$K^{(\alpha\beta;\gamma)} = g^{\sigma(\alpha} K^{\beta\gamma)}{}_{,\sigma} - K^{\sigma(\alpha} g^{\beta\gamma)}{}_{,\sigma} \qquad (4.33)\ .$$

Toda variedad diferenciable que posee una conexión tiene definido un operador de curvatura:

$$\mathcal{R} : T_pM \longrightarrow T_pM$$

$$\mathcal{R}(\bar{V},\bar{W}) = [\nabla_{\bar{V}}, \nabla_{\bar{W}}] - \nabla_{[\bar{V},\bar{W}]} \qquad (4.34)$$

A partir de $\mathcal{R}$ podemos definir el tensor de curvatura de Riemann de M que es un tensor de tipo (1,3) como:

$$R(\tilde{\alpha},\bar{C},\bar{A},\bar{B}) \equiv \tilde{\alpha}\left(\mathcal{R}(\bar{A},\bar{B})\,\bar{C}\right)$$

donde $\tilde{\alpha}$ es una uno-forma y A,B,C tres vectores.
En componentes tenemos:

$$\mathcal{R} = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\ \hat{e}_{\alpha} \otimes dx^{\beta} \otimes dx^{\gamma} \otimes dx^{\delta}$$

donde:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}_{\delta\beta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta,\delta} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\mu}\Gamma^{\mu}_{\delta\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\mu}\Gamma^{\mu}_{\gamma\beta} \tag{4.35}$$

son las componentes del tensor de Riemann que satisfacen las siguientes identidades:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} \quad ; \quad R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} \tag{4.36}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \tag{4.37}$$

De (4.34) y (4.35) notamos que el tensor de curvatura mide la no conmutatividad de las derivadas covariantes en un espacio curvo. Esto se muestra de manera más evidente en la siguiente identidad:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\,\hat{e}_{\alpha} = [\nabla_{\gamma}, \nabla_{\delta}]\,\hat{e}_{\beta} \tag{4.38}$$

La demostración de este resultado es inmediata si observamos que:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\,\hat{e}_{\alpha} = \mathcal{R}(\hat{e}_{\gamma}, \hat{e}_{\delta})\,\hat{e}_{\beta} \quad ; \quad \mathcal{R}(\hat{e}_{\gamma}, \hat{e}_{\delta}) = [\nabla_{\gamma}, \nabla_{\delta}]$$

donde hemos usado el hecho de que los vectores $\hat{e}_{\gamma}$ y $\hat{e}_{\delta}$ forman una base coordenada y por lo tanto conmutan.
Podemos generalizar esta ecuación diciendo que para cualquier vector $\vec{V}$:

$$[\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}]\,V^{\mu} = R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}\,V^{\nu} \tag{4.39}$$

A continuación demostraremos una fórmula análoga para tensores del tipo (2,0) y que usaremos en los capítulos siguientes:

$$[\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}]\,K^{\lambda\nu} = R_{\alpha\beta}{}^{\lambda}{}_{\mu}\,K^{\mu\nu} + R_{\alpha\beta}{}^{\nu}{}_{\mu}\,K^{\lambda\mu} \tag{4.40}$$

Demostración:
sea:

$$K = K^{\mu\nu}\,\hat{e}_{\mu} \otimes \hat{e}_{\nu}$$

tenemos entonces: $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] K = \{ [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] K^{\mu\nu} \} \hat{e}_\mu \otimes \hat{e}_\nu +$

$$+ K^{\mu\nu} \{ [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] \hat{e}_\mu \} \otimes \hat{e}_\nu + K^{\mu\nu} \hat{e}_\mu \otimes \{ [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] \hat{e}_\nu \}$$

debido a que las derivadas parciales conmutan tenemos que el operador $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$ actuando sobre las funciones escalares componentes $K^{\mu\nu}$ se anula.
Por otro lado usando (4.28) tenemos que:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] K = K^{\mu\nu} \{ R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} \hat{e}_\lambda \} \otimes \hat{e}_\nu + K^{\mu\nu} \hat{e}_\mu \otimes \{ R^\lambda{}_{\nu\alpha\beta} \hat{e}_\lambda \}$$

de donde: $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] K = \{ R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} K^{\mu\nu} +$

$$+ R^\nu{}_{\mu\alpha\beta} K^{\lambda\mu} \} \hat{e}_\lambda \otimes \hat{e}_\nu$$

y usando (4.36) tenemos el resultado deseado (4.40).
Por último, definiremos lo que es una geodesica en un espacio M con conexión afín.
En general una curva en M es un mapeo φ de $\mathbb{R}$ en M de la forma:

$$\varphi : s \longmapsto \varphi(s) = (x^1(s), \dots, x^n(s))$$

Diremos que φ es una geodésica de M si:

$$\nabla_{\bar{V}} \bar{V} = 0 \qquad (4.41)$$

donde $\bar{V}$ es el vector tangente a la curva:

$$\bar{V} = \frac{d\overline{\varphi}(s)}{ds} \qquad (4.42)$$

A partir de (4.39) tenemos que la ecuación (4.41) en componentes es:

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} V^\beta + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} V^\beta V^\gamma = 0$$

y como, debido a (4.42):

$$V^\alpha = \frac{dq^\alpha}{ds} \qquad q^\alpha \equiv x^\alpha \qquad (4.43)$$

podemos escribir (4.41) como:

$$\frac{d^2 q^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dq^\mu}{ds} \frac{dq^\nu}{ds} = 0 \qquad (4.44)$$

Es facil ver que (4.41) implica:

$$|\bar{V}| = \text{constante} \tag{4.45}$$

ya que;

$$\nabla_{\bar{V}} |\bar{V}|^2 = \nabla_{\bar{V}}\, g(\bar{V},\bar{V}) = (\nabla_{\bar{V}} g)(\bar{V},\bar{V}) + 2\, g(\nabla_{\bar{V}},\bar{V}) = 0$$

esta condición conduce a;

$$\sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{dq^\alpha}{ds}\frac{dq^\beta}{ds}} = A \tag{4.46}$$

donde A es una constante. Esta ecuación puede escribirse como:

$$\sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{dq^\alpha}{d\tau}\frac{dq^\beta}{d\tau}}\;\frac{d\tau}{ds} = A \tag{4.47}$$

donde τ es un parámetro arbitrario.
El término de la raiz multiplicado por $d\tau$ es la longitud de arco $d\sigma$ y por lo tanto, podemos concluir que:

$$ds = \frac{1}{A}\, d\sigma \tag{4.48}$$

de donde resulta que el parametro s de la geodésica es en general:

$$s = \alpha\sigma + \beta \tag{4.49}$$

donde α y β son constantes de movimiento.
Esto es, el parametro s que aparece en la ecuación (4.44) es la longitud de arco y por lo tanto no es independiente de las coordenadas.

2.-ECUACION DE SIMETRIA.-

En esta sección estudiaremos la ecuación que debe cumplir el campo vectorial generador de la transformación infinitesimal:

$$\tilde{q}^\alpha = q^\alpha + \varepsilon\, \xi^\alpha(q,\dot{q},t) \tag{4.50}$$

para ser una simetría de la ecuación de geodésicas.
Primero que nada, debemos recordar que el parametro s depende de las

coordenadas q^α a traves de la expresión:

$$ds = g_{\alpha\beta}\, dq^\alpha dq^\beta \tag{4.51}$$

debido lo cual, ante una transformación del tipo (4.50) s cambi

$$\tilde{s} = s + \varepsilon \xi^0 \tag{4.52}$$

De acuerdo con ésto, para encontrar la ecuación de simetría de las geodesicas debemos usar la ecuación de simetría para transformaciones no locales (3.40):

$$\frac{\bar{d}^2 \xi^\alpha}{ds^2} - 2F^\alpha \frac{\bar{d}\xi^0}{ds} - \dot{q}^\alpha \frac{\bar{d}^2\xi^0}{ds^2} - \frac{\partial F^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta}\left(\frac{\bar{d}\xi^\beta}{ds} - \dot{q}^\beta \frac{\bar{d}\xi^0}{ds}\right) - \frac{\partial F^\alpha}{\partial q^\beta}\xi^\beta - \frac{\partial F^\alpha}{\partial s}\xi^0 = 0$$

para la ecuación de geodésica:

$$F^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\, \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \tag{4.54}$$

y por lo tanto:

$$\left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta}\right) \dot{q}^\beta = 2F^\alpha \tag{4.55}$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 0 \tag{4.56}$$

de donde la ecuación de simetría se reduce a:

$$\frac{\bar{d}^2\xi^\alpha}{ds^2} - \dot{q}^\alpha \frac{\bar{d}^2\xi^0}{ds^2} - \frac{\partial F^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta}\frac{\bar{d}\xi^\beta}{ds} - \frac{\partial F^\alpha}{\partial q^\beta}\xi^\beta = 0 \tag{4.57}$$

definiendo:

$$A^\alpha \equiv \frac{\bar{d}}{ds}\frac{\bar{d}}{ds}\xi^\alpha - \frac{\partial F^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta}\frac{\bar{d}\xi^\beta}{ds} - \frac{\partial F^\alpha}{\partial q^\beta}\xi^\beta \tag{4.58}$$

$$B^{\alpha} = \dot{q}^{\alpha} \frac{\bar{d}}{ds} \frac{\bar{d}}{ds} \xi^{0} \qquad (4.59)$$

podemos escribir la ecuación de simetría como:

$$A^{\alpha} - B^{\alpha} = 0 \qquad (4.60)$$

A continuación encontraremos la expresión para A^{α} y B^{α}. Para esto, calcularemos primero el cambio de s:

$$\tilde{d}s^2 = g_{\alpha\beta}(\tilde{q})\, \tilde{d}q^{\alpha} \tilde{d}q^{\beta} = g_{\alpha\beta}\, dq^{\alpha} dq^{\beta} + \varepsilon \{ g_{\alpha\beta,\gamma} \xi^{\gamma} dq^{\alpha} dq^{\beta} +$$

$$+ g_{\gamma\beta} \xi^{\gamma}{}_{,\alpha}\, dq^{\alpha} dq^{\beta} + g_{\alpha\gamma} \xi^{\gamma}{}_{,\beta}\, dq^{\beta} dq^{\alpha} \} + \varepsilon \{$$

$$+ \left(\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \dot{q}^{\gamma}} \right) g_{\alpha\beta}\, dq^{\beta} d\dot{q}^{\gamma} + \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \dot{q}^{\mu}} g_{\alpha\beta}\, dq^{\alpha} d\dot{q}^{\mu} \} + 2\varepsilon \left(\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial s} \right) g_{\alpha\beta}\, dq^{\beta}$$

de donde:

$$\frac{\tilde{d}s^2}{ds^2} = 1 + \varepsilon \{ g_{\alpha\beta,\gamma} \xi^{\gamma} + g_{\gamma\beta} \xi^{\gamma}{}_{,\alpha} + g_{\alpha\gamma} \xi^{\gamma}{}_{,\beta} \} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} +$$

$$+ 2\varepsilon \left(\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \dot{q}^{\beta}} \right) g_{\alpha\mu}\, \dot{q}^{\mu} \ddot{q}^{\beta} + 2\varepsilon \left(\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial s} \right) g_{\alpha\mu}\, q^{\mu}$$

usando (2.65) y las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d\tilde{s}^2}{ds^2} = 1 + \varepsilon \left(\mathcal{L}_{\xi} g \right)_{\alpha\beta} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} - 2\varepsilon \left(\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \dot{q}^{\beta}} \right) \left(\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} \right) \dot{q}^{\alpha} + 2\varepsilon \left(\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial s} \right) \dot{q}_{\alpha} \qquad (4.61)$$

que podemos escribir como:

$$\frac{d\tilde{s}^2}{ds^2} = 1 + 2\varepsilon \left(\frac{\bar{D} \xi^{\alpha}}{ds} \right) \dot{q}_{\alpha} \qquad (4.62)$$

usando la definición:

(4.63) $$\frac{\bar{D}\xi^\alpha}{ds} \equiv \xi^\alpha{}_{;\mu}\,\dot{q}^\mu - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \dot{q}^\mu}\left(\Gamma^\mu_{\nu\gamma}\,\dot{q}^\nu \dot{q}^\gamma\right) + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial s}$$

$$\frac{d\tilde{s}}{ds} = \sqrt{1 + 2\varepsilon\left(\frac{\bar{D}\xi^\alpha}{ds}\right)\dot{q}_\alpha} = 1 + \varepsilon\left(\frac{D\xi^\alpha}{ds}\right)\dot{q}_\alpha + O(\varepsilon^2)$$

de donde a orden ε:

$$\frac{d\tilde{s}}{ds} = 1 + \varepsilon\left(\frac{\bar{D}\xi^\alpha}{ds}\right)\dot{q}_\alpha \qquad (4.64)$$

y por lo tanto:

$$\varepsilon\,\frac{\bar{d}\xi^0}{ds} = \frac{d\tilde{s}}{ds} - 1 = \varepsilon\left(\frac{\bar{D}\xi^\alpha}{ds}\right)\dot{q}_\alpha$$

esto es:

$$\frac{\bar{d}}{ds}\frac{\bar{d}}{ds}\xi^0 = \frac{\bar{d}}{ds}\left[\left(\frac{\bar{D}\xi^\alpha}{ds}\right)\dot{q}_\alpha\right]$$

de donde:

$$B^\alpha = \left(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{\bar{D}\xi^\mu}{ds}\right)\dot{q}_\mu\,\dot{q}^\alpha \qquad (4.65)$$

A continuación calcularemos A^α:
sustituyendo (4.54) en (4.58) tenemos:

$$\frac{\bar{d}^2}{ds}\xi^\alpha + 2\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\,\dot{q}^\gamma\,\frac{\bar{d}\xi^\beta}{ds} + \left(\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}}{\partial q^\beta}\right)\dot{q}^\gamma\dot{q}^\delta\xi^\beta = A^\alpha \qquad (4.66)$$

y como:

$$\frac{\overline{D}\xi^\alpha}{ds} = \frac{\overline{d}\xi^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\dot{q}^\mu\xi^\nu \tag{4.67}$$

tenemos:

$$\frac{\overline{d}}{ds}\frac{\overline{d}\xi^\alpha}{ds} = \frac{\overline{D}}{ds}\left(\frac{\overline{D}\xi^\alpha}{ds}\right) - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta\left(\frac{\overline{D}\xi^\gamma}{ds}\right) - \frac{\overline{d}}{ds}\left(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta\xi^\gamma\right)$$

sustituyendo en (4.66):

$$\frac{\overline{D}}{ds}\left(\frac{\overline{D}}{ds}\xi^\alpha\right) - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta\left(\frac{\overline{D}\xi^\gamma}{ds}\right) - \frac{\overline{d}}{ds}\left(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta\xi^\gamma\right) +$$

$$+ 2\,\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{q}^\gamma\left(\frac{\overline{d}\xi^\beta}{ds}\right) + \left(\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}}{\partial q^\beta}\right)\dot{q}^\gamma\dot{q}^\delta\xi^\beta = A^\alpha$$

reagrupando los términos de esta ecuación y usando (4.67) y (3.7) llegamos a:

$$\left\{\frac{\overline{D}}{ds}\left(\frac{\overline{D}\xi^\alpha}{ds}\right) + \left(\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}}{\partial q^\beta}\right)\dot{q}^\gamma\dot{q}^\delta\xi^\beta\right\} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta\left(\frac{\overline{d}\xi^\gamma}{ds} + \Gamma^\gamma_{\mu\nu}\dot{q}^\mu\xi^\nu\right) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial q^\delta}\left(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta\xi^\gamma\right)\dot{q}^\delta - \frac{\partial}{\partial\dot{q}^\delta}\left(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta\xi^\gamma\right)\frac{\overline{d}\dot{q}^\delta}{ds} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial s}\left(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta\xi^\gamma\right) + 2\,\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{q}^\gamma\left(\frac{\overline{d}\xi^\beta}{ds}\right) = A^\alpha$$

de donde: $$\frac{\overline{D}}{ds}\left(\frac{\overline{D}\xi^\alpha}{ds}\right) + \left(\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}}{\partial q^\beta}\right)\dot{q}^\gamma\dot{q}^\delta\xi^\beta - \left(\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial q^\delta}\right)\dot{q}^\beta\dot{q}^\delta\xi^\gamma -$$

$$-\Gamma^\alpha_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\delta\gamma}\dot{q}^\beta\dot{q}^\delta\xi^\gamma + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{q}^\gamma\left(\frac{\overline{d}\xi^\beta}{ds} - \frac{\partial\xi^\beta}{\partial q^\delta}\dot{q}^\delta -\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\dot{q}^\delta}\frac{\overline{d}\dot{q}^\delta}{ds} - \frac{\partial\xi^\beta}{\partial s}\right) - \Gamma^\alpha_{\delta\gamma}\xi^\gamma\frac{\overline{d}\dot{q}^\delta}{ds} = A^\alpha$$

simplificando y factorizando tenemos finalmente:

$$\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{\bar{D}\xi^\alpha}{ds}\right)+\left[\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}}{\partial q^\beta}-\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}}{\partial q^\delta}+\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma_{\gamma\delta}-\right.$$

$$\left.-\Gamma^\sigma_{\gamma\beta}\Gamma^\alpha_{\sigma\delta}\right]\dot{q}^\gamma\dot{q}^\delta\xi^\beta=A^\alpha \tag{4.68}$$

y de la definición (4.35) del tensor de curvatura concluimos que la ecuación de simetría es, sustituyendo (4.65) y (4.68) en (4.62), :

$$\left[\frac{\bar{D}}{ds}\frac{\bar{D}}{ds}\xi^\mu-R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\xi^\gamma\right]-\left[\frac{\bar{D}}{ds}\frac{\bar{D}}{ds}\xi^\alpha\right]q_\alpha q^\mu=0 \tag{4.69}$$

Esta ecuación difiere de la ecuación de simetría:

$$\frac{\bar{D}}{ds}\frac{\bar{D}}{ds}\xi^\mu-R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\xi^\gamma=0 \tag{4.70}$$

que aparece en (H-N-P+ 1986) debido al término éxtra (4.65).
No obstante, es facil probar que ambas ecuaciones son equivalentes cuando la simetría en cuestión se una función arbitraria en la coordenadas q^α pero un polinomio de grado n en las velocidades. Para ver ésto supongamos que tenemos un vector ξ^μ que satisface (4.70), entonces multiplicando por $\dot{q}_\mu\dot{q}^\alpha$:

$$\left(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{\bar{D}}{ds}\xi^\mu\right)\dot{q}_\mu\dot{q}^\alpha-R^\mu{}_{\lambda\beta\gamma}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\beta\xi^\gamma\dot{q}_\mu\dot{q}^\alpha=0$$

usando las propiedades de antisimetría del tensor de Riemann tenemos que B =0 y por lo tanto se satisface (4.69).
Por otro lado, si ξ^μ satisface (4.69) y es un polinomio de grado n en las velocidades entoces el término A^α será de grado n+2 en $\dot{q}^\alpha$ en tanto que B será de grado n+4 lo cual implica que cada uno de los términos debe ser cero separadamente y por lo tanto $A^\alpha=0$ y se tiene que (4.70) se cumple.
Observemos que si la simetría no depende de las velocidades la ecuación de simetría resulta:

$$\left(\xi^{\mu}{}_{;\alpha;\beta} - R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}\, \xi^{\gamma} \right) \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} = 0 \qquad (4.71)$$

que es la ecuación de desviación geodesica de la cual (4.69) es una generalización.

3.-FORMULACION LAGRANGIANA DE LA ECUACION DE GEODESICAS.-

Para estudiar las propiedades de simetría de la ecuación de geodésicas y las constantes de movimiento correspondientes aplicando las técnicas desarrollados en los capítulos 2 y 3, necesitamos primero que nada encontrar un Lagrangiano para (4.44) escrito como combinación lineal de las ecuaciones de movimiento. La ecuación de geodesicas posée un Lagrangiano independiente de las aceleraciones del tipo:

$$\tilde{L} = \tfrac{1}{2}\, g_{\alpha\beta}\, \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} \qquad (4.72)$$

debido a que:

$$E_{\gamma} \tilde{L} = \frac{d}{ds}\left(g_{\alpha\gamma}\, \dot{q}^{\alpha} \right) - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta,\gamma}\, \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} =$$

$$= g_{\alpha\gamma}\, \ddot{q}^{\alpha} + \tfrac{1}{2}\left(g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\gamma} \right) \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} =$$

$$= g_{\mu\gamma} \left\{ \ddot{q}^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\, \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} \right\}$$

Observemos que en un sistema localmente plano, (4.72) toma la forma:

$$\tilde{L} = \tfrac{1}{2}\, \eta_{\alpha\beta}\, \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} \qquad (4.73)$$

que es el Lagrangiano de una particula libre.
A continuación buscaremos una función μ_{α} tal que:

$$L = \mu_\alpha \left(\ddot{q}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma \right) \tag{4.74}$$

sea un Lagrangiano (dependiente de las aceleraciones) del sistema (4.44). (H-N_P+ 1986).
La ecuación de movimiento de una partícula libre es:

$$\frac{d^2 q^\alpha}{ds^2} = 0 \tag{4.75}$$

Un conjunto de 2n constantes de movimiento independientes para este sistema es:

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= \dot{q}^1 \\ C^{(2)} &= q^1 - \dot{q}^1 s \\ &\vdots \\ C^{(2n-1)} &= \dot{q}^n \\ C^{(2n)} &= q^n - \dot{q}^n s \end{aligned} \tag{4.76}$$

De acuerdo con lo dicho en la primera sección del capitulo 3,

$$L = \mu_\alpha \ddot{q}^\alpha \tag{4.77}$$

es un Lagrangiano de (4.75) si:

$$\mu_\alpha = C^{(1)} \frac{\partial C^{(2)}}{\partial \dot{q}^\alpha} + \ldots + C^{(2n-1)} \frac{\partial C^{(2n)}}{\partial \dot{q}^\alpha} \tag{4.78}$$

De (4.76) y (4.77) tenemos que:

$$\mu_\alpha = -s \, \dot{q}_\alpha \tag{4.79}$$

y por lo tanto:

$$L = -s \, \dot{q}_\alpha \ddot{q}^\alpha \tag{4.80}$$

es un Lagrangiano, combinación lineal de las ecuaciones de movimiento para la particula libre.
La ecuación (4.75) es igual a la ecuación de las geodesicas en un sistema de coordenadas localmente plano, y por lo tanto, podemos decir que (4.80) es igual

al Lagrangiano (4.74) escrito en dichas coordenadas. Si consideramos un sistema de coordenadas arbitrario, tenemos que sustituir la derivadas ordinarias por derivadas covariantes e introducir explícitamente la métrica, quedando L escrito de la forma:

$$L = -S g_{\alpha\beta} \dot{q}^{\alpha} \frac{D\dot{q}^{\beta}}{dS} \tag{4.81}$$

De lo anterior intuimos que:

$$L = -S g_{\alpha\beta} \dot{q}^{\alpha} \left(\frac{d^2 q^{\alpha}}{dS^2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} \right) \tag{4.82}$$

es un Lagrangiano de (4.44) que es una combinación lineal de las ecuaciones de movimiento con:

$$\mu_{\alpha} = -S g_{\alpha\beta} \dot{q}^{\beta} \tag{4.83}$$

El sistema (4.44) se puede escribir como un sistema de primer orden definiendo x^a, f^a mediante (3.2) y (3.3), ésto es:

$$x^a = \begin{cases} q^{\alpha} \\ \dot{q}^{\alpha} = p^{\alpha} \end{cases} \qquad f^a = \begin{cases} p^{\alpha} & a = 1, .., n \\ -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu} & a = n+1, .., 2n \end{cases} \tag{4.84}$$

El sistema equivalente de primer orden es:

$$\begin{cases} \dfrac{dq^{\alpha}}{dS} = p^{\alpha} \\ \dfrac{dp^{\alpha}}{dS} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu} \end{cases} \tag{4.85}$$

Usando (3.25), podemos encontrar un Lagrangiano de primer orden del tipo:

$$L = l_a (\dot{x}^a - f^a) \tag{4.86}$$

para (4.85) a partir de (4.83), observando que:

$$l_{\alpha} = -\left(\frac{d\mu_{\alpha}}{dS} + \mu_{\beta} \frac{\partial F^{\beta}}{\partial p^{\alpha}} \right) \tag{4.87}$$

$$\frac{d\mu_\alpha}{ds} = -\frac{d(s\, g_{\alpha\beta} p^\beta)}{ds} = -s\, g_{\alpha\gamma,\beta}\, p^\gamma p^\beta + s\, g_{\alpha\beta}\, \Gamma^\beta_{\mu\nu}\, p^\mu p^\nu - \tag{4.88}$$

$$- g_{\alpha\gamma}\, p^\gamma$$

$$\mu_\beta \cdot \frac{\partial F^\beta}{\partial p^\alpha} = (-s\, g_{\beta\mu} p^\mu) \frac{\partial}{\partial p^\alpha}\left(-\Gamma^\beta_{\mu\nu}\, p^\mu p^\nu\right) = 2s\, \Gamma^\beta_{\gamma\alpha}\, p^\gamma g_{\beta\nu}\, p^\nu \tag{4.89}$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (4.87) que da el Lagrangiano de primer orden correspondiente tenemos que:

$$\ell_\alpha = s\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta}\right) p^\gamma p^\beta - s\, g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^\beta_{\mu\nu}\, p^\mu p^\nu\right) - s\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha}\right) + g_{\alpha\beta}\, p^\beta \tag{4.90}$$

haciendo uso de la identidad (4.30) concluimos:

$$\ell_\alpha = -\frac{s}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha}\right) p^\gamma p^\beta + g_{\alpha\gamma}\, p^\gamma \tag{4.91}$$

y por otro lado de $\ell_{\alpha+4} = \mu_\alpha$ llegamos a:

$$\ell_{\alpha+4} = -s\, g_{\alpha\beta}\, p^\beta \tag{4.92}$$

De (4.91) y (4.92) podemos decir, usando la terminología de la sección 5 del capitulo 2 que la uno-forma:

$$\tilde{\ell} = -\frac{s}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha}\right) p^\gamma p^\beta dq^\alpha + g_{\alpha\gamma}\, p^\gamma dq^\alpha - s\, g_{\alpha\beta}\, p^\beta dp^\alpha \tag{4.93}$$

es un Lagrangiano de tipo (4.86) para el sistema (4.85).
Observemos que (4.93) se puede escribir como:

$$\tilde{\ell} = \left[g_{\alpha\beta}\, p^\beta\right] dq^\alpha - d\left[\frac{1}{2} s\, g_{\mu\nu}\, p^\mu p^\nu\right] \tag{4.94}$$

A partir de (4.94) se puede calcular la forma simpléctica asociada haciendo uso de (2.81):

$$\tilde{\sigma} = g_{\alpha\beta}\, dq^\alpha \wedge dp^\beta + \left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta}\right) p^\gamma\, dq^\alpha \wedge dq^\beta \tag{4.95}$$

Esta dos-forma tiene componentes σ_{ab} definidas como:

$$\tilde{\sigma} = \sum_{a<b=1}^{n} \sigma_{ab}\, dx^a \wedge dx^b$$

y de acuerdo con (4.95) tenemos que las componentes de $\tilde{\sigma}$ se pueden representar mediante la siguiente matriz antisimétrica:

$$\sigma_{ab} = \begin{pmatrix} [g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha}]\, p^{\gamma} & g_{\alpha\beta} \\ g_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.96)$$

4.-SOLUCIONES PARTICULARES DE LA ECUACION DE SIMETRIA.-

A continuación, buscaremos algunas soluciones particulares de la ecuación (4.7Ø) y calcularemos las constantes de movimiento asociadas. (H-N-P+ 1986).

Caso1.- Soluciones del tipo:

$$\xi^{\mu} = \lambda(q,p,s)\, p^{\mu} \qquad (4.97)$$

Sustituyendo (4.97) en (4.7Ø) tenemos que:

$$\frac{\bar{D}}{ds}\frac{\bar{D}}{ds} \lambda p^{\mu} - R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}\, p^{\alpha} p^{\beta} \lambda p^{\gamma} = 0$$

usando (4.36):

$$\frac{\bar{D}}{ds}\frac{\bar{D}}{ds}(\lambda p^{\mu}) = 0$$

ebido a lo cual concluimos que (4.97) sera una simetría si la función λ satisface:

$$\frac{\overline{d}}{ds}\frac{\overline{d}}{ds}\lambda = 0 \tag{4.98}$$

las soluciones de ésta ecuación son de la forma:

$$\lambda = C_1 s - C_2 \tag{4.99}$$

donde C_1, C_2 son constantes de movimiento:

$$\frac{\overline{D}}{ds} C_i = 0 \tag{4.100}$$

dos casos particulares de (4.99) son:

$$\left.\begin{matrix} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{matrix}\right\} \tag{4.101}$$

$$\left.\begin{matrix} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{matrix}\right\} \tag{4.102}$$

Como las funciones numéricas son constantes de movimiento para cualquier tipo de geodésica, concluímos que:

$$\xi_1{}^{\mu} = p^{\mu} \tag{4.103}$$

$$\xi_2{}^{\mu} = s\, p^{\mu} \tag{4.104}$$

son simetrías de la ecuación de geodésicas en cualquier tipo de métrica.

Caso 2.- Soluciones del tipo:

$$\xi^{\mu} = \xi^{\mu}(q) \tag{4.105}$$

En este caso la ecuación de simetría es la ecuación de desviación geodésica (4.71). Esta ecuación la podemos escribir de la forma:

$$M^{\mu}{}_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} p^{\beta} = 0 \tag{4.106}$$

como P^{α} es un vector arbitrario (4.106) se debe cumplir para:

$$p^{\alpha} = \delta^{\alpha}{}_{j} \tag{4.107}$$

donde j es un índice arbitrario, ésto es, (4.107) afirma que el vector P^{α}

tiene todas sus componentes iguales a cero menos la componente j que vale uno. Sustituyendo (4.107) en (4.106) tenemos:

$$M^{\mu}{}_{\alpha\beta}\,\delta^{\alpha}_{j}\,\delta^{\beta}_{j} = M^{\mu}{}_{jj} = 0 \qquad (4.108)$$

Si suponemos ahora que:

$$p^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{i} + \delta^{\alpha}{}_{j} \qquad i \neq j \qquad (4.109)$$

ésto es, que el vector P^{α} tenga todas sus componentes iguales a cero con excepción de las componentes i y j que valen uno, tendremos que:

$$M^{\mu}{}_{\alpha\beta}\,\delta^{\alpha}_{i}\,\delta^{\beta}_{i} + M^{\mu}{}_{\alpha\beta}\,\delta^{\alpha}_{i}\,\delta^{\beta}{}_{j} + M^{\mu}{}_{\alpha\beta}\,\delta^{\alpha}_{j}\,\delta^{\beta}{}_{i} + M^{\mu}{}_{\alpha\beta}\,\delta^{\alpha}_{j}\,\delta^{\beta}_{j} = 0$$

y usando (4.109):

$$M^{\mu}{}_{ij} + M^{\mu}{}_{ji} = 0 \qquad (4.110)$$

Como los indices i, j se eligieron arbitrariamente, podemos concluir de (4.108) y (4.110) que (4.106) implica que:

$$M^{\mu}{}_{(\alpha\beta)} = 0 \qquad (4.111)$$

Debido a ésto, la ecuación de simetría para el caso (4.105) es:

$$\xi^{\mu}{}_{;\alpha\beta} + \xi^{\mu}{}_{;\beta\alpha} - R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}\,\xi^{\gamma} - R^{\mu}{}_{\beta\alpha\gamma}\,\xi^{\gamma} = 0$$

Multiplicando por el tensor métrico y usando (4.36) tenemos:

$$\xi_{\mu;\alpha\beta} + \xi_{\mu;\beta\alpha} + R_{\beta\gamma\alpha\mu}\,\xi^{\gamma} + R_{\alpha\gamma\beta\mu}\,\xi^{\gamma} = 0$$

Debido a (4.39) podemos escribir esta ecuación como:

$$\xi_{\mu;\alpha\beta} + \xi_{\mu;\beta\alpha} + [\nabla_{\alpha}, \nabla_{\mu}]\,\xi_{\beta} + [\nabla_{\beta}, \nabla_{\mu}]\,\xi_{\alpha} = 0$$

reagrupando términos llegamos a:

tiene todas sus componentes iguales a cero menos la componente j que vale uno. Sustituyendo (4.107) en (4.106) tenemos:

$$M^{\mu}{}_{\alpha\beta}\,\delta^{\alpha}_{j}\,\delta^{\beta}_{j} = M^{\mu}{}_{jj} = 0 \qquad (4.108)$$

Si suponemos ahora que:

$$P^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{i} + \delta^{\alpha}{}_{j} \qquad i \neq j \qquad (4.109)$$

ésto es, que el vector P^{α} tenga todas sus componentes iguales a cero con excepción de las componentes i y j que valen uno, tendremos que:

$$M^{\mu}{}_{\alpha\beta}\,\delta^{\alpha}_{i}\,\delta^{\beta}_{i} + M^{\mu}{}_{\alpha\beta}\,\delta^{\alpha}_{i}\,\delta^{\beta}{}_{j} + M^{\mu}{}_{\alpha\beta}\,\delta^{\alpha}_{j}\,\delta^{\beta}_{i} + M^{\mu}{}_{\alpha\beta}\,\delta^{\alpha}_{j}\,\delta^{\beta}_{j} = 0$$

y usando (4.109):

$$M^{\mu}{}_{ij} + M^{\mu}{}_{ji} = 0 \qquad (4.110)$$

Como los indices i, j se eligieron arbitrariamente, podemos concluir de (4.108) y (4.110) que (4.106) implica que:

$$M^{\mu}{}_{(\alpha\beta)} = 0 \qquad (4.111)$$

Debido a ésto, la ecuación de simetría para el caso (4.105) es:

$$\xi^{\mu}{}_{;\alpha\beta} + \xi^{\mu}{}_{;\beta\alpha} - R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}\,\xi^{\gamma} - R^{\mu}{}_{\beta\alpha\gamma}\,\xi^{\gamma} = 0$$

Multiplicando por el tensor métrico y usando (4.36) tenemos:

$$\xi_{\mu;\alpha\beta} + \xi_{\mu;\beta\alpha} + R_{\beta\gamma\alpha\mu}\,\xi^{\gamma} + R_{\alpha\gamma\beta\mu}\,\xi^{\gamma} = 0$$

Debido a (4.39) podemos escribir esta ecuación como:

$$\xi_{\mu;\alpha\beta} + \xi_{\mu;\beta\alpha} + [\nabla_{\alpha}, \nabla_{\mu}]\,\xi_{\beta} + [\nabla_{\beta}, \nabla_{\mu}]\,\xi_{\alpha} = 0$$

reagrupando términos llegamos a:

$$\xi_{(\mu;\beta);\alpha} + \xi_{(\mu;\alpha);\beta} - \xi_{(\alpha;\beta);\mu} = 0 \qquad (4.112)$$

Como los indices α, β, μ son índices libres tenemos que (4.112) implica:

$$\xi_{(\alpha;\beta);\mu} + \xi_{(\alpha;\mu);\beta} - \xi_{(\mu;\beta);\alpha} = 0$$

sumando estas dos ecuaciones concluimos que (4.105) sera una simetría si:

$$\xi_{(\alpha;\beta);\gamma} = 0 \qquad (4.113)$$

En general, toda simetría $\xi_4^{\mu}(q)$ que satisface (4.113) se denomina colineacion afin.
Un caso particular, ocurre cuando ξ^{μ} cumple (4.113) debido a que satisface una ecuacion mas fuerte:

$$\xi_{(\alpha;\beta)} = 0 \qquad (4.114)$$

en este caso diremos que $\xi_3^{\mu}(q)$ es un vector de Killing.

Caso3.- Soluciones del tipo:

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}\, \xi^{\gamma} = 0 \qquad (4.115)$$

Sustituyendo (4.115) en (4.70) tenemos que ξ^{μ} debe de satisfacer:

$$\frac{\overline{D}}{dS}\frac{\overline{D}}{dS}\, \xi^{\mu} = 0 \qquad (4.116)$$

UNa solución particular de esta ecuación es $\xi_5^{\mu}(q)$ tal que:

$$\xi_{5\,\mu;\alpha} = 0 \qquad (4.117)$$

Todo vector ξ^{μ}_5 que satisfaga (4.117) lo denominaremos vector covariantemente constante.

Observemos que debido a (4.71) esta última ecuación implica a (5.115).

5.-CONSTANTES DE MOVIMIENTO ASOCIADAS.-

En esta sección asociaremos las constantes de movimiento correspondientes a las simetrías particulares encontradas anteriormente. (H-N-P+ 1986)

A) Simetrías del tipo:

$$\xi_1^{\,\mu} = p^{\mu} \qquad (4.103)$$

Esta simetría tiene asociada una simetría en 2n dimensiones, solución de la ecuación de simetría de primer orden de acuerdo con (3.41):

$$\eta_1^{\,a} = \begin{pmatrix} p^{\mu} \\ -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} p^{\beta} \end{pmatrix} = f^{\,a} \qquad (4.118)$$

A partir de esta simetría podemos formar un nuevo Lagrangiano, usando (2.51);

$$\tilde{\ell}_1^{\,*} = g_{\alpha\beta}\, dq^{\alpha} \wedge dp^{\beta}(\eta_1) - \left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q^{\beta}}\right) p^{\gamma} dq^{\alpha} \wedge dq^{\beta}(\eta_1) \qquad (4.119)$$

$$= (g_{\alpha\beta} p^{\alpha}) dp^{\beta} + \left\{ g_{\alpha\beta}\, \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial q^{\nu}} \right\} p^{\mu} p^{\nu}\, dq^{\beta}$$

que podemos escribir, usando (4.30) como:

$$\tilde{\ell}_1^{\,*} = (g_{\alpha\beta} p^{\alpha}) dp^{\beta} - \left[\frac{1}{2}\, \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^{\beta}} \right] p^{\mu} p^{\nu} dq^{\beta} \qquad (4.120)$$

de donde:

$$\tilde{\ell}_1^{\,*} = d\left(\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, p^{\mu} p^{\nu}\right) \qquad (4.121)$$

y por lo tanto:

$$\tilde{\sigma}_1^{\,*} = 0 \qquad (4.122)$$

demostrando ésto que la trasformación es Noetheriana.
Asociada a la simetría tenemos la constante J (2.103) cuyo valor es:

$$J_1 = \tilde{\ell}\,(\eta_1)$$

usando la identidad (4.31) podemos escribir lo anterior como;

$$J_1 = g_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} p^{\beta} \tag{4.123}$$

Por otro lado, el teorema de Noether afirma que:

$$K_1 = \ell_a \eta_1^{a} + \varphi_1 \tag{4.124}$$

es una constante donde:

$$\delta L_1 = -\varepsilon \frac{d\varphi_1}{dt} \tag{4.125}$$

de (2.50) tenemos que:

$$\delta L_1 = \varepsilon \left[\frac{d}{ds} \tilde{\ell}(\vec{\eta}) - \tilde{\sigma}(\eta)(\dot{x} - \bar{F}) \right] \tag{4.126}$$

$$\tilde{\sigma}(\eta_1)(\dot{x}) = g_{\alpha\beta} p^{\alpha} \dot{p}^{\beta} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\beta} p^{\mu} p^{\nu} \dot{q}^{\beta} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu} \right) \tag{4.127}$$

Sustituyendo (4.123) y (4.127) en (4.126) usando la propiedad de antisimetría de σ llegamos a:

$$\delta L = -\varepsilon \left[\frac{d}{ds} (g_{\alpha\beta} p^{\alpha} p^{\beta}) - \frac{d}{ds} (1/2\, g_{\alpha\beta} p^{\alpha} p^{\beta}) \right]$$

de donde:

$$\varphi_1 = \frac{-1}{2} g_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} p^{\beta} \tag{4.128}$$

y por lo tanto, el teorema de Noether lleva a la constante:

$$K_1 = \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} p^{\beta} \tag{4.129}$$

B) Simetrías del tipo:

$$\ddot{\xi}_2{}^{\mu} = s\, p^{\mu} \tag{4.104}$$

Podemos escribir la simetría de primer orden asociada como:

$$\eta_2 = s f + g \tag{4.130}$$

donde f está definido en (4.84) y el vector $\bar{g}$ es:

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ p^{\alpha} \end{pmatrix} \tag{4.131}$$

La transformación (4.130) genera una nueva forma simpléctica mediante (2.98):

usando las propiedades (2.68), (2.69):

$$\tilde{\sigma}_2^* = \mathcal{L}_{\bar{g}}\, \tilde{\sigma}$$

y de (2.74) y (2.82):

$$\tilde{\sigma}_2{}^* = d\,[\,\tilde{\sigma}(\bar{g})\,] \tag{4.132}$$

sustituyendo (4.131) en (4.95) tenemos:

$$\tilde{\sigma}(\bar{\eta}_2) = -g_{\alpha\beta}\, p^\beta\, dq^\alpha$$

y por lo tanto:

$$\tilde{\sigma}^*{}_2 = \tilde{\sigma} \tag{4.133}$$

de donde concluimos que (4.104) es una simetría no-Noetheriana esto, es de s-equivalencia.
La matríz Λ (2.56) es en este caso la identidad:

$$\Lambda_{2\,a}{}^{b} = \delta_a{}^{b} \tag{4.134}$$

y por lo tanto, el teorema de las trazas conduce únicamente a constantes numéricas.
Por otro lado la constante J tiene un valor igual a cero:

$$J_2 = s\,\tilde{\ell}(f) + \tilde{\ell}(g) = 0 \tag{4.135}$$

C) Simetrías del tipo;

$$\xi^\mu = \xi^\mu(q) \tag{4.105}$$

En general una simetría independiente de P tiene asociada una simetría en 2n dimensiones del tipo:

$$\bar{\eta} = \begin{pmatrix} \xi^\mu \\ \xi^\mu{}_{,\alpha}\, p^\alpha \end{pmatrix} \tag{4.136}$$

A continuación calcularemos $\tilde{\sigma}$ para una simetría de este tipo:
sustituyendo (4.136) en (4.95) tenemos:

$$\tilde{\sigma}(\eta) = \{-g_{\alpha\beta}\, \xi^\beta{}_{,\gamma}\, p^\gamma + g_{\gamma\beta,\alpha}\, p^\gamma \xi^\beta - g_{\gamma\alpha,\beta}\, p^\gamma \xi^\beta\}\, dq^\alpha +$$
$$+ \{\, g_{\alpha\beta}\, \xi^\alpha \}\, dp^\beta$$

$$\tilde{\sigma}(\eta) = -\{ g_{\alpha\beta}\, \xi^{\beta}{}_{,\gamma} + g_{\gamma\alpha,\beta}\, \xi^{\beta} + g_{\beta\gamma}\, \xi^{\beta}{}_{,\alpha} \}\, p^{\gamma} dq^{\alpha} +$$

$$+ \{ g_{\beta\gamma}\, \xi^{\beta}{}_{,\alpha} + g_{\gamma\beta,\alpha}\, \xi^{\beta} \}\, p^{\gamma} dq^{\alpha} + \{ g_{\alpha\beta}\, \xi^{\alpha} \}\, dp^{\beta}$$

el primer sumando de esta ecuación se puede escribir de una forma más manejable observando que, debido a (4.32):

$$2\, \xi_{(\mu;\nu)} = g_{\mu\nu;\alpha}\, \xi^{\alpha} + g_{\mu\alpha}\, \xi^{\alpha}{}_{,\nu} + g_{\nu\alpha}\, \xi^{\alpha}{}_{,\mu} \qquad (4.137)$$

usando esta identidad y definiendo:

$$h_{\alpha\beta} \equiv \xi_{(\alpha;\beta)} \qquad (4.138)$$

tenemos entonces que:

$$\tilde{\sigma}(\bar{\eta}) = -[2\, h_{\alpha\beta}\, p^{\beta}]\, dq^{\alpha} + d\,[g_{\alpha\beta}\, \xi^{\alpha} p^{\beta}] \qquad (4.139)$$

y por lo tanto:

$$\tilde{\sigma}^{*} = [-2\, h_{\alpha\beta}]\, dq^{\beta} \wedge dp^{\alpha} + [-2\, h_{\alpha\beta,\gamma}]\, dq^{\beta} \wedge dq^{\gamma} \qquad (4.140)$$

Podemos considerar entonces que la forma simpléctica nueva se obtiene a partir de $\tilde{\sigma}$ reemplazando la métrica $g_{\alpha\beta}$ por una nueva "métrica" dada por : $h_{\alpha\beta}$,
La transformación (4.105) puede ser de dos tipos según vimos en la sección anterior. Un tipo corresponde a los llamados vectores de Killing que, debido a que satisfacen (4.114) cumplen la condición:

$$\sigma_3{}^{*} = 0 \qquad (4.141)$$

de donde, concluimos que los vectores de Killing generan simetrías Noetherianas.
El teorema de Noether afirma entonces que (4.124) es una constante de movimiento.
Para realizar los cálculos que siguen, será conveniente usar un sistema de coordenadas localmente plano en el cual debido a (4.12) tenemos que las primeras derivadas parciales de la métrica y por lo tanto los símbolos de Christoffel se anulan en un punto.
Debemos observar sin embargo que el uso de sistemas de coordenadas localmente plano no está plenamente justificado ya que no hemos probado que el formalismo de Lagrangianos de primer orden para la ecuación de geodesicas sea covariante. De hecho la misma matríz simpléctica (4.96) contiene términos que no son covariantes. Hecha esta aclaración debemos considerar el uso de sistemas localmente planos como un camino para llegar rápidamente a resultados cuya

validez es necesaria probar unas obtenidos.
Habiendo aclarado ésto tenemos, sustituyendo (4.137) en (4.93) que:

$$\mathcal{L}(\eta_3) = g_{\alpha\beta} P^\beta \xi^\alpha - s g_{\alpha\beta} P^\beta \xi^\alpha{}_{,\mu} P^\mu$$

y como en el sistema localmente plano:

$$g_{\alpha\beta} P^\beta \xi^\alpha{}_{,\mu} P^\mu = \xi_{\alpha,\mu} P^\alpha P^\mu = \xi_{(\alpha;\beta)} P^\alpha P^\beta = 0$$

concluimos que la constante J vale;

$$J_3 = g_{\alpha\beta} P^\alpha \xi^\beta \tag{4.142}$$

Tomando la derivada covariante de esta ecuación a lo largo de la geodósica y usando la ecuación de simetría es inmediato mostrar que esta cantidad es efectivamente una constante.
Calcularemos ahora la constante asociada al teorema de Noether.
Para esto observemos que de (4.139) y (4.114):

$$\delta L_3 = \varepsilon \left[\frac{d}{ds} J_3 - \tilde{\sigma}(\bar{\eta}_3)(\dot{\bar{x}} - \bar{P}) \right] \quad ; \quad \tilde{\sigma}(\bar{\eta}_3) = d\,(g_{\alpha\beta} \xi^\alpha P^\beta)$$

de donde:

$$\tilde{\sigma}(\bar{\eta}_3)(\dot{\bar{x}} - \bar{P}) = g_{\alpha\beta} \xi^\alpha dP^\beta(\dot{\bar{x}}) - g_{\alpha\beta} \xi^\alpha dP^\beta(\bar{P}) = \frac{d}{ds}(g_{\alpha\beta} \xi^\alpha P^\beta)$$

y por lo tanto de (4.142) y (4.126) concluímos que:

$$\delta L_3 = 0 \tag{4.144}$$

y por lo tanto la constante asociada con el teorema de Noether es:

$$K_3 = J_3 \tag{4.145}$$

El segundo caso de transformaciones del tipo (4.105) corresponde a las colineaciones afines que satisfacen la ecuación (4.113). Observemos que los vectores de Killing también satisfacen esta ecuación, sin embargo, restringiremos el término de colineación afín a las transformaciones que cumplan (4.113) y que no satisfagan (4.114).
Debido a ésto, y a (4.140) tenemos que para las colineaciones afines:

$$\tilde{\sigma}_4^* = 0$$

y por lo tanto ,dichas transformaciones son de s-equivalencia.
La constante de movimiento J es, de acuerdo con (4.193) y (4.136):

$$J = \xi_\alpha P^\alpha - s\, h_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta \tag{4.146}$$

La representación matricial de las formas $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\sigma}^*$ es de acuerdo con (4.96):

$$\sigma_{ab} = \begin{pmatrix} \Phi_{\alpha\beta} & g_{\alpha\beta} \\ -g_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma^*_{ab} = \begin{pmatrix} 2\Psi_{\alpha\beta} & -2h_{\alpha\beta} \\ 2h_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.147}$$

donde:

$$\Phi_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha}) P^{\gamma} ; \quad \Psi_{\alpha\beta} = (h_{\beta\gamma,\alpha} - h_{\alpha\gamma,\beta}) P^{\gamma} \tag{4.148}$$

debido a esto, la matriz Λ será:

$$\Lambda_{4\,a}{}^{b} = 2 \begin{pmatrix} -h_{\alpha}{}^{\beta} & \Omega_{\alpha}{}^{\beta} \\ 0 & -h_{\alpha}{}^{\beta} \end{pmatrix} \tag{4.149}$$

donde la matriz $\Omega_{\alpha}{}^{\beta}$ es de acuerdo con (3.48) la derivada con barra de $-h_{\alpha}{}^{\beta}$
De acuerdo con ésto, tenemos que el teorema de las trazas afirma que:

$$\begin{aligned} h^{\alpha}{}_{\alpha} &= cte \\ h^{\alpha}{}_{\beta}\, h^{\beta}{}_{\alpha} &= cte \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.150}$$

y todas las potencias sucesivas de la matriz .
Observemos sin embargo que todas las constantes asociadas son numéricas ya que h no depende de P ni de s.
De acuerdo con lo discutido en la sección 6 del capitulo 2, podemos construir las siguientes constantes de movimiento:

$$\begin{aligned} M_1 &= \tilde{\sigma}(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_4) \qquad & M_1^* &= \tilde{\sigma}^*(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_4) \\ M_2 &= \tilde{\sigma}(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_4) \qquad & M_2^* &= \tilde{\sigma}^*(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_4) \end{aligned} \tag{4.151}$$

donde η_1 y η_2 son las simetrías 2n-dimensionales asociadas a las simetrías P^{α} y sP^{α} respectivamente.
En un sistema localmente geodésico, tenemos que:

$$\tilde{\sigma} = g_{\alpha\beta}\, dq^{\alpha} \wedge dp^{\beta} \;;\quad \tilde{\sigma}^{*} = -2h_{\alpha\beta}\, dq^{\alpha} \wedge dp^{\beta}$$

$$\bar{\eta}_1 = \begin{pmatrix} p^{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\eta}_2 = \begin{pmatrix} s\,p^{\alpha} \\ p^{\alpha} \end{pmatrix} \quad \bar{\eta}_4 = \begin{pmatrix} \xi^{\alpha} \\ \xi^{\alpha}{}_{,\beta}\, p^{\beta} \end{pmatrix} \tag{4.152}$$

de donde:

$$\tilde{\sigma}(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_4) = g_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} \xi^{\beta}_{4,\mu}\, p^{\mu} = \xi_{4\beta,\mu}\, p^{\beta} p^{\mu}$$

y por lo tanto:

$$M_1 = h_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} p^{\beta} \tag{4.153}$$

$$\tilde{\sigma}(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_4) = g_{\alpha\beta}\, dq^{\alpha} \wedge dp^{\beta} (\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_4)$$

$$= g_{\alpha\beta}\, s\, p^{\alpha} \xi_4{}^{\beta}{}_{,\mu}\, p^{\mu} - g_{\alpha\beta}\, p^{\beta} \xi_4{}^{\alpha}$$

$$M_2 = s\, h_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} p^{\beta} - \xi_4{}^{\alpha} p_{\alpha} \tag{4.154}$$

$$\tilde{\sigma}^{*}(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_4) = -2h_{\alpha\beta}\, dq^{\alpha} \wedge dp^{\beta} (\bar{\eta}_1 ; \bar{\eta}_4) = -2\, h_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} \xi^{\beta}{}_{,\mu}\, p^{\mu}$$

$$M_1{}^{*} = 2h_{\alpha\beta}\, \xi^{\beta}{}_{;\gamma}\, p^{\alpha} p^{\gamma} \tag{4.155}$$

por último:

$$\tilde{\sigma}^{*}(\eta_2, \eta_4) = -2\, h_{\alpha\beta}\, s\, p^{\alpha} \xi^{\beta}{}_{,\mu}\, p^{\mu} = -2h_{\alpha\beta}\, \xi^{\alpha} p^{\beta}$$

$$M_2{}^{*} = 2h_{\alpha\beta}\, \xi^{\alpha} p^{\beta} - 2s h_{\alpha\beta}\, \xi^{\beta}{}_{;\gamma}\, p^{\alpha} p^{\gamma} \tag{4.156}$$

Tomando la derivada covariante de M1 y M2 es inmediato demostrar que son efectivamente constantes de movimiento. Probar que M2* es constante de movimiento sabiendo de antemano que M1* lo es, resulta inmediato. Sin embargo la demostración de que M1* es constante de movimiento es un poco laboriosa lo cual muestra la potencia del método para obtener constantes de movimiento a partir de simetrías no-NOetherianas en el sentido de que dicha constante no se puede obtener "trivialmente" a partir de la ecuacion de simetría (4.115)

La demostración de que M1* es una constante de movimiento hace uso de la identidad:

$$[\nabla_\kappa, \nabla_\beta]\, h_{\mu\nu} = R^{\sigma}{}_{\mu\kappa\beta}\, h_{\sigma\nu} + R^{\sigma}{}_{\nu\kappa\beta}\, h_{\sigma\mu}$$

que es consecuencia directa de (4.40).

Si usamos la ecuación que satisface $h_{\alpha\beta}$ (4.113) tenemos entonces la relación:

$$R^{\beta}{}_{\gamma\nu\lambda}\, h_{\beta\alpha} + R^{\beta}{}_{\alpha\nu\lambda}\, h_{\beta\gamma} = 0$$

tomando entonces la derivada covariante de M1* a lo largo de la geodésica y usando la ecuación de simetría (4.111):

$$C_{;\nu} P^{\nu} = h_{\alpha\beta}\, \xi^{\beta}{}_{;\gamma;\nu}\, P^{\alpha} P^{\gamma} P^{\nu}$$

$$\xi^{\beta}{}_{;\gamma;\nu} - R^{\beta}{}_{\gamma\nu\lambda}\, \xi^{\lambda} = 0$$

$$C_{;\nu} P^{\nu} = h_{\alpha\beta}\, R^{\beta}{}_{\gamma\nu\lambda}\, P^{\alpha} P^{\gamma} P^{\nu} \xi^{\lambda}$$

esto último lo podemos escribir como:

$$C_{;\nu} P^{\nu} = 1/2 \left[R^{\beta}{}_{\gamma\nu\lambda}\, h_{\alpha\beta} + R^{\beta}{}_{\alpha\nu\lambda}\, h_{\beta\gamma} \right] P^{\alpha} P^{\gamma} P^{\nu} \xi^{\lambda}$$

y de la ecuación que satisface $h_{\alpha\beta}$ deducida anteriormente tenemos efectivante que M1* es una constante de movimiento.

D.- Simetrías del tipo:

$$\xi_5{}^{\mu}(q)_{;\nu} = 0 \qquad (4.117)$$

Esta simetría es un caso particular de los vectores de Killing y por lo tanto es una simetría Noetheriana teniendo como constante asociada la función:

$$K_5 = J_5 = g_{\alpha\beta}\, P^{\alpha} \xi^{\beta} \qquad (4.157)$$

de acuerdo con (4.142) y (4.145).

En la tabla que a continuación mostramos están resumidas todas las constantes de movimiento deducidas anteriormente para simetrías del tipo : $\xi^{\mu}(q)$.

Por último, observemos que si tenemos una colineación afín $\xi^{\alpha}(q)$ entonces:

$$\theta^{\alpha} = h^{\alpha}{}_{\beta}\, \xi^{\beta} \tag{4.158}$$

es también una colineación afín. (H-N-P-+ 1986)
Esto se sigue directamente de la forma de la matríz Λ en (4.149) y del hecho de que dicha matriz es un mapeador de simetría (ver sección 7 capitulo II).
Debido a lo anterior:

$$p^{\alpha}\, h_{\alpha\beta}\, \theta^{\beta}{}_{;\gamma}\, p^{\gamma}$$

$$(S/M)\, p^{\alpha}\, h_{\alpha\beta}\, \theta^{\beta}{}_{;\gamma}\, p^{\gamma} - \theta^{\alpha}\, h_{\alpha\beta}\, p^{\beta}$$

son constantes de movimiento, que podemos escribir usando (4.158) como:

$$p^{\alpha}\, h_{\alpha\beta}\, (h^{\beta}{}_{\mu}\, \xi^{\mu})_{;\gamma}\, p^{\gamma}$$

$$(S/M)\, p^{\alpha}\, h_{\alpha\beta}\, (h^{\beta}{}_{\mu}\, \xi^{\mu})_{;\gamma}\, p^{\gamma} - h^{\alpha}{}_{\beta}\, \xi^{\beta}\, h_{\alpha\gamma}\, p^{\gamma}$$

y de (4.113):

$$p^{\alpha}\, (h_{\alpha\beta}\, h^{\beta}{}_{\mu})\, \xi^{\mu}{}_{;\gamma}\, p^{\gamma}$$

$$(S/M)\, p^{\alpha}\, (h_{\alpha\beta}\, h^{\beta}{}_{\mu})\, \xi^{\mu}{}_{;\gamma}\, p^{\gamma} - (h^{\alpha}{}_{\beta}\, h_{\alpha\gamma})\, \xi^{\beta}\, p^{\gamma}$$

iterando este procedimiento obtenemos el siguiente conjunto de constantes de movimiento (H-N-P-+ 1986):

$$N_{2j} = p^{\alpha}\, (h^{j})_{\alpha\beta}\, \xi^{\beta}{}_{;\gamma}\, p^{\gamma} \tag{4.159}$$

$$N_{2j+2} = (S/M)\, p^{\alpha} (h^{j})_{\alpha\beta}\, \xi^{\beta}{}_{;\gamma}\, p^{\gamma} - \xi^{\alpha}\, (h^{j})_{\alpha\beta}\, p^{\beta}$$

TABLA IV-1

SIMETRIAS PUNTUALES DE GEODESICAS Y CONSTANTES DE MOVIMIENTO ASOCIADAS

(H-N-P+ 1986)

NOMBRE	ECUACION	TIPO	CONSTANTE
VECTOR DE KILLING	$h_{\alpha\beta}=0$	NOETHERIANA	$K = J = \xi^{\alpha} p_{\alpha}$ (P1)
COLINEACION AFIN.	$h_{\alpha\beta;\gamma}=0$	S-EQUIVALENCIA	$J = \xi^{\alpha} p_{\alpha} - s\, h_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} p^{\beta}$ (P2) $I_k = \mathrm{tr}_3 \, (h^{\alpha}{}_{\beta})^{k}$, $k=1,\dots,n$ (P3) $M_1 = h_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} p^{\beta}$ (P4) $M_2 = s\, h_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} p^{\beta} - \xi^{\alpha} p_{\alpha}$ (P5) $M_1^{*} = 2 h_{\alpha\beta}\, \xi^{\beta}{}_{;\gamma}\, p^{\alpha} p^{\gamma}$ (P6) $M_2^{*} = 2 h_{\alpha\beta}\, \xi^{\alpha} p^{\beta} - 2s\, h_{\alpha\beta}\, \xi^{\beta}{}_{;\gamma}\, p^{\alpha} p^{\gamma}$ (P7) $N_{2j+1} = p^{\alpha} (h^{j})_{\alpha\beta}\, \xi^{\beta}{}_{;\gamma}\, p^{\gamma}$ (P8) $N_{2j+2} = s\, p^{\alpha} (h^{j})_{\alpha\beta}\, \xi^{\beta}{}_{;\gamma}\, p^{\gamma} - \xi^{\alpha} (h^{j})_{\alpha\beta}\, p^{\beta}$ (P9)

CAPITULO V:

MAPEADORES ESPECIALES DE SIMETRIA EN MOVIMIENTO GEODESICO

INTRODUCCION.-

En este capítulo desarrollaremos un conjunto de técnicas nuevas apropiadas para el estudio de las simetrías de las ecuaciones de geodésicas.

Dichas técnicas nos permitirán dar un tratamiento unificado de las simetrías de las geodésicas, deducir los resultados conocidos sobre simetrías y constantes de movimiento y obtener nuevos resultados.

Dentro del conjunto de transformaciones puntuales que podemos hacer en un espacio de Riemann estan las simetrías del espacio que tienen la propiedad de mantener invariante alguna de las propiedades geométricas de éste, por ejemplo: su métrica, su conexión o su tensor de curvatura. Solamente una parte de estas transformaciones mapean geodésicas en geodésicas. La pregunta que surge entonces es: ¿ Cual es la relación que existe entre las simetrías del espacio y las simetrías de las geodésicas de dicho espacio ?

La respuesta a esta interrogante conduce de manera natural a la idea de los mapeadores especiales de simetría y debido a ésto, dedicaremos las secciones 1 y 2 del presente capítulo a la discusión de las simetrías de un espacio de Riemann y de las geodésicas de dicho espacio.

En la sección tres, encontramos la ecuación diferencial que define la condición que debe de satisfacer un tensor de tipo (1,1) para ser un mapeador especial de simetría. Dicha ecuación se obtiene a partir de la ecuación de simetria de las geodésicas deducida en el capitulo cuatro.

Se muestra ademas que los tensores de Killing son casos particulares de los mapeadores especiales de simetría y que la ecuación que define a estos últimos es una generalización natural de la ecuación tensorial de Killing.

El concepto de los MES para ecuaciones de geodésicas y la ecuación diferencial que satisfacen dichos tensores son dos resultados nuevos que como veremos en este capítulo son de gran utilidad para el estudio de simetrías.

La asociación de las constantes de movimiento a un mapeador especial de simetría usando los métodos de los capítulos anteriores es el tema de la sección cuatro.

En las secciones cinco y seis usamos los resultados de las secciones tres y cuatro para dar un tratamiento unificado de las simetrías del espacio discutidas en la primera sección. Se establece la conexión entre MES y simetrías del espacio desde dos puntos de vista. Primero mostramos como asociar un MES y por lo tanto una simetría lineal en la velocidad de la ecuación de geodésicas a cada simetría del espacio. La simetría asi asociada puede ser en general Noetheriana o de s-equivalencia.

Por otro lado llegamos a las simetrías del espacio mediante la busqueda de soluciones particulares de la ecuación de los MES.

Esta relación entre simetrías del espacio y simetrías de las geodésicas es un resultado nuevo y es una de las consecuencias mas importantes a que conduce el concepto de MES.

En la última sección del presente capítulo encuentran las constantes de movimiento asociadas a simetrías del espacio de manera sistemática reproduciendose los reultados encontrados en (K-L-1981)y obteniendo en ocaciones constantes de movimiento nuevas.

1.-SIMETRIAS DE UN ESPACIO DE RIEMANN.-

En esta sección damos la definición de las simetrías del espacio que consideraremos mas adelante.
Presentamos las ideas geométricas subyacentes a este tipo de transformaciones y deducimos la ecuación diferencial que deben de satisfacer los campos vectoriales η generadores de dichas simetrías.
Para ésto nos basamos en las referencias: (K-L 1969) ,(Y 1957) y (K-L 1981).

(1) Movimientos [M]:

La distancia entre dos puntos P y Q infinitesimalmente próximos de coordenadas (x^α_P) y (x^α_Q) en un espacio de Riemann es ds donde:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha dx^\beta \tag{5.1}$$

$$dx^\alpha = x^\alpha_Q - x^\alpha_P \tag{5.2}$$

ante una transformación de tipo:

$$\tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \varepsilon \eta^\alpha \tag{5.3}$$

los puntos P y Q son mapeados en $\tilde{P}$ y $\tilde{Q}$ de coordenadas ($\tilde{x}^\alpha_P$) y ($\tilde{x}^\alpha_Q$).
La distacia de separación entre estos nuevos puntos está dado mediante:

$$d\tilde{s}^2 = g_{\alpha\beta}(\tilde{x})\, d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta \tag{5.4}$$

donde:

$$d\tilde{x}^\alpha = \tilde{x}^\alpha_Q - \tilde{x}^\alpha_P \tag{5.5}$$

diremos que (5.3) es un movimiento si:

$$ds^2 = d\tilde{s}^2 \tag{5.6}$$

Esto es, los movimientos son aquellas transformaciones que preservan las relaciones de distancia en un espacio de Riemann y por esta razón tambien son denominados isometrías.
Los generadores de de los movimientos, ésto es los vectores η^α de (5.3) se denominan vectores de Killing.
A continuación, desarrollaremos la condición (5.6) para obtener la ecuación diferencial que debe satisfacer η para que (5.3) sea un movimiento.
Sustituyendo (5.1) y (5.4) en (5.6):

$$g_{\alpha\beta}(x)\,dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}(\tilde{x})\,d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta \tag{5.7}$$

de (5.3) tenemos que a orden ε :

$$g_{\alpha\beta}(\tilde{x}) = g_{\alpha\beta}(x) + \varepsilon\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right)\eta^\gamma \tag{5.8}$$

el vector $d\tilde{x}^\alpha$ se transforma debido a (5.3) como:

$$d\tilde{x}^\alpha = \left(\frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta}\right) dx^\beta \tag{5.9}$$

ésto es:

$$d\tilde{x}^\alpha = dx^\alpha + \varepsilon\left(\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial x^\beta}\right) dx^\beta \tag{5.1Ø}$$

sustituyendo (5.8) y (5.1Ø) en (5.7) tenemos: (5. 11)

$$g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta = (g_{\alpha\beta} + \varepsilon\, g_{\alpha\beta,\gamma}\eta^\gamma)(dx^\alpha + \varepsilon\eta^\alpha{}_{,\beta}dx^\beta)(dx^\beta + \varepsilon\eta^\beta{}_{,\gamma}dx^\gamma)$$

desarrollando esta expresión despreciando términos de orden ε^2 :

$$g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta + \varepsilon\{ g_{\alpha\beta,\gamma}\eta^\gamma dx^\alpha dx^\beta + g_{\alpha\beta}\,\eta^\alpha{}_{,\gamma} dx^\gamma dx^\beta + g_{\alpha\beta}\,\eta^\beta{}_{,\gamma} dx^\gamma dx^\alpha\} \tag{5.12}$$

de donde concluimos que la condición que debe cumplirse es:

$$\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right)\eta^\gamma + \left(\frac{\partial\eta^\gamma}{\partial x^\alpha}\right) g_{\gamma\beta} + \left(\frac{\partial\eta^\mu}{\partial x^\beta}\right) g_{\alpha\mu} = 0 \tag{5.13}$$

Esta ecuación se denomina ecuación de Killing.
De la definición de derivada de Lie (2.65) tenemos entonces que la condición para que (5.3) sea un movimiento es:

$$\mathcal{L}_{\bar{\eta}}\, g_{\alpha\beta} = 0 \tag{5.14}$$

Así mismo, usando (4.137) podemos escribir la ecuación de Killing de manera equivalente como:

$$\xi_{(\alpha;\beta)} = 0 \tag{5.15}$$

Usando la definición (4.138) de la matriz $h_{\alpha\beta}$ tenemos:

$$h_{\alpha\beta} = 0 \tag{5.16}$$

Observemos que de (5.12) se tiene que:

$$d\tilde{s}^2 = ds^2 + \varepsilon \left(\mathcal{L}_{\eta}\, g \right)_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{5.17}$$

de donde sacando raíz cuadrada se tiene que a orden ε :

$$d\tilde{s} = ds + \frac{\varepsilon}{2} \left(\mathcal{L}_{\eta}\, g \right)_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{5.18}$$

ésto es, la derivada de Lie del tensor métrico da el cambio a orden ε de la distancia entre dos puntos infinitesimalmente próximos antes y después de la transformación.

(2) Colineaciones afines. [AC]

En un espacio de Riemann, decimos que un vector $V^\alpha{}_P$ en un punto P de coordenadas ($x^\alpha{}_P$) es paralelo a un vector $V^\alpha{}_Q$ en un punto Q infinitesimalmente proximo a P de coordenadas ($x^\alpha{}_Q$) si:

$$D\, V^\alpha = 0 \tag{5.19}$$

donde D representa el cambio diferencial covariante de V^α definido como:

$$DV^\alpha \equiv dV^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\, V^\mu dx^\nu \tag{5.20}$$

donde:

$$dV^{\mu} = V^{\mu}_{Q} - V^{\mu}_{P}$$ (5.21)

$$dx^{\nu} = x^{\nu}_{Q} - x^{\nu}_{P}$$ (5.22)

Ante una transformación de coordenadas de~~d~~el tipo (5.3) los vectores V^{α}_{P} y V^{α}_{Q} son mapeados en $\tilde{V}^{\alpha}_{P}$ y $\tilde{V}^{\alpha}_{Q}$.
Si inicialmente V^{α}_{P} y V^{α}_{Q} eran paralelos y después de la transformación siguen siendo paralelos, diremos que la transformación es una colineación afín.
De acuerdo con lo anterior tenemos que la condición que se debe de cumplir es que:

$$d\tilde{V}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}(\tilde{x})\,\tilde{V}^{\mu}\,d\tilde{x}^{\nu} = 0$$ (5.23)

donde:

$$d\tilde{x}^{\nu} = \tilde{x}_{Q} - \tilde{x}_{P}$$ (5.24)

Esto es, las colineaciones afines son transformacione4s que preservan las relaciones de paralelismo en un espacio de Riemann.
A continuación, desarrollaremos la condición (5.23) :
Debido a (5.1Ø) que es la ley de transformación de un vector ante (5.3) tenemos que:

$$\tilde{V}^{\alpha} = V^{\alpha} + \varepsilon\left(\frac{\partial\eta^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right)V^{\beta}$$ (5.25)

$$d\tilde{x}^{\nu} = dx^{\nu} + \varepsilon\left(\frac{\partial\eta^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\right)dx^{\beta}$$ (5.26)

de donde:

$$d\tilde{V}^{\alpha} = dV^{\alpha} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(\frac{\partial\eta^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right)dx^{\gamma}V^{\beta} + \varepsilon\left(\frac{\partial\eta^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right)dV^{\beta}$$ (5.27)

usando (5.2Ø) tenemos entonces que:

$$d\tilde{V}^{\alpha} = dV^{\alpha} + \varepsilon\,\eta^{\alpha}_{,\beta\gamma}V^{\beta}dx^{\gamma} + \varepsilon\,\eta^{\alpha}_{,\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}V^{\mu}dx^{\nu}$$ (5.28)

por otro lado: $$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \varepsilon\, \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\gamma}\, \eta^{\gamma}$$

y usando (5.25) y (5.29) tenemos:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}(\tilde{x})\, \tilde{V}^{\mu} d\tilde{x}^{\nu} = \{ \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \varepsilon\, \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\gamma}\, \eta^{\gamma} \} \{ V^{\mu} + \varepsilon\, \eta^{\mu}{}_{,\lambda} V^{\lambda} \} \times$$
$$\times \{ dx^{\nu} + \varepsilon\, \eta^{\nu}{}_{,\sigma}\, dx^{\sigma} \} \qquad (5.29)$$

De (5.28) y (5.29) tenemos entonces que la condición (5.23) se escribe como:

$$dV^{\alpha} + \varepsilon\, (\eta^{\alpha}{}_{,\mu\nu} - \eta^{\alpha}{}_{,\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})\, dx^{\nu} V^{\mu} + (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \varepsilon\, \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\gamma}\, \eta^{\gamma}) \times$$
$$\times (V^{\mu} + \varepsilon\, \eta^{\mu}{}_{,\lambda} V^{\lambda})(dx^{\nu} + \varepsilon\, \eta^{\nu}{}_{,\lambda}\, dx^{\lambda}) = 0$$

desarrollando esta ecuación despreciando términos en ε^2 :

$$dV^{\alpha} + \varepsilon\, (\eta^{\alpha}{}_{,\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\, \eta^{\alpha}{}_{,\lambda})\, V^{\mu} dx^{\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} V^{\mu} dx^{\nu} +$$
$$+ \varepsilon\, (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\, \eta^{\mu}{}_{,\lambda} V^{\lambda} dx^{\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} V^{\mu} \eta^{\nu}{}_{,\lambda}\, dx^{\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\gamma}\, \eta^{\gamma} V^{\mu} dx^{\nu}) = 0$$

que podemos escribir como:

$$dV^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} V^{\mu} dx^{\nu} + \varepsilon \{ \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\gamma}\, \eta^{\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}\, \eta^{\lambda}{}_{,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\, \eta^{\lambda}{}_{,\nu} + \eta^{\alpha}{}_{,\mu\nu} +$$
$$+ \eta^{\alpha}{}_{,\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \}\, V^{\mu} dx^{\nu} = 0 \qquad (5.30)$$

y como se cumple (5.20) tenemos que la condición para que (5.3) sea una colineación afín es que :

$$\eta^{\alpha}{}_{,\mu\nu} - \eta^{\alpha}{}_{,\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\lambda}\, \eta^{\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}\, \eta^{\lambda}{}_{,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\, \eta^{\lambda}{}_{,\nu} = 0 \qquad (5.31)$$

de donde, si definimos:

$$\mathcal{L}_{\eta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \equiv \eta^{\alpha}{}_{,\mu\nu} - \eta^{\alpha}{}_{,\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\lambda}\, \eta^{\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}\, \eta^{\lambda}{}_{,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\, \eta^{\lambda}{}_{,\nu} \qquad (5.32)$$

entonces la condición resulta ser:

$$\mathcal{L}_{\bar{\eta}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0 \tag{5.33}$$

Observemos que de (5.23) ,(5.30) y (5.32) se tiene:

$$D\tilde{V}^{\alpha} = DV^{\alpha} + \varepsilon \left(\mathcal{L}_{\eta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \right) V^{\mu} dx^{\nu} \tag{5.34}$$

Esto es, la derivada de Lie de los símbolos de Chistoffel da el cambio a orden ε de la diferencial covariante de un vector antes y después de la transformación. La derivada de Lie de los símbolos de Christoffel la podemos escribir también como: (Y-1957)

$$\mathcal{L}_{\bar{\eta}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \eta^{\alpha}{}_{;\beta\gamma} - R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\nu}\, \eta^{\nu} \tag{5.35}$$

y debido a los argumentos dados en la sección cuatro del capítulo anterior cuando pasamos de la ecuación (4.71) a (4.112) tenemos que :

$$\mathcal{L}_{\eta} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\nu} \left\{ h_{\beta\nu;\gamma} + h_{\gamma\nu;\beta} - h_{\beta\gamma;\nu} \right\} \tag{5.36}$$

y por lo tanto, una colineación afin debe satisfacer:

$$h_{\alpha\beta;\gamma} + h_{\alpha\gamma;\beta} - h_{\beta\gamma;\alpha} = 0 \tag{5.37}$$

que es equivalente a pedir que:

$$h_{\alpha\beta;\gamma} = 0 \tag{5.38}$$

(3) <u>Movimiento conforme</u> [MC].-

El angulo α entre dos vectores V^{α}, W^{α} en un punto P de un espacio de Riemann se calcula mediante la expresión:

$$\cos\alpha = \frac{g_{\alpha\beta} V^{\alpha} W^{\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\beta} V^{\alpha} V^{\beta}} \sqrt{g_{\alpha\beta} W^{\alpha} W^{\beta}}} \tag{5.39}$$

Ante una transformación del tipo (5.3) los vectore V y W son mapeados en vectores $\tilde{V}$, $\tilde{W}$ en el punto $\tilde{P}$ y forman un ángulo $\tilde{\alpha}$ dado por:

$$\cos\tilde{\alpha} = \frac{\sqrt{g_{\alpha\beta}(\tilde{x})\,\tilde{V}^{\alpha}\tilde{W}^{\beta}}}{\sqrt{g_{\alpha\beta}(\tilde{x})\,\tilde{V}^{\alpha}\tilde{V}^{\alpha}}\sqrt{g_{\alpha\beta}(\tilde{x})\,\tilde{W}^{\alpha}\tilde{W}^{\beta}}} \tag{5.40}$$

Diremos que (5.3) es un movimiento conforme si a orden ε :

$$\alpha = \tilde{\alpha} \tag{5.41}$$

Esto es, las transformaciones conformes preservan los ángulos entre los vectores.
La solución general de (5.41) es que:

$$g_{\alpha\beta}(\tilde{x})\,\tilde{V}^{\alpha}\tilde{W}^{\beta} = (1+2\varepsilon\sigma)\,g_{\alpha\beta}V^{\alpha}W^{\beta} \tag{5.42}$$

donde σ es una función escalar arbitraria.
De (5.8) y (5.25) tenemos que la condición es:

$$\left(g_{\alpha\beta} + \varepsilon\, g_{\alpha\beta,\sigma}\,\eta^{\sigma}\right)\left(V^{\alpha}+\varepsilon\,\eta^{\alpha}_{,\mu}V^{\mu}\right)\left(W^{\beta}+\varepsilon\,\eta^{\beta}_{,\nu}V^{\nu}\right) = (1+2\varepsilon\sigma)\,g_{\alpha\beta}V^{\alpha}W^{\beta}$$

desarrollando a orden ε se llega a:

$$g_{\alpha\beta}V^{\alpha}W^{\beta} + \varepsilon\left\{g_{\alpha\beta,\nu}\,\eta^{\nu} + \eta^{\nu}_{,\alpha}\,g_{\nu\beta} + \eta^{\nu}_{,\beta}\,g_{\nu\alpha}\right\}V^{\alpha}W^{\beta} = (1+2\varepsilon\sigma)\,g_{\alpha\beta}V^{\alpha}W^{\beta}$$

ésto es:

$$\varepsilon\,(\mathcal{L}_{\eta}\,g)_{\alpha\beta}V^{\alpha}W^{\beta} = 2\varepsilon\sigma\,g_{\alpha\beta}V^{\alpha}W^{\beta} \tag{5.43}$$

y como de (4.137) y (4.138):

$$\mathcal{L}_{\eta}\,g_{\alpha\beta} = 2h_{\alpha\beta} \tag{5.44}$$

podemos escribir la condición como:

$$h_{\alpha\beta} = \sigma\,g_{\alpha\beta} \tag{5.45}$$

Esta ecuación la podemos escribir de manera equivalente como: (Y-1957)

$$\mathcal{L}_{\bar{\eta}} \left(k \, g_{\alpha\beta} \right) = 0 \tag{5.46}$$

donde:

$$k = \left[\det g_{\alpha\beta} \right]^{-1/n} \tag{5.47}$$

n=dimensión del espacio

y por lo tanto, podemos decir que los movimientos conformes de la métrica g son los vectores de Killing de la métrica:

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta} \equiv \left[\det g_{\nu\beta} \right]^{-1/n} g_{\alpha\beta} \tag{5.48}$$

(4) Movimientos homotéticos [MH].-

Los movimientos homotéticos son un caso especial de los movimientos conformes cuando la función σ es una constante σ_0 .
Tenemos entonces que, debido a (5.45) los movimientos homotéticos satisfacen:

$$h_{\alpha\beta} = \sigma_0 \, g_{\alpha\beta} \tag{5.49}$$

Geométricamente un movimiento homotetico representa un cambio de escala de longitud en el espacio de Riemann.
Si el elemento de longitud antes de la transformación es ds y despues de ésta es $\tilde{ds}$ entonces debido a (5.18) y (5.44) :

$$\tilde{ds} = ds + \varepsilon \, h_{\alpha\beta} \, dx^\alpha dx^\beta$$

$$\tilde{ds} = ds + \varepsilon \, \sigma_0 \, ds$$

ésto es:

$$\tilde{ds} = (\text{constante}) \times ds \tag{5.50}$$

(5) Colineaciones proyectivas [CP].-

Diremos que una transformación del tipo (5.3) es una colineación proyectiva si:

$$\mathcal{L}_{\eta} \, \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\beta} \, \varphi_{;\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma} \, \varphi_{;\beta} \tag{5.51}$$

donde φ es una función escalar definida como:

$$\varphi_{;\mu} = \left[\frac{1}{n+1} \right] l^{\nu}{}_{;\nu;\mu} \qquad (5.52)$$

usando la identidad (5.36) podemos escribir la condición como:

$$h_{\beta\nu;\gamma} + h_{\gamma\nu;\beta} - h_{\beta\gamma;\nu} = g_{\nu\beta}\,\varphi_{,\gamma} + g_{\nu\gamma}\,\varphi_{,\beta}$$

intercambiando β , γ y sumando llegamos a:

$$2h_{\beta\nu;\gamma} = 2g_{\nu\beta}\,\varphi_{,\gamma} + g_{\beta\gamma}\,\varphi_{,\nu} + g_{\nu\gamma}\,\varphi_{,\beta} \qquad (5.53)$$

Es interesante observar que si definimos una nueva conexión llamada conexión proyectiva:

$$\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma} \equiv \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \frac{1}{n+1}\left\{ \delta^{\alpha}_{\beta}\,\Gamma^{\mu}_{\mu\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}\,\Gamma^{\mu}_{\mu\beta} \right\} \qquad (5.54)$$

entonces la condición (5.51) se puede escribir como:

$$\mathcal{L}_{\bar{\xi}}\;\Pi^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 0 \qquad (5.55)$$

Esto es, las colineaciones proyectivas son las colineaciones afines de la conexión proyectiva.

(6) Colineaciones conformes [CCON]

Anteriormente mencionamos que los movimientos conformes de una métrica g son aquellos que preservan los ángulos entre los vectores y que pueden considerarse como los vectores de Killing de la métrica:

$$\mathfrak{g}_{\alpha\beta} = \left[\det g_{\alpha\beta}\right]^{-1/n} g_{\alpha\beta} \qquad (5.48)$$

A partir de esta métrica, podemos formar la conexión conforme mediante la expresión:

$$\mathbb{K}^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\left\{ \mathfrak{g}_{\beta\mu,\nu} + \mathfrak{g}_{\beta\nu,\mu} - \mathfrak{g}_{\mu\nu,\beta} \right\} \qquad (5.56)$$

Diremos entonces que η^{α} es una colineación conforme de la métrica $g_{\alpha\beta}$ si es una colineación afín de la métrica h esto es, si:

$$\mathcal{L}_{\eta} \mathbb{K}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 0 \tag{5.57}$$

tomando la derivada de Lie de (5.56) y usando (5.48) se puede demostrar (K-L 1969) que una colineación conforme debe de satisfacer:

$$h_{\alpha\beta;\gamma} = \tau_{,\gamma}\, g_{\alpha\beta} \tag{5.58}$$

donde τ es una función escalar definida como:

$$\tau \equiv \frac{1}{n} \eta^{\mu}{}_{;\mu} \tag{5.59}$$

(7) <u>Colineaciones de curvatura especiales</u> [CCE].-

Las colineaciones de curvatura se definen como aquellas transformaciones que dejan invariante al tensor de curvatura esto es;

$$\mathcal{L}_{\bar{\eta}} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\mu} = 0 \tag{5.6Ø}$$

haciendo uso de la identidad (Y 1957):

$$\mathcal{L}_{\bar{\eta}} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\mu} = \left(\mathcal{L}_{\bar{\eta}} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\right)_{;\gamma} - \left(\mathcal{L}_{\eta} \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}\right)_{;\mu} \tag{5.61}$$

y de la ecuación (5.36), tenemos que (5.6Ø) se puede escribir como:

$$\left(h_{\mu\nu;\beta} + h_{\nu\beta;\mu} - h_{\mu\beta;\nu}\right)_{;\gamma} - \left(h_{\gamma\nu;\beta} + h_{\nu\beta;\gamma} - h_{\gamma\beta;\nu}\right) = 0 \tag{5.62}$$

intercambiando los indices β y ν tenemos:

$$\left(h_{\mu\beta;\nu} + h_{\beta\nu;\mu} - h_{\mu\nu;\beta}\right)_{;\gamma} - \left(h_{\gamma\beta;\nu} + h_{\beta\nu;\gamma} - h_{\gamma\nu;\beta}\right) = 0$$

sumando estas dos ecuaciones llegamos a un caso particular de colineación de curvatura definido como:

$$h_{\beta\nu;\mu\gamma} - h_{\beta\nu;\gamma\mu} = 0 \qquad (5.63)$$

La ecuación (5.62) que satisfacen las colineaciones de curvatura es bastante complicada incluso el caso particular (5.63) es difícil de manejar debido a que es una ecuación antisimétrica en μ, γ .
Lo anterior lleva a buscar transformaciones más simples que dejen invariante a la curvatura.
Un caso importante es cuando se cumple que:

$$h_{\alpha\beta;\gamma;\mu} = 0 \qquad (5.64)$$

A estas transformaciones las llamaremos colineaciones de curvatura especiales.
Debido a (5.36) podemos escribir (5.64) como:

$$(\mathcal{L}_{\bar{\eta}}\, \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma})_{;\mu} = 0 \qquad (5.65)$$

(8) Colineaciones conformes especiales (CCONE)

Las colineaciones conformes especiales, se definen como aquellas transformaciones que son colineaciones conformes y colineaciones de curvatura simultaneamente.
Esto es, (5.3) es una colineación conforme especial si:

$$h_{\alpha\beta;\gamma} = \sigma_{;\gamma}\, g_{\alpha\beta} \qquad (5.66)$$

y ademas:

$$\mathcal{L}_{\bar{\eta}}\, R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\mu} = 0$$

debido a (5.36), para una colineación conforme;

$$\mathcal{L}_{\eta}\, \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} \left\{ \sigma_{;\gamma}\, g_{\beta\nu} + \sigma_{;\beta}\, g_{\gamma\nu} - \sigma_{;\nu}\, g_{\beta\gamma} \right\} \qquad (5.67)$$

y de (5.61) tenemos que la condición para una colineación conforme especial es:

$$g^{\alpha\nu}\left\{ \sigma_{;\mu}\, g_{\beta\nu} + \sigma_{;\beta}\, g_{\mu\nu} - \sigma_{;\nu}\, g_{\beta\mu} \right\}_{;\gamma} - g^{\alpha\nu}\left\{ \sigma_{;\gamma}\, g_{\beta\nu} + \sigma_{;\beta}\, g_{\gamma\nu} - \sigma_{;\nu}\, g_{\beta\gamma} \right\}_{;\mu} = 0$$

ésto es:

$$\delta^{\alpha}_{\mu}\ \tau_{;\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\ \tau_{;\beta\mu} - g_{\beta\mu}\, g^{\alpha\nu}\, \tau_{;\nu\gamma} + g_{\beta\gamma}\, g^{\alpha\nu}\, \tau_{;\nu\mu} = 0$$

tomando $\alpha = \mu$ y sumando:

$$n\ \tau_{;\beta\gamma} - \delta^{\mu}{}_{\gamma}\ \tau_{;\beta\mu} - \delta^{\nu}_{\beta}\ \tau_{;\nu\gamma} + g_{\beta\gamma}\, g^{\mu\nu}\, \tau_{;\nu\mu} = 0$$

de donde:

$$(n-2)\ \tau_{;\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}\, g^{\mu\nu}\ \tau_{;\nu\mu} = 0$$

multiplicando por $g^{\beta\gamma}$ tenemos:

$$(n-2)\ g^{\beta\gamma}\ \tau_{;\beta\gamma} + g^{\mu\nu}\, \tau_{;\nu\mu} = 0$$

y por lo tanto:

$$(n-1)\ g^{\mu\nu}\ \tau_{;\nu\mu} = 0$$

de donde, una transformacion será [CCONE] si además de satisfacer (5.43) cumple que:

$$\tau_{;\alpha\beta} = 0 \qquad (5.68)$$

Observemos que debido a (5.64) y (5.65) se tiene que:

$$(\mathcal{L}_{\tau}\ \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma})_{;\mu} = 0 \qquad (5.69)$$

y por lo tanto, las [CCONE] son [CCE].

(9) Movimientos conformes especiales [MCE]

Son aquellas transformaciones que ademas de ser [MC] son colineaciones de curvatura.
Esto es satisfacen:

$$h_{\alpha\beta} = \sigma g_{\alpha\beta}$$

y:

$$\mathcal{L}_{\xi} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\mu} = 0 \tag{5.70}$$

De (5.36) y (5.45) tenemos:

$$\mathcal{L}_{\xi} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} (\sigma_{;\gamma} g_{\beta\nu} + \sigma_{;\beta} g_{\gamma\nu} - \sigma_{;\nu} g_{\beta\gamma}$$

esta ecuación es análoga a (5.67) de donde con cálculos semejantes a los anteriormente hechos concluimos que los [MCE] deben de satisfacer además de (5.45) que:

$$\sigma_{;\alpha\beta} = 0 \tag{5.71}$$

(10) <u>Colineaciones proyectivas especiales</u> [CPE].-

Estas son transformaciones que ademas de ser [CP] son colineaciones de curvatura.
Las [CP] satisfacen (5.51). Sustituyendo esta ecuación en la condición (5.61) tenemos:

$$0 = \delta^{\alpha}_{\mu} \varphi_{;\nu\gamma} + \delta^{\alpha}_{\nu} \varphi_{;\mu\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma} \varphi_{;\nu\mu} - \delta^{\alpha}_{\nu} \varphi_{;\mu\gamma}$$

ésto es:

$$\delta^{\alpha}_{\mu} \varphi_{;\nu\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma} \varphi_{;\nu\mu} = 0$$

haciendo $\alpha = \mu$ y sumando llegamos a:

$$(n-1) \varphi_{;\nu\gamma} = 0$$

y por lo tanto una transformación sera una [CPE] si satisface ademas de la ecuación (5.53) la condición:

$$\varphi_{;\mu\nu} = 0 \tag{5.72}$$

Por ultimo debido (5.51) se tiene que las [CPE] son [CCE].

En la tabla V-1 resumimos las ecuaciones que definen cada una de las simetrías que hemos estudiado hasta el momento.
La relación entre cada una de estas simetrías y las demás está representada en la tabla V-2. En este diagrama toda simetría es un caso particular de las simetrias con las cuales esta conectada mediante flechas. Asi por ejemplo, los [M] son un caso particular de los [CA] los cuales a su vez son un caso particular de las [CP].

2.- SIMETRIAS DE UN ESPACIO DE RIEMANN Y SIMETRIAS DE LA ECUACION DE GEODESICAS.-

En la sección anterior hemos dado las condiciones que debe cumplir un espacio de Riemann para que tenga determinado tipo de simetrías. La pregunta natural que surge es la relación que existe entre estas simetrías y las simetrías que poseen las geodésicas en ese espacio. Sería deseable que toda simetría del espacio se reflejara como una simetría de las geodésicas.
Si consideramos una simetría del espacio:

$$\tilde{x}^{\alpha} = x^{\alpha} + \varepsilon \eta^{\alpha}(x^{\beta}) \qquad (5.73)$$

y pedimos que mapée geodésicas en geodésicas, entonces, de acuerdo con lo dicho en el capítulo anterior debemos tener que:

$$h_{\alpha\beta;\gamma} = 0 \qquad (5.74)$$

Sin embargo, si comparamos esta ecuación con las ecuaciones que describen las condiciones de simetría de un espacio de Riemann veremos que las únicas simetrías del espacio que son a su vez simetrías de las geodésicas son los movimientos, los movimientos homotéticos y las colineaciones afines. Esto último se discutió en detalle en la sección cuatro del capítulo cuatro.
El hecho de que las simetrías de las geodesicas del tipo (5.73) sean un subconjunto de las simetrías del espacio es de esperarse. Las geodésicas se definen como aquellas curvas que tienen la propiedad de que su vector tangente es paralelo a lo largo de ellas. Debido a esto, si tenemos una transformación que preserve el paralelismo, como es el caso de las colineaciones afines, después de la transformación el vector tangente a la curva seguirá siendo paralelo y la curva seguirá siendo geodésica.
Asi mismo, las geodésicas se pueden considerar como aquellas curvas que extremizan la distancia entre dos puntos. Debido a esto, como los movimientos no cambian las distancias entre los puntos de un espacio de Riemann si una curva es el camino mas corto (o mas largo) entre dos puntos, después de la

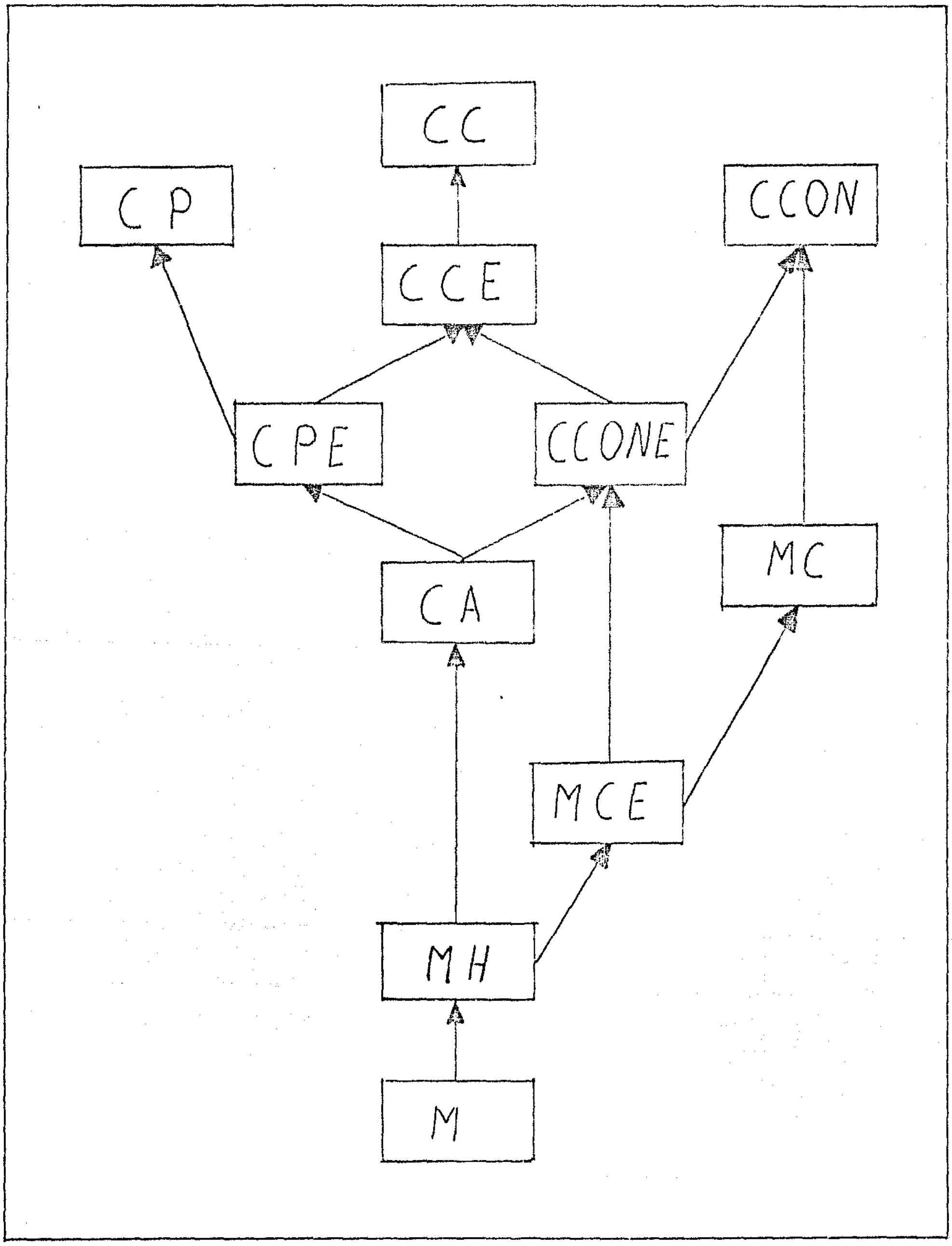
TABLA V-I

ECUACIONES DE SIMETRIAS DEL ESPACIO (K-L 1981)

MOVIMIENTOS (M)	$\xi_{(\alpha;\beta)} = 0$ (E1)
COLINEACIONES AFINES (CA)	$\xi_{(\alpha;\beta);\gamma} = 0$ (E2)
MOVIMIENTOS CONFORMES (MC)	$\xi_{(\alpha;\beta)} = \sigma g_{\alpha\beta}$ (E3)
MOVIMIENTOS HOMOTETICOS (MH)	$\xi_{(\alpha;\beta)} = \sigma_0 g_{\alpha\beta}$; $\sigma_0 = cte$ (E4)
COLINEACIONES PROYECTIVAS (CP)	$2\xi_{(\alpha;\beta);\gamma} = 2g_{\alpha\beta}\varphi_{,\gamma} + g_{\alpha\gamma}\varphi_{,\beta} + g_{\beta\gamma}\varphi_{,\alpha}$ (E5)
COLINEACIONES CONFORMES (CCON)	$\xi_{(\alpha;\beta);\gamma} = \tau_{,\gamma} g_{\alpha\beta}$ (E6)
COLINEACIONES DE CURVATURA ESPECIALES (CCE)	$\xi_{(\alpha;\beta);\gamma;\mu} = 0$ (E7)
COLINEACIONES CONFORMES ESPECIALES (CCONE)	(E6) y $\tau_{;\mu\nu} = 0$ (E8)
MOVIMIENTOS CONFORMES ESPECIALES (MCONE)	(E3) y $\sigma_{;\mu\nu} = 0$ (E9)
COLINEACIONES PROYECTIVAS ESPECIALES (CPE)	(E5) y $\varphi_{;\mu\nu} = 0$ (E10)

TABLA V-2

RELACION ENTRE LAS SIMETRIAS DEL ESPACIO (K-L 1969)



transformación seguirá teniendo la misma propiedad.
Los movimientos homotéticos son simples cambios de escala y por lo tanto el argumento anterior se aplica para mostrar intuitivamente que estas transformaciones son simetrías de las geodésicas.
Por otro lado, los movimientos conformes de una métrica $g_{\alpha\beta}$ son los movimientos de la métrica conforme $\hat{g}_{\alpha\beta}$ definida en (5.48). Debido a ésto, tenemos el resultado particular de que en el espacio tiempo relativista los movimientos conformes son transformaciones de simetría de las geodésicas nulas.
Las colineaciones proyectivas no conservan el paralelismo de un campo vectorial ya que en general cumplen que:

$$\mathcal{L}_\eta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \neq 0$$

y por lo tanto no son simetrías de la ecuación de geodésicas.
Del mismo modo tenemos que las colineaciones conformes tampoco son simetrías de la ecuación de geodésicas ya que estas transformaciones preservan el paralelismo respecto a la métrica conforme .
Por último, tenemos que las colineaciones de curvatura no son simetrías de las geodésicas ya que el hecho de que la derivada covariante de la derivada de Lie de los símbolos de Christoffel sea cero no implica necesariamente que la derivada de Lie sea cero.
Lo anterior conduce directamente a que los [MCE], las [CCOE] y las [CPE] no son simetrías de las geodésicas ya que dichas transformaciones son casos de [CCE].
Parece entonces que en general las simetrías de un espacio de Riemann tienen poco que ver con las simetrías de las geodésicas de dicho espacio. Sin embargo, un hecho algo sorprendente es que a cada trasnformación de simetría del espacio, le podemos asociar una constante de movimiento de las trayectorias geodésicas. En las tablas V-3a y V-3b que a continuación mostramos esta resumida esta información. En V-3a estan las constantes asociadas que no dependen del parametro s (K-L 1981). En V-3b se encuentran algunas constantes con dependencia explícita en el parametro s que fueron encontradas por vez primera por Katzin y Levin en (K-L 1981).

Lo anterior lleva a plantear el siguiente problema:

Cual es la relación entre las simetrías de un espacio de Riemann y las simetrías de las geodésicas de dicho espacio (*)

Como indicamos al inicio de la presente seccion dicha relación no es directa; esto es, si ξ es una simetría del espacio entonces no necesariamente es una simetría de las geodésicas.
Sin embargo, debemos tener presente que las simetrías de las geodesicas pueden ser transformaciones mas generales que las del tipo (5.73), esto es ,podemos pensar en simetrías no puntuales es decir simetrías qie dependan de la velocidad.
De acuerdo con esta idea, una alternativa sería entonces considerar que la trasformaciones de simetría del espacio inducen transformaciones de simetría no

TABLA V-3a

CONSTANTES DE MOVIMIENTO INDEPENDIENTES DE S (K-L 1981)

SIMETRIA	CONSTANTES DE MOVIMIENTO
M	$\xi_\alpha P^\alpha$ (C1)
MH	$\sigma_0 \, g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta$ (C2) $\xi_\alpha P^\alpha$ (*) (C3)
CA	$h_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta$ (C4)
CPE	(C5) y $\varphi_{;\alpha} P^\alpha$ (C6)
MC	$\xi_\alpha P^\alpha$ (*) (C7)
CCON	$(h_{\alpha\beta} - \tau g_{\alpha\beta}) P^\alpha P^\beta$ (C8)
CCONE	(C8) y $\tau_{;\alpha} P^\alpha$ (C9)
CCE	$h_{\alpha\beta;\gamma} P^\alpha P^\beta P^\gamma$ (C10) y $h_{;\alpha} P^\alpha$ (C11)
MCE	$\xi_\alpha P^\alpha$ (*) (C12) $\sigma_{;\alpha} P^\alpha$ (C13)

(*) solo para geodésicas nulas ($P^\alpha P_\alpha = 0$)

CONSTANTES DE MOVIMIENTO DEPENDIENTES DE S. (K-L 1981)

SIMETRIAS	CONSTANTES DE MOVIMIENTO
MH	$\xi_\alpha P^\alpha - s\,\sigma_0 m$ (C14)
CA	$\xi_\alpha P^\alpha - s\, h_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta$ (C15)
CPE	$\xi_\alpha P^\alpha - s\, h_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta + m s^2 \varphi_{,\alpha} P^\alpha$ (C16) $- h_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta + 2ms\,\varphi_{,\alpha} P^\alpha$ (C17)
MCE	$\xi_\alpha P^\alpha + \frac{1}{2} m\,\sigma_{,\alpha} P^\alpha s^2 - s m \sigma$ (C18) $- m\sigma + s m\,\sigma_{,\alpha} P^\alpha$ (C19)
CCONE	$\xi_\alpha P^\alpha + \frac{1}{2} m s^2\,\tau_{,\alpha} P^\alpha - s\,h_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta$ (C20) $- h_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta + ms\,\tau_{,\alpha} P^\alpha$ (C21)
CCE	$\xi_\alpha P^\alpha - s\,h_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta + \frac{1}{2} s^2 h_{\alpha\beta;\gamma} P^\alpha P^\beta P^\gamma$ (C22) $- h_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta + s\,h_{\alpha\beta;\gamma} P^\alpha P^\beta P^\gamma$ (C23)

puntuales de la ecuación de geodésicas, es decir:

$$l^{\alpha}(q) \longrightarrow \gamma'^{\alpha}(q, \dot{q}) \tag{5.77}$$

donde: l^{α} =simetría del espacio.

γ'^{α} =simetría (no puntual) de las geodesicas.

La estructura mas sencilla que uno podría pedir para γ'^{α} es que sea lineal en las velocidades:

$$\gamma'^{\alpha}(q,\dot{q}) = K^{\alpha}{}_{\beta}(q)\,\dot{q}^{\beta} \tag{5.78}$$

Observemos que de acuerdo con lo discutido en la sección cuatro del capítulo anterior $\dot{q}^{\alpha}$ es una simetría de las geodésicas y por lo tanto $K^{\alpha}{}_{\beta}$ es un mapeador especial de simetrías.
Todo esto, motiva el siguiente teorema que permite dar una solución al problema (*) y que demostraremos en las siguientes secciones:

A toda transformación de simetría del espacio
le podemos asociar un mapeador especial de simetrías. (+)

Una consecuencia directa de este resultado es que:

A toda simetria del espacio l corresponde una simetría
γ' de las geodésicas lineal en las velocidades. (++)

A continuación comentaremos algunas de las ventajas y consecuencias relevantes de (+) y (++):

(a) El resultado (++) permite unificar todas las simetrías del espacio que fueron obtenidas mediante diversas ideas geométricas en el formalismo único de simetrías de geodésicas lineales en las velocidades.

(b) La construcción de constantes de movimiento a partir de simetrías solo se puede hacer de manera sistemática si estas transformaciones son simetrías de la ecuación de movimiento. Debido a ésto, (++) y los métodos para construir constantes explicados en los capítulos anteriores nos permitiran encontrar todas las constantes que aparecen en las tablas -3a y -3b.

(c) Ademas de las constantes conocidas de las tablas -3a y -3b podremos en ocasiones encontrar nuevas constantes de movimiento asociadas a simetrías del espacio usando las ideas de simetrías no-Noetherianas o de s-equivalencia y el teorema de las trazas.

(d) Como veremos mas adelante, las simetrías del espacio surgen como soluciones particulares de la ecuación diferencial que define a los MES lo cual abre la posibilidad de buscar otro tipo de soluciones particulares y así llegar a nuevos tipos de simetrías del espacio.

(e) Por último quisieramos mencionar que, como mas adelante demostraremos, los MES son una generalización de los tensores de Killing los cuales se pueden interpretar geometricamente debido a esto como tensores que mapean la simetría $\dot{q}^{\alpha}$ en otra simetria (que en este caso resultara ser Noetheriana).

3.- MAPEADORES ESPECIALES DE SIMETRIA EN MOVIMIENTO GEODESICO.-

De acuerdo con lo dicho en la seccion 4 del capitulo 3, un MES para un sistema de segundo orden:

$$\ddot{q}^{\alpha} = F^{\alpha}(q, \dot{q}, t) \tag{5.79}$$

es un tensor $K^{\alpha}{}_{\beta}(q)$ tal que:

$$\xi^{\alpha} = K^{\alpha}{}_{\beta}\, \dot{q}^{\beta} \qquad (5.80)$$

es una simetria de (5.79).
Para movimiento geodesico esta condición se traduce en que ξ definido en (5.80) satisfaga:

$$\frac{\bar{D}}{ds}\frac{\bar{D}}{ds}\xi^{\mu} - R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}\, \dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\xi^{\gamma} = 0$$

debido a que:

$$\frac{\bar{D}\dot{q}^{\alpha}}{ds} = 0 \qquad \frac{\bar{D}}{ds} K^{\alpha}{}_{\beta} = K^{\alpha}{}_{\beta;\gamma} p^{\gamma}$$

tenemos sustituyendo (5.80) en la anterior expresión que:

$$\left[K^{\mu}{}_{\nu;\alpha;\beta} - R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} K^{\gamma}{}_{\nu} \right] \dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\nu} = 0 \qquad (5.81)$$

simetrizando $\alpha\beta\nu$ y cancelando $\dot{q}^{\alpha}, \dot{q}^{\beta}, \dot{q}^{\nu}$ llegamos a: (del mismo modo a como se paso de (4.106) a (4.111).)

$$K^{\mu}{}_{(\nu;\alpha;\beta)} - K^{\gamma}{}_{(\nu} R^{\mu}{}_{\alpha\beta)\gamma} = 0 \qquad (5.82)$$

que podemos escribir como:

$$K_{\mu(\nu;\alpha;\beta)} - \frac{1}{6}\left\{ R_{\mu\alpha\beta\gamma} K^{\gamma}{}_{\nu} + R_{\mu\alpha\nu\gamma} K^{\gamma}{}_{\beta} \right\} - \qquad (5.83)$$

$$-\frac{1}{6}\left\{ R_{\mu\beta\alpha\gamma} K^{\gamma}{}_{\nu} + R_{\mu\beta\nu\gamma} K^{\gamma}{}_{\alpha} \right\} - \frac{1}{6}\left\{ R_{\mu\nu\alpha\gamma} K^{\gamma}{}_{\beta} + R_{\mu\nu\beta\gamma} K^{\gamma}{}_{\alpha} \right\} = 0$$

recordando que la métrica permite bajar o subir los indices de un tensor:

$$K_{\alpha\beta} = g_{\alpha\nu} K^{\nu}{}_{\beta} \qquad (5.84)$$

tenemos, multiplicando dos veces por la métrica la identidad (4.40), que:

$$[\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}] K_{\lambda\nu} = R_{\alpha\beta\lambda\mu} K^{\mu}{}_{\nu} + R_{\alpha\beta\nu\mu} K_{\lambda}{}^{\mu} \qquad (5.85)$$

de donde , suponiendo que el tensor K es simétrico:

$$K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha} \qquad (5.86)$$

se tienen las siguientes identidades:

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\alpha\beta\gamma} K^{\gamma}{}_{\nu} + R_{\mu\alpha\nu\gamma} K^{\gamma}{}_{\beta} &= [\nabla_{\mu}, \nabla_{\alpha}] K_{\beta\nu} \\
R_{\mu\beta\alpha\gamma} K^{\gamma}{}_{\nu} + R_{\mu\beta\nu\gamma} K^{\gamma}{}_{\alpha} &= [\nabla_{\mu}, \nabla_{\beta}] K_{\alpha\nu} \\
R_{\mu\nu\alpha\gamma} K^{\gamma}{}_{\beta} + R_{\mu\nu\beta\gamma} K^{\gamma}{}_{\beta} &= [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] K_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{5.87}
$$

Sustituyendo en (5.83):

$$K_{\mu(\nu;\alpha;\beta)} - \frac{1}{3} K_{\beta\nu;[\alpha;\mu]} - \frac{1}{3} K_{\nu\alpha;[\beta;\mu]} - \frac{1}{3} K_{\beta\alpha;[\nu;\mu]} = 0$$

Escribiendo explicitamente todos los términos de esta expresión y reagrupandolos, usando la suposición de que $K^{\alpha}{}_{\beta}$ es simétrico, tenemos que (5.80) puede escribirse como:

$$-K_{(\alpha\beta;\nu);\mu} + K_{(\beta\nu;\mu);\alpha} + K_{(\alpha\nu;\mu);\beta} + K_{(\alpha\beta;\mu);\nu} = 0 \tag{5.89}$$

A continuación demostraremos que (5.89) es equivalente a:

$$K_{(\alpha\beta;\mu);\nu} = 0 \tag{5.90}$$

Es claro que (5.90) implica (5.89).
Por otro lado suponiendo que (5.89) se cumple tenemos que intercanbiando μ y α en (5.89) y sumando las dos ecuacions:

$$K_{(\mu\nu;\alpha);\beta} + K_{(\mu\alpha;\beta);\nu} = 0 \tag{5.91}$$

Asi mismo, intercombiando μ y β en (5.89) y sumando tenemos:

$$K_{(\mu\beta;\nu);\alpha} + K_{(\mu\alpha;\beta);\nu} = 0 \tag{5.92}$$

Por último intercambiando μ y ν y sumando:

$$K_{(\mu\beta;\nu);\alpha} + K_{(\mu\nu;\alpha);\beta} = 0 \tag{5.93}$$

restando (5.92) y (5.93):

$$K_{(\mu\alpha;\beta);\nu} - K_{(\mu\nu;\alpha);\beta} = 0 \tag{5.94}$$

y sumando (5.94) a (5.91) concluimos que:

$$K_{(\mu\alpha;\beta);\nu} = 0$$

y por lo tanto (5.89) y (5.9Ø) son equivalentes.
Podemos resumir lo anterior diciendo que:

> La condición necesaria y suficiente para que un tensor $K_{\alpha\beta}$ sea un MES para la ecuación de geodésicas es que cumpla (5.9Ø).

Antes de pasar a la siguiente sección quisiéramos comentar la relación que existe entre los tensores de Killing y los MES.
Un tensor de Killing (M-T-W 1973) es un tensor de tipo (Ø,2) simétrico que satisface:

$$K_{(\alpha\beta;\gamma)} = 0 \tag{5.95}$$

Es claro entonces que los tensores de Killing son MES. Mas aún, podemos decir que la ecuación (5.9Ø) es una generalización de (5.95) del mismo modo que la ecuación (5.38) de las colineaciones afines es una generalización de la ecuación (5.15) que define a los tensores de Killing.
Debido a esto, podríamos llamar también a los MES "tensores de Killing generalizados" o "colineaciones afines tensoriales".
El haber considerado a los tensores de Killing como un caso particular de los MES permite darles la siguiente interpretación geométrica:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Si } K^{\alpha}{}_{\beta} \text{ es un tensor de Killing entonces:} \\ \qquad\qquad K^{\alpha}{}_{\beta}\, \dot{q}^{\beta} \\ \text{es una simetría de las geodésicas.} \end{array}\right. \tag{5.96}$$

En la siguiente sección mostraremos que esta simetría es Noetheriana.

Si $K^{\alpha}{}_{\beta}(q)$ es un MES, entoces su contracción con $\dot{q}^{\beta}$ es una simetría y por lo tanto podemos asociarle constantes de movimiento.
Primero que nada, calculemos $\tilde{\sigma}^{*}$ (2.99):

$$\tilde{\sigma}^{*} = \mathcal{L}_{\bar{\eta}}\, \tilde{\sigma} = d\,[\tilde{\sigma}(\bar{\eta})]$$

donde η^{α} es la simetría en 2n dimensiones asociada a ξ^{α} mediante (3.41).
Observemos que:

$$\overline{\frac{d\xi^{\alpha}}{ds}} = K^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}\, p^{\beta} p^{\gamma} - K^{\alpha}{}_{\beta}\, \Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu}\, p^{\mu} p^{\nu}$$

por otro lado de (4.30) tenemos;

$$\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu}\, p^{\mu} p^{\nu} = \left\{ g^{\beta\sigma} g_{\mu\sigma,\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\beta\sigma} g_{\mu\nu,\sigma} \right\} p^{\mu} p^{\nu}$$

de donde;

$$\overline{\frac{d\xi^{\alpha}}{ds}} = \left\{ K^{\alpha}{}_{\mu,\nu} - K^{\alpha\sigma} g_{\mu\sigma,\nu} + \frac{1}{2}\, K^{\alpha\lambda} g_{\mu\nu,\lambda} \right\} p^{\mu} p^{\nu}$$

y usando:

$$K^{\alpha}{}_{\mu,\nu} = g_{\mu\lambda,\nu}\, K^{\alpha\lambda} + g_{\mu\lambda}\, K^{\alpha\lambda}{}_{,\nu}$$

concluimos que:

$$\bar{\eta} = \begin{pmatrix} K^{\alpha}{}_{\beta}\, p^{\beta} \\ \{ g_{\mu\lambda} K^{\alpha\lambda}{}_{,\nu} + 1/2\, K^{\alpha\lambda} g_{\mu\nu,\lambda} \}\, p^{\mu} p^{\nu} \end{pmatrix} \qquad (5.97)$$

De (4.95) tenemos entonces:

$$\tilde{\sigma}(\bar{\eta}) = [g_{\alpha\beta} K^{\alpha}{}_{\mu} p^{\mu}]\, dp^{\beta} + \{ g_{\beta\nu,\alpha} K^{\beta}{}_{\mu} - g_{\alpha\nu,\beta} K^{\beta}{}_{\mu} -$$
$$- g_{\alpha\beta}\, g_{\mu\lambda} K^{\beta\lambda}{}_{,\nu} - 1/2\, g_{\alpha\beta} K^{\beta\lambda} g_{\mu\nu,\lambda} \}\, p^{\mu} p^{\nu} dq^{\alpha}$$

usando que:

$$(g_{\alpha\beta} K^{\alpha}{}_{\mu} p^{\mu})\, dp^{\beta} = d\left(\frac{1}{2} K_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu}\right) - \left(\frac{1}{2} K_{\mu\nu,\alpha} p^{\mu} p^{\nu}\right) dq^{\alpha}$$

y que:

$$g_{\alpha\nu} g_{\beta\lambda} K^{\nu\lambda}{}_{,\sigma} = K_{\alpha\beta,\sigma} - K^{\nu}{}_{\beta}\, g_{\alpha\nu,\sigma} - K^{\lambda}{}_{\alpha}\, g_{\beta\lambda,\sigma}$$

llegamos a: $\tilde{\sigma}(\eta) = d\left(\tfrac{1}{2} K_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu}\right) + \{ g_{\beta\nu,\alpha} K^{\beta}{}_{\mu} - g_{\alpha\nu,\beta} K^{\beta}{}_{\mu} -$

$$- K_{\alpha\mu,\nu} + K^{\beta}{}_{\mu}\, g_{\alpha\beta,\nu} + K^{\beta}{}_{\alpha}\, g_{\mu\beta,\nu} - \tfrac{1}{2} K^{\lambda}{}_{\alpha}\, g_{\mu\nu,\lambda} - \tfrac{1}{2} K_{\mu\nu,\alpha} \} p^{\mu} p^{\nu} dq^{\alpha}$$

que podemos escribir como:

$$\tilde{\sigma}(\bar{\eta}) = d\left(\tfrac{1}{2} K_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu}\right) - \tfrac{3}{2} K_{(\alpha\mu,\nu)} p^{\mu} p^{\nu} dq^{\alpha} +$$

$$+ 3\, g_{\beta(\nu,\alpha} K_{\mu)}{}^{\beta} p^{\mu} p^{\nu} dq^{\alpha} - \tfrac{3}{2} K^{\beta}{}_{(\alpha}\, g_{\mu\nu),\beta}\, p^{\mu} p^{\nu} dq^{\alpha} \qquad (5.98)$$

Observando que:

$$g_{\theta\alpha} g_{\rho\beta} g_{\sigma\gamma}\, g^{\lambda(\theta} K^{\rho\sigma)}{}_{,\lambda} = K_{(\alpha\beta,\gamma)} - 2\, g_{\sigma(\alpha,\beta} K_{\gamma)}{}^{\sigma}$$

$$g_{\theta\alpha} g_{\rho\beta} g_{\sigma\gamma}\, K^{\lambda(\theta} g^{\rho\sigma)}{}_{,\lambda} = -K^{\nu}{}_{(\alpha}\, g_{\beta\gamma),\nu}$$

concluimos que la identidad (4.33) puede escribirse como:

$$K_{(\alpha\beta;\gamma)} = K_{(\alpha\beta,\gamma)} + K^{\nu}{}_{(\alpha}\, g_{\beta\gamma),\nu} - 2\, g_{\nu(\alpha,\beta} K_{\gamma)}{}^{\nu} \qquad (5.99)$$

a partir de la cual podemos escribir (5.98) como:

$$\tilde{\ell}^{*} = \tilde{\sigma}(\eta) = d\left(\frac{1}{2} K_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu}\right) - \left[\frac{3}{2} K_{(\alpha\mu;\nu)} p^{\mu} p^{\nu}\right] dq^{\alpha} \qquad (5.100)$$

Definiendo el tensor simétrico $\gamma_{\alpha\beta}$ función de p^{α} :

$$\mathscr{G}_{\alpha\beta} = 3\,K_{(\alpha\beta;\gamma)}\,P^{\gamma} \tag{5.101}$$

podemos escribir lo anterior como:

$$\tilde{\ell}^{*} = d\left(\tfrac{1}{2}K_{\mu\nu}P^{\mu}P^{\nu}\right) - \left[\tfrac{1}{2}\,\mathscr{G}_{\alpha\beta}P^{\beta}\right]dq^{\alpha} \tag{5.102}$$

de donde:

$$\tilde{\sigma}^{*} = \left[3\,K_{(\alpha\beta;\gamma)}P^{\gamma}\right]dq^{\alpha}\wedge dP^{\beta} + \left[3/2\,K_{(\alpha\mu;\gamma),\beta}P^{\mu}P^{\gamma}\right]dq^{\alpha}\wedge dq^{\beta} \tag{5.103}$$

o bien usando el tensor $\mathscr{G}_{\alpha\beta}$:

$$\tilde{\sigma}^{*} = \mathscr{G}_{\alpha\beta}\,dq^{\alpha}\wedge dP^{\beta} + \left[\tfrac{1}{2}\,\mathscr{G}_{\alpha\beta,\gamma}P^{\beta}\right]dq^{\alpha}\wedge dq^{\gamma} \tag{5.104}$$

De (5.104) observamos que la condición para que (5.97) sea una simetría Noetheriana es que:

$$\tilde{\sigma}^{*} = 0$$

lo cual conduce a pedir que:

$$K_{(\alpha\beta;\gamma)} = 0 \tag{5.105}$$

Debido a (5.95), tenemos entonces que la condición necesaria y suficiente para que $K^{\alpha}{}_{\beta}$ mapee P^{β} en una simetría Noetheriana es que $K^{\alpha}{}_{\beta}$ sea un tensor de Killing.

En el caso de que (5.105) se cumpla, el teorema de Noether afirma que;

$$C = \tilde{\ell}(\bar{\eta}) + \varphi \tag{5.106}$$

es una constante, donde:

$$\delta L = -\varepsilon\,\frac{d\varphi}{ds} \tag{5.107}$$

la variación de L la podemos calcular usando (4.126) como:

$$\delta L = \varepsilon\left[\frac{d\,\tilde{\ell}(\bar{\eta})}{ds} - \tilde{\sigma}(\bar{\eta})\,(\dot{X} - \bar{F})\right] \tag{5.108}$$

Si usamos un sistema localmente plano, tenemos que:

$$\tilde{\ell} = g_{\alpha\beta}\, p^{\beta}\, dq^{\alpha} - s\, g_{\alpha\beta}\, p^{\beta}\, dp^{\alpha} \tag{5.109}$$

de donde:

$$\tilde{\ell}(\bar{\eta}) = g_{\alpha\beta}\, p^{\beta} K^{\alpha}{}_{\gamma}\, p^{\gamma} - s\, g_{\alpha\beta}\, p^{\beta} K^{\alpha}{}_{\mu,\nu}\, p^{\mu} p^{\nu} \tag{5.110}$$

y como debido a (5.105) en el sistema de coordenadas localmente plano:

$$g_{\alpha\beta}\, p^{\beta} K^{\alpha}{}_{\mu,\nu}\, p^{\mu} p^{\nu} = K_{(\beta\mu;\nu)}\, p^{\mu} p^{\nu} p^{\beta} = 0$$

tenemos que:

$$\tilde{\ell}(\bar{\eta}) = K_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} p^{\beta} \tag{5.111}$$

por otro lado, de (5.100):

$$\tilde{\sigma}(\bar{\eta}) = 1/2\; d\left(K_{\mu\nu}\, p^{\mu} p^{\nu} \right) \tag{5.112}$$

de donde:

$$\tilde{\sigma}(\bar{\eta})(\dot{\bar{X}} - \bar{F}) = 1/2\, \frac{d}{ds} \left(K_{\mu\nu}\, p^{\mu} p^{\nu} \right) \tag{5.113}$$

y por lo tanto:

$$\delta L = \frac{\varepsilon}{2}\, \frac{d}{ds} \left(K_{\mu\nu}\, p^{\mu} p^{\nu} \right) \tag{5.114}$$

De lo anterior concluímos que el teorema de Noether lleva a la constante:

$$C = 1/2\; K_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} p^{\beta} \tag{5.115}$$

Observemos que si $K^{\alpha}{}_{\beta}$ es un tensor de Killing entonces (5.115) da la constante conocida asociada a tales tensores.
De (5.110), tenemos que para cualquier mapeador de simetría:

$$J = K_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} p^{\beta} - s\, K_{(\alpha\beta;\gamma)}\, p^{\alpha} p^{\beta} p^{\gamma} \tag{5.116}$$

es una constante de movimiento.
Usando la definición (5.101) podemos escribir esta constante como:

$$J = K_{\alpha\beta} P^{\alpha} P^{\beta} - 1/3\, S\, g_{\alpha\beta} P^{\alpha} P^{\beta} \qquad (5.117)$$

La demostración de que J es efectivamente una constante es inmediata si usamos la ecuación (5.90) que define a los MES.
Por otro lado, de acuerdo con lo dicho en la sección 5 del capitulo 2 las siguientes funciones son constantes de movimiento:

$$M_1 = \tilde{\sigma}(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}) \qquad (5.118)$$

$$M_2 = \tilde{\sigma}(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}) \qquad (5.119)$$

$$M_1^{*} = \tilde{\sigma}^{*}(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}) \qquad (5.120)$$

$$M_2^{*} = \tilde{\sigma}^{*}(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}) \qquad (5.121)$$

dondo:

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} P^{\alpha} \\ -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} P^{\mu} P^{\nu} \end{pmatrix} \qquad \eta_2 = \begin{pmatrix} S P^{\alpha} \\ P^{\alpha} - S \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} P^{\mu} P^{\nu} \end{pmatrix} \qquad (5.122)$$

De (5.100) tenemos que:

$$M_1 = -\frac{3}{2} - K_{\alpha\mu;\nu} P^{\alpha} P^{\mu} P^{\nu} + 1/2 \left\{ K_{\mu\nu,\gamma} - K_{\mu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\gamma} - K_{\nu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\mu\gamma} \right\} P^{\mu} P^{\nu} P^{\gamma}$$

y de (4.127):

$$M_1 = -3/2\; K_{\alpha\mu;\nu} P^{\alpha} P^{\mu} P^{\nu} + 1/2\; K_{\mu\nu;\gamma} P^{\mu} P^{\nu} P^{\gamma}$$

esto es:

$$M_1 = K_{(\alpha\mu;\nu)} P^{\mu} P^{\nu} P^{\alpha} \qquad (5.123)$$

Por otro lado:

$$M_2 = \tilde{\sigma}(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}) = \ell^{*}(\bar{\eta}_2)$$

observando que:

$$\bar{l}_2 = \overline{W} + s\bar{l}_1 \qquad (5.124)$$

donde:

$$W = \begin{pmatrix} 0 \\ p^{\alpha} \end{pmatrix} \qquad (5.125)$$

tenemos:

$$M_2 = -\tilde{l}^{*}(W) + sM_1$$

y como:

$$\tilde{l}^{*}(W) = K_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} p^{\beta} \qquad (5.126)$$

concluimos que:

$$M_2 = s\, K_{(\alpha\beta;\gamma)}\, p^{\alpha} p^{\beta} p^{\gamma} - K_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} p^{\beta} \qquad (5.127)$$

A continuación explicaremos como en ocaciones es posible obtener a partir de una constante dada de grado n en s otra nuevo de grado n+1 en s.
Si tenemos una constante C1 y sucede que para alguna función A:

$$C_1 = (\mathcal{L}_f + \partial_s)\, A \equiv \frac{d\bar{A}}{ds} \qquad (5.128)$$

entonces, podemos construir una nueva constante como:

$$C_2 = sC_1 - A \qquad (5.129)$$

la demostración de que C2 es constante es inmediata ya que:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_f + \partial_s)\, C_2 &= s\mathcal{L}_f C_1 + C_1 + s\,\partial_s C_1 - (\mathcal{L}_f + \partial_s) A \\ &= 0\end{aligned}$$

Debido a esto, si tenemos M2, podemos considerar la posibilidad de que exista una función A tal que:

$$M_2 = (\mathcal{L}_\xi + \partial_s) A$$

esto es:

$$s K_{(\alpha\beta;\gamma)} P^\alpha P^\beta P^\gamma - K_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta = \frac{\partial A}{\partial P^\nu} P^\nu - \frac{\partial A}{\partial P^\nu} \Gamma^\nu_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta + \frac{\partial A}{\partial s} \quad (5.130)$$

Esta ecuación tendrá solución en el caso de que el tensor $K^\alpha{}_\beta$ sea el gradiente simetrizado de un vector, esto es:

$$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)} \quad (5.131)$$

en cuyo caso, la solución se puede escribir como:

$$A = -\xi_\alpha P^\alpha + \frac{s^2}{2} K_{(\alpha\beta;\gamma)} P^\alpha P^\beta P^\gamma \quad (5.132)$$

y por lo tanto tendremos la constante:

$$Q = \xi_\alpha P^\alpha - s K_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta + 1/2\, s^2 K_{(\alpha\beta;\gamma)} P^\alpha P^\beta P^\gamma \quad (5.133)$$

A continuación calcularemos las constantes asociadas con $\tilde{\sigma}^*$:
La constante M1*:

$$\tilde{\sigma}^* (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}) \quad (5.134)$$

es igual a:

$$M_1^* = g_{\alpha\beta} K^\beta{}_{\mu;\nu} P^\alpha P^\mu P^\nu \quad (5.135)$$

Para M2* tenemos que:

$$M_2^* = \tilde{\sigma}^* (\bar{W}, \bar{\eta}) + s M_1^*$$

y como :

$$\tilde{\sigma}^* (W, \eta) = -g_{\alpha\beta} K^\alpha{}_\gamma P^\beta P^\gamma \quad (5.136)$$

concluimos:

$$M_2^{\,*} = s\,\mathcal{G}_{\alpha\beta}\, K^{\beta}{}_{\mu;\nu}\, p^{\alpha} p^{\mu} p^{\nu} - \mathcal{G}_{\alpha\beta}\, K^{\alpha}{}_{\gamma}\, p^{\beta} p^{\gamma} \qquad (5.137)$$

Del mismo modo a como pasamos de M2 a Q uno podría considerar la posibilidad de encontrar A* tal que:

$$(\mathcal{L}_{f} + \partial_s)\, A^{*} = M_2^{\,*} \qquad (5.138)$$

para así, encontrar una nueva constante:

$$Q^{*} = s\, M_2^{\,*} - A^{*} \qquad (5.139)$$

Para esto, necesitaríamos encontrar una solución para A* de:

$$s\,\mathcal{G}_{\alpha\beta}\, K^{\beta}{}_{\mu;\nu}\, p^{\alpha} p^{\mu} p^{\nu} - \mathcal{G}_{\alpha\beta}\, K^{\alpha}{}_{\gamma}\, p^{\beta} p^{\gamma} = \frac{\partial A^{*}}{\partial s} + \frac{\partial A^{*}}{\partial q^{\nu}}\, p^{\nu} - \frac{\partial A^{*}}{\partial p^{\nu}}\, \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} p^{\beta} \qquad (5.140)$$

La solución de esta ecuación parece complicada y podría no existir por lo que no la consideraremos.
Por último consideremos las constantes de movimiento asociadas al teorema de las trazas.
De acuerdo con (2.56):

$$\Lambda_a{}^{b} = \sigma^{*}_{ac}\, \sigma^{-1\, cb}$$

donde:

$$\sigma^{-1\, cb} = \begin{pmatrix} 0 & -g^{\beta\gamma} \\ g^{\beta\gamma} & \Theta^{\beta\sigma} \end{pmatrix} \qquad (5.141)$$

$$\sigma^{*}_{ac} = \begin{pmatrix} \Omega_{\alpha\beta} & \mathcal{G}_{\alpha\beta} \\ -\mathcal{G}_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \qquad (5.142)$$

realizando el producto, tenemos:

$$\Lambda_a{}^{b} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{\alpha}{}^{\beta} & \Sigma_{\alpha}{}^{\beta} \\ 0 & \mathcal{G}_{\alpha}{}^{\beta} \end{pmatrix} \qquad (5.143)$$

de donde obtenemos las siguientes constantes:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 2\mathcal{Y}^{\alpha}{}_{\alpha} \\
&\vdots \\
I_k &= 2\mathcal{Y}^{\alpha}{}_{\mu_1}\mathcal{Y}^{\mu_1}{}_{\mu_2}\cdots\mathcal{Y}^{\mu_{k-1}}{}_{\alpha}
\end{aligned}
\tag{5.144}
$$

En la tabla que a continuación presentamos se encuentran todas las constantes de movimiento asociadas a un MES anteriormente calculadas.
Antes de pasar a la siguiente sección quisiéramos dar la prueba explícita de que M1* es efectivamente una constante. Para el resto de la funciones que aparecen en la tabla V-4 es inmediato observar que su derivada covariante a lo largo de la geodésica es cero.
Tomando la derivada de M1* tenemos:

$$M_1{}^{*}{}_{;\lambda} P^{\lambda} = \mathcal{Y}_{\alpha\beta} K^{\beta}{}_{\mu;\nu;\lambda} P^{\alpha}P^{\mu}P^{\nu}P^{\lambda} = \mathcal{Y}_{\alpha\beta} K^{\beta}{}_{(\mu;\nu;\lambda)} P^{\alpha}P^{\mu}P^{\nu}P^{\lambda}$$

usando la ecuación de simetría (5.82) :

$$K^{\beta}{}_{(\mu;\nu;\lambda)} - K^{\alpha}{}_{\mu} R^{\beta}{}_{\nu\lambda\gamma} = 0$$

tenemos que:

$$M_1{}^{k}{}_{;\lambda} P^{\lambda} = 3\, K_{(\alpha\beta;\sigma)} R^{\beta}{}_{\nu\lambda\gamma} K^{\gamma}{}_{\mu} P^{\mu} P^{\alpha}P^{\nu}P^{\lambda}P^{\sigma}$$

que podemos escribir equivalentemente como:

$$= (K^{\gamma}{}_{\mu} P^{\mu}) \left\{ K_{(\alpha\beta;\sigma)} R^{\beta}{}_{\nu\lambda\gamma} + K_{(\nu\beta;\sigma)} R^{\beta}{}_{\alpha\lambda\gamma} + K_{(\alpha\beta;\nu)} R^{\beta}{}_{\sigma\lambda\gamma} \right\} P^{\alpha}P^{\nu}P^{\lambda}P^{\sigma}$$

escribiendo la generalización de (4.40) para tensores de tipo (0,3):

$$[\nabla_{\lambda}, \nabla_{\gamma}] T_{\nu\alpha\sigma} = R^{\beta}{}_{\nu\lambda\gamma} T_{\beta\alpha\sigma} + R^{\theta}{}_{\alpha\lambda\gamma} T_{\nu\theta\sigma} + R^{\omega}{}_{\sigma\lambda\gamma} T_{\nu\alpha\omega}$$

tenemos, usando la ecuación (5.90) de los MES la siguiente relación entre $K_{\alpha\beta}$ y el tensor de curvatura:

$$R^{\beta}{}_{\nu\lambda\gamma} K_{(\alpha\beta;\sigma)} + R^{\beta}{}_{\alpha\lambda\gamma} K_{(\nu\beta;\sigma)} + R^{\beta}{}_{\sigma\lambda\gamma} K_{(\nu\alpha;\beta)} = 0$$

usando esta relación de la ecuación anterior que da la derivada de M1* a lo largo de la geodésica tenemos en resultado buscado.

TABLA V-4

CONSTANTES DE MOVIMIENTO ASOCIADAS A UN M.E.S.

$C = \frac{1}{2} K_{\alpha\beta} P^{\alpha} P^{\beta}$ (K1) si $K_{(\alpha\beta;\gamma)} = 0$
$J = K_{\alpha\beta} P^{\alpha} P^{\beta} - S K_{(\alpha\beta;\gamma)} P^{\alpha} P^{\beta} P^{\gamma}$ (K2)
$M_1 = g_{\alpha\beta} K^{\beta}{}_{\mu;\nu} P^{\alpha} P^{\mu} P^{\nu}$ (K3)
$M_2 = S g_{\alpha\beta} K^{\beta}{}_{\mu;\nu} P^{\alpha} P^{\mu} P^{\nu} - g_{\alpha\beta} K^{\alpha}{}_{\mu} P^{\beta} P^{\mu}$ (K4)
$Q = \xi_{\alpha} P^{\alpha} - K_{\alpha\beta} P^{\alpha} P^{\beta} S + \frac{S^2}{2} K_{\alpha\beta;\gamma} P^{\alpha} P^{\beta} P^{\gamma}$ (K5)
$M_1^{*} = \mathcal{G}_{\alpha\beta} K^{\beta}{}_{\mu;\nu} P^{\alpha} P^{\mu} P^{\nu}$ (K6)
$M_2^{*} = S \mathcal{G}_{\alpha\beta} K^{\beta}{}_{\mu;\nu} P^{\alpha} P^{\mu} P^{\nu} - \mathcal{G}_{\alpha\beta} K^{\alpha}{}_{\gamma} P^{\beta} P^{\gamma}$ (K7)
$I_k = 2\,\mathrm{tr}_3 \left(\mathcal{G}_{\alpha\beta}\right)^k$ (K8) $k = 1, \dots n$
$\mathcal{G}_{\alpha\beta} \equiv 3 K_{(\alpha\beta;\gamma)} P^{\gamma}$

5.-SIMETRIAS DE UN ESPACIO DE RIEMANN Y MAPEADORES ESPECIALES DE SIMETRIA.-

A continuación, demostraremos el teorema (+) de la sección 2 del presente capítulo que afirma que a cada transformación de simetría del espacio le podemos asociar un MES.
Comenzaremos con el primer tipo de simetría discutido;

(1) Movimientos [M].-
Si ξ^{μ} es un movimiento, entonces:

$$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)} \tag{5.145}$$

es un MES y por lo tanto:

$$\xi_{(\alpha;\beta)}\ \dot{q}^{\alpha} \tag{5.146}$$

es una simetría lineal en la velocidad (SLV).
Demostración:
De acuerdo con (5.15) si ξ es un movimiento, entonces $h_{\alpha\beta}=\emptyset$ y $K_{\alpha\beta}$ definido en (5.145) cumple trivialmente (5.90).
En este caso la SLV es igual a cero.

(2) Colineaciones afines [CA].-

Si ξ es una CA entonces $K_{\alpha\beta}$ definido en (5.145) es un MES y (5.146) es una SLV.
Demostración:
Debido a ,(5.38) si ξ es una colineación afín, $h_{\alpha\beta;\gamma}=\emptyset$ de donde $K_{\alpha\beta;\gamma}=\emptyset$ lo cual es una solución particular de (5.90).
Observemos que debido a (5.146) tenemos asociada a toda CA una SLV que debido a lo anterior es Noetheriana.
Es interesante darse cuenta que en este caso estamos trabajando con las CA como simetrías Noetherianas aún cuando en el capítulo anterior consideramos a tales transformaciones con simetrías de s-equivalencia.

(3) Movimientos conformes [MC].-
Si ξ es un MC entonces:

$$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)} - \sigma g_{\alpha\beta} \tag{5.147}$$

es un MES y:

$$\left[\ \xi_{(\alpha;\beta)} - \sigma g_{\alpha\beta}\right] \dot{q}^{\alpha} \tag{5.148}$$

es una SLV.

Demostración:

Si ξ es un MC entonces $K_{\alpha\beta}$ definido en (5.147) es igual a cero debido a (5.45) y es por lo tanto una solución de (5.9Ø)

En este caso la SLV es cero.

(4) Movimientos homotéticos [MH].-

Si ξ^{μ} es un MH entonces (5.145) es un MES y (5.146) es una SLV Noetheriana.

Demostración:

Los MH satisfacen (5.49) y por lo tanto el MES correspondiente cumple que $K_{\alpha\beta}=\emptyset$ y por lo tanto es solución de (5.9Ø) lo que ademas muestra que la SLV es Noetheriana.

(5) Colineacion proyectiva [CP].-

Si ξ^{μ} es una CP entonces $K_{\alpha\beta}$ definido como:

$$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)} - 2\varphi g_{\alpha\beta} \qquad (5.149)$$

es un MES y:

$$\left[\xi_{(\alpha;\beta)} - 2\varphi g_{\alpha\beta} \right] \dot{q}^{\alpha} \qquad (5.15\emptyset)$$

es una SLV Noetheriana.

Demostración:

De (5.149) tenemos:

$$\tfrac{1}{2} K_{(\alpha\beta;\gamma)} = \xi_{(\alpha;\beta);\gamma} + \xi_{(\beta;\gamma);\alpha} + \xi_{(\alpha;\gamma);\beta} - 2\varphi_{;\gamma} g_{\alpha\beta} - 2\varphi_{;\alpha} g_{\beta\gamma} - 2\varphi_{;\beta} g_{\alpha\gamma}$$

que podemos escribir como:

$$\tfrac{1}{2} K_{(\alpha\beta;\gamma)} = \left\{ \xi_{(\alpha;\beta);\gamma} + g_{\alpha\beta}\varphi_{,\gamma} + \tfrac{1}{2} g_{\beta\gamma}\varphi_{,\alpha} + \tfrac{1}{2} g_{\alpha\gamma}\varphi_{,\beta} \right\} +$$
$$+ \left\{ \xi_{(\beta;\gamma);\alpha} + g_{\gamma\beta}\varphi_{,\alpha} + \tfrac{1}{2} g_{\beta\alpha}\varphi_{,\gamma} + \tfrac{1}{2} g_{\gamma\alpha}\varphi_{,\beta} \right\} + \left\{ \xi_{(\alpha;\gamma);\beta} + \right.$$
$$\left. + g_{\alpha\gamma}\varphi_{,\beta} + \tfrac{1}{2} g_{\gamma\beta}\varphi_{,\alpha} + \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta}\varphi_{,\gamma} \right\}$$

De (5.53) que es la ecuación que define a las CP tenemos que cada uno de los términos encerrados entre parentesis es cero y por lo tanto tenemos que $K_{\alpha\beta}$ satisface:

$$K_{(\alpha\beta;\gamma)} = 0$$

lo que ademas muestra que la SLV es Noetheriana.

(6) Colineacion conforme [CCON].-

Si ξ es una CCON entonces:

$$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)} - \tau\, g_{\alpha\beta} \tag{5.151}$$

es un MES, y:

$$\left[\, \xi_{(\alpha;\beta)} - \tau\, g_{\alpha\beta} \,\right] \dot{q}^{\alpha} \tag{5.152}$$

es una SLV Noetheriana.
Demostración:
De (5.151):

$$K_{\alpha\beta;\gamma} = \xi_{(\alpha;\beta);\gamma} - \tau_{,\gamma}\, g_{\alpha\beta}$$

y debido a (5.58) tenemos que $K_{\alpha\beta;\gamma} = \emptyset$ y (5.9∅) se cumple, ademas de mostrar esto que la SLV es Noetheriana.

(7) Colineaciones de curvatura especiales (CCE).-

Si ξ^{μ} es una CCE entonces $K_{\alpha\beta}$ definido en (5.145) es un MES y (5.146) es una SLV de s-equivalencia.
Demostración:
De (5.145) tenemos que:

$$K_{\alpha\beta;\gamma;\mu} = \xi_{(\alpha;\beta);\gamma;\mu}$$

y en virtud de (5.64) tenemos que $K_{\alpha\beta}$ satisface efectivamente (5.9∅).
Observemos que en general para una colineación de curvatura se tiene que:

$$K_{(\alpha\beta;\gamma)} \neq 0$$

y por lo tanto la simetría de la ecuación de geodesicas asociada en este caso es una simetría de s-equivalencia.

(8) Colineaciones conformes especiales [CCONE].-

Si ξ^{μ} es una CCONE entonces tenemos por un lado que los $K_{\alpha\beta}$ definidos en (5.151) y (5.145) son MES y ademas que (5.146) y (5.152) son SLV.
Demostración:
se sigue directamente de lo demostrado en (7) y (8) y del hecho de que las CCONE son CCON y CCCE simultaneamente.

La simetría asociada en (5.145) es general de s-equivalencia en tanto que la asociada en (5.152) es Noetheriana.

(9) Movimientos conformes especiales [MCE].-

Este tipo de simetrías del espacio tienen la propiedad de ser MC y CCE de donde tenemos que en virtud de lo demostrado en (3) y (7) se cumple que $K_{\alpha\beta}$ definido en (5.147) es un MES así como tambien el definido en (5.145). Por otro lado (5.146) y (5.148) son SLV. De estas dos simetrías, la obtenida a partir de (5.146) es en general de s-equivalencia en tanto que la asociada en (5.148) es Noetheriana.

(10) Colineaciones proyectivas especiales [CPE].-

En este caso tenemos que (5.149) y (5.145) son MES y que ((5.146) y (5.150) son SLV. La primera de estas simetrías es de s-equivalencia y la segunda Noetheriana.
La demostración de esto se sigue directamente de lo demostrado en (5) y (7) y de la condición de simetria Noetheriana (5.105).

En tabla V -5 resumimos la asignación que hemos hecho de uno o varios MES a simetrías del espacio.
Observemos que los tensores $K_{\alpha\beta}$ que hemos construido a partir de las simortías del espacio son soluciones particulares de la ecuación (5.90).
Debido a esto, una forma equivalente de establecer la relación ó conexión entre simetrías del espacio y MES es partiendo de la ecuación (5.90) y buscando soluciones particulares a dicha ecuación.
El tipo de solución mas sencillo es:

$$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)} \tag{5.153}$$

donde ξ^{α} es un vector.
Soluciones particulares de (5.90) de este tipo son:

$$K_{\alpha\beta} = 0 \tag{5.154}$$

$$K_{\alpha\beta;\gamma} = 0 \tag{5.155}$$

$$K_{\alpha\beta;\gamma} = \tau_{,\gamma}\, g_{\alpha\beta} \qquad \tau_{;\gamma\mu} = 0 \tag{5.156}$$

$$K_{\alpha\beta;\gamma} = 2g_{\alpha\beta}\,\varphi_{,\gamma} + g_{\beta\gamma}\,\varphi_{,\alpha} + g_{\alpha\gamma}\,\varphi_{,\beta} \tag{5.157}$$

$$\varphi_{;\gamma\mu} = 0$$

TABLA V-5

SIMETRIA DE ESPACIO	MES ASOCIADO	TIPO DE SIMETRIA DE LA GEODESICA
M C.A M.H.	$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)}$	NOETHERIANA
C.C. CCONE MCONE CPE	$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\dot{\beta})}$	S-EQUIVALENCIA
MC CP CCON	$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)} - n\psi g_{\alpha\beta}$	NOETHERIANA

$$K_{\alpha\beta;\gamma;\mu} = 0 \qquad (5.158)$$

La solución (5.154) implica que ξ^{μ} satisface (5.15) y por lo tanto que es un movimiento.
La solución (5.155) implica que ξ^{μ} cumple (5.38) y por lo tanto que es una CA.
La solución (5.156) lleva, debido a (5.66) a que ξ^{μ} es una CCONE.
Por otro lado (5.157) en virtud de (5.53) y (5.72) implica que ξ^{μ} es una CPE.
Por último, (5.158) conduce a que ξ^{μ} es una CCE.
El tipo de solución que sigue en complejidad a (5.153) es:

$$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)} - n\,\psi\, g_{\alpha\beta} \qquad n \in \mathbb{N} \qquad (5.159)$$

con ψ función escalar.
Las soluciones particulares de (5.90) de este tipo son:

$$n=1 \;;\; \psi = \sigma \qquad K_{\alpha\beta} = 0 \qquad (5.160)$$

$$n=1 \;;\; \psi = \tau \qquad K_{\alpha\beta;\gamma} = 0 \qquad (5.161)$$

$$n=2 \;;\; \psi = \varphi \qquad 2K_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\beta\gamma}\,\varphi_{,\alpha} + g_{\alpha\gamma}\,\varphi_{,\beta} - 2g_{\alpha\beta}\,\varphi_{,\gamma} \qquad (5.162)$$

Notemos que (5.162) es efectivamente una solución de la ecuación de los MES ya que su simetrización da cero.
La solución (5.61) lleva a la conclusión de que ξ^{μ} es una CCON en virtud de (5.58).
Por último, (5.162) implica que:

$$2\left\{ \xi_{(\alpha;\beta);\gamma} - 2\varphi_{,\gamma}\, g_{\alpha\beta} \right\} = g_{\beta\gamma}\,\varphi_{,\alpha} + g_{\alpha\gamma}\,\varphi_{,\beta} - 2g_{\alpha\beta}\,\varphi_{,\gamma}$$

de donde:

$$2\xi_{(\alpha;\beta);\gamma} = g_{\beta\gamma}\,\varphi_{,\alpha} + g_{\alpha\gamma}\,\varphi_{,\beta} + 2g_{\alpha\beta}\,\varphi_{,\gamma}$$

y de (5.53) concluimos que ξ^{μ} es una CP.
Con lo anterior hemos demostrado como las simetrías del espacio surgen de manera natural como soluciones particulares de la ecuación (5.90). La tabla V -6 que a continuación mostramos resume esta información.
Debemos tener presente no obstante que la ecuación (5.90) admite mas soluciones que la anteriormente discutidas lo cual abre mas posibilidades para la construcción de simetrías y constantes de movimiento para la ecuación de

TABLA V-6

SOLUCIONES PARTICULARES DE LA ECUACION

TIPO DE SOLUCION	SOLUCION PARTICULAR	NOMBRE
$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)}$	$K_{\alpha\beta} = 0$	MOVIMIENTO
$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)}$	$K_{\alpha\beta;\gamma} = 0$	COLINEACION AFIN
$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)}$	$K_{\alpha\beta} = \sigma_0 g_{\alpha\beta} \quad \sigma_0 = cte$	MOVIMIENTO HOMOTETICO
$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)}$	$K_{\alpha\beta;\gamma} = \tau_{,\gamma} g_{\alpha\beta} \quad \tau_{;\mu\gamma} = 0$	COLINEACION CONFORME ESPECIAL
$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)}$	$2K_{\alpha\beta;\gamma} = 2\varphi_{,\gamma} g_{\alpha\beta} + \varphi_{,\alpha} g_{\beta\gamma} + \varphi_{,\beta} g_{\alpha\gamma} \quad \varphi_{;\mu\gamma} = 0$	COLINEACION PROYECTIVA ESPECIAL
$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)}$	$K_{\alpha\beta} = \sigma g_{\alpha\beta} \quad \sigma_{;\mu\gamma} = 0$	MOVIMIENTO CONFORME ESPECIAL
$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)}$	$K_{\alpha\beta;\gamma;\mu} = 0$	COLINEACION DE CURVATURA ESPECIAL
$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)} - \sigma g_{\alpha\beta}$	$K_{\alpha\beta} = 0$	MOVIMIENTO CONFORME
$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)} - \tau g_{\alpha\beta}$	$K_{\alpha\beta;\gamma} = 0$	COLINEACION CONFORME
$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)} - \varphi g_{\alpha\beta}$	$2K_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\beta\gamma}\varphi_{,\alpha} + g_{\alpha\gamma}\varphi_{,\beta} - 2g_{\alpha\beta}\varphi_{,\gamma}$	COLINEACION PROYECTIVA

geodesicas.
Nos hemos restringido a este tipo de soluciones debido a que provienen de simetrías del espacio específicas pero en general para una métrica dada uno podría intentar resolver la ecuación (5.90) sin proponer necesariamente soluciones particulares del tipo dado anteriormente.
Tenemos entonces dos maneras equivalentes de establecer la relación entre simetrías del espacio y MES. Por un lado a cada simetría del espacio le podemos asociar un tensor $K_{\alpha\beta}$ que sea solución de (5.90).
Por otro lado podemos llegar a las simetrías del espacio mediante soluciones particulares de la ecuación de los MES. Este último camino es importante debido a que como ya hemos mencionado podemos buscar soluciones particulares distintas a las encontradas anteriormente y asi obtener nuevos tipos de simetrías del espacio que tal vez tengan interpretaciones geométricas sencillas.

6.-CONSTANTES DE MOVIMIENTO ASOCIADAS A SIMETRIAS DEL ESPACIO.-

Habiendo establecido la conexión entre simetrías del espacio y MES pasaremos ahora al importante punto de la asignación de las constantes.
Según comentamos anteriormente no hay una manera natural y sistemática de asociar constantes a simetrías del espacio ya que en general estas no son simetrías de la ecuacion de geodesicas.
Sin embargo, hemos visto como podemos construir tensores $K_{\alpha\beta}$ soluciones particulares de la ecuación de los MES a partir de las simetrías del espacio, esta información esta resumida en la tabla 5-6.
Por otro lado, en la tabla 5-4 se encuentran todas las constantes asociadas a un MES.
Usaremos la información contenida en ambas tablas para asocia a cada simetría del espacio una o varias constantes de movimiento.

(1) Movimientos [M].-

Si tenemos un M podemos construir una solución particular de la ecuación de los MES del tipo (5.153) con (5.154) .
Consultando la tabla 4 tenemos que la unica constante que podemos asociar es:

$$Q = \xi^{\alpha} P_{\alpha} \qquad (5.163)$$

que es precisamente la constante (C1) de la tabla 5-3a.
Recordemos que esta constante fue tambien obtenida en el capitulo 4 considerando a ξ^{μ} directamente como una simetría de las geodesicas.

(2) Colineaciones afines [CA].-

A partir del solución particular de la ecuación de los MES que aparece en la tabla 5-6 podemos consultando la tabla de 5-4 asociar a una CA las siguientes constantes:

$$Q = \xi_\alpha P^\alpha - 5\, \xi_{(\alpha;\beta)} P^\alpha P^\beta \tag{5.164}$$

$$M_2 = \xi_{(\alpha;\beta)} P^\alpha P^\beta \tag{5.165}$$

que coinciden con (C5) y (C4) respectivamente de la tabla 5-3a.
Observemos que estas constantes, ademas de otras , fueron obtenidas en el capítulo anterior considerando a las CA como simetrías no-Noetherianas de la ecuación de geodesicas.

(3) Movimientos Conformes [MC].-

El MES asociado a un MC es tal que todas sus constantes son igual a cero.
Lo único que podemos hacer en este caso es recordar que en un espacio seudo-Riemanniano del tipo usado en Relatividad General, estas transformaciones son simetrías de las geodesicas nulas y por lo tanto:

$$\xi^\mu P_\mu \tag{5.166}$$

es una constante para dicho tipo de geodesicas. Esta constante es precisamente (C7) de la tabla V-3a

(4) Movimiento homotetico.-

Como son casos particulares de los MCON se tiene para geodésicas nulas la constante (5.166) que es la constante C3.
Por otro lado para cualquier tipo de geodésica tenemos las constantes:

$$M_2 = \varphi_0\, g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta \tag{5.167}$$

$$Q = \xi_\alpha P^\alpha - 5\, \varphi_0\, g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta \tag{5.168}$$

que son las constantes (C2) y (C14) de la tabla 5-3.
Observemos que (5.167) es simplemente una constante numérica multiplicada por la masa.

(5) Colineaciones proyectivas [CP].-

De acuerdo con las tablas V-6 y V-4 tenemos asociado a las CP la constante:

$$M_2 = [\xi_{(\alpha;\beta)} - 2\varphi g_{\alpha\beta}]\, p^\alpha p^\beta \qquad (5\text{-}169)$$

que es la constante (C5) de la tabla V-3a.

(6) Colineación Conforme [CCON].-

En este caso tenemos asociada la constante:

$$M_2 = [\,\xi_{(\alpha;\beta)} - \sigma . g_{\alpha\beta}\,]\, p^\alpha p^\beta \qquad (5\text{-}170)$$

que coincide con (C8).

(7) Colineación de curvatura especial [CCE].-

A partir de una simetría de este tipo podemos formar una solución de la ecuación de los MES del tipo:

$$K_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)}$$

y como en general sucederá que: $K_{(\alpha\beta;\gamma)} \neq 0$

podremos asociar varias constantes de movimiento. Es de hecho en este tipo de simetrías en en el que el formalismo de los Lagrangianos equivalentes conduce a nuevas constantes de movimiento:

$$M_1 = \xi_{(\alpha;\beta);\gamma}\, p^\alpha p^\beta p^\gamma \qquad (5.171)$$

$$M_2 = -\xi_{(\alpha;\beta)}\, p^\alpha p^\beta + s\, \xi_{(\alpha;\beta);\gamma}\, p^\alpha p^\beta p^\gamma \qquad (5.172)$$

$$Q = \xi_\alpha\, p^\alpha - s\, \xi_{(\alpha;\beta)}\, p^\alpha p^\beta + \frac{s^2}{2}\, \xi_{(\alpha;\beta);\gamma}\, p^\alpha p^\beta p^\gamma \qquad (5.173)$$

Para escribir el resto de las constantes ,observemos que, de acuerdo con (5.101):

$$\mathcal{Y}_{\alpha\beta} = 3\, \xi_{(\alpha;\beta;\gamma)}\, p^\gamma \qquad (5.174)$$

de donde:

$$M_1^{*} = 3\,\xi_{(\alpha;\beta;\gamma)}\,\xi^{(\beta}{}_{;\mu);\nu}\; p^\alpha p^\gamma p^\mu p^\nu \qquad (5.175)$$

$$M_2^{*} = 39\,\xi_{(\alpha;\beta;\gamma)}\,\xi^{(\beta}{}_{;\mu);\nu}\; p^\alpha p^\gamma p^\mu p^\nu - 3\,\xi_{(\alpha;\beta;\gamma)}\,\xi^{(\alpha}{}_{;\mu)}\; p^\gamma p^\beta p^\mu \qquad (5.176)$$

El teorema de las trazas conduce a las constantes:

$$I_k = 6\,\xi_{(\alpha;}{}^{\beta_1}{}_{;\mu_1)}\,\xi_{(\beta_1;}{}^{\beta_2}{}_{;\mu_2)}\cdots\xi_{(\beta_{k-1};}{}^{\alpha}{}_{;\mu_k)}\; p^{\mu_1}\cdots p^{\mu_k} \qquad (5.177)$$

para k=1 tenemos:

$$I_1 = \{\,4\,\xi_{(\mu;}{}^{\alpha)}{}_{;\alpha} + 2\,\xi_{(\alpha;}{}^{\alpha)}{}_{;\mu}\,\}\, p^\mu \qquad (5.178)$$

recordando que:

$$h_{\alpha\beta} = \xi_{(\alpha;\beta)} \qquad (5.179)$$

y definiendo:

$$h \equiv h^\alpha{}_\alpha \qquad (5.180)$$

tenemos que:

$$I_1 = 2\,\{\,2\,h^\alpha{}_{\beta;\alpha} + h_{;\beta}\,\}\, p^\beta \qquad (5.181)$$

para k=2 tenemos:

$$I_2 = \xi_{(\alpha;}{}^{\beta_1}{}_{;\mu_1)}\,\xi_{(\beta_1;}{}^{\alpha}{}_{;\mu_2)}\; p^{\mu_1} p^{\mu_2} \qquad (5.182)$$

que podemos desarrollar como:

$$I_2 = 2/3\,\{\, h^\nu{}_{\lambda;\mu_1} h^\lambda{}_{\nu;\mu_2} + 2h^\nu{}_{\mu_1;\lambda}\,[\, h_{\nu\mu_2;}{}^{\lambda} + h_{\mu_2}{}^{\lambda}{}_{;\nu} - 2\,h^\lambda{}_{\nu;\mu_2}\,]\,\}\, p^{\mu_1} p^{\mu_2} \qquad (5.183)$$

Las constantes (5.171) ,(5.172) y (5.173) coinciden con (C-10), (C-23) y (C-22) respectivamente.
Sin embargo, el resto de las constantes (5.175), (5.176) y (5.177) no aparecen en (K-L 1981) y según creemos son en general nuevas constantes de movimimiento asociadas a CCE.
Debemos darnos cuenta sin embargo que no hemos obtenido la constante (C-11). El teorema de las trazas para k=1 lleva a la constante:

$$4\, h^{\alpha}{}_{\beta;\alpha}\, P^{\beta} + 2\, h_{;\alpha}\, P^{\alpha}$$

esto es hemos obtenido la constante (C-11) sumada a la nueva constante:

$$h^{\alpha}{}_{\beta;\alpha}\, P^{\beta} \tag{5.184}$$

8.- Colineaciones conformes especiales [CCONE].-

Consultando la tabla V-6 observamos que a partir de una CCONE podemos formar una solución de la ecuación de los MES que nos da las siguientes constantes de movimiento :

$$M_1 = m\, \mathcal{T}_{;\alpha}\, P^{\alpha} \tag{5.185}$$

$$M_2 = 5m\, \mathcal{T}_{;\alpha}\, P^{\alpha} - \xi_{(\alpha;\beta)}\, P^{\alpha} P^{\beta} \tag{5.186}$$

$$Q = \xi^{\alpha} P_{\alpha} - 5\, \xi_{(\alpha;\beta)}\, P^{\alpha} P^{\beta} + \frac{5^2}{2}\, m\, \mathcal{T}_{;\alpha}\, P^{\alpha} \tag{5.187}$$

estas constantes coinciden con (C-9) ,(salvo por el factor constante m), (C-21) y (C-20) respectivamente.
Para encontrar el resto de las constantes conviene calcular primero :

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = 3\, K_{(\alpha\beta;\gamma)}\, P^{\gamma} = 3\, g_{(\alpha\beta}\, \mathcal{T}_{,\gamma)}\, P^{\gamma} \tag{5.188}$$

definiendo: $$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = (\mathcal{T}_{,\gamma} P^{\gamma})\, g_{\alpha\beta} + 2\, P_{(\alpha}\, \mathcal{T}_{,\beta)}$$

$$m^{*} \equiv \mathcal{G}_{\alpha\beta}\, P^{\alpha} P^{\beta} \tag{5.189}$$

tenemos, usando la tabla V-4 las siguientes constantes:

$$M_1^* = m^* \; \zeta_{,\nu} P^{\nu} \tag{5.190}$$

$$M_2^* = 5m^* \; \zeta_{,\nu} P^{\nu} - g_{\alpha\beta} \xi^{(\alpha}{}_{;\mu)} P^{\beta} P^{\mu} \tag{5.191}$$

A continuación escribiremos explícitamente estas constantes para ver si estan relacionadas trivialmente o no con la constantes anteriormente encontradas:

$$M_1^* = 3 \left(\zeta_{,\alpha} P^{\alpha} \right)^2 m \tag{5.192}$$

esta constante es simplemente el cuadrado de (C-9) multiplicado por la constante 3m.
Para M*2 tenemos que:

$$M_2^* = 3 (\zeta_{,\gamma} P^{\gamma}) M_2 + \xi_{(\alpha;\beta)} P^{\alpha} \left\{ (\zeta_{,\gamma} P^{\gamma}) P^{\beta} - m \zeta^{,\beta} \right\} \tag{5.193}$$

y por lo tanto tenemos asociada una constante(nueva):

$$N_1 = \xi_{(\alpha;\beta)} P^{\alpha} \left\{ (\zeta_{,\gamma} P^{\gamma}) P^{\beta} - m \zeta^{,\beta} \right\} \tag{5.194}$$

El teorema de las trazas, conduce a las constantes:

$$I_k = 2 \, tr_3 \left\{ (\zeta_{,\gamma} P^{\gamma}) g_{\alpha\beta} + 2 P_{(\alpha} \zeta_{,\beta)} \right\}^k \tag{5.195}$$

para k=1 tenemos:

$$I_1 = 2 (\zeta_{,\gamma} P^{\gamma}) \, tr_3 \, g_{\alpha\beta} + 4 \, tr_3 \, P_{(\alpha} \zeta_{,\beta)}$$

definiendo:

$$g \equiv tr_3 \, g_{\alpha\beta} \tag{5.196}$$

que es una constante numérica, tenemos que:

$$I_1 = (2g+4)\, Z_{,\alpha} P^{\alpha} \tag{5.197}$$

la cual es un múltiplo de (C-9).
Para k=2 tenemos:

$$(M^2)_{\alpha}{}^{\gamma} = (Z_{,\mu}P^{\mu})^2 \delta_{\alpha}^{\gamma} + 3(Z_{,\mu}P^{\mu}) P_{\alpha} Z_{,}{}^{\gamma} + 3(Z_{,\mu}P^{\mu}) P^{\gamma} Z_{,\alpha} + (Z_{,\mu}Z_{,}{}^{\mu}) P_{\alpha}P^{\gamma} + m\, Z_{,\alpha} Z_{,}{}^{\gamma} \tag{5.198}$$

de donde:

$$I_2 = 2(M^2)_{\alpha}^{\alpha} = (6+n)(Z_{,\gamma}P^{\gamma})^2 + 2(Z_{,\gamma}Z_{,}{}^{\gamma})\, m \tag{5.199}$$

para k=3:

$$(M^3)_{\alpha\lambda} = (Z_{,\mu}P^{\mu})^3 g_{\alpha\lambda} + 5m\,(Z_{,\mu}P^{\mu}) Z_{,\alpha}Z_{,\lambda} + 5(Z_{,\mu}Z_{,}{}^{\mu})(Z_{,\nu}P^{\nu}) P_{\alpha}P_{\lambda} + \{7(Z_{,\mu}P^{\mu})^2 + (Z_{,\nu}Z_{,}{}^{\nu})m\} \times \{P_{\lambda}Z_{,\alpha} + P_{\alpha}Z_{,\lambda}\} \tag{5.200}$$

de donde:

$$I_3 = 2(Z_{,\nu}P^{\nu})^3 g + 20m(Z_{,\nu}P^{\nu})(Z_{,\mu}Z_{,}{}^{\mu}) + 2[7(Z_{,\nu}P^{\nu})^2 + m\,(Z_{,\nu}Z_{,}{}^{\nu})](Z_{,\nu}P^{\nu}) \tag{5.201}$$

por último, para k=4 se tiene:

$$(M^4)_{\alpha}{}^{\gamma} = (Z_{,\nu}P^{\nu})^4 \delta_{\alpha}^{\gamma} + m\{17(Z_{,\nu}P^{\nu})^2 + (Z_{,\nu}Z_{,}{}^{\nu})m\} Z_{,\alpha} Z_{,} + \{17(Z_{,\nu}P^{\nu})^2 + (Z_{,\mu}Z_{,}{}^{\mu})m\}(Z_{,\mu}Z_{,}{}^{\mu})P_{\alpha}P^{\gamma} + \{15(Z_{,\nu}P^{\nu})^3 + 6m(Z_{,\nu}Z_{,}{}^{\nu})(Z_{,\mu}P^{\mu}) + (Z_{,\nu}Z_{,}{}^{\nu})m\}\{Z_{,\alpha}P^{\gamma} + P_{\alpha}Z_{,}{}^{\gamma}\} \tag{5.202}$$

$$I_4 = (30+n)(Z_{,\nu}P^{\nu})^4 + 46(Z_{,\nu}P^{\nu})^2 m(Z_{,\mu}Z_{,}{}^{\mu}) + 2m^2(Z_{,\nu}Z_{,}{}^{\nu})^2 + 2m(Z_{,\nu}Z_{,}{}^{\nu})(Z_{,\mu}P^{\mu})$$

Observando que $Z_{,\nu}Z_{,}{}^{\nu}$ es símplemente una constante numérica es inmediato mostrar que I1, I2, I3, I4 estan trivialmente relacionadas con (5.185) y por lo tanto con (C9).

9.- Movimientos conformes especiales [MCE].-

Para este tipo de transformaciones tenemos ademas de la constante (5.166) para geodésicas nulas, las constantes:

$$M_1 = m\,\sigma_{;\alpha}\,P^{\alpha} \tag{5.203}$$

$$M_2 = s m\,\sigma_{;\alpha}\,P^{\alpha} \quad m\sigma \tag{5.204}$$

$$Q = \xi^{\alpha} P_{\alpha} - s m \sigma + \frac{s^2}{2} m\,\sigma_{;\alpha}\,P^{\alpha} \tag{5.205}$$

que son precisamente las constantes (C-13), (C-19) y (c-18) respectivamente. En este caso el tensor $\mathcal{N}_{\alpha\beta}$ resulta ser:

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta} = (\sigma_{,\gamma}\,P^{\gamma})\,g_{\alpha\beta} + 2\,P_{(\alpha}\,\sigma_{,\beta)} \tag{5.206}$$

de donde tenemos las siguientes costantes:

$$M_1^{*} = m^{*}\,\sigma_{,\alpha}\,P^{\alpha} \tag{5.207}$$

$$M_2^{*} = s m^{*}\,\sigma_{,\mu}\,P^{\mu} - m^{*}\sigma \tag{5.208}$$

de (5.206) tenemos que:

$$m^{*} = 3m\,(\sigma_{,\alpha}\,P^{\alpha}) \tag{5.209}$$

de donde:

$$M_1^{*} = 3m\,(\sigma_{,\alpha}\,P^{\alpha})^{2} \tag{5.210}$$

$$M_2^{*} = 3\,(\sigma_{,\alpha}\,P^{\alpha})\;M_2 \tag{5.211}$$

Estas dos constantes estan como acabamos de ver trivialmente relacionadas con las encontradas anteriormente y por lo tanto no conducen a resultados nuevos. A continuación aplicaremos el teorema de las trazas. Como $\mathcal{Y}_{\alpha\beta}$ en (5.206) es análogo a $\mathcal{Y}_{\alpha\beta}$ en (5.188) tenemos que debido a lo calculado anteriormente:

$$I_k = \{ (\sigma_{,\mu} P^{\mu}) g_{\alpha\beta} + 2 P_{(\alpha} \sigma_{,\beta)} \}^{k} \tag{5.212}$$

sustituyendo τ por σ en las expresiones calculadas para las CCONE tenemos directamente el valor de las constantes: I1, I2, I3, I4 las cuales estan trivialmente relacionadas con (C-3) y por lo tanto no conducen a nuevos resultados.

10.- Colineaciones proyectivas especiales [CPE].-

En este caso, ademas de la constante (5.169) tenemos las constantes:

$$M_1 = 2m\, \varphi_{;\alpha} P^{\alpha} \tag{5.213}$$

$$M_2 = 2m (\varphi_{,\nu} P^{\nu}) s - \xi_{(\alpha;\beta)} P^{\alpha} P^{\beta} \tag{5.214}$$

$$Q = \xi_{\alpha} P^{\alpha} - s\, \xi_{(\alpha;\beta)} P^{\alpha} P^{\beta} + m s^{2}\, \varphi_{;\alpha} P^{\alpha} \tag{5.215}$$

estas constantes coinciden con (C-6) ,(C-17) y (C-16) respectivamente. Por otro lado el tensor $\mathcal{Y}_{\alpha\beta}$ es en este caso:

$$\mathcal{Y}_{\alpha\beta} = 2(\varphi_{,\delta} P^{\delta}) g_{\alpha\beta} + 4 \varphi_{(,\alpha} P_{\beta)} \tag{5.216}$$

observemos que para el MES asociado a las [CPE] se tiene:

$$K^{\beta}{}_{\mu;\nu} = \frac{1}{2} \{ 2 \varphi_{,\nu} \delta^{\beta}_{\mu} + \varphi^{,\beta} g_{\mu\nu} + \delta^{\beta}{}_{\nu} \varphi_{,\mu} \} \tag{5.217}$$

de donde:

$$M_1^{*} = 11m (\varphi_{,\alpha} P^{\alpha})^{2} + m^{2} (\varphi_{,\beta} \varphi^{,\beta}) \tag{5.218}$$

esta constante esta trivialmente relacionada con las anteriores y por lo tanto

no es un resultado nuevo.
A continuación calcularemos la constante M2*:

$$M_2^{*} = 5M_1^{*} - \mathcal{G}_{\alpha\beta}\, K^{\alpha}{}_{\mu}\, P^{\beta} P^{\mu}$$

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}\, K^{\alpha}{}_{\mu}\, P^{\beta} P^{\mu} = 2\left\{ 2(\varphi_{,\gamma} P^{\gamma})\, \xi_{(\beta;\mu)} P^{\beta} P^{\mu} + \xi_{(\alpha;\mu)}\, \varphi_{,}{}^{\alpha} P^{\mu} m \right\}$$

de donde:

$$M_2^{*} = 4(\varphi_{,\gamma} P^{\gamma}) M_2 + \left\{ 3(\varphi_{,\gamma} P^{\gamma})^2 + m(\varphi_{,\beta}\varphi_{,}{}^{\beta}) \right\} m s - 2m\, \xi_{(\alpha;\beta)} P^{\alpha} \varphi_{,}{}^{\beta} \qquad (5.219)$$

de donde concluimos que asociada a una CPE tenemos la constante nueva:

$$N_2 = \left\{ 3(\varphi_{,\gamma} P^{\gamma})^2 + m(\varphi_{,\beta}\varphi_{,}{}^{\beta}) \right\} s - 2\, \xi_{(\alpha;\beta)} P^{\alpha} \varphi_{,}{}^{\beta} \qquad (5.220)$$

Por último, el teorema de las trazas afirma que:

$$I_k = 4\,\mathrm{tr}_3 \left\{ (\varphi_{,\gamma} P^{\gamma}) g_{\alpha\beta} + 2\, \varphi_{(,\alpha} P_{\beta)} \right\}^{k} \qquad (5.221)$$

cambiando ζ por φ y multiplicando por dos podemos calcular las constantes I k usando los resultados obtenidos para las CCONE. Haciendo esto es inmediato percatarse de que estas constantes estan trivialmente relacionadas con (C-6).

En la tabla que a continuación mostramos resumimos la información sobre las constantes asociadas a simetrías de espacio.
A la derecha de algunas costantes aparece la indicación $\equiv$ (C-i), esto indica que la constante correspondiente es igual o equivalente a la constante (C-i) de la tabla V-3.
La constantes nuevas estan denotadas con el símbolo (ǂ).
Debemos observar que las constantes asociadas a un MES que aparecen en la tabla V-5 no son todaś las que se pueden formar. Según lo indicado en la sección 5 del capítulo dos, si ξ es una simetría y C es una constante, entonces:

$$\mathcal{L}_{\xi}\, C = \text{constante.}$$

debido a esto, a cada una de las constantes de la tabla V-4 podemos asociarle otra constante tomando la derivada de Lie a lo largo de la simetría producida por el MES correspondiente.

Asimismo, podemos obtener mas constantes de movimiento aplicando el método recursivo que nos permitió obtener las constantes (4.159).

TABLA V-7

CONSTANTES DE MOVIMIENTO ASOCIADAS A SIMETRIAS DEL ESPACIO

MOVIMIENTOS

$$Q = \xi_\alpha P^\alpha \equiv (C_1)$$

COLINEACIONES AFINES

$$Q = \xi_\alpha P^\alpha - 5\, \xi_{(\alpha;\beta)} P^\alpha P^\beta \equiv (C15)$$

$$M_2 = \xi_{(\alpha;\beta)} P^\alpha P^\beta \equiv (C4)$$

MOVIMIENTOS HOMOTETICOS

$$Q = \xi_\alpha P^\alpha - 5\, \sigma_0\, g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta \equiv (C14)$$

$$M_2 = \sigma_0\, g_{\alpha\beta}\, P^\alpha P^\beta \equiv (C2)$$

COLINEACIONES PROYECTIVAS

$$M_2 = [\, \xi_{(\alpha;\beta)} - 2\varphi g_{\alpha\beta} \,] P^\alpha P^\beta \equiv (C5)$$

COLINEACION CONFORME

$$M_2 = [\, \xi_{(\alpha;\beta)} - \zeta g_{\alpha\beta} \,] P^\alpha P^\beta \equiv (C8)$$

TABLA V-7

CONSTANTES DE MOVIMIENTO ASOCIADAS A SIMETRIAS DEL ESPACIO

COLINEACIONES DE CURVATURA ESPECIALES

$$M_1 = h_{\alpha\beta;\gamma}\, p^\alpha p^\beta p^\gamma \quad \equiv (C10)$$

$$M_2 = -h_{\alpha\beta}\, p^\alpha p^\beta + s\, h_{\alpha\beta;\gamma}\, p^\alpha p^\beta p^\gamma \equiv (C23)$$

$$Q = \xi_\alpha\, p^\alpha - s\, h_{\alpha\beta}\, p^\alpha p^\beta + s^2/2\; h_{\alpha\beta;\gamma}\, p^\alpha p^\beta p^\gamma \equiv (C22)$$

$$M_1^* = 3\, h_{(\alpha\beta;\gamma)}\, h^\beta{}_{\mu;\nu}\, p^\alpha p^\gamma p^\mu p^\nu \qquad (*)$$

$$M_2^* = 3s\, h_{(\alpha\beta;\gamma)}\, h^\beta{}_{\mu;\nu}\, p^\alpha p^\gamma p^\mu p^\nu - 3 h_{(\alpha\beta;\gamma)}\, h^\alpha{}_\mu\, p^\beta p^\gamma p^\mu \quad (*)$$

$$I_k = 6\, h_{(\alpha}{}^{\beta_1}{}_{;\mu_1)}\, h_{(\beta_1}{}^{\beta_2}{}_{;\mu_2)} \cdots h_{(\beta_{k-1}}{}^{\alpha}{}_{;\mu_k)}\, p^{\mu_1} \cdots p^{\mu_k}$$

$$k = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

COLINEACIONES CONFORMES ESPECIALES

$$M_1 = m\, \sigma_{;\alpha}\, p^\alpha \equiv (C4)$$

$$M_2 = s m\, \sigma_{;\alpha}\, p^\alpha - \xi_{(\alpha;\beta)}\, p^\alpha p^\beta \equiv (C21)$$

(*) Constantes de movimiento nuevas.

TABLA V-7

CONSTANTES DE MOVIMIENTO ASOCIADAS A SIMETRIAS DEL ESPACIO

COLINEACIONES CONFORMES ESPECIALES

$$Q = \xi^\alpha P_\alpha - s\, h_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta + \frac{s^2}{2} m\, \zeta_{;\alpha} P^\alpha \quad \equiv (C20)$$

$$\mathcal{Y}_{\alpha\beta} \equiv (\zeta_{,\gamma} P^\gamma) g_{\alpha\beta} + 2 P_{(\alpha} \zeta_{,\beta)}$$

$$m^* \equiv \mathcal{Y}_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta$$

$$M_1{}^* = m^* \zeta_{,\nu} P^\nu \quad \equiv (C9)$$

$$M_2{}^* = s m^* \zeta_{,\nu} P^\nu - \mathcal{Y}_{\alpha\beta} h^\alpha{}_\mu P^\beta P^\mu$$

$$N_1 = h_{\alpha\beta} P^\alpha \{ (\zeta_{,\gamma} P^\gamma) P^\beta - m\, \zeta^{,\beta} \} \quad (*)$$

$$I_k = 2\, tr \{ (\zeta_{,\gamma} P^\gamma) g_{\alpha\beta} + 2 P_{(\alpha} \zeta_{,\beta)} \}^k \equiv (C9)$$

$$k = 1, \ldots, n$$

MOVIMIENTOS CONFORMES ESPECIALES

$$M_1 = m\, \sigma_{;\alpha} P^\alpha \quad \equiv (C.13)$$

$$M_2 = s m\, \sigma_{;\alpha} P^\alpha - m \sigma \quad \equiv (C19)$$

$$Q = \xi^\alpha P_\alpha - s m \sigma + s^2/2\, m\, \sigma_{;\alpha} P^\alpha \equiv (C18)$$

(*)Constantes de movimiento nuevas.

TABLA V-7

CONSTANTES DE MOVIMIENTO ASOCIADAS A SIMETRIAS DEL ESPACIO

MOVIMIENTOS CONFORMES ESPECIALES
$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = (\sigma_{;\gamma} P^{\gamma}) g_{\alpha\beta} + 2\, P_{(\alpha}\, \sigma_{;\beta)}$$
$$M_1^{*} = m^{*}\, \sigma_{;\alpha} P^{\alpha} \equiv (C13) \equiv \quad M_2^{*} = 5m^{*}\, \sigma_{;\mu} P^{\mu} \quad m^{*}\sigma$$
$$I_k = tr\, \mathcal{G}_{\alpha\beta}{}^{k} \equiv (C3)$$

COLINEACIONES PROYECTIVAS ESPECIALES
$$M_1 = 2m\, \varphi_{;\alpha} P^{\alpha} \qquad \equiv (C6)$$
$$M_2 = 2m\, (\varphi_{,\nu} P^{\nu})\, s - h_{\alpha\beta} P^{\alpha} P^{\beta} \equiv (C17)$$
$$Q = \xi_{\alpha} P^{\alpha} - s\, h_{\alpha\beta} P^{\alpha} P^{\beta} + m s^2\, \varphi_{;\alpha} P^{\alpha} \equiv (C16)$$
$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = 2(\varphi_{,\nu} P^{\nu})\, g_{\alpha\beta} + 4\, \varphi_{(,\alpha} P_{\beta)}$$
$$M_1^{*} = 11 (\varphi_{,\gamma} P^{\gamma})\, m + m^2 (\varphi_{,\gamma} P^{\gamma}) \equiv (C6)$$
$$M_2^{*} = 5m^{*}\, \varphi_{,\nu} P^{\nu} - \mathcal{G}_{\alpha\beta}\, h^{\alpha}{}_{\mu}\, P^{\beta} P^{\mu}$$
$$N_2 = [3(\varphi_{,\gamma} P^{\gamma})^2 + m(\varphi_{,\beta} \varphi^{,\beta})]\, s - 2 h_{\alpha\beta} P^{\alpha} \varphi^{,\beta} \quad (*)$$
$$I_k = 2\, tr\, \{ (\varphi_{,\nu} P^{\nu}) g_{\alpha\beta} - 2\, \varphi_{(,\alpha} P_{\beta)} \}^{k} \equiv (C6)$$
$$k = 1, \ldots, n$$

(*) Constantes de movimiento nuevas.

C A P I T U L O   V I :

C O N C L U S I O N E S

En el presente trabajo hemos hecho una aplicación de la teoria de los Lagrangianos s-equivalentes al estudio de simetrías de la ecuación de geodésicas en un espacio de Riemann.

En la primera parte (capitulos 2y 3) se explicó en detalle la teoria de los Lagrangianos s-equivalentes en primero y segundo orden.

Mas adelante dimos la formulación Lagrangiana de primer orden de la ecuación de las geodésicas y estudiamos las simetrías puntuales esto es las transformaciones infinitesimales del espacio de configuracion que mapean geodésicas en geodésicas. Observamos como estas transformaciones pueden ser de dos tipos: las Noetherianas denominadas movimientos o isometrías y las no-Noetherianas llamadas colineaciones afines. Aplicando los resultados de los capiutulos anteriores asociamos a cada una de estas transformaciones constantes de movimiento.En la tabla IV-1 se encuentra resumida esta informacion.las constantes P1 y P4 son constantes conocidas asociadas a vectores de Killing y colineaciones afines respectivamente; P2 y P5 son constantes que dependen explicitamente de s y que fueron obtenidas por Katzin y Levine en (K-L 1981).por otro lado P6 y P7 son constantes que se encuentran a partir del hecho que las colineaciones afines son transformaciones de s-equivalencia.estas constantes fueron obtenidas por Hojman et al en (H-P-N+ 1986) quienes encontraron ademas el resto de las constantes conocidas asociadas a colineacioens afines.

Ademas de las transformaciones puntuales discutidas anteriormente existen según hemos mencionado un conjunto de transformaciones que dejan invariantes determinadas propiedades geométricas del espacio de Riemann pero no necesariamente las geodésicas. Este tipo de transformaciones,que hemos denominado simetrías del espacio,han sido estudiadas por varios autores,en particular por Katzin y Levine en (K-L 1969),(K-L 1981) y por Yano en (Y 1957).Hasta donde sabemos,este tipo de transformaciones no habia sido relacionado con las simetrías de las geodésicas aun cuando existe un conjunto de constantes de movimiento de las ecuaciones de geodésicas asociadas a este tipo de transformaciones.Una de las aportaciones del presente trabajo es el resultado que afirma que a cada una de estas simetrías del espacio podemos asociarle una (o dos) simetria(s) de la ecuación de geodésicas que puede ser en general Noetheriana o de s-equivalencia.Esto es importante ya que la asociacion de constantes de movimiento a simetrías solo se puede hacer de manera sistemática si estas simetrías son de la ecuación de movimiento.

El haber relacionado las simetrías del espacio con las simetrías de las geodésicas permite aplicar los métodos de la teoria de los Lagrangianos s-equivalentes para deducir constantes de movimiento.En la tabla V-7 se encuentran algunas de estas constantes.Comparando las tablas V-3a,V-3b y V-7 observamos que no solo hemos podido obtener las constantes de movimiento conocidas sino que tambien en ocasiones hemos encontrado nuevas constantes de movimiento.

Estas nuevas constantes estan marcadas en la tabla V-7 con el simbolo (#).

La idea que hemos usado para relacionar las simetrías del espacio con las simetrías de las geodésicas esta estrechamente relacionada con los mapeadores de simetrías. Según comentamos en el capitulo dos, la clave para resolver algunos problemas no-linales reside en encontrar un operador que mapee simetrías del problema en cuestión en simetrías del mismo problema. En el presente trabajo hemos investigado un poco en que medida los mapeos de simetrias pueden ser de utilidad en la resolución de problemas de ecuaciones de segundo orden ordinarias. Las conclusiones a las que llegamos a este respecto son las siguientes: cuando se tienen dos Lagrangianos s-equivalentes se puede formar un mapeador de simetrías a partir de sus las formas simplécticas correspondientes (este resultado es el análogo para sistemas de ecuaciones ordinarias del resultado conocido para ecuaciones parciales (O-1986)). Por otro lado el estudio de mapeadores especiales de simetría en movimiento geodésico conduce a la ecuación diferencial que debe satisfacer un tensor de tipo (1,1) para que al ser aplicado al vector velocidad de la geodésica nos de una simetría. Esta ecuación (la (5.90) del texto) es un resultado nuevo que tiene dos consecuencias importantes:

La primera es que algunas soluciones particulares de dicha ecuación permiten obtener las simetrías del espacio discutidas anteriormente. Por otro lado esta ecuación es una generalización de la ecuación de los tensores de Killig lo que nos permite dar una interpretación geométrica de éstos como tensores que mapean el vector tangente a la geodésica en una simetría Noetheriana no puntual de la ecuación de movimiento. Independientemente de estas dos conexiones uno podría intentar resolver la ecuacion (5.90) para una métrica dada y asi usando la tabla V-4 asociar constantes de movimiento a las geodésicas. Como en el caso de las transformaciones de simetría puntuales vemos en la tabla V-7 que las constantes asociadas a simetrías de s-equivalencia son no triviales en el sentido de que no se obtienen "directamente" de la ecuación de simetria (5.90). Asimismo, debemos tener presente que las constantes de la tabla V-7 no son todas las constantes que en principio uno podría asociar a un MES. Podemos por ejemplo obtener otras constantes a partir de las conocidas tomando la derivada de Lie de éstas a lo largo de las simetría obtenida con el MES.

Por último quisieramos mencionar que se podría intentar encontrar otras soluciones particulares que nos llevaran a simetrías del espacio como las colineaciones de curvatura (no especiales), las colineaciones de Ricci, etc,que no tienen asociadas hasta donde sabemos constantes de movimiento.

B I B L I O G R A F I A

(A 1978) V.I. Arnold. Mathematical Methods of Classical Mechanics. (Springer-Verlag U.S.A 1978)

(G 1980) H. Goldstein. Classical Mechanics. (Addison-Wesley Publishing Co. second edition U.S.A.1980)

(H 1984a) S. Hojman."Simmetries of Lagrangians and of their equations of motion" J.Phys.A. Math.Gen. 17(1984).2399-2412.

(H 1984b) S. Hojman."Interpretation of simmetry transformations" J.Phys.Math.Gen. 17(1984) L521-L525.

(H-G 1984) S.Hojman y J.Gomez. "First order equivalents Lagrangians and conservations laws" J.Math.Phys. 25(6).1776 (1984).

(H-H 1981) S.Hojman y H.Harleston. "Equivalent Lagrangians: Multidimentional case." J.Math.Phys. 22(7).1414 (1981).

(H-H-S 1983) R.Hojman, S.Hojman y J.Sheinbaum. "Shortcut for constructing any Lagrangian from its equations of motion" Phys.Review D. vol 28, 1333 (1983).

(H-N-P+ 1986) S.Hojman, L.Nunez, A.Patino y H.Rago. "Simmetries and conserved quantities in geodesic motion" J.Math.Phys. 27(1).281 (1986).

(H-S 1982) S.Hojman y L.C.Shepley. "Lagrangianos equivalentes" Revista Mexicana de Fisica. 28, n.-2 (1982) 149-205.

(H-U 1981) S.Hojman, L.Urrutia. "On the inverse problem of the calculus of variations" J.Math.Phys. 22(9).1896 (1981).

(H-Z 1985) S.Hojman y F.Zertuche. "S-equivalents Lagrangians of first order differential systems" Il Nuovo Cimento. vol 88B.N.1 (1985).

(K-L 1969) G.H.Katzin and J.Levine. "Curvature collineations: a fundamental symmetry property of the space-time of General Relativity defined by the vanishing Lie derivative of the Riemann curvature tensor." J.Math.Phys. 10(4), april 1969.

(K-L 1981) G.H.Katzin and J.Levine. "Geodesic first integrals with explicit path-parameter dependence in Riemannian space-times" J.Math.Phys. 22(9) september 1981.

(L 1970) C. Lanczos: The variational Principles of Mechanics. (fourth edition ,University of Toronto Press, Toronto, 1970).

(L-L 1978) L.D.Landau y E.M.Lifshitz: Mecanica. Volumen I curso de fisica teorica. (Edit.Reverte Espana 1978)

(M-T-W 1973) C.W.Misner,Thorne,Wheeler. Gravitation. (W.H.Freeman & Company, U.S.A. 1973)

(O 1986) P.J.Olver. Applications of Lie groups to differential equations. (Springer Verlag. New York 1986)

(S-1980) B.Schutz. Geometrical Methods of Mathematical Physics. (Cambridge U.P.,Cambridge 1980)

(S-1985) B.Schutz. A firts course of General Relativity. (Cambridge U.P.,Cambridge 1985)

(Sp 1982) M.Spivak. Calculo en variedades. (Reverte. Barcelona Espana 1982)

(Y 1957) K.Yano. The theory of Lie derivatives and its applications. (North-Holland Publishing Co. U.S.A. 1957)