

2  
24



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA

TIEMPOS DE SOLIDIFICACION EN PIEZAS DE  
FUNDICION (CON GEOMETRIA SIMPLE)



EXAMENES PROFESIONALES  
FAC. DE QUIMICA

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERO QUIMICO METALURGICO  
P R E S E N T A :  
CAMILO ANDRADE RUIZ

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

México, D. F.

1988



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE.

	página
<b>CAPITULO 1.</b>	
Introducción.....	1
<b>CAPITULO II.</b>	
Generalidades teóricas.	
2.1 Fundamentos de solidificación.....	3
2.1.1 Nucleación Homogénea.....	5
2.1.2 Nucleación Heterogénea.....	9
2.1.3 Crecimiento.....	10
2.1.3.1 Cinética de los procesos atómicos en la intercara sólido-líquido.....	10
2.1.3.2 Distribución de temperatura en la intercara sólido-líquido.....	13
2.1.3.3 Morfología de la intercara sólido-líquido.....	13
2.2 Transferencia de calor.....	17
2.2.1 Transferencia de calor y solidificación.....	18
2.3 Modelos matemáticos para predecir la distribución de temperaturas.....	28
2.3.1 Métodos analíticos exactos.....	30
2.3.1.1 Solución general de Schwarz.....	37
2.3.1.2 Solución de Neumann.....	38
2.3.1.3 Solución de Lightfoot.....	39
2.3.1.4 Solución de Lynbov.....	41
2.3.1.5 Solución de Stefan.....	42
2.3.1.6 Solución de Chvorinov.....	43
2.3.2 Métodos Numéricos.....	48
<b>CAPITULO III.</b>	
Desarrollo experimental.	
3.1 Objetivo.....	52
3.2 Equipo.....	52
3.3 Material.....	52
3.4 Procedimiento.....	54
<b>CAPITULO IV</b>	
Resultados.	
4.1 Presentación de Resultados.....	57

1.2 Análisis de Resultados.....69  
CAPITULO V.  
Conclusiones.....71  
Anexo.....72  
Bibliografía.....75

## INTRODUCCION.

El tiempo de solidificación es importante en fundición, ya que es el factor clave para el diseño del sistema de alimentación de piezas coladas. El cálculo del tiempo de solidificación, nos conduce a lo que es transferencia de calor, aunque no es el único fenómeno que se lleva a cabo en la solidificación de un metal, pues influyen también los fenómenos de nucleación y crecimiento, propios de cada metal.

Cuando se efectúa el vaciado de una pieza, la cavidad del molde queda llena de metal líquido; el cual cede calor gradualmente a través de la interfase metal-molde al cuerpo del molde y subsecuentemente a los alrededores. Se establece entonces un flujo de calor, desde el metal líquido al molde de la pieza. Este flujo es dependiente de las propiedades termo-físicas del metal y del molde, de las condiciones de colada y del tiempo.

Por otra parte, el resultado de qué tan rápido se enfría una pieza, y de como se hace este enfriamiento, nos lleva a las características microestructurales de la pieza fundida, es cuando se dice que actúan las propiedades metalúrgicas de cada metal, y por lo tanto a las propiedades mecánicas del material.

En el presente trabajo el tema está desarrollado en dos partes. La primera es recopilando las principales teorías que existen en la literatura metalúrgica sobre el tema, abarca los mecanismos de solidificación: nucleación y crecimiento y la transferencia de calor dada por conducción con las diferentes solu-

ciones propuestas por varios investigadores (métodos analíticos exactos) y en esta parte se abordan también soluciones con métodos numéricos. Se presenta un programa de cómputo de aplicación. La segunda parte es experimental, se corren una serie de pruebas para observar el comportamiento del tiempo de solidificación de un metal puro, Aluminio, para una geometría dada a diferentes tamaños. Contra el tiempo de solidificación teórico de acuerdo al modelo propuesto por Chvorinov (relación  $(V/A)$ , volumen de la pieza entre el área de disipación térmica.

## CAPITULO II. GENERALIDADES TEORICAS.

### 2.1 FUNDAMENTOS DE SOLIDIFICACION.

Solidificación de metales puros. El motivo de que un metal líquido solidifique, cuando desciende la temperatura, es porque el arreglo de los átomos en un cristal sólido, tiene más baja energía que los átomos del metal líquido. Arriba del punto de solidificación, el estado líquido es más estable.

El cambio de energía libre en la solidificación es  $F_v = F_s - F_l$ . Donde  $F_s$  y  $F_l$  son la energía libre del sólido y el líquido, respectivamente. Si el metal es enfriado abajo del punto de fusión, la energía libre del sólido llegará a ser menor que  $F_v$ , pasando a ser un número negativo. Esto se ilustra en la figura 1.

En el punto de solidificación no hay tendencia en alguna dirección: el cambio en energía libre es cero, es decir se está en equilibrio. A la temperatura de solidificación, ambas fases deben tener la misma energía libre a causa de que a esta temperatura existe equilibrio termodinámico.

La solidificación no inicia inmediatamente cuando la temperatura del metal líquido cae por debajo de la temperatura de solidificación, porque antes hay que gastar energía para producir la nueva superficie del cristal que está siendo formado. Esto se explica con la teoría de nucleación homogénea y nucleación heterogénea.

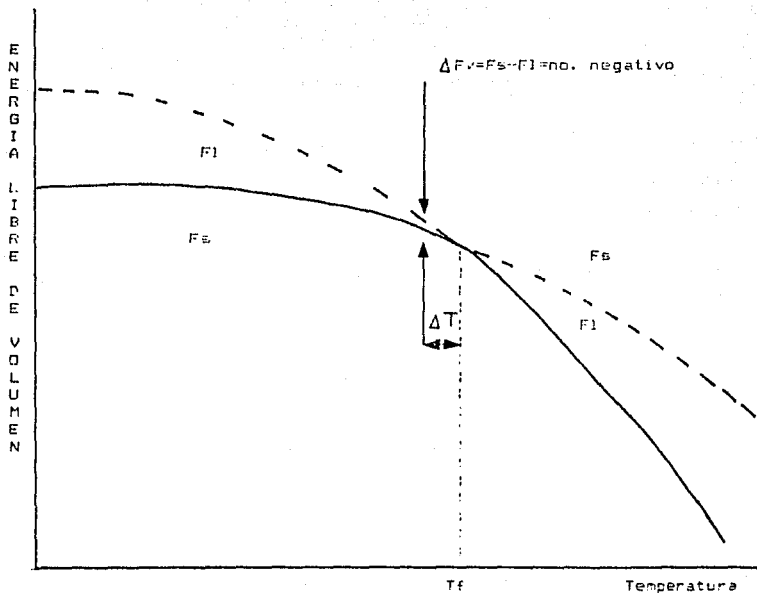


Figura no. 1. La energía libre de volumen se grafica como una función de la temperatura para las fases sólida y líquida.



### 2.1.1 NUCLEACION HOMOGENEA.

La temperatura a la cuál la nucleación ocurre es por debajo del punto de equilibrio de la solidificación, porque es necesario vencer las fuerzas de tensión superficial, las cuáles dificultan el crecimiento de núcleos. Los núcleos son pequeñas porciones, consideradas esféricas, para efectos de simplificación de cálculos, del orden de  $10 \text{ \AA}$  en diámetro. Consecuentemente su relación volumen-superficie es muy alta. De aquí que sea asociada una energía libre positiva con la formación del área superficial del núcleo, esta energía actuará como una barrera para la formación de pequeños núcleos. La energía tendiente a producir un núcleo sólido es la diferencia de energía libre por unidad de volumen, entre la fase líquida y la fase sólida. Esta cantidad llamada el cambio de energía libre de volumen es designada como  $\Delta F_v$ ; y es usualmente expresada en calorías/cm<sup>3</sup> para una temperatura dada de sobreenfriamiento. En todas las temperaturas abajo del punto de solidificación,  $\Delta F_v$  es negativo. La fase sólida es más estable, y por lo tanto tiene una baja energía libre, todavía menor que la fase líquida. El cambio de energía libre de volumen asociado con la formación de una partícula esférica de radio  $r$  es:

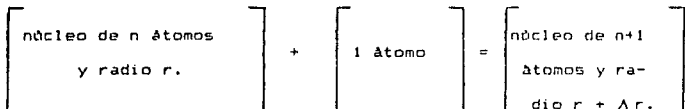
$$\frac{4}{3} \pi r^3 \Delta F_v.$$

La energía requerida para crear la nueva superficie es una función de la tensión superficial,  $\sigma$ , en ergs/cm<sup>2</sup>,  $4 \pi r^2 \sigma$ . La carga neta de energía libre,  $\Delta F$ , es igual a:  $4 \pi r^2 \sigma + \frac{4}{3} \pi r^3 \Delta F_v$ .

La energía de superficie es positiva en contraste al término de energía libre de volumen. esto se ve en la curva de  $\Delta F$  contra tamaño de núcleo. Ver figura no. 2.

La curva muestra un máximo en el radio crítico  $r^*$ . Notese que una vez que este radio es excedido, el crecimiento adicional resulta en un decremento de la energía libre y puede suceder espontáneamente a la temperatura de sobreenfriamiento. Si una partícula tiene un radio más pequeño que  $r^*$ , esta se redisolvera porque este decrecimiento en volumen hace que la energía libre sea más positiva.

Debido a fluctuaciones térmicas los átomos agrupados continuamente ganan y pierden átomos. La nucleación ocurre cuando un grupo de átomos continuamente ganan más de lo que pierden:



Si el cambio de energía libre para esta reacción es negativa, el evento de nucleación se realiza.

El tamaño de el radio crítico puede ser encontrado por diferenciación de la ecuación  $\Delta F = 4 \pi r^2 \gamma + \frac{4}{3} \pi r^3 \Delta F_v$  con respecto a  $r$  y haciendo el resultado igual a cero:  $r^* = -2 \pi \gamma / \Delta F_v$ .

Donde  $r^*$  define el tamaño crítico del núcleo. El significado de esta relación es que para que el radio crítico llegue ser pequeño.  $\Delta F_v$  debe llegar a ser grande en sentido negativo, en otras palabras, severos sobreenfriamientos son necesitados para la nucleación homogénea. El término de  $\gamma$  no cambia grandemente con la temperatura. No obstante,  $\Delta F_v$  se incrementa con el sobreenfriamiento y por lo tanto provoca que muy pocos núcleos sean estables. El cambio de energía libre para formar un núcleo de tamaño crítico,  $\Delta F^*$  es encontrado por sustitución de  $r$  por  $r^*$ .

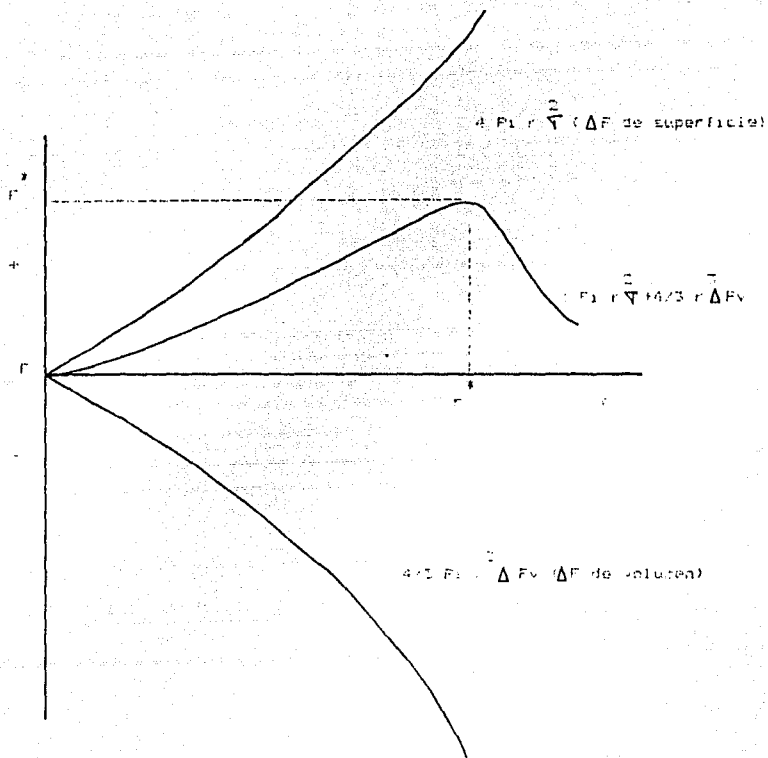


Figura no. 2. La energía libre es graficada contra tamaño de núcleo.

$$\text{en la ecuación de } \Delta F: \Delta F = \frac{16 \pi r^3}{3(v)}$$

La nucleación homogénea resulta del crecimiento de la agrupación de átomos, siempre y cuando estos lleguen a alcanzar el tamaño de radio crítico, formándose el núcleo para la nueva fase. Un núcleo formado espontáneamente en el metal líquido por el movimiento atómico al azar será probablemente del tamaño de una agrupación de unos pocos átomos que se redisolverán a menos que existan sobreenfriamientos grandes como para exceder el volumen del núcleo de radio crítico y crecer espontáneamente.

### 2.1.2 NUCLEACION HETEROGENEA

La nucleación de los metales es en la práctica heterogénea. En este comportamiento existe la formación al azar de núcleos sobre el sustrato, el cual puede ser simplemente una partícula extraña. Una energía de superficie existe ya en sustrato. El embrión en crecimiento sustituye la interfaz líquido-embrión por la interfase líquido-sólido de la partícula extraña o pared del molde, y compensa en parte, su energía interfacial. Ver figura 3.

Como consecuencia, sólo se requiere poco sobreenfriamiento para que haya nucleación. La expresión de la energía libre, para la nucleación heterogénea se expresa de la siguiente manera:

$$\Delta F(\text{het}) = \Delta F(\text{hom}) \left[ \frac{2-3\delta + \delta^3}{4} \right]$$

Donde  $\delta$  es igual a  $\cos \theta$ . Y el término entre corchetes varía de 0 a 1. Con lo cual se muestra que la energía es menor para la nucleación heterogénea y consecuentemente esta puede ocurrir más fácilmente.

Si no hay atracción entre los átomos de la partícula extraña y los de la nueva fase, la solidificación no es ayudada.

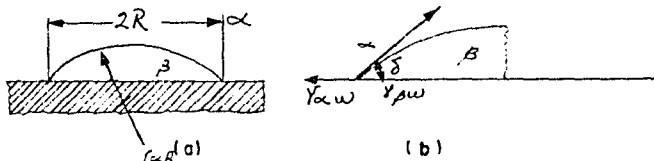


Figura no. 3. (a) Se muestra la nucleación en la pared del molde ó sobre una partícula extraña. (b) Diagrama de la tensión superficial.

### 2.1.3 CRECIMIENTO.

El paso o etapa de la nucleación va seguida del crecimiento de los núcleos en el proceso completo de solidificación de un metal líquido. Dado que este estudio está enfocado a la solidificación de metales puros, se desarrollan los principales aspectos de crecimiento para dichos materiales como son: La Cinética de los procesos atómicos en la intercara sólido-líquido, Distribución de temperatura y Morfología.

#### 2.1.3.1 Cinética de los procesos atómicos en la intercara sólido-líquido.

Considerando un movimiento en la intercara sólido-líquido como se muestra en la figura 4. Se puede imaginar que dos procesos atómicos ocurren en la interfase:

Átomos sólidos que pasan a átomos líquidos : reacción de fusión

Átomos líquidos que pasan a átomos sólidos : reacción de solidificación.

En el equilibrio, el flujo de átomos que pasa a la fase líquida debe ser igual al que penetra en el sólido. Esto es, la velocidad de fusión es igual a la velocidad de solidificación. La figura no. 5 muestra que para tener solidificación, más átomos deben saltar desde el líquido al sólido, o sea que, la velocidad de solidificación es mayor que la velocidad de fusión. La figura no. 5 muestra que no es posible la solidificación de un metal si la temperatura de interfase sólido-líquido está exactamente en la temperatura de solidificación. Para mover la interfase, que pro-

grese la solidificación, es necesario tener más baja la temperatura que en el punto de fusión para satisfacer la condición de que, en la interfase se tenga mayor la velocidad de solidificación que la de fusión. Consecuentemente una interfase que esta solidificando debe siempre estar subenfriada. La cantidad de subenfriamiento en la interfase se conoce como  $T_k$ . Los siguientes puntos se listan para enfatizar.

1.- La temperatura de una interfase solidificando debe ser menor que la temperatura de equilibrio en la solidificación,  $T_f$ .

2.- A  $\Delta T_k$  se le llama subenfriamiento cinético.

3.- A este subenfriamiento cinético,  $\Delta T_k = T_f - T_i$ , es requerido, en la interfase, para producir un flujo neto de átomos desde el líquido a el sólido.

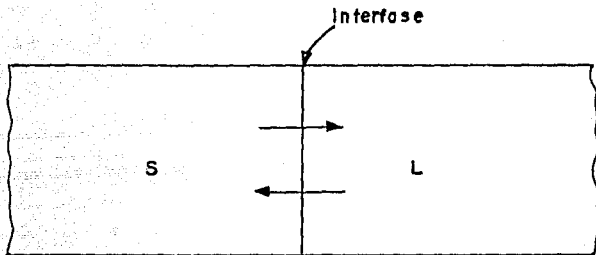


Figura no. 4. Se muestran las reacciones atómicas en la interfase sólido-líquido.

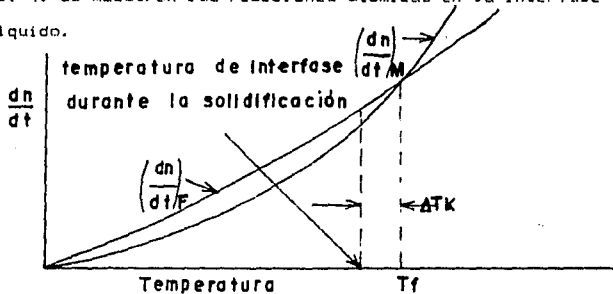


Figura no.5. Se muestra dibujo de temperatura contra velocidades (solidificación y fusión).



### 2.1.3.2 Distribución de temperatura en la interfase sólido-líquido.

El perfil de temperatura en la interfase líquido-sólido es un factor importante en el control de la forma de la interfase. Hay dos tipos de perfiles:

a) Gradiente Positivo .

b) Gradiente Negativo.

a) Gradiente Positivo. Se da cuando la temperatura del líquido frente a la intercara es mayor que la del sólido. La figura no. 6. muestra el perfil con gradiente positivo. Notese que la interfase es subenfriada por  $\Delta T_k$ , con el fin de conducir las reacciones de interfase.

b) Gradiente Negativo. Se da cuando la temperatura de el líquido frente a la intercara es menor que la del sólido. La figura no. 7 muestra el perfil con gradiente negativo. Este tipo de gradiente se forma en el líquido por un movimiento de la interfase hacia la derecha. De aquí, es posible alcanzar gradientes de temperatura negativos y positivos en el líquido en el frente de la intercara de avance sólido-líquido.

### 2.1.3.3. Morfología de la interfase sólido-líquido.

Se puede dividir, la forma de la interfase en dos secciones, dependiendo del tipo de gradiente de temperatura.

1) Morfología de la interfase cuando existe gradiente positivo. Dos tipos de interfase se observan: La interfase facetada y la interfase no facetada. La interfase facetada presenta una intercara dentada que consiste de planos bien definidos (facetas). La interfase sitúa una isoterma paralela a la temperatura de

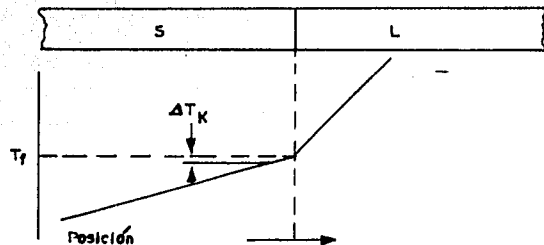


Figura no. 6. Gradiente de temperatura positivo en la interfase sólido-líquido.

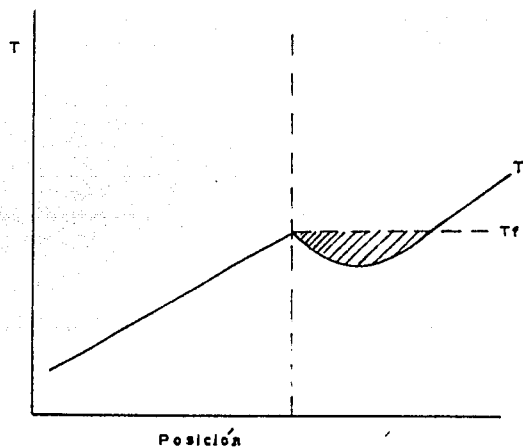


Figura no. 7. Gradiente de temperatura negativo en la interfase sólido-líquido.

solidificación, los planos facetados están en ángulo a esta isoterma. Esto se ve claramente en la figura no. 8. La interfase no facetada es una intercara plana que es paralela a la isoterma  $T_f$ . Ver figura no. 9.

Los metales regulares y algunos compuestos orgánicos solidifican con interfase no facetada. Los semi-metales y semi-conductores como el Bi, Sb, Ga, Ge y Si solidifican con interfase facetada, sin embargo bajo ciertas condiciones de velocidad de solidificación, gradiente y temperatura, suelen solidificar con interfase no facetada. Los compuestos inorgánicos solidifican con interfase facetada.

2) Morfología de la interfase cuando existe gradiente negativo. Se observan las interfases facetadas y las no facetadas. Estas interfases suelen no ser estables, dependiendo del subenfriamiento, dando lugar a la formación de dendritas. La figura no. 10 presenta las dendritas con sus brazos primarios y algunos brazos laterales secundarios. Las dendritas presentan una orientación preferencial. Cada dendrita es un cristal simple y se ha encontrado en cada sistema cristalino que la dirección cristalográfica paralela al eje de la dendrita es la misma. Esto es que para una estructura de cristal FCC la dirección cristalográfica a lo largo del eje de las dendritas es  $\langle 100 \rangle$ , para BCC,  $\langle 100 \rangle$ , para HCP,  $\langle 1010 \rangle$ .

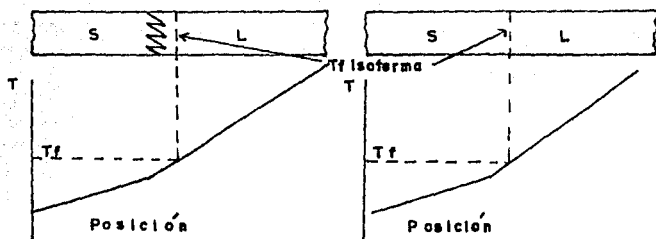


Figura no. 8. Interfase facetada.

Figura no. 9. Interfase no facetada.

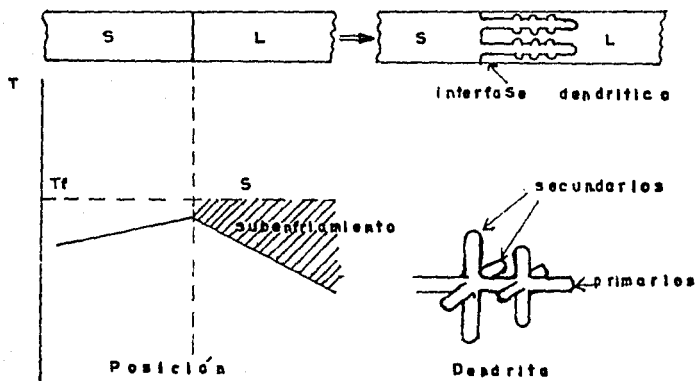


Figura no. 10. Gradiente de temperatura negativo, dendritas.

## 2.2 TRANSFERENCIA DE CALOR.

Siempre que existe un gradiente de temperatura en un sistema, o cuando se ponen en contacto dos sistemas a diferentes temperaturas, se transfiere energía. El proceso por el cual tiene lugar el transporte de esta energía, se conoce como transferencia de calor. Lo que está en tránsito, llamado calor, no puede ser medido y observado directamente, pero los efectos que produce son posibles de observar y medir.

La transferencia de calor puede definirse como, la transmisión de energía de una región a otra, provocada por la diferencia de temperaturas existente entre ellas.

Generalmente se dice que hay tres modos distintos de transmisión de calor: conducción, radiación y convección. Por lo general, el calor fluye no por uno, sino por varios de estos mecanismos que actúan en forma simultánea. Es particularmente importante, conocer la intervención de los diferentes modos de transferencia de calor, en virtud de que en la práctica, cuando uno de los mecanismos domina cuantitativamente, se obtienen soluciones útiles aproximadas, despreciando todos los mecanismos, excepto el que domina en el proceso.

### 2.2.1 TRANSFERENCIA DE CALOR Y SOLIDIFICACION.

En la fundición siempre esta involucrada la energía en forma de calor. Con ella se induce al cambio de estado físico, de sólido a líquido y de líquido a sólido, e interviene en el control de la composición química, la calidad del metal líquido (contaminación con escoria, refractarios, arrastre de arena, gases disueltos, etc.), y de alguna manera las propiedades mecánicas del material con los tratamientos térmicos.

Esta energía se manifiesta en forma de calor y se trasmite por sus tres mecanismos. Al vaciar el metal en el molde se trasfiere calor por conducción principalmente, al entrar en contacto directo el metal líquido y los granos de arena junto con sus aglutinantes. Como mecanismos secundarios estan, la convección y la radiación. El primero se da por el transporte de vapor de la humedad propia del molde y los gases del material aglutinante. Y el segundo por los huecos del molde y a través de los poros del molde.

En la solución de problemas de transferencia de calor por conducción, es necesario, determinar si el proceso es, o no, estable. Cuando la rapidez del flujo de calor en un sistema no varia con el tiempo, es decir, cuando es constante, la temperatura de cualquier punto no cambia y prevalecen condiciones del estado estable. El flujo de calor en un sistema transitorio o inestable es, cuando las temperaturas de varios puntos del sistema cambian con el tiempo. En solidificación se dice que el flujo de calor es inestable.

La relación básica para la transferencia de calor por conducción fue propuesta por el científico francés J.B.J. Fourier. Estableció que la rapidez del flujo de calor por conducción en un material, es igual al producto de las tres siguientes cantidades:

- 1.- La conductividad térmica del material, K.
- 2.- El área de la sección a través de la cual, fluye el calor por conducción, A (área que debe ser medida perpendicularmente a la dirección del flujo de calor).
- 3.- El gradiente de temperatura en la sección,  $dT/dx$ ; es decir, la rapidez de variación de la temperatura T con respecto a la distancia x en la dirección del flujo de calor.

Para escribir la ecuación de conducción de calor en forma matemática, se debe adoptar una convención de signos. Se especifica que la dirección en que se incrementa la distancia x es la dirección del flujo de calor positivo, entonces el flujo de calor será positivo cuando el gradiente de temperatura sea negativo (figura 11).

Consecuentemente, la ecuación para conducción en la dirección x se escribe:

$$Q_x = -K A \frac{\partial T}{\partial x} \qquad q_x = (-1) \frac{\partial T}{\partial x} dy dz$$

El gradiente de temperatura se expresa como una derivada parcial, debido a que T es función no únicamente de x, sino también de las direcciones de y, z y el tiempo.

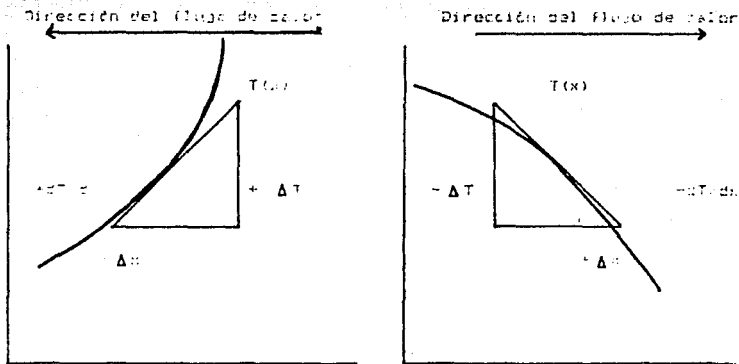


Figura no. 11. Se muestra la convención de signos para el flujo de calor por conducción.



Con objeto de obtener una ecuación para la distribución de temperatura, se hace el balance de energía en un tiempo pequeño  $d\phi$ .

calor que entra durante  $d\phi$  + calor generado por fuentes internas durante  $d\phi$  = calor que sale durante  $d\phi$  + cambio en energía interna durante  $d\phi$

$$(q_x q_y q_z) d\phi + q (dx dy dz) d\phi = (q_x dx + q_y dy + q_z dz) d\phi + c_p \rho T (dx dy dz)$$

La figura no.12 muestra la nomenclatura usada.

La correspondiente rapidez del flujo de calor que sale a través de la cara derecha, según la figura no.12,  $x + dx$ ; encontrada por el teorema del valor medio, o por el desarrollo de  $q_x$  en una serie de Taylor alrededor de  $x$ , y despreciando todos los términos excepto los dos primeros es:

$$q_x + dx = \left[ (-K \partial T / \partial x) + \partial / \partial x (-K \partial T / \partial x) dx \right] dy dz$$

restando la rapidez con que sale el flujo de calor del que entra:

$$q_x - q_x + dx = \frac{\partial (K \partial T / \partial x)}{\partial x} dx dy dz$$

y en forma similar para las direcciones  $y, z$ .

$$q_y - q_y + dy = \frac{\partial (K \partial T / \partial y)}{\partial y} dx dy dz$$

$$q_z - q_z + dz = \frac{\partial (K \partial T / \partial z)}{\partial z} dx dy dz$$

Sustituyendo estas relaciones en el balance de energía y dividiendo cada término por  $dx dy dz$  do:

$$\frac{\partial (K \partial T / \partial x)}{\partial x} + \frac{\partial (K \partial T / \partial y)}{\partial y} + \frac{\partial (K \partial T / \partial z)}{\partial z} + q = c_p \rho \frac{\partial T}{\partial \phi}$$

Si el calor específico  $C_p$  y la densidad son independientes de la temperatura y si se supone que  $K$  es uniforme:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{K} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Donde la constante,  $a=K/C_p \rho$ , se conoce como difusividad térmica.

Esta ecuación se conoce como la ecuación general de conducción de calor y gobierna la distribución de temperaturas y la conducción del flujo de calor en un sólido que tenga propiedades físicas constantes.

La tabla no. 1 muestra datos de propiedades termo-físicas para algunos materiales (la tabla fue tomada de la referencia no. 7, página 34).

La tabla no. 2 presenta valores de conductividades obtenidas en diferentes investigaciones (la tabla fue tomada parcialmente de la referencia no. 9, página 54).

Para poder visualizar las diferentes etapas de la solidificación, a medida que se transfiere el calor a través del molde, es común presentar este fenómeno en gráficas de temperatura contra distancia, llamadas perfiles de temperatura. El perfil térmico, desarrollado para el caso más general de solidificación de un metal puro y para una aleación se presenta en la figura no.13 y 14, respectivamente. Nótese que para el eje de las abscisas, se coloca coincidiendo con la intercara molde-metal solidificado, y que el frente de solidificación  $X(t)$  se mueve con el tiempo. De esta manera:

$x < 0$  representa la distribución de temperatura del molde.

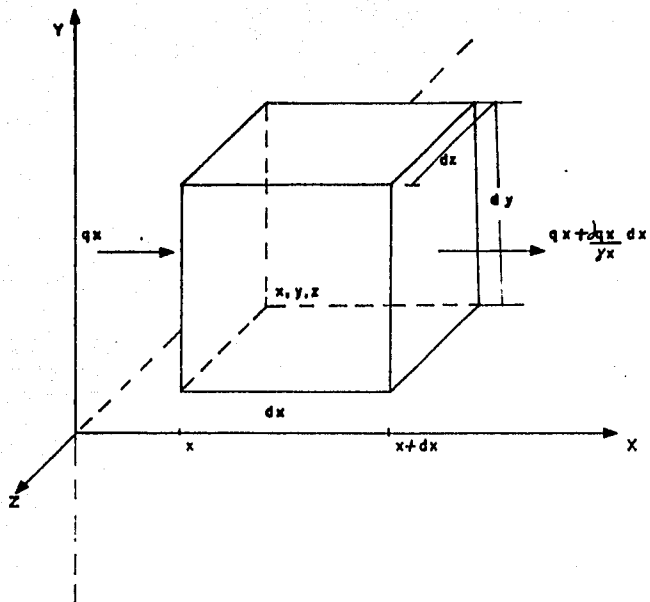


Figura no. 12 Elemento de calculo del balance de energia, en que se aprecia la nomenclatura para la obtención de la ecuación general de conducción de calor en coordenadas cartesianas.

$x=0$  representa la interfase metal/molde.

$x>0$  representa a la distribución de temperatura del metal.

$x=X$  representa la interfase sólido-líquido.

$0 < x < X$  representa la distribución de temperatura del metal solidificado.

$x < X$  representa la distribución de temperatura del metal líquido.

En la figura no.13, la solidificación de un metal puro, se aprecian 4 caídas de temperatura que corresponden a:

1) La diferencia entre la temperatura de colada,  $t_c$ , y la temperatura de fusión,  $T_f$ , conocida como sobrecalentamiento.

2) La caída de temperatura en el metal solidificado.

3) La caída de temperatura debido a la resistencia de la intercara metal solidificado-molde.

4) La caída de temperatura en el molde.

Cuando se considera la solidificación de una aleación, figura no. 14, se debe incluir el hecho de que solidifica en un intervalo de temperaturas y no a una sola como es el caso de los metales puros. En la figura no. 14 se observan los puntos anteriores más el intervalo de temperaturas para solidificar.

ALEACION	Ps g/cm <sup>3</sup>	PI g/cm <sup>3</sup>	Ko cal/ cms <sup>2</sup> °C	Hs cal/g.	c cal/g°C	T1 °C	Ta °C
Fe FUNDIDO C=3.86	7.60	7.0	0.13	60	0.143	1210	-
Fe FUNDIDO C=4.0 P=1%		7.0				1165	-
ACERO C=0.6%	7.76	7.3	0.13	65	0.117	1490	1415
ACERO C=0.2%	7.76	7.3	0.13	63		1520	1492
ALUMINIO	2.70	2.4	0.55	94.2	0.25	660	-
AlSi2	2.69	2.4	0.50	96.8	0.25	645	-
AlSi7	2.67	2.3	0.44	103.4	0.25	610	-
AlSi12	2.65	2.3	0.385	110	0.25	-	-
AlSi5Cu3	2.7	2.4	0.3	117	-	615	520
AlMg3	2.66	2.3	0.35	106		645	605
AlZn5Mg	2.77	2.4	0.29	104		620	570
AlCu4Ti	2.75	2.4	0.37	118	0.24	640	550
MgAl9Zn	1.81	1.7	0.17	89	0.25	590	470
Cu	8.96	8.3	0.89	49.6	0.101	1083	-
CuAl10	7.40	7.0	0.222	59.5	0.10	1042	1035
CuZn33	8.50	7.8	0.358	48.8	0.098	935	905
CuSn12	8.80	7.8	0.168	59.4	0.09	1000	830
CuSn5ZnPb	8.60	7.8	0.16	80.0	0.09	1005	850
ARENA DE SILICIO			ks : $\frac{\text{cal}}{\text{cms}^2 \text{ } ^\circ\text{C}}$				
IP/ALEACIONES DE Cu y ACE- RDS	1.5		0.0025		0.267	-	-
IP/Al y Mg	1.5		0.0020		0.267	-	-
ARENA DE DLI VINO.	2.1		0.0030		0.267	-	-

Tabla No. 1 Datos de propiedades termo-físicas para algunos materiales  
(tomada parcialmente de la referencia No. 7)

INVESTIGADOR	K en cal/cm seg C°	
M.C. Adams (Inglaterra)	1.4	$\times 10^{-3}$
Seshadri (India)	0.90	"
Pehlke (U.S.A)	2.30	"
Naragama (India)	0.61	"
U.N.A.M. (Mexico)	0.60	"

Tabla no. 2. Valores de conductividades en arenas de moldeo obtenidas por diferentes investigadores. (Tabla tomada parcialmente de la referencia no. 9).

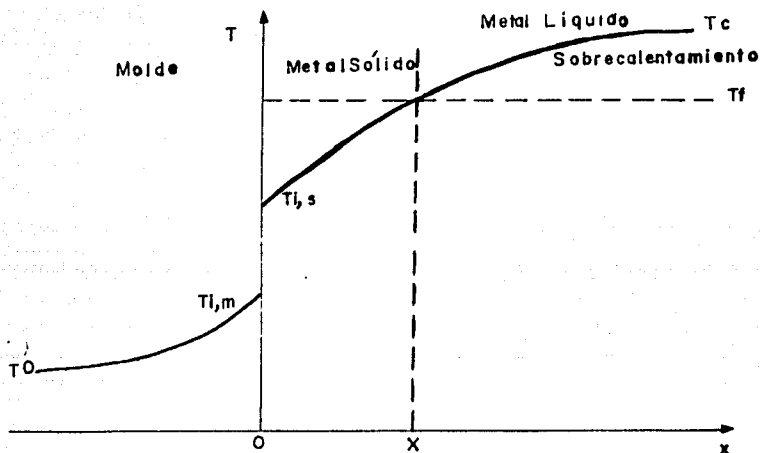


Figura no. 13. Perfiles de temperatura durante la solidificación de un metal puro.

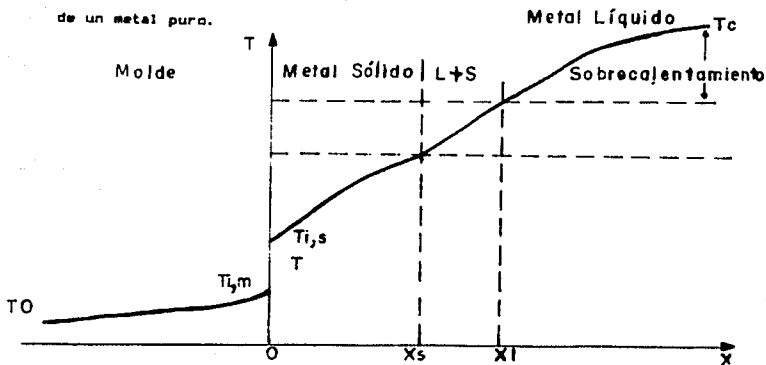


Figura no. 14. Perfiles de temperatura durante la solidificación de una aleación.

### 2.3 MODELOS MATEMATICOS PARA PREDECIR LA DISTRIBUCION DE TEMPERATURA.

La dificultad de la aplicación de los análisis de transferencia de calor a procesos que involucren solidificación radica básicamente en que análisis debe ser hecho en un proceso de transferencia de calor que no es estacionario y la presencia del calor latente requerido para el cambio de fase.

Los métodos de análisis de transferencia de calor aplicables en problemas de solidificación pueden ser agrupados de la siguiente manera :

- a) Métodos analíticos exactos.
- b) Métodos analíticos aproximados.
- c) Métodos no analíticos.

a) Métodos analíticos exactos. Se caracterizan por su rigor matemático, sin embargo requieren de simplificaciones físicas que en general idealizan el problema y restringen la aplicabilidad de las soluciones exactas. Cabe mencionar que de acuerdo a las simplificaciones físicas esta su aplicabilidad. Existiendo soluciones particulares.

b) Métodos analíticos aproximados. Incluyen aproximaciones matemáticas y físicas. Las aproximaciones matemáticas son funciones auxiliares mediante las cuales se aproxima el perfil térmico dentro del metal solidificado. Se han desarrollado soluciones que manejan funciones auxiliares lineales, cuadráticas y cúbicas. Para resolver un problema con este tipo de método se parte de la ecuación integral de conducción de calor, integrando la solución auxiliar propuesta, por lo que este método de solución se conoce como método del perfil integral o método del



balance integral de calor.

c) Métodos no analíticos. En este grupo se incluyen los métodos numéricos, gráficos y analógicos, que dan soluciones a problemas particulares. Los métodos gráficos y los numéricos son similares y consisten básicamente en subdividir el sistema metal-molde en pequeñas celdas o elementos. Cada uno de estos elementos es analizado individualmente haciendo en él, las aproximaciones que se tienen en cuenta. Los métodos analógicos estudian casos particulares por medio de analogías eléctricas o de fluidos, utilizando computadoras analógicas o analizadores eléctricos.

### 2.3.1 MÉTODOS ANALÍTICOS EXACTOS

Las soluciones analíticas exactas utilizan un método de análisis matemático riguroso para plantear soluciones a la transferencia de calor en la solidificación. Este análisis puede llegar a ser bastante complejo si no se toman algunas consideraciones e hipótesis simplificadoras. Dependiendo del tipo de hipótesis que se toman es la aplicación particular.

Este análisis está encaminado a resolver:

1) Como avanza el frente de solidificación en función del tiempo,  $x=f(t)$ .

2) Cuál es la distribución de la temperatura en el sistema, en función del tiempo y del espacio,  $T=f(x,t)$ , para el molde, el metal sólido y el metal líquido.

Las restricciones físicas a la que se ve sometido este análisis son:

a) El metal y el molde son elementos semi-infinitos, y la interfase metal-molde es plana por lo que existe un flujo unidireccional de calor.

b) No hay segregación de soluto y hay un frente plano de solidificación. Esto es válido para metales puros.

c) El contacto térmico metal-molde es perfecto, es decir que el coeficiente de transferencia de calor en la interfase es infinito.

d) Las propiedades termo-físicas del metal y del molde son constantes durante la solidificación, es decir, que no varían con la temperatura ni con el cambio de fase.

La figura no. 15 muestra la distribución inicial de temperaturas. Esto es a un tiempo igual a cero, cuando todavía no se ha

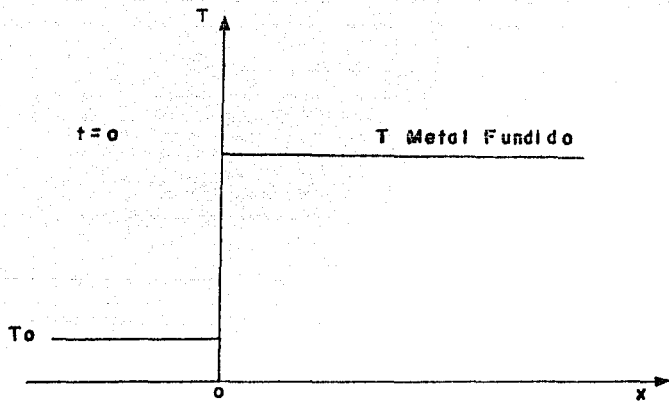


Figura no. 15. Distribución inicial de temperaturas.

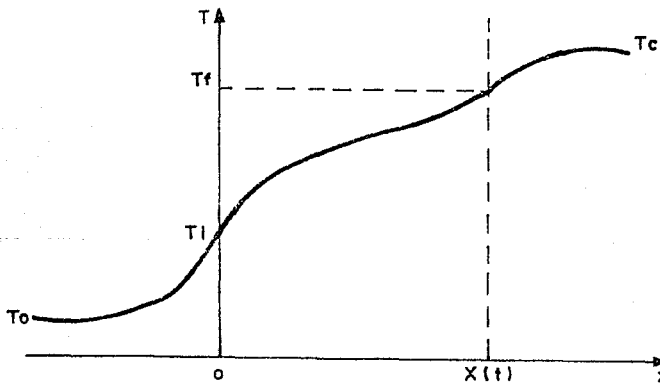


Figura no. 16. Distribución de temperaturas de un metal puro variado por sobrecalentamiento.

vaciado el metal en el molde, la temperatura de ambos permanezca constantes.

La figura no. 16 muestra la distribución de temperatura de un metal puro vaciado con sobrecalentamiento. Notesé que aplicando el punto c) de las restricciones físicas se considera en la figura un coeficiente de transferencia de calor infinito, o sea sin resistencia térmica en la intercara metal-molde.

La transferencia de calor en este sistema metal-molde corresponde al de conducción no-estacionario y unidireccional de calor, para el cual se aplica la ecuación de Fourier:

$$\frac{\partial T_n}{\partial t} = \frac{a_n}{\partial x^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

(n=1,2 y 3 ;molde =1, metal sólido =2 y metal líquido =3)

La solución debe satisfacer la ecuación anterior y a la vez a las condiciones de frontera, que son:

Para el molde:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}$$

$$C.F.1 \quad T_1(-\infty, t) = T_0$$

$$C.F.2 \quad T_1(0, t) = t_1 \quad \dots\dots\dots 1)$$

$$K_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = K_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

$$C.i.1 \quad T_1(x, 0) = T_0$$

Para el metal solidificado:

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}$$

$$C.F.3 \quad T_2(0, t) = T_1$$

$$K_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = K_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad \dots\dots\dots 2)$$

$$C.F.4 \quad T_2(x(t), t) = T_f$$

$$K_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = K_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + H p_2 \frac{dx(t)}{dt}$$

$$C.i.2 \quad x(0) = 0$$

Para el metal líquido:

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} = a_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} \quad x(t) < x < + \infty$$

$$C.F.5 \quad T_3(x(t), t) = T_f \quad \dots\dots\dots 3)$$

$$K_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} \Big|_{x=x(t)} + H p_3 \frac{dx(t)}{dt} = K_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=x(t)}$$

$$C.i.3 \quad T(x, 0) = T_c$$

En la figura no. 17 se incluyen las expresiones para los flujos de calor en las fronteras del sistema.

Las soluciones de las ecuaciones 1), 2) y 3) tienen la forma típica de las obtenidas al aplicar el método de transformadas de Laplace a un problema en medio semi-infinito.

$$T_1(x, t) = A_1 + B_1 \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a_1 t}} \quad \dots\dots\dots 4)$$

$$T_2(x, t) = A_2 + B_2 \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a_2 t}} \quad \dots\dots\dots 5)$$

$$T_3(x, t) = A_3 + B_3 \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a_3 t}} \quad \dots\dots\dots 6)$$

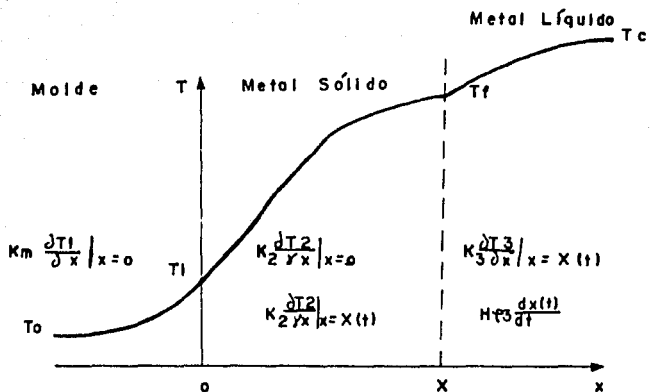


Figura no. 17. Distribución de temperaturas de un metal puro vaciado con sobrecalentamiento. Se indican las expresiones de flujo de calor.

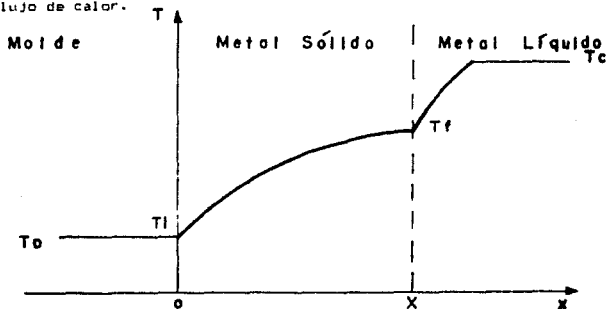


Figura no. 18. Distribución de temperaturas de acuerdo a la solución de Neumann.

donde A1, A2, A3, B1, B2 y B3 son constantes que se evalúan con ayuda de las condiciones de frontera.

Al aplicar C.F. 4 en la ecuación 5):

$$T_2(X(t), t) = T_f = \text{cte.} = A_2 + B_2 \operatorname{erf} \frac{X(t)}{2\sqrt{a_2 t}}$$

dado que A2 y B2 son constantes:

$$\frac{X(t)}{2\sqrt{a_2 t}} = 0 = \text{cte.}$$

por lo que:

$$X(t) = 2 \phi \sqrt{a_2 t} \quad \dots\dots\dots 7)$$

$$X(t) = \text{cte} \sqrt{t}; t = X(t)^2 / \text{cte} \quad \dots\dots\dots 8)$$

que es la respuesta a como avanza el frente de solidificación en función del tiempo.

El parámetro  $\phi$  que aparece en la ecuación 7) es una constante particular para cada problema, y está definido por una función del tipo:

$$f(M, m, n, S, H, \phi) = 0 \quad \dots\dots\dots 9)$$

Donde 0 es determinado numéricamente, para cada sistema particular, por medio del método de "prueba y error" de acuerdo a:

$$\frac{\exp(-\frac{\phi^2}{2})}{M + \operatorname{erf}(\phi)} - mS \frac{\exp(-\frac{\phi^2}{2})}{\operatorname{erfc}(\phi)} - \text{Pi} H \phi = 0 \quad \dots\dots\dots 10)$$

Después de aplicar las condiciones de frontera restantes y operando se obtiene:

$$A_1 = A_2 = T_0 + \frac{M(T_f - T_0)}{M + \operatorname{erf}(\phi)}$$

$$B1 = \frac{M (Tf - T0)}{M + \text{erf} (\phi)}$$

$$B2 = \frac{Tf - T\phi}{M + \text{erf} (\phi)}$$

$$A3 = Tc - \frac{S}{\text{erfc} (n\phi)}$$

$$B3 = \frac{S}{\text{erf} (n\phi)}$$

donde:

Cp = calor específico.

H = calor latente de fusión.

K = conductividad térmica.

a = difusividad térmica.

p = densidad.

M = constante del molde = b2/b1

m = b3/b2

n = (K2/K3)m

S = sobrecalentamiento = tc - tf

S = sobrecalentamiento adimensional = S / (tf - to)

H = calor latente adimensional = H / (c2(tf - to))

b1 = difusividad calorífica del molde =  $\sqrt{K1 C1 a1}$

b2 = difusividad calorífica del sólido =  $\sqrt{K2 C2 a1}$

b3 = difusividad calorífica del líquido =  $\sqrt{K3 C3 a1}$



### 2.3.1.1. SOLUCION GENERAL DE SCHWARZ.

La distribución de temperaturas es conseguida aplicando las constantes de integración a las ecuaciones 4), 5) y 6).

Para  $x < 0$  (molde):

$$T_1(x,t) = T_0 + \frac{T_f - T_0}{1 + \text{erf}(\phi)} \left[ 1 + \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right) \right]$$

M

Para  $x = 0$  (interfase metal/molde):

$$T_i = T_0 + \frac{T_f - T_0}{1 + \text{erf}(\phi)}$$

M

Para  $0 < x < X$  (metal solidificado):

$$T_2(x,t) = T_0 + \frac{T_f - T_0}{M + \text{erf}(\phi)} \left[ M + \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right) \right]$$

Para  $x > X$  (metal líquido):

$$T_3(x,t) = T_m - \frac{S}{\text{erfc}(n\phi)} \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_3 t}}\right)$$

La figura no. 16 representa el perfil térmico dado por la solución general de Schwarz.

### 2.3.1.2 SOLUCION DE NEUMANN.

El problema fué parcializado por Neumann, admitiendo que el molde es un sumidero perfecto de calor.

Considerando  $M=0$

La ecuación 10) de la solución general resulta.

$$\frac{\exp(-\phi^2)}{\exp(\phi)} - mS \frac{\exp(-n\phi^2)}{\operatorname{erfc}(n\phi)} - \pi H \phi = 0$$

Por lo que la distribución de temperatura será:

Para  $x < 0$   $T_1 = T_0 = \text{constante.}$

Para  $x=0$   $T_1 = T_0 = \text{constante}$

Para  $0 < x < X$

$$T_2(x,t) = T_0 + \frac{T_f - T_0}{\operatorname{erf}(\phi)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right)$$

Para  $x > X$

$$T_3(x,t) = T_m - \frac{S}{\operatorname{erfc}(n\phi)} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_3 t}}\right)$$

La solución de Neuman aplica al molde metálico enfriado con agua, en que las propiedades termofísicas del sólido y del líquido son diferentes.

La figura no. 18 presenta un perfil de temperaturas con respecto a esta solución.

### 2.3.1.3 SOLUCION DE LIGHTFOOT.

Lightfoot consideró que el metal solidificado posee las mismas propiedades físicas que el metal líquido.

Esto es:

$$M = 0 \text{ y } m=n=1$$

La ecuación 10) resulta:

$$\exp(-\phi^2) \left[ \frac{1}{\operatorname{erf}(\phi)} + \frac{S}{\operatorname{erfc}(\phi)} \right] - \sqrt{\pi} H \phi = 0$$

La distribución de temperaturas:

Para  $x < 0$  :  $T_1 = T_0 = \text{constante.}$

Para  $x = 0$  :  $T_1 = T_0 = \text{constante.}$

Para  $0 < x < X$  .

$$T_2(x,t) = t_0 + \frac{T_f - T_0}{\operatorname{erf}(\phi)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2t}}\right)$$

Para  $x > X$

$$T_3(x,t) = T_m - \frac{S}{\operatorname{erfc}(\phi)} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_3t}}\right)$$

La solución de Lightfoot aplica al molde metálico enfriado con agua, en que las propiedades termofísicas del sólido y del líquido son similares.

La figura no. 19 presenta un perfil de temperaturas con respecto a esta solución.

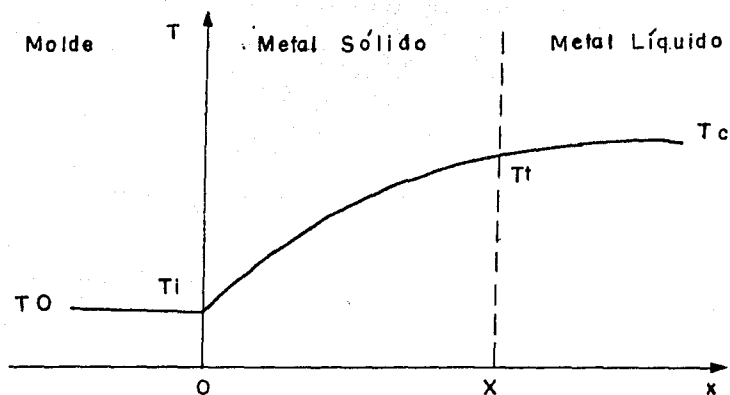


Figura no. 19. Distribución de temperaturas de acuerdo a la solución de Lightfoot.

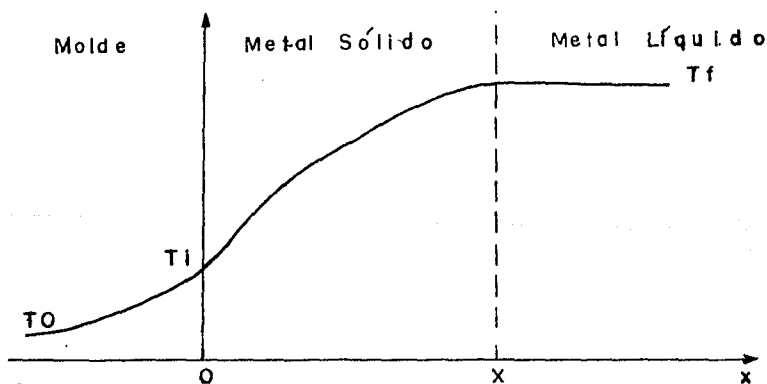


Figura no. 20. Distribución de temperaturas de acuerdo a la solución de Lyubov.

### 2.3.1.4 SOLUCION DE LYNBOV.

En esta solución no hay sobrecalentamiento.

Es decir:

$$s^* = 0$$

La ecuación 10) resulta:

$$\phi \exp(\phi^2) \left[ M + \operatorname{erf}(\phi) \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi} H}$$

La distribución de temperaturas:

Para  $x < 0$ :

$$T_1(x,t) = T_0 + \frac{T_f - T_0}{1 + \frac{\operatorname{erf}(\phi)}{M}} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \right]$$

Para  $x = 0$ :

$$T_i = \text{cte} = T_0 + \frac{T_f - T_0}{1 + \frac{\operatorname{erf}(\phi)}{M}}$$

Para  $0 < x < X$ :

$$T_2(x,t) = T_0 + \frac{T_f - T_0}{M + \operatorname{erf}(\phi)} \left[ M + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \right]$$

Para  $x > X$ :

$$T_3 = T_f = \text{cte.}$$

La solución de Lynbov aplica al molde metálico, especialmente para lingotes de grandes dimensiones.

La figura no. 20 da el perfil de temperaturas con respecto a esta solución.

### 2.3.1.5 SOLUCION DE STEFAN.

En esta solución se considera que el molde es un sumidero perfecto de calor y que el metal solidifica sin sobrecalentamiento.

Es decir:

$$M = 0 \quad \text{y} \quad S = 0$$

La ecuación 10) resulta:

$$\phi \exp(\phi^2) \operatorname{erf}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi} H}$$

La distribución de temperaturas :

Para  $x < 0$ :

$$T_{1,i} = T_0 = \text{cte.}$$

Para  $0 < x < X$  :

$$T_2(x,t) = T_0 + \frac{T_f - T_0}{\operatorname{erf}(\phi)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right)$$

Para  $x > X$  :

$$T_3 = T_f = \text{cte.}$$

Esta solución aplica al molde metálico enfriado con agua.

La figura no. 21 muestra el perfil de temperaturas con respecto a esta solución.

### 2.3.1.6 SOLUCION DE CHVORINOV.

Chvorinov considerò que el metal solidifica sin sobrecalentamiento y que el molde tiene capacidad de extracciòn de calor muy baja en relaciòn con el metal.

Esto es:

$$S^* = 0 \text{ y } M \gg 1$$

La ecuaciòn 10) da:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{\pi} H M^*}$$

La distribuciòn de temperaturas:

Para  $x < 0$ :

$$T_1(x,t) = T_0 + (T_f - T_0) \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2 \sqrt{\alpha t}} \right) \right]$$

Para  $x \geq 0$

$$T_{1,2,3} = T_f = \text{cte.}$$

La soluciòn de Chvorinov aplica en la solidificaciòn de metales de alta conductividad tèrmica que solidifica en la arena o en general de un material pobre conductor de calor.

La figura no. 22 muestra el perfil de temperaturas con respecto a esta soluciòn.

Por medio de esta ecuaciòn de distribuciòn de temperaturas y un balance de energìa en la interfase, se puede saber el tiempo de solidificaciòn (segun la referencia no. 2).

Primero se determina el gradiente de temperatura en la interfase:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ (T_0 + (T_f - T_0) \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{a_1 t}} \right) \right) \right]$$

$$\frac{dT}{dx} = - (T_f - T_0) \frac{d}{dx} \left( \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a_1 t}} \right)$$

La serie de la función error es :

$$\operatorname{erf} u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( u - \frac{u^3}{3 \cdot 1!} + \frac{u^5}{5 \cdot 2!} - \frac{u^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right)$$

Sustituyendo la serie de la función error y luego diferenciando, para los dos primeros terminos:

$$\frac{d}{dx} \left( \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a_1 t}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{2\sqrt{a_1 t}} - \frac{1}{2\sqrt{a_1 t}} \frac{3x^2}{3 \cdot 1!} \right)$$

Como se desea obtener el gradiente en la interfase, donde  $x=0$  :

$$\frac{d}{dx} \left( \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a_1 t}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_1 t}}$$

Por lo que :

$$\frac{dT}{dx} = - \frac{T_f - T_0}{\sqrt{\pi a_1 t}}$$

Sustituyendo  $\frac{dT}{dx}$  de la ecuación  $q_x = -K \frac{dT}{dx}$  se llega a que:

$$q_x = K \frac{(T_f - T_0)}{\sqrt{\pi a_1 t}}$$

Para encontrar  $D$  se tiene que :

$$Q = A \int_0^t \frac{dq}{dt} dt = \frac{A D (T_f - T_0) \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi a_1 t}}$$



Si se toma en cuenta que  $Q = \rho V H$  se tiene que:

$$\rho V H = \frac{A^2 K (T_f - T_0) t}{a_1}$$

$$\text{Con } a_1 = \frac{K}{\rho C_p}$$

$$t = \frac{2}{(V/A)^2} * \frac{P_i}{4} \left[ \frac{\rho H}{T_f - T_0} \right] * \frac{1}{\rho C_p K}$$

Donde  $(V/A)$  se conoce como el modulo de solidificación y el resto de la ecuación se conoce como la constante de Chvorinov.

**SOBRECALENTAMIENTO.** El modelo teórico no considera que la solidificación ocurra a una temperatura mayor, que a la de fusión. Sin embargo en la practica se vacia con sobrecalentamiento. Con el fin de afinar el modelo, a la realidad, se modifica la ecuación de Chvorinov de la siguiente manera:

$$t = (V/A)^2 * \frac{P_i}{4} \left[ \frac{\rho (H_f + C_p (T_c - T_f))}{T_f - T_0} \right]^2 * \frac{1}{K \rho C_p}$$

**EFFECTO DE LA GEOMETRIA DEL MOLDE.** El flujo de calor cuando la superficie del molde no es plana, es más intenso cuando dicha pared es convexa y por el contrario, es más lento que, la superficie plana, cuando es concava la pared del molde. Esto se explica porque en la primera, en la superficie convexa, se disipa el calor en una mayor cantidad de arena y en la segunda, la concava, se concentra en una cantidad menor.

Por lo anterior se tiene que el tiempo de solidificación en un

molde de figura geométrica similar a la de un cubo es mayor que la de un molde de figura geométrica similar al de un cilindro y este a su vez tarda un tiempo mayor al de una esfera. Todo esto para un mismo modulo de solidificación.

Segun la referencia no. 5 esto se cuantifica, para el molde de figura geométrica similar al del cilindro y a la esfera con la siguiente formula:

$$V/A = \frac{T_f - T_0}{\rho H} \left( \frac{2}{\sqrt{F_1}} \sqrt{K \rho C_p \sqrt{E}} + \frac{n K t}{2r} \right)$$

donde n = 1 para los moldes de figura geométrica similares al cilindro.

donde n = 2 para los moldes de figura geométrica similares a la esfera.

Reacomodando esta ecuación se tiene:

$$t = (V/A) \left[ \frac{2 F_1 \rho H}{4 (T_f - T_0)} \right]^2 + \frac{1}{K \rho C_p} - \frac{n K t \rho F_1}{16 r \rho C_p}$$

y si :

$$C = (V/A) \left[ \frac{2 F_1 \rho H}{4 (T_f - T_0)} \right]^2 + \frac{1}{K \rho C_p}$$

$$A = \frac{n K F_1}{16 r \rho C_p}$$

Se tiene :

$$t = C - A \sqrt{t}$$

Lo que da una ecuación de segundo grado:  $t \sqrt{t} + t - C = 0$

La solución positiva de la ecuación anterior es el tiempo de solidificación para piezas de figuras geométricas similares a la esfera o al cilindro.

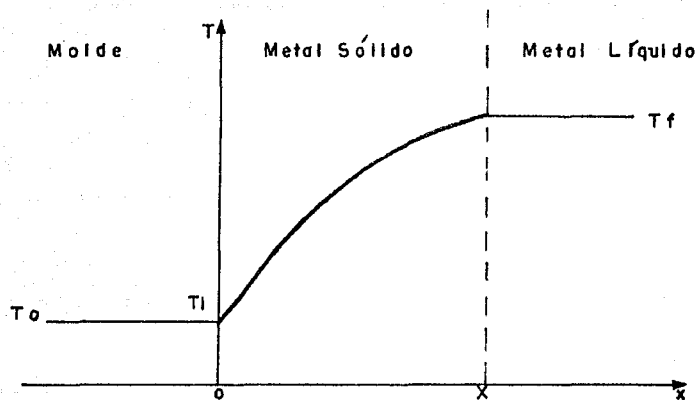


Figura no. 21.- Distribución de temperaturas de acuerdo a la solución de Stefan.

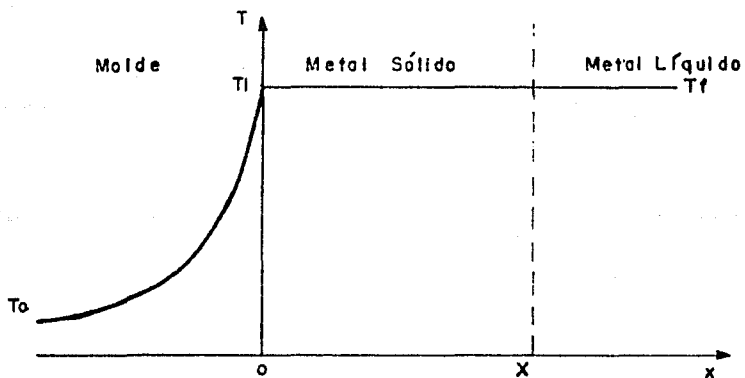


Figura no. 22. Distribución de temperaturas de acuerdo a la solución de Chvorinov.

### 2.3.2 METODOS NUMERICOS.

Los métodos numéricos son especialmente convenientes cuando se dispone de una computadora digital, en virtud de que los pasos involucrados en una solución numérica pueden programarse con relativa facilidad.

En sistemas en estado inestable, la distribución de temperaturas se conoce, pero debe determinarse su variación con el tiempo.

Por lo tanto, es necesario deducir la distribución de temperaturas para algún tiempo futuro, a partir de una distribución dada en un tiempo anterior.

Para ilustrar el método numérico, es necesario primero transformar la ecuación diferencial para la distribución de temperaturas en estado inestable en un conductor de calor sólido en una ecuación de diferencias finitas:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{q}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Se sustituye en la primera y segunda derivada por términos apropiados de diferencias finitas. Tomando una región general de conducción en tres dimensiones:

$$\frac{T_5 + T_6 + 2T_0}{\Delta z^2} + \frac{T_1 + T_3 - 2T_0}{\Delta x^2} + \frac{T_2 + T_4 - 2T_0}{\Delta y^2} + \frac{q_0}{k} = \frac{1}{a} \frac{T_0 - T_0}{\Delta t}$$

En la figura no. 23 se muestra la región general de conducción en tres dimensiones.

$T_0, T_1, T_2$ , etc. son las temperaturas en los puntos nodales

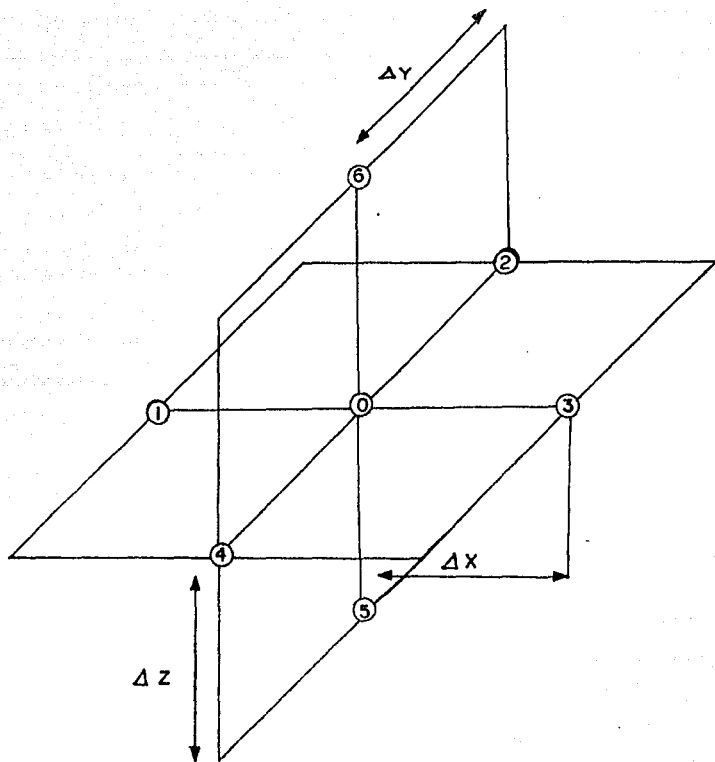


Figura no. 23. Red de tres dimensiones para el método numérico. (De la referencia no. 4)

$t+1$   
 0,1,2 etc al tiempo  $t$ ;  $T_0$  es la temperatura en el punto nodal  
 0, un intervalo de tiempo después, y  $q_0$  es la rapidez local de  
 generación de energía por unidad de volumen en el punto nodal 0  
 al tiempo  $t$ .

Haciendo  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ , la ecuación se convierte:  

$$T_1^t + T_2^t + T_3^t + T_4^t + T_5^t + T_0^t - 6T_0^t + \frac{q_0 \Delta x^2}{K} = \frac{\Delta x^2}{a \Delta \tau} (T_0^{t+1} - T_0^t)$$

La incógnita en la ecuación es  $T_0^{t+1}$ , despejandola tenemos  
 que:

$$T_0^{t+1} = \frac{1}{2} (T_1^t + T_2^t + T_3^t + T_4^t + T_5^t + T_0^t) + (1 - \frac{6}{2}) T_0^t + \frac{q_0 \Delta x^2}{K} \frac{\Delta x^2}{a \Delta \tau}$$

Esta ecuación es válida para tres dimensiones.

Para dos dimensiones:

$$T_0^{t+1} = \frac{1}{2} (T_1^t + T_2^t + T_3^t + T_4^t) + (1 - \frac{4}{2}) T_0^t + \frac{q_0 \Delta x^2}{K} \frac{\Delta x^2}{a \Delta \tau}$$

Para una dimensión:

$$T_0^{t+1} = \frac{1}{2} (T_1^t + T_2^t) + (1 - \frac{2}{2}) T_0^t + \frac{q_0 \Delta x^2}{K} \frac{\Delta x^2}{a \Delta \tau}$$

Si se conoce la distribución de temperaturas al tiempo  $t$ ,  
 puede usarse las ecuaciones anteriores para predecir la tempera-

tura en el punto nodal 0 despues que ha transcurrido un intervalo de tiempo  $\theta$ . Aplicando el mismo procedimiento a todo punto de la red, puede calcularse la distribución de temperaturas en un cuerpo al tiempo  $\theta + \theta$  a partir de una distribución dada al tiempo  $\theta$ .

La selección del tamaño de la red para un sistema dado, afecta la exactitud lineal de las derivadas y, por lo tanto, la exactitud del resultado. Mientras más pequeñas sean las subdivisiones, mayor es la exactitud, pero mayor es el trabajo involucrado en la solución. Para puntos interiores en una red de conducción inestable, la solución numérica será convergente si:

$$\frac{1}{\frac{\Delta x^2}{a\Delta\theta}} \geq 2 \text{ Para una dimensión.}$$

$$\frac{1}{\frac{\Delta x^2}{a\Delta\theta}} \geq 4 \text{ Para dos dimensiones.}$$

$$\frac{1}{\frac{\Delta x^2}{a\Delta\theta}} \geq 6 \text{ Para tres dimensiones.}$$

### CAPITULO III. DESARROLLO EXPERIMENTAL.

#### 3.1 OBJETIVO.

El objetivo de la parte experimental, es basicamente tomar el tiempo de solidificación de un metal de pureza comercial, (Aluminio) y comparar el tiempo, resultado del modelo teórico propuesto por Chvorinov. Esto con el fin de corroborar dicho modelo y evaluar su posible aplicación en la practica de la fundición.

En esta parte experimental, se vacio en arena, dado que el modelo teórico aplica cuando se vacia en un material poco conductor de calor.

#### 3.2 EQUIPO.

Molino para arena de careo.  
Molino chileno para arena de relleno.  
Cajas moldeadoras.  
Apizonadores.  
Cucharillas de moldeo.  
Balanza granataria.  
Horno de resistencias.  
Crisol de grafito.  
Termopares de Cromel-Alumel.  
Registadores de carta para tiempo y temperatura.

#### 3.3 MATERIAL.

Metal : Aluminio puro (pureza comercial).  
Arena de careo: Humedad 5% .  
Bentonita sodica 6%  
Bentonita calcica 4%  
Granulometria 40/45.  
Modelo: Cubos de madera sellada y barnizada de  
diferentes dimensiones (ver tabla no. 3).



LONGUITUD DE UN LADO (cm)	PESO MODELO EN MADERA (gr)	PESO MODELO EN METAL (gr)	MODULO DE SOLIDIFICACION (V/A)
2.8	12	56.4	0.4667
3.6	24	112.8	0.60
6.0	125	587.5	1.0112
7.5	275	1292.5	1.25

Tabla no. 3 . Dimensiones del modelo, su peso en madera y en metal.

### 3.4 PROCEDIMIENTO.

Se moldeó en arena de granulometría 40/45, con 5% de humedad y 10% de bentonitas. En el centro geométrico del molde se colocó la punta del termopar ( ver figura no. 24). Se situó así el termopar por considerar que el enfriamiento que sufre la pieza se da de la parte más externa hacia el interior, por lo que el último lugar en solidificar es el centro de la pieza

El modelo del cubo se eligió para disminuir los efectos de contorno, esto es, la transferencia de calor en paredes que no son planas. Y para poder colocar el termopar fácilmente en el lugar equidistante a todas las paredes del molde.

El tipo de molde fue cerrado, el cubo a llenar esta rodeado de arena por todos sus lados y la alimentación consta de tina de colada, bebedero, pozo de colada y entrada. El área de contacto térmico de la entrada se procuró que fuese siempre menor del 10% y su forma y proporciones se dan en la figura no. 25.

Se tomó la temperatura ambiente con un termómetro de mercurio, la temperatura de colada, así como el tiempo de solidificación, de la lectura de la carta del registrador, al cual esta conectado el termopar.

El metal usado fue Aluminio de una pureza comercial. Se usó metal puro con el fin de que la interfase sólido-licuido fuera

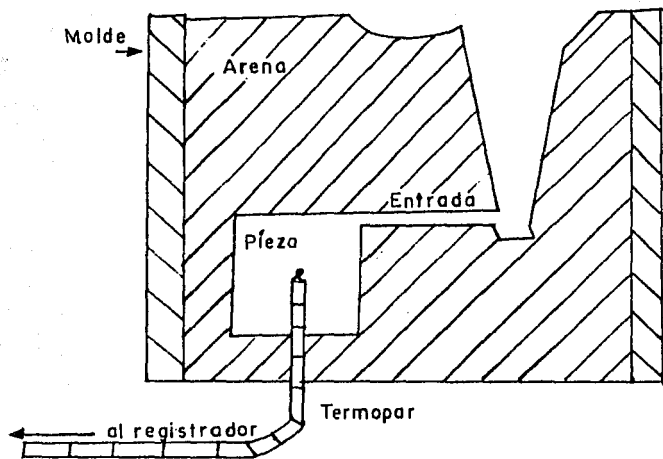


Figura no. 24. Vista de perfil del sistema de colada y colocación del termopar.

$$2a = b$$

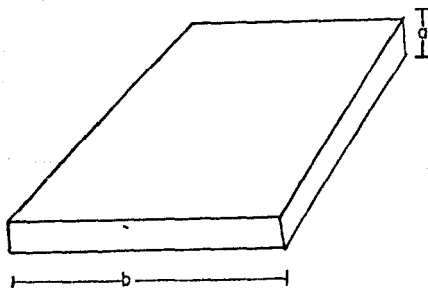


Figura no. 25. Se muestra las proporciones de la entrada.

plana durante el proceso de solidificación. Esto es considerado también en el modelo teórico.

El metal se precalentó fuera del horno y cuando este alcanza 400 C°, se carga el metal en el crisol. Se procedió a apagar el horno cuando este alcanzó los 750 C° aproximadamente y en ese momento se realizaron las operaciones de colada, que son las siguientes:

- 1.-Se activa el registrador.
- 2.-Se coloca el crisol en el maneral de vaciado.
- 3.-Se vierte el metal líquido en la tina del molde.
- 4.-Se vacía el metal sobrante en lingoteras, limpiando el crisol de residuos.
- 5.-Se regresa el crisol al horno apagado, para que enfrie lentamente.

Este procedimiento se siguió para todos los tamaños de cubos. Así como también, se corrió tres veces para cada tamaño.

## CAPITULO IV Resultados.

### 4.1 PRESENTACION DE RESULTADOS.

Se presentan los resultados experimentales en la tabla no. 4. En las tablas 5, 6 y 7 se presentan los resultados experimentales junto con los teóricos. En estas tablas, se dan las temperaturas de colada y las ambientales, bajo las cuales se efectuó la parte experimental. Los resultados teóricos se calcularon en base a las condiciones de cada colada y de acuerdo a la solución propuesta por Chvorinov. Esta solución se ve ampliamente en el capítulo de Métodos Analíticos Exactos. La ecuación usada para encontrar el tiempo teórico es:

$$T_{\text{teórico}} = C (V/A)^2$$

en donde:

$$C = \frac{\pi \left[ \rho(1) (H_f + C_p(1) * (T_c - T_f)) \right]^2}{4 \left[ T_{\text{colada}} - T_{\text{del molde}} \right] * \left[ K(3) * \rho(3) * C_p(3) \right]}$$

Y :

$\rho(1)$  = Densidad del metal Sólido.

$H_f$  = Calor de fusión.

$C_p$  = Capacidad calorífica del metal líquido.

$T_c$  = Temperatura de colada.

$T_f$  = Temperatura de fusión.

$k(3)$  = Conductividad térmica del molde.

$\rho(3)$  = Densidad del molde.

$C_p(3)$  = Capacidad calorífica del molde.

$\pi$  = 3.1416

MODULO DE SOLIDIFICACION	TEMPERATURA COLADA (C°)	TIEMPO A COLADA INIC. DE SOL	TIEMPO A INIC. DE SOL FIN DE SOL	TIEMPO TOTAL (segundos)
0.4667	693	---	---	30
0.4667	673	1.5	34.5	36
0.4667	675	1.5	34.5	36
0.60	662	0	60	60
0.60	674	6	78	84
0.60	697	6	87	93
1.0	685	9	165	174
1.0	662	3	159	162
1.0	697	15	186	201
1.25	673	12	228	240
1.25	697	24	270	294
1.25	697	18	279	297

Tabla no. 4. Cuadro de resultados experimentales. Se muestra el tiempo de solidificación total separado por sus dos componentes: tiempo desde el vaciado al inicio de la solidificación y tiempo desde el inicio de la solidificación hasta el fin de solidificación.

MODULO DE SOLIDIFICACION (V/A)	TEMPERATURA AMBIENTE (C°)	TEMPERATURA COLADA (C°)	TIEMPO EXPERIMENTAL (segundos)	TIEMPO TEORICO (segundos)
0.4667	25	693	30.0	1) 37.01 2) 52.87 3) 82.25 4) 32.185 5) 121.35 6) 123.37
0.60	25	662	60	1) 57.21 2) 81.74 3) 127.15 4) 49.75 5) 187.60 6) 190.73
1.0	25	685	174	1) 167.17 2) 239.82 3) 371.50 4) 145.37 5) 548.12 6) 557.25
1.25	25	673	240	1) 254.57 2) 363.67 3) 565.72 4) 221.37 5) 834.67 6) 848.58

Tabla no. 5. Cuadro de resultados del primer grupo. A 1) le corresponde una  $K=2.1 \times 10^{-3}$ , a 2)  $K=1.4 \times 10^{-3}$ , a 3)  $K=0.90 \times 10^{-3}$ , a 4)  $K=2.3 \times 10^{-3}$ , a 5)  $K=0.61 \times 10^{-3}$ , a 6)  $K=0.60 \times 10^{-3}$

MODULO DE SOLIDIFICACION (V/A)	TEMPERATURA AMBIENTE (C°)	TEMPERATURA COLADA (C°)	TIEMPO EXPERIMENTAL (segundos)	TIEMPO TEORICO (segundos)
0.4667	25	673	36	1) 35.48 2) 50.68 3) 78.84 4) 50.85 5) 116.33 6) 118.27
0.60	25	674	84.0	1) 58.78 2) 83.97 3) 130.62 4) 51.11 5) 192.73 6) 195.94
1.0	25	662	162	1) 158.94 2) 227.06 3) 353.21 4) 138.21 5) 521.13 6) 529.81
1.25	25	697	294	1) 267.69 2) 782.42 3) 594.88 4) 232.78 5) 677.49 6) 892.32

Tabla no. 6. Cuadro de resultados del segundo grupo. A 1) le corresponde una  $K = 2.0 \times 10^{-3}$ , a 2)  $K = 1.4 \times 10^{-3}$ , a 3)  $K = 0.90 \times 10^{-3}$ , a 4)  $K = 2.7 \times 10^{-3}$ , a 5)  $K = 0.61 \times 10^{-3}$ , a 6)  $K = 0.61 \times 10^{-3}$ .



MODULO SOLIDI- FICACION (V/A)	TEMPERATURA AMBIENTE (C°)	TEMPERATURA COLADA (C°)	TIEMPO EXPERIMEN- TAL (segundos)	TIEMPO TEORICO (segundos)
0.4667	25	675	36	1) 35.63 2) 50.91 3) 79.19 4) 30.98 5) 116.84 6) 118.79
0.60	25	697	93	1) 61.67 2) 88.11 3) 137.06 4) 53.63 5) 202.22 6) 205.59
1.0	25	697	201	1) 171.33 2) 244.75 3) 380.73 4) 148.98 5) 561.73 6) 571.09
1.25	25	697	297	1) 267.69 2) 382.42 3) 594.88 4) 232.78 5) 877.69 6) 892.32

Tabla no. 7 Cuadro de resultados del tercer grupo. a 1) le  
corresponde una  $K = 2.0 \times 10^{-3}$ , a 2)  $K = 1.4 \times 10^{-3}$ , a 3)  $K = 0.90 \times 10^{-3}$ , a  
4)  $K = 2.3 \times 10^{-7}$ , a 5)  $K = 0.61 \times 10^{-7}$ , a 6)  $K = 0.60 \times 10^{-7}$

Al hacer la revisión de la literatura metalúrgica sobre el tema, se encontró que si bien para las propiedades termo-físicas del metal seleccionado, en la parte experimental, están bien definidas, para las arenas de moldeo dichas propiedades difieren de un autor a otro (vease tabla no. 2). Por lo que el cálculo del tiempo teórico fue necesario hacerlo con diferentes conductividades térmicas del molde. Cabe hacer mención que estas conductividades fueron medidas con arenas de diferentes lugares, aunque el contenido de bentonitas y humedad es parecido y existe diferencia en la granulometría de la arena. Para encontrar el tiempo de solidificación teórico se elaboró un programa de cómputo, en lenguaje Basic, como auxilio en cálculo de las operaciones.

Los valores de las propiedades termo-físicas utilizadas en el cálculo del tiempo teórico ( de la tabla no. 1 ) fueron los siguientes:

Capacidad calorífica del metal líquido	0.26 Cal/g C <sup>°</sup>
Capacidad calorífica del molde	0.27 Cal/g C <sup>°</sup>
Conductividad térmica del molde	Variable.
Calor de fusión	95.0 Cal/g
Densidad del metal sólido.	2.7 g/cm <sup>3</sup>
Densidad del molde.	1.5 g/cm <sup>3</sup>
Temperatura del molde	Variable.
Temperatura de fusión.	660.0 C <sup>°</sup>
Temperatura de colada.	Variable.

Con fines de evaluar los resultados, se efectuó el cálculo de la desviación de los datos teóricos promedio con respecto a los

$$\text{Desviación} = \sqrt{\frac{(y_1 - y_2)^2}{n-1}}$$

en donde:

$y_1$  = tiempo teórico promedio de un modulo

$y_2$  = tiempo experimental promedio del modulo correspondiente \*

Los resultados se muestran en la tabla no. 8.

La grafica no.1A muestra los resultados experimentales y la grafica no. 1 muestra los resultados experimentales promediados. Las graficas no.2 y 3 muestran los resultados experimentales y los teóricos comparativamente con respecto al cuadrado del modulo de solidificación.

Por el método de regresión lineal por minimos cuadrados se encontró que los datos experimentales se ajustan a la ecuación :

$$Y = 5.38 + 174.34 X$$

Con un coeficiente de correlación de :

$$F_c = 0.9971$$

TIEMPO EXPERIMENTAL PROM.	TIEMPO TEORICO I PROM.	TIEMPO TEORICO II PROM.	TIEMPO TEORICO III PROM.	TIEMPO TEORICO IV PROM.	TIEMPO TEORICO V PROM.	TIEMPO TEORICO VI PROM.
34.00	36.04	51.48	80.09	31.34	118.17	120.14
79.00	59.22	84.60	131.61	51.49	194.18	197.42
179.00	165.81	236.87	368.48	144.18	543.66	552.71
277.00	263.31	376.17	585.16	228.97	863.35	877.74

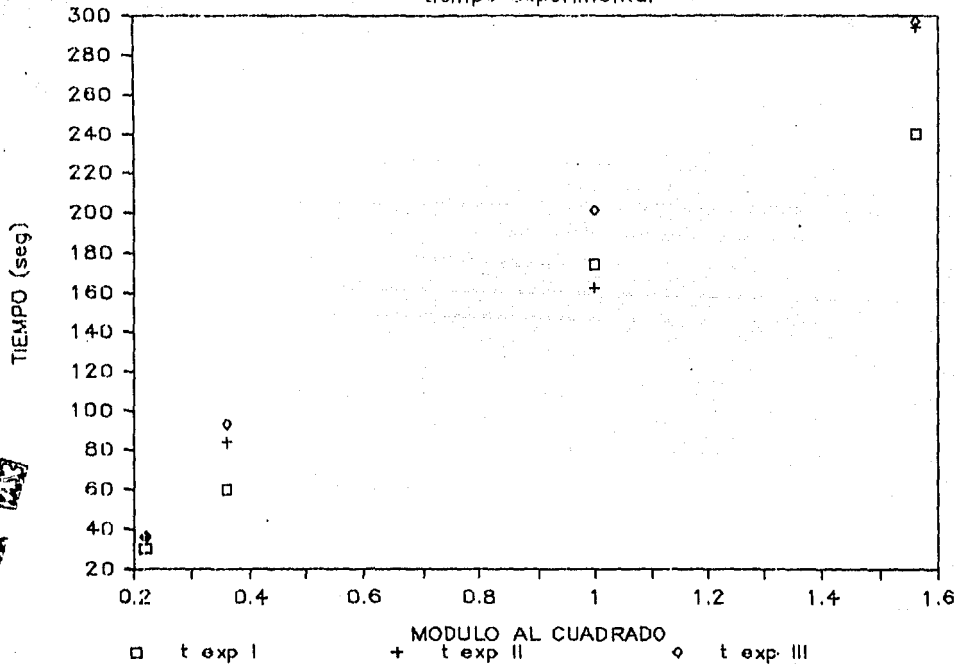
VARIACION.

TIEMPO TEORICO I	15.88
TIEMPO TEORICO II	67.138
TIEMPO TEORICO III	212.71
TIEMPO TEORICO IV	37.78
TIEMPO TEORICO V	407.07
TIEMPO TEORICO VI	417.13

Tabla no. 8. Tiempos promedios. Se presenta también la variación del tiempo promedio teórico con respecto al tiempo promedio experimental.

# GRAFICA NO. 1A

tiempo experimental



59

TIEMPO (seg)

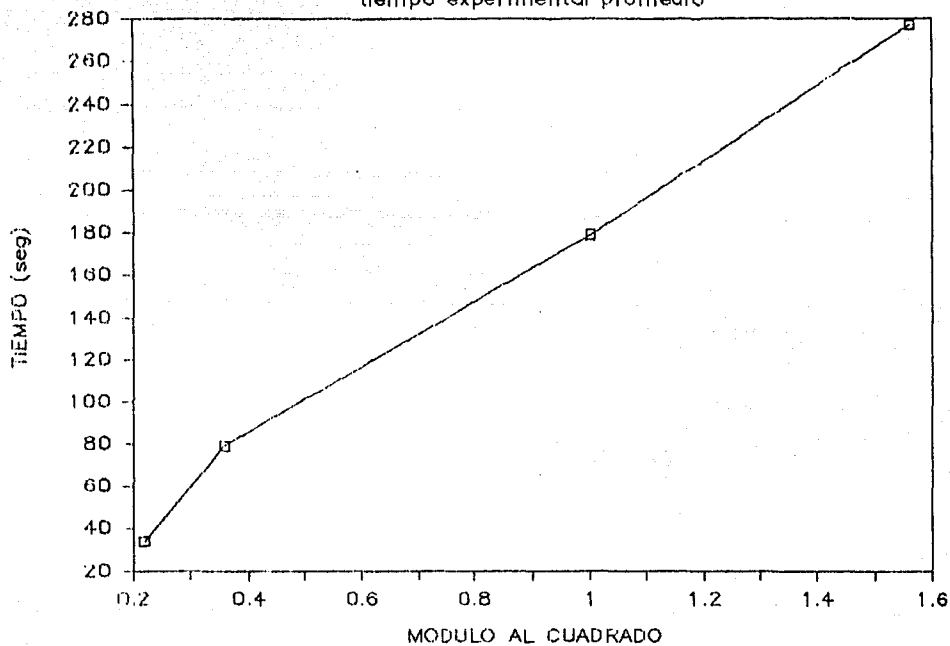
□ t exp I

+ MODULO AL CUADRADO  
+ t exp II

◇ t exp III

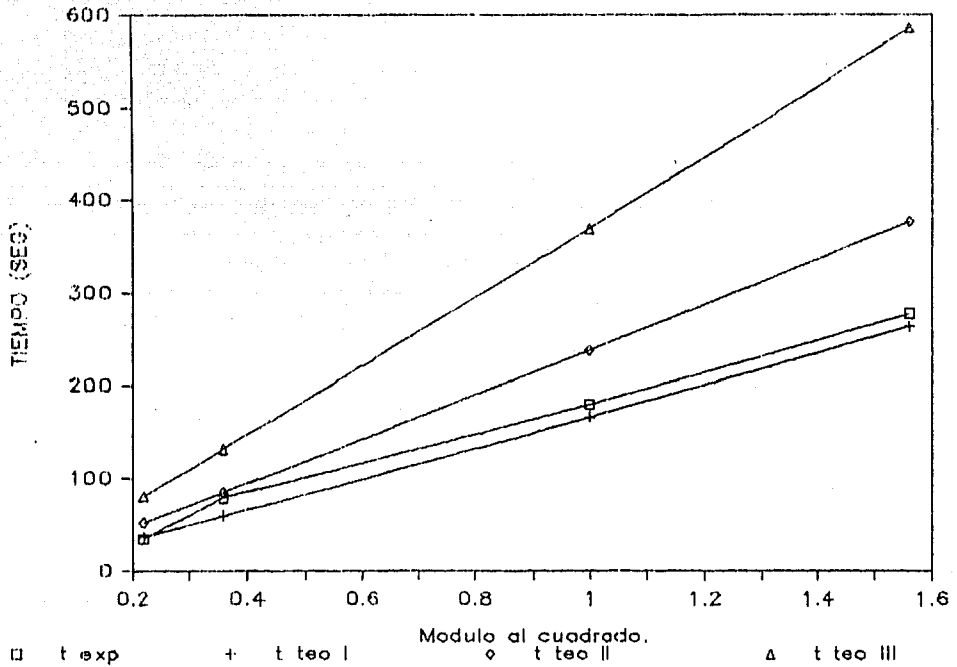
NO DEBE  
SER  
REPRODUCIDA  
SIN  
EL  
CONSENTIMIENTO  
DE  
LA  
COMISION  
NACIONAL  
DE  
ENERGIA  
ATOMICA

GRAFICA NO. 1  
tiempo experimental promedio



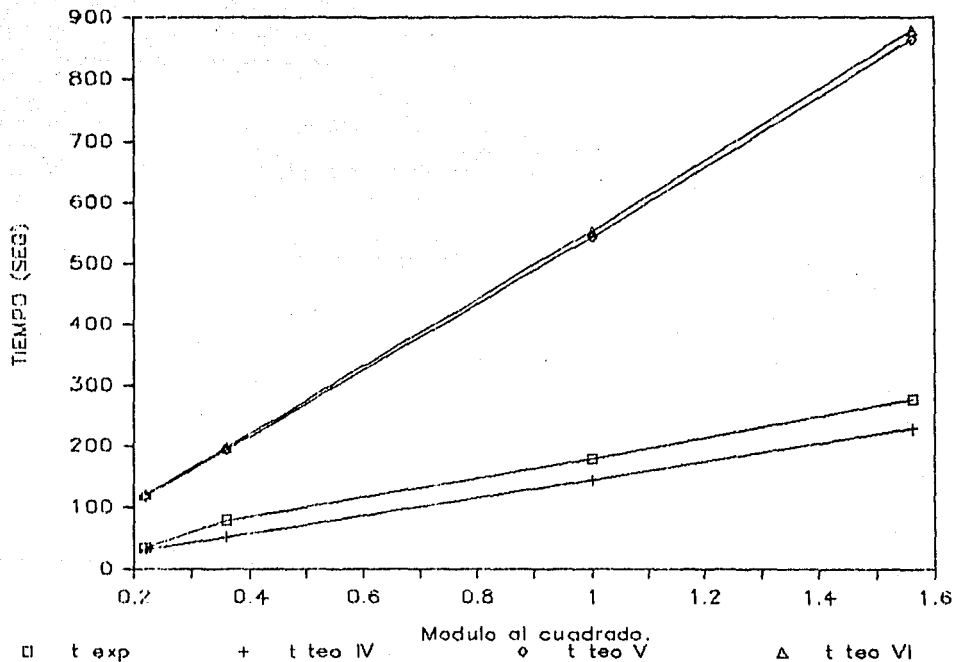
# GRAFICA NO. 2

67



# GRAFICA NO. 3

89





#### 4.2 ANALISIS DE RESULTADOS.

Para las pruebas experimentales se vacio con sobrecalentamiento, esto implica que el metal tarda más tiempo en solidificar, al tener una mayor temperatura que la requerida para el inicio de solidificación. Esta contribución del sobrecalentamiento en el tiempo de solidificación se aprecia en la tabla no. 4. Se observan pequeñas variaciones en el tiempo de solidificación para un mismo módulo, si se cambia la temperatura de colada. Sin embargo para diferentes módulos, a una misma temperatura, la contribución del sobrecalentamiento es más marcada conforme aumenta el módulo de solidificación.

Los resultados teóricos para un tiempo experimental dado, tablas 5, 6 y 7, fueron calculados con los mismos valores, excepto el de la conductividad del molde. Al comparar los diferentes resultados teóricos por medio de la variación o desviación que tienen estos con respecto al tiempo experimental, se encontró que el más cercano al resultado experimental es aquel que usa la conductividad térmica del molde con valor de  $2 \times 10^{-3}$  cal/cmC. Cabe mencionar que no se encontro reportada la conductividad

termica, en la literatura metalurgica consultada, para la arena usada, pues esta conductividad depende de la granulometria, tiempo de mezclado, cantidad de bentonitas y humedad.

El programa de computo solo se usó para obtener resultados teóricos de la forma geométrica de un cubo. Sin embargo tiene capacidad para otras formas, para el cilindro y la esfera tiene la corrección en la ecuación de Chvorinov para superficies del molde que no son planas.

La gráfica 1A y 1 muestran el tiempo experimental con respecto al módulo al cuadrado. Se observa que conforme aumenta el módulo de solidificación aumenta también el tiempo de solidificación. El factor de correlación cercano a uno nos permite decir que la gráfica no. 1 se comporta como una línea recta y que la ecuación encontrada describe dicha recta.

En las gráficas no. 2 y 3 se observa que los modelos teóricos siguen la tendencia de la parte experimental con las diferencias consideradas por la variación anteriormente calculada.

## CONCLUSIONES.

De acuerdo a los resultados obtenidos, en el presente trabajo y al análisis de estos, se tienen las siguientes conclusiones:

- . EL sobrecalentamiento prolonga el tiempo de solidificación.
- . Entre mayor sea el módulo, mayor es la influencia del sobrecalentamiento en el tiempo de solidificación.
- . La relación entre el módulo de solidificación al cuadrado y el tiempo de solidificación es lineal.
- . Para una determinada granulometría de arena y en condiciones de preparación específicas, como tiempo de mezclado, cantidad de bentonitas y humedad, se puede conocer prácticamente la relación entre el tiempo de solidificación y el módulo por medio de la siguiente ecuación:

$$\text{Tiempo de Solidificación} = C_1 + C_2 \times \text{Módulo}^2$$

En donde  $C_1$  y  $C_2$  es la parte de la ecuación que contiene las propiedades termo-físicas del metal / del molde. Y que se encuentran experimentalmente.

- . Se puede extender este método a materiales de fundición, tanto metal como arena, cuando se desconocen la conductividad térmica, y el resto de propiedades termo-físicas.

A N E X O .

PROGRAMA PARA EL CALCULO DEL TIEMPO DE SOLIDIFICACION TEORICO.

LENGUAJE BASIC

```

10 PRINT CHR$(12);PRINT:PRINT
20 PRINT"ESTE PROGRAMA CALCULA EL TIEMPO DE SOLIDIFICACION.UTILIZA EL MODELO P
PUESTO POR CHVORINOV Y TIENE CAPACIDAD FARA REALIZAR EL CALCULO CON SOBRECALEN
MIENTO."
30 PRINT:PRINT
40 PRINT"DATOS REQUERIDOS":PRINT:PRINT
50 INPUT"TEMPERATURA INICIAL DEL METAL LIQUIDO,EN GRADOS CENTIGRADOS ";T3
60 INPUT"CAPACIDAD CALORIFICA DEL METAL LIQUIDO, CAL/gC";C3
70 INPUT"CALOR DE FUSION DEL METAL, CAL/G ";H2
80 INPUT"DENSIDAD DEL METAL SOLIDO, G/CM3 ";DS2
90 INPUT"TEMP.DE FUSION METAL,GRADOS CENTIGRADOS ";T2
100 INPUT"CAPACIDAD CALORIFICA DEL MOLDE CAL/gC ";C1
110 INPUT"CONDUCTIVIDAD TERMICA DEL MOLDE, CAL/CMSEG C ";K1
120 INPUT"TEMPERATURA INICAL DEL MOLDE;GRADOS CENTIGRADOS ";T1
130 INPUT "DENSIDAD DEL MOLDE G/CM3 ";DE1
140 PRINT CHR$(12)
150 PRINT"LOS DATOS TECLEADOS SON LOS SIGUIENTES ";PRINT:PRINT
160 PRINT"TEMPERATURA INICIAL DEL METAL LIQUIDO,EN GRADOS CENTIGRADOS ";T3
170 PRINT"CAPACIDAD CALORIFICA DEL METAL LIQUIDO, CAL/gC";C3
180 PRINT"CALOR DE FUSION DEL METAL, CAL/G ";H2
190 PRINT"DENSIDAD DEL METAL SOLIDO, G/CM3 ";DS2
200 PRINT"TEMP.DE FUSION METAL,GRADOS CENTIGRAADS ";T2
210 PRINT"CAPACIDAD CALORIFICA DEL MOLDE CAL/gC ";C1
220 PRINT"CONDUCTIVIDAD TERMICA DEL MOLDE, CAL/CMSEG C ";K1
230 PRINT"TEMPERATURA INICAL DEL MOLDE;GRADOS CENTIGRADOS ";T1
240 PRINT "DENSIDAD DEL MOLDE G/CM3 ";DE1
250 PRINT:PRINT:PRINT
260 INPUT"ESTA UD. DE ACUERDO ? SI O NO ";G1$
270 IF G1$<>"SI" THEN 40
280 PRINT CHR$(12);PRINT:PRINT:PRINT
290 PRINT "QUE FORMA GEOMETRIA DESEA USAR
300 PRINT"          1.-PLACA"
310 PRINT"          2.-CUBO"
320 PRINT"          3.-CILINDRO"
330 PRINT"          4.-ESFERA"
340 PRINT"          5.-PARALELEPIPEDO"
350 INPUT F1
360 IF F1<=5 AND F1>=1 THEN 390
370 PRINT" SLOO ESTAN CONSIDERADAS ESTAS RELACIONES

```

```

380 GOTO 290
390 PRINT CHR$(12)
400 ON F1 GOTO 410,590,670,870,990
410 PRINT:PRINT:PRINT:PRINT:PRINT
420 PRINT"CALCULO PARA UNA LACA"
430 INPUT"VALOR DEL ANCHO, EN CM " ;D1
440 MODULO=D1/2
450 GOSUB 1100
460 PRINT CH:$(12)
470 PRINT:PRINT:PRINT
480 PRINT" VALOR DEL MODULO DE SOLIDIFICACION V/A " ;MODULO
490 PRINT
500 PRINT"TIEMPO DE SOLIDIFICACION " ;T4;" SEGUNDOS"
510 PRINT:PRINT:PRINT:PRINT
520 PRINT" 1.-DESEA CALCULO CON DATOS ANTERIORES "
530 PRINT" 2.-DESEA CALCULO CON DATOS NUEVOS"
540 PRINT" 3.-FIN DE TRABAJO"
550 INPUT F1
560 IF F1<=3 AND F1>=1 THEN 580
570 GOTO 510
580 ON F1 GOTO 140,40,1090
590 PRINT:PRINT:PRINT:PRINT
600 PRINT"CALCULO PARA UN CUBO"
610 PRINT:PRINT:PRINT
620 INPUT"VALOR DE UN LADO EN CM " ;D1
630 INPUT "FAVOR DE TECLLEAR EL AREA DE CONTACTO TERMICO EN CM2, SI NO HAY : C
CERO) " ;A1
640 MODULO=(D1^3)/((6*D1^2)-A1)
650 GOSUB 1100
660 GOTO 460
670 PRINT:PRINT:PRINT:PRINT
680 PRINT" CALCULO PARA UN CILINDRO"
690 PRINT:PRINT:PRINT:PRINT
700 INPUT "VALOR DEL DIAMETRO " ;D1
710 INPUT "VALOR DE LA ALTURA " ;H1
720 INPUT "FAVOR DE TECLLEAR EL AREA DE CONTACTO TERMICO EN CM2, SI NO HAY : 0
CERO) " ;A1
730 F1=H1/D1
740 PRINT:PRINT:PRINT" RELACION H/D " ;F1
750 FOR X=1 TO 120
760 NEXT X
770 IF F1<=1.5 AND F1>=.5 THEN 800
780 PRINT" LA RELACION H/D NO ES LA ADECUADA "
790 GOTO 290
800 F1=3.1416
810 MODULO=(5*(D1^2)*H1)/4*((1+F1*D1^4)-.5*(F1^4*D1^4))-A1
820 GOSUB 1100
830 C9=-T4*H1*F1
840 GOSUB 1140
850 GOSUB 1170
860 GOTO 460
870 PRINT:PRINT:PRINT:PRINT
880 PRINT" CALCULO PARA UNA ESFERA"
890 PRINT:PRINT:PRINT:PRINT:PRINT
900 INPUT "VALOR DEL DIAMETRO " ;D1
910 INPUT "FAVOR DE TECLLEAR EL AREA DE CONTACTO TERMICO EN CM2, SI NO HAY : 0
CERO) " ;A1

```

```

920 F1=3.1416
930 MODULO=(.16666*F1*(D1^3))/((F1*(D1^2))-A1)
940 GOSUB 1100
950 C9=-T4;N1=2
960 GOSUB 1140
970 GOSUB 1170
980 GOTO 460
990 PRINT;PRINT;PRINT;PRINT
1000 PRINT"  CALCULO PARA UN PARALELEPIEDO"
1010 PRINT;PRINT;PRINT;PRINT
1020 INPUT "VALOR DEL LARGO, EN CM ";D1
1030 INPUT "VALOR DEL ANCHO, EN CM ";D2
1040 INPUT "VALOR DE LA ALTURA, EN CM ";H1
1050 INPUT "FAVOR DE TECLEAR EL AREA DE CONTACTO TERMICO EN CM2, SI NO HAY :
(CERO) ";A1
1060 MODULO=(D1*D2*H1)/((2*(D1*D2+2*H1+2*D1*H1))-A1)
1070 GOSUB 1100
1080 GOTO 460
1090 END
1100 H3=H2+C3*(T3-T2)
1110 C=(3.1416/4)*(((DS2*HC)/(T3-T1))^2*(1/(D1*DE1*DC)))
1120 T4=C*(MODULO^2)
1130 RETURN
1140 F1=D1/2
1150 A7=(N1^2*K1*F1)/(16*(R1^2)*DE1*DC1)
1160 RETURN
1170 T4=(-1+SQR(1-4*A9*C9))/(2*A9)
1180 RETURN

```

#### BIBLIOGRAFIA.

1. ROBERT J. STEIN  
METALLURGICALS FOR THE FOUNDRYMAN.  
MCCLEAREN AND SONS LTD.  
LONDON.
2. RICHARD A. FINN  
FOUNDATIONALS OF METAL CASTING.  
ANDERSON-WILEY PUBLISHING COMPANY.
3. J. BARTER Y M. J. JONES.  
METODOS DE ANALISIS DE LA EXTRACCION CALORICA DURANTE LA  
SOLIDIFICACION.  
RESOLUCIONES ANALITICAS EXACTAS.  
BOLETIN DE QUIMICA U.S.A.
4. FRANK W. SMITH.  
ELECTRICOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR  
FERROUS METALS.
5. HENRY C. FLEMING.  
SOLIDIFICATION PROCESSES.
6. W. W. BENTLEY Y M. J. JONES.  
FREEZING CONDITIONS COMPARATIVE STUDY.  
METALLURGICAL SOCIETY LONDON 1957.
7. W. DE L. DAVIES  
FREEZING RANGE DETERMINATION BY NUMERICALLY CONTROLLED HEAT  
EXCHANGE SYSTEM.  
ATE PRACT. INFORMATION JOURNAL  
1962 1962.
8. JOHN W. BENTLEY  
STATISTICAL CONTROL.  
EFICIENCIA Y ESTADISTICA PARA INGENIEROS.  
EDITORIAL BOLIVAR MONTREAL 1961.
9. ANASTASIO JORGE LUIS BARRALES.  
INFLUENCIA DE LA LA PREPARACION DEL SISTEMA DE MOLDEO SOBRE  
LA OBTENCION TECNICA DEL HIERRO.  
TRABAJO 1962 LILIAN.