

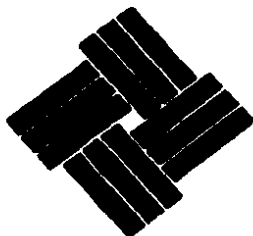
881201

10
20

UNIVERSIDAD ANAHUAC

ESCUELA DE ACTUARIA

Con Estudios Incorporados a la Universidad Nacional Autónoma de México



UNA APLICACION DE LA PROGRAMACION LINEAL AL PROBLEMA DE PROGRAMACION DE PRODUCCION Y REQUERIMIENTOS

T E S I S

Que para obtener el título de:

A C T U A R I O

P r e s e n t a :

María Petty Teresita Pérez Ríos Aguilar

México, D. F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1987



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UNA APLICACION DE LA PROGRAMACION LINEAL AL PROBLEMA DE
PLANEACION DE PRODUCCION Y REQUERIMIENTOS.

INTRODUCCION.

- I.- LA PLANEACION Y LA INVESTIGACION DE OPERACIONES EN LA PRODUCCION.
- a) Planeación: concepto y características.
 - b) Componentes de la planeación.
 - c) Investigación de Operaciones: metodología y modelos.
 - d) Producción: objetivo, funciones y organización.
- II.- PROGRAMACION LINEAL.
- a) Introducción.
 - b) Modelo General.
 - c) Supuestos y Terminología.
 - d) Método Simplex: propiedades y algoritmo.
 - e) Dualidad.
- III.- UN MODELO DE PROGRAMACION LINEAL PARA LA PLANEACION DE PRODUCCION DE UNA FABRICA DE JABONES.
- a) La empresa: antecedentes, organización y objetivo.
 - b) Planteamiento del problema.
 - c) Modelo de Programación Lineal propuesto.
- IV.- SOLUCION Y CONCLUSIONES.
- a) Solución al modelo planteado a través del método simplex.
 - b) Comparativo de resultados obtenidos con el método de planeación actual y resultados obtenidos con el modelo de programación lineal.
 - c) Planeación de requerimientos.
 - d) Conclusiones.

ANEXOS:

- 1.- Solución del modelo de programación lineal, primal, dual y análisis de sensibilidad.
- 2.- Estructura matricial del modelo.
- 3.- Problema dual.

INTRODUCCION.

El objetivo de esta tesis, es mostrar el uso de la programación lineal en una empresa fabricante de jabones para el cabello, al problema que tiene en la planeación de producción y requerimiento de materiales.

En este trabajo no se pretende demostrar los conceptos teóricos de la programación lineal, sino dar a conocer la metodología necesaria para solucionar el problema.

En los últimos años, la empresa ha crecido considerablemente y de ser una pequeña organización familiar, ha llegado a ocupar un lugar muy importante dentro del mercado al que pertenece.

Como consecuencia de este cambio, la empresa requiere de una planeación basada en técnicas y métodos cuantitativos que le permitan aprovechar mejor sus recursos, concretamente en el área de producción. Es decir, desea establecer cual es la mejor manera de programar la fabricación de sus productos y el abastecimiento de materiales, minimizando los costos de producción y los costos de mantenimiento del inventario de los productos.

El presente trabajo se divide en cuatro capítulos:

El primer capítulo es una introducción a los conceptos básicos de la planeación y la metodología de la investigación de operaciones y como llegan a constituir un apoyo para las funciones de producción.

En el segundo capítulo, se exponen las características de un modelo de programación lineal, explicando los métodos de solución a este tipo de modelos.

El tercer capítulo, describe la empresa: su organización, funcionamiento actual y objetivos del área productiva el planteamiento del problema y finalmente el modelo de programación lineal propuesto.

En el capítulo cuatro, se resuelve el problema a través del modelo propuesto y se comparan los resultados obtenidos, con los resultados actuales, para así mostrar los beneficios de cambiar al modelo de programación lineal. Complementando el nuevo modelo de planeación de producción, se propone un nuevo método de planeación de requerimientos y - sus ventajas, y para finalizar se presentan las conclusiones.

I.- LA PLANEACION Y LA INVESTIGACION DE OPERACIONES EN LA PRODUCCION.

a) Planeación: concepto y características.

La planeación consiste en trazar los lineamientos - y establecer los medios para lograr un futuro que se pretende, por lo tanto, es fundamental para cualquier empresa, no solo por el interés de obtener mayores beneficios sino para la propia subsistencia y conservación de la misma.

En consecuencia, la planeación es un proceso de toma de decisiones que se caracteriza por:

- i) Ser una toma de decisiones anticipada, puesto que las decisiones deben tomarse antes que la acción suceda.
- ii) Constituir un sistema de decisiones, ya que están relacionadas y son interdependientes entre sí.
- iii) Considerar siempre una situación dual: una, si se toman las medidas adecuadas aumenta la probabilidad de obtener el futuro que se pretende y otra, en la que si no se toman las medidas - adecuadas no se obtendrá el futuro que se pretende.

La planeación tiene su aplicación a conjuntos de decisiones que son lo suficientemente grandes, para tomar las decisiones al mismo tiempo, por lo que surge la necesidad de dividir la planeación en etapas.

b) Componentes de la planeación.

De una manera general, las partes de la planeación son:

- 1.- Objetivos y metas: Son los fines que se persiguen con la planeación y deben ser bien definidos, concretos y realizables. Los resultados que se pretenden son los objetivos y cuando se les aplica restricción de tiempo, se convierten en metas. Tanto los objetivos como las metas pueden ser de carácter cuantitativo ó cualitativo. Para poder establecer objetivos y metas adecuados, se requiere un amplio conocimiento de la empresa y sus funciones, tomando en cuenta los medios y las actividades que se requieren para su consecución.
- 2.- Políticas y cursos de acción: Señalan los lineamientos y estrategias para la consecución de los objetivos y metas. Los cursos de acción son actividades de una persona ó grupo y se aplican en el corto plazo; Las políticas son las normas que se utilizan para seleccionar las actividades, a largo plazo. Para que los cursos de acción y las políticas sean eficientes, es necesario establecer las relaciones del sistema administrativo y conocer el mercado al que pertenece la empresa, tanto como consumidor como proveedor, para así aprovechar las oportunidades que se presenten con los cambios y variaciones del mercado.
- 3.- Recursos: Son las provisiones y los medios requeridos para llevar a cabo el plan. Los principales recursos de una empresa son: dinero, equipo, instalaciones, materiales, servicios y personal. Para llevar a cabo una valuación de

los recursos es necesario: conocer la cantidad y calidad requerida de cada recurso, el inventario disponible y los requerimientos netos, éstos últimos resultan de la diferencia de los dos conceptos anteriores. Un análisis de la información anterior, hace posible buscar y establecer, cuáles serán las fuentes que generen los faltantes. Este análisis puede modificar los objetivos y las metas, por lo tanto, es necesario considerar diferentes factores internos y externos, por ejemplo: en el aspecto financiero, las posibles repercusiones del ambiente y la situación política; en el equipo e instalaciones, deben considerarse programas de mantenimiento y reemplazo; y en la administración de materiales analizar los costos de compra y escasez, los costos de almacenamiento, el tamaño del lote óptimo, etc.

- 4.- Organización: Identifica la constitución y estructura de la empresa.
- 5.- Control y evaluación: El control marca los sistemas operativos en caso de desviaciones y autocorrección. La evaluación marca el análisis y valoración del plan para analizar resultados y llevar a cabo las modificaciones pertinentes. Al planear la organización se encuentran tres tareas fundamentales:
 - a) Exámen de las funciones a realizar.
 - b) Asignación de funciones y responsabilidades.
 - c) Provisión de los medios adecuados para el desarrollo de las funciones.

Y el control se ocupa de la valuación a través de:

- 1.- Pronóstico de los resultados de las decisiones, traducidas a medidas de rendimiento.
- 2.- Información obtenida del rendimiento real.
- 3.- Comparación del rendimiento de pronóstico con el rendimiento real.
- 4.- Al encontrar una solución deficiente, corrige el procedimiento que la produjo y sus consecuencias hasta donde sea posible.

En resumen, el logro de los objetivos de la planeación se basa en la participación, ya que con éste se logra un conocimiento de la organización y por lo tanto es posible aprovechar, las oportunidades para su mejoramiento.

Sin embargo, no solo es necesario conocer la empresa y sus sistemas administrativo, financiero y productivo - para que la planeación sea efectiva, ya que como consecuencia del acelerado crecimiento industrial, los problemas de asignación de recursos disponibles a las diferentes actividades, se han complicado, requiriéndose cada vez más, técnicas cuantitativas que den apoyo a la tarea de planeación.

Asociado a este cambio, se presenta un aumento en la división de responsabilidades, de administración y de mano de obra, con tendencia a formar grupos particulares, cada uno con sus propias metas y sistemas, dentro de una misma organización, perdiéndose así, la idea global y el objetivo principal del conjunto, que es realmente el que enlaza todas las funciones y objetivos de los diferentes departamentos.

En la búsqueda de técnicas y procedimientos para solucionar, controlar ó decidir sobre los problemas surgidos - se consideró la posibilidad de utilizar las técnicas y modelos de la investigación de operaciones en el área de producción.

c) Investigación de Operaciones: metodología y modelos

Como su mismo nombre lo indica, la investigación de operaciones se interesa por problemas que se relacionan con la forma de conducir ó coordinar las actividades de una organización, a través del método científico.

Como no se limita en cuanto al tipo de organización por su naturaleza, la investigación de operaciones es aplicable a cualquier rama ó campo: la industria, la producción, - la milicia, los negocios, etc.

El punto de vista que considera la investigación de operaciones, es el de la organización como un todo, y las soluciones que proporciona resultan de la relación de todos -- los componentes de la organización, ésto no quiere decir que ignore los objetivos particulares de cada departamento, sino que los hace consistentes con los objetivos generales de la organización. Por otro lado, no busca simplemente una mejora, sino un camino óptimo posible.

El enfoque básico de la investigación de operaciones, es el método científico y sus pasos fundamentales son:

- 1) Observación.
- 2) Definición del problema.
- 3) Formulación de una hipótesis.
- 4) Experimentación y verificación.
- 5) Modelo matemático.
- 6) Controles.
- 7) Frecuentemente, uso de una computadora.

en síntesis, la investigación de operaciones se interesa en la toma de decisiones en los sistemas de las organizaciones que se originan en la vida real y la construcción de modelos matemáticos para los mismos.

Dentro de los modelos de la investigación de operaciones se encuentran:

- Modelos de programación lineal.
- Modelos de programación dinámica.
- Modelos de líneas de espera.
- Modelos de inventarios y otros.

Las aplicaciones de los modelos mencionados, se refieren generalmente a la consecución de la mejor asignación de recursos y así, la planeación encuentra en la investigación de operaciones una potente herramienta. Estos modelos son adaptables a los problemas más frecuentemente encontrados en el área de producción:

- . Adquisición de materiales.
- . Distribución de los recursos en los diferentes centros productivos.
- . Distribución de la mano de obra.
- . Administración de inventarios.
- . Rutas de distribución del producto terminado.
- . Programas de mantenimiento preventivo a la maquinaria de la planta.
- . Determinación del tamaño de los lotes óptimos de adquisición y fabricación.
- . Minimización de costos de producción y costos de almacenamiento.

Por lo anterior, es un gran apoyo para la toma de decisiones en la planeación de producción y requerimientos.

Antes de describir la empresa, objeto de este trabajo, es necesario determinar algunas relaciones y funciones -

del área de producción, así como el objetivo fundamental, - con el fin de poder identificar el problema y determinar -- las variables y los parámetros involucrados.

d) Producción: objetivo, funciones y organización.

Dentro del área de producción, la función de planeación y control, expuesto en un sentido muy general, es la actividad de establecer los objetivos de producción sobre un período de tiempo futuro. Es decir, es hacer el -- plan para el uso óptimo de los recursos, proyectando y regulando los requerimientos de producción y así tener posibilidades de aprovechar las oportunidades de ventas potenciales en otras palabras, elaborar el plan de flujo de materiales que llegan a la fábrica, se transforman en ella y salen como producto terminado, regulándolo de tal forma que se alcance la posición óptima, en cuanto a beneficios, dentro -- del marco de las metas que la empresa se ha fijado.

Las funciones básicas de la planeación y control - de producción son:

- Pronosticar la demanda del producto, expresando la cantidad en función del tiempo.
- Comprobar la demanda real, comparándola con la - pronosticada y corregir los pronósticos si fuera necesario.
- Establecer volúmenes económicos de partidas de - los artículos que se han de comprar ó fabricar.
- Determinar las necesidades de producción y los - niveles de existencia en determinados puntos de la dimensión tiempo.
- Comprobar los niveles de existencias comparándola con la que se ha previsto y revisar los planes de producción si fuera necesario.

- Elaborar programas detallados de producción.
- Planear la distribución de los productos.

A pesar de que el conjunto de operaciones que abarca la planeación y el control de producción varía de acuerdo a las exigencias del cliente, el diseño del producto, los materiales y el proceso de conversión, es posible establecer un esquema general de relaciones y actividades, con los diferentes departamentos involucrados. (Cuadro No. 1).

Las funciones de producción se pueden clasificar de la siguiente forma:

- 1.- De fabricación:
 - a) Recepción.
 - b) Almacenamiento.
 - c) Transporte.
 - d) Producción.
 - e) Distribución.
- 2.- De ingeniería:
 - a) Diseño del producto.
 - b) Diseño y establecimiento del proceso.
 - c) Diseño de herramientas.
 - d) Diseño e instalación de la fábrica.
 - e) Cálculo de costos.
 - f) Establecimiento de métodos y normas.
- 3.- De control:
 - a) Control de producción.
 - b) Control de calidad.
 - c) Control de costos.
 - d) Control de procedimientos.
- 4.- De sostenimiento:
 - a) Abastecimiento y compras.
 - b) Ventas.
 - c) Conservación y mantenimiento de la fábrica.
 - d) Personal.

CUADRO No. 1

ACTIVIDAD	FUNCIÓN	DEPARTAMENTO
- Piantamiento de la producción.	- Determinar los niveles de producción. - Realizar los estudios de factibilidad de la fábrica. - Usar nuevos productos para su fabricación. - Participar en los pronósticos de ventas. - Autorizar herramienta para nuevos productos.	- Departamento de producción. - Ingeniería Industrial. - Ingeniería de producción. - Departamento de ventas. - Ingeniería Industrial.
- Niveles de existencia para:	- Producto terminado. - Producto semiterminado. - Materias primas.	- Departamento de ventas. - Departamento de producción. - Departamento de compra.
- Servicio al cliente.	- Asistencia de pedidos. - Instrucciones de empaque. - Calendario de entregas. - Determinar procesos de entrega. - Respuesta a insistencia de clientes.	- Departamento de ventas. " " " " " " " " " " " "
- Almacenamiento de materiales y producto terminado.	- Control de calidad del material para la producción, en cuanto a que el almacenamiento esté en las condiciones adecuadas. - Control de cantidades físicas de producto terminado. - establecimiento de tablas de especifico.	- Almacén de materiales. - Almacén de distribución.
- Control de producción.	- Acordar qué fabricar y qué comprar. - Determinar la circulación de los productos.	- Ingeniería de producción. - Ingeniería Industrial.
- elaboración de órdenes de producción.	- Preparar y entregar las órdenes de producción. - Determinar la frecuencia de los pedidos. - Establecer los cantidades. - Ordenar la fabricación de un producto en la fábrica. - Calcular los tiempos de espera para la fabricación. - establecer la distribución entre las máquinas de los % - cuotas programados. - Determinar los exigencias de desperdicios.	- Departamento de producción. " " " - Departamento de ventas. - Departamento de producción. " " " " " " " " "
- Control de existencias de materia prima.	- Mantener el control de calidad del material para la producción. - Colocar las requisiciones de compra. - Llevar los controles de pedidos e inventarios. - Determinar el nivel de existencias de los artículos. - Determinar la frecuencia de los pedidos. - Determinar la existencia de reserva. - Determinar la cantidad de pedidos. - Control de existencias de suministros de compra. - Determinación del tiempo de espera de compra.	- Departamento de compra. "
- Producción.	- Tránsito interior de la fábrica. - Calendario e instrucciones. - Informes de continuidad. - Aceleración dentro de la fábrica. - Control de calidad de los trabajos en curso.	- Departamento de producción. " " " " " " - Departamento de control de calidad.

El problema fundamental de la empresa que se analiza en el siguiente capítulo, es de control de producción y - costos, por lo que las otras funciones de producción, no se detallan ni se consideran variables para el diseño del modelo.

Para el presente estudio, el exámen de los requerimientos del control de producción en las operaciones de fabricación ininterrumpida revelan que debe hacerse hincapié - en la disponibilidad de la calidad y cantidad correctas de - materiales en los momentos adecuados, en la prevención de saturación de línea, para llevarlo al punto de almacenamiento - ó venta.

II. -- PROGRAMACION LINEAL.

a) Introducción.

A la programación lineal le atañen problemas de optimización de funciones lineales de varias variables, sujetas a restricciones lineales, que son precisamente, la clase de problemas más ampliamente usados de programación matemática, en los cuales las restricciones y la función a ser optimizada son ecuaciones ó desigualdades de primer orden, estando siempre las variables restringidas a ser positivas ó cero.

Los problemas de optimización bajo ciertas restricciones no son nuevos. En el siglo XVII y XVIII grandes matemáticos entre los que se encuentran Newton, Leibnitz, Lagrange, Bernoulli y Euler, dieron soluciones generales, desarrollando el cálculo de variaciones y el cálculo infinitesimal.

En los últimos cuarenta años, los problemas de programación matemática han sido objeto de gran interés; la primera y más importante razón de ello, ha sido el desarrollo de técnicas modernas de administración.

Los métodos de programación matemática cuentan con una característica especial, común a otras técnicas matemáticas aplicadas: una necesidad imperante por la eficiencia (eficiencia medible); La necesidad por una eficiencia medible nos puede llevar a preferir un método que nos dé una solución aproximada, en lugar de uno que nos dé una solución exacta, si el primero es más eficiente.

Existen varios métodos de cálculo, el más importante de ellos es el método simplex, desarrollado por George -- B. Dantzing, curiosamente uno de sus meritos esenciales es-

una propiedad empírica, obtenida de la experiencia adquirida en la solución de miles de problemas prácticos; el número de iteraciones necesario para resolver un problema es el mismo que el número de restricciones, de tal forma que uno puede predecir con precisión razonable el tiempo y el costo de resolver el problema por medio de equipos computacionales.

Otro factor contribuyente en el progreso rápido de la programación lineal (que también ha sido esencial para el éxito del método simplex), ha sido el desarrollo de métodos electrónicos en las últimas décadas, y el mejoramiento constante de las computadoras digitales. Las computadoras pueden ahora trabajar con problemas de mayor tamaño, permitiendo tratar con situaciones administrativas demasiado complejas para soluciones intuitivas y/o empíricas.

b) Modelo General.

El modelo general de programación lineal es la búsqueda para optimizar (maximizar ó minimizar) una función lineal de variables restringidas por relaciones lineales (ecuaciones ó desigualdades) llamadas restricciones.

La formulación algebraica de la definición anterior es:

$$\text{Maximizar } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

sujeta a:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array} \quad x_j \geq 0$$

Donde: a_{ij} , b_i y c_j son constantes dadas; y $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$

Si se resuelve el problema de maximización, el de minimización quedará automáticamente resuelto, ya que:

$$\min f(x) = \max (- f(x))$$

Una interpretación del problema de programación lineal es el siguiente: Dadas n actividades competitivas - las variables de decisión x_1, x_2, \dots, x_n representan el nivel de aquellas; por ejemplo, si cada actividad es la producción de cierto producto, entonces x_j será el número de unidades del j -ésimo producto que será fabricado durante un periodo de tiempo dado; z es la medida total de efectividad, ésto es, la ganancia en el periodo de tiempo dado; c_j es el incremento en la medida total de efectividad que resulta de cada incremento unitario de x_j .

El número de recursos restringido es m , tal que - cada una de las m inecuaciones lineales corresponde a una restricción en la utilización de estos recursos; b_i es el monto del recurso i disponible en las actividades; y a_{ij} es el monto del recurso i consumido por cada unidad de actividad j . Por lo tanto, el lado izquierdo de las restricciones, es el uso de los respectivos recursos.

Las restricciones de no negatividad ($x_j \geq 0$), - excluyen la posibilidad de un nivel de actividades negativas.

c) Supuestos y Terminología.

Los supuestos de la programación lineal son:

Proporcionalidad: Esto significa que el incremen-

to de la medida de efectividad (c_j), y la cantidad de recurso dada (a_{ij}), deben ser proporcionales al nivel de cada actividad realizada individualmente.

Aditividad: La medida total de efectividad y el total de cada recurso empleado, resultantes de la realización conjunta de las actividades, debe ser igual a las sumas respectivas de las cantidades resultantes de cada actividad realizada individualmente.

Existen otros supuestos para la solución del algoritmo simplex como son los de: Divisibilidad (x_j puede tomar valores fraccionarios), y la de Determinismo (coeficientes determinísticos), los que pueden ser resueltos por Programación Entera; Para el caso de divisibilidad y programación estocástica para el caso de determinismo.

El problema en forma canónica se plantea de la forma siguiente:

$$\begin{array}{rcl}
 \max z = & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n & \\
 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\
 & \dots & \\
 & \dots & \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & \leq b_m
 \end{array}$$

Las desigualdades del planteamiento anterior dificultan el manejo de este modelo por lo que es mas conveniente convertir las a ecuaciones, introduciendo nuevas variables llamadas: variables de holgura, quedando el modelo en la forma estándar:

x_b = variables asociadas a B, llamadas variables básicas.

x_r = variables asociadas a R, llamadas variables no básicas, quedando el sistema de restricciones de la siguiente forma:

$$Bx_b + Rx_r = b$$

y haciendo $x_r = 0$ se tiene:

$$Bx_b = b$$

y premultiplicando por la inversa de la matriz B (B^{-1}), se obtiene:

$$x_b = B^{-1}b$$

y por lo tanto $x_b = B^{-1}b$ y $x_r = 0$, forman una base asociada a la matriz B.

Solución básica factible: Es la solución básica que cumple con todas las restricciones.

Solución degenerada: Es la solución básica donde al menos una variable básica vale cero.

Solución óptima: Es la solución básica factible que optimiza la función objetivo.

d) Método Simplex: propiedades y algoritmo.

Este método sirve para solucionar problemas de programación lineal que incluyen varias variables y varias restricciones. Su óptimo se encuentra dentro del conjunto de -

puntos extremos del área de soluciones factibles. El método simplex es un algoritmo (procedimiento iterativo para encontrar una solución), que consiste en encontrar y probar los puntos extremos, con el fin de seleccionar la solución óptima. El algoritmo termina una vez que la solución óptima es encontrada.

Las propiedades del método simplex son:

Propiedad No. 1 : El conjunto de soluciones factibles constituye un conjunto convexo.

Propiedad No. 2 : Si existe una solución factible, existe al menos una solución básica factible, donde las soluciones básicas factibles corresponden a los puntos extremos del conjunto de soluciones factibles.

Propiedad No. 3 : Existe únicamente un número finito de soluciones básicas factibles.

Propiedad No. 4 : Si la función objetivo posee un máximo finito, entonces al menos una solución óptima es una solución básica factible.

Suponiendo que el valor óptimo de z es finito y que existe al menos una solución factible, las propiedades No. 2 y No. 3, indican que las soluciones óptimas factibles son positivas y finitas.

La propiedad No. 4 indica que únicamente este número finito de soluciones necesita ser investigado para encontrar una solución óptima. De este modo, aunque hay un número infinito de soluciones factibles, solo interesa seleccionar un número finito de ellas.

De lo anterior, una solución óptima puede ser -- siempre encontrada, examinando cada una de las soluciones básicas factibles y seleccionando aquella que tiene el valor de z mas grande.

Lo que hace el método simplex, es no tratar de -

examinar todas las soluciones básicas factibles, ya que el número de éstas es muy grande (pero finito), para problemas grandes y la mayoría de ellas están lejos del óptimo.

Por lo tanto, se sigue un procedimiento que alcance la solución óptima, buscando relativamente pocas soluciones básicas factibles; dicho procedimiento es moverse de un punto extremo (solución básica factible), a un punto extremo adyacente, el cual hace mas grande el valor de z .

Cuando ningún punto extremo adyacente hace el valor de z mas grande que el anterior, una solución óptima ha sido alcanzada y el procedimiento termina. Tal solución óptima es total, ya que por la propiedad No. 1 el conjunto es convexo (el procedimiento no sirve si el conjunto no es convexo). Además una solución óptima debe ser alcanzada en un número finito de pasos, dado que cada punto extremo sucesivo debe incrementar el valor de z , siendo imposible regresar a un punto extremo previamente alcanzado.

De lo anterior, que el número de pasos (iteraciones), no puede ser mayor que el número de puntos extremos, los cuales son finitos por la propiedad No. 3.

Algoritmo Simplex.

1ra. iteración: INTRODUCIR VARIABLES DE HOLSURA Y SELECCIONAR DICHAS VARIABLES COMO VARIABLES BASICAS INICIALES.

Seguir con el paso 3.

Paso No. 1 : DETERMINAR LA NUEVA VARIABLE QUE ENTRARA EN LA BASE.- Seleccionar la variable no básica que, cuando es incrementada, incrementará la fun--

ción objetivo z a la más rápida tasa. Esto se realiza comparando la magnitud de los coeficientes de la función objetivo y seleccionando la variable no básica cuyo coeficiente es el mayor, (ó el menor si las variables están del lado izquierdo de la ecuación).

Paso No. 2 : DETERMINAR LA VARIABLE QUE DEBERA DEJAR LA BASE.- Seleccionar la variable básica que alcance el valor-cero más rápidamente, conforme la nueva variable que entró en la base, es incrementada. Esto se realiza observando en las ecuaciones restrictivas en que cantidad se puede incrementar la nueva variable básica antes de que la variable básica actual alcance el valor cero. Un procedimiento algebraico formal para realizar lo anterior es el siguiente: Sea e el subíndice de la variable que entrará en la base sea a_{ie} su coeficiente actual en la ecuación i , y sea b_i el término independiente en esta ecuación (para $i = \overline{1, m}$. Entonces el límite superior para x_e en la ecuación i es:

$$x_e = \begin{cases} + \infty & \text{si } a_{ie} \leq 0 \\ \frac{b_i}{a_{ie}} & \text{si } a_{ie} \geq 0 \end{cases}$$

Entonces determinar la ecuación con el límite superior menor y seleccionar la variable básica actual en esa ecuación, como la variable que dejará la base.

Paso No. 3 : DETERMINAR LA NUEVA SOLUCION FACTIBLE: Resolver para las variables básicas en términos de las variables no básicas, por el método de Gauss-Jordan de eliminación, y hacer las variables no básicas iguales a cero

Paso No. 4 : DETERMINAR SI LA SOLUCION ES OPTIMA Verificar si la función objetivo z puede ser incrementada al incrementar cualquiera de las variables no básicas. Esto se realiza eliminando las variables básicas de la función objetivo, y después chequeando el signo del coeficiente de cada variable no básica si todos los coeficientes son no positivos (ó no negativos, si las variables están del lado izquierdo de la ecuación), entonces esta solución es óptima y -- por lo tanto termina el proceso. En caso contrario empezar con el paso No. 1.

e) Dualidad.

Uno de los más importantes descubrimientos en el desarrollo de la programación lineal, es el concepto de dual

lidad y sus importantes ramificaciones.

Esto muestra que cualquier problema de programación lineal, está asociado a otro problema, también de programación lineal, llamado dual. Al problema original se le llama también primal.

Sea el conjunto siguiente el problema primal:

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

sujeta a :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

donde: $x_j \geq 0$; $i=\overline{1,m}$ $j=\overline{1,n}$

Entonces el correspondiente problema dual es obtenido transponiendo los renglones y columnas de los coeficientes de las restricciones, así como el lado derecho de las restricciones y los coeficientes de la función objetivo; invirtiendo las desigualdades y minimizando en lugar de maximizar ó viceversa.

Una vez hecho esto, se obtiene el problema dual:

Problema Dual:

$$\min z_y = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

sujeta a:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m & \leq & c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m & \leq & c_2 \\ \dots & & \dots \\ \dots & & \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m & \leq & c_n \end{array}$$

$$\text{donde: } y_i \geq 0 ; i=1, m ; j=1, n$$

De este modo los coeficientes de la j -ésima restricción del problema dual corresponden a los coeficientes de x_j en las restricciones del problema primal y viceversa.

Así mismo, el lado derecho de la restricción j -ésima del problema dual es el coeficiente de x_j en la función objetivo del problema primal y viceversa. Por lo tanto, hay una variable dual para cada variable primal.

Otra manera equivalente para expresar el problema primal y el problema dual es el siguiente:

Problema Primal:

$$\max z_x = Cx$$

sujeta a :

$$Ax = b$$

donde:

$$x = 0$$

Problema Dual:

$$\min z_y = b^T y$$

sujeta a :

$$A^T y = c^T$$

donde:

$$y = 0$$

A^T , b^T y c^T , son las traspuestas de A , b y c respectivamente.

El problema dual también existe para cualquier problema de programación lineal que no esté en la forma mencionada. Por ejemplo, que la i -ésima restricción, sea una igualdad en lugar de una desigualdad.

Las propiedades fundamentales del problema dual -- son las siguientes:

Propiedad No. 1 : El dual del dual es el primal. Esta propiedad demuestra una propiedad de simetría entre los problemas dual y primal. En efecto, es indistinto cual problema sea llamado primal y cual dual. Cualquier cosa que pueda afirmarse de un problema, con respecto al otro, también se cumple a la inversa.

Propiedad No. 2 : Si " x " es una solución factible al problema primal y " y " es una solución factible al problema dual, entonces:

$$z_x = z_y$$

Debido a que:

$$z_x = \sum_{j=1}^n x_j c_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^m y_i b_i = z_y$$

Propiedad No. 3 : Si x^* es una solución factible al problema primal y y^* es una solución factible al problema dual, tal que:

$$cx^* = (b^T \cdot y^*),$$

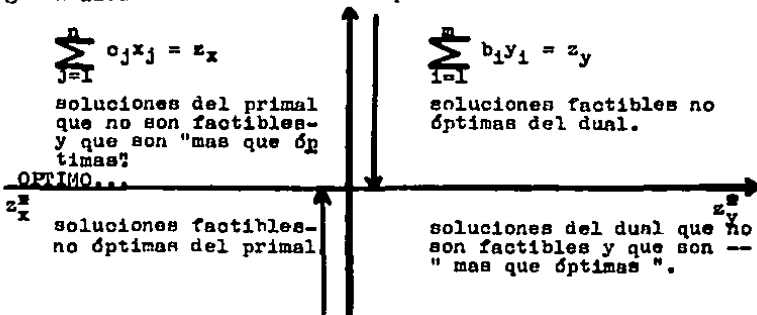
entonces, x^* es una solución óptima al problema dual, es decir:

$$z_y^* = \sum_{i=1}^m b_i z_{n+1}^* \quad \text{y} \quad z_x^* = \sum_{i=1}^m b_i z_{n+1}^*$$

Por lo tanto: $z_x^* = z_y^*$

Donde z_{n+1} representa el número de veces que la ecuación (i), se ha sumado directa ó indirectamente a la ecuación de la función objetivo durante la ejecución del método simplex.

El siguiente diagrama ilustra cómo conforme el método simplex trabaja con soluciones no óptimas, pero sí básicas factibles, en el problema primal para obtener el óptimo; simultáneamente lo hace con soluciones básicas no factibles, mas que óptimas, en el problema dual, para llegar a alcanzar el mismo valor óptimo.



Finalmente, la solución óptima dual provee una interpretación económica del problema primal.

Sea y_i^* el valor óptimo de la i -ésima variable -- dual y_i , ($i=1, m$), c_j representa el beneficio por unidad de la actividad j ; y a_{ij} representa la cantidad del recurso i que es consumida por cada unidad de actividad j . Recordando que b_i será interpretada como el monto del recurso i disponible, mientras que el valor óptimo de la función objetivo $z_x = z_y$, será interpretado como la utilidad obtenida usando la solución óptima.

En este caso, y_i^* indica la proporción en que la solución será incrementada (ó disminuída), si el monto de un recurso i disponible es incrementado (ó disminuído), -- sobre cierto rango (este rango es el rango b_i sobre el -- cual la base original óptima no se altera).

De este modo, y_i^* puede ser interpretada como el -- " valor marginal " del recurso i , el incremento resultante -- en la utilidad sería y_i^* (suponiendo que la base óptima -- permanece igual.

La función objetivo dual:

$$\min z_y = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

afirma que los precios de los recursos deberán establecerse de tal forma que su costo total se minimice para el usuario.

El teorema dual $z_x^* = z_y^*$, quiero decir que el -- costo total (valor marginal) de los recursos iguala a la -- ganancia total de las actividades, si aquellos se consumen -- de una manera óptima.

En problemas prácticos que son formulados como modelos de programación lineal, los parámetros del modelo (c_j , b_i y a_{ij}), generalmente no son conocidos con absoluta certeza; por lo que, usualmente es necesario llevar a cabo un "análisis de sensibilidad", para determinar el efecto que tiene en la solución óptima, el posible cambio de valores en los parámetros anteriormente mencionados.

Es decir, se investiga si la solución seguirá siendo óptima verificando: Si la ganancia con que contribuye una actividad básica varía; La forma en que influye en la solución óptima el hecho de que uno ó varios recursos se vean modificados; El efecto que tiene el agregar una nueva actividad; El resultado de agregar una nueva restricción, etc.

Afortunadamente, no es necesario resolver el problema desde el principio cada vez que se introduce un cambio en el modelo. Dada la solución óptima y el conjunto de ecuaciones, es posible verificar si la misma base es óptima ó si ya no lo es; en el caso de que ya no lo sea, se utilizará como punto de partida para resolver iterativamente hasta obtener una nueva solución óptima.

III.- UN MODELO DE PROGRAMACION LINEAL PARA LA PLANEACION DE PRODUCCION DE UNA FABRICA DE JABONES.

a) La empresa: antecedentes, organización y objetivo.

La empresa se constituyó hace aproximadamente 20 años, como una organización familiar, con el propósito de fabricar y vender jabones para el cabello.

Hasta hace pocos años, la empresa funcionaba bajo los lineamientos de una pequeña organización, sin embargo, en los últimos cinco años, como consecuencia de una acertada política de promoción y ventas, éstas se han incrementado fuertemente, afectando a otras áreas, obligándolas a buscar nuevas formas de administración, que les ayuden a hacer frente a las exigencias de este crecimiento que la ha llevado a ocupar un lugar muy importante dentro del mercado del cual forma parte.

Uno de los departamentos que se ha visto más afectado es el de producción.

Actualmente, las decisiones en la fábrica son tomadas por una sola autoridad, quien se basa en su experiencia y, la política a seguir es producir toda la mercancía solicitada por el departamento de ventas, mes con mes, sin considerar, constituir un inventario adecuado mediante el equilibrio entre periodos de baja y alta demanda, las consecuencias de esto, entre otras, son:

- . Altos costos de producción. (tiempos extras y -- turnos adicionales programados "al vapor").
- . Tiempos desperdiciados (en periodos de baja demanda).
- . Mantenimiento de inventario de producto terminado.
- . Desequilibrio en inventario de materiales para la fabricación de un mismo producto.

Otro problema es que la planeación, la programación y el control de materiales son elaborados en forma manual, — por lo que no es posible realizar análisis oportunos y conjuntos de las materias primas y materiales de empaque requeridos por cada producto, en caso de ajustes a la producción; así como modificaciones a los pedidos colocados ó por colocar, perdiéndose el control sobre los inventarios y sin obtener resultados satisfactorios.

Con el propósito de cambiar esta situación la empresa desea:

- 1.- minimizar los costos de producción e inventarios mediante la distribución adecuada de disponibilidad de producción, mes con mes.
- 2.- Disponer de un sistema de requerimiento de materiales que permita analizar y si es necesario ajustar oportunamente y en conjunto todos los materiales necesarios para la fabricación de cada producto.
- 3.- Analizar la posibilidad y conveniencia de automatizar la programación y el control de producción y requerimientos.
- 4.- Eliminar maquilas.

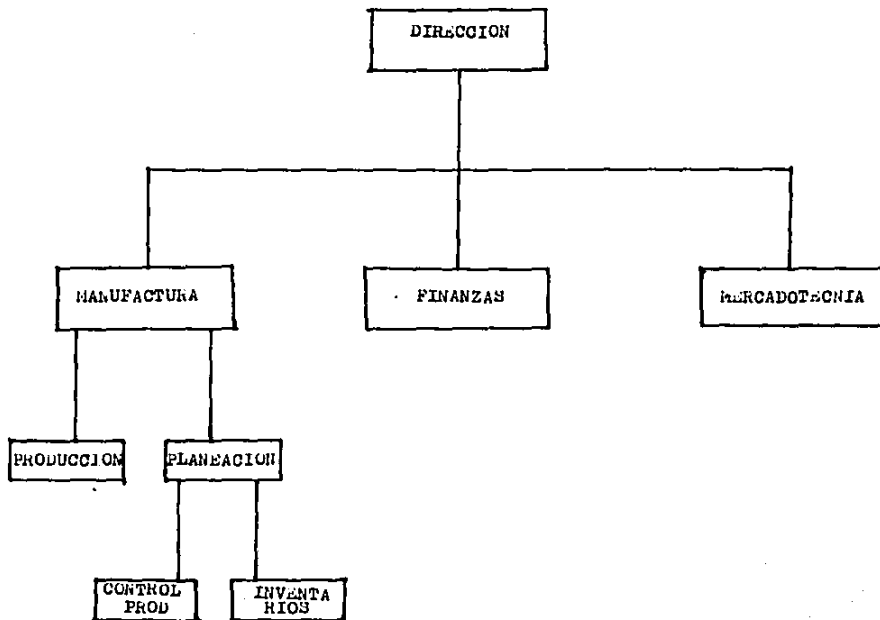
La organización actual de la empresa se muestra en el cuadro No. 2.

Dentro de esta organización, el departamento de planeación, es el responsable directo de la elaboración y control de los programas de producción y requerimiento de materiales.

El procedimiento actual de la planeación de producción, es como sigue:

- 1.- Los pronósticos de ventas elaborados por el departamento de mercadotecnia, sujetos a pequeños-

CUADRO No. 2



ajustes, (estos ajustes deben proporcionarse en las revisiones trimestrales por lo menos con 60 días de anticipación, para poder realizar los -- cambios necesarios ó determinar la factibilidad de éstos, y así cumplir con los compromisos de producción adquiridos), están hechos por periodos de doce meses, ésto, en principio constituye una gran facilidad para programar la producción y la adquisición de materiales, y poder conocer con oportunidad las necesidades mes con mes.

- 2.- La demanda de los productos es cíclica, en base a promociones previamente pactadas con clientes, (tiendas de autoservicios, farmacias etc.,); - Estos clientes se comprometen a adquirir cierta cantidad de los productos y promocionarlos, siempre y cuando sean surtidos oportunamente en las temporadas previstas de sus ofertas.
- 3.- Una vez que el departamento de planeación recibe el pronóstico de ventas, realiza de manera mensual los siguientes cálculos:
 - a) Obtener las cantidades de cada producto en inventario (inventario inicial del periodo a planear).
 - b) Al inventario inicial se le restan las ventas pronosticadas del primer mes, si el resultado es positivo, se le restan las ventas pronosticadas del segundo mes, y así sucesivamente -- mes con mes hasta que el resultado sea negativo, cuando ésto sucede, se programan los lotes de producción estándar necesarios para cubrir la cantidad negativa y se repite la operación de sustracción mensual. esta opera--

ción proporciona las cantidades a fabricarse mensualmente expresadas en lotes estándar.

- c) Una vez que con los cálculos anteriores se tienen las cantidades requeridas a producir se calculan las cantidades necesarias de materias primas y material de empaque de acuerdo a lotes estándar, para colocar los pedidos a través del departamento de compras, los periodos ó fechas de entrega se deciden en base a un consumo promedio y al costo de cada material.

Lo anterior, a pesar de que ha sido un sistema útil en el pasado, los cambios y presiones del mercado, obligan a buscar un apoyo en un nuevo sistema (posiblemente automatizado) que permita prevenir y eliminar las deficiencias actuales.

Es decir, lo que se busca es una programación de producción para cubrir mensualmente la demanda, aprovechando los periodos de baja demanda para almacenar el producto, requerido en los periodos de demanda alta, manteniendo mínimo el costo total mediante el equilibrio entre los costos de producción y los costos de almacenamiento; todo esto con el equipo disponible actualmente, ya que por el momento la opción de aumentar la capacidad de producción mediante la adquisición de equipo, no es factible.

Un modelo de programación lineal es el que se propone para la resolución de este problema, ya que como política de la empresa, siempre se deben satisfacer las cantidades demandadas por el departamento de ventas, en consecuencia el problema se traduce en uno de asignación de recursos dig

ponibles: producción en tiempo normal, producción en tiempo extra, y producción en turnos adicionales, cada mes, satisfaciendo la demanda y minimizando el costo total que está dado por el costo de producción, el costo de mantener inventario y el costo de ruptura.

Cabe mencionar que dentro de las políticas de la Dirección está no autorizar tiempos extras y turnos adicionales programados, por no contar con una valuación cuantitativa que los justifique, a pesar de que si no se cumple con las cantidades pactadas con los clientes, se corre el riesgo de que la demanda baje hasta 50%.

b) Planteamiento del problema.

Se fabrican tres presentaciones de jabón. El pronóstico de ventas mensual (expresado en miles de piezas) para cada uno de los productos se muestra en el siguiente cuadro:

CUADRO No. 3

PRONOSTICO DE VENTAS

Producto				
Mes	1	2	3	
Enero (1)	428	329	443	
Febrero (2)	330	232	448	
Marzo (3)	281	343	770	
Abril (4)	234	338	924	
Mayo (5)	230	221	714	
Junio (6)	428	329	443	
Julio (7)	330	232	448	
Agosto (8)	281	343	770	
Septiembre (9)	234	338	924	
Octubre (10)	230	221	714	
Noviembre (11)	428	329	443	
Diciembre (12)	330	232	448	
T O T A L	3764	3487	7489	

El lote económico de mezcla de cada producto es de - 6 000 Kgs., y el rendimiento para cada uno de los productos se presenta en el siguiente cuadro:

CUADRO No. 4

RENDIMIENTO DE LOTE ECONOMICO DE MEZCLA.

PRODUCTO	LOTE DE 6 000 Kgs.
1	25 000 piezas.
2	12 500 piezas.
3	6 250 piezas.

Para la elaboración de estas mezclas se disponen de dos reactores con capacidad de 6 000 Kgs., cada uno, y el tiempo de fabricación, de cada lote, es de aproximadamente dos horas se cuenta también con seis tanques de almacenamiento de mezclas con capacidad de 6 000 Kgs., cada uno. (Cada lote fabricado en los reactores, es depositado en los tanques de almacenamiento para poder ser envasado.).

Para envasar los jabones se disponen de cuatro líneas - cuya producción por turno es de 12 500 piezas (turno normal de 8 hrs). En el siguiente cuadro se presenta la factibilidad de envasado para cada producto y su rendimiento por turno.

CUADRO No. 5

RENDIMIENTO POR TURNO.

Producto	Se envasa en:	Rendimiento turno 8hrs
1	Línea No. 1	12 500 piezas
2	Línea No. 2	12 500 piezas
3	Línea No. 3	12 500 piezas
	Línea No. 4	12 500 piezas

De acuerdo a las políticas, objetivos y situación de la empresa, se requiere de un plan de producción, que abarque todo el año, evitando tanto que las ventas sean cubiertas exactamente por la producción, cuando la demanda es variable en función de los meses del año, ya que esto es muy costoso en horas extras y turnos adicionales (no programados), como evitar grandes costos de almacenamiento si la producción se mantiene constante.

La función objetivo se define como la minimización del costo total anual de fabricación.

Para poder definir la función objetivo, la constitución de los costos de producción en tiempo normal, en tiempo extra y en turnos adicionales, se muestra en el siguiente cuadro:

CUADRO No. 6

ESTRUCTURA DE LOS COSTOS DE PRODUCCION.

Concepto	Tiempo Normal de Producción		Tiempo Extra de Producción		Turnos Adicionales	
Costo de Materiales	70 %		70 %		70 %	
Mano de obra directa.	20 %		40 %		40 %	
Gastos Indirectos	10 %	6 %	14 %	6 %	20 %	+12%
		4 %		8 %		8%

- +) Personal administrativo que se le otorga un incentivo en turnos adicionales (pero no en tiempo extra).
- 9) Personal administrativo que cobra tiempo extra y turnos adicionales (al doble).

Los costos de producción y ruptura se muestran en los cuadros Nos. 7 y 8:

CUADRO No. 7

COSTOS DE PRODUCCION

Costo de Producto	Producción Normal	Producción T. Extra.	Turno Adicional	Mantener Inventario
1	187	232	243	46
2	374	464	486	92
3	650	806	845	161

* Datos obtenidos del Departamento de Costos.

Como se mencionó anteriormente, ciertas cantidades se comprometen con los clientes (tiendas de autoservicio, farmacias, etc.), si no son entregadas al tiempo pactado, las ventas se reducen hasta un 50%, (por cancelación del pedido), por otro lado, la utilidad se pierde y los gastos fijos se efectúan sobre estas ventas que no se realizan, en base a esto, el costo de ruptura se establece como sigue:

CUADRO No. 8

COSTOS DE RUPTURA

Producto	1	2	3
Costo de Ruptura	374	748	1300

Una vez determinados los valores necesarios, se definen los siguientes parámetros, expresados todos en miles de piezas:

Sean:

P_{ij} = producción normal (sin tomar en cuenta horas extras, ni turnos adicionales) del producto j , en el mes i .

- x_{ij} = producción en horas extras con un cargo adicional de 24% (máximo un 18.75% de las horas de producción en tiempo normal), del producto j en el mes i .
- y_{ij} = producción en turnos adicionales con un recargo de 30% (máximo un 16% de las horas de producción en tiempo normal), del producto j en el mes i .
- f_{ij} = faltantes (venta no cubierta) en el mes i , del producto j .
- s_j = inventario inicial del periodo anual del producto j .
- t_j = inventario final del periodo anual del producto j .

Para este caso: $s_j \neq t_j$ y sus valores son:

$s_j = 0$ para toda $j = 1, 2, 3$. ; y

$t_j = 125$ para toda $j = 1, 2, 3$. (es decir, 10 días de producción).

Las x_{ij} , y_{ij} , y f_{ij} son las incógnitas del problema, y las p_{ij} , s_j y t_j son conocidas.

Se definen también:

P_j = costo unitario de producción del producto j en horas normales.

Q_j = costo unitario de producción del producto j en horas extras con un recargo de 24%.

R_j = costo unitario de producción del producto j en turnos adicionales con un recargo de 30%.

S_j = costo unitario de almacenamiento de una unidad de producción del producto j , durante un mes.

F_j = costo unitario de ruptura del producto j.

V_{ij} = pronóstico de ventas del producto j para el mes i (CUADRO No. 3).

La función objetivo es el costo anual de toda la producción, que incluye el costo de producción (c_p), el costo de almacenamiento (c_a) y el costo de ruptura (c_r).

En los cuadros No. 9, No. 10 y No. 11, se presentan los valores de los parámetros conocidos para cada uno de los productos 1, 2 y 3 respectivamente (ver explicación al final de los cuadros.)

CUADRO No. 9

PRODUCCION NORMAL Y PRONOSTICO DE VENTAS

(Producto No. 1 y Línea No. 1.)

MES i	DIAS DISPONIBLES		PRODUCCION NORMAL		PRONOSTICO DE VENTAS	
	d	Σ d	P_{i1}	ΣP_{i1}	V_{i1}	ΣV_{i1}
1	19	19	237	237	428	428
2	25	44	312	549	330	758
3	18	62	225	774	281	1039
4	19	81	237	1011	234	1273
5	19	100	237	1248	230	1503
6	25	125	312	1560	428	1931
7	20	145	250	1810	330	2261
8	25	170	312	2122	281	2542
9	18	188	225	2347	234	2776
10	20	208	250	2597	230	3006
11	24	232	300	2897	428	3436
12	18	250	225	3122	330	3764

CUADRO No. 10

PRODUCCION NORMAL Y PRONOSTICO DE VENTAS

(Producto No. 2 y Linea No. 2).

MES 1	DIAS DISPONIBLES		PRODUCCION NORMAL		PRONOSTICO DE VENTAS	
	d	$\sum d$	P ₁₂	$\sum P_{12}$	V ₁₂	$\sum V_{12}$
1	19	19	237	237	329	329
2	25	44	312	549	232	561
3	18	62	225	774	343	904
4	19	81	237	1011	338	1242
5	19	100	237	1248	221	1463
6	25	125	312	1560	329	1792
7	20	145	250	1810	232	2024
8	25	170	312	2122	343	2367
9	18	188	225	2347	338	2705
10	20	208	250	2597	221	2926
11	24	232	300	2897	329	3255
12	18	250	225	3122	232	3487

CUADRO No. 11

PRODUCCION NORMAL Y PRONOSTICO DE VENTAS

(Producto No. 3 y Lineas No. 3 y No. 4).

MES 1	DIAS DISPONIBLES		PRODUCCION NORMAL		PRONOSTICO DE VENTAS	
	d	$\sum d$	P ₁₃	$\sum P_{13}$	V ₁₃	$\sum V_{13}$
1	19	19	475	475	443	443
2	25	44	625	1100	448	891
3	18	62	450	1550	770	1661
4	19	81	475	2025	924	2585
5	19	100	475	2500	714	3299
6	25	125	675	3125	443	3742
7	20	145	500	3625	448	4190
8	25	170	625	4250	770	4960
9	18	188	450	4700	924	5884
10	20	208	500	5200	714	6598
11	24	232	600	5800	443	7041
12	18	250	450	6250	448	7489

La explicación de cada concepto del cuadro anterior se muestra a continuación:

CONCEPTO:

MES i

d

\sum d

P₁₁

\sum P₁₁

V₁₁

\sum V₁₁

INDICA:

El periodo.

Los días disponibles según calendario, siguiendo la política de cerrar ventas y producción, al -- cuarto jueves de cada mes.

Acumulado de los días disponibles al mes i.

La producción normal disponible - en la línea 1, para el producto 1 en el mes i, (expresada en miles), y se obtiene multiplicando la producción estándar (12500 pzas/8hr) por el número de días disponibles.

El acumulado de producción normal disponible en la línea 1, para el producto 1 al mes i, en piezas -- (expresada en miles).

el pronóstico de ventas para el - producto 1 en el mes i.

El acumulado del pronóstico de -- ventas para el producto 1 en el - mes i.

CONCEPTO:

P₁₂

\sum P₁₂

V₁₂

\sum V₁₂

P₁₃

\sum P₁₃

V₁₃

\sum V₁₃

INDICIA:

La producción normal disponible - en la línea 2 para fabricar el -- producto 2 en el mes i (expresada en miles) y se obtiene multipli-- cando la producción estándar -- (12500pzas/8hrs), por el número - de días disponibles en el mes i.

El acumulado de la producción nor mal disponible en la línea 2 para el producto 2 al mes i, en piezas (expresada en miles).

El pronóstico de ventas para el - producto 2 en el mes i.

El acumulado del pronóstico de -- ventas para el producto 2 en el r mes i.

La producción normal disponible - en las líneas 3 y 4 para fabricar el producto 3 en el mes i (expresada en miles) y se obtiene multi plicando la producción estándar (12500pzas/8hrs.), por el número de líneas, por el número de días disponibles en el mes i.

El acumulado de la producción nor mal disponible en las líneas 3 y 4 para el producto 3 al mes i en piezas(expresada en miles).

El pronóstico de ventas para el - producto 3 en el mes i.

El acumulado del pronóstico de -- ventas para el producto 3 en el - mes i.

El análisis comparativo de disponibilidad y requerimiento de mezclas se expone a continuación:

En cada reactor, se fabrica en un turno de 8 hrs., 4-lotes (turno hrs./tiempo de fabricación mezcla hrs. -- 8hrs/2hrs = 4).

Como se disponen de dos reactores, la disponibilidad de mezclas es de 8 lotes por turno (No. reactores x lotes por turno; $2 \times 4 = 8$).

Los requerimientos están dados por la producción total máxima al día de cada producto, en cada una de las líneas, y esta está dada por:

producción normal + producción tiempo extra + producción en turno adicional = PRODUCCION MAXIMA AL DIA

Donde:

producción normal = 12500 pzas

producción tiempo extra = 2343 pzas (1)

producción turno adicional = 2000 pzas. (2)

Por lo tanto :

Producción máxima al día, por línea: 16843 pzas.

Y para cada producto se tiene:

Producto 1	Línea 1	16843	pzas.	
Producto 2	Línea 2	16843	pzas.	
Producto 3	Línea 3	16843	pzas.	
	Línea 4	16843	pzas.	33686 pzas.

(1) $12500 \times 0.1875 = 2343$

(2) $12500 \times 0.1600 = 2000$

Estas limitaciones son por el contrato colectivo de trabajo.

Los requerimientos expresados en lotes de mezclas son:

<u>PRODUCTO</u>	<u>PIEZAS</u>	<u>MEZCLA REQUERIDA (3)</u>
1	16843	4042 kgs.
2	16843	8084 kgs.
3	33686	32338 kgs.

T O T A L 44464 kgs.

Esta cantidad (TOTAL) equivale a 7.41 lotes standard de mezcla, que comparados con los 8 lotes disponibles, es factible satisfacer los requerimientos, (el turno de fabricación de mezclas empieza $\frac{1}{2}$ turno antes que el de envasado).

Se ha considerado el caso de requerimiento máximo, por lo que cualquier otro requerimiento será menor y podrá ser cubierto, por lo que se puede afirmar que no existe saturación en el uso del equipo para la elaboración de mezclas.

$$(3) (16843 / 25000) \times 6000 = 4042$$

$$(16843 / 12500) \times 6000 = 8084$$

$$(33686 / 6250) \times 6000 = 32338$$

(Producción máxima al día / rendimiento por lote de mezcla en piezas) x lote estándar = mezcla requerida por cada producto.

Para definir la función objetivo se tiene:

$$c_p = \sum_{j=1}^{12} \sum_{i=1}^3 (P_j p_{ij} + Q_j x_{ij} + R_j y_{ij})$$

donde c_p es el costo total de producción tomando en cuenta la producción normal, la producción en tiempo extra y la producción entornos adicionales.

Como los procesos para la elaboración de los tres productos son independientes entre sí, para fines prácticos, en el diseño del modelo y ahorro de tiempo máquina en su solución, solo se considerará la variación de la i , y este mismo modelo servirá para resolver el programa de producción para cada uno de los productos, variando los parámetros correspondientes.

Así el c_p queda:

$$c_p = \sum_{i=1}^{12} (P p_i + Q x_i + R y_i)$$

Para el costo de almacenamiento se supone la regularidad de la producción y de las ventas, se tiene por tanto siempre un inventario medio, que es el promedio del inventario final y el inventario inicial.

El inventario medio en el mes i se puede expresar:

$$s_i = \frac{1}{2} (S + \sum_{k=1}^i (p_k + x_k + y_k - v_k)) + s +$$

$$\sum_{k=1}^{i-1} (p_k + x_k + y_k - v_k)$$

Por lo tanto:

$$s_i = (s + \sum_{k=1}^{i-1} (p_k + x_k + y_k - v_k)) + \frac{1}{2}(p_k + x_k + y_k - v_k)$$

Con esta expresión se obtiene el inventario para cada mes i , y sumando los doce meses, se obtiene el costo total de almacenamiento:

$$c_a = S(12s + \sum_{i=1}^{12} (12.5 - i)(p_i - v_i)) + \sum_{i=1}^{12} (12.5 - i)(x_i + y_i)$$

Y el costo de ruptura está dado por:

$$c_r = \sum_{i=1}^{12} Ff_i$$

El costo total será:

$$c_t = c_p + c_a + c_r$$

Y sustituyendo c_p , c_a y c_r por sus expresiones se tiene:

$$c_t = \sum_{i=1}^{12} (Pp_i + Qx_i + Ry_i) + (S(12s + \sum_{i=1}^{12} (12.5 - i)(p_i - v_i)) + \sum_{i=1}^{12} (12.5 - i)(x_i + y_i)) + \sum_{i=1}^{12} Ff_i$$

Factorizando queda:

$$\begin{aligned}
 c_t = & (12Ss + \sum_{i=1}^{12} (Pp_i + S(12.5 - 1)(p_i - V_i)) + \\
 & \sum_{i=1}^{12} (Q + S(12.5 - 1))x_i + \sum_{i=1}^{12} (R + S(12.5-1))y_i + \\
 & + \sum_{i=1}^{12} Ff_i
 \end{aligned}$$

Si se definen:

$$A = \sum_{i=1}^{12} (Pp_i + S(12.5-1)(p_i - V_i)) \quad (\text{conocida}).$$

$$B_i = (Q + (12.5 - 1) S) \quad i = 1..12 \quad (\text{ecuación 1}).$$

$$C_i = (R + (12.5 - 1) S) \quad i = 1..12 \quad (\text{ecuación 2}).$$

Entonces el costo total se puede expresar:

$$c_t = 12Ss + A + \sum_{i=1}^{12} B_i x_i + \sum_{i=1}^{12} C_i y_i + \sum_{i=1}^{12} Ff_i$$

Y como A es una cantidad ya conocida, la función a minimizar es:

$$\begin{aligned}
 \text{MIN } Z = & 12Ss + B_1x_1 + \dots + B_{12}x_{12} + C_1y_1 + \dots + C_{12}y_{12} + \\
 & Ff_1 + \dots + Ff_{12}
 \end{aligned}$$

Para determinar las restricciones, se tienen de dos clases: restricciones comerciales y restricciones sociales.

Restricciones comerciales:

$$s + \sum_{k=1}^1 (P_k + x_k + y_k + f_k) \geq \sum_{k=1}^1 V_k \quad \text{en el mes } i, i=1..11$$

y para el mes 12:

$$s + \sum_{k=1}^{12} (P_k + x_k + y_k + f_k) \geq t + \sum_{i=1}^{12} V_k \quad \text{donde: } t=125.0$$

Restricciones sociales:

Las x_1 están limitadas al 18.75% de las P_1 y las y_1 están limitadas al 16% de las P_1 (estas limitaciones son por el contrato colectivo de trabajo), así:

$$x_1 \leq 0.1875 P_1 \quad ; \quad y_1 \leq 0.16 P_1$$

Una vez definidas las restricciones y la función objetivo, a continuación se presenta el diseño del modelo propuesto para la solución de este problema.

Modelo Propuesto:

$$\text{MIN } Z = 12Ss + \sum_{i=1}^{12} (B_1 x_i + C_1 y_i + Ff_i)$$

Sujeta a:

$$s + \sum_{k=1}^1 ((x_k + y_k) + f_k) \geq \sum_{k=1}^1 (V_k - P_k) \quad (\text{ecuación 3})$$

donde: $i=1..11$; $s=0$

$$(s-t) + \sum_{k=1}^{12} ((x_k + y_k) + f_k) \geq \sum_{k=1}^{12} (V_k - P_k)$$

donde: $s=0$ y $t=125.0$

$$0 \leq x_i \leq 0.1875 p_i \quad \text{donde } i= 1..12 \quad (\text{ecuación 4})$$

$$0 \leq y_i \leq 0.1600 p_i \quad \text{donde } i= 1..12 \quad (\text{ecuación 5})$$

c) Modelo de Programación Lineal Propuesto.

Para presentar el diseño final del modelo propuesto, en los siguientes cuadros se muestran los valores de los parámetros requeridos, tanto en la función objetivo como en las restricciones.

CUADRO No. 12

VALORES PARA B_i Y C_i

MES	VALOR DE B_i			VALOR DE C_i		
	PROD.1	PROD.2	PROD.3	PROD.1	PROD.2	PROD.3
1	761	1522	2657	772	1544	2696
2	715	1430	2496	726	1452	2535
3	669	1338	2335	680	1360	2374
4	623	1246	2174	634	1268	2213
5	577	1154	2013	588	1176	2052
6	531	1062	1852	542	1084	1891
7	485	970	1691	496	992	1730
8	439	878	1530	450	900	1569
9	393	786	1369	404	808	1408
10	347	694	1208	358	716	1247
11	301	602	1047	312	624	1086
12	255	510	886	266	532	925

CUADRO No. 13

VALORES PARA $\sum_k (V_k - P_k)$, $0.1875p_1$ y $0.16p_1$

MES	$\sum_k (V_k - P_k)$			$0.1875p_1$			$0.16p_1$		
	PROD1	PROD2	PROD3	PROD1	PROD2	PROD3	PROD1	PROD2	PROD3
1	191	92	-32	44	44	89	38	38	76
2	209	12	-209	58	58	117	50	50	100
3	265	130	111	42	42	84	36	36	72
4	262	231	560	44	44	89	38	38	76
5	255	215	799	44	44	89	38	38	76
6	371	232	617	58	58	117	50	50	100
7	451	214	565	47	47	94	40	40	80
8	420	245	710	58	58	117	50	50	100
9	429	358	1184	42	42	84	36	36	72
10	409	329	1398	47	47	94	40	40	80
11	579	358	1241	56	56	112	48	48	96
12	767	499	1364	42	42	84	36	36	72

Utilizando las ecuaciones 1 y 2 se obtienen las B_1 y las C_1 para cada producto. Con la información del Cuadro No. 3 se obtienen los valores para $\sum_k (V_k - P_k)$. Y de las ecuaciones 4 y 5 se obtienen los valores para $0.16p_1$ y $0.1875p_1$.

Antes de sustituir los valores de los parámetros calculados, es necesario obtener una tabla de valores para el coeficiente de las f_1 , ya que solo se conoce el costo unitario pero si no se llega a cumplir el compromiso con el cliente - **este reducirá su pedido al 50%**, perdiéndose así el 50% de la venta, por lo tanto, el costo de ruptura para cada producto - mensualmente, se muestra en el siguiente cuadro:

CUADRO No. 14

COSTOS DE RUPTURA

MES	PRODUCTO 1	PRODUCTO 2	PRODUCTO 3
1	80036	123046	287950
2	61710	86768	291200
3	52547	128282	500500
4	43758	126412	600600
5	43010	82654	464100
6	80036	123046	287950
7	61710	86768	291200
8	52547	128282	500500
9	43758	126412	600600
10	43010	82654	464100
11	80036	123046	287950
12	61710	86768	291200

Sustituyendo los valores de los parámetros (Cuadros - Nos. 12, 13 y 14), en la función objetivo y en las restricciones se tiene:

Para el producto No. 1:

$$\begin{aligned} \text{MIN } Z = & 80036f_1 + 61710f_2 + 52547f_3 + 43758f_4 + 43010f_5 + 80036f_6 + \\ & 61710f_7 + 52547f_8 + 43758f_9 + 43010f_{10} + 80036f_{11} + 61710f_{12} + \\ & 761x_1 + 715x_2 + 669x_3 + 625x_4 + 577x_5 + 531x_6 + \\ & 485x_7 + 439x_8 + 393x_9 + 347x_{10} + 301x_{11} + 255x_{12} + \\ & 772y_1 + 726y_2 + 680y_3 + 634y_4 + 588y_5 + 542y_6 + \\ & 496y_7 + 450y_8 + 404y_9 + 358y_{10} + 312y_{11} + 266y_{12} \end{aligned}$$

Sujeta a:

- 1) $x_1 + y_1 + f_1 \geq 191$
- 2) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 \geq 209$
- 3) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 \geq 265$

$$4) x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 \equiv 262$$

$$5) x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 \equiv 255$$

$$6) x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 \equiv 371$$

$$7) x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 + x_7 + y_7 + f_7 \equiv 451$$

$$8) x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 + x_7 + y_7 + f_7 + x_8 + y_8 + f_8 \equiv 420$$

$$9) x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 + x_7 + y_7 + f_7 + x_8 + y_8 + f_8 + x_9 + y_9 + f_9 \equiv 429$$

$$10) x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 + x_7 + y_7 + f_7 + x_8 + y_8 + f_8 + x_9 + y_9 + f_9 + x_{10} + y_{10} + f_{10} \equiv 409$$

$$11) x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 + x_7 + y_7 + f_7 + x_8 + y_8 + f_8 + x_9 + y_9 + f_9 + x_{10} + y_{10} + f_{10} + x_{11} + y_{11} + f_{11} \equiv 539$$

$$12) x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 + x_7 + y_7 + f_7 + x_8 + y_8 + f_8 + x_9 + y_9 + f_9 + x_{10} + y_{10} + f_{10} + x_{11} + y_{11} + f_{11} + x_{12} + y_{12} + f_{12} \equiv 767$$

$$13) x_1 \equiv 44$$

$$14) x_2 \equiv 58$$

$$15) x_3 \equiv 42$$

$$16) x_4 \equiv 44$$

- 17) $x_5 \leftarrow 44$
- 18) $x_6 \leftarrow 58$
- 19) $x_7 \leftarrow 47$
- 20) $x_8 \leftarrow 58$
- 21) $x_9 \leftarrow 42$
- 22) $x_{10} \leftarrow 47$
- 23) $x_{11} \leftarrow 56$
- 24) $x_{12} \leftarrow 42$
- 25) $y_1 \leftarrow 38$
- 26) $y_2 \leftarrow 50$
- 27) $y_3 \leftarrow 36$
- 28) $y_4 \leftarrow 38$
- 29) $y_5 \leftarrow 38$
- 30) $y_6 \leftarrow 50$
- 31) $y_7 \leftarrow 40$
- 32) $y_8 \leftarrow 50$
- 33) $y_9 \leftarrow 36$
- 34) $y_{10} \leftarrow 40$
- 35) $y_{11} \leftarrow 48$
- 36) $y_{12} \leftarrow 36$

Para el producto No. 2:

$$\begin{aligned}
 \text{MIN } Z = & 123046 f_1 + 86768 f_2 + 128282 f_3 + 126412 f_4 + 82654 f_5 \\
 & + 123046 f_6 + 86768 f_7 + 128282 f_8 + 126412 f_9 + 82654 f_{10} \\
 & + 123046 f_{11} + 86768 f_{12} + 1522 x_1 + 1430 x_2 + 1338 x_3 \\
 & + 1246 x_4 + 1154 x_5 + 1062 x_6 + 970 x_7 + 878 x_8 \\
 & + 786 x_9 + 694 x_{10} + 602 x_{11} + 510 x_{12} + 1544 y_1 \\
 & + 1452 y_2 + 1360 y_3 + 1268 y_4 + 1176 y_5 + 1084 y_5 \\
 & + 992 y_7 + 900 y_8 + 808 y_9 + 716 y_{10} \\
 & + 624 y_{11} + 532 y_{12}
 \end{aligned}$$

Sujeta a:

- 1) $x_1 + y_1 + f_1 \geq 92$
- 2) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 \geq 12$
- 3) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 \geq 130$
- 4) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 \geq 231$
- 5) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 \geq 215$
- 6) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 \geq 232$
- 7) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 + x_7 + y_7 + f_7 \geq 214$
- 8) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 + x_7 + y_7 + f_7 + x_8 + y_8 + f_8 \geq 245$
- 9) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 + x_7 + y_7 + f_7 + x_8 + y_8 + f_8 + x_9 + y_9 + f_9 \geq 358$
- 10) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 + x_7 + y_7 + f_7 + x_8 + y_8 + f_8 + x_9 + y_9 + f_9 + x_{10} + y_{10} + f_{10} \geq 329$
- 11) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 + x_7 + y_7 + f_7 + x_8 + y_8 + f_8 + x_9 + y_9 + f_9 + x_{10} + y_{10} + f_{10} + x_{11} + y_{11} + f_{11} \geq 358$
- 12) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 + x_7 + y_7 + f_7 + x_8 + y_8 + f_8 + x_9 + y_9 + f_9 + x_{10} + y_{10} + f_{10} + x_{11} + y_{11} + f_{11} + x_{12} + y_{12} + f_{12} \geq 490$

- 13) $x_1 \leq 44$
- 14) $x_2 \leq 58$
- 15) $x_3 \leq 42$
- 16) $x_4 \leq 44$
- 17) $x_5 \leq 44$
- 18) $x_6 \leq 58$
- 19) $x_7 \leq 47$
- 20) $x_8 \leq 58$
- 21) $x_9 \leq 42$
- 22) $x_{10} \leq 47$
- 23) $x_{11} \leq 56$
- 24) $x_{12} \leq 42$
- 25) $y_1 \leq 38$
- 26) $y_2 \leq 50$
- 27) $y_3 \leq 36$
- 28) $y_4 \leq 38$
- 29) $y_5 \leq 38$
- 30) $y_6 \leq 50$
- 31) $y_7 \leq 40$
- 32) $y_8 \leq 50$
- 33) $y_9 \leq 36$
- 34) $y_{10} \leq 40$
- 35) $y_{11} \leq 48$
- 36) $y_{12} \leq 36$

Para el producto No. 3 :

$$\begin{aligned}
 \text{MIN } Z = & 287950f_1 + 291200f_2 + 500500f_3 + 600600f_4 + 464100f_5 \\
 & + 287950f_6 + 291200f_7 + 500500f_8 + 600600f_9 + 464100f_{10} \\
 & + 287950f_{11} + 291200f_{12} + 2657x_1 + 2496x_2 + 2335x_3 \\
 & + 2174x_4 + 2013x_5 + 1852x_6 + 1691x_7 + 1530x_8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 1369x_9 + 1208x_{10} + 1047x_{11} + 886x_{12} + 2696y_1 + 2535y_2 + \\
 &2374y_3 + 2213y_4 + 2052y_5 + 1891y_6 + 1730y_7 + 1569y_8 + \\
 &1408y_9 + 1247y_{10} + 1086y_{11} + 925y_{12}
 \end{aligned}$$

Sujeta a:

- 1) $x_1 + y_1 + f_1 \geq -32$
- 2) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 \geq -209$
- 3) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 \geq 111$
- 4) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 \geq 560$
- 5) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 \geq 799$
- 6) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 \geq 617$
- 7) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 + x_7 + y_7 + f_7 \geq 565$
- 8) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 + x_7 + y_7 + f_7 + x_8 + y_8 + f_8 \geq 710$
- 9) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 + x_7 + y_7 + f_7 + x_8 + y_8 + f_8 + x_9 + y_9 + f_9 \geq 1184$
- 10) $x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 + x_7 + y_7 + f_7 + x_8 + y_8 + f_8 + x_9 + y_9 + f_9 + x_{10} + y_{10} + f_{10} \geq 1398$

$$11) \begin{aligned} &x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + \\ &f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 + x_7 + y_7 + f_7 + x_8 + \\ &y_8 + f_8 + x_9 + y_9 + f_9 + x_{10} + y_{10} + f_{10} + x_{11} + y_{11} + f_{11} \end{aligned} \quad 1241$$

$$12) \begin{aligned} &x_1 + y_1 + f_1 + x_2 + y_2 + f_2 + x_3 + y_3 + f_3 + x_4 + y_4 + \\ &f_4 + x_5 + y_5 + f_5 + x_6 + y_6 + f_6 + x_7 + y_7 + f_7 + x_8 + \\ &y_8 + f_8 + x_9 + y_9 + f_9 + x_{10} + y_{10} + f_{10} + x_{11} + y_{11} + f_{11} + \\ &x_{12} + y_{12} + f_{12} \end{aligned} \quad 1364$$

$$13) x_1 \leq 89$$

$$14) x_2 \leq 117$$

$$15) x_3 \leq 84$$

$$16) x_4 \leq 89$$

$$17) x_5 \leq 89$$

$$18) x_6 \leq 117$$

$$19) x_7 \leq 94$$

$$20) x_8 \leq 117$$

$$21) x_9 \leq 84$$

$$22) x_{10} \leq 94$$

$$23) x_{11} \leq 112$$

$$24) x_{12} \leq 84$$

$$25) y_1 \leq 76$$

$$26) y_2 \leq 100$$

$$27) y_3 \leq 72$$

$$28) y_4 \leq 76$$

$$29) y_5 \leq 76$$

$$30) y_6 \leq 100$$

$$31) y_7 \leq 80$$

$$32) y_8 \leq 100$$

$$33) y_9 \leq 72$$

$$34) y_{10} \leq 80$$

$$35) y_{11} \leq 96$$

$$36) y_{12} \leq 72$$

IV.- SOLUCION Y CONCLUSIONES.

- a) Solución al modelo planteado a través del método simplex.

El modelo fue resuelto mediante el uso de un paquete de programación lineal para microcomputadora y los resultados se muestran en el anexo 1, éste presenta la solución - óptima, los valores de las variables duales y el análisis de sensibilidad.

En los cuadros No. 15, No. 16 y No. 17, se presenta el resumen de la solución obtenida (óptima), que contiene: el pronóstico de ventas mensual, la producción requerida en tiempo normal, tiempo extra y turnos adicionales, el inventario final y los faltantes de cada periodo y el costo del programa de producción para cada producto.

Cuadro No. 15

PROGRAMA DE PRODUCCION (MODELO) Producto 1.						
MES	PRONOSTICO DE VENTAS	PRODUCCION EN TIEMPO			PLAS EN INVENTARIO	FALTANTE
		NOR	EXT	ADIC		
1	428	237	44	38	-	109
2	330	312	18	-	-	-
3	281	225	42	14	-	-
4	234	237	-	-	3	-
5	230	237	31	-	41	-
6	428	312	58	50	33	-
7	330	250	47	-	-	-
8	281	312	-	-	31	-
9	234	225	42	5	69	-
10	230	250	47	40	176	-
11	428	300	56	48	152	-
12	330	225	42	36	125	-

Costo de producción: \$ 393 197
 inventario inicial : 0
 inventario final : 125

Cuadro No. 16

PROGRAMA DE PRODUCCION (Producto 2)

MES	PRONOSTICO	PRODUCCION EN TIEMPO			PZAS EN	FALTANTE
	DE VENTAS	NOR	EXT	ADIC	INVENTARIO	
1	329	237	44	38	-	10
2	232	312	-	-	60	-
3	343	225	42	15	19	-
4	338	237	44	38	-	-
5	221	237	-	-	16	-
6	329	312	1	-	-	-
7	232	250	-	-	18	-
8	343	312	48	-	35	-
9	338	225	42	36	-	-
10	221	250	-	-	29	-
11	329	300	54	-	54	-
12	232	225	42	36	125	-

Costo de producción: \$ 606 676
 inventario inicial : 0
 inventario final : 125

Cuadro No. 17

PROGRAMA DE PRODUCCION. (Producto 3)

MES	PRONOSTICO DE	PRODUCCION EN TIEMPO			PZAS EN	FAL-
	DE VENTAS	NOR	EXT	ADIC	INVEN.	TANTE
1	443	475	89	7	128	-
2	448	625	117	100	522	-
3	770	450	84	72	358	-
4	924	475	89	76	74	-
5	714	475	89	76	-	-
6	443	675	-	-	232	-
7	448	500	2	-	286	-
8	770	625	117	100	358	-
9	924	450	84	72	40	-
10	714	500	94	80	-	-
11	443	600	-	-	157	-
12	448	450	-	-	159	-

Costo de producción: \$ 2 633 704
 inventario inicial : 0
 inventario final : 159

Costo total de producción de los tres productos: \$ 3 633 577.

En este primer periodo anual se supuso que el inventario inicial era igual a cero ($s=0$), que es la realidad, -- sin embargo, se estableció la condición de que el inventario final fuera igual a diez días de producción ($t=125$), -- con el objeto de que al siguiente periodo anual, en el primer mes se evitaran los faltantes, que como en el periodo actual fueron de 109 y 10 (piezas expresadas en milas), para el caso del producto 1 y el producto 2 respectivamente. Por otro lado, el disponer de inventario inicial, disminuirá el uso de tiempo extra y turnos adicionales, estabilizando paulatinamente la producción.

A continuación se presenta la interpretación de la solución al problema dual que aparece en el Anexo 1.

El problema primal expresado en forma matricial queda:

$$\text{Min } Z = c\bar{x} \quad \text{donde} \quad c = (F, B, C) \quad ; \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} f \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

sujeta a:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \bar{x} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} f \\ x \\ y \end{bmatrix} ; \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} \sum_k (V_k - P_k) \\ 0.1875 P_k \\ 0.16 P_k \end{bmatrix}$$

Donde F, B y C son los valores presentados en los cuadros - No. 14 y No. 12, y f, x e y son los definidos anteriormente.

En el anexo 2 se presenta desarrollada la forma matricial, de ambos problemas el primal y el dual.

Y para definir el dual se tiene:

$$\max Z = \bar{b} \bar{y} \quad \text{donde} \quad \bar{b} = \left[\begin{array}{c} \sum_k (V_k - P_k) \\ 0.1875 p_k \\ 0.16 \quad p_k \end{array} \right] ; \quad \bar{y} = \left[\begin{array}{c} g \\ u \\ v \end{array} \right]$$

Sujeta a:

$$\left[\begin{array}{c} A_1^t \\ A_2^t \\ A_3^t \end{array} \right] \bar{y} \begin{array}{c} \leq \\ \geq \\ \leq \end{array} \left[\begin{array}{c} F \\ B \\ C \end{array} \right]$$

El problema dual se presenta en el anexo 3.

La interpretación a este problema es el siguiente:

En el problema primal la función objetivo era minimizar el - costo total de producción, que incluye: costo de ruptura, costo de tiempo extra, costo de turnos adicionales y costo de - mantener inventario, sujeto a las limitantes de cubrir toda - la producción y las disponibilidades de tiempos extras y turnos adicionales.

Para el problema dual sean:

y_1 = la contribución al tiempo del recurso i.

es decir:

g_1 = contribución marginal al tiempo por cada unidad \rightarrow de excedente ó faltante en tiempo normal de producción.

u_1 = contribución marginal al tiempo por cada unidad - que se requiera fabricar en tiempo extra.

v_1 = contribución marginal al tiempo por cada unidad - que se requiera fabricar en turnos adicionales.

Así cada $b_1 y_1$ puede interpretarse como la contribución al tiempo en curso teniendo a b_1 unidades del recurso 1 disponibles para el primal.

$\sum_i a_{ij} y_j$ = contribución al tiempo en curso de la mezcla de recursos que se consumiría si se utilizara una unidad de la actividad j.

Entonces:

$\sum_i a_{ij} y_j \leq c_j$ = la combinación de contribuciones marginales al tiempo por cada unidad excedente ó faltante en tiempo normal de producción hasta el periodo j, no debe exceder al costo de ruptura (de perder esa producción) en dicho periodo.

$\sum_i a_{ij} y_j \geq c_j$ = la contribución al tiempo real de la mezcla de recursos (tiempo normal, tiempo extra, turno adicional) debe ser al menos tanto como si fuera usada por una unidad de la actividad j; de lo contrario, no se estaría haciendo el mejor uso de los recursos.

Por tanto, la función objetivo del problema dual es la maximización de la utilización del tiempo extra y turnos adicionales para satisfacer las ventas no cubiertas por la producción en tiempo normal sujeta a las restricciones mencionadas en el párrafo anterior.

Para completar la solución al modelo se presenta también, en el anexo 1, el análisis de sensibilidad, el cual muestra los límites permitidos para las c_j (costos) y las b_1 (recursos), para que la solución siga siendo óptima.

- b) Comparativo de resultados obtenidos con el método de planeación actual y resultados obtenidos con el modo de programación lineal.

Siguiendo el método de programación de producción actual, en los cuadros No. 18, No.19 y No. 20, aparece un resumen del plan de producción anual, mes con mes, para los tres productos, así como su costo.

Para el cálculo del costo de estos programas fue utilizada la información antes mencionada en relación a costos de producción normal, producción en tiempo extra, producción en turnos adicionales, mantenimiento de inventario y costo de ruptura.

Cuadro No. 18

PROGRAMA ANUAL DE PRODUCCION (actual)						Producto 1
MES	PRONOSTICO DE VENTAS	PRODUCCION EN TIEMPO NOR	EXT	ADIC	FEAS EN INVENTA.	FALTANTE
1	428	237	44	38	-	109
2	330	312	18	-	-	-
3	281	225	42	14	-	-
4	234	237	-	-	3	-
5	230	237	-	-	10	-
6	428	312	58	50	2	-
7	330	250	47	31	-	-
8	281	312	-	-	31	-
9	234	225	-	-	22	-
10	230	250	-	-	42	-
11	428	300	56	30	-	-
12	330	225	42	36	-	27

Costo de producción: \$ 397 625
 inventario inicial : 0
 inventario final : 0

Cuadro No. 19

PROGRAMA ANUAL DE PRODUCCION (actual) Producto 2							
MES	PRONOSTICO DE		PRODUCCION EN TIEMPO			PZAS EN INVENTA.	FALTANTE
	VENTAS	HOR	EXT	ADIC			
1	329	237	44	38	-	10	
2	232	312	-	-	80	-	
3	343	225	38	-	-	-	
4	338	237	44	38	-	19	
5	221	237	-	-	16	-	
6	329	312	1	-	-	-	
7	232	250	-	-	18	-	
8	343	312	13	-	-	-	
9	338	225	42	36	-	35	
10	221	250	29	-	-	-	
11	329	300	29	-	-	-	
12	232	225	7	-	-	-	

Costo de producción: 724 214
 inventario inicial : 0
 inventario final : 0

Cuadro No. 20

PROGRAMA ANUAL DE PRODUCCION (actual) Producto 3							
MES	PRONOSTICO DE		PRODUCCION EN TIEMPO			PZAS EN INVENTA.	FALTANTES
	VENTAS	HOR	EXT	ADIC			
1	443	475	-	-	32	-	
2	448	625	-	-	209	-	
3	770	450	84	27	-	-	
4	924	475	89	76	-	284	
5	714	475	89	76	-	74	
6	443	675	-	-	232	-	
7	448	500	-	-	284	-	
8	770	625	-	-	139	-	
9	924	450	84	72	-	179	
10	714	500	35	-	-	-	
11	443	600	-	-	157	-	
12	448	450	-	-	159	-	

Costo de producción: 2 880 973
 inventario inicial : 0
 inventario final : 159

Comparando los resultados del modelo de programación lineal y el programa actual, se tiene:

	<u>PROGRAMA ACTUAL</u>	<u>MODELO PROPUESTO</u>
Producto 1		
Inventario inicial	0	0
Inventario final	0	125
Costo	397 625	393 197
Producto 2		
Inventario inicial	0	0
Inventario final	0	125
Costo	724 214	606 676
Producto 3		
Inventario inicial	0	0
Inventario final	159	159
Costo	2 880 973	2 633 704
T O T A L	4 002 812	3 633 577
Ahorro		369 235

El ahorro es de \$ 369 235 (9.3% aproximadamente del costo actual), adicional a esta reducción del costo, se tiene la ventaja de disponer al siguiente periodo anual de un inventario inicial, el cual permitirá cumplir con el compromiso de ventas y con el tiempo estabilizar la producción y reducir el uso de tiempos extras.

c) Planeación de Requerimientos.

Actualmente la empresa administra y coloca las requisiciones de materiales de acuerdo a los consumos promedio mensuales y basandose en la técnica ABC, la cual consiste en realizar un análisis de los materiales de la siguiente forma:

Normalmente, los datos de entrada deben incluir: número de la pieza (clave), descripción de la mercancía, costo unitario y utilización.

Estos datos, para cada pieza del conjunto a -- analizar, se manejan de la siguiente manera:

- . Multiplica la utilización por el costo unitario para obtener el valor de utilización.
- . Clasifica el valor de utilización conforme a una secuencia decreciente.
- . Hace una lista de esta secuencia. Obtiene un recuento acumulado de los artículos; un porcentaje acumulado del total de los artículos; un valor acumulado de la utilización y un -- porcentaje acumulado del valor total.
- . Los resultados se trazan sobre papel normal para gráficas. El eje X es el porcentaje acumulado del total de artículos; el eje Y -- es el porcentaje acumulado del valor total de utilización.

El análisis se realiza con la totalidad del inventario, por lo general, la gráfica resultante muestra que -- un número escaso de artículos tiene un impacto relativamente más fuerte sobre el valor de utilización.

Esta forma de administración, quizá sea conveniente modificarla de acuerdo al nuevo modelo de planeación de producción.

El plan de producción anual, incluyendo producción normal, producción en tiempo extra y producción en turnos adicionales, mes con mes, es el siguiente:

MES	PRODUCTO 1	PRODUCTO 2	PRODUCTO 3
1	319	319	571
2	330	312	842
3	281	282	606
4	237	319	640
5	268	237	640
6	420	313	675
7	297	250	502
8	312	360	842
9	272	303	606
10	337	250	674
11	404	354	600
12	303	303	450

* expresado en miles de piezas.

En base al programa de producción óptimo, es posible conocer el número de lotes mensuales requeridos por cada producto, y se puede expresar en la siguiente matriz, la cual se identificará por: Matriz de lotes de producción (MLP) que en sus columnas tiene los productos y en sus filas los meses y es de (3 x 12).

MLP =				mes
	13	26	92	1
	13	25	136	2
	11	23	98	3
	10	26	103	4
	11	19	103	5
	17	25	109	6
	12	20	81	7
	12	29	136	8
	11	24	98	9
	13	20	109	10
	16	28	97	11
	12	24	73	12

PRODUCTO	1	2	3
----------	---	---	---

Se dispone por otro lado, de la lista de materia prima y material de empaque, requeridos por un lote estándar de producción, con estos datos se forman otras dos matrices:

MME = matriz material de empaque, que en sus renglones tiene los productos y en sus columnas la lista de los materiales requeridos por cada producto y es de (12 x 3).

MMP = matriz materia prima, que en sus columnas tiene la cantidad de cada materia prima requerida en un lote estándar y es de una única fila, (7x1).

Como el tamaño del lote estándar de mezcla es indistinto para cada uno de los productos, se forma otra matriz:

MLT = matriz lotes totales, que es de una sola columna y en cada fila contiene el número de lotes totales requeridos mensualmente (corresponde a la suma de cada fila de la matriz MLP), es de (1x12)

Así las matrices son:

$$NME = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 12.5 & 0 & 0 & 12.5 & 0 & 0 & 12.5 & 0 & 0 & 1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 6.2 & 0 & 0 & 6.2 & 0 & 0 & 6.2 & 0 & 0 & .5 \end{bmatrix}$$

LISTA DE MATERIALES

CLAVE	DESCRIPCION	UTILIZACION POR LOTE	USO
5010	Botella 240	25000	Producto 1
5020	Botella 480	12500	Producto 2
5030	Botella 960	6250	Producto 3
5040	Tapa No. 18	25000	Producto 1
5050	Tapa No. 20	12500	Producto 2
5060	Tapa No. 26	6250	Producto 3
5070	Etiqueta 240	25000	Producto 1
5080	Etiqueta 480	12500	Producto 2
5090	Etiqueta 960	6250	Producto 3
6000	Caja 24's	1042	Producto 1
6010	Caja 12's	1042	Producto 2
6020	Caja 12's	521	Producto 3

Los elementos de la matriz NME fueron tomados de la columna tres de la lista de materiales.

LISTA DE MATERIAS PRIMAS. (por lote estándar).

CLAVE	DESCRIPCION	UTILIZACION POR LOTE (6000kg)	USO
1000	detergente	1500	Productos 1,2,3.
1010	aceites	1200	Productos 1,2,3.
1020	agua	900	Productos 1,2,3.
1030	sal	600	Productos 1,2,3.
1040	perfume	180	Productos 1,2,3.
1050	color	60	Productos 1,2,3.
1060	grasas	1560	Productos 1,2,3.

Con esta información se forma la matriz MMP:

$$MMP = \begin{bmatrix} 1500 & 1200 & 900 & 600 & 180 & 60 & 1560 \end{bmatrix}$$

Por último la matriz MLT, queda:

$$MLT = \begin{bmatrix} 131 \\ 174 \\ 132 \\ 139 \\ 153 \\ 151 \\ 113 \\ 177 \\ 133 \\ 142 \\ 141 \\ 109 \end{bmatrix}$$

Multiplicando las matrices MLP y MME, se obtienen los requerimientos mensuales de cada material de empaque:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5010	325	325	275	250	275	425	300	300	275	325	400	300
5020	325	312	287	325	237	312	250	362	300	250	350	300
5030	570	843	608	639	639	676	502	843	608	676	601	453
5040	325	325	275	250	275	425	300	300	275	325	400	300
5050	325	312	287	325	237	312	250	362	300	250	350	300
5060	570	843	608	639	639	676	502	843	608	676	601	453
5070	325	325	275	250	275	425	300	300	275	325	400	300
5080	325	312	287	325	237	312	250	362	300	250	350	300
5090	570	843	608	639	639	676	502	843	608	676	601	453
6000	14	14	12	11	12	19	13	13	12	14	18	13
6010	29	27	25	29	21	27	22	32	26	22	31	26
6020	46	68	49	51	51	54	40	68	49	54	48	36

Y multiplicando las matrices MPP y MLT se obtienen los requerimientos de cada materia prima para cada mes:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1000	196	261	198	208	199	226	169	265	199	213	211	163
1010	157	204	158	167	160	181	136	212	160	170	169	131
1020	118	157	119	125	120	136	102	159	120	128	127	98
1030	79	104	79	83	80	91	68	106	80	85	85	65
1040	24	31	24	25	24	27	20	32	24	26	25	20
1050	8	10	8	8	8	9	7	11	8	8	8	6
1060	204	271	206	217	207	236	176	276	207	221	220	170

Una vez conocidas las cantidades de materiales requeridos para la producción mensualmente, es sencillo colocar los pedidos y lo recomendable sería disponer de un mes de inventario (el material requerido en el mes dos, tenerlo disponible o recibirlo durante el mes uno, y así sucesivamente).

Por otro lado tambien es recomendable establecer contratos anuales con proveedores, con entregas parciales programadas ya que esto dará mayor flexibilidad a cualquier ajuste requerido en el transcurso del año y seguridad en la recepción de los materiales.

d) Conclusiones.

A partir de los resultados del análisis se concluye que:

Es necesario que la administración cambie de mentalidad, respecto al uso de tiempos extras, ya que programando adecuadamente tiempos extras y turnos adicionales, y tomando en cuenta que por el momento no es factible la adquisición de mas equipo para incrementar la producción, es posible obtener mediante la implementación del nuevo modelo, un ahorro de 10% aproximadamente sobre el costo de producción actual, y de esta forma disminuir y hasta evitar el costo por faltantes, además de darle mayor seriedad a la empresa, al cumplir sus compromisos de venta adecuadamente.

Otra ventaja es que se dispone de un inventario final creado a través del uso adecuado de los tiempos de producción.

También es recomendable automatizar la programación de producción. En el presente trabajo se utilizó un paquete de programación lineal (LINDO) para microcomputadoras, (actualmente se dispone de amplios y variados paquetes para solucionar problemas de este tipo con programación lineal en terminales y microcomputadoras), la adquisición de un equipo similar comparado con el ahorro que proporcionará, resulta mínimo.

En el área de materiales es conveniente establecer contratos anuales con los proveedores, y programar entregas parciales de acuerdo a los requerimientos estimados mensualmente, con este nuevo sistema la inversión de materiales también es baja, y la rotación alta, lo cual desde el punto de vista financiero beneficiará a la empresa. Llevar el control automatizado, permitirá ajustar en un momento dado las existencias y las entregas de materiales, pudiéndose obtener en el momento que se precise una explosión de materiales.

A N E X D 1

LP OPTIMUM FOUND AT STEP: 36
 OBJECTIVE FUNCTION VALUE : 393 197

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
f1	109.00000	.00000
f2	.00000	60995.00000
f3	.00000	51867.00000
f4	.00000	43181.00000
f5	.00000	47433.00000
f6	.00000	79459.00000
f7	.00000	61133.00000
f8	.00000	57143.00000
f9	.00000	43354.00000
f10	.00000	47606.00000
f11	.00000	79632.00000
f12	.00000	61306.00000
x1	44.00000	.00000
x2	18.00000	.00000
x3	42.00000	.00000
x4	.00000	48.00000
x5	31.00000	.00000
x6	58.00000	.00000
x7	47.00000	.00000
x8	.00000	35.00000
x9	42.00000	.00000
x10	47.00000	.00000
x11	56.00000	.00000
x12	42.00000	.00000
y1	38.00000	.00000
y2	.00000	11.00000
y3	14.00000	.00000
y4	.00000	57.00000
y5	.00000	11.00000
y6	50.00000	.00000
y7	.00000	323.00000
y8	.00000	44.00000
y9	5.00000	.00000
y10	40.00000	.00000
y11	48.00000	.00000
y12	36.00000	.00000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2	.00000	-79321.00000
3	.00000	- 35.00000
4	.00000	- 103.00000
5	3.00000	.00000
6	41.00000	.00000
7	33.00000	.00000
8	.00000	- 173.00000
9	31.00000	.00000
10	69.00000	.00000
11	67.00000	.00000
12	150.00000	.00000

13	.00000	-	404.00000
14	.00000		79275.00000
15	40.00000		.00000
16	.00000		11.00000
17	44.00000		.00000
18	13.00000		.00000
19	.00000		46.00000
20	.00000		92.00000
21	58.00000		.00000
22	.00000		11.00000
23	.00000		57.00000
24	.00000		103.00000
25	.00000		149.00000
26	.00000		79264.00000
27	50.00000		.00000
28	22.00000		.00000
29	38.00000		.00000
30	38.00000		.00000
31	.00000		35.00000
32	40.00000		.00000
33	50.00000		.00000
34	31.00000		.00000
35	.00000		46.00000
36	.00000		92.00000
37	.00000		138.00000

SENSIBILITY ANALYSIS

RANGE IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGE

VARIABLE	CURRENT COEFFICIENT	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
f1	80036.00000	infinite	79264.00000
f2	61710.00000	infinite	60995.00000
f3	52547.00000	infinite	51847.00000
f4	43758.00000	infinite	43181.00000
f5	43010.00000	infinite	42433.00000
f6	80036.00000	infinite	79459.00000
f7	61710.00000	infinite	61133.00000
f8	52547.00000	infinite	43354.00000
f9	43758.00000	infinite	42606.00000
f10	43010.00000	infinite	79637.00000
f11	80036.00000	infinite	61310.00000
f12	61710.00000	infinite	infinite
x1	761.00000	79275.00000	infinite
x2	715.00000	11.00000	35.00000
x3	669.00000	11.00000	infinite
x4	625.00000	infinite	48.00000
x5	577.00000	11.00000	35.00000
x6	531.00000	46.00000	infinite
x7	485.00000	92.00000	infinite
x8	439.00000	infinite	35.00000
x9	393.00000	11.00000	infinite
x10	347.00000	57.00000	infinite
x11	301.00000	103.00000	infinite
x12	255.00000	149.00000	infinite
y1	772.00000	79264.00000	infinite
y2	726.00000	infinite	11.00000

y3	680.00000	35.00000	11.00000
y4	634.00000	infinite	57.00000
y5	598.00000	infinite	11.00000
y6	542.00000	35.00000	infinite
y7	496.00000	infinite	323.00000
y8	450.00000	infinite	46.00000
y9	404.00000	35.00000	11.00000
y10	358.00000	46.00000	infinite
y11	312.00000	97.00000	infinite
y12	266.00000	139.00000	infinite

RIGHT HAND SIDC RANGES

ROW	CURRENT RMS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	191.00000	18.00000	40.00000
3	209.00000	14.00000	18.00000
4	265.00000	27.00000	3.00000
5	262.00000	3.00000	infinite
6	255.00000	41.00000	infinite
7	371.00000	33.00000	infinite
8	451.00000	5.00000	31.00000
9	420.00000	31.00000	infinite
10	429.00000	69.00000	infinite
11	409.00000	67.00000	infinite
12	539.00000	150.00000	infinite
13	767.00000	31.00000	5.00000
14	44.00000	109.00000	44.00000
15	50.00000	infinite	40.00000
16	42.00000	14.00000	72.00000
17	44.00000	infinite	44.00000
18	44.00000	infinite	13.00000
19	58.00000	31.00000	13.00000
20	47.00000	31.00000	13.00000
21	58.00000	infinite	58.00000
22	47.00000	5.00000	31.00000
23	47.00000	5.00000	31.00000
24	56.00000	5.00000	31.00000
25	42.00000	5.00000	31.00000
26	38.00000	5.00000	38.00000
27	50.00000	109.00000	50.00000
28	36.00000	infinite	22.00000
29	38.00000	infinite	38.00000
30	38.00000	infinite	38.00000
31	50.00000	infinite	17.00000
32	40.00000	31.00000	40.00000
33	50.00000	infinite	50.00000
34	36.00000	infinite	31.00000
35	40.00000	infinite	31.00000
36	48.00000	5.00000	31.00000
37	36.00000	5.00000	31.00000

LP OPTIMUM FOUND AT STEP: 36

OBJECTIVE FUNCTION VALUE : 606 676

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
f1	18.00000	.00000
f2	.00000	85408.00000
f3	.00000	126922.00000
f4	.00000	125052.00000
f5	.00000	81592.00000
f6	.00000	121984.00000
f7	.00000	85890.00000
f8	.00000	127404.00000
f9	.00000	125534.00000
f10	.00000	82052.00000
f11	.00000	122444.00000
f12	.00000	86166.00000
x1	44.00000	.00000
x2	.00000	70.00000
x3	42.00000	.00000
x4	44.00000	.00000
x5	.00000	92.00000
x6	1.00000	.00000
x7	.00000	92.00000
x8	48.00000	.00000
x9	42.00000	.00000
x10	.00000	92.00000
x11	54.00000	.00000
x12	42.00000	.00000
y1	38.00000	.00000
y2	.00000	- 92.00000
y3	15.00000	.00000
y4	38.00000	.00000
y5	.00000	114.00000
y6	.00000	22.00000
y7	.00000	114.00000
y8	.00000	22.00000
y9	36.00000	.00000
y10	.00000	114.00000
y11	.00000	22.00000
y12	36.00000	.00000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2	.00000	-121686.00000
3	80.00000	.00000
4	149.00000	.00000
5	.00000	- 298.00000
6	16.00000	.00000
7	.00000	- 184.00000
8	18.00000	.00000
9	35.00000	.00000
10	.00000	- 276.00000
11	29.00000	.00000
12	54.00000	.00000

13	.00000	- 602.00000
14	.00000	121574.00000
15	49.00000	.00000
16	.00000	22.00000
17	.00000	114.00000
18	44.00000	.00000
19	57.00000	.00000
20	47.00000	.00000
21	30.00000	.00000
22	.00000	92.00000
23	42.00000	.00000
24	2.00000	.00000
25	.00000	92.00000
26	.00000	121502.00000
27	50.00000	.00000
28	21.00000	.00000
29	.00000	92.00000
30	38.00000	.00000
31	50.00000	.00000
32	40.00000	.00000
33	50.00000	.00000
34	.00000	70.00000
35	40.00000	.00000
36	48.00000	.00000
37	.00000	70.00000

SENSIBILITY ANALYSIS
RANGE IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGER

VARIABLE	CURRENT COEFFICIENT	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
f1	123046.00000	infinite	121502.00000
f2	86768.00000	infinite	85408.00000
f3	128282.00000	infinite	126922.00000
f4	126412.00000	infinite	125052.00000
f5	82654.00000	infinite	81592.00000
f6	123046.00000	infinite	121984.00000
f7	86768.00000	infinite	85990.00000
f8	128282.00000	infinite	127404.00000
f9	126412.00000	infinite	125534.00000
f10	82654.00000	infinite	82952.00000
f11	123046.00000	infinite	122444.00000
f12	86768.00000	infinite	86166.00000
x1	1572.00000	121524.00000	infinite
x2	1430.00000	infinite	70.00000
x3	1338.00000	22.00000	infinite
x4	1246.00000	114.00000	infinite
x5	1154.00000	infinite	92.00000
x6	1062.00000	22.00000	184.00000
x7	970.00000	infinite	92.00000
x8	878.00000	22.00000	70.00000
x9	786.00000	92.00000	infinite
x10	694.00000	infinite	92.00000
x11	602.00000	22.00000	70.00000
x12	510.00000	92.00000	infinite
y1	1544.00000	121502.00000	infinite

y2	1452.00000	infinite	92.00000
y3	1360.00000	70.00000	22.00000
y4	1268.00000	92.00000	infinite
y5	1176.00000	infinite	114.00000
y6	1084.00000	infinite	22.00000
y7	992.00000	infinite	114.00000
y8	900.00000	infinite	22.00000
y9	808.00000	70.00000	infinite
y10	716.00000	infinite	114.00000
y11	624.00000	infinite	22.00000
y12	532.00000	70.00000	infinite

RIGHT HAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	92.00000	15.00000	10.00000
3	12.00000	80.00000	infinite
4	130.00000	149.00000	infinite
5	231.00000	1.00000	15.00000
6	215.00000	16.00000	infinite
7	232.00000	48.00000	1.00000
8	214.00000	18.00000	infinite
9	245.00000	35.00000	infinite
10	358.00000	10.00000	2.00000
11	329.00000	29.00000	infinite
12	358.00000	54.00000	infinite
13	490.00000	2.00000	54.00000
14	44.00000	10.00000	44.00000
15	58.00000	infinite	48.00000
16	42.00000	15.00000	21.00000
17	44.00000	15.00000	21.00000
18	44.00000	infinite	44.00000
19	58.00000	infinite	57.00000
20	47.00000	infinite	47.00000
21	58.00000	infinite	10.00000
22	42.00000	35.00000	10.00000
23	47.00000	infinite	47.00000
24	56.00000	infinite	2.00000
25	42.00000	54.00000	2.00000
26	38.00000	10.00000	38.00000
27	50.00000	infinite	50.00000
28	36.00000	infinite	21.00000
29	38.00000	15.00000	21.00000
30	38.00000	infinite	38.00000
31	50.00000	infinite	50.00000
32	40.00000	infinite	40.00000
33	50.00000	infinite	50.00000
34	36.00000	35.00000	10.00000
35	40.00000	infinite	40.00000
36	48.00000	infinite	48.00000
37	3.00000	54.00000	2.00000

LP OPTIMUM FOUND AT STEP: 18

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 2633704

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
f1	.000000	285284.000000
f2	.000000	288504.000000
f3	.000000	497804.000000
f4	.000000	597904.000000
f5	.000000	461404.000000
f6	.000000	286259.000000
f7	.000000	289509.000000
f8	.000000	498879.000000
f9	.000000	598909.000000
f10	.000000	462409.000000
f11	.000000	287950.000000
f12	.000000	291200.000000
x1	89.000000	.000000
x2	117.000000	.000000
x3	84.000000	.000000
x4	89.000000	.000000
x5	89.000000	.000000
x6	.000000	161.000000
x7	2.000000	.000000
x8	117.000000	.000000
x9	84.000000	.000000
x10	94.000000	.000000
x11	.000000	1047.000000
x12	.000000	886.000000
y1	7.000000	.000000
y2	100.000000	.000000
y3	72.000000	.000000
y4	76.000000	.000000
y5	76.000000	.000000
y6	.000000	200.000000
y7	.000000	39.000000
y8	100.000000	.000000
y9	72.000000	.000000
y10	80.000000	.000000
y11	.000000	1086.000000
y12	.000000	925.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2	128.000000	.000000
3	522.000000	.000000
4	358.000000	.000000
5	74.000000	.000000
6	.000000	-1005.000000
7	182.000000	.000000
8	286.000000	.000000
9	358.000000	.000000
10	40.000000	.000000
11	.000000	-1691.000000

12	157.00000	.00000
13	34.00000	.00000
14	.00000	39.00000
15	.00000	200.00000
16	.00000	361.00000
17	.00000	522.00000
18	.00000	683.00000
19	117.00000	.00000
20	42.00000	.00000
21	.00000	161.00000
22	.00000	322.00000
23	.00000	483.00000
24	112.00000	.00000
25	84.00000	.00000
26	69.00000	.00000
27	.00000	161.00000
28	.00000	322.00000
29	.00000	483.00000
30	.00000	644.00000
31	100.00000	.00000
32	80.00000	.00000
33	.00000	122.00000
34	.00000	283.00000
35	.00000	444.00000
36	96.00000	.00000
37	72.00000	.00000

SENSIBILITY ANALYSIS

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEFFICIENT	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
f1	287950.00000	infinite	285254.00000
f2	291700.00000	infinite	288574.00000
f3	500500.00000	infinite	497804.00000
f4	600600.00000	infinite	597904.00000
f5	464100.00000	infinite	461404.00000
f6	287950.00000	infinite	286759.00000
f7	291200.00000	infinite	289509.00000
f8	500500.00000	infinite	498879.00000
f9	600600.00000	infinite	598909.00000
f10	464100.00000	infinite	462409.00000
f11	287950.00000	infinite	287950.00000
f12	291700.00000	infinite	291700.00000
x1	2657.00000	39.00000	infinite
x2	2496.00000	200.00000	infinite
x3	2335.00000	361.00000	infinite
x4	2174.00000	522.00000	infinite
x5	2013.00000	683.00000	infinite
x6	1852.00000	infinite	161.00000
x7	1691.00000	39.00000	122.00000
x8	1530.00000	161.00000	infinite
x9	1369.00000	322.00000	infinite
x10	1208.00000	483.00000	infinite
x11	1047.00000	infinite	1047.00000

x12	886.00000	infinite	886.00000
y1	2696.00000	285254.00000	39.00000
y2	2535.00000	161.00000	infinite
y3	2374.00000	322.00000	infinite
y4	2213.00000	483.00000	infinite
y5	2052.00000	644.00000	infinite
y6	1891.00000	infinite	200.00000
y7	1730.00000	infinite	39.00000
y8	1569.00000	122.00000	infinite
y9	1408.00000	283.00000	infinite
y10	1247.00000	444.00000	infinite
y11	1086.00000	infinite	1086.00000
y12	925.00000	infinite	925.00000

RIGHT HAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	32.00000	128.00000	infinite
3	209.00000	522.00000	infinite
4	111.00000	358.00000	infinite
5	560.00000	74.00000	infinite
6	799.00000	52.00000	7.00000
7	617.00000	182.00000	infinite
8	555.00000	206.00000	infinite
9	710.00000	358.00000	infinite
10	1184.00000	40.00000	infinite
11	1398.00000	42.00000	34.00000
12	1241.00000	157.00000	infinite
13	1364.00000	34.00000	infinite
14	89.00000	7.00000	69.00000
15	117.00000	7.00000	69.00000
16	84.00000	7.00000	69.00000
17	89.00000	7.00000	69.00000
18	89.00000	7.00000	69.00000
19	117.00000	infinite	117.00000
20	94.00000	infinite	42.00000
21	117.00000	52.00000	42.00000
22	84.00000	52.00000	42.00000
23	94.00000	40.00000	42.00000
24	112.00000	infinite	112.00000
25	84.00000	infinite	84.00000
26	76.00000	infinite	69.00000
27	100.00000	7.00000	69.00000
28	72.00000	7.00000	69.00000
29	76.00000	7.00000	69.00000
30	76.00000	7.00000	69.00000
31	100.00000	infinite	100.00000
32	80.00000	infinite	80.00000
33	100.00000	52.00000	42.00000
34	72.00000	52.00000	42.00000
35	80.00000	40.00000	42.00000
36	96.00000	infinite	96.00000
37	72.00000	infinite	72.00000

A N E X O 2

En este anexo se presenta la estructura de la matriz A y A^t , para el problema primal y dual respectivamente, así como los vectores \bar{x} e \bar{y} , y \bar{c} y \bar{b} , para el producto 1, es decir utilizando los parámetros correspondientes a este producto, para el caso de los productos 2 y 3, solo basta tomar los valores correspondientes pero la estructura es la misma.

Para el problema primal se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 10000000000100000000010000000000 \\ 110000000001100000000011000000000 \\ 111000000001110000000011100000000 \\ 111100000001111000000011110000000 \\ 111110000001111100000011111000000 \\ 111111000001111110000011111100000 \\ 111111100001111111000011111110000 \\ 111111110001111111100011111111000 \\ 111111111001111111110011111111100 \\ 111111111101111111111011111111110 \\ 111111111111111111111111111111111 \\ 00000000001000000000000000000000 \\ 00000000000100000000000000000000 \\ 00000000000010000000000000000000 \\ 00000000000001000000000000000000 \\ 00000000000000100000000000000000 \\ 00000000000000010000000000000000 \\ 00000000000000001000000000000000 \\ 00000000000000000100000000000000 \\ 00000000000000000010000000000000 \\ 00000000000000000001000000000000 \\ 00000000000000000000100000000000 \\ 00000000000000000000010000000000 \\ 00000000000000000000001000000000 \\ 00000000000000000000000100000000 \\ 00000000000000000000000010000000 \\ 00000000000000000000000001000000 \\ 00000000000000000000000000100000 \\ 00000000000000000000000000010000 \\ 00000000000000000000000000001000 \\ 00000000000000000000000000000100 \\ 00000000000000000000000000000010 \\ 00000000000000000000000000000001 \\ 00000000000000000000000000000001 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 191 \\ 209 \\ 265 \\ 262 \\ 255 \\ 371 \\ 451 \\ 420 \\ 429 \\ 409 \\ 539 \\ 767 \\ 44 \\ 58 \\ 42 \\ 44 \\ 44 \\ 58 \\ 47 \\ 58 \\ 42 \\ 47 \\ 56 \\ 42 \\ 38 \\ 50 \\ 36 \\ 38 \\ 38 \\ 50 \\ 40 \\ 50 \\ 36 \\ 40 \\ 48 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c} = (80036, 61710, 52547, 43758, 43010, 80036, 61710, 52547, 43758, 43010, 80036, 61710, 761, 715, 669, 625, 577, 531, 485, 439, 393, 347, 301, 255, 772, 726, 680, 634, 588, 542, 496, 450, 404, 358, 312, 266)$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} f1, f2, f3, f4, f5, f6, f7, f8, f9, f10, f11, f12, \\ x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12, \\ y1, y2, y3, y4, y5, y6, y7, y8, y9, y10, y11, y12 \end{bmatrix}$$

A N E X O

3

El problema dual para el producto 1 es:

$$\begin{aligned} \text{MAX } Z = & 191g_1 + 209g_2 + 265g_3 + 262g_4 + 255g_5 + 371g_6 + \\ & 451g_7 + 420g_8 + 429g_9 + 409g_{10} + 539g_{11} + 767g_{12} + \\ & 44u_1 + 58u_2 + 42u_3 + 44u_4 + 44u_5 + 58u_6 + \\ & 47u_7 + 58u_8 + 42u_9 + 47u_{10} + 56u_{11} + 42u_{12} + \\ & 38v_1 + 50v_2 + 36v_3 + 38v_4 + 38v_5 + 50v_6 + \\ & 40v_7 + 50v_8 + 36v_9 + 40v_{10} + 48v_{11} + 36v_{12} \end{aligned}$$

SUJETA A:

- 1) $g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} \leq 80036$
- 2) $g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} \leq 61710$
- 3) $g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} \leq 52547$
- 4) $g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} \leq 43758$
- 5) $g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} \leq 43010$
- 6) $g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} \leq 80036$
- 7) $g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} \leq 61710$
- 8) $g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} \leq 52547$
- 9) $g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} \leq 43758$
- 10) $g_{10} + g_{11} + g_{12} \leq 43010$
- 11) $g_{11} + g_{12} \leq 80036$
- 12) $g_{12} \leq 61710$
- 13) $g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + u_1 \geq 761$
- 14) $g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + u_2 \geq 715$
- 15) $g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + u_3 \geq 669$
- 16) $g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + u_4 \geq 625$
- 17) $g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + u_5 \geq 577$
- 18) $g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + u_6 \geq 531$
- 19) $g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + u_7 \geq 485$
- 20) $g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + u_8 \geq 439$

- 21) $g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + u_9 \geq 393$
- 22) $g_{10} + g_{11} + g_{12} + u_{10} \geq 347$
- 23) $g_{11} + g_{12} + u_{11} \geq 301$
- 24) $g_{12} + u_{12} \geq 255$
- 25) $g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + v_1 \geq 772$
- 26) $g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + v_2 \geq 726$
- 27) $g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + v_3 \geq 680$
- 28) $g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + v_4 \geq 634$
- 29) $g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + v_5 \geq 588$
- 30) $g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + v_6 \geq 542$
- 31) $g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + v_7 \geq 496$
- 32) $g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + v_8 \geq 450$
- 33) $g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + v_9 \geq 404$
- 34) $g_{10} + g_{11} + g_{12} + v_{10} \geq 358$
- 35) $g_{11} + g_{12} + v_{11} \geq 312$
- 36) $g_{12} + v_{12} \geq 266$

Este es el modelo primal para el producto 1, en el caso del producto 2 ó el producto 3, solo cambiarían los parámetros - es decir, las a_j (en la función objetivo) y las b_i (en las restricciones.

BIBLIOGRAFIA:

Ackoff Russell L.- Un concepto de Planeación de Empresas.- México.- Editorial Limusa.

Biegel John E.- Control de Producción.- México.- Herrero Haas.

Hillier and Lieberman.- Introduction to Operations Research.- U.S.A.- Holden-Day, Inc.

Hopsman Richard J.- Producción: concepto, análisis y control.- México.- C.E.C.S.A.

Johnson A. Lynwood and Montgomery Douglas G.- Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control.- U.S.A.- John Wiley and Sons, Inc.

Kauffman A.- Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones Tomo I.- México.- C.E.C.S.A.

Killen Louis M.- Técnicas de Administración de Inventarios.- México.- Impresora Técnica.

Orlicky Joseph.- Material Requirements Planning.- U.S.A.- McGraw Hill Book Company.

Riggs James.- Sistemas de Producción.- México.- Editorial Limusa.