Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias
División de Estudios de Postgrado

HOMOLOGIA CICLICA Y K-TEORIA ALGEBRAICA

T E S I S

Que presenta el:

Mat. Pedro Gurrola Pérez

para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS
(Matemáticas)

México, D. F. Septiembre 1987

INDICE

INTRODUCCION.

La homología cíclica surgío, prácticamente de manera simultánea, en dos contextos diferentes. Por un lado, en el marco de la geometría diferencial no conmutativa, el estudio de invariantes bajo permutaciones cíclicas llevó a Connes a definir los grupos de cohomología cíclica $HC^n(A)$ para el álgebra asociativa A (sobre un campo de característica cero). Por otra parte, y de manera independiente, Tsygan ([T]) definió los grupos de homología cíclica $HC_n(A)$ en conexión con la homología de las álgebras de Lie. Asimismo mostró que $HC_n(A)$ poseía cierta periodicidad determinada por la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow H_n(A,A) \longrightarrow HC_n(A) \longrightarrow HC_{n-2}(A) \longrightarrow H_{n-1}(A,A) \longrightarrow \cdots$$

donde $H_n(A,A)$ es la homología de Hochschild .

Tsygan ([T]) y , en forma independiente, Loday y Quillen ([LQ 1]) probaron que, cuando K es un campo de característica cero, la homología cíclica de una K-álgebra asociativa A es la parte primitiva de la homología del álgebra de Lie de matrices con coordenadas en A ; es decir,

$$HC_*(A) = \mathrm{Prim}\, H_*(\mathfrak{gl}(A), K) \qquad (*).$$

Por otra parte (véase [G 3]), si $GL(A)$ es el grupo lineal general infinito, la homología de $GL(A)$ es un álgebra de Hopf y su parte primitiva es la K-teoría racionalizada ,

$$K_*(A) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{Prim}\, H_*(GL(A), \mathbb{Q}) \qquad (**).$$

La analogía entre (*) y (**) sugirió que existía una estrecha relación entre la homología cíclica y la K-teoría algebraica. Incluso se bautizó a la homología cíclica como " K-teoría algebraica aditiva ", K_*^+ , de tal manera que

$$K_n^+(A) = HC_{n-1}(A) .$$

De hecho, existe una correspondencia entre los objetos de K_* y los de K_*^+ : el grupo lineal $GL(A)$ corresponde al álgebra de Lie de matrices $\mathfrak{gl}(A)$, el determinante corresponde a la traza y así sucesivamente (véase [L 3], [L 4]) .

Posteriormente , Staffeldt ([St]) , generalizando un resultado de Soulé para los números duales, encontró una fórmula que permite calcular la K-teoría de un álgebra de polinomios truncados $A = \mathcal{O}[x] / x^{m+1}$ ($\mathcal{O}$ es el anillo de enteros algebraicos en una extensión finita de $\mathbb{Q}$) en términos de la homología cíclica de A. A su vez, Goodwillie ([G 3]) demostró un resultado aún más general : dado un epimorfismo de anillos $f : R \longrightarrow S$, con núcleo nilpotente , existe un isomorfismo entre la K-teoría relativa racionalizada $K_*(f) \otimes Q$ y la homología cíclica relativa racionalizada $HC_{*-1}(f) \otimes Q$. Desde un punto de vista práctico, este resultado permite emprender el cálculo de los grupos de K-teoría asociados con un ideal nilpotente mediante el cálculo de la homología cíclica correspondiente. Desde un punto de vista teórico, este teorema (junto con la relación (*)) precisa todavía más la relación entre K_* y HC_* .

Desde su aparición, la homología cíclica ha sido estudiada y generalizada de diversas maneras ([Ca], [G 1], [Ka 1], [Ka 2], [W 2], [LQ 2], [Og]). Connes, por ejemplo , generaliza la definición de homología cíclica $HC_*(X)$ definiendo los objetos cíclicos X en una categoría dada (véase [Co]). Por otra parte, Goodwillie ([G 1]) y Loday y Quillen ([LQ 2]) han mostrado la relación entre HC_* y la cohomología de de Rham.

En [St] se sugiere un método para calcular la homología cíclica de un anillo de polinomios truncados (sobre un campo de característica cero). El objeto del presente trabajo es realizar explícitamente ese cálculo , demostrando los resultados implícitos que son necesarios para llevarlo a cabo. Asimismo, mostramos cómo este cálculo , junto con el teorema de Staffeldt ([St]), permiten obtener resultados de la K-teoría del anillo de polinomios truncados $A = Z[x] / x^{m+1}$.

En las primeras secciones definimos el concepto de homología cíclica de una K-álgebra A , primero para el caso en que K tiene característica cero y , posteriormente , para el caso en que K es un anillo conmutativo cualquiera . Para ello, construimos un bicomplejo y consideramos la homología del complejo total asociado ([Co], [G 1], [LQ 2]) . Mostramos también la relación entre $HC_*(A)$ y las homologías de Hochschild y de de Rham . En la sección I.3 definimos una versión reducida de la homología cíclica ([LQ 2]) que , junto con los resultados de I.4, servirá en I.5 para calcular $HC_*(A)$ en el caso en que A es el álgebra de polinomios truncados sobre un campo de característica cero.

En el capítulo II exponemos algunas de las definiciones y resultados más importantes de la K-teoría algebraica, en particular de los grupos de K-teoría relativa $K_n(A,I)$, donde I es un ideal nilpotente . Finalmente, haciendo uso de los resultados de Staffeldt , en II.3 obtenemos alguna información sobre los grupos $K_n (Z[x] / x^{m+1})$.

Incluimos al final un apéndice sobre sucesiones espectrales que proporciona las referencias necesarias para algunas de las demostraciones en el texto.

Por último, quisiéramos expresar nuestro agradecimiento al Dr. Emilio Lluis Puebla, quien asesoró y brindó todo su apoyo para la elaboración de esta tesis .

CAPITULO I

HOMOLOGIA CICLICA

I.1 Homología de Hochschild y homología cíclica racional.

Sea K un anillo conmutativo con identidad y sea A una K-álgebra asociativa con identidad . Denotaremos por A^n al producto tensorial sobre K de n copias de A , y al elemento

$$a_o \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \in A^{n+1}$$

lo abreviaremos escribiendo $(a_o,a_1,\ldots,a_n)$.

1.1 DEFINICION. Definimos el álgebra envolvente A^e de A como

$$A^e = A \underset{K}{\otimes} A^{op} .$$

1.2 Observación. Si M es un A - bimódulo , entonces también es un A^e- módulo derecho (izquierdo), definiendo

$$m (x,y) = y m x \qquad m \in M, (x,y) \in A^e$$

$$(\quad (x,y) m = x m y \quad) .$$

En particular, A es un A - bimódulo y, por lo tanto , es un A^e- módulo izquierdo . Asimismo, obsérvese que , si definimos

$$(x,y) (a_o,\ldots,a_1) = (xa_o, a_1,\ldots, a_n y)$$

entonces A^{n+1} adquiere estructura de A^e- módulo izquierdo.

1.3 DEFINICION. Dada una K - álgebra A y un A - bimódulo M , definimos la homología de Hochschild del álgebra A con coeficientes en M , como

$$H_*(A,M) = \mathrm{Tor}_*^{A^e} (M,A)$$

(véase [CE,p.169]) .

Veremos ahora cómo se define la homología cíclica de una K- álgebra A , cuando K tiene característica cero.

1.4 DEFINICION. Para cada A^{n+1} ($n \geqslant 0$), definimos las funciones

$$\partial_i : A^{n+1} \longrightarrow A^n \qquad 0 \leq i \leq n$$

mediante

$$\partial_i (a_o, \ldots ,a_n) = \begin{cases} (a_o,\ldots,a_i a_{i+1}, \ldots , a_n) & 0 \leq i < n \\ & \\ (a_n a_o, a_1, \ldots, a_{n-1}) & i = n . \end{cases}$$

1.5 PROPOSICION. Si, para cada $n \geqslant 1$, definimos el operador $b' : A^{n+1} \longrightarrow A^n$ como

$$b' = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \partial_i$$

entonces

i) $b'b' = 0$

ii) Si $s: A^{n+1} \longrightarrow A^{n+2}$ es el operador definido como

$$s(a_o,\dots,a_n) = (1,a_o,\dots,a_n)$$

entonces

$$b's + sb' = id.$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} b's\,(a_o,\dots,a_n) &= b'(1, a_o, \dots, a_n) \\ &= (a_o, \dots, a_n) - \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(1,a_o,\dots,a_i a_{i+1},\dots,a_n) \\ &= (a_o,\dots,a_n) - s(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(a_o,\dots,a_i a_{i+1},\dots,a_n)) \\ &= (a_o,\dots,a_n) - sb'(a_o,\dots,a_n) \end{aligned}$$

es decir que $b's + sb' = id.$

Probaremos (i) por inducción sobre n :

Si $n = 1$, entonces

$$\begin{aligned} b'b'(a_o,a_1,a_2) &= b'((a_o a_1, a_2) - (a_o, a_1 a_2)) \\ &= (a_o a_1)a_2 - a_o(a_1 a_2) = 0 . \end{aligned}$$

Ahora, considerando (ii), tenemos que $b'b's + b'sb' = b'$, por lo tanto

$$b'b's = b' - b'sb'$$
$$= (id - b's)\,b' = sb'b'\ .$$

Pero, como el operador s tiene grado $+1$, entonces $b'b'$ tiene menor grado del lado derecho de la igualdad y, por hipótesis inductiva, esto implica que $sb'b' = 0$. Por la definición del operador s, esto significa que $b'b' = 0$. ///

1.6 COROLARIO. La sucesión

$$C_*^a(A)\ :\ \ldots \xrightarrow{b'} A^3 \xrightarrow{b'} A^2 \xrightarrow{b'} A \longrightarrow 0$$

($C_n^a(A) = A^{n+2}$, $n \geq -1$) es un complejo acíclico que llamaremos complejo acíclico de Hochschild .

Obsérvese que para probar que $C_*^a(A)$ es acíclico (1.5.(ii)) se requiere que A sea unitaria .

Consideremos ahora el producto tensorial $A \otimes_{A^e} C_{*+1}^a(A)$, (véase 1.2), de manera que obtenemos el complejo

$$C_*^h(A)\ :\ \ldots \longrightarrow A \otimes_{A^e} A^4 \longrightarrow A \otimes_{A^e} A^3 \longrightarrow A \otimes_{A^e} A^2$$

Pero

$$A \otimes_{A^e} A^n \cong A \otimes_{A^e} A^2 \otimes_K A^{n-2} \cong A \otimes_K A^{n-2} = A^{n-1} \qquad (n \geq 2)$$

entonces tenemos la siguiente

1.7 DEFINICION. Dada una K-álgebra A , el complejo de Hochschild de A es el complejo

$$C^h_*(A) : \quad \dots \xrightarrow{b} A^3 \xrightarrow{b} A^2 \xrightarrow{b} A$$

($C^h_n(A) = A^{n+1}$) con el operador $b : A^{n+1} \longrightarrow A^n$ definido como

$$b = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i$$

es decir,

$$b(a_o,\dots,a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (a_o,\dots,a_i a_{i+1},\dots,a_n) +$$
$$+ (-1)^n (a_n a_o,\dots,a_{n-1}) .$$

1.8 DEFINICION.. A la homología del complejo $C^h_*(A)$ la llamaremos homología de Hochschild de A y la denotaremos por $H_*(A,A)$.
Es decir que
$$H_*(A,A) = H_*(C^h_*(A)) .$$

1.9 Observación. Si A es K-proyectivo, entonces A^n es K-proyectivo y , en consecuencia , A^n es A^e-proyectivo para $n \geqslant 2$ ([CE,p.175]). Entonces, si A es K-proyectivo, $C^a_*(A)$ es una resolución proyectiva de A , y , en virtud de 1.3 ,

$$H_*(C^h_*(A)) = H_*(A,A) = \mathrm{Tor}^{A^e}_*(A,A)$$

Esto justifica que a la homología definida en 1.8 también se le haya bautizado como homología de Hochschild.

<u>1.10 PROPOSICION.</u> $H_o(A,A) = A / [A,A]$.

Demostración. Debido a que $b(a_o,a_1) = a_oa_1 - a_1a_o$, entonces $im(b) = [A,A]$, donde $[A,A]$ es el subespacio generado por los conmutadores $a_oa_1 - a_1a_o$ $(a_o,a_1 \in A)$. Por otra parte, $\ker(b\colon A \longrightarrow 0) = A$. ///

<u>1.11 PROPOSICION.</u>

$$H_n(K,K) = \begin{cases} K & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 . \end{cases}$$

Demostración. Como K^{n+1} es isomorfo a K mediante el isomorfismo

$$(k_0,\ldots,k_n) \longmapsto k_ok_1\ldots k_n$$

entonces tenemos el complejo

$$C^h_*(K) : \quad \ldots \xrightarrow{0} K \xrightarrow{id} K \xrightarrow{0} K \longrightarrow 0$$

que es exacto salvo en dimensión cero. ///

Ahora vamos a definir una acción del grupo cíclico Z_{n+1} sobre A^{n+1} .

<u>1.12 DEFINICION.</u> Definimos el <u>operador cíclico</u> $t_{n+1}\colon A^{n+1} \longrightarrow A^{n+1}$ $(n \geqslant 0)$, mediante

$$t_{n+1}(a_o,\ldots,a_n) = (-1)^n (a_n,a_o,\ldots,a_{n-1}) .$$

1.13 Observación. Para toda $n \geqslant 0$, $t_{n+1}^{n+1} = id$. Por otra parte, $t_1 = id_A$. Por brevedad, cuando no haya riesgo de confusión, escribiremos solamente t en vez de t_{n+1}.

Si deseamos que la acción de t sobre A^{n+1} sea trivial, debe cumplirse que

$$(1 - t)\ (a_o, \ldots, a_n) = 0$$

es decir que debemos considerar el cociente de A^{n+1} módulo el subespacio generado por los elementos

$$(a_o, a_1, \ldots, a_n) - (-1)^n (a_n, a_o, \ldots, a_{n-1}).$$

Abusando de la notación, escribiremos este cociente como $A^{n+1}/(1-t)$ y lo denotaremos $C_n(A)$.

<u>1.14 PROPOSICION.</u> <u>El operador b está bien definido en</u> $C_n(A)$.

Demostración.

$$\partial_i t\ (a_o, \ldots, a_n) = (-1)^n \partial_i (a_n, a_o, \ldots, a_{n-1})$$
$$= (-1)^n (a_n, a_o, \ldots, a_{i-1}a_i, \ldots, a_{n-1})$$

$$t\,\partial_{i-1}\ (a_o, \ldots, a_n) = t\ (a_o, \ldots, a_{i-1}a_i, \ldots, a_n)$$
$$= (-1)^n (a_n, a_o, \ldots, a_{i-1}a_i, \ldots, a_{n-1})$$

de manera que $\qquad \partial_i t = t\,\partial_{i-1}$ si $1 \leqslant i \leqslant n$.

Además, $\partial_o t = \partial_n$. Como, por definición,

$$b' = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \partial_i \qquad b = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i$$

entonces, las igualdades anteriores implican que

$$b(1-t) = (1-t)\, b' \quad .$$

Por lo tanto tenemos el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{tikzcd}
A^{n+1} \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "(1-t)"'] & A^n \arrow[d, "(1-t)"] \\
A^{n+1} \arrow[r, "b"] \arrow[d] & A^n \arrow[d] \\
C_n(A) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & C_{n-1}(A) \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

Las columnas son exactas, y el morfismo inducido por b en el cociente $C_n(A) = A^{n+1}/(1-t)$ está bien definido. ///

<u>1.15 DEFINICION.</u> El complejo

$$C_*(A) : \quad \cdots \to C_n(A) \xrightarrow{b} C_{n-1}(A) \to \cdots \to C_o(A)$$

donde $C_n(A) = A^{n+1}/(1-t)$ y b es el operador definido en 1.7 , se llama <u>complejo de Connes .</u>

1.16 DEFINICION. Si $K \supseteq \mathbb{Q}$, definimos la <u>homología cíclica (racional) de la K-álgebra A</u>, $HC_*(A)$, como la homología del complejo $C_*(A)$. Es decir

$$HC_n(A) = H_n(C_*(A)) \quad .$$

<u>1.17 PROPOSICION.</u>.

$$\text{i)} \quad HC_0(A) = A / [A,A]$$

$$\text{ii)} \quad HC_n(K) = \begin{cases} K & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar .} \end{cases}$$

Demostración. Por 1.13, tenemos que $C_0(A) = A$ y, al igual que en 1.10, $HC_0(A) = A / [A,A]$. Por otra parte, t actúa sobre $K^{n+1} \cong K$ como la multiplicación por 1 (si n es par) ó por -1 (si n es impar). Por lo tanto

$$C_n(K) = \begin{cases} K & \text{si } n \text{ es par} \\ K/2K & \text{si } n \text{ es impar .} \end{cases}$$

Pero K contiene a $\mathbb{Q}$, de manera que $K/2K = 0$ y tenemos el complejo

$$C_*(K) : \quad \ldots \quad \to K \to 0 \to K \to 0$$

de donde se sigue el resultado.

///

I.2 Homología cíclica entera.

Veamos ahora cómo se generaliza la definición 1.16 al caso en que K es un anillo conmutativo cualquiera (sin restricción sobre la característica). Sean

$$\partial_i : A^{n+1} \longrightarrow A^n$$

$$t : A^{n+1} \longrightarrow A^{n+1}$$

las funciones definidas en 1.4 y 1.12 respectivamente. Asimismo, sean

$$b: A^{n+1} \longrightarrow A^n$$

$$b': A^{n+1} \longrightarrow A^n$$

como en 1.5 y 1.7 .

2.1 DEFINICION. Definimos el operador $N : A^{n+1} \longrightarrow A^{n+1}$ $(n \geqslant 0)$, como $N = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n$.

Podemos construir el siguiente diagrama:

$C_{**}(A)$:

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
2 & A^3 \arrow[d, "b"] & A^3 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^3 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & \cdots \arrow[l, "1-t"'] \\
1 & A^2 \arrow[d, "b"] & A^2 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & \cdots \arrow[l, "1-t"'] \\
q = 0 & A & A \arrow[l, "1-t"'] & A \arrow[l, "N"'] & \cdots \arrow[l, "1-t"'] \\
p = & 0 & 1 & 2 & \cdots
\end{tikzcd}
$$

donde las columnas pares son complejos de Hochschild $C_*^h(A)$ y las impares son complejos acíclicos $C_*^a(A)$ con el signo del operador b' invertido. A su vez , los renglones son los complejos estándar para calcular la homología de un grupo cíclico con coeficientes en A^n (véase [Br,p.58]) .

2.2 PROPOSICION. <u>El diagrama anterior es un bicomplejo (que denotaremos</u> $C_{**}(A)$) , <u>es decir que</u> $C_{p,q}(A) = A^{q+1}$ ($q \geq 0$, $p \geq 0$) , <u>y se satisfacen las siguientes propiedades</u>

i) $b^2 = 0 = (b')^2$

ii) $(1-t)N = 0 = N(1-t)$

iii) $b(1-t) = (1-t)b'$

iv) $Nb - b'N = 0$.

Demostración. El inciso (i) es inmediato ya que las columnas son los complejos $C_*^a(A)$, $C_*^h(A)$. Asimismo, tenemos que

$$(1-t)(1+t+\ldots+t^n) = 1 - t^{n+1} = 0$$

(véase 1.13) . El inciso (iii) se demostró en 1.14 .

Por último, obsérvese que

$$b = \sum_{i=0}^{n} t^i \partial_n t^{-i-1} \quad , \quad b' = \sum_{i=0}^{n-1} t^i \partial_n t^{-i-1}$$

en consecuencia

$$Nb = \left(\sum_{j=0}^{n-1} t^j\right)\left(\sum_{i=0}^{n} t^i \partial_n t^{-i-1}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} N \partial_n t^{-i-1} = N \partial_n N \; .$$

Por otra parte,

$$b'N = \left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i \partial_n t^{-i-1}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} t^j\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} t^i \partial_n N = N \partial_n N \; .$$

///

Al bicomplejo $C_{**}(A)$ le podemos asociar el siguiente complejo (véase [Ro,p.319]) :

<u>2.3 DEFINICION</u>. Definimos <u>el complejo total</u>, $Tot_*(C_{**}(A))$, <u>asociado al bicomplejo</u> $C_{**}(A)$, de la siguiente manera

$$Tot_n(C_{**}(A)) = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}(A) = \bigoplus_{0<i<n} A^{i+1}$$

con el operador $d_n : Tot_n(C_{**}(A)) \longrightarrow Tot_{n-1}(C_{**}(A))$ definido como

$$d_n = \sum_{p+q=n} d'_{p,q} + d''_{p,q}$$

donde

$$d'_{p,q} + d''_{p,q} = \begin{cases} b + N & \text{si } p \text{ es par} \\ -b' + (1-t) & \text{si } p \text{ es impar} . \end{cases}$$

<u>2.4 DEFINICION.</u> Sea A una K-álgebra. Definimos la <u>homología cíclica (entera) de A</u>, $HC_*(A)$, como la homología del complejo total asociado a $C_{**}(A)$, es decir

$$HC_n(A) = H_n(Tot_*(C_{**}(A))) .$$

<u>2.5 PROPOSICION.</u> $HC_o(A) = A / [A,A]$.

Demostración. Tenemos el complejo

$$Tot_*(C_{**}(A)) : \quad \dots \longrightarrow A \oplus A^2 \xrightarrow{d_1} A \longrightarrow 0 .$$

Por definición, $d_1 = b \oplus (1-t)$, pero $t_1 = id_A$ (1.13), de manera que

$$(1-t)A = 0.$$

Entonces

$$im(d_1) = im(b) = [A,A] . \qquad ///$$

El siguiente resultado muestra que, cuando K tiene característica cero, las definiciones de homología cíclica racional y homología cíclica entera (1.16 y 2.4, respectivamente) son equivalentes.

<u>2.6 PROPOSICION.</u> <u>Si</u> $K \supseteq \mathbb{Q}$, <u>entonces</u>

$$H_n(Tot_*(C_{**}(A))) = H_n(C_*(A)) .$$

Demostración. Si $K \supseteq \mathbb{Q}$, los renglones de $C_{**}(A)$ son exactos, de manera que, si filtramos por renglones, tenemos que la homología del renglón p-ésimo es

$$H_*(Z_{p+1} , A^{p+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } * > 0 \\ A^{p+1}/(1-t) & \text{si } * = 0 \end{cases}$$

(Z_{p+1} es el anillo de enteros módulo $p + 1$).

Si ahora consideramos la homología con respecto a las columnas obtenemos que

$$H''_p H'_q = E^2_{p,q} = \begin{cases} 0 & p > 0 \\ H_q(C_*(A)) & p = 0 \end{cases}$$

(véase A.22) . Esto significa que la sucesión espectral se colapsa (A.23) , y

$$H_n(C_*(A)) = E^2_{o,n} \cong H_n(\mathrm{Tot}(C_{**}(A))$$

(véase A.24) . ///

2.7 Observación. El anillo K no aparece en la notación " $HC_n(A)$ " ó " $H_n(A,A)$ ", sin embargo, estos módulos dependen de K . Por otra parte, las definiciones 1.4 y 2.8 pueden extenderse al caso en que K no es conmutativo (véase [Og]) .

En tanto no hagamos ninguna aclaración sobre la característica de K, queda entendido que estamos en el caso general de homología cíclica entera.

La homología cíclica también puede definirse a partir de un bicomplejo $B_{**}(A)$ que definiremos a continuación. Este bicomplejo puede verse como una simplificación de $C_{**}(A)$, pues se obtiene a partir de éste último eliminando las columnas acíclicas y modificando índices y operadores.

<u>2.8 DEFINICION.</u> El <u>bicomplejo de Connes</u>, $B_{**}(A)$ es el módulo bigraduado $\left\{ B_{p,q}(A) \right\}$, donde

$$B_{p,q}(A) = \begin{cases} C_{2p,q-p}(A) = A^{q-p+1} & \text{si } q \geqslant p \\ 0 & \text{si } q < p \end{cases}$$

junto con los diferenciales

$$B = (1-t)\, s\, N : A^n \longrightarrow A^{n+1}$$

$$b : A^{n+1} \longrightarrow A^n .$$

Es decir que tenemos un diagrama como el siguiente:

$$B_{**}(A):\quad \begin{tikzcd} \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\ A^3 \arrow[d, "b"] & A^2 \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] \\ A^2 \arrow[d, "b"] & A \arrow[l] & \\ A & & \\ p= \; 0 & 1 & 2 \; \ldots \end{tikzcd}$$

El operador $B : A^n \longrightarrow A^{n+1}$ lo obtenemos del bicomplejo $C_{**}(A)$ mediante la composición

$$\begin{tikzcd} A^{n+1} & A^{n+1} \arrow[l, "(1-t)"'] & \\ & A^n \arrow[u, "s"] & A^n \arrow[l, "N"'] \end{tikzcd}$$

donde $s: A^n \longrightarrow A^{n+1}$ es el operador de homotopía definido en 1.5.(ii). La siguiente proposición muestra que $B_{**}(A)$ satisface la definición de bicomplejo.

<u>2.9 PROPOSICION.</u> $B_{**}(A)$ <u>satisface que</u>

$$\text{i)} \quad b^2 = 0 = B^2$$

$$\text{ii)} \quad bB + Bb = 0 .$$

Demostración. $b^2 = 0$ en virtud de que las columnas son complejos de Hochschild. Por otra parte,

$$B^2 = (1-t)sN(1-t)sN$$

pero $N(1-t) = 0$ (por 2.2.(ii)), entonces $B^2 = 0$.

Por último,

$$\begin{aligned}
bB + Bb &= b\,(1-t)\,s\,N + (1-t)\,s\,N\,b \\
&= b\,(1-t)\,s\,N + (1-t)\,s\,b'\,N && (2.2.(iv)) \\
&= (1-t)\,b'\,s\,N + (1-t)\,s\,b'\,N && (2.2.(ii)) \\
&= (1-t)\,(b'\,s + s\,b')\,N \\
&= (1-t)\,N \\
&= 0 && (2.2.(ii)).
\end{aligned}$$

///

Al igual que en 2.3 , podemos asociarle a $B_{**}(A)$ un complejo total:

<u>2.10 DEFINICION</u>. El <u>complejo total asociado a</u> $B_{**}(A)$ es el complejo

$Tot_*(B_{**}(A))$, donde

$$Tot_n(B_{**}(A)) = \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ p\geqslant 0}} B_{p,q}(A) = \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ p\geqslant 0}} A^{q-p+1}$$

y el diferencial es $d = b + B$.

<u>2.11 PROPOSICION.</u> $HC_*(A) = H_*(Tot_*(B_{**}(A)))$.

Demostración. Definimos la función

$$\emptyset_{**} : B_{**}(A) \longrightarrow C_{**}(A)$$

definiendo, para cada $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$,

$$\emptyset_{p,q}: B_{p,q}(A) \longrightarrow C_{2p,q-p}(A) \oplus C_{2p-1,q-p+1}(A)$$

mediante

$$\emptyset_{p,q}(x) = (x , s N x) .$$

Es decir que (véase 2.3, 2.8) ,

$$\emptyset_{p,q} : A^{q-p+1} \longrightarrow A^{q-p+1} \oplus A^{q-p+2} .$$

donde el primer sumando pertenece a $C_*^h(A)$, mientras que el segundo sumando es un elemento de la columna impar (acíclica) $C_*^a(A)$. Verificaremos primero que $\emptyset_{**}$ es un morfismo de complejos.

De acuerdo con el diagrama

$$\begin{tikzcd} A^{q-p+2} & A^{q-p+2} \arrow[l, "(1-t)"'] \arrow[d, "-b'"] & \\ & A^{q-p+1} & A^{q-p+1} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] \\ & & A^{q-p} \end{tikzcd}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} (d' + d'')\, \emptyset_{p,q}(x) &= (d' + d'')\,(x, sNx) \\ &= (bx, Nx + (-b')sNx, (1-t)sNx) \\ &= (bx, (1 - b's)Nx, (1-t)sNx) \\ &= (bx, sNbx + sNBx, Bx) \\ &= \emptyset_{**}(b + B)x \quad . \end{aligned}$$

De este modo, $\emptyset_{**}$ induce un morfismo de complejos

$$\emptyset : \quad Tot_*(B_{**}(A)) \longrightarrow Tot_*(C_{**}(A))$$

Si filtramos $C_{**}(A)$ y $B_{**}(A)$ por columnas (véase A.15), obtenemos subcomplejos

$$F^p\, Tot_*(C_{**}(A)) \qquad y \qquad F^p\, Tot_*(B_{**}(A)) \; .$$

Obsérvese que $\emptyset$ preserva la filtración, pues

$$\emptyset\left(F^{p}\,\mathrm{Tot}_*(B_{**}(A))\right) \subseteq F^{2p}\,\mathrm{Tot}_*(C_{**}(A)) .$$

Cuando $p = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\emptyset\left(F^{0}\,\mathrm{Tot}_*(B_{**}(A))\right) &= F^{0}\,\mathrm{Tot}_*(C_{**}(A)) \\ &= C^{h}_*(A)\end{aligned}$$

de manera que $\emptyset$ preserva la homología en F^0. Procediendo por inducción, si $p > 0$, entonces, como

$$F^{2p+1}\,\mathrm{Tot}_*(C_{**}(A)) = F^{2p}\,\mathrm{Tot}_*(C_{**}(A)) \oplus \text{(columna acíclica)}$$

es evidente que $\emptyset$ preserva la homología para toda $p \geqslant 0$. En particular (como la filtración está acotada; véase A.11),

$$H_n(\mathrm{Tot}_*(B_{**}(A))) = H_n(\mathrm{Tot}_*(C_{**}(A))) .$$

///

Una de las propiedades más importantes de la homología cíclica está dada por el siguiente teorema :

<u>2.12 TEOREMA</u> . <u>(Sucesión exacta de periodicidad)</u> <u>Existe una sucesión exacta larga</u>

$$\cdots \longrightarrow H_*(A,A) \xrightarrow{I} HC_*(A) \xrightarrow{S} HC_{*-2}(A,A) \xrightarrow{B} H_{*-1}(A,A) \rightarrow \cdots$$

. Demostración. Obsérvese cómo , en $B_{**}(A)$, tenemos que

$$B_{p,q}(A) = B_{p-1,q-1}(A)$$

($p > 0$, $q > 0$) , de manera que tenemos una función suprayectiva

$$S : B_{**}(A) \longrightarrow B_{*-1,*-1}(A)$$

cuyo núcleo consiste de la primera columna de $B_{**}(A)$. Como S es un morfismo de bicomplejos , tenemos entonces un morfismo inducido (suprayectivo)

$$S : Tot_*(B_{**}(A)) \longrightarrow Tot_*(B_{**}(A))_{[-2]}$$

donde [-2] indica que los subíndices se recorren dos unidades. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \ker S \rightarrow Tot_*(B_{**}(A)) \rightarrow Tot_*(B_{**}(A))_{[-2]} \longrightarrow 0$$

como $\ker S = C_*^h(A)$, entonces tomando la homología de esta sucesión exacta corta obtenemos la sucesión de periodicidad.

///

Otra manera de relacionar la homología cíclica con la homología de Hochschild es la siguiente:

2.13 TEOREMA, Para toda K-álgebra A existe una sucesión espectral que converge a $HC_n(A)$ donde $E^1_{p,q} = H_{p-q}(A,A)$, y

$$d^1 : H_{q-p}(A,A) \longrightarrow H_{q-p+1}(A,A)$$

es el operador inducido por B.

Demostración. Consideremos la filtración por columnas del bicomplejo $B_{**}(A)$, (véase A.15) ;

$$F^p \operatorname{Tot}_n(B_{**}(A)) = \bigoplus_{0 \le i \le p} B_{i,n-i}(A) , \quad p \geq 0.$$

Es decir que, para cada p, el n-ésimo término del subcomplejo consiste de la suma directa de los elementos de $\operatorname{Tot}_n(B_{**}(A))$ que están a la izquierda de la columna p+1. Como

$$B_{p,q}(A) = A^{q-p+1}$$

entonces $\qquad F_n^p \operatorname{Tot}(B_{**}(A)) = \bigoplus_{0 \leq i \leq p} A^{n-2i+1}$.

Obsérvese cómo, para cada n ,

$$B_{p,q}(A) = F_n^p \operatorname{Tot}_*(B_{**}(A)) \ / \ F_n^{p-1} \operatorname{Tot}_*(B_{**}(A))$$

de manera que el cociente F^p / F^{p-1} es la p-ésima columna con diferencial b ; en otras palabras, se trata del complejo $C_*^h(A)$. Por lo tanto

$$E_{p,q} = H_n(F^p/F^{p-1}) = H_{q-p}(A,A)$$

y tenemos el diagrama (véase A.20) :

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
H_2(A,A) \arrow[d, "b"] & H_1(A,A) \arrow[l] \arrow[d] & H_0(A,A) \arrow[l] \\
H_1(A,A) \arrow[d] & H_0(A,A) \arrow[l, "d^1"'] & \\
H_0(A,A) & &
\end{tikzcd}$$

donde las columnas son complejos y $d^1 : H_{q-p}(A,A) \rightarrow H_{q-p+1}(A,A)$ es el morfismo inducido por el operador B mediante

$$d^1_{p,q}([z_{p,q}]) = [B(z_{p,q})]$$

donde $[z_{p,q}]$ denota a la clase de homología de $z_{p,q}$.
De esta manera, tenemos que

$$E^1_{p,q} = \left\{ \begin{array}{ll} H_{q-p}(A,A) & \text{si} \quad q \geqslant p > 0 \\ & \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{array} \right\} \Rightarrow HC_*(A) .$$

///

2.14 Observación. Si en la sucesión exacta larga de 2.12 definimos

$$B' : H_*(A,A) \longrightarrow H_{*+1}(A,A)$$

como la composición $B' = BI$, entonces $B'B' = 0$ y , tenemos un complejo de cocadenas

$$\ldots \longrightarrow H_n(A,A) \xrightarrow{B'} H_{n+1}(A,A) \xrightarrow{B'} H_{n+2}(A,A) \longrightarrow \ldots$$

conocido como complejo de de Rham , y cuya cohomología es la cohomología de de Rham de A , denotada $H^*_{dR}(A)$. Además, obsérvese que B' es el morfismo inducido por B , es decir que $B' = d^1$ (véase 2.13) .

Por último, vamos a normalizar el bicomplejo $B_{**}(A)$ y a mostrar cómo la homología cíclica $HC_*(A)$ también puede definirse como la homología correspondiente a este bicomplejo normalizado. Esto nos será de utilidad, como veremos más adelante, en el caso en que A es una K-álgebra aumentada.

<u>2.15 DEFINICION.</u> Para cada $n \geqslant 0$, sea $D_n \subseteq A^{n+1}$ el submódulo generado por los elementos

$$(a_o,\ldots,a_n) \in A^{n+1}$$

tales que $a_i = 1$ para alguna i , $1 \leqslant i \leqslant n$.

<u>2.16 PROPOSICION.</u> $b (D_n) \subseteq D_{n-1}$.

Demostración. Sea $(a_o,\ldots,a_n) \in D_n$, $a_j = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i (a_o,\ldots,a_n) &= \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \partial_i (a_o,\ldots,a_n) + \\ &+ (-1)^j (a_o,\ldots,a_j,a_{j+2},\ldots,a_n) + \\ &+ (-1)^{j+1} (a_o,\ldots,a_j,a_{j+2},\ldots,a_n) + \\ &+ \sum_{i=j+2}^{n} (-1)^i \partial_i (a_o,\ldots,a_n)\end{aligned}$$

y evidentemente los dos términos intermedios se cancelan, mientras que todos los demás pertenecen a D_{n-1} . ///

La proposición anterior implica que los submódulos D_n forman un subcomplejo D_* de $C^h_*(A)$, (llamado <u>subcomplejo degenerado</u>). Por consiguiente, podemos considerar el cociente $C^h_*(A) / D_*$.

<u>2.17 DEFINICION.</u> Definimos el <u>complejo de Hochschild normalizado</u> ,

$C^h_*(A)_{norm}$, como el complejo

$$C^h_*(A)_{norm} : \quad \cdots \longrightarrow A^{n+1}/ D_n \xrightarrow{\ b\ } A^n/ D_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$(\ C^h_n(A)_{norm} = A^{n+1}/ D_n \ ) .$

2.18 Observación. Si $\overline{A} = A/K$, entonces

$$A^{n+1}/ D_n = A \otimes (\overline{A})^n .$$

Si sustituimos las columnas de $B_{**}(A)$ por complejos normalizados obtenemos el diagrama siguiente

$\overline{B}_{**}(A)$:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
A \otimes \overline{A}^{\,2} \arrow[d, "b"] & A \otimes \overline{A} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] \\
A \otimes \overline{A} \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] & \\
A & &
\end{tikzcd}$$

$$\bar{B}_{p,q}(A) = A \otimes \bar{A}^{q-p} \qquad (q \geqslant p).$$

<u>2.19 PROPOSICION.</u> $\bar{B}_{**}(A)$ <u>es un bicomplejo</u> (que llamaremos <u>bicomplejo de Connes normalizado</u>).

Demostración. Basta demostrar que el operador $B : A^n \longrightarrow A^{n+1}$ está bien definido en el cociente A^n / D_{n-1}. Como $B = (1-t)sN$, entonces

$$B = s\,N - t\,s\,N$$

pero $\operatorname{im}(ts) \subseteq D_n$, de manera que

$$B = s\,N : A^n \longrightarrow A^{n+1}/D_n .$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} s\,N(a_0,\dots,a_{n-1}) &= s\,(1+t+\dots+t^{n-1})\,(a_0,\dots,a_{n-1}) \\ &= s\,\Big(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i(n-1)}(a_i,\dots,a_n,a_0,\dots,a_{i-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i(n-1)}(1,a_i,\dots,a_n,a_0,\dots,a_{i-1}) \end{aligned}$$

por lo que B pasa al cociente como

$$B(a_0,\dots,a_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{in}(1,a_i,\dots,a_n,a_0,\dots,a_{i-1})$$

de manera que $B(D_n) \subseteq D_{n+1}$. ///

Si , al igual que en 2.3 y 2.10 , $Tot_*(\overline{B}_{**}(A))$ es el complejo total asociado a $B_{**}(A)$, entonces

<u>2.20 PROPOSICION.</u> $H_*(A,A) \cong H_*(C^h_*(A)_{norm})$

<u>y</u> $HC_*(A) \cong H_*(Tot_*(\overline{B}_{**}(A)))$.

Demostración. El subcomplejo degenerado D_* es acíclico , de manera que la proyección

$$C^h_*(A) \longrightarrow C^h_*(A)/D_*$$

implica que $H_n(A,A) \cong H_n(C^h_n(A)_{norm})$. Por lo tanto la homología de cada columna de $B_{**}(A)$ se preserva en $\overline{B}_{**}(A)$, de donde se sigue el resultado .

///

2.21 Observación. Si $A = K$, entonces $\overline{B}_{p,q}(A) = 0$ si $p \neq q$, y $\overline{B}_{p,q}(A) = K$ en la diagonal $p = q$. Por lo tanto , tenemos el complejo

$$Tot_*(\overline{B}_{**}(K)) : \ \ldots \longrightarrow K \longrightarrow 0 \longrightarrow K$$

y

$$HC_n(K) = \begin{cases} K & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

lo cual generaliza 1.17 .

I.3 Homología cíclica reducida .

Supongamos que el homomorfismo $K \longrightarrow A$ inducido por la identidad en A es inyectivo .

3.1 DEFINICIÓN. El complejo de Hochschild reducido $C^h_*(A)_{red}$ se define como el cociente

$$C^h_*(A)_{red} = C^h_*(A)_{norm} \;/\; C^h_*(K)_{norm} .$$

3.2 Observación. $C^h_*(K)_{norm}$ es el complejo concentrado en K en grado cero debido a que $K \otimes (K/K) = 0$. Como $K \to A$ es inyectivo, entonces

$$C^h_*(K)_{norm} \longrightarrow C^h_*(A)_{norm}$$

es inyectivo.

Por lo tanto, el complejo reducido $C^h_*(A)_{red}$ es igual al complejo normalizado $C^h_*(A)_{norm}$ salvo que , en grado cero sustituimos A por $\overline{A} = A/K$:

$$C^h_*(A)_{red} : \quad \ldots \longrightarrow A \otimes \overline{A}^{\,2} \longrightarrow A \otimes \overline{A} \longrightarrow \overline{A} .$$

<u>3.3 DEFINICION.</u> La <u>homología de Hochschild reducida</u> es la homología del complejo reducido $C^h_*(A)_{red}$ y se denota $\overline{H}_n(A,A)$.

<u>3.4 PROPOSICION. Existe una sucesión exacta</u>

$$0 \to H_1(A,A) \to \overline{H}_1(A,A) \to K \to H_0(A,A) \to \overline{H}_0(A,A) \to 0 .$$

<u>Además, para toda</u> $n \geq 2$, $\overline{H}_n(A,A) = H_n(A,A)$.

Demostración. Si consideramos la homología de la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C^h_*(K)_{norm} \longrightarrow C^h_*(A)_{norm} \longrightarrow C^h_*(A)_{red} \longrightarrow 0$$

obtenemos una sucesión exacta larga donde

$$H_n(C^h_*(K)_{norm}) = \begin{cases} K & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

y el resultado es inmediato. ///

<u>3.5 DEFINICION.</u> Definimos el <u>bicomplejo de Connes reducido</u> $B_{**}(A)_{red}$ como el cociente

$$B_{**}(A)_{red} = \overline{B}_{**}(A) / \overline{B}_{**}(K) .$$

Obsérvese que los bicomplejos $\overline{B}_{**}(A)$ y $B_{**}(A)_{red}$ son iguales salvo que en la diagonal del primero hemos sustituido A por $\overline{A} = A/K$.

<u>3.6 DEFINICION.</u> Definimos la <u>homología cíclica reducida</u> $\overline{HC}_*(A)$ como la homología del complejo total asociado a $B_{**}(A)_{red}$, es decir

$$\overline{HC}_*(A) = H_*(Tot_*(B_{**}(A)_{red})) .$$

<u>3.7 PROPOSICION. Existen sucesiones exactas largas</u>

$$\cdots \longrightarrow HC_n(K) \longrightarrow HC_n(A) \longrightarrow \overline{HC}_n(A) \longrightarrow HC_{n-1}(K) \longrightarrow \cdots$$

y

$$\cdots \longrightarrow \overline{H}_n(A,A) \longrightarrow \overline{HC}_n(A) \xrightarrow{S} \overline{HC}_{n-2}(A) \longrightarrow \overline{H}_{n-1}(A,A) \longrightarrow \cdots .$$

Demostración. En virtud de 3.5 , tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \overline{B}_{**}(K) \longrightarrow \overline{B}_{**}(A) \longrightarrow B_{**}(A)_{red} \longrightarrow 0$$

que a su vez, induce una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Tot(\overline{B}_{**}(K)) \longrightarrow Tot(\overline{B}_{**}(K)) \longrightarrow Tot(B_{**}(A)_{red}) \longrightarrow 0$$

y al considerar la homología obtenemos la primera sucesión exacta larga. La segunda sucesión se obtiene de manera análoga a la sucesión de periodicidad de 2.12 . ///

La versión reducida de homología cíclica resulta particularmente útil cuando A es una K-álgebra aumentada .

Una K-álgebra A se llama aumentada si existe un epimorfismo $\varepsilon : A \longrightarrow K$. En este caso, tenemos que $A = K \oplus I$, donde $I = \ker \varepsilon$ es el ideal de aumentación.

3.8 PROPOSICION. Sea $A = K \oplus I$ una K- álgebra aumentada . Entonces

$$HC_*(A) = HC_*(K) \oplus \overline{HC}(A) .$$

Demostración. La primera sucesión exacta larga de 3.7 se escinde , proporcionando el isomorfismo.

///

Obsérvese que, aunque I es un anillo sin unidad , podemos definir el bicomplejo $C_{**}(I)$, (véase 2.2) , Hay que notar , sin embargo, que las columnas impares en $C_{**}(I)$ no sabemos que sean acíclicas , pues no podemos probar 1.5.(ii) .

3.9 DEFINICION. Sea I un anillo sin unidad . Definimos la homología cíclica de I mediante

$$HC_*(I) = H_*(Tot_*(C_{**}(I))) .$$

3.10 PROPOSICION. Si $A = K \oplus I$ es una K-álgebra aumentada , entonces

$$HC_*(I) = \overline{HC}_*(A) .$$

Demostración. Como $A = K \oplus I$, entonces

$$B_{p,q+p}(A)_{red} = A \otimes \bar{A}^q$$
$$= A \otimes I^q \cong (K \oplus I) \otimes I^q$$
$$\cong (K \otimes I^q) \oplus I^{q+1} .$$

de tal manera que la función

$$C_{p,q}(I) \oplus C_{p+1,q-1}(I) = I^{q+1} \oplus I^q \xrightarrow{\varphi} A \otimes I^q$$

definida como

$$\varphi = (id \oplus s) : I^{q+1} \oplus I^q \longrightarrow I^{q+1} \oplus (1 \otimes I^q)$$

es un isomorfismo . Además , se verifica que

$$b\,s = (1-t) - s\,b'$$

$$B\,s = 0$$

y

$$B = s\,N .$$

Por lo tanto,

$$(b + B)\varphi = ((b + B) \oplus (b + B)s)$$
$$= ((b + B) \oplus ((1-t) - sb'))$$
$$= ((b + sN) \oplus ((1-t) - sb'))$$
$$= \varphi((b + (1-t)) \oplus N - b')$$

Es decir que φ conmuta con los diferenciales , y en consecuencia , induce un isomorfismo de complejos asociados . ///

3.11 COROLARIO. Si A es una K-álgebra aumentada , con ideal de aumentación I , entonces

$$HC_*(A) = HC_*(K) \oplus HC_*(I) .$$

3.12 COROLARIO. Sea A una K-álgebra aumentada , con ideal de aumentación I tal que $I^2 = 0$. Entonces

$$HC_n(I) = \bigoplus_{p+q=n} H_p(Z_{q+1}, I^{q+1}) .$$

Demostración. Si $a_o, a_1 \in I$, entonces $a_o a_1 = 0$, de manera que $\partial_i(I^{n+1}) = 0$. En consecuencia , en $C_{**}(I)$ los operadores verticales b y $(-b')$ son cero . Por lo tanto , la homología de $Tot_*(C_{**}(I))$ depende sólo de los operadores N y $(1-t)$. Pero la homología del renglón q-ésimo es

$$H_p(Z_{q+1}, I^{q+1})$$

de donde se sigue el resultado .

///

3.13 Observación. En particular , si K es un campo de característica cero , entonces

$$HC_n(I) = I^{n+1} / (1-t) \qquad (I^2 = 0) .$$

I.4 Derivaciones.

En esta sección estudiaremos la acción de la operación llamada derivación sobre las homologías de Hochschild, de Rham y cíclica. Obsérvese que se requiere que A sea conmutativo.

4.1 DEFINICION. Una derivación $D: A \to A$ en la K-álgebra conmutativa A , es un morfismo K-lineal tal que

$$D(a_0 a_1) = (Da_0)a_1 + a_0(Da_1).$$

4.2 Observación. La derivación D induce un endomorfismo $L_D : A^{n+1} \longrightarrow A^{n+1}$ definido mediante

$$L_D(a_0,\dots,a_n) = \sum_{i=0}^{n} (a_0, \dots, Da_i, \dots, a_n).$$

4.3 LEMA. L_D conmuta con los operadores b, b', s, t.

Demostración. Comprobaremos primero que $L_D \partial_i = \partial_i L_D$:

$$L_D \partial_i (a_o,\dots,a_n) = L_D(a_o,\dots,a_ia_{i+1},\dots,a_n)$$

$$= (Da_o ,\dots, a_ia_{i+1} ,\dots, a_n) + \dots +$$

$$+ (a_o,\dots, Da_ia_{i+1} ,\dots, a_n) + \dots +$$

$$+ (a_o,\dots, a_ia_{i+1} ,\dots, Da_n)$$

pero

$$(a_o ,\dots, Da_ia_{i+1} ,\dots, a_n) =$$

$$= (a_o ,\dots, (Da_i) a_{i+1},\dots,a_n) + (a_o,\dots,a_iDa_{i+1} ,\dots,a_n)$$

por lo tanto,

$$L_D \partial_i(a_o,\dots,a_n) = \partial_i \sum_{j=0}^{n} (a_o,\dots, Da_j,\dots,a_n)$$

$$= \partial_i L_D (a_o,\dots,a_n) .$$

Esto significa que $L_D b = b L_D$ y $L_D b' = b' L_D$.

De la misma manera, es inmediato verificar que

$$L_D t = t L_D \quad , \quad s L_D = L_D s . \qquad ///$$

4.4 Observación. La proposición anterior implica que tenemos un morfismo inducido

$$L_D : HC_*(A) \longrightarrow HC_*(A) .$$

4.5 TEOREMA. ([G 2]) Si A es una K-álgebra y $D : A \longrightarrow A$ es una derivación, existen morfismos K-lineales

$$e_D : A^n \longrightarrow A^{n-1}$$

$$E_D : A^n \longrightarrow A^{n+1}$$

que están bien definidos en los cocientes A^n / D_{n-1}, y tales que

$$\text{(i)} \quad [\, e_D , b \,] = 0 \qquad (\text{en } A^n)$$

$$\text{ii)} \quad [\, e_D , B \,] + [\, E_D , b \,] = L_D \qquad (\text{en } A^n)$$

$$\text{iii)} \quad [\, E_D , B \,] = 0 \qquad (\text{en } A^n / D_{n-1})$$

donde los corchetes representan a los conmutadores

$$[\, e_D , b \,] = e_D b + b e_D \quad .$$

Demostración. Sea $e_D : A^{n+1} \longrightarrow A^n$ la función definida mediante

$$e_D (a_o , \ldots , a_n) = (-1)^{n+1} ((Da_n) a_o , a_1 , \ldots , a_{n-1}) .$$

Entonces

$$b\, e_D (a_o , \ldots , a_n) = (-1)^{n+1}\, b\, ((Da_n) a_o , a_1 , \ldots , a_{n-1})$$

$$= (-1)^{n+1} \big((-1)^{o} ((Da_n)a_o a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) +$$

$$+ (-1) ((Da_n)a_o, a_1 a_2, \dots, a_{n-1}) + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-2} ((Da_n)a_o, \dots, a_{n-2}a_{n-1}) +$$

$$+ (-1)^{n-1} (a_{n-1}(Da_n)a_o, \dots, a_{n-2}) .$$

Por otra parte,

$$e_D b (a_o , \dots, a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i} e_D(a_o, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n) +$$

$$+ (-1)^{n} e_D(a_n a_o, a_1, \dots, a_{n-1})$$

$$= (-1)^{n} ((Da_n)a_o a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) +$$

$$+ (-1)^{n+1} ((Da_n)a_o, a_1 a_2, \dots, a_{n-1}) + \dots +$$

$$+ (-1)^{2n-2} ((Da_n)a_o, a_1, \dots, a_{n-2}a_{n-1}) +$$

$$+ (-1)^{2n-1} ((Da_{n-1}a_n)a_o, a_1, \dots, a_{n-2}) +$$

$$+ (-1)^{2n} ((Da_{n-1})a_n a_o, a_1, \dots, a_{n-2}) .$$

Pero, por las propiedades de D,

$$((Da_{n-1}a_n)a_o, a_1, \dots, a_{n-2}) = ((Da_{n-1})a_n a_o, a_1, \dots, a_{n-2}) +$$

$$+ (a_{n-1}(Da_n)a_o, a_1, \dots, a_{n-2})$$

Por lo tanto, los términos de $e_D b(a_o,\ldots,a_n)$ corresponden a los términos de $b e_D(a_o,\ldots,a_n)$ salvo que tienen los signos invertidos; es decir que $e_D b + b e_D = 0$.

Asimismo, e_D está bien definido en los cocientes A^{n+1}/D_n, pues, si $(a_o,\ldots,a_n) \in D_n$, entonces

$$e_D(a_o,\ldots,a_n) = (-1)^{n+1}((Da_n)a_o,a_1,\ldots,a_{n-1}) \subsetneq D_{n-1}.$$

(En el caso en que $a_n = 1$, $e_D(a_o,\ldots,a_n) = 0$ debido a que $D(1) = 0$).

El morfismo $E_D : A^{n+1} \longrightarrow A^{n+2}$ se define por inducción sobre n:

Si $n = 0$, entonces $E_D(a_o) = 0$.

Si $n = 1$, entonces $E_D(a_o,a_1) = (1, Da_1, a_o) - (1, (Da_1)a_o, 1)$.

Es inmediato verificar que

$$[e_D,B] + [E_D,b] = e_D B + B e_D + E_D b + b E_D = L_D$$

cuando $n = 0,1$.

Supongamos ahora que E_D se ha definido ya para A^n y cumple con (ii) ; definimos $E_D : A^{n+1} \longrightarrow A^{n+2}$ como el morfismo que satisface la igualdad

$$b\, E_D = (I_D - [\, e_D, B\,] - E_D b \;)$$

(se puede probar , usando una construcción similar a la de los " modelos acíclicos", que este morfismo existe; véase [G 2]) .

En la igualdad anterior, E_D del lado derecho opera sobre A^n mientras que del lado izquierdo opera sobre A^{n+1} , por lo que, por hipótesis inductiva se satisface la condición (ii) . ///

4.6 COROLARIO. $L_D = 0$ en $H^*_{dR}(A)$.

Demostración. Los morfismos L_D , B , e_D son endomorfismos del complejo de Hocschild de grados 0 , 1 y -1 respectivamente . Si consideramos a E_D como una homotopía de cadenas :

$$\begin{tikzcd} C^h_*(A) : & \cdots \arrow[r] & A^n \arrow[r, "b"] & A^{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "E_D"] & \cdots \\ C^h_*(A) : & \cdots \arrow[r] & A^n \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

entonces $[E_D , b'] = 0$ (en $H_*(A,A)$) y , en virtud de 4.5.(ii) ,

$$[e_D , B] = L_D \quad \text{en } H_*(A,A) .$$

Consideremos ahora el diagrama

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_n(A,A) \arrow[r, "B"] \arrow[d, shift right, "L_D"'] \arrow[d, shift left, "0"] & H_{n+1}(A,A) \arrow[r] \arrow[dl, "e_D"] \arrow[d, shift right, "L_D"'] \arrow[d, shift left, "0"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_n(A,A) \arrow[r] & H_{n+1}(A,A) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

donde e_D aparece como una homotopía de cocadenas . Como $[e_D, B] = L_D - 0$ (en $H_*(A,A)$) , L_D es homotópico a 0, y , en consecuencia , $L_D = 0$ en $H^*_{dR}(A)$.

///

<u>4.7 COROLARIO.</u> <u>Si</u> $S : HC_*(A) \longrightarrow HC_{*-2}(A)$ <u>es el operador de periodicidad definido en 2.12 , entonces</u>

$$L_D \circ S = 0 .$$

Demostración. Tenemos que , en $B_{**}(A)_{norm}$,

$$\begin{aligned}[e_D + E_D , b + B] &= (e_D + E_D)(b + B) + (b + B)(e_D + E_D) \\ &= e_D b + e_D B + E_D b + E_D B + be_D + bE_D + Be_D + BE_D \\ &= [e_D,b] + [e_D,B] + [E_D,b] + [E_D,B] \\ &= L_D \qquad\qquad\qquad\qquad (\text{por } 4.5) .\end{aligned}$$

(Obsérvese que $[E_D,B] = 0$ en $B_{**}(A)_{norm}$) . Entonces

$$[(e_D + E_D) S , b + B] = L_D \circ S \quad \text{en } B_{**}(A)_{norm} ,$$

y tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathrm{Tot}_n(B_{**}(A)_{norm}) \arrow[r, "\oplus\, b + B"] \arrow[d, "L_D \circ S"'] & \mathrm{Tot}_{n-1}(B_{**}(A)_{norm}) \arrow[r] \arrow[d, "L_D \circ S"] \arrow[dl, "e_D S + E_D S"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \mathrm{Tot}_{n-2}(B_{**}(A)_{norm}) \arrow[r] & \mathrm{Tot}_{n-3}(B_{**}(A)_{norm}) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

de manera que $e_D S + E_D S$ es una homotopía y $L_D S = 0$ en $HC_*(A)$. ///

4,8 LEMA. Si A es una K-álgebra conmutativa graduada, entonces $H_n(A,A)$ y $HC_n(A)$ son módulos graduados.

Demostración. Sea $A = \bigoplus_{w \geq 0} A_w$, donde, si $\deg(a)$ denota el grado del elemento $a \in A$, entonces

$$A_w = \left\{ a \in A \mid \deg(a) = w \right\}.$$

Podemos graduar a A^{n+1} extendiendo la función $\deg(\_)$ mediante

$$\deg(a_0,\ldots,a_n) = \sum_{i=0}^{n} \deg(a_i) \quad .$$

Esto significa, de manera explícita, que el submódulo de A^{n+1} de grado w es

$$A_w^{n+1} = \bigoplus_{w_0+\ldots+w_n = w} A_{w_0} \otimes \ldots \otimes A_{w_n} \subseteq A^{n+1}$$

Además, el operador b respeta el grado, pues

$$\deg(\partial_i(a_0,\ldots,a_n)) = \deg(a_0,\ldots,a_i a_{i+1},\ldots,a_n)$$

$$= \deg(a_0,\ldots,a_n)$$

Es decir que $b(A_w^{n+1}) \subseteq A_w^n$.

Por lo tanto, para cada $w \geqslant 0$, tenemos subcomplejos $C^h_*(A_w)$ del complejo $C^h_*(A)$; de manera que

$$\bigoplus_{w \geqslant 0} C^h_*(A_w) = C^h_*(A)$$

Si $H_{*,w}(A,A)$ denota a la homología correspondiente a $C^h_{*,w}(A)$, entonces

$$H_n(A,A) = \bigoplus_{w \geqslant 0} H_{n,w}(A,A) .$$

Es claro que los operadores b', s , t también respetan el grado , por lo que , para cada $w \geqslant 0$, tenemos un bicomplejo $C_{**}(A_w)$ cuya homología asociada es $HC_{*,w}(A)$, de tal manera que

$$HC_n(A) = \bigoplus_{w \geqslant 0} HC_{n,w}(A) . \qquad ///$$

4.9 Observación. Si A es una K-álgebra aumentada con ideal de aumentación I , entonces $A = K \oplus I$, de manera que podemos considerar a A como una K-álgebra graduada donde

$$A_o = K$$

$$A_1 = I$$

y $A_w = 0$ para toda $w \geq 2$. En este caso particular, tenemos que

$$A_o^{n+1} = K \otimes \ldots \otimes K \subseteq A^{n+1}$$

mientras que A_w^{n+1} consiste de todos los términos en A^{n+1} que tienen exactamente w copias de I.

4.10 Observación. También resulta importante considerar el caso en que A es una K-álgebra cualquiera con ideal nilpotente J. Podemos entonces construir una K-álgebra graduada $gr(A)$ de la siguiente manera:

Filtrando A por potencias de J,

$$A = J^o \supset J^1 \supset J^2 \supset \ldots \supset J^m \supset J^{m+1} = 0$$

y considerando los cocientes $A_w = J^w / J^{w+1}$

obtenemos el álgebra graduada $gr(A) = \bigoplus_{w \geq 0} A_w$.

Si filtramos A^{n+1} mediante subespacios

$$F_w^{n+1} = \bigoplus_{w_o + \ldots + w_n = w} J^{w_o} \otimes \ldots \otimes J^{w_n} \subseteq A^{n+1}$$

obtenemos

$$A^{n+1} = F_o^{n+1} \supset F_1^{n+1} \supset \ldots \supset F_{m(n+1)+1}^{n+1} = 0 \quad .$$

Si $(a_o, \ldots, a_n) \in F_w^{n+1}$, entonces

$$\partial_i (a_o ,\dots, a_n) = (a_o ,\dots, a_i a_{i+1} , \dots, a_n) \in F^n_w$$

debido a que $\quad a_i a_{i+1} \in J^{w_i + w_{i+1}}$.

Por lo tanto, $\quad b (F^{n+1}_w) \subseteq F^n_w$.

Similarmente, los operadores b' y t preservan la filtración. Entonces, para cada $w \geq 0$, tenemos complejos

$$F_w = C^h_*(F_w) : \quad \dots \xrightarrow{\ b\ } F^3_w \longrightarrow F^2_w \longrightarrow F^1_w = I^w$$

y obtenemos una filtración de complejos

$$C^h_* (gr(A)) = F_0 \supset F_1 > \dots \supset F_{m(n+1)+1}$$

donde, para cada n,

$$F^{n+1}_w / F^{n+1}_{w+1} = \bigoplus_{w_o+\dots+w_n = w} A_{w_o} \otimes \dots \otimes A_{w_n}$$

y obtenemos para $gr(A)$ las mismas conclusiones de 4.8 .

<u>4.11 LEMA.</u> <u>La función</u> $D': A \to A$ <u>definida como</u>

$$D'(a) = (deg(a)) a$$

<u>es una derivación y respeta el grado de</u> $a \in A$.

Demostración. $\quad D'(a_o a_1) = (deg\ a_o a_1) a_o a_1$

$$= (deg\ a_o + deg\ a_1) a_0 a_1$$

$$= (\deg a_o)\, a_o a_1 + (\deg a_1)\, a_o a_1$$

$$= (D'(a_o))\, a_1 + a_o\, (D'(a_1)) .$$

Por otra parte,

$$\deg (D'(a)) = \deg (a) . \qquad ///$$

<u>4.12 COROLARIO. El endomorfismo</u> $L_{D'} : HC_{n,w}(A) \longrightarrow HC_{n,w}(A)$ <u>actúa como multiplicación por</u> w .

Demostración. Sea $(a_o ,\ldots, a_n) \in A_w^{n+1}$ (véase la definición de A_w^{n+1} en la demostración de 4.8). Tenemos que

$$L_{D'} (a_o,\ldots,a_n) = \sum_{i=0}^{n} (a_o,\ldots, D'a_i ,\ldots, a_n) \qquad (4.2)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (a_o,\ldots,(\deg a_i)a_i,\ldots,a_n)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (\deg a_i)\, (a_o ,\ldots, a_n)$$

$$= w\, (a_0 ,\ldots, a_n) .$$

En virtud de 4.4, tenemos entonces que

$$L_{D'} = (w \times id) : HC_{n,w} \longrightarrow HC_{n,w} . \qquad ///$$

4.13 PROPOSICION. Sea A una K-álgebra conmutativa graduada sobre un campo K de característica cero. Si $S : HC_*(A) \longrightarrow HC_{*-2}(A)$ es el operador de periodicidad de 2.12 , entonces

$$S = 0 \quad \text{en} \quad HC_{n,w}(A) \quad \text{cuando} \quad w > 0 .$$

Demostración. Por 4.7 , tenemos que $L_{D'}S = 0$ en $HC_n(A)$. Como A es una K-álgebra graduada, entonces

$$HC_n(A) = \bigoplus_{w \geq 0} HC_{n,w}(A) \qquad (4.8) .$$

Pero $L_{D'}$ actúa sobre $HC_{n,w}(A)$ como la multiplicación por w,(4.12), por lo tanto,

$$L_{D'}S = w \times S = 0 \qquad \text{en } HC_{n,w}(A).$$

Como K es un campo de característica cero, esto significa que si $w \neq 0$, entonces $S = 0$.

En el caso en que $w = 0$ no podemos concluir nada acerca de S.

///

I.5 Homología cíclica de un anillo de polinomios truncados.

Veremos ahora cómo aplicar los resultados anteriores al caso en que A es el álgebra de polinomios truncados sobre un campo K de característica cero. En este caso , $A = K[z]/z^{m+1}$ es libre (proyectiva) sobre K, y

$$H_n(A,A) = \mathrm{Tor}_n^{A^e}(A,A) \qquad \text{(véase 1.9).}$$

Para calcular $H_n(A,A)$ podemos usar $C_*^a(A)$, sin embargo , la siguiente resolución proyectiva resulta más adecuada :
Para toda $i \geq 0$, sea $R_i = A \otimes_{A^e} A \cong A^e$. Entonces

$$R_i = K[x]/x^{m+1} \otimes K[y]/y^{m+1} \cong K[x,y]/(x^{m+1},y^{m+1})$$

(véase [Ro,p.16]) , de tal manera que R_i es la K-álgebra generada por los elementos x,y tales que

$$x^{m+1} = y^{m+1} = 0 \,.$$

Además, R_i es un A^e-módulo proyectivo (en virtud de 1.2, 1.9).
Si consideramos el polinomio

$$P(x,y) = x^m + x^{m-1}y + \ldots + y^m \in R_i$$

entonces, en R_i ,

$$(x-y)\,P(x,y) = 0 = P(x,y)\,(x-y)$$

Por lo tanto, tenemos el complejo

$$R_* : \ldots \xrightarrow{(x-y)} R_2 \xrightarrow{P(x,y)} R_1 \xrightarrow{(x-y)} R_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

donde, para cada $i > 0$, los morfismos son las multiplicaciones por $(x-y)$ y $P(x,y)$ alternadamente, mientras que

$$\varepsilon : A \otimes A \longrightarrow A$$

es la proyección canónica.

<u>5.1 LEMA.</u> <u>El complejo</u> R_* <u>es exacto .</u>

Demostración. Sea $f \in \ker \varepsilon \subseteq R_0$. Podemos ver a f como el polinomio

$$f(x,y) \in K[x,y]/(x^{m+1},y^{m+1})$$

de manera que

$$\varepsilon(f(x,y)) = f(x,x) = 0 \qquad (\text{ en } A).$$

Por lo tanto, existe algún $g \in K[x]$ tal que

$$f(x,x) = x^{m+1}g(x) .$$

Entonces

$$f(x,y) - x^{m+1}g(x) = f(x,y) - f(x,x)$$

es divisible entre $(x-y)$. En consecuencia, $f \in \operatorname{im}(x-y)$.

Consideremos ahora el caso en que $f \in \ker(x-y)$, es decir

$$(x-y)f(x,y) = 0 \qquad \text{en } R_1 .$$

Entonces, existen $g,h \in K[x,y]$ tales que

$$(x-y)\ f(x,y) = x^{m+1}g(x,y) + y^{m+1}h(x,y) .$$

Por lo tanto,

$$x^{m+1}\ g(x,x) + x^{m+1}h(x,x) = (x-x)f(x,x) = 0 \quad \text{en} \quad K[x].$$

Como $K[x]$ es dominio entero, esto implica que

$$g(x,x) + h(x,x) = 0 .$$

de manera que existe algún $h' \in K[x,y]$ tal que

$$g(x,y) + h(x,y) = (x-y)\ h'(x,y)$$

y obtenemos las siguientes igualdades :

$$\begin{aligned}(x-y)f(x,y) &= x^{m+1}g(x,y) + y^{m+1}h(x,y) - y^{m+1}g(x,y) - y^{m+1}g(x,y)\\ &= (\ g(x,y) + h(x,y))y^{m+1} + (x^{m+1} - y^{m+1})g(x,y)\\ &= ((x-y)h'(x,y))y^{m+1} + (x-y)P(x,y)g(x,y) .\end{aligned}$$

Entonces

$$f(x,y) = h'(x,y)y^{m+1} + P(x,y)g(x,y)$$

pero $y^{m+1} = 0$ en R_1, por lo que

$$f(x,y) \in \operatorname{im} P(x,y) .$$

De manera similar se verifica que $\ker P(x,y) \subset \operatorname{im}(x-y)$.

///

Aplicando el producto tensorial a la resolución proyectiva R_* de A, obtenemos el complejo

$$A \otimes_{A^e} R_{*+1} : \quad \cdots \xrightarrow{(m+1)z^m} A \xrightarrow{0} A \xrightarrow{(m+1)z^m} A \xrightarrow{0} A$$

debido a que $A \otimes_{A^e} R_i \cong A$ y a que $P(z,z) = (m+1)z^m$.

Si $f(z) = k_o + k_1 z + \ldots + k_m z^m \in A$, entonces

$$(m+1)z^m f(z) = (m+1)k_o z^m$$

y, como K tiene característica cero,

$$\operatorname{im}((m+1)z^m) = (z^m) = \text{ideal generado por } z^m$$

$$\ker((m+1)z^m) = A / K .$$

Considerando la homología respectiva, tenemos entonces que

<u>5.2 PROPOSICION.</u> <u>Sea</u> $A = K[z]/z^{m+1}$. <u>Si K es un campo de característica cero, entonces</u> $H_n(A,A)$ <u>es un K-espacio vectorial tal que</u>

$$\dim H_n(A,A) = \begin{cases} m+1 & \text{si } n = 0 \\ m & \text{si } n > 0 \end{cases} .$$

Como $A = K[z]/z^{m+1}$ es una K-álgebra aumentada con aumentación $\sigma : A \longrightarrow K$ dada por

$$\sigma(k_o + k_1 z + \ldots + k_m z^m) = k_o$$

entonces el ideal de aumentación I es el ideal generado por z, $I = (z)$. Como I es nilpotente, tenemos que

$$A = \bigoplus_{w \geq 0} A_w$$

donde $A_w = I^w / I^{w+1} = \{\text{monomios en A de grado } w\}$ (véase 4.9,4.10) . Asimismo, tenemos subespacios

$$F_w^{n+1} = \bigoplus_{w_o+\ldots+w_n=w} I^{w_o} \otimes \ldots \otimes I^{w_n} \subseteq A^{n+1}$$

En este caso, la función deg(_) de 4.8 corresponde al peso w de cada monomio, es decir que

$$\deg(z^w) = w$$

mientras que, en A^{n+1},

$$\deg(z^{w_o}, \ldots, z^{w_n}) = \sum_{j=0}^{n} w_j .$$

Por lo tanto, cada valor w determina un subespacio

$$A_w^{n+1} = F_w^{n+1} / F_{w+1}^{n+1} = \bigoplus_{w_o+\ldots+w_n=w} A_{w_o} \otimes \ldots \otimes A_{w_n}$$

y, por 4.8 , concluimos que $HC_n(A)$ está graduada en función del peso w , es decir que

$$HC_n(A) = \bigoplus_{w \geq 0} HC_{n,w}(A) .$$

Asimismo, en virtud de 4.11, tenemos una derivación $D' : A \longrightarrow A$ tal que $D'(z^w) = w(z^w)$.

Por 4.12 , $L_{D'}$ actúa sobre $HC_{n,w}(A)$ como la multiplicación por w . Finalmente, por 4.13 , tenemos que

<u>5.3 LEMA. Si $A = K[z]/z^{m+1}$, (K un campo de característica cero cero) y $\overline{HC}_*(A)$ es la homología cíclica reducida definida en 3.6 , entonces</u>

$$S = 0 : \overline{HC}_*(A) \longrightarrow \overline{HC}_{*-2}(A)$$

<u>donde S es el operador de periodicidad definido en 3.7 .</u>

Demostración. Por 3.8 , $\overline{HC}_*(A) = HC_*(A) / HC_*(K)$. Como $\deg(k) = 0$ para todo elemento $k \in K$, entonces podemos identificar a $HC_*(K)$ con $HC_{*,0}(A)$. Por otra parte, cuando $w > 0$, el operador S es el operador nulo (véase 4.13), por lo tanto, $S = 0$ en $\overline{HC}_n(A)$.

///

Entonces, aplicando 5.3 a la sucesión exacta larga de 3.7 , tenemos sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow HC_{n-1}(A) \longrightarrow H_n(A,A) \longrightarrow HC_n(A) \longrightarrow 0 \qquad (**) .$$

Para $n = 1$, vemos que $HC_o(A) = A$, (2.5), y

$$\overline{HC}_o(A) = A / HC_o(K) = A / K$$

(véase 1.11). Asimismo, por 3.4, y 5.2 ,

$$\overline{H}_1(A,A) = H_1(A,A) = A / (z^m)$$

de manera que , para $n = 1$, la sucesión exacta corta (**) queda

$$0 \longrightarrow A/K \longrightarrow A/(z^m) \longrightarrow \overline{HC}_1(A) \longrightarrow 0 .$$

Pero

$$\dim (A/K) = \dim (A/(z^m)) = m$$

entonces $\overline{HC}_1(A) = 0$.

Para $n = 2$,

$$\overline{H}_2(A,A) = H_2(A,A) = A / K \qquad (3.4 \text{ y } 5.2)$$

Como $\overline{HC}_1(A) = 0$, entonces la sucesión (**) es, para $n = 2$,

$$0 \longrightarrow \overline{H}_2(A,A) \longrightarrow \overline{HC}_2(A) \longrightarrow 0,$$

y, por lo tanto, $\overline{HC}_2(A) = A / K$.

Para $n = 3$ tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \overline{HC}_2(A) \longrightarrow \overline{H}_3(A,A) \longrightarrow \overline{HC}_3(A) \longrightarrow 0$$

donde

$$\overline{H}_3(A,A) = H_3(A,A) \qquad (3.4)$$

$$\overline{HC}_2(A) = A / K$$

$$\dim (H_3(A,A)) = m \qquad (5.2)$$

Como $\dim (A/K) = m$, entonces necesariamente $\overline{HC}_3(A) = 0$.

Continuando con este proceso, hemos demostrado que

<u>5.4 LEMA.</u>

$$\dim \overline{HC}_n(A) = \begin{cases} m & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar}. \end{cases}$$

5.5 Observación. Si I es el ideal de aumentación de $A = K[z] / z^{m+1}$, entonces

$$\dim HC_n(I) = \begin{cases} m & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

por 3.9 y 5.4.

5.6 PROPOSICION. Si K es un campo de característica cero y $A = K[z]/z^{m+1}$, entonces $HC_n(A)$ es un espacio vectorial tal que

$$\dim HC_n(A) = \begin{cases} m+1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Aplicando 1.17 y 5.4 a 3.8. ///

5.7 LEMA. Sean A_1, A_2 K-álgebras. Sea $A = A_1 \oplus A_2$. Entonces

$$HC_n(A) = HC_n(A_1) \oplus HC_n(A_2).$$

Demostración. Por el teorema de aditividad de $H_n(A,A)$ ([CE,p.173]), tenemos que

$$H_n(A,A) = H_n(A_1,A_1) \oplus H_n(A_2,A_2)$$

Aplicando el lema del cinco ([Ro,p.176]) a la sucesión exacta larga de 2.12, obtenemos de manera inductiva el resultado. ///

5.8 PROPOSICION. Sea K un campo de característica cero y algebraicamente cerrado. Sea $f \in K[x]$ un polinomio de grado r. Entonces, si $A = K[x]/(f)$, tenemos que

$$\dim HC_n(A) = \begin{cases} r & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Como K es algebraicamente cerrado, existen α_i en K tales que

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{r_1} (x - \alpha_2)^{r_2} \ldots (x - \alpha_q)^{r_q}$$

donde

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_q = r \, .$$

Entonces,

$$K[x]/(f) \cong K[x]/(x-\alpha_1)^{r_1} \oplus \ldots \oplus K[x]/(x-\alpha_q)^{r_q}$$

De esta manera, aplicando 5.6, se obtiene el resultado .

///

I.6 Homología cíclica relativa.

En esta sección definiremos, para una K-álgebra A (K conmutativo) y un ideal bilateral I de A , los grupos de homología cíclica relativa $HC_n(A,I)$.

6.1 PROPOSICION. El epimorfismo $f : A \longrightarrow A/I$ induce un morfismo suprayectivo de complejos

$$f_* : \mathrm{Tot}_*(B_{**}(A)) \longrightarrow \mathrm{Tot}_*(B_{**}(A/I)) .$$

Demostración. $f : A \to A/I$ se extiende a A^{n+1} mediante

$$f(a_o, \dots, a_n) = (f(a_o), \dots, f(a_n)) .$$

Entonces

$$\begin{aligned} f\,\partial_i(a_o,\dots,a_n) &= f(a_o,\dots,a_i a_{i+1},\dots,a_n) \\ &= (f(a_o),\dots,f(a_i a_{i+1}),\dots,f(a_n)) \\ &= (f(a_o),\dots,f(a_i)f(a_{i+1}),\dots,f(a_n)) \\ &= \partial_i f(a_o,\dots,a_n) . \end{aligned}$$

Por lo tanto, $bf = fb$.

Asimismo, es inmediato verificar que f conmuta con los operadores s, t ; en consecuencia , $B f = f B$. Esto significa que f induce un morfismo de bicomplejos

$$f : B_{**}(A) \longrightarrow B_{**}(A/I)$$

que, a su vez, induce el morfismo de complejos totales asociados

$$f_* : Tot_*(B_{**}(A)) \longrightarrow Tot_*(B_{**}(A/I))$$

(véase [CE,p.61]). ///

<u>6.2 DEFINICION.</u> Sea $Tot_*(B_{**}(A,I)) = \ker f_*$. Definimos la <u>homología cíclica de A relativa a I</u> , $HC_n(A,I)$, como la homología del complejo $Tot_*(B_{**}(A,I))$, es decir

$$HC_n(A,I) = H_n(\ker f_*) .$$

6.3 Observación. Cuando K tiene característica cero , la definición anterior coincide con la definición de $HC_n(A,I)$ dada en [KaL] .

<u>6.4 PROPOSICION.</u> $Tot_0(B_{**}(A,I)) = I$

$$Tot_1(B_{**}(A,I)) = A \otimes I \oplus I \otimes A .$$

Demostración. Como $I = \ker f$, entonces

$$B_{0,0}(A,I) = \ker(B_{0,0}(A) \longrightarrow B_{0,0}(A/I)) = I$$

y, por 2.10 , $\quad Tot_0(B_{**}(A,I)) = I.$

De manera similar, tenemos que

$$B_{0,1}(A,I) = \ker(f : A^2 \longrightarrow (A/I)^2)$$

$$= A \otimes I \oplus I \otimes A \;. \qquad ///$$

<u>6.5 PROPOSICION.</u> $\quad HC_0(A,I) = I / [A,I]$.

Demostración. Considerando 6.4 , se procede de manera análoga a 2.5 . ///

6.6 Observación. Los elementos de $B_{p,q}(A,I)$ son elementos de $B_{p,q}(A)$ de la forma

$$(a_0,\ldots,a_n) , \quad a_i \in I \text{ para alguna } i , \; 0 \leq i \leq n.$$

<u>6.7 PROPOSICION.</u> <u>Si</u> A <u>es conmutativo, entonces</u> $HC_1(A,I)$ <u>es el cociente del subgrupo</u> $A \otimes I \oplus I \otimes A$ <u>de</u> A^2 ; <u>módulo las relaciones</u>

a) $\quad a \otimes b + b \otimes a = 0 \qquad (a \text{ ó } b \text{ en } I)$

b) $\quad ab \otimes c - a \otimes bc + ca \otimes b = 0 \qquad (a \text{ ó } b \text{ ó } c \text{ en } I).$

Demostración. Consideremos el complejo

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tot}_2(B_{**}(A,I)) \xrightarrow{d_2} \mathrm{Tot}_1(B_{**}(A,I)) \xrightarrow{d_1 = b} I$$

Como A es conmutativo, en virtud de 6.4 , tenemos que

$$b\ (\mathrm{Tot}_1(B_{**}(A,I))) = 0$$

de manera que

$$A \otimes I \oplus I \otimes A = \ker d_1 .$$

Por otra parte, $d_2 = b + B$ y

$$b\ (a_0, a_1, a_2) = (a_0 a_1, a_2) - (a_0, a_1 a_2) + (a_2 a_0, a_1)$$

$$B\ (a_0) = (1 - t)\ s\ (a_0) = (1, a_0) + (a_0, 1)$$

de donde se siguen las relaciones (a) y (b) . ///

<u>6.8 PROPOSICION.</u> <u>Existe una sucesión exacta larga</u>

$$\cdots \longrightarrow HC_2(A/I) \longrightarrow HC_1(A,I) \longrightarrow HC_1(A) \longrightarrow HC_1(A/I) .$$

Demostración. Considérese la sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow \ker f_* \longrightarrow \mathrm{Tot}_*(B_{**}(A)) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Tot}_*(B_{**}(A/I)) \longrightarrow 0$$

y tómese la homología. ///

6.9 Observación. Algunos autores ([[G 2],[G 3],[St]) definen $HC_*(A,I)$ con una relación de subíndices diferente, de manera que la sucesión exacta de 6.8 aparece como

$$\ldots \longrightarrow HC_2(A/I) \longrightarrow HC_2(A,I) \rightarrow HC_1(A) \longrightarrow HC_1(A/I) \; .$$

Nuestra definición coincide con las de [KaL],[L 1] y [W 2] .

En el caso particular en que A es una K-álgebra aumentada con ideal de aumentación I , entonces $A = K \oplus I$ y la sucesión de 6.8 se escinde (a través de la inclusión $K \to A$) . En consecuencia tenemos que

<u>6.10 PROPOSICION.</u> <u>Si</u> A <u>es una K-álgebra aumentada con ideal de aumentación I, entonces</u>

$$HC_*(A) = HC_*(K) \oplus HC_*(A,I) \; .$$

<u>6.11 COROLARIO.</u> <u>Si</u> $A = K[x] / x^{m+1}$ <u>es el anillo de polinomios truncados (sobre un campo de característica cero), entonces</u>

$$\dim_Q HC_n(A,I) = \begin{cases} m & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Compárese 3.8 y 3.9 con 6.10 . Aplicando 5.5 se obtiene el resultado. ///

6.12 Observación. En virtud de 6.10 , cuando $A = K \oplus I$ es una K-álgebra aumentada

$$\overline{HC}_*(A) = HC_*(K \oplus I, I) .$$

6.13 Observación. Si comparamos 4.10 con 6.6 , tenemos que

$$HC_n(A, I) = HC_n(F_1) .$$

CAPITULO II

K-TEORIA ALGEBRAICA

II.1 $K_*(A)$.

Antes de abordar la relación entre la homología cíclica y la K-teoría algebraica , veamos algunas de las definiciones y resultados más importantes de ésta última . Para definir los grupos superiores de K-teoría, necesitamos de la construcción de Quillen :

1.1 TEOREMA . (Construcción "más" de Quillen) . Sea X un complejo celular conexo (con punto base), y sea N un subgrupo normal perfecto de $\pi_1(X)$. Entonces existe un espacio X^+ (dependiente de N) y una transformación $i : X \to X^+$ tal que

i) $i_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(X^+)$ es la suprayección

$$\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(X)/N .$$

ii) Para todo $\pi_1(X)/N$ - módulo L , existe un isomorfismo

$$i_* : H_*(X, i^{-1}(L)) \longrightarrow H_*(X^+, L)$$

donde $i^{-1}(L)$ es L considerado como $\pi_1(X)$ - módulo.

1.2 Observación. Un grupo G se llama <u>perfecto</u> si es igual a su subgrupo conmutador $[G,G]$, es decir que

$$G_{ab} = G/[G,G] = 0 .$$

Nos interesa de manera particular la aplicación del teorema anterior al caso en que A es un anillo, $GL(A)$ es el grupo general lineal infinito sobre A y $E(A)$ es el grupo elemental (véase [Si,p.109]). Tenemos entonces que

<u>1.3 LEMA.</u> (<u>Whitehead</u>). <u>Los grupos</u> $E_n(A)$ ($n \geqslant 3$) y $E(A)$ <u>son perfectos. Además,</u>

$$E(A) = [GL(A), GL(A)] .$$

Demostración. Véase [Si,p.111]). ///

Consideremos el espacio clasificante $BGL(A)$ del grupo lineal general $GL(A)$. El lema de Whitehead nos permite aplicar el teorema 1.1 al espacio $BGL(A)$, puesto que

$$\pi_1(BGL(A)) = GL(A)$$

y $N = E(A)$ es subgrupo normal perfecto de $GL(A)$.

1.4 COROLARIO. Existe un espacio $BGL(A)^+$ (que está asociado a $E(A)$) y una transformación

$$i : BGL(A) \longrightarrow BGL(A)^+$$

tal que

i) $\pi_1(BGL(A)^+) = GL(A) / E(A)$.

ii) Para todo ($GL(A)/E(A)$) -módulo L , existe un isomorfismo

$$i_* : H_*(BGL(A) , i^{-1}(L)) \longrightarrow H_*(BGL(A)^+ , L).$$

Demostración. Basta aplicar 1.1 al caso referido en 1.3 . ///

1.5 DEFINICION. Los K- grupos algebraicos de A se definen como

$$K_n(A) = \pi_n(BGL(A)^+) \qquad \text{si } n \geqslant 1 .$$

1.6 COROLARIO. $K_1(A) = GL(A) / E(A) = GL(A)_{ab}$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de 1.4 y 1.5 . ///

En el caso en que A es conmutativo, podemos considerar al determinante de una matriz como un homomorfismo

$$\det : GL(A) \longrightarrow A^* = \{\text{unidades de } A\} .$$

Como las matrices elementales tienen determinante trivial, podemos considerar el homomorfismo inducido

$$\det : K_1(A) = (GL(A) / E(A)) \longrightarrow A^* = GL_1(A)$$

que es suprayectivo y además de escinde ([Si,p.113]).
Por lo tanto,

$$K_1(A) = A^* \oplus \ker(\det: K_1(A) \longrightarrow A^*) .$$

Si definimos el <u>grupo especial de Whitehead</u> $SK_1(A)$ como

$$SK_1(A) = \ker(\det : K_1(A) \longrightarrow A^*)$$

entonces hemos probado que

<u>1.7 PROPOSICION.</u> <u>Para todo anillo conmutativo A ,</u>

$$K_1(A) = A^* \oplus SK_1(A) .$$

1.8 Observación. ([L 4]) . En muchos anillos (dominios enteros , anillos locales, anillos conmutativos finitos, campos, anillos de enteros en un campo númerico), $SK_1(A)$ es trivial, de manera que

$$K_1(A) = A^* .$$

Si ahora aplicamos el teorema 1.1 al espacio clasificante $BE(A)$, obtenemos un espacio $BE(A)^+$ tal que

$$H_2(BE(A) , \mathbb{Z}) \cong H_2(BE(A)^+ , \mathbb{Z})$$

(por 1.1.(ii)). Por otra parte, el teorema de isomorfismo de Hurewicz ([Ma,p.326]) establece que

$$H_2(BE(A)^+ , \mathbb{Z}) \cong \pi_2(BE(A)^+) .$$

Pero $BE(A)^+$ es la cubierta universal de $BGL(A)^+$, de modo que

$$\pi_2 (BE(A)^+) = \pi_2(BGL(A)^+)$$

Como, por definición,

$$K_2(A) = \pi_2(BGL(A)^+)$$

hemos probado que

<u>1.9 PROPOSICION.</u> $K_2(A) = H_2(E(A) , \mathbb{Z})$.

$K_2(A)$ puede definirse también de la siguiente manera :

<u>1.10 DEFINICION.</u> El <u>grupo de Steinberg de A</u> , St(A) , es el grupo (no abeliano) con la siguiente presentación :

generadores : $x_{ij}(a)$ $i \neq j$, $a \in A$.

relaciones: $x_{ij}(a) x_{ij}(b) = x_{ij}(a + b)$

$$[x_{ij}(a) , x_{kr}(b)] = \begin{cases} 1 & i \neq 1 , j \neq k \\ x_{ir}(ab) & i \neq r , j = k . \end{cases}$$

Obsérvese cómo, si interpretamos al elemento $X_{ij}(a) \in St(A)$ como la matriz elemental $e_{ij}(a) \in E(A)$, entonces las relaciones que definen al grupo $St(A)$ se satisfacen, de tal manera que tenemos un epimorfismo de grupos

$$\phi : St(A) \longrightarrow E(A)$$

Aunque $E(A)$ satisface las relaciones de 1.10 , éstas no bastan para definir a $E(A)$, por lo que ϕ no necesariamente es un isomorfismo, y $\ker \phi$ puede interpretarse como la medida de lo que le falta a las relaciones de Steinberg para ser un conjunto de relaciones que defina a $E(A)$.

<u>1.11 DEFINICION.</u> $K_2(A) = \ker(\phi : St(A) \longrightarrow E(A))$.

Tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K_2(A) \longrightarrow St(A) \xrightarrow{\phi} E(A) \longrightarrow 0$$

que, además, es una extensión central universal de $E(A)$, de manera que las definiciones 1.8 y 1.10 coinciden ([Ro,p.279]).

Por último, si consideramos los espacios clasificantes $BK_2(A)$, $BSt(A)$ y $BE(A)$, entonces la sucesión exacta corta anterior induce una fibración

$$BK_2(A) \longrightarrow BSt(A) \longrightarrow BE(A)$$

a partir de la cual, aplicando la construcción de Quillen (1.1). obtenemos la fibración

$$BK_2(A)^+ \longrightarrow BSt(A)^+ \longrightarrow BE(A)^+$$

Esta fibración induce una sucesión larga de homotopía

$$\cdots \to \pi_2(BE(A)^+) \longrightarrow \pi_1(BK_2(A)^+) \to \pi_1(BSt(A)^+) \longrightarrow \pi_1(BE(A)^+)$$

Como $BK_2(A)^+$ es un espacio de Eilenberg-MacLane, entonces

$$\pi_i(BK_2(A)^+) = 0 \quad \text{para} \quad i > 1 .$$

Por lo tanto,

$$\pi_j(BSt(A)^+) \cong \pi_j(BE(A)^+) \qquad j \geqslant 3.$$

En particular,

$$\pi_3(BSt(A)^+) \cong \pi_3(BE(A)^+).$$

Por otra parte, aplicando 1.1.(ii) y el isomorfismo de Hurewicz tenemos que

$$H_3(BSt(A)) \cong H_3(BSt(A)^+) \cong \pi_3(BSt(A)^+) .$$

Finalmente, como $\quad H_3(\, BSt(\, A\,)\,) \;=\; H_3(\, St(\, A\,)\,,\, \mathbb{Z}\,)\,,$

hemos probado que

<u>1.12 PROPOSICION.</u> $\quad K_3(\, A\,) \;=\; H_3(\, St(\, A\,)\,,\, \mathbb{Z}\,)\,.$

II.2 K- Teoría algebraica relativa.

2.1 DEFINICION. Dado un homomorfismo de anillos $f : A \longrightarrow A'$, definimos los grupos de K- teoría relativa a f, $K_i(f)$ como los grupos de homotopía de la fibra homotópica de la aplicación continua $BGL(A)^+ \longrightarrow BGL(A')^+$, es decir

$$K_n(f) = \pi_n(\text{ fibra } (BGL(A)^+ \longrightarrow BGL(A')^+))$$

(véase [L 1, p.200],[L 4, p.32]).

2.2 PROPOSICION. Sea $f : A \longrightarrow A'$ un epimorfismo de anillos. Existe una sucesión exacta larga de grupos abelianos

$$\ldots \longrightarrow K_n(f) \longrightarrow K_n(A) \longrightarrow K_n(A') \longrightarrow K_{n-1}(f) \longrightarrow \ldots$$

([L 1, p. 200]).

Demostración. Considérese la fibración

$$\text{fibra}(f^+) \longrightarrow BGL(A)^+ \xrightarrow{f^+} BGL(A')^+$$

La sucesión larga de homotopía asociada es

$$\ldots \longrightarrow \pi_1(\text{ fibra}(f^+)) \longrightarrow \pi_1(BGL(A)^+) \longrightarrow \pi_1(BGL(A')^+)$$

es decir que, aplicando las definiciones 1.5 y 2.1, tenemos la sucesión exacta larga

$$\ldots \longrightarrow K_2(A) \longrightarrow K_2(A') \rightarrow K_1(f) \longrightarrow K_1(A) \rightarrow K_1(A') .$$

///

2.3 Observación. Algunos autores ([G 2], [G 3], [St]) definen al grupo relativo con una correspondencia de índices diferente a saber,

$$K_n(f) = \pi_{n-1}(\text{ fibra } (BGL(A)^+ \longrightarrow BGL(A')^+)) .$$

2.4 Notación. En el caso particular en que I es un ideal bilateral del anillo conmutativo A, si consideramos el epimorfismo

$$f : A \longrightarrow A/I$$

entonces denotaremos a $K_n(f)$ como $K_n(A,I)$.

A continuación citaremos dos resultados que necesitaremos posteriormente.

<u>2.5 LEMA. ([Ba])</u> <u>Si</u> I <u>es un ideal nilpotente del anillo</u> A , <u>entonces el morfismo</u>

$$K_1(A) \longrightarrow K_1(A/I)$$

<u>es suprayectivo.</u> <u>Además, cuando A es conmutativo, el morfismo natural</u>

$$(1+I)^* \longrightarrow K_1(A,I)$$

<u>es un isomorfismo.</u>

<u>2.6 LEMA. ([RG,p.279])</u> <u>Sea</u> A <u>una K-álgebra aumentada conmutativa y sea</u> I <u>el ideal de aumentación</u> . <u>Si</u> I <u>es nilpotente, entonces</u>

$$K_2(A,I) = \ker (K_2(A) \longrightarrow K_2(A/I))$$

<u>es un grupo abeliano que admite la siguiente presentación, usando los símbolos de Dennis-Stein</u> $\langle \_,\_ \rangle$:

generadores: $\langle a,b \rangle$ $\quad a,b \in A$, $a \in I$ ó $b \in I$.

relaciones:

a) $\langle a,b \rangle \langle -b,-a \rangle = 1$

b) $\langle a,b \rangle \langle a',b \rangle = \langle a + a - aba' , b \rangle$

c) $\langle a , bc \rangle = \langle ab , c \rangle \langle ac , b \rangle$

(véase [Ke,p.174]).

2.7 Observaciones. En [MS] se demuestra que en 2.6.(c) es suficiente considerar el caso en que alguno de los elementos a, b ó c está en I. La relación 2.6.(b) tiene su origen en el producto (en A)

$$(1 - ab)(1 - a'b) = (1 - (a + a' - aba')\, b) .$$

Por último, $K_1(A,I)$ es a su vez el grupo abeliano definido mediente la presentación con generadores $\langle a \rangle$ ($a \in I$), y relaciones

$$\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle a + b - ab \rangle$$

donde $\langle a \rangle$ corresponde al elemento $(1 - a) \in 1 + I$. (véase [Sti, p.413]) .

<u>2.8 PROPOSICION.</u> <u>Si</u> K <u>es un anillo conmutativo y</u> $A = K[x] / x^{m+1}$, <u>entonces</u>

$$K_n(A) = K_n(K) \oplus \overline{K}_n(A)$$

<u>donde</u> $\overline{K}_n(A) = \operatorname{coker}(K_n(K) \longrightarrow K_n(A))$.

Demostración. La inclusión $K \longrightarrow A$ se escinde a través de la aumentación $\varepsilon : A \rightarrow K$. En consecuencia, $K_n(K)$ es un sumando directo de $K_n(A)$. ///

<u>2.9 COROLARIO.</u> <u>Si</u> $A = K[x] / x^{m+1}$ <u>(como en 2.8) , entonces</u>

$$K_n(A) = K_n(K) \oplus K_n(A, I) .$$

Demostración. Considérese la sucesión exacta larga de 2.2, tomando en cuenta que la aumentación se escinde . ///

II.3 Aplicación de la homología cíclica a la K-teoría.

En esta sección veremos cómo se relaciona la homología cíclica con la K-teoría a través de los resultados de Goodwillie ([G 3]) y de Staffeldt ([St]) . En particular, mostraremos cómo los cálculos efectuados en I.5 pueden aplicarse en el cálculo de la K-teoría del anillo de polinomios truncados $Z[x] / x^{m+1}$.

Consideraremos primero las siguientes definiciones y resultados (véase [Le,p.208]) :

3.1 DEFINICION. Un campo de números F , es una extensión finita del campo de los numeros racionales Q . Denotaremos por $[F : Q]$ al grado de la extensión .

3.2 DEFINICION. Sea F un campo de números . Un elemento de F es un entero algebraico si es raíz de un polinomio mónico con coeficientes en Z .

3.3 PROPOSICION. El conjunto de enteros algebraicos en F (denotado $\mathcal{O}_F$) es un dominio de Dedekind con campo cociente F .

3.4 PROPOSICION. Sea R un dominio de Dedekind. Todo ideal en R es finitamente generado y proyectivo sobre R. Asimismo, todo R-módulo finitamente generado y proyectivo es isomorfo a una suma directa de ideales.

3.5 Observación. Si $\mathcal{O}_F$ es el anillo de enteros algebraicos en una extensión F de Q, entonces $Z \subset \mathcal{O}_F$, por lo que $\mathcal{O}_F$ es un Z-módulo. En particular, si $F = Q$, entonces $\mathcal{O}_F = Z$. Es decir que, en el campo de los números racionales Q, los únicos enteros algebraicos son los racionales enteros Z.

El siguiente resultado fué probado por Staffeldt ([St]) para cualquier $\mathcal{O}_F$ - álgebra aumentada A (finitamente generada y proyectiva como $\mathcal{O}_F$ - módulo) con ideal de aumentación nilpotente.

3.6 TEOREMA. Sean $\mathcal{O}_F$, F como en 3.1 y 3.2. Sea $A = \mathcal{O}_F[x] / x^{m+1}$ la $\mathcal{O}_F$- álgebra de polinomios truncados con ideal de aumentación I_A. Entonces

$$K_n(A) \otimes Q = K_n(\mathcal{O}_F) \otimes Q \oplus V_n$$

$(n \geq 1)$, donde V_n es un Q - espacio vectorial tal que

$$\dim V_n = [F : Q] (\dim_F HC_{n-1}(F \underset{\mathcal{O}_F}{\otimes} I_A).$$

Veamos cómo los resultados de la sección I.5 junto con el teorema anterior permiten realizar algunos cálculos de la K-teoría racionalizada de A .

Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow I_A \longrightarrow A \longrightarrow \mathcal{O}_F \longrightarrow 0$$

($\mathcal{O}_F = A / I_A$) . Como $\mathcal{O}_F$ es subanillo de F , podemos aplicar el funtor de cambio de anillos $F \underset{\mathcal{O}_F}{\otimes} \_$, y obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to F \underset{\mathcal{O}_F}{\otimes} I_A \to F \underset{\mathcal{O}_F}{\otimes} A \to F \to 0$$

de manera que $A' = F \underset{\mathcal{O}_F}{\otimes} A$ es una F-álgebra aumentada con ideal de aumentación $I' = F \underset{\mathcal{O}_F}{\otimes} I_A$. Además , como I_A es nilpotente, I' es nilpotente . Por otra parte ,

$$A' = F \underset{\mathcal{O}_F}{\otimes} A \cong F[x] / x^{m+1}$$

(véase [MB,p.331],[Ro,p.16,118]) , de manera que podemos aplicar los resultados de I.5 a la F-álgebra A' . Tenemos entonces que

<u>3.7 LEMA</u> ,

$$\dim_F HC_n(F \underset{\mathcal{O}_F}{\otimes} I_A) = \begin{cases} m & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar .} \end{cases}$$

Demostración. Como $I' = F \underset{\mathcal{O}_F}{\otimes} I_A$ es el ideal de aumentación de de A', basta aplicar 5.5 .

///

3.8 COROLARIO. Si $A = \mathcal{O}_F[x] / x^{m+1}$ (como en 3.6) , entonces

$$K_n(A) \otimes Q = K_n(\mathcal{O}_F) \otimes Q \oplus V_n' \quad (n \geq 1)$$

donde V_n es el espacio vectorial racional tal que

$$\dim V_n = \begin{cases} m [F : Q] & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par .} \end{cases}$$

Demostración. Aplíquese 3.7 a 3.6 . ///

3.9 COROLARIO. Si $A = Z[x] / x^{m+1}$, entonces

$$K_n(A) \otimes Q = K_n(Z) \otimes Q \oplus HC_{n-1}(Q \underset{Z}{\otimes} I_A) .$$

Demostración. Si $F = Q$, entonces $\mathcal{O}_F = Z$ (véase 3.5).

Aplicando 3.8 obtenemos el resultado , debido a que , en este caso

$$\dim V_n = \dim HC_{n-1}(Q \underset{Z}{\otimes} I_A) .$$ ///

3.10 PROPOSICION. Si $A = \mathbb{Z}[x] / x^{m+1}$, entonces

$$K_{n+1}(A, I_A) \otimes \mathbb{Q} \cong HC_n(A, I_A) \otimes \mathbb{Q} \qquad (n > 0).$$

Demostración. Como A es una $\mathbb{Z}$-álgebra aumentada, entonces, en virtud de II.2.9,

$$K_{n+1}(A, I_A) = K_{n+1}(A) / K_{n+1}(\mathbb{Z}).$$

Por lo tanto,

$$K_{n+1}(A, I_A) \otimes \mathbb{Q} = HC_n(\mathbb{Q} \otimes I_A) \qquad (\text{por } 3.9)$$

$$= HC_n(\mathbb{Q} \otimes A, \mathbb{Q} \otimes I_A)$$

(véase I.3.10 y I.6.12) . Pero

$$HC_n(\mathbb{Q} \otimes A, \mathbb{Q} \otimes I_A) = HC_n(A, I_A) \otimes \mathbb{Q}$$

como $\mathbb{Q}$ - espacios vectoriales . ///

3.11 PROPOSICION. Sea $\mathcal{O}_F[x] / x^2$ (números duales sobre $\mathcal{O}_F$) . Entonces

$$\dim\left(K_n(A, I_A) \otimes \mathbb{Q}\right) = \begin{cases} [F : \mathbb{Q}] & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Demostración. Aplicando 3.8 ($m = 1$) , y considerando que A es una $\mathcal{O}_F$ - álgebra aumentada , es decir que

$$\dim V_n = \dim (K_n(A, I_A) \otimes \mathbb{Q}) . \qquad ///$$

<u>3.12 COROLARIO.</u> <u>Si</u> $A = \mathbb{Z}[x] / x^2$, <u>entonces</u>

$$\dim K_n(A, I_A) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par .} \end{cases}$$

Demostración. $F = \mathbb{Q}$. ///

3.13 Observación. 3.11 y 3.12 son los resultados obtenidos por Soulé ([S]) a través de la homología de álgebras de Lie .

<u>3.14 COROLARIO.</u> $K_2(\mathbb{Z}[x] / x^{m+1}) \otimes \mathbb{Q} = 0$

(<u>Es decir que</u> $K_2(\mathbb{Z}[x] / x^{m+1})$ <u>es de torsión</u>).

Demostración. Se sabe que $K_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ ([LL]) , de manera que

$$K_2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} = 0 .$$

Por otra parte, $HC_1(\mathbb{Q} \otimes I_A) = 0$ (por 3.7) . Aplicando 3.9 se obtiene el resultado . ///

<u>3.15 COROLARIO.</u> $\dim (K_3(\mathbb{Z}[x] / x^{m+1}) \otimes \mathbb{Q}) = m$.

Demostración. Se sabe que $K_3(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{48}$ ([LL,p.16]), de manera que $K_3(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} = 0$. El resultado se obtiene igual que en 3.14 .

///

Un resultado aún más general es el siguiente :

<u>3.16 PROPOSICION,</u> <u>Si</u> $A = \mathbb{Z}[x] / x^{m+1}$, <u>entonces</u>

$$\dim(K_n(A) \otimes \mathbb{Q}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \equiv 0 \pmod 4 \\ m + 1 & \text{si} \quad n \equiv 1 \pmod 4 \\ 0 & \text{si} \quad n \equiv 2 \pmod 4 \\ m & \text{si} \quad n \equiv 3 \pmod 4 . \end{cases}$$

Demostración. Considerando el resultado de Borel ([Bo]) :

$$\dim (K_n(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod 4 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

y aplicando 3.9 y 3.7 . ///

3.17 Observación. 3.14, 3.15 y 3.16 coinciden con los resultados obtenidos en [RG] y [Ai] (pero no proporcionan ninguna información sobre la parte de torsión) .

Goodwillie recientemente generalizó el teorema 3.6 de la siguiente manera:

3.18 TEOREMA. ([G 3]) Sea $f : R \longrightarrow S$ un homomorfismo de anillos simpliciales tal que el homomorfismo inducido $\pi_o R \longrightarrow \pi_o S$ es suprayectivo y con núcleo nilpotente. Entonces

$$K_n(f) \otimes \mathbb{Q} \cong HC_{n-1}(f) \otimes \mathbb{Q} .$$

Tenemos entonces la siguiente generalización de 3.10 :

3.19 PROPOSICION. Sea A un anillo con ideal nilpotente I . Entonces

$$K_n(A,I) \otimes \mathbb{Q} \cong HC_{n-1}(A,I) \otimes \mathbb{Q} .$$

Obsérvese que $HC_*(A,I) \otimes \mathbb{Q} = HC_*(A \otimes \mathbb{Q}, I \otimes \mathbb{Q})$, de tal manera que si A es una $\mathbb{Q}$ - álgebra , entonces

3.20 COROLARIO. Si A es un anillo que contiene a $\mathbb{Q}$ e I es un ideal nilpotente de A , entonces

$$K_n(A,I) \cong HC_{n-1}(A,I) \qquad (n > 0) .$$

Demostración. Como A es una $\mathbb{Q}$ -álgebra, $A \otimes \mathbb{Q} = A$. Por otra parte, cuando A contiene a $\mathbb{Q}$,

$$K_n(A,I) \otimes \mathbb{Q} = K_n(A,I) \qquad ([W 2]) . \ //$$

3.21 COROLARIO. Si A es un anillo que contiene a $\mathbb{Q}$, e I es un ideal nilpotente de A, entonces

$$K_1(A,I) = HC_0(A,I) = I/[A,I]$$

donde $[A,I]$ es el subgrupo generado por los conmutadores

$$[a,x] = ax - xa \qquad a \in A,\ x \in I.$$

Demostración. Apliquése 6.5 a 3.20. ///

3.22 Observación. En [W 2] se proporciona una demostración de 3.21 en donde se construye explícitamente el isomorfismo a través de la función logaritmo. Obsérvese además que las relaciones de I.6.7 corresponden a las de II.2.6 escritas aditivamente, lo cual ejemplifica a 3.20 cuando $n = 2$ (véase [L 4]).

En conclusión, si $A = F[x]/x^{m+1}$ es un anillo de polinomios truncados y $F \supset \mathbb{Q}$, entonces 3.20 proporciona la solución del cálculo de $K_n(A)/K_n(K)$ aplicando I.6.11 :

3.23 PROPOSICION.

$$\dim K_n(F[x]/x^{m+1}, I) = \begin{cases} m & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par}. \end{cases}$$

En el caso en que $A = \mathbb{Z}[x]/x^{m+1}$, los resultados (3.12, 3.14, 3.15, 3.16) que se obtienen a partir de 3.6 no proporcionan información sobre la parte de torsión de $K_n(A,I)$.

A. APENDICE : Sucesiones Espectrales.

Las sucesiones espectrales (o sucesiones de Leray-Koszul) son cierto tipo de sucesiones de módulos de homología. Estas sucesiones surgen siempre que tenemos un complejo junto con una filtración. En particular, todo bicomplejo C_{**} da origen a dos sucesiones espectrales específicas que, bajo ciertas condiciones, resultan útiles para calcular la homología del complejo total asociado $\mathrm{Tot}(C_{**})$. Seguiremos la presentación dada por Massey ([Mas 1], [Ro]) de las sucesiones espectrales en términos de parejas exactas.

A.1 DEFINICION. Una pareja exacta es una pareja de módulos bigraduados D y E junto con morfismos α , β , γ tales que el siguiente triángulo es exacto en cada vértice:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\alpha"] & & D \arrow[dl, "\beta"] \\ & E \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

Denotaremos a esta pareja exacta como $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$.

A.2 Observación. Dada una pareja exacta $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ donde α, β, γ tienen bigrados (a,a'), (b,b'), (c,c') respectivamente, podemos construir, para cada q fija, una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow E_{p-c,q-c'} \xrightarrow{\gamma} D_{p-q} \xrightarrow{\alpha} D_{p+a,q+a'} \xrightarrow{\beta} E_{p+a+b,q+a'+b'} \xrightarrow{\gamma} \cdots$$

Veremos ahora cómo a cada pareja exacta $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ le asociamos otra pareja exacta $(D^2, E^2, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ llamada pareja exacta derivada. Primero definimos el endomorfismo $d^1 : E \longrightarrow E$ como $d^1 = \beta\gamma$. Tenemos que

$$d^1 d^1 = \beta\gamma\beta\gamma = 0 \qquad \text{(pues, por A.1, } \gamma\beta = 0\text{)}.$$

Si β, γ tienen bigrados (b,b'), (c,c') respectivamente, entonces d^1 tiene bigrado $(c+b, c'+b')$ y tenemos el complejo

$$(E, d^1) : \cdots \longrightarrow E_{p-c-b,q-c'-b'} \longrightarrow E_{p,q} \xrightarrow{d^1} E_{p+c+b,q+c'+b'} \longrightarrow \cdots$$

Sea $E^2 = H_*(E, d^1)$. Evidentemente E^2 es un módulo bigraduado, es decir que, si

$$d^1_{p,q} : E_{p,q} \xrightarrow{\gamma} D_{p+c,q+c'} \xrightarrow{\beta} E_{p+c+b,q+c'+b'}$$

entonces

$$E^2_{p,q} = \ker d^1_{p,q} \; / \; \operatorname{im} d^1_{p-c-b,q-c'-b'} \; .$$

Definimos el módulo bigraduado D^2 como

$$D^2 = \operatorname{im} \alpha = \ker \beta \quad .$$

Es decir que, si α tiene bigrado (a,a') , entonces

$$D^2_{p,q} = \alpha(D_{p-a,q-a'}) \subseteq D_{p,q} \quad .$$

Sea $\alpha^2 : D^2 \longrightarrow D^2$ la restricción de α a D^2 , ($\alpha^2 = \alpha |_{D^2}$), de manera que α y α^2 tienen el mismo bigrado.

El homomorfismo $\gamma^2 : E^2 \longrightarrow D^2$ es inducido por γ mediante la relación

$$\gamma^2 [z_{p,q}] = \gamma z_{p,q} \in D_{p+c,p+c'} \quad .$$

(Los corchetes denotan la clase de homología). Obsérvese que γ^2 está bien definido, pues

$$\gamma(\ker d^1) = \gamma(\ker \beta\gamma) \subseteq \ker \beta = D^2$$

y

$$\gamma(\operatorname{im} d^1) = \gamma\beta\gamma(E) = 0 \quad .$$

Además, γ y γ^2 tienen el mismo bigrado .

La definición de β^2 resulta más complicada ; sea $x \in D^2 = \operatorname{im} \alpha$ y escójase un elemento $y \in D$ tal que $\alpha(y) = x$.

Como $\quad d^1(\beta(y)) = \beta\gamma(\beta(y)) = 0$

entonces $\beta(y) \in \ker d^1$. Definimos $\beta^2(\quad)$ como

$$\beta^2(x) = [\ \beta(y)\ ] \in E^2$$

($\beta^2 : D^2 \longrightarrow E^2$). Esta definición es independiente de la elección del elemento $y \in D$. Obsérvese además que β^2 tiene bigrado $(a - b, a' - b')$.

A.3 TEOREMA. Con las definiciones anteriores, $(D^2, E^2, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ es una pareja exacta (llamada pareja exacta derivada), es decir que tenemos el diagrama exacto

$$\begin{tikzcd} D^2 \arrow[rr, "\alpha^2"] & & D^2 \arrow[dl, "\beta^2"] \\ & E^2 \arrow[ul, "\gamma^2"] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sólo queda verificar la exactitud en los vértices. (véase [Ro,p.312]) . ///

Es evidente que la construcción anterior puede aplicarse a $(D^2, E^2, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ para obtener $(D^3, E^3, \alpha^3, \beta^3, \gamma^3)$. De esta manera obtenemos por iteración la pareja exacta $(D^r, E^r, \alpha^r, \beta^r, \gamma^r)$.

<u>A.4 DEFINICION.</u> Una <u>sucesión espectral</u> es una sucesión de módulos bigraduados E^r junto con morfismos $d^r : E^r \longrightarrow E^r$ tales que

a) $E^{r+1} = H(E^r, d^r)$

b) $d^r d^r = 0$.

A.5 Observación. Toda pareja exacta determina una sucesión espectral .

<u>A.6 DEFINICION.</u> Una <u>filtración de un complejo C_*</u> es una familia de subcomplejos $\{F^pC_* \mid p \in Z\}$ tales que

$$F^{p-1}C_* \subset F^pC_* \qquad \text{para toda } p \in Z .$$

<u>A.7 TEOREMA.</u> <u>Toda filtración</u> F^pC_* <u>de un complejo C_* determina una pareja exacta</u> $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ <u>donde</u> α, β y γ <u>tienen bigrados</u> $(1,-1)$, $(0,0)$ y $(-1,0)$ <u>respectivamente</u> .

Demostración. Por brevedad escribimos F^p en lugar de F^pC_*. Para cada p tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow F^{p-1} \longrightarrow F^p \longrightarrow F^p/F^{p-1} \longrightarrow 0\,.$$

Entonces, para cada q fijo, podemos considerar la sucesión exacta larga correspondiente

$$\cdots \longrightarrow D_{p-1,q+1} \xrightarrow{\alpha} D_{p,q} \xrightarrow{\beta} E_{p,q} \xrightarrow{\gamma} D_{p-1,q} \longrightarrow \cdots$$

donde

$$D_{p,q} = H_{p+q}(F^p) \qquad\qquad E_{p,q} = H_{p+q}(F^p/F^{p-1})\,.$$

Y tenemos el triángulo exacto (con los bigrados indicados) :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "(-1{,}1)", "\alpha"'] & & D \arrow[dl, "\beta"', "(0{,}0)"] \\ & E \arrow[ul, "\gamma", "(-1{,}0)"'] & \end{tikzcd}$$

///

A.8 COROLARIO. <u>Toda filtración de un complejo</u> C_* <u>determina una sucesión espectral</u> .

Demostración. Véase A.5 . ///

A.9 Observación . Toda filtración F^pC_* de un complejo C_* determina una filtración del módulo graduado $H_*(C_*)$ de la siguiente manera : si $i_p : F^pC_* \longrightarrow C_*$ es la inclusión entonces tenemos el morfismo inducido

$$H_n(i_p) : H_n(F^pC_*) \longrightarrow H_n(C_*)$$

para cada n. Los submódulos graduados $\operatorname{im} H(i_p)$ forman una filtración de $H_*(C_*)$.

A.10 Observación. Todo complejo C_* es un módulo graduado si olvidamos la diferenciación. Inversamente, todo módulo graduado $M = \{ M_p \mid p \in \mathbb{Z} \}$ puede verse como un complejo

$$M : \quad \cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{d} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

donde la diferenciación d es cero.

<u>A.11 DEFINICION</u>. Una filtración $\{F^pC_*\}$ de un complejo C_* (visto como módulo graduado) está <u>acotada</u> si existen enteros $s = s(n)$, $t = t(n)$ tales que

$$F^sC_n = 0 \qquad y \qquad F^tC_n = C_n .$$

Es decir que, para cada n, tenemos la cadena finita

$$0 = F^sC_n \subset F^{s+1}C_n \subset \dots \subset F^tC_n = C_n \ .$$

<u>A.12 DEFINICION.</u> Dada la sucesión espectral $\{E^r, d^r\}$, definimos el <u>término límite</u> E^∞ , como el módulo bigraduado

$$E^\infty = \bigcap_r \ker d^r \Big/ \bigcup_r \operatorname{im} d^r \ .$$

<u>A.13 DEFINICION.</u> Sea $M = \{M_n\}$ un módulo graduado. Diremos que la sucesión espectral $\{E^r, d^r\}$ <u>converge a M</u> (en cuyo caso escribiremos $E^2_{p,q} \Rightarrow M_n$), si existe alguna filtración acotada $\{F^pM\}$ de M tal que

$$E^\infty_{p,q} \cong F^pM_n \,/\, F^{p-1}M_n$$

para toda p, q , ($p + q = n$) .

<u>A.14 TEOREMA. Sea</u> $\{F^pC_*\}$ <u>una filtración acotada del complejo</u> C_* <u>y sea</u> $\{E^r, d^r\}$ <u>la sucesión espectral que determina</u> C_* (véase A.8). <u>Entonces</u>

$$E^2_{p,q} \Rightarrow H_n(C_*) \ .$$

Demostración. Como C_* está filtrado, entonces $H_*(C_*)$ también está filtrado (véase A.9) . Además, la filtración es en ambos casos acotada. Si calculamos la r-ésima pareja derivada y la sucesión espectral correspondiente, se obtiene que

$$F^pH_{p+q}(C_*) \;/\; F^{p-1}H_{p+q}(C_*) \quad = \quad E^r_{p,q} \;\cong\; E_{p,q}$$

para alguna r suficientemente grande (véase [Ro,p.318]). ///

Sea C_{**} un bicomplejo y sea $Tot_*(C_{**})$ el complejo total asociado a C_{**} (véase [Ro,p.319]).

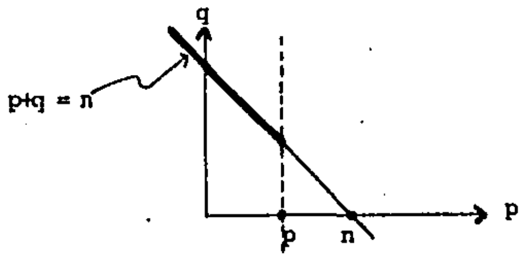
A.15 DEFINICION. La primera filtración ^IF de $Tot_*(C_{**})$ se define mediante

$$(\,^IF^p \; Tot_*(C_{**}) \,)_n \quad = \quad \bigoplus_{i\leq p} C_{i,n-i} \quad .$$

Recordamos que $Tot_n(C_{**}) \; = \; \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}$

es decir que $Tot_n(C_{**})$ consiste de la suma de los elementos de C_{**} que están sobre la recta $p+q = n$. Por lo tanto, $(^IF^p \; Tot_*(C_{**}) \,)_n$ consiste de la suma de los elementos de C_{**}

que están sobre la recta $p+q = n$ y además están a la izquierda de p :



Es decir que ${}^{I}F$ es una filtración por columnas . Similarmente, si filtramos C_{**} por renglones , obtenemos

A.16 DEFINICION. La segunda filtración ${}^{II}F$ de $Tot_*(C_{**})$ se define mediante

$$({}^{II}F^p \, Tot_*(C_{**}))_n = \bigoplus_{j \leq p} C_{n-j,j} \; .$$

A.17 PROPOSICION. Si C_{**} es un bicomplejo del primer cuadrante (es decir, $C_{p,q} = 0$ si $p < 0$ ó $q < 0$) , entonces las filtraciones ${}^{I}F$, ${}^{II}F$ son acotadas.

Demostración..Consideremos $s(n) = -1$ y $t(n) = n$. Es evidente que

$$^{I}F^{(-1)}\,\mathrm{Tot}_n(C_{**}) = 0 \quad , \quad ^{I}F^{n}\,\mathrm{Tot}_n(C_{**}) = \mathrm{Tot}_n(C_{**}) .$$

Y lo mismo se cumple para ^{II}F . ///

A.18 TEOREMA. Sea C_{**} un bicomplejo del primer cuadrante , y sean $\{ ^{I}E^r, d^r \}$ y $\{ ^{II}E^r, f^r \}$ las sucesiones espectrales inducidas por las filtraciones ^{I}F y ^{II}F respectivamente . Entonces

$$^{I}E^2_{p,q} \Rightarrow H_n(\mathrm{Tot}_*(C_{**}))$$

y

$$^{II}E^1_{p,q} \Rightarrow H_n(\mathrm{Tot}_*(C_{**})) .$$

Demostración.. Es consecuencia inmediata de A.14 y A.17 . ///

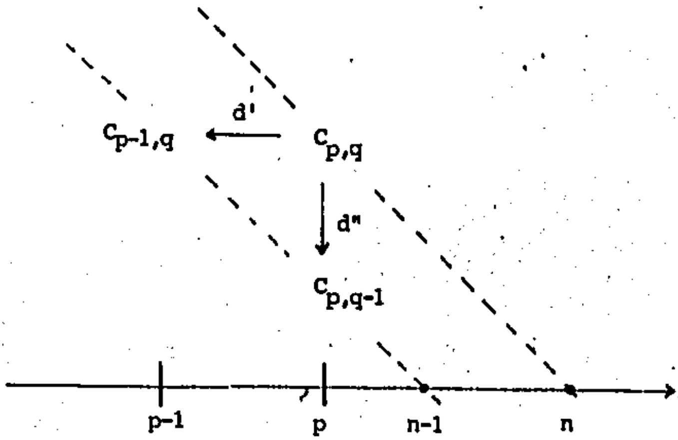
El siguiente lema nos dice que el módulo bigraduado E determinado por la filtración ^{I}F (véase A.7) se obtiene calculando la homología de las columnas de C_{**} .

A.19 LEMA. Sea C_{**} un bicomplejo y sea ${}^{I}F$ la primera filtración de $Tot_*(C_{**})$. Entonces el módulo bigraduado $E = \{E_{p,q}\}$ determinado por ${}^{I}F$ está dado por

$$E_{p,q} = H_q(C_{p,*}, d'')$$

donde $(C_{p,*}, d'')$ es la p-ésima columna de C_{**}.

Demostración. Consideremos el diagrama siguiente



Para cada n, tenemos que

$$({}^{I}F^p)_n = C_{o,n} \oplus C_{1,n-1} \oplus \dots \oplus C_{p,n-p}$$

($C_{p,n-p} = C_{p,q}$, debido a que $p+q = n$).

Entonces, para cada n, $(I_F p / I_F p-1)_n$ es precisamente $C_{p,q}$. Además, el diferencial d en $Tot_*(C_{**})$ es, por definición, la suma de los diferenciales d' y d''. Pero si $d'_{p,q} : C_{p,q} \longrightarrow C_{p-1,q}$ entonces

$$\operatorname{im} d'_{p,q} \subseteq C_{p-1,q} \subset I_F p-1 .$$

Por lo tanto, en $I_F p / I_F p-1$ tenemos que $d' = 0$, de manera que $d = d''$. Esto significa que $I_F p / I_F p-1$ es la columna p- ésima, es decir que

$$I_F p / I_F p-1 : \quad \dots \to C_{p,q} \xrightarrow{d''} C_{p,q-1} \xrightarrow{d''} \dots$$

Pero, por definición

$$E_{p,q} = H_n(I_F p / I_F p-1) \qquad \text{(véase A.7)} .$$

Entonces

$$E_{p,q} = H_q (C_{p,*} , d'')$$
$$= \ker (d''_{p,q} : C_{p,q} \to C_{p,q-1}) / \operatorname{im} d''_{p,q+1} .$$

///

A.20 Observación. En virtud de A.19, podemos representar al módulo bigraduado $E_{p,q}$ con el diagrama

$$E_{p,q} = \begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H_1(C_{0,*}) & & H_1(C_{1,*}) & & H_1(C_{2,*}) & & \cdots \\ \downarrow d'' & & \downarrow d'' & & \downarrow & & \\ H_o(C_{0,*}) & & H_o(C_{1,*}) & & H_o(C_{2,*}) & & \cdots \end{array}$$

El diferencial d' de C_{**} (véase el diagrama de A.19) induce un morfismo

$$d^1 : H_q(C_{p,*}, d'') \longrightarrow H_q(C_{p-1,*}, d'')$$

mediante la relación

$$d^1_{p,q} [z_{p,q}] = [d'_{p,q} z_{p,q}]$$

(los corchetes denotan la clase de homología) . Por lo tanto, en cada renglón q tenemos un complejo

$$\cdots \longrightarrow H_q(C_{p,*}, d'') \xrightarrow{d^1} H_q(C_{p-1,*}, d'') \longrightarrow \cdots$$

Si calculamos la homología de este complejo, obtenemos la primera homología iterada de C_{**} (con respecto a la primera filtración) denotada

$$H'_p H''_q (C_{**}) .$$

Es decir que

$$H'_p H''_q (C_{**}) = H_p (H_q(C_{p,*}, d'') , d^1) .$$

En otras palabras, $H'_p H''_q (C_{**})$ se obtiene considerando primero la homología de la p-ésima columna y después calculando la homología de los renglones .

A.21 TEOREMA. Si C_{**} es un bicomplejo del primer cuadrante, entonces

$${}^{I}E^2_{p,q} = H'_p H''_q (C_{**}) \Rightarrow H_n(Tot_*(C_{**})) .$$

Demostración. Véase [Ro,p.327] . ///

A.22 Observación. Si consideramos la segunda filtración obtenemos un resultado análogo al de A.21, a saber

$${}^{II}E^2_{p,q} = H''_p H'_q (C_{**}) \Rightarrow H_n(Tot_*(C_{**}))$$

donde $H''_p H'_q (C_{**})$ se obtiene considerando primero la homología del p-ésimo renglón y calculando después la homología de las columnas resultantes.

<u>A.23 DEFINICION</u>. Sea C_{**} un bicomplejo del primer cuadrante . Si $\{E^r, d^r\}$ es la sucesión espectral determinada por alguna de las dos filtraciones ${}^{I}F$ ó ${}^{II}F$, entonces diremos que <u>$\{E^r, d^r\}$ se colapsa</u> si

$$E^2_{p,q} = 0 \qquad\qquad \text{para } p \neq 0 .$$

Es decir que , si $\{E^r, d^r\}$ se colapsa, entonces el módulo bigraduado E^2 sólo puede tener *términos* diferentes de cero sobre el eje q .

<u>A.24 PROPOSICION.</u> <u>Si</u> $\{E^r, d^r\}$ <u>se colapsa, entonces</u>

a) $E^{\infty}_{p,q} = E^2_{p,q}$ para toda p, q .

b) $H_n(\, Tot_*(C_{**})\,) \cong E^2_{0,n}$.

Demostración. Probaremos solamente el inciso (b) . Como C_{**} es del primer cuadrante, entonces, por A.14 y A.17 , existe una filtración acotada de F^p de $H_n(\, Tot_*(\, C_{**}\,))$ tal que

$$F^p H_n \,/\, F^{p-1} H_n \cong E^{\infty}_{p,q} \qquad (n = p+q).$$

Pero, por (a) , $E^{\infty}_{p,q} = E^{2}_{p,q}$.

Como la sucesión espectral se colapsa, entonces

$$E^{2}_{p,q} = 0 \qquad \text{si} \quad p \neq 0$$

de manera que

$$E^{\infty}_{p,q} = E^{2}_{0,n} \quad . \qquad ///$$

A.25 Observación. Si E^{r} se colapsa sobre el eje p , obtenemos de manera similar que

$$H_{n}(\,\mathrm{Tot}_{*}(\,C_{**}\,)) \cong E^{2}_{n,0} \quad .$$

BIBLIOGRAFIA.

[A] Adams, J.F., Algebraic Topology , A Student's Guide , London Math. Soc. Lecture Note Series 4, London, 1972 .

[Ai] Aisbett, J. , On K_3 of truncated polynomial rings, Trans. Amer. Math. Soc., Vol.294,No.2 (1986) .

[Ba] Bass, H. , Algebraic K-theory , Benjamin , New York, 1968.

[Bo] Borel, A. , Stable real cohomology of arithmetic groups , Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 7 (1974),235-272 .

[Br] Brown, K.S. , Cohomology of Groups , Graduate Texts in Math., Vol.87, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1982.

[CE] Cartan, H. y Eilenberg, S. , Homological Algebra , Princeton University Press, New Jersey, 1956.

[Ca] Cartier, P., Homologie cyclique : Rapport sur des travaux récents de Connes,Karoubi, Loday, Quillen,... , Sem. Bourbaki , 36e année, No.621 (1984), 123-147 .

[Co] Connes, A., Cohomologie cyclique et functeurs Ext^n , C.R. Acad. Sc. Paris, t.296,S-I (1983) ,953-958 .

[G 1] Goodwillie, T.G., Cyclic homology, derivations and the free loopspace , Topology 24 (1985), 187-215 .

[G 2] Goodwillie, T.G., On the general lineal group and Hochschild homology , Ann. of Math. 121 (1985), 383-407 .

[G 3] Goodwillie, T.G., Relative algebraic K-theory and cyclic homology , Ann. of Math. 124 (1986), 347-402 .

[HS] Hilton,P. y Stammbach, U., A Course in Homological Algebra , Graduate Texts in Math., Vol. 4 , Springer- Verlag , Berlin/New York, 1971 .

[H] Hochschild, G. , On the cohomology groups of an associative algebra , Ann. of Math., Vol.46,No.1 (1945),58-67.

[Ka 1] Kassel,C.,Calcul algebrique de l'homologie de certains groupes de matrices , J. of Algebra 80 (1983),235-260.

[Ka 2] Kassel,C.,Cyclic homology, comodules and mixed complexes, J. of Algebra 105 (1987), 465-483 .

[KaL] Kassel,C. y Loday,J.-L. , Extensions centrales d'algebres de Lie, Ann. Inst. Forurier 32 (1982), 119-142 .

[Ke] Keune, F., The relativization of K_2 , J. of Algebra 54 (1978), 159-177 .

[Ko] Koszul,J.-L. , Homologie et cohomologie des algebres de Lie, Bull. Soc. Math. France 78 (1950), 65-127 .

[Le] LeVeque, W. , Fundamentals of Number Theory, Addison Wesley, New York, 1971 .

[LL] Lluis Puebla, E. , Cohomología de grupos y K-teoría algebraica, Seminarios del Instituto de Matemáticas, UNAM, México. 1980.

[L 1] Loday, J.-L.,Cohomologie et groupe de Steinberg relatifs , J. of Algebra 54 (1978), 178-202 .

[L 2] Loday, J. L. , Symboles en K-theorie algebrique superieure, C.R. Acad. Sc. Paris, t.292 (1981),S-I,863-866 .

[L 3] Loday, J.-L. , Cyclic homology, a survey , por publicarse. (1985) .

[L 4] Loday, J.-L. , Introduction to algebraic K-theory and cyclic homology , por aparecer en Workshop on K-Theory, UNAM 1985 , Academic Press .

[LQ 1] Loday, J.-L. y Quillen, D., Homologie cyclique et homologie de l'algebre de Lie des matrices , C. R. Acad. Sc. Paris, t296, S-I (1983), 295-297 .

[LQ 2] Loday, J.-L. y Quillen, D., Cyclic homology and the Lie homology of matrices , Comment. Math. Helvetici 59 (1984), 565-591 .

[MS] Maazen, H. y Stienstra , J., A presentacion for K_2 of split radical pairs , J. of Pure and Appl. Algebra 10 (1977), 271-294 .

[MB] Mac Lane, S. y Birkhoff, G., Algebra , Macmillan Pub. Co. Inc., New York , 1967 .

[Mas] Massey, W.S., Exact couples in algebraic topology , Ann. of Math. 56 (1952), 363-396 .

[M] Maunder, C.R.F., Algebraic Topology , Cambridge Univ. Press , London, 1980 .

[Og] Ogle, C., On the K-theory and cyclic homology of a square-zero ideal I , J. of Pure and Appl. Algebra 46 (1987), 233-247 .

[RG] Roberts, G.L. y Geller, S., K_2 of some truncated polynomial rings , Lecture Notes in Math., No.734 , pp.249-278 , Springer-Verlag , New York/Berlin, 1979 .

[Ro] Rotman, J.J., An Introduction to Homological Algebra , Academic Press , London, 1979 .

[Si] Silvester, J.R., Introduction to Algebraic K-Theory , Chapman & Hall Math. Series, New York, 1981 .

[S] Soulé, C., Rational K-theory of dual numbers of a ring of algebraic integers , Lecture Notes in Math. No.854, pp.402-409, Springer-Verlag, New York/Berlin,1981.

[St] Staffeldt, R.E., Rational algebraic K-theory of certain truncated polynomial rings, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 95, 2 (1985), 191-199 .

[Ste] Stein, M., Relativizing functors on rings and algebraic K-theory, J. of Algebra 19 (1971), 140-152 .

[Sti] Stienstra, J., On K_2 and K_3 of truncated polynomial rings , Lecture Notes in Math., No.854, pp. 409-455, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1981 .

[T] Tsygan, B.L., Homology of matrix algebras over rings and the Hochschild homology , Russ. Math. Surveys 38:2 (1983), 198-199 .

[W 1] Weibel, C.A.- Nilpotence and K-theory , J. of Algebra 61 (1979), 298-307 .

[W 2] Weibel, C.A., Module structures on the K-theory of graded rings, J. of Algebra 105 (1987), 465-483 .

INDICE DE SIMBOLOS

A lo largo de este trabajo, $\mathbb{Q}$ denota a los números racionales, $\mathbb{Z}$ a los números enteros y $\mathbb{Z}_m$ a los enteros módulo m. Además de estos símbolos y los de uso general, utilizamos la siguiente notación :