Universidad Nacional Autónoma

Unidad Académica de los Ciclos Profesionales
y de Postgrado del CCH

Instituto de Investigación en Matemáticas Aplicadas
y en Sistemas

# MODIFICACION CON KERNEL DE TAMANO CUATRO A LA ESTADISTICA DE SHAPIRO-WILK

T E S I S

que para obtener el grado de
MAESTRO EN ESTADISTICA E
INVESTIGACION DE OPERACIONES
presenta el Actuario
PEDRO MIGUEL QUIBRERA MATIENZO



MEXICO, DF. Septiembre 1983

En general, lo único que leemos de una tésis son las dedicatorias y los agradecimientos. Teniendo esto en mente, pretendo con estas líneas que todo aquel incauto en cuyas manos caiga esta tésis, se entere del enorme agradecimiento que siento con todos y cada uno de los integrantes del Departamento de Estadística del IIMAS: José Luis Abreu, Alberto Alonso, Francisco Aranda, Guillermo Baz, Javier Bourges, Alfredo Bustos, Alfonso Hernández, José Luis Farah, Ignacio Méndez y Fedrerico O'Reilly (hay dos colados, pero no importa).

Desde los primeros días en que circulaba por los pasillos del IIMAS, me ayudaron constante y desinteresadamente. Por ellos estudié un tiempo becado y trabajé tres años como técnico académico en la UNAM, además gracias a sus recomendaciones, tengo ahora la oportunidad de efectuar estudios de doctorado en el extranjero. Haré todo lo posible por no defraudarlos.

Ojalá que en un día no muy lejano, pueda sentarme nuevamente junto a ellos en la sala de juntas, a compartir el lunch. A todos ellos les doy las Gracias.

También expreso mi agradecimiento a la famosísima Belem, quién de una u otra forma me ayudó siempre durante los siete años que llevamos de conocernos.

Y por último, a esas dos queridas personas con quienes cuento y contaré incondicionalmente, mis Padres Pita y Enrique, Gracias, muchas Gracias.

## INTRODUCCION.

La prueba de Shapiro-Wilk para normalidad es esencialmente una comparación através de un cociente de dos estimadores de la varianza poblacional: el numerador es el cuadrado del estimador de Lloyd $\hat{\sigma}_L(n)$ del parámetro de escala $\sigma$ y el denominador es el estimador usual $S^2$.

La idea central de este estudio sobre esta prueba consiste en modificar el numerador, tomando al estimador de Lloyd como el kernel de una estadística-U; es decir, si denotamos por $\hat{\sigma}(m,n)$ a la estadística-U que se basa en la muestra de tamaño n $X_1, X_2, \ldots, X_n$ cuyo kernel es el estimador de Lloyd $\hat{\sigma}_L(m)$ de tamaño m, en donde m es menor o igual a n, la pregunta a responder es: Para este tamaño de muestra ¿será posible encontrar un kernel de tamaño mucho menor de tal forma que la estadística $W(m,n) = (\hat{\sigma}(m,n))^2/S^2$ tenga una potencia mejor o igual a la que se obtiene con la estadística $W(n) = K(\hat{\sigma}(n))^2/S^2$ ( K constante ), propuesta por Shapiro y Wilk?

Las motivaciones que llevaron a la formulación de la pregunta anterior son dos: Al estar basada la estadística $W(m,n)$ en un cociente de dos estadísticas-U, es posible determinar su distribución asintótica nula usando la teoría de Hoeffding (3). Esta última puede usarse como una aproximación a la distribución nula de $W(m,n)$ para n finita. La segunda razón es que existe un procedimiento recursivo que facilita el cálculo de $\hat{\sigma}(m,n)$ lo cual repercute en que el cómputo de $w(m,n)$ sea mas sencillo que el requerido para $W(n)$.

Como un primer intento para responder a la pregunta anterior se estudió el kernel de tamaño dos, de rivándose su distribución nula asintótica y simulándose tanto su distribución nula como su potencia para los - tamaños de muestra $n=10,20,40$ y $50$. En general la po - tencia de $W(2,n)$ es inferior a la respectiva de $W(n)$, aunque no en forma muy acentuada.

El objetivo inicial de este trabajo era derivar la distribución nula asintótica de $W(m,n)$ para cual - quier tamaño del kernel $m$ y simular en algunos casos sus potencias. Sin embargo debido a la complejidad al gebraica e integral que se presenta en el cálculo de la varianza asintótica de $\hat{\sigma}(m,n)$ y de la covarianza asintótica entre $\hat{\sigma}(m,n)$ y $S^2$, se estudió sólo el ker nel de tamaño cuatro en forma similar al estudio efec tuado para el kernel de tamaño dos en (6).

LA ESTADISTICA DE SHAPIRO WILK.

Como se mencionó en la introducción, esta Estadística compara mediante un cociente a dos estimadores de la varianza poblacional. El cuadrado del estimador de Lloyd del parámetro de escala es el numerador, y el conocido estimador $S^2$ es el denominador.

El estimador de Lloyd es el mejor estimador lineal, en la estadísticas de orden, e insesgado, dado que es el estimador de mínimos cuadrados generalizados del parámetro de escala $\sigma$ en la regresión:

$$X_{(i)}^{(n)} = \mu + \sigma m_i^{(n)} \quad i=1,n$$

donde $\underline{m}^{(n)'} = (m_1^{(n)}, \dots, m_n^{(n)})$ es el vector de medias de las estadísticas de orden $\underline{z}^{(n)'} = (z_{(1)}^{(n)}, \dots, z_{(n)}^{(n)})$ de la normal estándar. La expresión de $\hat{\sigma}_L(n)$ está dada por:

$$\hat{\sigma}_L(n) = \frac{1}{\underline{m}^{(n)'} V^{(n)-1} \underline{m}^{(n)}} \underline{m}^{(n)'} V^{(n)-1} \underline{X}^{(n)}$$

donde ahora $V^{(n)}$ es la matriz de varianzas y covarianzas de $\underline{z}^{(n)}$. Si la muestra no proviene de una distribución normal, no se obtiene una recta al efectuar la regresión anterior, por lo que $\hat{\sigma}_L(n)$ no estima al parámetro $\sigma$. En este sentido se dice que $\hat{\sigma}_L(n)$ es muy sensible a la no normalidad, es decir $(\hat{\sigma}_L(n))^2$ no estima a la varianza de la distribución de donde proviene la muestra, si esta última no es normal.

Por el contrario, $S^2$ al ser una estadística-U, esencialmente es el único estimador de mínimo riesgo uniformemente insesgado, relativo a la familia de todas las funciones de distribución absolutamente continuas y discretas, además de ser robusto y de distribución libre. Esto significa que para las distribuciones usuales, $S^2$ es un "buen estimador" de su varianza.

Bajo la hipótesis nula, ambas estadísticas estiman, excepto por una constante, al mismo parámetro, mientras que en ausencia de normalidad, tal situación no se presenta. Ciertos argumentos heurísticos, respaldados por estudios de simulación, sugieren que cuando no hay normalidad la estadística $W(n)$ en promedio toma valores menores que los que se obtiene cuando si la hay. En consecuencia, las regiones de rechazo de

$$W(n) = \frac{(\underline{m}^{(n)'} V^{(n)^{-1}} \underline{m}^{(n)})^2}{(n-1)\ \underline{m}^{(n)'} V^{(n)^{-1}} V^{(n)^{-1}} \underline{m}^{(n)}} \quad \frac{(\hat{\sigma}_L(n))^2}{S^2}$$

están constituidas por las colas izquierdas de su distribución nula.

En lo que concierne a esta última, todavía no se ha podido determinar explícitamente para cualesquiera que sea el tamaño de la muestra, debido a la enorme complejidad que involucra el uso de los momentos de primer y segundo orden de las estadísticas de orden $\underline{Z}^{(n)}$. Tales circunstancias han conducido al uso de la simulación como único camino para un conocimiento aproximado de los principales porcentiles de $W(n)$.

Así pues, muestreando de una distribución normal, Shapiro y Wilk calcularon repetidos valores de $W(n)$ y ajustando los valores obtenidos mediante el sistema de curvas de frecuencia de N.L. Johnson, derivaron una aproximación de su distribución nula. Tal procedimiento lo efectuaron para $n=3$ hasta $n=20$ con un tamaño de simulación de 5000 y desde $n=21$ hasta $n=50$ usaron un tamaño de simulación igual a $100000/n$.

Existe el inconveniente de que se conoce la matriz de varianzas y covarianzas de $\underline{Z}^{(n)}$ sólo para tamaños de muestra menores o iguales a veinte, por lo que para valores mayores los autores usaron la siguiente aproximación del vector

$$\underline{a}^{(n)'} = \frac{\underline{m}^{(n)'} V^{(n)^{-1}}}{(\underline{m}^{(n)'} V^{(n)^{-1}} V^{(n)^{-1}} \underline{m}^{(n)})^{1/2}}$$

que multiplica a $\underline{x}^{(n)}$:

$$\hat{a}_i^{(n)} = \frac{2\, m_i^{(n)}}{\hat{C}^{2(n)}} \qquad i = 2, \ldots, n-1$$

*donde* $\hat{C}^{2(n)} = -2.722 + 4.083\, n$ *y*

*para* $i = 1, n$

$$\hat{a}_1^{(n)\,2} = \hat{a}_n^{(n)\,2} = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\left(2\,\Gamma(n/2+1)\right)} \, {}^{1/2}$$

*De este modo, para tamaños de muestra mayores que 20, tanto la estadística de prueba como sus regiones críticas se calculan de forma aproximada, lo cual se traduce en una lijera desventaja de esta prueba.*

## ESTRUCTURA ESTADISTICA DE $\widehat{\sigma}(m,n)$.

El comportamiento probabilístico de $\widehat{\sigma}(m,n)$ se explica en base a la teoría de Hoeffding (3), por lo caual consideramos pertinente exponer en forma breve los resultados principales a usar.

Recordemos en primer término lo que es una Estadística-U :

Sea $D$ un conjunto de funciones de distribución definidas en $\mathbb{R}^k$.

Sea $\theta$ una funcional definida en $D$, entonces

$\theta$ es una funcional regular en $D$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\underset{m\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{\varphi:\mathbb{R}^k\times\cdots\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}}{\exists}\ \ni\ \underset{F\in D}{\forall}\ \underset{\underline{X_1}\cdots\underline{X_m}\ \text{m.a de } F}{\forall}\ E[\varphi(X_1\cdots X_m)]=\theta(F)$$

De esta forma las funcionales regulares en $D$ son aquellas que admiten un estimador insesgado en $D$.

Supongamos ahora que se tiene una funcional regular $\theta$ y que el estimador $\varphi$ insesgado es de tamaño m. Si tenemos una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de $F\in D$, con $n\geq m$, naturalmente quisieramos usar la información de las n observaciones en la estimación de $\theta$. La forma de hacerlo es tomar el promedio de los valores que toma $\varphi$ en las $\binom{n}{m}m!$ ordenaciones posibles de tamaño m de las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Esto es tomar:

$$U(X_1,\ldots,X_n)=\left(\binom{n}{m}m!\right)^{-1}\sum{}''\varphi(X_{i_1},\ldots,X_{i_m})$$

donde la suma corre sobre todas las ordenaciones antes mencionadas. Si la función $\varphi$ es simétrica en sus m argumentos, en aquellas ordenaciones que sólo difieran en el orden vale lo mismo, por lo que $U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se reduce a:

$$\left(\binom{n}{m}\right)^{-1}\sum{}'\varphi(X_{i_1},\ldots,X_{i_m})$$

donde ahora la suma corre sobre los subconjuntos de m elementos de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

A la función U se le denomina Estadística-U y a la función $\varphi$ se le conoce como el kernel de la Estadística-U. Si $\varphi$ es un estimador insesgado de $\Theta$ en D, también lo es U.

El estimador $S^2$ de la varianza poblacional es una Estadística-U sobre el conjunto de todas las funciones de distribución con varianza finita. Su kernel es la función simétrica: $\varphi(X_1, X_2) = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2$

Es fácil demostrar que

$$\frac{1}{\binom{n}{2}} \Sigma' \varphi(X_{i_1}, X_{i_2}) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} \frac{1}{2}(X_i - X_j)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

Algunas de las estadísticas mas conocidas que también son Estadísticas-U son la estadística de la prueba del signo y la estadística de la prueba del rango con signo de Wilcoxon.

Así pues: $\hat{\sigma}(m, n) = \binom{n}{m}^{-1} \Sigma' \varphi^{(m)}(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})$

donde $\varphi^{(m)}(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}) = \hat{\sigma}_i(m) = \underline{a}^{(m)\prime} \underline{X}^{(m)}$

Al ser $\varphi^{(m)}$ una función de las estadísticas de orden es una función simétrica en sus m argumentos.

No es necesario efectuar la sumatoria anterior dado que usando esperanzas condicionales es posible calcular $\hat{\sigma}(m, n)$ en función de $\hat{\sigma}(m, n-1)$. Veamos:

Para cualquier función $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ tal que $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ sea una variable aleatoria, se tiene:

$$E\left[\varphi(X_1, \ldots, X_m) \mid \underline{X}^{(n)}\right] = \binom{n}{m}^{-1} \Sigma'' \varphi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})$$

Esto es, la Esperanza condicional de la variable aleatoria $\varphi(X_1,\dots,X_m)$ dada $\underline{X}^{(n)}$, es precisamente la Estadística-U cuyo kernel es la función $\varphi(x_1,\dots,x_m)$. Por lo tanto :

$$\hat{\sigma}(m,n) = \mathbb{E}\left[\,\hat{\sigma}_L(m) \mid \underline{X}^{(n)}\right]$$

Por otro lado se tiene que $\sigma(\underline{X}^{(n)}) \subset \sigma(\underline{X}^{(n-1)}, X_n)$ pues $\underline{X}^{(n)}$ queda totalmente determinada si se conocen $\underline{X}^{(n-1)}, X_n$, de donde :

$$\mathbb{E}\left[\,\hat{\sigma}_L(m) \mid \underline{X}^{(n)}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\,\hat{\sigma}_L(m) \mid \underline{X}^{(n-1)}, X_n\right] \mid \underline{X}^{(n)}\right]$$

Ahora como $X^{(n-1)}$ y $X_n$ son independientes y $\varphi^{(m)}(X_1\dots X_m)$ y $X_n$ también lo son se tiene:

$$\mathbb{E}\left[\,\hat{\sigma}_L(m) \mid \underline{X}^{(n-1)}, X_n\right] = \mathbb{E}\left[\,\hat{\sigma}_L(m) \mid \underline{X}^{(n-1)}\right]$$

Por lo que

$$\hat{\sigma}(m,n) = \mathbb{E}\left[\,\mathbb{E}\left[\,\hat{\sigma}_L(m) \mid \underline{X}^{(n-1)}\right] \mid \underline{X}^{(n)}\right]$$

Pero

$$\mathbb{E}\left[\,\hat{\sigma}_L(m) \mid \underline{X}^{(n-1)}\right] = \hat{\sigma}(m,n-1)$$

Por lo tanto finalmente se tiene :

$$\hat{\sigma}(m,n) = \mathbb{E}\left[\,\hat{\sigma}(m,n-1) \mid \underline{X}^{(n)}\right]$$

Así pues:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(m,m+1) &= \mathbb{E}\left[\,\hat{\sigma}(m,m) \mid \underline{X}^{(m+1)}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\,\hat{\sigma}_L(m) \mid \underline{X}^{(m+1)}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\,\underline{a}^{(m)\prime}\underline{X}^{(m)} \mid \underline{X}^{(m+1)}\right]\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)} E\left[ X_{(i)}^{(m)} \mid \underline{X}^{(m+1)} \right]$$

*Dados* $X_{(1)}^{(k)} \dots X_{(k)}^{(k)}$

$X_{(i)}^{(k-1)}$ *pudo ser* $X_{(i)}^{(k)}$ *si* $X_k = X_{(j)}^{(k)}$ *con* $j > i$

*hay* $k-i$ *de estos casos.*

*ó* $X_{(i)}^{(k-1)}$ *pudo ser* $X_{(i+1)}^{(k)}$ *si* $X_k = X_{(j)}^{(k)}$ *con* $j < i$

*hay* $i$ *de estos casos.*

$$\therefore \quad X_{(i)}^{(k-1)} = \begin{cases} X_{(i)}^{(k)} & \text{con prob. } \frac{k-i}{k} \\ X_{(i+1)}^{(k)} & \text{con prob. } \frac{i}{k} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \underset{i=1\dots k-1}{E\left[ X_{(i)}^{(k-1)} \mid \underline{X}^{(k)} \right]} = \frac{k-i}{k} X_{(i)}^{(k)} + \frac{i}{k} X_{(i+1)}^{(k)}$$

$$\therefore \quad \hat{\theta}(m, m+1) = \sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)} \left( \frac{m+1-i}{m+1} X_{(i)}^{(m+1)} + \frac{i}{m+1} X_{(i+1)}^{(m+1)} \right)$$

$$= a_1^{(m)} \frac{m}{m+1} X_{(1)}^{(m+1)} + \sum_{i=2}^{m} \left( a_{i-1}^{(m)} \frac{i-1}{m+1} + a_i^{(m)} \frac{m+1-i}{m+1} \right) X_{(i)}^{(m+1)}$$

$$+ a_m^{(m)} \frac{m}{m+1} X_{(m+1)}^{(m+1)}$$

$$= \left( \frac{m}{m+1} a_1^{(m)}, \frac{1}{m+1} a_1^{(m)} + \frac{m-1}{m} a_2^{(m)}, \dots, \frac{m-1}{m+1} a_{m-1}^{(m)} + \frac{1}{m+1} a_m^{(m)}, a_m^{(m)} \frac{m}{m+1} \right)$$

$$\cdot \underline{X}^{(m+1)}$$

$$= \left( A_{m+1} \underline{a}^{(m)} \right)' \underline{X}^{(m+1)}$$

*con* $A_{m+1}$ *una matriz de* $(m+1) \times (m)$ *dada por :*

$$\frac{1}{m+1}\begin{bmatrix} m & & & & & & \\ 1 & m-1 & & & & 0 & \\ & 2 & m-2 & & & & \\ & & 3 & \ddots & & & \\ & & & \ddots & 3 & & \\ & 0 & & & m-2 & 2 & \\ & & & & & m-1 & 1 \\ & & & & & & m \end{bmatrix}$$

*Así pues*

$$\hat{\sigma}(m,m+1) = (A_{m+1}\, \underline{a}^{(m)})'\, \underline{X}^{(m+1)}$$

*Generalizando el resultado anterior a n con n mayor o igual a m :*

$$\hat{\sigma}(m,n) = (A_n A_{n-1} \cdots A_{m+1}\, \underline{a}^{(m)})'\, X^{(n)}$$

*donde*

$$\underset{\text{matriz de } l\times(l-1)}{A_l} = \frac{1}{l}\begin{bmatrix} l-1 & & & & & \\ 1 & l-2 & & & 0 & \\ & 2 & l-3 & & & \\ & & 3 & \ddots & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & l-3 & 2 \\ & & & & & l-2 & 1 \\ & & & & & & l-1 \end{bmatrix}$$

*Este es el procedimiento recursivo que facilita el cálculo de* $\hat{\sigma}(m,n)$.

*El comportamiento asintótico de* $\hat{\sigma}(m,n)$, $S^2$, *y* $W(m,n)$ *se encuentra aplicando los siguientes teoremas límite:*

*Teorema 1.*

*Sea* $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_n$ *una muestra aleatoria de F definifa en* $\mathbb{R}^k$.
*Sean* $\varphi^{(i)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{m(i)})$ *g funciones reales simétricas en sus* $m(i)$ *argumentos vectoriales,* $i=1,\ldots,g$.
*Sea* $U^{(i)}$ *la Estadística-U correspondiente a la función* $\varphi^{(i)}$ *para* $i=1,\ldots,g$. *Entonces si*

$$\Theta^{(i)} = E(\varphi^{(i)}(X_1 \ldots X_{m(i)})) \quad y$$
$$E(\varphi^{(i)}(X_1 \ldots X_{m(i)})^2) \quad \text{existen,}$$

la distribución conjunta de :

$$\sqrt{n}\,(U^{(1)}-\Theta^{(1)},\ldots,U^{(g)}-\Theta^{(g)})$$

tiende a una normal g-variada con un vector de medias igual al vector cero y matriz de varianzas y covarianzas dada por:

$$\Sigma_{ij} = m_{(i)}m_{(j)}\,\zeta_1^{(i,j)}$$

donde $\zeta_1^{(i,j)} = E(\varphi_1^{(i)}(x_1)\,\varphi_1^{(j)}(x_1)) - \Theta^{(i)}\Theta^{(j)}$

y a su vez $\varphi_1^{(i)}(x_1) = E[\,\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{m(i)})\,]$

Teorema II.

Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior, si además $h(v_1,\ldots,v_g)$ es una función de clase $C^2$ en una vecindad del punto $(\Theta^{(1)},\ldots,\Theta^{(g)})$ que no involucra a n, entonces la función de distribución de

$$\sqrt{n}\,(h(U^{(1)},\ldots,U^{(g)}) - h(\Theta^{(1)},\ldots,\Theta^{(g)}))$$

tiende a una normal con media igual a cero y varianza $\sigma_*^2 =$

$$\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g} m_{(i)}m_{(j)}\,\zeta_1^{(i,j)}\,h_{v_i}(\Theta^{(1)},\ldots,\Theta^{(g)})\,h_{v_j}(\Theta^{(1)},\ldots,\Theta^{(g)})$$

La demostración de ambos teoremas se obtiene aplicando el teorema central de límite y el teorema de Slutsky a sucesiones adecuadas, ( Ver (3) pag 307 y (1) pag 366 ).

Aplicando el teorema I a la sucesión de estimadores $\hat{\sigma}(m,n)$ obtenemos:

$$\sqrt{n}\,(\hat{\sigma}(m,n)-\sigma) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,\, m^2\zeta_1^{(1,1)})$$

con $\zeta_1^{(1,1)} = E[\,\varphi_1^{(m)}(x_1)^2] - \sigma^2$

donde $\varphi_1^{(m)}(x_1) = E[\,\varphi^{(m)}(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,]$

El cálculo de $\zeta_1^{(1,1)}$ es comlicado debido a que $\varphi_1^{(m)}(x_1)$ involucra a las estadísticas de orden. Una manera de calcular $\varphi_1^{(m)}(x_1)$ es partir la Esperanza según la ocurrencia de los eventos siguien tes:

Sea $A_i$ el evento $\left\{ X^{(m-1)}_{(i-1)} < x_i \le X^{(m-1)}_{(i)} \right\}$

para $i = 1, \dots, m$

con $X^{(m-1)}_{(0)} = -\infty$ y $X^{(m-1)}_{(m)} = +\infty$

$\left\{ X^{(m-1)}_{(i)} \right\}_{i=1}^{m-1}$ se obtienen de ordenar $X_2, \dots, X_m$.

Entonces

$$E\left[ \varphi^{(m)}(x_1, x_2, \dots, x_m) \right] = \sum_{i=1}^{m} E\left[ \varphi(x_1, x_2, \dots x_m) \mid A_i \right] P_r(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{P_r(A_i)} \int_{A_i} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_m) \, dP_r \, P_r(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \int_{A_i} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_m) \, dP_r$$

En $A_i$ $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m) =$

$$a_1^{(m)} X^{(m-1)}_{(1)} + a_2^{(m)} X^{(m-1)}_{(2)} + \dots + a_{i-1}^{(m)} X^{(m-1)}_{(i-1)} + a_i^{(m)} x_1$$
$$+ a_{i+1}^{(m)} X^{(m-1)}_{(i)} + \dots + a_m^{(m)} X^{(m-1)}_{(m-1)}$$

$$\therefore \int_{A_i} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_m) \, dP_r =$$

$$\int_{\left\{ X^{(m-1)}_{(i-1)} < x_1 \le X^{(m-1)}_{(i)} \right\}} \left( a_i^{(m)} x_1 + \sum_{j=1}^{i-1} a_j^{(m)} X^{(m-1)}_{(j)} + \sum_{j=i+1}^{m} a_j^{(m)} X^{(m-1)}_{(j-1)} \right) dP_r$$

$$= a_i^{(m)} x_1 \, P_r\left[ \left\{ X^{(m-1)}_{(i-1)} < x_1 \le X^{(m-1)}_{(i)} \right\} \right] +$$

$$\int_{\left\{ (y_1 \dots y_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} \mid y_1 < y_2 < \dots < y_{i-1} < x_1 \le y_i < \dots < y_{m-1} \right\}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_j^{(m)} y_j + \sum_{j=i+1}^{m} a_j^{(m)} y_{j-1} \right) (m-1)! \, f(y_1) f(y_2) \dots f(y_{m-1}) \, d\underline{y}$$

Finalmente como

$$P_r\left[ \left\{ X^{(m-1)}_{(i-1)} < x_1 \le X^{(m-1)}_{(i)} \right\} \right] = \binom{m-1}{i-1} (1 - F(x_1))^{m-i} F(x_1)^{i-1}$$

$$\varphi_1^{(m)}(x_1) = \sum_{l=1}^{m} a_l^{(m)} \binom{m-1}{l-1} x_1 (1-F(x_1))^{m-l} F(x_1)^{l-1}$$

$$+ \int_{-\infty}^{x_1} f(y_1) \int_{y_1}^{x_1} f(y_2) \cdots \int_{y_{l-2}}^{x_1} f(y_{l-1}) \int_{x_1}^{\infty} f(y_l) \int_{y_l}^{\infty} f(y_{l+1}) \cdots$$

$$\cdots \int_{y_{m-3}}^{\infty} f(y_{m-2}) \int_{y_{m-2}}^{\infty} f(y_{m-1}) \left( \sum_{j=1}^{l-1} a_j^{(m)} y_j + \sum_{j=l+1}^{m} a_j^{(m)} y_{j-1} \right) dy_{m-1} \ldots dy_1$$

*En la resolución de esta integral se obtienen funciones de la forma:*

$$\eta_i(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} x f(x) F(x)^i dx$$

*donde $f(x)$ es la función de densidad de una normal con media $\mu$ y varianza $\sigma^2$ y $F(x)$ es la función de distribución correspondiente (recuérdese que nos interesa la distribución nula asintótica de $\hat{\sigma}$ $(m,n)$, es decir bajo el supuesto de que la muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n$ provienen de una normal con media y varianzas desconocidas).*

*Una vez obtenida explícitamente la función $\varphi_i^{(m)}(x_i)$ se requiere calcular la esperanza de su cuadrado, la cual, dada la complejidad de las funciones $\eta$-s es bastante laboriosa. También es comlicado el cálculo de la covarianza asintótica entre $\hat{\sigma}$ $(m,n)$ y $S^2$, necesaria para la determinación de su distribución conjunta asintótica.*

*Como puede observarse en los apéndices los cálculos correspondientes al kernel de tamaño cuatro son bastante largos y tediosos. Para este caso se obtuvo:*

$$\hat{\sigma}(4,n) \dot{\sim} N\left(\sigma, \frac{0.5098}{n} \sigma^2\right)$$

$$\text{y} \quad \begin{pmatrix} \hat{\sigma}(4,n) \\ S^2 \end{pmatrix} \dot{\sim} N_2 \left( \begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5098/n\ \sigma^2 & 1/n\ \sigma^3 \\ 1/n\ \sigma^3 & 2/n\ \sigma^4 \end{pmatrix} \right)$$

*Para n "grande".*

*Las distribuciones nulas asintóticas para el kernel de tamaño dos (derivadas en (6)) son:*

$$\hat{\sigma}(2,n) \dot{\sim} N(\sigma, 1/n\ 0.5112\ \sigma^2)$$

$$y \quad \begin{pmatrix} \hat{\sigma}(2,n) \\ S^2 \end{pmatrix} \sim N_2\left( \begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5112/n\sigma^2 & 1/n\sigma^3 \\ 1/n\sigma^3 & 2/n\sigma^4 \end{pmatrix} \right)$$

*también para n suficientemente grande.*

*Puede observarse que la matriz de varianzas y covarianzas del kernel de tamaño cuatro, es "mas singular" que la respectiva del kernel de tamaño dos. Esto concuerda con la conjetura de Stephens (10) según la cual $m^{(n)}, \nu^{(n)-1}$ converge en algún sentido a $2m^{(n)}$, de donde se deriva que la matriz de varianzas y covarianzas de $\sqrt{n}(\hat{\sigma}_L(n)=\hat{\sigma}(n,n), S^2)$ tiende cuando n crece sin límite a la matriz singular:*

$$\begin{pmatrix} 1/2\sigma^2 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 2\sigma^4 \end{pmatrix}$$

*De los resultados anteriores y de la conjetura de Stephens se conjetura a su vez que:*

$$E\left[\varphi_1^{(m)}(x_1)\,\psi_1(x_1)\right] - \sigma^3 = 1/2(m)\,\sigma^3$$

*donde $\psi(x_1,x_2)$ es el kernel de $S^2$ ( en los apéndices denotado por $\varphi^{(2)}$ de acuerdo a la notación del teorema I ).*

*Como comentario final de esta sección tenemos que el kernel de tamaño tres no se estudió debido a que las sucesiones*

$$\left\{ \hat{\sigma}(2,n) \right\}_{n\geq 3} \qquad \left\{ \hat{\sigma}(3,n) \right\}_{n\geq 3}$$

*son las mismas, pues $A_3\underline{a}^{(2)} = \underline{a}^{(3)}$. Esto se debe a que existen ciertas igualdades entre los momentos de primer y segundo orden de las estadísticas de orden normales con tamaño de muestra dos y con tamaño de muestra tres.*

ESTRUCTURA ESTADISTICA DE $W(m,n)$.

La estadística $W(m,n) = \hat{\sigma}(m,n)^2 / S^2$ es una función de las estadísticas-U $\hat{\sigma}(m,n)$ y $S^2$. De hecho, tomando $h(v_1,v_2) = v_1^2 / v_2$ entonces $W(m,n) = h(\hat{\sigma}(m,n), S^2)$. El parámetro $\sigma$ de la distribución normal es siempre positivo por lo que existe una vecindad del punto $(\sigma, \sigma^2)$ en donde la función $h(v_1,v_2)$ es de clase $C^2$. Esto da lugar a que las hipótesis del Teorema II, enunciado en la sección anterior, se satisfagan, de donde la sucesión de variables aleatorias:

$$\left\{ \sqrt{n}(W(m,n)-1) = \sqrt{n}(h(\hat{\sigma}(m,n), S^2) - h(\sigma,\sigma^2)) \right\} n \geq m$$

convergen en distribución a una normal con media cero y varianza $\sigma_*^2$.

De acuerdo a lo anterior y al apéndice 6,

$$W(4,n) \xrightarrow{\cdot} N\left(1, \frac{0.03929}{n}\right)$$

El resultado similar para el kernel de tamaño dos (derivado en (6)) es:

$$W(2,n) \xrightarrow{\cdot} N\left(1, \frac{0.0452}{n}\right)$$

Ambos resultados son válidos bajo la hipótesis nula, y para n suficientemente grande.

Usando estas aproximaciones de la distribución nula se especificaron las regiones de rechazo, colas izquierdas, correspondientes al 0.05 nivel de significancia para los tamaños de muestra 10, 20, 40 y 50.

Estas aproximaciones concordaron en buena medida con las simulaciones de sus distribuciones empíricas. Para el kernel de tamaño cuatro se listan en la siguiente tabla, la media, varianza y el porcentil 0.05 de las distribuciones asintótica y empírica para los tamaños de muestra 50 y 100. (Un cuadro similar se presenta en la pag 43 de (6) para el kernel de tamaño dos).

| | n=50 | n=100 |
|---|---|---|
| $\mu_a$ | 1 | 1 |
| $\bar{x}$ | 1.0101369035 | 1.0051305544 |
| $\sigma^2_*$ | 0.0007857011 | 0.0003928506 |
| $s^2$ | 0.0007811457 | 0.0003875691 |
| $x_a^{0.05}$ | 0.9538900567 | 0.9673953464 |
| $x_e^{0.05}$ | 0.9567538845 | 0.9675873705 |
| m | 7000 | 6000 |

(m es el tamaño de la simulación.)

Contando con estas aproximaciones de los valores críticos de W(2,n) y W(4,n), se simularon sus potencias, tomando muestras aleatorias de varias poblaciones y contando el número de rechazos que ocurren en cada caso. Repitiendo tal procedimiento un número suficientemente grande de veces, podemos esperar que el porcentaje de rechazos sea una buena aproximación de la potencia de las pruebas.

Shapiro y Wilk, de manera similar, simularon también la potencia de su prueba para un tamaño de muestra igual a 20 (ver (9)) y compararon su sensibilidad con las respectivas de algunas pruebas, como la $\chi^2$, la Kolmogorov-Smirnov, la Crámer-Von Mises, etc.

En las siguientes tablas aparecen las antedichas simulaciones, especificándose en cada caso el tamaño de las mismas y su procedencia. El nivel de significancia que se manejó, fue del 0.05, por ser éste el que usualmente se considera. Así mismo las poblaciones estudiadas se seleccionaron de acuerdo a la facilidad de su simulación, tomando como base las que Shapiro y Wilk presentaron en (9).

I. POTENCIAS SIMULADAS

NIVEL DE SIGNIFICANCIA = 0.05

TAMANO DE LA MUESTRA = 10

| | ESTADISTICAS DE PRUEBA | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | W(2,10)* | | W(4,10) | | W(10)* | |
| DISTRIBUCIONES | % | T | % | T | % | T |
| N(0,1) | 0.06 | 600 | 0.05 | 2000 | 0.05 | 600 |
| B(4,1/2) | 0.25 | 600 | 0.31 | 1100 | 0.48 | 600 |
| POISS(1) | 0.46 | 600 | 0.50 | 1100 | 0.75 | 600 |
| EXP(10) | 0.37 | 600 | 0.42 | 1800 | 0.44 | 600 |
| LOG | 0.55 | 600 | 0.59 | 1800 | 0.62 | 600 |
| $\chi^2(1)$ | 0.58 | 600 | 0.63 | 1800 | 0.71 | 600 |
| $\chi^2(2)$ | 0.37 | 600 | 0.40 | 1800 | 0.44 | 600 |
| $\chi^2(4)$ | 0.23 | 600 | 0.23 | 1700 | 0.24 | 600 |
| $\chi^2(10)$ | 0.10 | 600 | 0.10 | 1600 | 0.10 | 600 |

% = *Porcentaje de Rechazos*

T = *Número de casos considerados (tamaño de la simulación)*

(*) = *Resultados obtenidos por el autor de este trabajo en (6).*

II. POTENCIAS SIMULADAS.

NIVEL DE SIGNIFICANCIA = 0.05

TAMAÑO DE LA MUESTRA = 20

| DISTRIBUCIONES | W(2,20)** % | T | W(4,20) % | T | W(20)* % | T |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ESTADISTICAS DE PRUEBA | | | | | |
| N(0,1) | 0.04 | 600 | 0.04 | 2000 | - | - |
| B(4,1/2) | 0.33 | 600 | 0.35 | 1100 | 0.71 | 200 |
| POISS(1) | 0.60 | 600 | 0.64 | 1100 | 0.99 | 200 |
| EXP(10) | 0.61 | 600 | 0.65 | 1300 | - | - |
| LOG | 0.81 | 600 | 0.84 | 1200 | 0.93 | 200 |
| $X^2(1)$ | 0.88 | 600 | 0.91 | 1200 | 0.98 | 200 |
| $X^2(2)$ | 0.59 | 600 | 0.60 | 1200 | 0.84 | 200 |
| $X^2(4)$ | 0.33 | 600 | 0.37 | 1100 | 0.50 | 200 |
| $X^2(10)$ | 0.16 | 600 | 0.19 | 1100 | 0.29 | 200 |

% = Porcentaje de Rechazos

T = Número de casos considerados (tamaño de la simulación)

(*) = Resultados derivados por Shapiro y Wilk en (1)

(**) = Resultados derivados por el autor de este trabajo en (10).

III. POTENCIAS SIMULADAS.

NIVEL DE SIGNIFICANCIA = 0.05

TAMAÑO DE LA MUESTRA = 40

| DISTRIBUCIONES | W(2,40)* % | W(2,40)* T | W(4,40) % | W(4,40) T | W(40)* % | W(40)* T |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ESTADISTICAS DE PRUEBA | | | | | |
| N(0,1) | 0.04 | 600 | 0.04 | 2000 | 0.03 | 600 |
| B(4,1/2) | 0.50 | 600 | 0.56 | 1000 | 1.00 | 600 |
| POISS(1) | 0.91 | 600 | 0.95 | 1000 | 1.00 | 600 |
| EXP(10) | 0.86 | 600 | 0.89 | 1100 | 0.99 | 600 |
| LOG | 0.99 | 600 | 0.99 | 1200 | 1.00 | 600 |
| $X^2(1)$ | 0.98 | 600 | 0.99 | 1000 | 1.00 | 600 |
| $X^2(2)$ | 0.85 | 600 | 0.88 | 1200 | 0.99 | 600 |
| $X^2(4)$ | 0.55 | 600 | 0.58 | 1100 | 0.89 | 600 |
| $X^2(10)$ | 0.23 | 600 | 0.28 | 1000 | 0.50 | 600 |

% = Porcentaje de Rechazos

T = Número de casos considerados
(tamaño de la simulación)

(*) = Resultados derivados por el autor de este trabajo en (6).

## IV. POTENCIAS SIMULADAS.

NIVEL DE SIGNIFICANCIA = 0.05

TAMAÑO DE LA MUESTRA N = 50

| DISTRIBUCIONES | ESTADISTICAS DE PRUEBA W(2,50)* % | T | W(4,50) % | T | W(50)* % | T |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N(0,1) | 0.03 | 600 | 0.04 | 2000 | 0.03 | 600 |
| B(4,1/2) | 0.56 | 600 | 0.62 | 1000 | 1.00 | 600 |
| POISS(1) | 0.96 | 600 | 0.99 | 1000 | 1.00 | 600 |
| EXP(10) | 0.91 | 600 | 0.95 | 1000 | 0.99 | 600 |
| LOG | 0.99 | 600 | 0.99 | 1000 | 1.00 | 600 |
| $\chi^2(1)$ | 0.99 | 600 | 0.99 | 1000 | 1.00 | 600 |
| $\chi^2(2)$ | 0.91 | 600 | 0.94 | 1000 | 1.00 | 600 |
| $\chi^2(4)$ | 0.63 | 600 | 0.69 | 1000 | 0.95 | 600 |
| $\chi^2(10)$ | 0.31 | 600 | 0.35 | 1000 | 0.37 | 600 |

% = *Porcentaje de Rechazos*

T = *Número de casos considerados (tamaño de la simulación)*

(*) = *Resultados derivados por el autor de este trabajo en* (6).

CONCLUSIONES.

La estadística $W(4,n)$ es un poco mas sensible a la no normalidad que su símil $W(2,n)$, aunque todavía su potencia es inferior a la correspondiente de Shapiro y Wilk.

Intuitivamente esto se debe a que al aumentar el número de parámetros (tamaño del kernel) de la familia normal, en la estructura de las estadísticas de prueba, se está afinando la caracterización de normalidad. Las distribuciones que se parecen a la distribución normal en las medias, varianzas y covarianzas de sus estadísticas de orden, van disminuyendo al incrementarse la dimensión de las mismas, la cual está determinada por el tamaño de la muestra.

Lo esencial a considerar es que quizá no sea necesario manejar tanta información de la familia normal para caracterizarla, posiblemente se alcance la misma sensibilidad si se toma un número mucho menor de parámetros, estructurando la riqueza de las observaciones en forma adecuada. Esto, aunado a las propiedades distribucionales asintóticas de $W(m,n)$, son las ideas que validan su estudio.

Existe la incógnita de que la especificación del tamaño del kernel, pueda estar en función del tamaño de la muestra, es decir que en $W(m,n)$ m dependa de n, en tal caso se requeriría proceder en forma análoga al trabajo efectuado por Shapirro y Wilk, puesto que la determinación analítica de $\sigma_*^2$ sería muy complicada.

REFERENCIAS.

(1). Crámer H. (1946)
Mathematical methods of Statistics.
Princeton University Press.

(2). David H.A. (1970)
Order Statistics.
John Wiley.

(3). Hoeffding W. (1942)
A Class of Statistics with asymptotically normal distribution.
The Annals of Mathematical Statistics. 19,293-325.

(4). Lloyd E.A. (1952)
Least Squares EStimation of Location and Scale parameters using Order Statistics.
Bometrika. 39,88-95.

(5). Loéve M. (1962)
Probability Theory II
Springer Verlag.

(6). Quibrera M. (1981)
Una modificación a la Estadística de Shapiro-Wilk.
Tésis de Licenciatura. Facultad de Ciencias. UNAM.

(7). Randles R.H. and Wlfe P.A. (1979)
Introduction to the Theory of Nonparametric Sattistics.
John Wiley.

(8). Sarhan A. and Greenberg B. (1962)
Contributions to Order Statistics.
John Wiley.

(9). Shapiro S.S and Wilk M.B. (1965)
An analysis of variance test for normality (complete samples).
Biometrika. 52,591-611.

(10). Stephens M.A. (1975)
Asyntotic properties for covariance matrices of Order Statistics.
Biometrika. 62,23-28.

(11). Zacks S. (1970)
The Theory of Statistical Inference.
John Wiley.

## APENDICE 1. DESARROLLO DE $\phi_1^{(1)}(X_1)$.

El kernel de tamaño cuatro está dado por el Estimador de Lloyd para n=4 del parámetro de escala , a saber:

$$\phi^{(1)}(X_1, X_2, X_3, X_4) = \underline{a}^{(4)'} \underline{X}^{(4)} = \sum_{i=1}^{4} a_i^{(4)} X_{(i)}^{(4)}$$

donde $$\underline{a}^{(4)'} = \frac{1}{\underline{m}^{(4)'} V^{(4)^{-1}} \underline{m}^{(4)}} \underline{m}^{(4)'} V^{(4)^{-1}}$$

Para el cálculo de la varianza asintótica de la estadística de prueba considerada se requiere el cálculo de $E(\phi_1^{(1)}(X_1)^2)$ en donde

$$\phi_1^{(1)}(x_1) = E(\phi^{(1)}(x_1, X_2, X_3, X_4))$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3} \phi^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4) f(x_2) f(x_3) f(x_4)\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

En el cálculo de esta integral es necesario dividir en 4 ! regiones, de acuerdo a los ordenes de magnitud de las variables $x_1, x_2, x_3$ y $x_4$ . Sin embargo dada la simetría de las regiones y del integrando, sólo es necesario efectuar 4 integrales cuyas regiones están determinadas por la magnitud de $x_1$ respecto de $x_2 < x_3 < x_4$ . De acuerdo a esto:

$$\phi_1^{(1)}(x_1) = 3! \Big\{ \int_{R_1} (a_1^{(4)} x_1 + a_2^{(4)} x_2 + a_3^{(4)} x_3 + a_4^{(4)} x_4)\, f(\underline{x}) d\underline{x} +$$

$$\int_{R_2} (a_1^{(4)} x_2 + a_2^{(4)} x_1 + a_3^{(4)} x_3 + a_4^{(4)} x_4)\, f(\underline{x}) d\underline{x} + \int_{R_3} (a_1^{(4)} x_2 +$$

$$a_2^{(4)} x_3 + a_3^{(4)} x_1 + a_4^{(4)} x_4)\, f(\underline{x}) d\underline{x} + \int_{R_4} (a_1^{(4)} x_2 + a_2^{(4)} x_3 +$$

$$a_3^{(4)} x_4 + a_4^{(4)} x_1 )\, f(\underline{x})\, d\underline{x} \Big\},$$

$$f(\underline{x})\, d\underline{x} = f(x_2) f(x_3) f(x_4)\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

donde:
$$R_1 = \{(x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 < x_2 < x_3 < x_4\}$$
$$R_2 = \{(x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 < x_1 < x_3 < x_4\}$$
$$R_3 = \{(x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 < x_3 < x_1 < x_4\}$$
$$R_4 = \{(x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 < x_3 < x_4 < x_1\}$$

Efectuando tales integrales y tomando en cuenta que:

$$a_3^{(4)} = -a_2^{(4)}$$
$$a_4^{(4)} = -a_1^{(4)}$$

se tiene:

$$\phi_1^{(1)}(x_1) = \psi(x_1) + \sum_{i=0}^{2} k_i M_i(x_1) + C$$

$$\psi(x_1) = \sum_{i=1}^{4} \binom{3}{i-1} a_i^{(4)} x_1 (1-F(x_1))^{4-i} F(x_1)^{i-1}$$

donde:

$$k_0 = 3(a_1^{(4)} - a_2^{(4)})$$
$$k_1 = 18a_2^{(4)} - 6a_1^{(4)}$$
$$k_2 = -k_1$$
$$C = -a_1^{(4)}\mu - (a_1^{(4)} + a_2^{(4)}) m_3^{(3)} \sigma$$

y $$M_i(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} x f(x) F(x)^i \, dx$$

con $f(x)$ la función de densidad de una normal con media $\mu$ y varianza $\sigma^2$, y $F(x)$ su respectiva función de distri-bución.

APENDICE 2. ESPERANZA DE $\phi_1^{(1)}(X_1)$.

Como $\phi^{(1)}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ es un estimador insesgado del parámetro de escala,

$$E\left\{\phi^{(1)}(X_1, X_2, X_3, X_4)\right\} = \sigma$$

por lo que $E[\phi_1^{(1)}(X_1)] = \sigma$. Así pues una manera de determinar si la expresión de $\phi_1^{(1)}(x_1)$ de la sección anterior no es correcta, es encontrando "a pie" su esperanza.

(a) $E[\psi(X_1)]$

$$E[\psi(X_1)] = \sum_{i=1}^{4} \binom{3}{i-1} a_i^{(4)} E\left[X_1(1-F(X_1))^{4-i} F(X_1)^{i-1}\right]$$

Ahora $E\left[X_1(1-F(X_1))^{4-i} F(X_1)^{i-1}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 (1-F(x_1))^{4-i} F(x_1)^{i-1} f(x_1)\,dx_1$

$$= \frac{(i-1)!\,(4-i)!}{4!} \int_{-\infty}^{\infty} x_1\, f_{X_{(i)}^{(4)}}(x_1)\,dx_1 = \frac{(i-1)!\,(4-i)!}{4!} E\left[X_{(i)}^{(4)}\right]$$

$$\therefore E[\psi(X_1)] = \sum_{i=1}^{4} \tfrac{1}{4} a_i^{(4)} E\left[X_{(i)}^{(4)}\right]$$ pero como

$$X_{(i)}^{(4)} = \mu + \sigma Z_{(i)}^{(4)}, \quad E\left[X_{(i)}^{(4)}\right] = \mu + \sigma m_i^{(4)}.$$

$$\therefore E[\psi(X_1)] = \tfrac{1}{4}\mu \sum_{i=1}^{4} a_i^{(4)} + \tfrac{1}{4}\sigma \sum_{i=1}^{4} a_i^{(4)} m_i^{(4)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\underline{a}^{(4)'}\underline{1} + \tfrac{1}{4}\sigma\, \underline{a}^{(4)'}\underline{m}^{(4)}$$

Recordando que $\underline{a}^{(4)'} = \dfrac{1}{\underline{m}^{(4)'} V^{(4)-1} \underline{m}^{(4)}} \underline{m}^{(4)'} V^{(4)-1}$

se tiene: $\underline{a}^{(4)'}\underline{1} = 0$ y $\underline{a}^{(4)'}\underline{m}^{(4)} = 1$

$$\therefore E[\psi(X_1)] = \tfrac{1}{4}\sigma$$

(b) $E[\eta_i(x_1)]$

$$E[\eta_i(x_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) \int_{-\infty}^{x_1} x f(x) F(x)^i \, dx \, dx_1$$

*Integrando por partes se tiene:*

$$= \frac{1}{(l+1)(l+2)} \mu + \left( \frac{1}{(l+1)} m_{l+1}^{(l+1)} - \frac{1}{(l+2)} m_{l+2}^{(l+2)} \right) \sigma$$

$$\therefore \; E\left[ \phi_1^{(1)}(x_1) \right] = \frac{1}{4}\sigma + c$$

$$+ \sum_{l=0}^{2} k_i \left( \frac{1}{(l+1)(l+2)} \mu + \left( \frac{1}{(l+1)} m_{l+1}^{(l+1)} - \frac{1}{(l+2)} m_{l+2}^{(l+2)} \right) \sigma \right)$$

$+$

## APENDICE 3. ESPERANZA DE $\phi_1^{(1)}(X_1)^2$.

Del apéndice 1 se tiene que:

$$\phi_1^{(1)}(x_1) = C + \psi(x_1) + \sum_{i=0}^{2} k_i \eta_i(x_1)$$

donde:

$$C = -a_1^{(4)}\mu - (a_1^{(4)} + a_2^{(4)}) m_3^{(3)} \sigma$$
$$K_0 = 3(a_1^{(4)} - a_2^{(4)})$$
$$k_1 = 18 a_2^{(4)} - 6 a_1^{(4)}$$
$$K_2 = -K_1$$
$$\eta_i(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} x f(x) F(x)^i \, dx$$

y
$$\psi(x_1) = \sum_{i=1}^{4} \binom{3}{i-1} a_i^{(4)} x_1 (1 - F(x_1))^{4-i} F(x_1)^{i-1}$$

$$\therefore E[\phi_1^{(1)}(x_1)^2] = c^2 + E[\psi(x_1)^2]$$
$$+ \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} k_i k_j E[\eta_i(x_1)\eta_j(x_1)] + 2c\,E[\psi(x_1)]$$
$$+ 2c \sum_{i=0}^{2} k_i\, E[\eta_i(x_1)]$$
$$+ 2\sum_{i=0}^{2} k_i\, E[\psi(x_1)\eta_i(x_1)]$$

(a) $E[\psi(x_1)^2]$

$$E[\psi(x_1)^2] = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \binom{3}{i-1}\binom{3}{j-1} a_i^{(4)} a_j^{(4)} E\left[x_1^2 (1-F(x_1))^{8-(i+j)} F(x_1)^{(i+j-2)}\right]$$

Ahora: $E\left[x_1^2 (1-F(x_1))^{8-(i+j)} F(x_1)^{(i+j-2)}\right]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 (1-F(x_1))^{8-(i+j)} F(x_1)^{i+j-2} f(x_1)\, dx_1$$
$$= \frac{(i+j-2)!\,(8-(i+j))!}{7!} E\left[(X_{(i+j-1)}^{(7)})^2\right]$$

*Pues* $$f_{X^{(7)}_{(l+j-1)}}(x_1) = \frac{7!}{(l+j-2)!\,(8-(l+j))!}\,F(x_1)^{l+j-2}\,(1-F(x_1))^{8-(l+j)}\,f(x_1)$$

*Como* $$X^{(7)}_{(l+j-1)} = \mu + \sigma\, Z^{(7)}_{(l+j-1)}$$

$$E\left[\left(X^{(7)}_{(l+j-1)}\right)^2\right] = \mu^2 + 2\mu\sigma\, m^{(7)}_{l+j-1} + \sigma^2 m^{(7)[2]}_{l+j-1}$$

$$\therefore\ E\left[\psi(x_1)^2\right]$$

$$= \sum_{l=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \binom{3}{l-1}\binom{3}{j-1} a_l^{(4)} a_j^{(4)}\ \frac{(l+j-2)!\,(8-(l+j))!}{7!}\left(\mu^2 + 2\mu\sigma m^{(7)}_{l+j-1} + \sigma^2 m^{(7)[2]}_{l+j-1}\right)$$

(b) $$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} k_i k_j\, E\left[m_i(x_1)\, m_j(x_1)\right]$$

$$E\left[m_i(x_1)\, m_j(x_1)\right] = E\left[\int_{-\infty}^{x_1} x f(x) F(x)^i dx \cdot \int_{-\infty}^{x_1} x f(x) F(x)^j dx\right]$$

*Para* $i,j = 0,1,2.$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) \int_{-\infty}^{x_1} x f(x) F(x)^i dx \cdot \int_{-\infty}^{x_1} x f(x) F(x)^j dx\, dx_1$$

*Integrando por partes se tiene :*

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) F(x)^i dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) F(x)^j dx$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1)\, F(x_1)^{i+1} \int_{-\infty}^{x_1} x f(x)\, F(x)^j dx\, dx_1$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1) F(x_1)^{j+1} \int_{-\infty}^{x_1} x f(x)\, F(x)^i dx\, dx_1$$

*Es por tanto necesario resolver integrales de la forma :*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1) F(x_1)^{\lambda} \int_{-\infty}^{x_1} x f(x) F(x)^{\delta} dx\, dx_1 \qquad \lambda, \delta \geq 0$$

el primer paso es estandarizar las funciones de densidad y distribución mediante las transformaciones:

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad z = \frac{x_1-\mu}{\sigma}$$

$$\therefore I = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu+\sigma z)\varphi(z)\Phi(z)^{\lambda} \int_{-\infty}^{z} (\mu+\sigma y)\, \varphi(y)\, \Phi(y)^{\delta} dy\, dz$$

donde $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ y $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(z) dz$

desarrollando esta integral e integrando por partes cuando es necesario se llega a:

$$I = \frac{1}{(\delta+1)(\lambda+\delta+2)}\mu^2 + \frac{1}{(\delta+1)(\lambda+\delta+2)} m_{\lambda+\delta+2}^{(\delta+\lambda+2)} \mu\sigma$$

$$+ \left( \frac{1}{(\delta+1)(\lambda+1)} m_{\delta+1}^{(\delta+1)} - \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+\delta+2)} m_{\lambda+\delta+2}^{(\lambda+\delta+2)} \right) \mu\sigma$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} z\varphi(z)\Phi(z)^{\lambda} \int_{-\infty}^{z} y\varphi(y)\Phi(y)^{\delta} dy\, dz \;\; \sigma^2$$

Para efectuar esta última integral hay que recurrir a las estadísticas de orden de la manera siguiente:

Para $1 < \alpha \leq \beta \leq n$

$$f_{Y_\alpha, Y_\beta}^{(n)}(x, y) = \frac{n!}{(\alpha-1)!(\beta-\alpha-1)!(n-\beta)!} F(x)^{\alpha-1} (F(y)-F(x))^{\beta-\alpha-1} (1-F(y))^{n-\beta} f(x) f(y) \qquad x<y$$

tomando $n = \delta+\lambda+2$ en el caso de la normal unitaria se tiene:

$\alpha = \delta+1$

$\beta = \delta+2$

$$f_{Z_{(\delta+1)}, Z_{(\delta+2)}}^{(\delta+\lambda+2)}(y, z) = \frac{(\delta+\lambda+2)!}{\delta!\,\lambda!} \Phi(y)^{\delta} (1-\Phi(z))^{\lambda} \varphi(y)\varphi(z)$$

para $y < z$

$$\therefore E\left[ z_{(\gamma+1)}^{(\gamma+\lambda+2)} \, z_{(\gamma+2)}^{(\gamma+\lambda+2)} \right] =$$

$$\frac{(\gamma+\lambda+2)!}{\gamma!\,\lambda!} \int_{-\infty}^{\infty} z\varphi(z)\left[1-\Phi(z)\right]^{\lambda} \int_{-\infty}^{z} y\varphi(y)\,\Phi(y)^{\gamma}\,dy\,dz$$

ie

$$m_{\gamma+1,\gamma+2}^{(\gamma+\lambda+2)} \frac{\gamma!\,\lambda!}{(\gamma+\lambda+2)!} = \sum_{\ell=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\ell}(-1)^{\ell} \int_{-\infty}^{\infty} z\varphi(z)\Phi(z)^{\ell} \int_{-\infty}^{z} y\varphi(y)\Phi(y)^{\gamma}\,dy\,dz$$

sea $a(e,f)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} z\varphi(z)\Phi(z)^{e}\int_{-\infty}^{z} y\varphi(y)\Phi(y)^{f}\,dy\,dz$

$$\therefore \frac{\gamma!\,\lambda!}{(\gamma+\lambda+2)!} m_{\gamma+1,\gamma+2}^{(\gamma+\lambda+2)} = \sum_{\ell=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\ell}(-1)^{\ell} a(\ell,\gamma) \qquad (*)$$

Ahora $\quad a(\ell,\gamma) = \displaystyle\sum_{s=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{s}(-1)^{s}\frac{\gamma!\,s!}{(\gamma+s+2)!}\, m_{\gamma+1,\gamma+2}^{(\gamma+s+2)}$

pues :

$$\sum_{s=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{s}(-1)^{s}\frac{\gamma!\,s!}{(\gamma+s+2)!}\, m_{\gamma+1,\gamma+2}^{(\gamma+s+2)}$$

$$= \sum_{s=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{s}(-1)^{s}\sum_{\ell=0}^{s}\binom{s}{\ell}(-1)^{\ell}a(\ell,\gamma) \quad \text{por } (*)$$

$$= \sum_{s=0}^{\lambda}\sum_{\ell=s}^{\lambda}\binom{\lambda}{\ell}(-1)^{\ell}\binom{\ell}{s}(-1)^{s}a(s,\gamma)$$

$$= \sum_{s=0}^{\lambda}(-1)^{s}a(s,\gamma)\sum_{\ell=s}^{\lambda}\binom{\lambda}{\ell}(-1)^{\ell}\binom{\ell}{s}$$

$$= \sum_{s=0}^{\lambda}(-1)^{s}a(s,\gamma)\sum_{\ell=s}^{\lambda}(-1)^{\ell}\binom{\lambda}{s}\binom{\lambda-s}{\ell-s}$$

$$= \sum_{s=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{s} (-1)^s a(s,\gamma) \sum_{q=0}^{\lambda-s} (-1)^{q+s} \binom{\lambda-s}{q}$$

$$= \sum_{s=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{s} (-1)^s a(s,\gamma) (-1)^s \sum_{q=0}^{\lambda-s} \binom{\lambda-s}{q} (-1)^q$$

*Ahora* $\sum_{q=0}^{\lambda-s} \binom{\lambda-s}{q} (-1)^q = (1+(-1))^{\lambda-s} = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq \lambda \\ 1 & \text{si } s = \lambda \end{cases}$

$\therefore$ *De la suma anterior sólo queda el término correspondiente a* $s = \lambda$

$$\therefore \sum_{s=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{s} (-1)^s \frac{\gamma!\, s!}{(\gamma+s+2)!}\, m_{\gamma+1,\gamma+2}^{(\gamma+s+2)}$$

$$= \binom{\lambda}{\lambda} (-1)^{\lambda} a(\lambda,\gamma) (-1)^{\lambda} \sum_{q=0}^{\lambda-\lambda} \binom{\lambda-\lambda}{q} (-1)^q$$

$$= a(\lambda,\gamma)$$

*Aplicando este resultado a 1, obtenemos finalmente :*

$$I = \frac{1}{(\gamma+1)(\lambda+\gamma+2)} \mu^2 + \frac{1}{(\gamma+1)(\lambda+\gamma+2)} m_{\gamma+\lambda+2}^{(\gamma+\lambda+2)} \mu\sigma$$

$$+ \left( \frac{1}{(\lambda+1)(\gamma+1)} m_{\gamma+1}^{(\gamma+1)} - \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+\gamma+2)} m_{\lambda+\gamma+2}^{(\lambda+\gamma+2)} \right) \mu\sigma$$

$$+ \left( \sum_{s=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{s} (-1)^s \frac{\gamma!\, s!}{(\gamma+s+2)!} m_{\gamma+1,\gamma+2}^{(\gamma+s+2)} \right) \sigma^2$$

$$\therefore E\left[ m_i(x_1) m_j(x_1) \right]$$

$$= \frac{1}{i+1} \left( \mu + \sigma m_{i+1}^{(i+1)} \right) \frac{1}{j+1} \left( \mu + \sigma m_{j+1}^{(j+1)} \right)$$

$$- \left\{ \frac{1}{(j+1)(j+i+3)} \mu^2 + \frac{1}{(j+1)(j+i+3)} m_{j+i+3}^{(j+i+3)} \mu\sigma + \right.$$

$$+\left[\frac{1}{(i+2)(j+1)}\, m_{j+1}^{(j+1)} - \frac{1}{(i+2)(j+i+3)}\, m_{j+i+3}^{(j+i+3)}\right]\mu\sigma$$

$$+\left[\sum_{s=0}^{i+1}\binom{i+1}{s}(-1)^{s}\frac{j!\,s!}{(j+s+2)!}\, m_{j+1,\,j+2}^{(j+s+2)}\right]\sigma^{2}\Bigg\}$$

$$-\left\{\frac{1}{(i+1)(j+i+3)}\mu^{2}+\frac{1}{(i+1)(j+i+3)}\, m_{j+i+3}^{(j+i+3)}\,\mu\sigma\right.$$

$$+\left[\frac{1}{(j+2)(i+1)}\, m_{i+1}^{(i+1)} - \frac{1}{(j+2)(j+i+3)}\, m_{j+i+3}^{(j+i+3)}\right]\mu\sigma$$

$$+\left[\sum_{s=0}^{j+1}\binom{j+1}{s}(-1)^{s}\frac{i!\,s!}{(i+s+2)!}\, m_{i+1,\,i+2}^{(i+s+2)}\right]\sigma^{2}\Bigg\}$$

$$\therefore \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} k_i k_j\, E\left[M_i(x_i)M_j(x_i)\right] =$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} k_i k_j\left\{\frac{1}{(i+1)(j+1)(i+j+3)}\mu^{2}+\left[\frac{1}{(i+1)(j+1)(j+2)}\, m_{i+1}^{(i+1)}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(i+1)(i+2)(j+1)}\, m_{j+1}^{(j+1)} - {}_{i+j+3}\left(\frac{1}{(i+1)(i+2)}+\frac{1}{(j+1)(j+2)}\right) m_{i+j+3}^{(i+j+3)}\right]\mu\sigma$$

$$+\left[\frac{1}{(i+1)(j+1)}\, m_{i+1}^{(i+1)}\, m_{j+1}^{(j+1)} - \sum_{\ell=0}^{i+1}(-1)^{\ell}\binom{i+1}{\ell}\frac{j!\,\ell!}{(j+\ell+2)!}\, m_{j+1,\,j+2}^{(j+\ell+2)}\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{\ell=0}^{j+1}(-1)^{\ell}\binom{j+1}{\ell}\frac{i!\,\ell!}{(i+\ell+2)!}\, m_{i+1,\,i+2}^{(i+\ell+2)}\right]\sigma^{2}\right\}$$

(c) $2C\, E\left[\psi(x_1)\right]$

*Por el apendice* 2, $E\left[\psi(x_1)\right] = \frac{1}{4}\sigma$

$$\therefore 2C\, E\left[\psi(x_1)\right] = 2\left(-a_1^{(4)}\mu - (a_1^{(4)}+a_2^{(4)})\, m_3^{(3)}\sigma\right)\frac{1}{4}\sigma$$

$$= -\frac{1}{2}a_1^{(4)}\mu\sigma - \frac{1}{2}(a_1^{(4)}+a_2^{(4)})\, m_3^{(3)}\sigma^{2}$$

(d) $2C\sum_{i=0}^{2} k_i\, E\left[M_i(x_1)\right]$

*Por el inciso (b) del apendice 2,*

$$E\left[m_i(x_1)\right] = \frac{1}{(l+1)(l+2)}\mu + \left(\frac{1}{(l+1)} m_{l+1}^{(l+1)} - \frac{1}{(l+2)} m_{l+2}^{(l+2)}\right)\sigma$$

$$\therefore\ 2c \sum_{l=0}^{2} k_i E\left[m_i(x_1)\right] =$$

$$2\left(-a_1^{(4)}\mu - (a_1^{(4)}+a_2^{(4)}) m_3^{(3)}\sigma\right) \sum_{l=0}^{2} k_i \left\{ \frac{1}{(l+1)(l+2)}\mu + \left(\frac{1}{l+1} m_{l+1}^{(l+1)} - \frac{1}{l+2} m_{l+2}^{(l+2)}\right)\sigma \right\}$$

$$= \left(-2a_1^{(4)} \sum_{l=0}^{2} k_i \frac{1}{(l+1)(l+2)}\right)\mu^2 + \left(-2(a_1^{(4)}+a_2^{(4)}) m_3^{(3)} \sum_{l=0}^{2} k_i \frac{1}{(l+1)(l+2)} - 2a_1^{(4)} \sum_{l=0}^{2} k_i \left(\frac{1}{(l+1)} m_{l+1}^{(l+1)} - \frac{1}{(l+2)} m_{l+2}^{(l+2)}\right)\right)\mu\sigma$$

$$+ \left(-2(a_1^{(4)}+a_2^{(4)}) m_3^{(3)} \sum_{l=0}^{2} k_i \left(\frac{1}{l+1} m_{l+1}^{(l+1)} - \frac{1}{l+2} m_{l+2}^{(l+2)}\right)\right)\sigma^2$$

(e) $2 \sum_{l=0}^{2} k_i E\left[\psi(x_1) m_i(x_1)\right]$

$$E\left[\psi(x_1) m_k(x_1)\right]_{k=0,1,2} = \sum_{i=1}^{4} \binom{3}{i-1} a_i^{(4)} E\left[x_1(1-F(x_1))^{4-i} F(x_1)^{i-1} \int_{-\infty}^{x_1} x f(x) F(x)^k dx\right]$$

*Ahora* $E\left[x_1(1-F(x_1))^{4-i}F(x_1)^{i-1}\int_{-\infty}^{x_1} x f(x)F(x)^k dx\right] =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(1-F(x_1))^{4-i} F(x_1)^{i-1}\int_{-\infty}^{x_1} x f(x)F(x)^k dx\, f(x_1)\,dx_1$$

$$= \sum_{\ell=0}^{4-i}\binom{4-i}{\ell}(-1)^\ell \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1) F(x_1)^{\ell+i-1}\int_{-\infty}^{x_1} x f(x)F(x)^k dx\,dx_1$$

*Por el inciso (b) de este apéndice :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1)F(x_1)^{\ell+i-1}\int_{-\infty}^{x_1} x f(x)F(x)^k dx\, dx_1 = \frac{1}{(k+1)(k+\ell+i+1)}\mu^2$$

$$+\left(\frac{1}{(\ell+i)(k+1)} m_{k+1}^{(k+1)} + \frac{\ell+i-k-1}{(k+1)(\ell+i)(k+\ell+i+1)} m_{k+\ell+i+1}^{(k+\ell+i+1)}\right)\mu\sigma +$$

$$+\sum_{s=0}^{\ell+i-1}\binom{\ell+i-1}{s}(-1)^s\frac{k!\,s!}{(k+s+2)!}\,m_{k+1,k+2}^{(k+s+2)}\,\sigma^2$$

$$\therefore\ 2\sum_{k=0}^{2}k_k E\left[\psi(x_1)m_k(x_1)\right] =$$

$$2\sum_{k=0}^{2}k_k\sum_{i=1}^{4}\binom{3}{i-1}a_i^{(4)}\sum_{\ell=0}^{4-i}\binom{4-i}{\ell}(-1)^\ell\left\{\frac{1}{(k+1)(k+\ell+i+1)}\mu^2+\right.$$

$$\left(\frac{1}{(\ell+i)(k+1)}m_{k+1}^{(k+1)}+\frac{\ell+i-k-1}{(k+1)(\ell+i)(k+\ell+i+1)}\,m_{k+\ell+i+1}^{(k+\ell+i+1)}\right)\mu\sigma$$

$$\left.+\sum_{s=0}^{\ell+i-1}\binom{\ell+i-1}{s}(-1)^s\frac{k!\,s!}{(k+s+2)!}\,m_{k+1,k+2}^{(k+s+2)}\,\sigma^2\right\}$$

(f) $c^2$

$$c^2=a_1^{(4)2}\mu^2+(a_1^{(4)}+a_2^{(4)})^2m_3^{(3)2}\sigma^2+2a_1^{(4)}(a_1^{(4)}+a_2^{(4)})m_3^{(3)}\mu\sigma$$

De (a), (b), (c), (d), (e) y (f) *obtenemos* :

$$E\left[\phi_1^{(1)}(x_1)^2\right] =$$

$$\mu^2\left\{a_1^{(4)2}+\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\binom{3}{i-1}\binom{3}{j-1}a_i^{(4)}a_j^{(4)}\frac{(i+j-2)!\,(8-i-j)!}{7!}\right.+$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}k_ik_j\frac{1}{(i+1)(j+1)(i+j+3)}-2a_1^{(4)}\sum_{i=0}^{2}k_i\frac{1}{(i+1)(i+2)}$$

$$\left.+2\sum_{k=0}^{2}k_k\sum_{i=1}^{4}\binom{3}{i-1}a_i^{(4)}\sum_{\ell=0}^{4-i}\binom{4-i}{\ell}(-1)^\ell\frac{1}{(k+1)(k+\ell+i+1)}\right\}$$

$$+\mu\sigma\left\{2a_1^{(4)}(a_1^{(4)}+a_2^{(4)})m_3^{(3)}-\frac{1}{2}a_1^{(4)}+2\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\binom{3}{i-1}\binom{3}{j-1}\right.$$

$$a_i^{(4)}a_j^{(4)}\frac{(i+j-2)!\,(8-(i+j))!}{7!}m_{i+j-1}^{(7)}+\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}k_ik_j\Big[$$

$$\frac{1}{(i+1)(j+1)(j+2)}m_{i+1}^{(i+1)}+\frac{1}{(i+2)(i+1)(j+1)}m_{j+1}^{(j+1)}-\frac{1}{(i+j+3)}\left(\frac{1}{(i+1)(i+2)}+\right.$$

$$+\frac{1}{(j+1)(j+2)}\Big)\, m^{(i+j+3)}_{i+j+3}\Big] - 2\left(a_1^{(4)}+a_2^{(4)}\right) m_3^{(3)} \sum_{i=0}^{2} k_i \frac{1}{(i+1)(i+2)}$$

$$-2a_1^{(4)} \sum_{i=0}^{2} \left( \frac{1}{i+1} m^{(i+1)}_{i+1} - \frac{1}{i+2} m^{(i+2)}_{i+2} \right) k_i$$

$$+2 \sum_{k=0}^{2} k_k \sum_{i=1}^{4} \binom{3}{i-1} a_i^{(4)} \sum_{\ell=0}^{4-i} \binom{4-i}{\ell} (-1)^{\ell} \Big( \frac{1}{(k+1)(\ell+i)} m^{(k+1)}_{k+1} +$$

$$\frac{\ell+i-k-1}{(k+1)(\ell+i)(k+\ell+i+1)}\, m^{(k+\ell+i+1)}_{k+\ell+i+1} \Big) \Big\}$$

$$+\sigma^2 \Big\{ \left(a_1^{(4)}+a_2^{(4)}\right)^2 m_3^{(3)\,2} - \frac{1}{2}\left(a_1^{(4)}+a_2^{(4)}\right) m_3^{(3)} + \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \binom{3}{i-1}\binom{3}{j-1}$$

$$\cdot a_i^{(4)} a_j^{(4)} \frac{(i+j-2)!\,(8-i-j)!}{7!}\, m^{(7)[2]}_{i+j-1} + \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} k_i k_j \Big[ \frac{1}{(i+1)(j+1)}$$

$$m^{(i+1)}_{i+1} m^{(j+1)}_{j+1} - \sum_{\ell=0}^{i+1} (-1)^{\ell} \binom{i+1}{\ell} \frac{j!\,\ell!}{(j+\ell+2)!}\, m^{(j+\ell+2)}_{j+1,\,j+2} - \sum_{\ell=0}^{j+1} (-1)^{\ell} \binom{j+1}{\ell}$$

$$\frac{i!\,\ell!}{(i+\ell+2)!}\, m^{(i+\ell+2)}_{i+1,\,i+2} \Big] - 2\left(a_1^{(4)}+a_2^{(4)}\right) m_3^{(3)} \sum_{i=0}^{2} k_i \left( \frac{1}{i+1} m^{(i+1)}_{i+1} - \frac{1}{i+2} m^{(i+2)}_{i+2} \right)$$

$$+2 \sum_{k=0}^{2} k_k \sum_{i=1}^{4} \binom{3}{i-1} a_i^{(4)} \sum_{\ell=0}^{4-i} (-1)^{\ell} \binom{4-i}{\ell} \sum_{s=0}^{\ell+i-1} \binom{\ell+i-1}{s} (-1)^{s} \frac{k!\,s!}{(k+s+2)!}\, m^{(k+s+2)}_{k+1,\,k+2} \Big\}$$

*De todo lo anterior, los términos que multiplican a $\mu$ y $\mu\sigma$ se cancelan, GRACIAS A DIOS. El término que multiplica a $\sigma$ cuadrada antes de substituir por los valores numéricos correspondientes se redujo a:*

$$\sigma^2 \Big\{ \left(a_1^{(4)}+a_2^{(4)}\right)^2 m_3^{(3)\,2} - \frac{1}{2}\left(a_1^{(4)}+a_2^{(4)}\right) m_3^{(3)} + \Big( \frac{2}{7} a_1^{(4)\,2} m_1^{(7)[2]} + \frac{6}{35}$$

$$a_2^{(4)\,2} m_3^{(7)[2]} + \frac{2}{7} a_1^{(4)} a_2^{(4)} m_2^{(7)[2]} - \frac{4}{35} a_1^{(4)} a_2^{(4)} m_3^{(7)[2]} - \frac{1}{70} a_1^{(4)\,2}$$

$$m_4^{(7)[2]} - \frac{9}{70} a_2^{(4)\,2} m_4^{(7)[2]} \Big) + \Big( k_0^2 \left( -m^{(2)}_{1,2} + \frac{1}{3} m^{(3)}_{1,2} \right) +$$

$$k_1^2 \Big( \frac{1}{4} m_2^{(2)\,2} + \frac{1}{9} m_3^{(3)\,2} - \frac{1}{3} m_2^{(2)} m_3^{(3)} - \frac{1}{12} m^{(4)}_{2,3} + \frac{2}{30} m^{(5)}_{2,3}$$

$$+ \frac{1}{30} m_{3,4}^{(5)} - \frac{1}{60} m_{2,3}^{(6)} - \frac{1}{45} m_{3,4}^{(6)} + \frac{1}{210} m_{3,4}^{(7)} \Big) + k_0 k_1 \Big( -\frac{1}{3} m_{1,2}^{(3)}$$

$$- \frac{1}{3} m_{2,3}^{(3)} + \frac{1}{3} m_{1,2}^{(4)} + \frac{1}{12} m_{2,3}^{(4)} + \frac{1}{6} m_{3,4}^{(4)} - \frac{1}{10} m_{1,2}^{(5)} - \frac{1}{30} m_{3,4}^{(5)} \Big) \Big) +$$

$$\Big( -2a_1^{(4)} m_3^{(3)} - 2a_2^{(4)} m_3^{(3)} \Big) \Big( k_0 \Big( -\frac{1}{2} m_2^{(2)} \Big) + k_1 \Big( \frac{1}{2} m_2^{(2)} - \frac{2}{3} m_3^{(3)} + \frac{1}{4} m_4^{(4)} \Big)$$

$$+ 2 \Big( k_0 \Big[ a_1^{(4)} \Big( -\frac{1}{2} m_{1,2}^{(2)} + \frac{1}{2} m_{1,2}^{(3)} - \frac{1}{4} m_{1,2}^{(4)} + \frac{2}{27} m_{1,2}^{(5)} \Big) +$$

$$a_2^{(4)} \Big( -\frac{1}{2} m_{1,2}^{(3)} + \frac{3}{4} m_{1,2}^{(4)} - \frac{3}{10} m_{1,2}^{(5)} \Big) \Big] + k_1 \Big[ a_1^{(4)} \Big( -\frac{1}{6} m_{2,3}^{(3)} + \frac{1}{8} m_{2,3}^{(4)}$$

$$- \frac{1}{20} m_{2,3}^{(5)} + \frac{1}{60} m_{2,3}^{(6)} + \frac{1}{48} m_{3,4}^{(4)} - \frac{1}{80} m_{3,4}^{(5)} + \frac{1}{240} m_{3,4}^{(6)} - \frac{1}{840} m_{3,4}^{(7)} \Big)$$

$$+ a_2^{(4)} \Big( -\frac{1}{8} m_{2,3}^{(4)} + \frac{3}{20} m_{2,3}^{(5)} - \frac{1}{20} m_{2,3}^{(6)} + \frac{1}{80} m_{3,4}^{(5)} - \frac{1}{80} m_{3,4}^{(6)} +$$

$$\frac{1}{280} m_{3,4}^{(7)} \Big) \Big] \Big) \Big\} = 1.031863829\, \sigma^2$$

$$\therefore\ E\left[ \phi_1^{(1)}(x_1)^2 \right] = 1.031863829\, \sigma^2$$

+

APENDICE 4. ESPERANZA DE $\phi_1^{(2)}(X_1)^2$

$$\phi^{(2)}(X_1, X_2) = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2$$

$$\therefore\ \phi_1^{(2)}(x_1) = E\left[\phi^{(2)}(x_1, X_2)\right] = \frac{1}{2}\sigma^2\left(1 + \left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

*Tomando en cuenta que:*

$$z^2 = \left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$$

$$E[z^2] = 1 \quad y \quad E((z^2)^2) = 3$$

$$\therefore\ E\left[\phi_1^{(2)}(x_1)\right] = \sigma^2 \quad y$$

$$E\left[\phi_1^{(2)}(x_1)^2\right] = \frac{3}{2}\sigma^4$$

APENDICE 5. ESPERANZA DE $\phi_1^{(1)}(x_1)\,\phi_1^{(4)}(x_1)$.

*Por el apendice* 1. $\phi_1^{(1)}(x_1) = \psi(x_1) + \sum_{i=0}^{2} k_i m_i(x_1) + c$ .

*Por el apendice* 4. $\phi_1^{(4)}(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 - \mu x_1 + \frac{1}{2}(\mu^2+\sigma^2)$ .

*De donde* $E\left[\phi_1^{(1)}(x_1)\phi_1^{(4)}(x_1)\right] =$

$$\frac{1}{2}E\left[x_1^2\psi(x_1)\right] - \mu E\left[x_1\psi(x_1)\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2} k_i E\left[x_1^2 m_i(x_1)\right]$$

$$-\mu\sum_{i=0}^{2} k_i E\left[x_1 m_i(x_1)\right] + c\sigma^2 + \frac{1}{2}(\mu^2+\sigma^2)\sigma - \frac{1}{2}(\mu^2+\sigma^2)c$$

(a) $E\left[x_1^2\psi(x_1)\right]$ y $E\left[x_1\psi(x_1)\right]$ .

$$E\left[x_1^k\psi(x_1)\right] \quad k=1,2$$

$$= \sum_{i=1}^{4}\binom{3}{i-1} a_i^{(4)} E\left[x_1^{k+1}(1-F(x_1))^{4-i}F(x_1)^{i-1}\right]$$

$$E\left[x_1^{k+1}(1-F(x_1))^{4-i}F(x_1)^{i-1}\right] =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k+1}(1-F(x_1))^{4-i}F(x_1)^{i-1}f(x_1)\,dx_1$$

$$= \frac{(i-1)!\,(4-i)!}{4!}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k+1} f_{X_{(i)}^{(4)}}(x_1)\,dx_1$$

$$= \frac{(i-1)!\,(4-i)!}{4!} E\left[\left(X_{(i)}^{(4)}\right)^{k+1}\right]$$

$$= \frac{(i-1)!\,(4-i)!}{4!} E\left(\mu+\sigma z_{(i)}^{(4)}\right)^{k+1}$$

$$\therefore\ E\left[x_1^k\psi(x_1)\right] = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} a_i^{(4)} E\left[\left(\mu+\sigma z_{(i)}^{(4)}\right)^{k+1}\right]$$

*Para* $k=1$

$$E\left[x_1\psi(x_1)\right] = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} a_i^{(4)} E\left[\left(\mu+\sigma z_{(i)}^{(4)}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} a_i^{(4)}\left(\mu^2+2\mu\sigma m_i^{(4)}+\sigma^2 m_i^{(4)[2]}\right)$$

$$\therefore E[X_1\psi(X_1)] = \tfrac{1}{2}\mu\sigma + \tfrac{1}{4}\sigma^2 \sum_{i=1}^{4} a_i^{(4)} m_i^{(4)}[2]$$

*Para* $k=2$

$$E[X_1^2\psi(X_1)] = \tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} a_i^{(4)} E[(\mu+\sigma Z_{(i)}^{(4)})^3]$$

$$= \tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} a_i^{(4)} (\mu^3 + 3\mu^2\sigma m_i^{(4)} + 3\mu\sigma^2 m_i^{(4)}[2] + \sigma^3 m_i^{(4)}[3])$$

$$= \tfrac{3}{4}\mu^2\sigma + \tfrac{3}{4}\mu\sigma^2 \sum_{i=1}^{4} a_i^{(4)} m_i^{(4)}[2] + \tfrac{1}{4}\sigma^3 \sum_{i=1}^{4} a_i^{(4)} m_i^{(4)}[3]$$

(b) $E[X_1 M_i(X_1)]$ y $E[X_1^2 M_i(X_1)]$ $\quad i=0,1,2$

$E[X_1^k M_i(X_1)] \quad k=1,2 \quad i=0,1,2$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1^k M_i(x_1) f(x_1)\, dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1^k f(x_1) \int_{-\infty}^{x_1} x f(x) F(x)^i\, dx\, dx_1 \qquad \textit{Estandarizando} \quad z = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad y = \frac{x_1-\mu}{\sigma}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu+\sigma y)^k \varphi(y) \int_{-\infty}^{y} (\mu+\sigma z)\varphi(z)\Phi(z)^i\, dz\, dy$$

$k=1$

$$E[X_1 M_i(X_1)] = \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \int_{-\infty}^{y} \varphi(z)\Phi(z)^i\, dz\, dy$$

$$+ \mu\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \int_{-\infty}^{y} z\varphi(z)\Phi(z)^i\, dz\, dy + \mu\sigma \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y) \int_{-\infty}^{y} \varphi(z)\Phi(z)^i\, dz\, dy$$

$$+ \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y) \int_{-\infty}^{y} z\varphi(z)\Phi(z)^i\, dz\, dy$$

$$= \frac{1}{(i+1)(i+2)}\mu^2 + \left(\frac{1}{i+1} m_{i+1}^{(i+1)} - \frac{i}{(i+1)(i+2)} m_{i+2}^{(i+2)}\right)\mu\sigma$$

$$+ \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y) \int_{-\infty}^{y} z\varphi(z)\Phi(z)^i\, dz\, dy$$

*Integrando por partes se tiene:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y)\int_{-\infty}^{y} z\varphi(z)\Phi(z)^{i}\,dz\,dy = -\frac{1}{(i+1)(i+2)} + \frac{1}{(i+1)(i+2)}\, m_{i+2}^{(i+2)[2]}$$

$$\therefore\ E[X_1 m_i(X_1)] = \frac{1}{(i+1)(i+2)}\mu^2 + \left(\frac{1}{i+1} m_{i+1}^{(i+1)} - \frac{i}{(i+1)(i+2)} m_{i+2}^{(i+2)}\right)\mu\sigma$$

$$+\left(-\frac{1}{(i+1)(i+2)} + \frac{1}{(i+1)(i+2)} m_{i+2}^{(i+2)[2]}\right)\sigma^2$$

$k=2$

$$E[X_1^2 m_i(X_1)] = \mu^3 \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\int_{-\infty}^{y}\varphi(z)\Phi(z)^{i}\,dz\,dy$$

$$+\mu^2\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\int_{-\infty}^{y} z\varphi(z)\Phi(z)^{i}\,dz\,dy + 2\mu^2\sigma\int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y)\int_{-\infty}^{y}\varphi(z)\Phi(z)^{i}\,dz\,dy$$

$$+2\mu\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y)\int_{-\infty}^{y} z\varphi(z)\Phi(z)^{i}\,dz\,dy + \mu\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} y^2\varphi(y)\int_{-\infty}^{y}\varphi(z)\Phi(z)^{i}\,dz\,dy$$

$$+\sigma^3\int_{-\infty}^{\infty} y^2\varphi(y)\int_{-\infty}^{y} z\varphi(z)\Phi(z)^{i}\,dz\,dy$$

*Nuevamente integrando dos veces por partes,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2\varphi(y)\int_{-\infty}^{y} z\varphi(z)\Phi(z)^{i}\,dz\,dy = \frac{1}{i+1} m_{i+1}^{(i+1)} - \frac{1}{i+2} m_{i+2}^{(i+2)}$$

$$+\frac{1}{(i+1)(i+2)} m_{i+2}^{(i+2)[3]} - \frac{2}{(i+1)(i+2)} m_{i+2}^{(i+2)}$$

$$\therefore\ E[X_1^2 m_i(X_1)] = \frac{1}{(i+1)(i+2)}\mu^3 + \left(\frac{1}{i+1} m_{i+1}^{(i+1)} + \frac{1-i}{(i+1)(i+2)} m_{i+2}^{(i+2)}\right)\mu^2\sigma$$

$$+\left(\frac{-2}{(i+1)(i+2)} + \frac{3}{(i+1)(i+2)} m_{i+2}^{(i+2)[2]}\right)\mu\sigma^2 + \left(\frac{1}{i+1} m_{i+1}^{(i+1)} - \frac{i+3}{(i+1)(i+2)}\right.$$

$$\left. m_{i+2}^{(i+2)} + \frac{1}{(i+1)(i+2)} m_{i+2}^{(i+2)[3]}\right)\sigma^3$$

*De (a) y (b) se obtiene:*

$$\mathrm{E}\left[\phi_1^{(1)}(x_1)\,\phi_1^{(2)}(x_1)\right] = \frac{3}{8}\mu^2\sigma + \frac{3}{8}\sum_{i=1}^{4} a_i^{(4)} m_i^{(4)[2]}\mu\sigma^2$$

$$+\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{4} a_i^{(4)} m_i^{(4)[3]}\sigma^3 - \frac{1}{2}\mu^2\sigma - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} a_i^{(4)} m_i^{(4)[2]}\mu\sigma^2$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2} K_i \left\{ \frac{1}{(i+1)(i+2)}\mu^3 + \left(\frac{1}{i+1} m_{i+1}^{(i+1)} + \frac{1-i}{(i+1)(i+2)} m_{i+2}^{(i+2)}\right)\mu^2\sigma \right.$$

$$+\left(-\frac{2}{(i+1)(i+2)} + \frac{3}{(i+1)(i+2)} m_{i+2}^{(i+2)[2]}\right)\mu\sigma^2$$

$$\left. +\left(\frac{1}{i+1} m_{i+1}^{(i+1)} - \frac{i+3}{(i+1)(i+2)} m_{i+2}^{i+2} + \frac{1}{(i+1)(i+2)} m_{i+2}^{(i+2)[3]}\right)\sigma^3 \right\}$$

$$-\mu\sum_{i=0}^{2} K_i \left\{ \frac{1}{(i+1)(i+2)}\mu^2 + \left(\frac{1}{i+1} m_{i+1}^{(i+1)} - \frac{i}{(i+1)(i+2)} m_{i+2}^{(i+2)}\right)\mu\sigma \right.$$

$$\left. +\left(-\frac{1}{(i+1)(i+2)} + \frac{1}{(i+1)(i+2)} m_{i+2}^{(i+2)[2]}\right)\sigma^2 \right\}$$

$$+\frac{1}{2}a_1^{(4)}\mu^3 + \left(\frac{1}{2}\left(a_1^{(4)} + a_2^{(4)}\right) m_3^{(3)} + \frac{1}{2}\right)\mu^2\sigma - \frac{1}{2}a_1^{(4)}\mu\sigma^2$$

$$\left(-\frac{1}{2}\left(a_1^{(4)} + a_2^{(4)}\right) m_3^{(3)} + \frac{1}{2}\right)\sigma^3$$

*Nuevamente, GRACIAS A DIOS (De otro modo todo estaría mal) se anulan los coeficientes que ultiplican a* $\mu^3$, $\mu^2\sigma$, $\mu\sigma^2$, *y aplicando los resultados del apéndice , sobre relaciones entre los momentos de orden k-ésimo de estadísticas de orden, el coeficiente de* $\sigma^3$ *se reduce a* $\frac{9}{8}\sigma^3$.

$$\therefore\ \mathrm{E}\left[\phi_1^{(1)}(x_1)\,\phi_1^{(2)}(x_1)\right] = \frac{9}{8}\sigma^3$$

Apéndice 6. DISTRIBUCION ASINTOTICA DE $W(4,n)$.

Aplicando la teoría de Hoeffding sobre Estadísticas-U, la varianza asintótica de $\sqrt{n}\,\hat{\sigma}(4,n)$ se obtiene multiplicando el tamaño del kernel por $\zeta_1^{(1,1)}$. En donde

$$\zeta_1^{(1,1)} = E\left\{ \phi_1^{(1)}(x_1)^2 \right\} - \sigma^2$$

$$= (0.031863829)\,\sigma^2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n \operatorname{Var}\left( \hat{\sigma}(4,n) \right) = (4)^2\, \zeta_1^{(1,1)} \quad \text{Por el apéndice 3.}$$

$$= 0.509821264$$

De igual forma:

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{Var}(s^2) = (2)^2\, \zeta_1^{(2,2)}$$

$$\zeta_1^{(2,2)} = E\left\{ \phi_1^{(2)}(x_1)^2 \right\} - (\sigma^2)^2$$

$$= \frac{3}{2}\sigma^4 - \sigma^4 = \frac{1}{2}\sigma^4 \quad \text{Por el apéndice 4.}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n \operatorname{Var}(s^2) = 2\sigma^4$$

Así mismo:

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{Cov}\left( \hat{\sigma}(4,n), s^2 \right) = (4)(2)\, \zeta_1^{(1,2)}$$

$$\zeta_1^{(1,2)} = E\left\{ \phi_1^{(1)}(x_1)\, \phi_1^{(2)}(x_1) \right\} - \sigma^3$$

usando el resultado del apéndice 5.

$$= \frac{9}{8}\sigma^3 - \sigma^3 = \frac{1}{8}\sigma^3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n \operatorname{Cov}\left( \hat{\sigma}(4,n), s^2 \right) = \sigma^3$$

*Lo anterior da lugar a :*

$$\sqrt{n}\left(\hat{\sigma}(4,n)-\sigma\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,\ 0.5098\,\sigma^2)$$

$$\sqrt{n}\,(s^2-\sigma^2) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 2\sigma^4)$$

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\sigma}(4,n)-\sigma \\ s^2-\sigma^2\end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.5098\,\sigma^2 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 2\sigma^4\end{pmatrix}\right)$$

*El resultado similar para el kernel de tamaño dos es :*

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\sigma}(2,n)-\sigma \\ s^2-\sigma^2\end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.5113\,\sigma^2 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 2\sigma^4\end{pmatrix}\right)$$

*Finalmente tomando :*

$$g(\omega_1,\omega_2) = \frac{\omega_1^2}{\omega_2}$$

*se tiene* $\quad W(4,n) = g\left(\hat{\sigma}(4,n), s^2\right)$

*y como*

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists} \ni\ g \in C^2\left(B_\varepsilon(\sigma,\sigma^2)\right)$$

*se puede aplicar el teorema 7.5 del artículo de Hoeffding, de donde:*

$$\sqrt{n}\left(g(\hat{\sigma}(4,n), s^2) - g(\sigma,\sigma^2)\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,\sigma_*^2)$$

*con*

$$\sigma_*^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} m(i)m(j) \left.\frac{\partial g}{\partial \omega_i}\right|_{(\sigma,\sigma^2)} \left.\frac{\partial g}{\partial \omega_j}\right|_{(\sigma,\sigma^2)} \zeta_1^{(i,j)}$$

$m(1)$ = *tamaño del kernel* $\phi^{(1)}$
$m(2)$ = *tamaño del kernel* $\phi^{(2)}$

substituyendo los valores encontrados anteriormente

$$\sigma_x^2 = 16\left(\frac{2}{\sigma}\right)^2(0.031863829)\sigma^2$$
$$+ 2\cdot 4\cdot 2\left(\frac{2}{\sigma}\right)\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)\left(\frac{1}{8}\sigma^3\right)$$
$$+ 4\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)^2\frac{1}{2}\sigma^4$$
$$= 0.039285056$$

$$\therefore W(4,n) \mathrel{\dot{\sim}} N\left(1, \frac{0.039285056}{n}\right)$$

para $n$ "grande".