

01162
1~~ej.~~3

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
SECCION DE HIDRAULICA

ARRASTRE DE AIRE EN FLUJOS DE AGUA A SUPERFICIE LIBRE

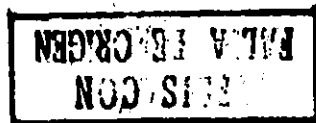
Tesis que presenta

MIGUEL ANGEL DOMINGUEZ CORTAZAR

Para obtener el Grado de

MAESTRO EN INGENIERIA HIDRAULICA

C.U., México, D.F., Agosto de 1983





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

| | |
|--|----|
| 1. INTRODUCCION | 1 |
| 2. DESCRIPCION DEL FENOMENO DEL AGUA BLANCA | 4 |
| 2.1 Introducci3n | 4 |
| 2.2 Descripci3n y clasificaci3n del fen3meno | 5 |
| 2.2.1 Caracteristicas de los flujos aireados | 5 |
| 2.2.2 Clasificaci3n del fen3meno | 7 |
| 2.3 Teorías que explican el origen del fen3meno | 12 |
| 2.3.1 Teoría del afloramiento de la capa límite turbu- lenta | 12 |
| 2.3.2 Teoría de la afloraci3n de estrias vorticosas | 14 |
| 2.3.3 Discusi3n de las teorías presentadas | 18 |
| 3. METODOS PARA LA PREDICCION DEL ARRASTRE DE AIRE | 21 |
| 3.1 Introducci3n | 21 |
| 3.2 Conceptos Generales sobre capa límite | 22 |
| 3.3 Método de Bauer | 28 |
| 3.4 Método de Keller y Rastogui | 39 |
| 3.5 Análisis comparativo entre los puntos críticos calculados y observados | 49 |
| 3.6 Tratamiento de la aeraci3n basádo en la teoría del afloramiento de las estrias vorticosas | 52 |
| 4. ESTIMACION DE LOS EFECTOS DE LA INCLUSION DE AIRE - SOBRE LAS CARACTERISTICAS MEDIAS DEL FLUJO | 58 |
| 4.1 Introducci3n | 58 |
| 4.2 Análisis experimental de los efectos de la inclusion de aire | 58 |
| 4.2.1 Experiencias de Straub y Anderson | 59 |

| | | |
|---------|---|-----|
| 4.2.1.1 | Concentración de aire en la región superior | 60 |
| 4.2.1.2 | Concentración de aire en la región inferior | 62 |
| 4.2.2 | Reanálisis de las experiencias de Straub y Anderson (ref 3) y Anderson (ref 5) | 66 |
| 4.3 | La pérdida de energía con relación a la inclusión de aire | 74 |
| 4.4 | Procedimiento de diseño | 75 |
| 4.5 | Aplicación de los resultados en la ecuación de cantidad de movimiento | 78 |
| 5. | CONCLUSIONES | 81 |
| | ANEXO APLICACION DE LAS LEYES DE CONSERVACION EN LA ZONA DE DESARROLLO DE LA AERACION | 86 |
| A.1 | El concepto de arrastre | 87 |
| A.2 | Ecuaciones básicas para canales | 89 |
| A.2.1 | Ecuación de continuidad de masa | 89 |
| A.2.2 | Conservación de la cantidad de movimiento | 90 |
| A.2.3 | Conservación de la energía | 97 |
| | REFERENCIAS | 107 |

1. INTRODUCCION

Durante el diseño de un vertedor el ingeniero hidráulico se enfrenta a problemas tales como la estimación del bordo libre de las paredes laterales, la estimación de la probable ocurrencia de cavitación, el diseño de la estructura disipadora de energía, etc. Estos problemas están estrechamente relacionados al fenómeno del arrastre de aire. Este fenómeno, también llamado del "agua blanca" por la apariencia blanquecina que presenta el escurrimiento, suele ocurrir en vertedores de fuerte pendiente y tirantes reducidos. Se observa como la aparición repentina (a cierta distancia aguas abajo de la cresta) de una gran cantidad de espuma cubriendo en seguida la totalidad de la superficie libre de la lámina vertiente.

La apreciación cuantitativa de las características del efecto del arrastre de aire en las rápidas es muy importante para un diseño hidráulico correcto. Una corriente aireada o emulsionada alcanza, en condiciones semejantes, tirantes bastantes mayores que una no aireada (dependiendo de la intensidad del fenómeno). Esto tiene como consecuencia la necesidad de bordos libres mayores con el propósito de evitar derrames.

Adicionalmente, las velocidades medias pueden ser considerablemente mayores que las que se tendrían en un flujo no aireado. Cuantificar estos efectos resulta importante cuando se diseña la estructura disipadora de energía; por ejemplo, si la velocidad de llegada de un flujo aireado a un tanque amortiguador, en el cual se forma un salto hidráulico, es 50 por ciento más grande que la velocidad para un flujo no aireado, el tirante conjugado mayor del salto hidráulico se incrementa en un 20 -- por ciento (ref 25), lo cual implica que se tenga en el tanque paredes más altas; se deduce entonces que la aeración puede -- afectar el dimensionamiento de una estructura disipadora de -- energía.

No obstante que los efectos anteriores tienen aspectos desfavorables, el hecho de tener aire en el escurrimiento es ventajoso en el sentido de que se disminuye la posibilidad de tener daños por cavitación (un pequeño porcentaje de aire incluido en el agua, por ejemplo, uno por ciento en volumen a la presión atmosférica, protege a la superficie de la estructura de - - -

la cavitación, ref 33).

En el presente trabajo se ha planteado como objetivos lo siguiente:

- a) Exponer métodos de cálculo que permitan predecir el punto de inicio de este fenómeno
- b) Presentar una metodología para estimar los efectos de la aeración en las características medias hidráulicas de un escurrimiento a superficie libre.

Para tal efecto se ha llevado a cabo una revisión bibliográfica del tema; en el capítulo 2 se exponen las teorías que tratan de explicar el origen del fenómeno, en el capítulo 3 se cubre el objetivo (a) y en el capítulo 4 el objetivo (b) arriba mencionados. Finalmente en el capítulo 5 se presentan las conclusiones y recomendaciones de este trabajo y en el anexo A un análisis teórico de los efectos de la aeración -- sobre las características del flujo.

2. DESCRIPCIÓN DEL FENÓMENO DEL AGUA BLANCA

2.1 *Introducción*

El estudio del agua blanca principia, en este trabajo, con una revisión bibliográfica de la literatura disponible. En dicha revisión se ha encontrado dos explicaciones distintas para el origen del fenómeno, mismas que serán expuestas.

Este capítulo comprende dos partes; la primera, constituye una descripción y clasificación del fenómeno, basada en la revisión bibliográfica; la segunda, describe las explicaciones del origen del agua blanca. En adelante, ambas explicaciones serán designadas como: teoría del afloramiento o afloración de la capa límite turbulenta y teoría de la afloración de estrías vorticosas longitudinales.

2.2 Descripción y clasificación del fenómeno

2.2.1 Características de los flujos aireados

Una característica de flujos a alta velocidad, sobre rápidas y vertedores, es el atrapamiento de aire atmosférico en el flujo y su consecuente mezclado con el escurrimiento. La presencia del aire dentro del flujo le proporciona a éste una apariencia blanca que es observada en muchas estructuras hidráulicas.

A través de observaciones realizadas por distintos investigadores (refs. 20y24): en estructuras donde se produce este fenómeno se ha visto que inmediatamente antes que se presente la apariencia totalmente blanca, la superficie libre del agua presenta un aspecto indefinido (un arrugamiento); posteriormente, ya con el fenómeno bastante desarrollado la interfase del flujo presenta una superficie libre bastante irregular.

Una vez que el aire queda atrapado, en forma de burbujas, tiende a seguir las fluctuaciones de velocidad del flujo turbulento; este transporte de burbujas es restringido por las fuerzas de flotación hasta que se logra un equilibrio, en el que el aire que es lanzado fuera del flujo, es reemplazado por el que es atrapado. Este equilibrio se refleja en el abultamiento del flujo.

Cuando el flujo conserva el equilibrio antes mencionado y cuando la apariencia rugosa de la superficie libre llega a ser estadísticamente similar de una sección a otra, se dice que el flujo ha alcanzado una condición normal de aeración, ésto es, se ha alcanzado un flujo uniformemente aireado para los valores de sección, pendiente, rugosidad y descarga dados.

El grado de aeración de una corriente puede medirse a través de la concentración media de aire \bar{C} definida por

$$\bar{C} = \frac{\text{vol. de aire}}{\text{vol. de agua} + \text{vol. de aire}} \quad (2.1)$$

Una característica típica de este fenómeno es el hecho de que la concentración de aire dentro del flujo se va incrementando desde el fondo, exhibiendo una transición suave desde un valor finito cerca del mismo hasta un máximo del 100% en la superficie libre, aproximándose a este valor en forma asintótica. Esto mismo, sucede en el arrastre de sedimentos en suspensión, sólo que en sentido inverso ya las partículas de sedimentos son más pesadas que el agua. Una forma típica de la distribución de la concentración de aire en una sección vertical de un canal de pendiente fuerte puede verse en la figura 2.1 obtenida de las pruebas de laboratorio efectuadas por Straub y Anderson (ref 10). Asimismo, en la figura 2.2 se presentan las mediciones de la concentración de aire en una

sección transversal de un canal, realizadas por Straub y Lamb (ref 10). Puede verse que los niveles de concentración de aire son considerablemente mayores cerca de las paredes laterales que en las regiones centrales del escurrimiento, éstos es, el efecto de abultamiento en el flujo es más sensible en las regiones cercanas a las paredes laterales que en las regiones centrales. Esto quiere decir que en las regiones laterales la forma de la sección y la turbulencia generada por las paredes tienen un efecto importante en el fenómeno.

2.2.2 *Clasificación del fenómeno*

Dentro del escurrimiento, el aire se manifiesta en forma parcial o total, según sea el área que ocupe; superficial o completa con respecto al tirante afectado; intermitente o continua con respecto a su frecuencia de ocurrencia.

La clasificación de los tipos de flujos aireados que se presentan depende de las observaciones realizadas por cada autor. Así por ejemplo, en rápidas Michels y Lovely (ref 20) clasificaron (según la apariencia de la superficie libre del agua) los tipos de arrastre que observaron de las cuales se incluyen en este inciso los que se consideran más comunes en la práctica.

a) Flujo fluctuante

Presenta generalmente una suave ondulación superficial sin arrastre de aire. Se presenta en flujos sobre canales con pendientes suaves uniformes o en las partes superiores de los canales de pendiente fuerte. Tienen como características comunes una velocidad baja o media, turbulencia y gradiente de energía pequeños.

b) Flujo rotatorio

Generalmente presenta una superficie libre agitada sin incrementar considerablemente el tirante del escurrimiento. Como ejemplo se tiene el flujo de una corriente natural con pendiente suave y fondo irregular. Las características comunes son: variaciones superficiales grandes, mayor turbulencia local que el flujo fluctuante y componentes normales (perpendiculares a la superficie libre) de velocidad.

c) Flujo escarificado

Se da cuando la mezcla agua-aire se forma en una capa delgada en la superficie libre de la corriente. Aparentemente, el aire es atrapado por las partículas de agua que han sido lanzadas de la corriente principal. Este tipo de flujo presenta generalmente un incremento pequeño o moderado en el tirante.

del flujo. Como ejemplo se tienen las rápidas con poca pendiente y con el fondo del vertedor o canal de una rugosidad mediana o bien en canales y vertedores de gran longitud. Las características comunes son: variaciones grandes en la superficie del agua y considerables componentes normales de velocidad.

d) Flujo emulsificado.

Presenta una emulsificación fuerte y continua de aire, una superficie libre irregular y espumosa, y un incremento considerable en los tirantes del flujo. El arrastre se inicia súbitamente a cierta distancia (dependiendo de la rugosidad, pendiente y gasto) a partir de la parte superior de la estructura y continúa incrementándose con la distancia aguas abajo. Como ejemplo se tienen los flujos en canales y vertedores de gran pendiente o en rápidas de gran pendiente y fondo rugoso. Las características más comunes son: una turbulencia general a partir de la sección donde se inicia el arrastre y hacia aguas abajo; grandes componentes normales de velocidad y un gradiente de energía considerable.

e) Flujo que semeja la ebullición.

Presenta una superficie libre totalmente irregular con grandes velocidades en dirección normal a ella. En este caso, el

tirante del flujo se incrementa localmente; sin embargo, este incremento va disminuyendo conforme la turbulencia se va extinguiendo hasta que finalmente el aire escapa. Como ejemplos se tienen el salto hidráulico y los chorros a alta velocidad. Las características comunes son: grandes componentes verticales de velocidad y gradientes altos locales de energía.

Ehrenberger (1926) por su parte, dividió el flujo aireado en varias zonas (fig 2.3): una zona cercana al piso del canal con agua exclusivamente, una capa de agua con algunas burbujas de aire, una mezcla de agua-aire, una capa de aire con algunas gotas individuales de agua y finalmente un movimiento superior de aire. Posteriormente, varios autores han adoptado esta clasificación para delimitar las fases del flujo y atribuir características especiales a la fase intermedia para poder explicar sus observaciones.

En rápidas y vertedores a superficie libre, Cain y Wood (ref 24) dividen al flujo en zonas de desarrollo de la aeración en la forma siguiente (fig 2.4).

1. Región de flujo no aireado. Principia en la parte superior del vertedor o rápida y termina en el punto donde se inicia el fenómeno de la aeración.
2. Región de flujo gradualmente variado. Principia en el punto de inicio de arrastre y está formada por dos regioes

nes

- a) Región de flujo parcialmente aireado. Donde el aire no alcanza a llegar al fondo del canal.
 - b) Región de flujo totalmente aireado. Donde el aire ha penetrado en todo el tirante del flujo pero existen cam-
bios en los perfiles de velocidad y concentración de ai-
re de una sección a otra; esta región puede no existir
si el fenómeno de inclusión no es suficientemente fuerte.
3. Región final de flujo uniforme. Es la región final don-
de los perfiles de velocidad y concentración de aire no
cambian de una sección a otra.

De la clasificación dada por Michels y Lovely el tipo de flu-
jo que ha recibido mayor atención en las investigaciones rea-
lizadas es el denominado como flujo emulsificado, probablemen-
te porque es el que produce los mayores efectos pues el tiran-
te del flujo resulta mayor que el que se calcula para un flu-
jo con agua no aireada, pudiendo haber derrames a causa de un
libre bordo insuficiente en las paredes laterales de canales
y vertedores; además, la mezcla agua-aire no se comporta como
se comportaría el agua sin inclusión de aire.

2.3 Teorías que explican el origen del fenómeno

2.3.1 Teoría del afloramiento de la capa límite turbulenta

Parece ser que Lane (ref 9) fué el primero en adelantar la idea de que el arrugamiento superficial de la lámina vertiente, que precede la aparición del agua blanca, se debe a la turbulencia que ha llegado a aflorar en la superficie. Concretamente, el mecanismo sugerido por Lane sería el siguiente: Una vez que la corriente hace contacto con la cresta del vertedor empieza a formarse una capa límite laminar que poco más adelante se vuelve turbulenta. Esta capa va incrementando su espesor a medida que la lámina vertiente baja sobre el vertedor y en el momento justo en que ocupa todo el espesor del flujo, empieza a manifestarse el arrugamiento de la superficie que precede al agua blanca.

Analizando una sección transversal del flujo aireado se puede apreciar que una parte del gasto lo forman gotas de agua que han sido desprendidas del cuerpo de agua y lanzadas al aire por su cantidad de movimiento inicial, venciendo la fuerza de tensión superficial. Durante su regreso las gotas arrastran aire hacia la corriente principal. La cantidad de aire que una partícula o partículas de agua puede arrastrar depende, según Michels y Lovely (ref 20), del tamaño, forma y velocidad de cada partícula individual, de la densidad, de su distribu

ción espacial en el aire y del grado de interferencia mutua ocasionada por la existencia de movimientos laterales y fuerzas de impacto. Las proyecciones de gotas de agua hacia el fluido ambiental (aire) son de unas dimensiones y espaciamiento variable y presentan una ocurrencia aleatoria.

Killen y Anderson (ref 34), utilizando equipo fotográfico de alta velocidad de exposición, aprecian que la región superior del flujo no es una nubosidad de gotas de agua volando en el medio ambiente, las cuales al regresar arrastran aire a la masa fluida, sino que dicha región está compuesta por grupos de ondas superficiales de amplitud y frecuencia aleatoria. Estas ondas al romper arrastran el aire en forma de burbujas hacia la región inferior, donde son difundidas por turbulencia contrarrestando las fuerzas de flotación hasta establecer una distribución de concentración de aire estable. Si la difusión turbulenta no es lo suficientemente intensa, como para sobrepasar las fuerzas de flotación, podrá existir una región cerca del fondo del canal que esté libre de burbujas de aire. De esta manera, el agua blanca puede quedar prácticamente concentrada en la parte superior de la corriente, en espesores que se mantienen casi constantes sobre grandes distancias.

Finalmente, según la teoría del afloramiento de la capa límite turbulenta, para que el arrastre de aire principie y continúe desarrollándose con la distancia es necesario que la turbulen

ciá en la interfase de la corriente permanezca sensiblemente constante, o bien que tienda a incrementarse. Para que se cumpla estas condiciones es requisito indispensable que la capa límite turbulenta se extienda hasta alcanzar la superficie libre del agua. Esta hipótesis fue sugerida, como ya se dijo, -- por primera vez por Lane al comprobar experimentalmente que la sección crítica donde aparece el agua blanca se va alejando de la cresta a medida que crece el gasto, es decir, a medida que crecen los tirantes. De este modo, la capa límite turbulenta que empieza desarrollándose cerca de la cresta del cimacio y va elevándose poco a poco, alcanza la superficie libre tanto más aguas abajo cuanto mayor es el tirante.

2.3.2 Teoría de la afloración de estrías vorticosas.

Esta teoría fué presentada por E. Levi en 1965, para tratar de explicar el origen del agua blanca. Como resultado de una serie de observaciones experimentales, tanto en modelos como en prototipos, donde apareció el fenómeno; Levi señaló la presencia de estrías en sentido longitudinal, que aparecen claramente en la zona de iniciación del agua blanca. Levi explicó la emulsión de aire en las láminas vertientes como una consecuencia de la afloración de dichas estrías vorticosas, las que en contacto con la atmósfera producen un fuerte mezclado dando -- origen al fenómeno del agua blanca.

De esta manera, Levi descarta la posibilidad de que el origen del fenómeno sea la afloración de la capa límite turbulenta argumentando que el tipo de turbulencia desarrollada en la capa límite no parece en lo absoluto capaz de emulsionar instantáneamente cantidades muy grandes de aire, por el simple hecho de alcanzar el contacto con la atmósfera (ref 27).

Según esta teoría la descripción del fenómeno puede hacerse de la siguiente forma (ver fig 2.5): para un observador que mira de cerca notará la presencia de tres zonas: una zona en la parte superior donde la superficie del agua aparece tersa y lisa, eventualmente surcada por rayas longitudinales (zona 1); poco más abajo la superficie de la lámina vertiente se arruga sin que ésta pierda su transparencia (zona 2); luego empiezan a aparecer aisladamente flóculos espumosos, siempre más apretados, hasta que toda la superficie se vuelve completamente blanca (zona 3).

Entre las características principales de las estrias vorticosas, observadas por Levi, se puede decir que tienen un carácter aislado y esporádico con un espaciamiento casi regular entre ellas, además de que son persistentes, ya que después de romper una estria primitiva puede reestructurarse y eventualmente volver a romper más aguas abajo. En una primera investigación (ref 39) de estos vórtices, llevada a cabo en un modelo del vertedor de la presa Peñitas, Chih., el Dr. Levi suc

ción, un poco aguas abajo de la cresta, la capa límite de la vena líquida. A pesar de haberse aplicado fuertes aspiraciones, no fue posible hacer desaparecer o tan sólo atenuar las estrías; por esta razón y por su carácter aislado y esporádico, Levi supone que las estrías no pueden atribuirse a un desarrollo de capa límite aguas abajo de la cresta.

Una explicación de las características mencionadas puede hallarse, según Levi, en el fenómeno de la "ruptura de vórtices" (ref 31). Este fenómeno fue descubierto por Peckham y Atkinson en 1957, al estudiar en túneles de viento el comportamiento de alas delgadas en forma de delta para aviones supersónicos. Se observó que al aumentar el ángulo de ataque, los vórtices longitudinales que se desprenden de los extremos de las alas se iban intensificando hasta que a veces se producía, a cierta distancia aguas abajo, un cambio brusco en la naturaleza del vórtice mismo, como si un cuerpo hemisférico imaginario se hubiera colocado de repente sobre el eje del vórtice, obligando al fluido a rodearlo.

T.B. Benjamin ideó una teoría en que la ruptura de vórtices se considera como una transición entre dos estados conjugados dinámicamente, haciendo una analogía con lo que sucede en el salto hidráulico en el flujo en un canal. Para una distribución dada de carga total y de circulación en las superficies del flujo (ref 30), el estado de aguas abajo es "subcrítico"

ya que pueden producirse en el vórtice ondas estacionarias simétricas con respecto al eje del vórtice mismo, mientras que el estado de aguas arriba, en el cual esto no es posible, será "supercrítico".

Con estos antecedentes Levi caracteriza a las estrias que aparecen al final de la rápida de la fig 2.6 . Dichas estrias tienen todo el aspecto de vórtices ondulados en régimen subcrítico que provienen de estrias lisas que, por su tamaño, sobresalen entre el rayado superficial de la lámina y que serían los mismos vórtices en condiciones supercríticas. Es de notarse que mientras se encuentran en régimen supercrítico es tos vórtices no revelan ninguna tendencia a englobar aire, en cambio, en régimen subcrítico, si bien en un principio no hay mezcla aparente tal vez porque el movimiento vorticoso no alcanza la superficie, hacia aguas abajo empieza una emulsión rápida y violenta.

La presencia de dichas estrias en el sentido longitudinal, que aparecen claramente en la zona de iniciación del agua blanca, fueron observados en prototipos por diversos investigadores (ref 24).

Con relación al origen de las estrias es muy poco lo que se co noce hasta la fecha. Según Levi (ref 39), esas estrias no parecen nacer en la región de la cresta vertedora; sino en una

región cercana al piso del canal de llegada, a cierta distancia de la cresta, donde se forman vórtices paralelos a la corriente, que nacen dentro de la capa límite que se desarrolla en dicha región. Estos movimientos helicoidales se transforman aguas abajo de la cresta en poderosos vórtices superficiales capaces de producir el agua blanca.

En resumen, la explicación de Levi es como sigue (ref 30).

- a) Todo flujo, laminar o turbulento, que ingresa a una cresta vertedora o a una rápida, presenta la aparición de estrías vorticosas longitudinales en el sentido de la corriente (zona 1, fig 2.5).
- b) A cierta distancia a partir de la cresta ocurre una ruptura que crea condiciones subcríticas en las estrías y las abulta (zona 2, fig 2.5).
- c) Aguas abajo, donde las estrías han logrado aflorar en la superficie, grandes cantidades de aire quedan enrolladas e introducidas en el seno de la masa líquida, produciéndose así el agua blanca (zona 3, fig 2.5).

2.3.3 *Discusión de las teorías presentadas*

Desafortunadamente, hasta la fecha ninguna de las teorías presentadas ha sido demostrada completamente, ambas se basan en hipótesis sugestivas y observaciones cualitativas. La hipóte

sis de que la aparición del agua blanca es el resultado de la afloración de la capa límite, queda apoyada por las observaciones en prototipos donde se ha visto que la sección donde aflora dicha capa límite se aproxima a aquella donde principia la aeración. Sin embargo, esta hipótesis adolece de varias objeciones; como es el hecho de que una vez que la capa límite ha alcanzado la superficie libre, el agua blanca tendría que empezar en forma súbita y en una línea bien definida y trasversal a la dirección de la corriente, lo que no sucede en algunas estructuras; como por ejemplo en el vertedor de la presa el Recodo en México (fig 2.5), donde el inicio del fenómeno presenta un trazo irregular en forma de dientes de sierra. Incluso en algunas fotografías presentadas en la ref 20 se logra apreciar que una vez que el fenómeno está totalmente desarrollado, la estructurada estriada, arriba mencionada, subsiste por debajo de la capa de espuma superficial que la cubre. Así mismo, el proceso por el cual el aire es atrapado no parece tener la energía suficiente para introducir las grandes cantidades de aire que se observa lleva el agua blanca. No obstante, la aparente aproximación de los puntos de inicio de arrastre, calculados con esta teoría, hace pensar que la turbulencia generada en la superficie tenga alguna contribución en el desarrollo del fenómeno.

Por otra parte, estas objeciones se convierten en aspectos favorables si se considera la hipótesis de la afloración de las estrias longitudinales, ya que el carácter estriado de éstas y

la fuerte turbulencia que producen durante su afloramiento con cuerdan mejor con las características observadas durante el de sarrollo del fenómeno. Sin embargo, el escaso conocimiento que se tiene acerca de estas estrías ha hecho que esta teoría no haya sido estudiada más ampliamente. Por otra parte se plan tea la necesidad de estudiar la posibilidad de que sea, en con junto, la afloración de las estrías y de la capa límite turbu- lenta la que produzca el fenómeno.

Hasta ahora, se tiene una aceptación general del papel que jue ga la turbulencia en el mecanismo de la aeración; por esta ra- zón se han desarrollado importantes trabajos (Bauer, Campbell, Cox y Boyd, etc) para predecir el inicio del arrastre de aire basados en esta teoría. Sobresale entre ellos el trabajo de Keller y Rastogui (ref 12) quienes han demostrado experimen talmente que el inicio del agua blanca se acerca al punto donde aflora la capa límite turbulenta. Esto les ha permitido pre- sentar un método práctico y útil para el cálculo de la sección crítica de afloramiento. Este método junto con el de Bauer se presentan en el siguiente capítulo.

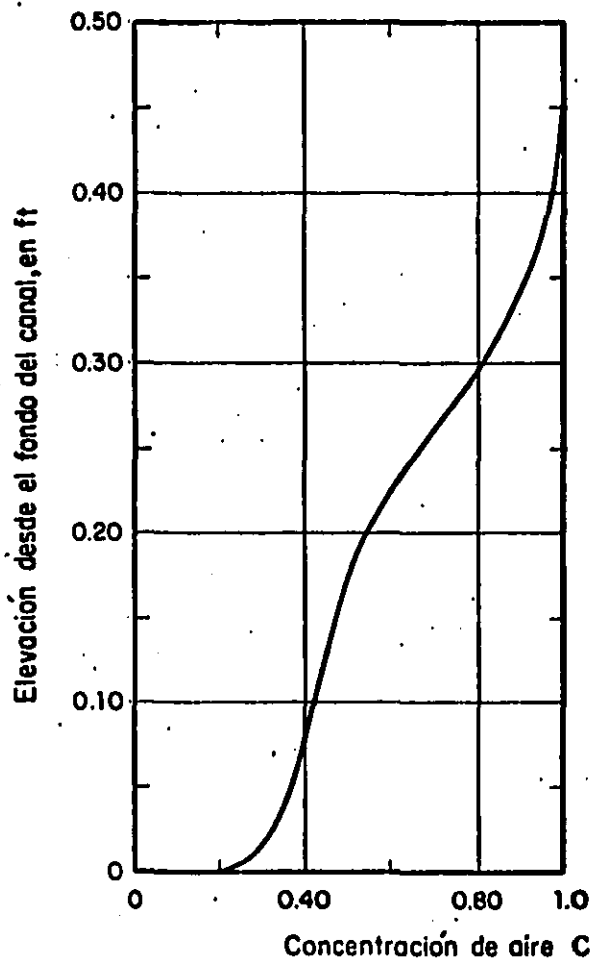


Fig 2.1 Distribución típica de concentración de aire
 $Q = 27 \frac{m^3}{s}$, $\theta = 45^\circ$ (ref 10)

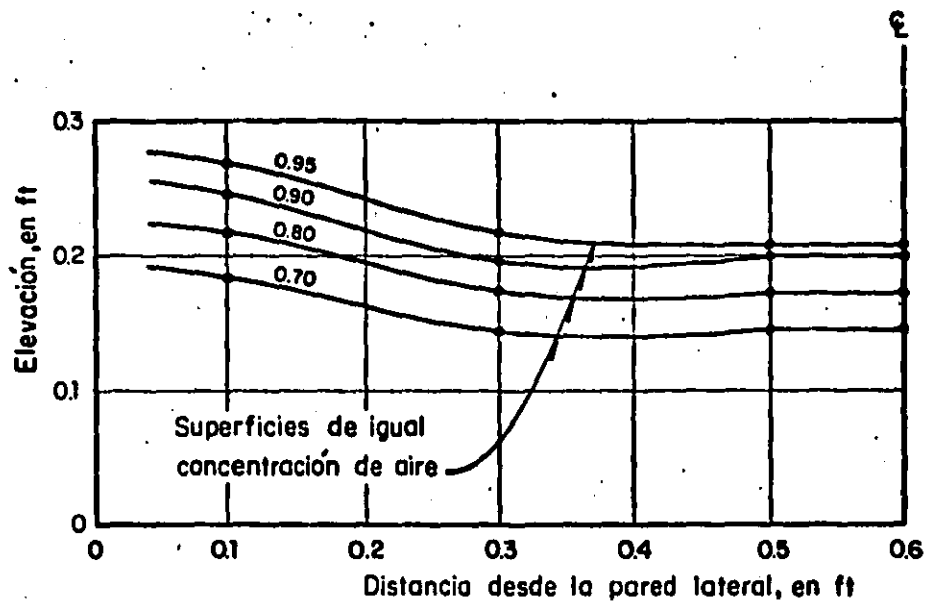


Fig 2.2 Distribución de la concentración de aire a través de una sección transversal aireada (ref 10)

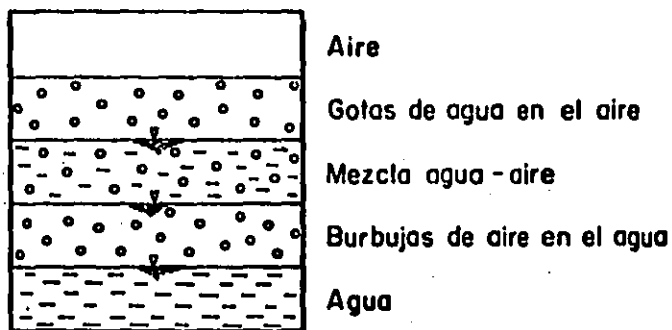


Fig 2.3 Clasificación de zonas en un flujo aireado, según Ehrenberger

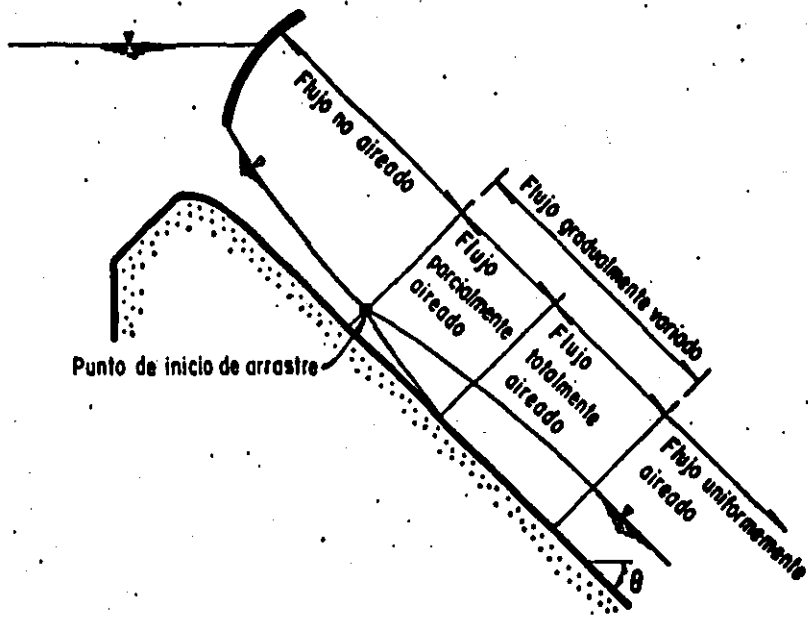


Fig 2.4 Regiones de flujo, según Cain y Wood(ref 24)

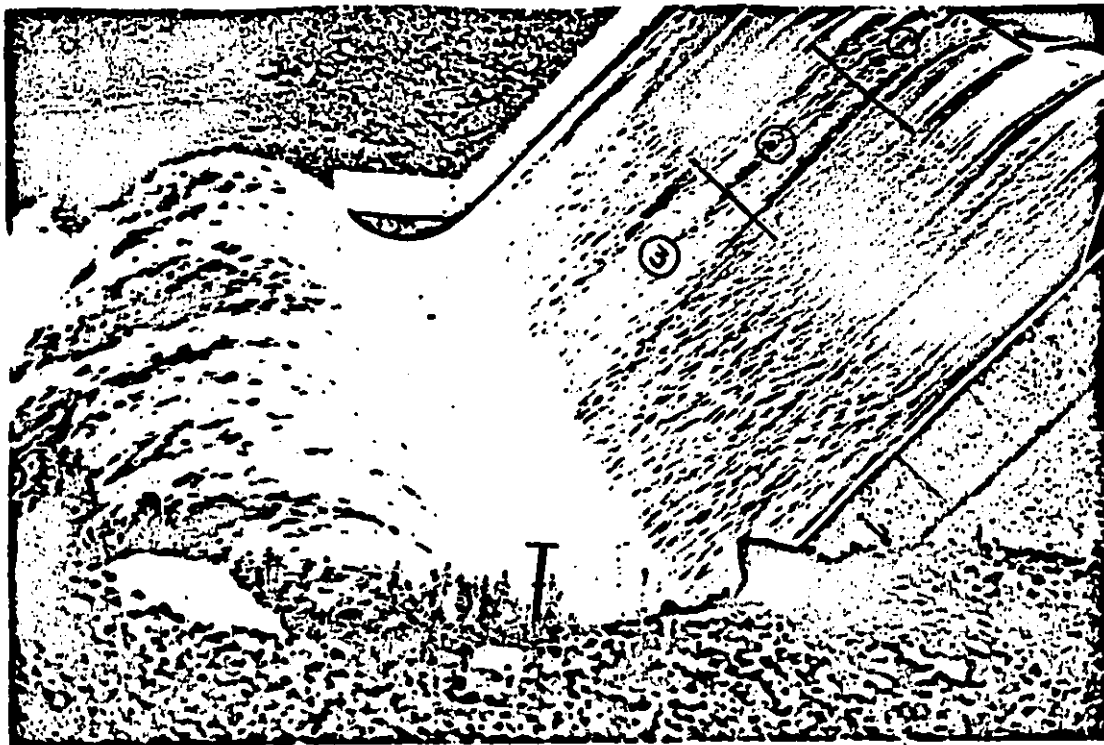


Fig 2.5 Clasificación del flujo aireado según E. Levi (ref 32)

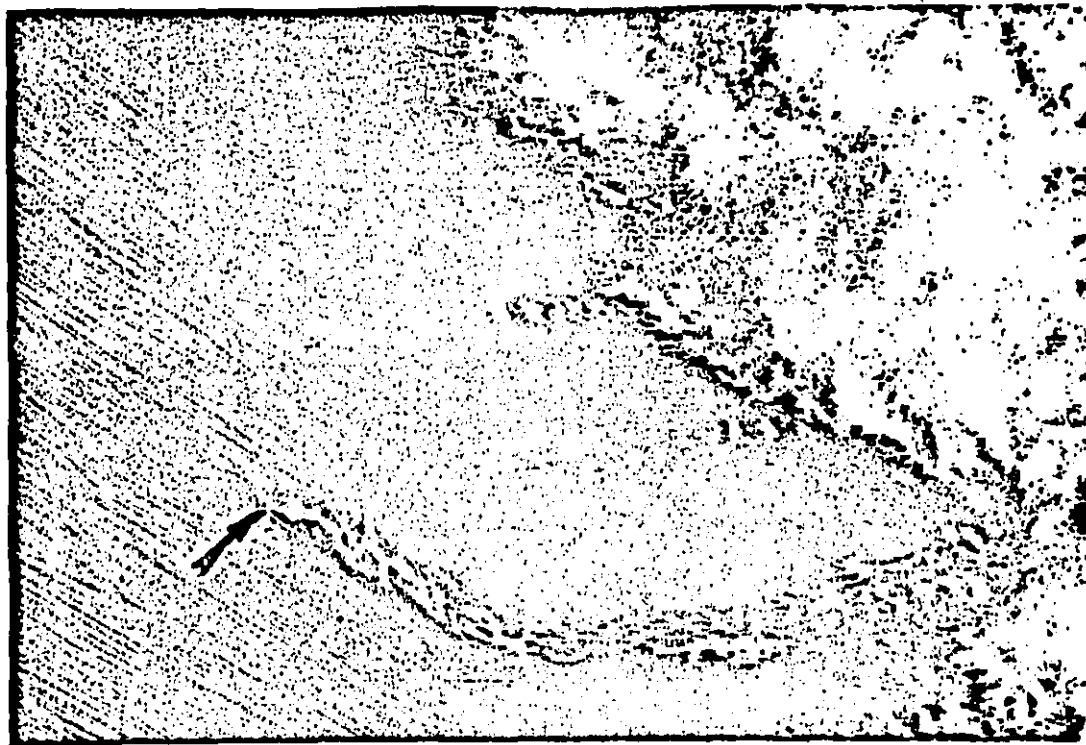


Fig 2.6 Vista parcial de la región final de un vertedor de abanico, mostrando el rompimiento de algunas estrías longitudinales (ref 32)

3. METODOS PARA LA PREDICCIÓN DEL ARRASTRE DE AIRE

3.1 *Introducción*

En el capítulo 2 se describieron las teorías sobre el origen del arrastre de aire; se ha dicho que la hipótesis más utilizada en las investigaciones realizadas es aquella que considera que el agua blanca principia en el punto donde la capa límite turbulenta tiene un espesor igual al tirante del flujo, se considera además que la cantidad de movimiento (producto de las fluctuaciones de velocidad) de las partículas de agua, localizadas en la superficie libre del agua, es suficiente para vencer la tensión superficial. Esta hipótesis se apoya en los resultados obtenidos por los métodos de predicción basados en esta teoría, resultados que concuerdan en forma aproximada con las observaciones experimentales realizadas por diferentes

autores (refs 11, 12, 19, 24).

En este capítulo se presentan dos métodos que permiten predecir el arrastre de aire en flujos sobre rápidas y vertedores, ambos basados en el desarrollo de la capa límite turbulenta. El primero de los métodos debido a W.J. Bauer (ref 11) publicado en 1954 y el segundo debido a Keller y Rastogui (ref 12) publicado en 1977. Asimismo, se presenta un análisis comparativo entre los puntos críticos obtenidos con el método de Bauer, para diferentes pendientes, gastos y rugosidades, y los puntos críticos observados en diferentes prototipos y que han sido reportados en la literatura. Finalmente, se presenta el análisis del principio de la aeración que basado en la afloración de las estrías vorticosas fue sugerido por el Dr. Levi.

Antes de dar paso a la presentación de los métodos conviene exponer algunos conceptos de la teoría de la capa límite turbulenta.

3.2 *Conceptos generales sobre capa límite*

En 1904 L. Prandtl desarrolló el concepto de capa límite el cual proporciona un importante enlace entre el flujo de un fluido ideal y el de un fluido real; en este último si la viscosidad es pequeña (como en el agua por ejemplo), el efecto de rozamiento en el fluido es apreciable en una región cerca-

na a las fronteras sólidas del flujo; la que como se ve a continuación, puede crecer hasta alcanzar todo el flujo. Fuera de esta región el flujo se considera como el de un fluido ideal o flujo potencial.

La capa de fluido que ve su velocidad afectada por la fuerza cortante en la frontera recibe el nombre de capa límite, la cual es sumamente delgada en el borde de ataque de una frontera sólida que se encuentre en reposo al paso de un fluido con velocidad uniforme. Conforme más alejados sean los puntos de la pared, la velocidad se acercará asintóticamente a la velocidad del flujo potencial; por otro lado, la acción continua de los esfuerzos cortantes tiende a frenar partículas adicionales de fluido a medida que se avanza en la dirección del flujo, esto hace que el espesor de la capa límite se incremente con la distancia desde el borde de ataque. En la fig 3.1 se muestra, para un flujo sobre una placa plana, en forma esquemática ese aumento y la distribución de velocidades.

Se considera como espesor, δ , de la capa límite la distancia desde la pared al punto donde la velocidad alcanza un valor igual a 0.99 de la velocidad media U_0 (velocidad de un flujo potencial). El límite anterior se expresa como: $y = \delta$ si $u = 0.99 U_0$ y se ha escogido por la necesidad de acotar la capa límite, ya que teóricamente $u = U_0$ cuando $y = \infty$.

En un principio, el flujo dentro de la capa límite es laminar

y las velocidades siguen una distribución parabólica. Esa capa se conoce como capa límite laminar. Al continuar incrementándose el espesor de la capa, el flujo en ella puede llegar a ser inestable y la capa límite laminar pasa a ser turbulenta. La secuencia capa límite laminar-capas límite turbulenta se da a través de una transición y ocurre siempre que la superficie sobre la que se desarrolla la capa límite sea suficientemente larga (fig 3.1). A medida que el grado de turbulencia de la corriente libre aumenta, o es mayor su velocidad U_0 , la transición de capa límite laminar a turbulenta ocurre más cerca del borde de ataque. Dicha región de transición no tiene una localización fija sino que oscila en la dirección del flujo. Para definir la distancia a la cual se inicia la transición de laminar a turbulento, se utiliza generalmente el número de Reynolds, $R_x = U_0 X / \nu$, donde como ya se dijo, U_0 es la velocidad del flujo libre no afectado por los efectos viscosos, X es la distancia medida a partir del inicio de la placa o frontera en la dirección del escurrimiento, y ν , es la viscosidad cinemática del fluido. Experimentalmente se ha visto que la transición se presenta cuando dicho número de Reynolds está comprendido entre 500,000 y 3,000,000. Así, el flujo dentro de la capa límite es laminar si $R_x < 500,000$ y es turbulento si es mayor de 3,000 000 .

Aún cuando el régimen en la capa límite se haya transformado en turbulento se tiene una capa muy delgada adyacente a la pared que presenta características de flujo laminar; a ésta re-

gión se le conoce como subcapa viscosa (ver fig 3.1)

La naturaleza del flujo dentro de la capa límite se complica por la presencia de un flujo rotacional y por esfuerzos corrientes internos, los cuales alcanzan un máximo en la frontera sólida. En el caso de la capa límite laminar, ambas complicaciones se pueden considerar a través de un tratamiento analítico (solución de Blasius) y su desarrollo se puede manejar sin tener que recurrir a mediciones experimentales.

Por otra parte, se ha visto que la capa límite turbulenta está formada por zonas de diferentes tipos de flujo. Así, la viscosidad efectiva, la cual es la suma de la viscosidad dinámica molecular y la viscosidad dinámica de remolino (viscosidad vorticosa) varía de la pared hacia afuera, a través de la capa límite, esto dificulta un posible tratamiento analítico. En vez de esto, se siguen procedimientos semiempíricos, en los cuales se predice la forma de la relación entre el esfuerzo tangencial en las paredes y la distribución de velocidad.

Una descripción detallada y completa de la teoría de la capa límite cae fuera de los propósitos de este trabajo, mayores detalles pueden verse en las referencias 13 a 16. Aquí solamente se presentan algunos de los conceptos que se consideran importantes para definir el desarrollo de la capa límite sobre un canal de pendiente fuerte.

En adición al espesor nominal de la capa límite, ya definido anteriormente, generalmente se utilizan dos parámetros más de longitud para el estudio de capa límite, el primero de ellos se refiere al llamado espesor de desplazamiento δ_d , definido analíticamente por

$$\delta_d = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy \quad (3.1)$$

y que es la distancia que habría que desplazar la pared hacia adentro del fluido para que el caudal fuese el mismo que se tendría si no hubiese acción de frenado de las partículas fluidas en las proximidades de la pared. En otras palabras, la ec 3.1 permite obtener la distancia que tendría que desplazarse la frontera hacia dentro del flujo, de tal manera que con la velocidad U_0 , se tuviera el mismo gasto unitario. Conocida la ley de distribución de velocidades, u , es factible valuar δ_d , con mayor propiedad que la fijada al valuar δ .

Experimentalmente se ha visto (ref 11) que el espesor de desplazamiento adquiere valores entre 1/8 y 1/10 del espesor de la capa límite, dependiendo del número de Reynolds.

El otro parámetro se refiere al espesor de cantidad de movimiento δ_m , definido por

$$\delta_m = \int_0^{\delta} \left(\frac{u}{U_0} - \left(\frac{u}{U_0}\right)^2 \right) dy \quad (3.2)$$

y que es el desplazamiento de la frontera tal que con la velocidad U_0 , se reproduce la cantidad de movimiento del flujo.

Este parámetro adquiere valores del orden de 0.12 del espesor de la capa límite; si se considera que la distribución de velocidad es representada por $(u/U) = (u/U)^n$, donde $n = .22$ - - (ref 28).

En la fig 3.2 se presenta una esquematización de ambos parámetros.

Para obtener las características de la capa límite (espesor, distribución del esfuerzo cortante, etc), se han buscado soluciones que, aunque aproximadas, permitan resultados prácticos fáciles y rápidos. Entre dichos métodos se encuentra el propuesto por Von - Karman, que consiste en aplicar la ecuación de cantidad de movimiento a un volumen de control dentro de la capa límite. Esta ecuación se puede expresar para un régimen permanente como (ref 11):

$$C_1 = \frac{2 \tau_0}{\rho U_0^2} = 2 \frac{d \delta_m}{dx} + (2 + \Delta) \frac{\delta_m}{U_0^2} \frac{d U_0^2}{dx} \quad (3.3)$$

donde

- τ_0 , esfuerzo cortante que actúa sobre la frontera sólida
- C_1 , coeficiente local de resistencia
- ρ , densidad del fluido
- $\Delta = \delta_d / \delta_m$, parámetro que toma en cuenta la forma del perfil de velocidades
- x , distancia desde el borde de ataque

La ecuación 3.3 puede integrarse, para un flujo potencial arbitrario $U_0(x)$, si se conoce cómo se relacionan δ_m , δ_d y C_1 .

Muchas de las ideas concernientes a la capa límite encuentran sus bases en abundantes datos experimentales sobre el flujo en tuberías, entre ellas se encuentran las ecuaciones de distribución de velocidad de Prandtl - Von Karman para flujos turbulentos. A este respecto H. Rouse (ref 17) presenta

$$\frac{u}{V_*} = 5.75 \log_{10} \left(\frac{V_* y}{\nu} \right) + 5.5 \quad (3.4a)$$

para superficies lisas, y

$$\frac{u}{V_*} = 5.75 \log_{10} \left(\frac{y}{K} \right) + 8.5 \quad (3.4b)$$

para superficies rugosas, donde V_* es la velocidad al cortante ($V_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$), K es la rugosidad equivalente de Nikuradse e y es el tirante del flujo.

3.3 Método de Bauer (ref 11)

La ecuación integral de cantidad de movimiento de Von Karman (ec 3.3) es modificada por Bauer a través de una simplificación. Para ello Bauer define la carga de velocidad para el flujo potencial, de acuerdo con la fig 3.2, de la siguiente forma

$$\frac{U_0^2}{2g} = X S \quad \text{o bien,} \quad X = \frac{U_0^2}{2g S} \quad (3.5)$$

en la cual g , es la aceleración de la gravedad, S , es el seno de la función del ángulo de inclinación del canal con la horizontal. Sustituyendo esta definición en la ec 3.3 resulta

$$C_1 = 2 \frac{d \delta_m}{dx} + \frac{\delta_m}{x} + 2 \frac{\delta_m}{x} \quad (3.6)$$

La ecuación 3.6 representa, como ya se dijo, una aproximación a la ecuación de Von Karman 3.3, puesto que al definir X , con la ec 3.5 se ha despreciado el gradiente de presión y se ha supuesto que las pendientes del lecho y de la superficie libre del agua son iguales; por esto mismo, el origen de las X no es constante, mientras que al derivar con respecto a ella se ha supuesto que sí lo es. Sin embargo, según Bauer, las aproximaciones anteriores no introducen serios errores, excepto en la región cercana a la cresta del vertedor.

La ec 3.6 permite conocer el espesor de la capa límite δ , ya que, si se conocen C_1 y Δ la ecuación puede resolverse para δ_m . Conociendo este valor y el de u , el valor de δ , se puede obtener a partir de la ec 3.2.

Sin necesidad de entrar a discutir las ecuaciones de movimiento, Bauer estudió las características de la capa límite a través de los parámetros C_1 , Δ y δ por medio de argumentos exclu-

sivamente adimensionales. Un análisis de las ecuaciones anteriores le permitió determinar las variables que intervienen en el problema; agregando las propiedades del fluido formó las siguientes relaciones

$$\delta = f_1(U_0, k, x, \mu, \rho, g, q, S) \quad (3.7)$$

$$C_1 = g_1(U_0, k, x, \mu, \rho, g, q, S) \quad (3.8)$$

$$\Delta = h_1(U_0, k, x, \mu, \rho, g, q, S) \quad (3.9)$$

en la cual μ , es la viscosidad dinámica del fluido y q es el gasto unitario.

Aplicando el teorema de Buckingham - Vaschy es posible reducir el número de variables formando combinaciones adimensionales entre ellas, tales como

$$\frac{\delta}{x} = f_2\left(\frac{U_0 x}{\nu}, \frac{k}{x}, \frac{U_0^2}{gx}, \frac{q}{U_0 x}, S\right) \quad (3.10)$$

$$C_1 = g_2\left(\frac{U_0 x}{\nu}, \frac{k}{x}, \frac{U_0^2}{gx}, \frac{q}{U_0 x}, S\right) \quad (3.11)$$

$$\Delta = h_2\left(\frac{U_0 x}{\nu}, \frac{k}{x}, \frac{U_0^2}{gx}, \frac{q}{U_0 x}, S\right) \quad (3.12)$$

A partir de la definición de X (ec 3.5) puede verse que el cociente U_0^2/gx , es directamente proporcional a la pendiente S ,

de manera que ambos parámetros adimensionales son redundantes y por lo tanto es posible eliminar a una de ellas sin alterar en nada la determinación del problema. Resulta más apropiado eliminar la combinación U_0^2/gx , puesto que, S , generalmente es un dato y no requiere de cálculo alguno. Con lo anterior las relaciones funcionales (3.10) a (3.12) se reducen a

$$\frac{\delta}{x} = f_2 \left(\frac{U_0 x}{\nu}, \frac{k}{x}, \frac{g}{U_0 x}, S \right) \quad (3.13)$$

$$C_1 = g_2 \left(\frac{U_0 x}{\nu}, \frac{k}{x}, \frac{g}{U_0 x}, S \right) \quad (3.14)$$

$$\Delta = h_2 \left(\frac{U_0 x}{\nu}, \frac{k}{x}, \frac{g}{U_0 x}, S \right) \quad (3.15)$$

A partir de aquí, es necesario recurrir a la experimentación para tratar de encontrar la forma en que las combinaciones adimensionales anteriores describen el fenómeno.

La investigación de laboratorio realizada por Bauer se puede resumir en las figuras 3.3. a 3.7; en la fig 3.3. se muestran los perfiles de velocidad, para una superficie lisa, medidos por Bauer, de donde le fue posible obtener el espesor de la capa límite, asociada a una distancia medida a partir del origen mostrado en la fig 3.2. los perfiles de velocidad y espesores de la capa límite correspondientes a una superficie rugosa se presentan en la fig 3.4.

Con los valores medidos del espesor de la capa límite, los valores de k (correspondiente a canal liso o canal rugoso), de S (pendiente del canal), q (gasto unitario) y los valores de U_0 , calculados con la ec 3.5, Bauer obtuvo todos los elementos que intervienen en la relación funcional 3.13. Asimismo calculó, a través de integración numérica, los valores de δ_d y δ_m (ecs 3.1 y 3.2) y con ellos el valor del parámetro Δ y posteriormente el coeficiente C_1 (ec 3.6) correspondiente. Con el análisis dimensional y las mediciones anteriores, Bauer, pudo apreciar la influencia de cada uno de los parámetros adimensionales sobre el desarrollo de la capa límite; estos resultados se presentan a continuación.

El gasto tiene poco efecto sobre el espesor de la capa límite para un valor fijo de X . Esto puede apreciarse en las figs 3.5 y 3.6. Se ve ahí que los puntos correspondientes a una misma pendiente y rugosidad pero con diferentes gastos caen en una misma línea, dentro de los límites de la variación experimental. Sin embargo, sí juega un papel significativo en la determinación del tirante de flujo y por lo tanto en U_0 , de manera que es determinante en la localización del punto crítico dado que la presencia de una superficie libre limita el desarrollo de la capa límite. Por tanto, es necesario el conocimiento del valor del gasto para obtener el valor de X al cual se da este límite.

Al igual que el gasto la pendiente también, tiene un efecto pe

queño sobre el espesor de la capa límite para un valor fijo de X . Sin embargo, como en el caso del gasto, el conocimiento de la pendiente es necesario en el cálculo del tirante del flujo y de la localización del punto crítico (punto donde la capa límite interseca la superficie del agua).

Según Bauer, de todas las variables manejadas parece ser que la rugosidad de la frontera es la variable que tiene el mayor efecto en la determinación del espesor de la capa límite. Este efecto puede apreciarse con toda claridad en la fig 3.7, donde Bauer ubicó en forma dimensional los valores de la variable X (en las abscisas) y del espesor δ (en las ordenadas); es de notarse que todos los puntos siguen claramente dos tendencias diferentes, una para la superficie lisa y otra para superficie rugosa. Estas tendencias también son apreciables en la fig 3.5; sin embargo, en esta figura Bauer hace notar que la diferencia entre los efectos de ambas rugosidades se hacen más acentuadas en el rango medio del número de Reynolds, R , y son menos apreciables para números de Reynolds muy bajos o muy altos. Según Bauer, esto es de esperarse por dos razones; la primera es que con números de Reynolds bajos el flujo dentro de la capa límite es aún laminar, de manera que la rugosidad de la frontera no tiene efectos importantes, y la segunda es que conforme se avanza en la dirección del escurrimiento el número de Reynolds se incrementa cada vez más y lo mismo sucede con el espesor de la capa límite, de manera que a un espesor

grande el efecto que la rugosidad tiene sobre la turbulencia es proporcionalmente menor, en otras palabras, el efecto de la rugosidad es distribuido sobre un área mayor con lo que se reduce su efecto sobre el desarrollo de la capa límite.

Esta última observación es bastante importante en el problema de flujos a alta velocidad (p.j. flujo sobre vertedores) ya que a medida que sea mayor el número de Reynolds, el error al estimar K tendrá un efecto poco significativo en el cálculo de la localización del punto crítico.

Por otra parte la rugosidad del canal con malla representativo de una superficie rugosa, $K = 0.009$ pies, utilizada en las investigaciones de Bauer resulta ser mayor que la de los concretos generalmente usados en los vertedores, donde suponiendo una $n = 0.014$ (coeficiente de rugosidad de Manning) se obtiene para K , un valor aproximado de 0.005 pies (0.0015 m) (para un tirante de 0.5 m). Keulegan, estudiando los datos de Bauer en contró que para el canal con malla, el valor de K debe ser de 0.0014 pies (0.00042 m); en realidad, el valor de $K = 0.009$ pies encontrado por Bauer representa, según Campbell, Cox y Boyd (ref 28), aproximadamente cuatro veces el diámetro del alambre de la malla utilizada. Sugieren por lo tanto utilizar el valor de $K = 0.0014$ pies. En forma parecida Keulegan propo ne para los datos de Hickox, empleados por Bauer en su curva de la fig 3.6, un valor de $K = 0.00167$ pies (0.00050 m) con-

trariamente al valor de $K = 0.005$ pies utilizado por Bauer. Desafortunadamente no fue posible conseguir el trabajo original de Keulegan para poder comentar sobre los valores de K obtenidos.

En 1965 Campbell, Cox y Boyd (ref 28) reanalizaron los datos de Bauer con los valores corregidos de la rugosidad. Sus resultados aparecen en la fig 3.8; en ella se han incluido los resultados de Bauer (fig 3.6) así como algunos puntos, correspondientes a mediciones en prototipos, reportados en la ref 20.

La nueva curva de diseño, mostrada en la fig 3.8, propuesta por Campbell, Cox y Boyd puede representarse por medio de la siguiente ecuación

$$\frac{\delta}{L} = 0.080 \left(\frac{L}{K} \right)^{-0.233} \quad (3.16)$$

donde

L , distancia medida a lo largo de la frontera, a partir del punto $0'$ de la fig 3.2 .

En el siguiente inciso se cuantifica (con un ejemplo) la diferencia que se obtiene al emplear la curva de diseño de Bauer en comparación con el uso de la ec 3.16 (resultado de Campbell, Cox y Boyd).

Como ya se ha mencionado, la teoría más utilizada para explicar el fenómeno de la inclusión de aire considera el inicio del fenómeno en el punto donde la capa límite turbulenta aflora en la superficie libre del agua. De esta forma, el cálculo de la localización del punto de afloramiento o punto crítico permite predecir la probable inclusión de aire en una longitud propuesta de un vertedor; es decir, la distancia a la que se da el punto crítico permite decir si en una determinada longitud de vertedor habrá o no inclusión de aire. El método de Bauer que a continuación se describe está basado en sus resultados experimentales y permite el cálculo de la distancia al punto crítico.

Bauer presenta la aplicación del método a través del siguiente ejemplo.

Supóngase un vertedor de concreto de longitud indefinida con un ángulo de inclinación con respecto a la horizontal de $\theta = 53^{\circ}8'$ (fig 3.2) y una rugosidad tal que $K = 0.0015$ m. Calcúlese la distancia al punto de afloramiento de la capa límite turbulenta cuando la descarga sobre el vertedor es de $33.14 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$.

Solución. Los cálculos se presentan en la tabla 3.1; los encabezados se explican a continuación:

Col. 1 Distancia X , en m, propuesta arbitrariamente, medida a

partir de 0 (ver fig 3.2),

- Col. 2 El valor de X/K , donde $K = 0.0015$ m.
- Col. 3 El valor correspondiente de δ/X , utilizando la fig 3.6, o bien su representación a través de la ecuación

$$\frac{\delta}{X} = 0.024 \left(\frac{X}{K} \right)^{-0.13} \quad (3.17)$$

- Col. 4 El valor de δ en m, multiplicando X por δ/X .
- Col. 5 La carga de velocidad $U_0^2/2g$ con la ec 3.5, donde $S = \sin \theta = 0.80$, esto es $U_0^2/2g = 0.80 X$.
- Col. 6 La velocidad U_0 en m/s, como $U_0 = \sqrt{2g SX}$
- Col. 7 El espesor del flujo potencial, en m, igual al gasto unitario q , dividido entre la velocidad U_0 .
- Col. 8 El espesor total del flujo, en m, igual al espesor del flujo potencial más el espesor de desplazamiento δ_d , el cual se supone es del 10% del espesor de la capa límite.

Es importante hacer notar que el flujo sobre el vertedor de este ejemplo, siendo gradualmente variado, se ha calculado por un método simplificado. Por otra parte, el origen de coordenadas para la distancia al punto crítico es la intersección de la línea de cargas totales con una línea que pase por

dicho punto y sea paralela al fondo del canal. Este procedimiento satisface la definición de X .

Los valores del nivel de la superficie libre del agua (Col. 8) y de la capa límite (Col. 4) se grafican contra la distancia X (Col. 1) en papel logarítmico (fig 3.9). El punto de intersección de ambos perfiles indica la localización del punto crítico donde el espesor de la capa límite alcanza un valor igual al tirante del flujo en esa sección. Esa distancia resulta ser de 144.0 m, de manera que la inclusión de aire ocurrirá probablemente a una distancia aproximada de $X = 144.0$ m, medida a partir del punto 0 de la fig 3.2.

Con el propósito de ilustrar el efecto que tendría sobre el desarrollo de la capa límite el hecho de tener una rugosidad distinta, se repite el cálculo para los mismos datos del ejemplo anterior pero ahora con una rugosidad del doble, es decir, $K = 0.003$ m. Los cálculos se presentan en la tabla 3.2 y en la fig 3.9 su representación gráfica con la línea marcada con $K = 0.003$ m. El cambio en la superficie del agua es prácticamente despreciable; asimismo, se puede ver que la diferencia entre los valores de las distancias al punto crítico para ambos casos es de aproximadamente 10 m, es decir, una variación del 8.0%.

Para mostrar la diferencia que se obtiene al emplear la curva de diseño de Bauer (o ec 3.17) se ha resuelto el mismo ejem-

plo anterior empleando la ec 3.16, producto de las correcciones realizadas por Campbell, Cox y Boyd, los resultados se muestran en la fig 3.9; se puede apreciar que las diferencias en la localización del punto crítico son de aproximadamente 2% para $K = 0.0015$ m y de 4% para $K = 0.0030$ m. Esto demuestra que en la zona de interés, (donde para el ejemplo $R = 5 \times 10^9$) un error en la determinación de la rugosidad de la frontera no produce errores graves en el cálculo de la localización del punto de afloración de la capa límite turbulenta.

3.4 Método de Keller y Rastogui (refs 12 y 19)

El segundo método de predicción que se describe a continuación fue desarrollado por Keller y Rastogui en dos partes. En la primera parte (ref 12) se desarrolló un modelo teórico basado en la solución numérica de las ecuaciones de Navier - Stokes en forma bidimensional, con el propósito de predecir distribuciones de velocidad, desarrollo de la capa límite y perfiles de la superficie libre del agua. En esta forma, el modelo fue utilizado para predecir la posición del punto crítico donde la capa límite encuentra la superficie del agua (como se recordará, al principio de este capítulo se mencionó que Keller y Rastogui también aceptan como principio del fenómeno de la aeración al punto crítico). Las predicciones obtenidas se compararon con resultados experimentales disponibles en la

literatura tanto en modelos como en prototipos. En la segunda parte (ref 19) el modelo fue utilizado para generar diferentes situaciones de flujo (con diferentes pendientes, gastos y rugosidades) sobre un vertedor de paramento vertical aguas arriba. De esta manera se obtuvieron las distancias al punto crítico para cada combinación de gasto, pendiente y rugosidad; los resultados fueron estudiados a través de un análisis dimensional lo que permitió a los autores construir gráficas adimensionalizadas para la localización del punto crítico.

Para resolver las ecuaciones diferenciales parciales de Navier Stokes los autores adaptaron el procedimiento de diferencias finitas de Spalding - Patankar (ref 18).

Las ecuaciones que representan el flujo en el sistema de coordenadas mostrado en la fig 3.10 pueden escribirse como

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{1}{\phi} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{u'v'}) + \frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial U}{\partial y}) \quad (3.18)$$

para la ecuación de cantidad de movimiento; y

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3.19)$$

para la ecuación de continuidad.

donde

- $U, V,$ componentes de la velocidad media en las direcciones x e y respectivamente
 $u', v',$ componentes de las fluctuaciones de velocidad en las direcciones x e y respectivamente
 $\phi, \nu,$ densidad y viscosidad del flujo respectivamente
 $p,$ presión del flujo
 $g \text{ sen } \theta,$ componente de la aceleración gravitacional a lo largo de la cara del vertedor

Sin tratar de establecer los detalles de las fluctuaciones, ambas ecuaciones se pueden resolver si se conocen el gradiente de presión y los esfuerzos de Reynolds. El gradiente de presión se valía suponiendo una distribución lineal de presiones perpendicular a la cara del vertedor. Por otra parte, para una turbulencia plenamente desarrollada $\tau = -\phi \overline{u'v'} = \eta (\partial U / \partial y)$, de manera que

$$-\overline{u'v'} = \frac{1}{\phi} \eta \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.20)$$

es decir; los esfuerzos de Reynolds ($-\overline{u'v'}$) se pueden expresar en forma semejante al esfuerzo cortante asociado a un flujo laminar; η es una viscosidad vorticiosa dinámica la cual depende del estado del movimiento turbulento. Para definir a la viscosidad vorticiosa los autores utilizaron la ecuación

$$\eta = \phi C_D \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.21)$$

donde

C_D , constante empírica

$k = 1/2 (\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2)$, energía cinética turbulenta

ϵ , coeficiente de disipación de la energía cinética turbulenta

Los términos k y ϵ que aparecen en la ec 3.21 son valuados utilizando un modelo turbulento descrito en la ref 36, el cual consiste básicamente en resolver la ecuación de cantidad de movimiento para k y ϵ .

Una descripción completa del procedimiento numérico puede verse en la ref 18 y su calibración en la ref 12, aquí únicamente se discutirán algunos detalles de los resultados obtenidos, por los autores en la segunda parte (ref 19) y que constituye la base del método.

Una vez calibrado, Keller y Rastogui, utilizaron el modelo para predecir la influencia de parámetros geométricos e hidráulicos sobre la localización del punto crítico fuera del rango de mediciones disponibles.

Los datos utilizados en el modelo cubren un amplio rango de gastos y rugosidades y pendientes del vertedor; estos datos se presentan en la tabla 3.3. En la tabla puede verse la localización del punto crítico para cada combinación de los datos anteriores; ya que el modelo predice (para cada combinación de

datos) el desarrollo de la capa límite y el perfil de la superficie libre del agua, el punto crítico se localiza en la sección donde la capa límite alcanza un espesor igual al del tirante del flujo. Estos resultados se presentan en la tabla 3.4 .

Una vez que se hubieron detectado los parámetros que influyen en la localización del punto crítico, los autores establecieron la siguiente relación funcional

$$X_c = f(q, k, S, g) \quad (3.22)$$

donde

- X_c , distancia al punto crítico, medida a partir de la cresta del vertedor (ver fig 3.10)
- g , aceleración de la gravedad
- k, S , corresponden a las mismas variables definidas en el método de Bauer

Un análisis dimensional produce para la relación funcional 3.22 la siguiente expresión

$$\frac{X_c}{k} = h(q/(g k^3)^{1/2}, S) \quad (3.23)$$

Los valores de X_c , obtenidos con el modelo, pueden combinarse con los datos de entrada en la forma expresada por la ec 3.23. Los resultados de estas combinaciones se presentan en la tabla 3.5 . A partir de estos resultados los autores construyeron

las gráficas que aparecen en la fig 3.11 . Estas gráficas constituyen una forma generalizada de obtener el valor de X_c a partir de datos, usualmente, conocidos de antemano.

Es conveniente aclarar que los autores solamente probaron un tipo de geometría de vertedor, ésta consiste en un vertedor de tipo cimacio con paramento vertical aguas arriba, de manera que las gráficas de la fig 3.11 sólo serán aplicables a este tipo de geometría.

En la fig 3.11 se ha incluido una curva extra correspondiente a una pendiente de 20° , esta curva fue obtenida, por los autores, a través de un proceso de interpolación con los resultados obtenidos en la tabla 3.4 . Estos resultados fueron comprobados con aquéllos obtenidos con el modelo matemático; el objetivo de estos cálculos fue el de apreciar los errores que se cometen durante un proceso de interpolación. Según Keller y Rastogi, estos errores son pequeños de manera que el proceso de interpolar en las curvas de la fig 3.11 parece justificable.

Una de las condiciones necesarias para poder resolver la ec 3.18 fue la de suponer una distribución de presión lineal normal a la cara del vertedor; sin embargo, la forma geométrica de la cresta del vertedor, elegida por los autores para la generación de datos sintéticos con el modelo matemático, involucra una presión nula sobre el vertedor en la región de la cresta. Para ilustrar el error que se comete al considerar ambas hipó-

tesis en el término de la presión de la ec 3.18, se presentan en la tabla 3.6 los resultados obtenidos por Keller y Rastogui al correr el modelo matemático con las dos hipótesis. Como puede verse en la tabla 3.6, para los datos probados por los autores, los errores cometidos son menores del 1% por lo que consideran como satisfactorios los resultados obtenidos.

En la fig 3.12 se han ubicado los mismos puntos de la fig 3.11 en papel doble logarítmico. Se puede ver que todos los puntos se alinean sobre rectas, indicando que éstas pueden ser representadas por una ley de potencias del tipo

$$y = a x^b \quad (3.24)$$

donde

$$y = (x_c/k) \times 10^{-4}$$

$$x = (q/(gk^3))^{1/2} \times 10^{-4}$$

a, b, coeficientes de ajuste

El coeficiente b, de la ec 3.24 representa la pendiente de las rectas mostradas (en papel doble logarítmico) en la fig 3.12 y el coeficiente a, la correspondiente "ordenada al origen"; a excepción del coeficiente a, todas las rectas tienen (en promedio) un mismo valor del coeficiente b. Por tanto, parece razonable esperar que el coeficiente a, varíe conforme varíe el ángulo de inclinación del canal, esto es, conforme varíe el valor de θ ; en otras palabras, cada curva mostrada en la fig 3.11

puede ser representada por una expresión del tipo de la ec 3.24, donde el valor del coeficiente b , será constante para todas las curvas y el valor de a , será una función del ángulo θ . Realizando un análisis de regresión para cada curva de la fig 3.11, se obtienen los valores de los coeficientes a y b , correspondientes a cada ángulo θ y se presentan en la tabla 3.7 .

Los valores del ángulo θ y del coeficiente a , se relacionan mediante la expresión

$$a = 2.802 (\theta)^{-0.251} \quad (3.25)$$

donde

θ , en grados

De la tabla 3.7, el valor promedio para el coeficiente b , es:

$$b = 0.713$$

De esta forma, las ecs 3.24 y 3.25 sustituyen, en un proceso de cálculo, a las curvas de la fig 3.11 .

Para ilustrar la aplicación del método de Keller y Rastogui se desarrollará el mismo ejemplo utilizado por Bauer para describir su método, aceptando que el vertedor tiene la misma forma de cresta que la utilizada en el presente método. Este ejemplo servirá además para comparar los resultados obtenidos

con ambos métodos.

Los datos del ejemplo son:

$$\theta = 53^{\circ}8' = 53.13^{\circ}$$

$$K = 0.0015 \text{ m}$$

$$q = 33.14 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$$

De la ec 3.25, el coeficiente a , resulta ser

$$a = 2.802 (53.13)^{-0.251}$$

$$a = 1.03$$

De la ec 3.24

$$\frac{X_C}{K} \times 10^{-4} = \left[(33.44 / (9.81 \times .0015^3))^{1/2} \right] \times 10^{-4} \quad 1.03$$

$$\frac{X_C}{K} \times 10^{-4} = 8.212; \text{ por lo tanto}$$

$$X_C = (8.212 \times 0.0015) \times 10^4$$

$$X_C = 123.20 \text{ m}$$

Repitiendo todo el proceso de cálculo pero ahora para una rugosidad del doble de la anterior (es decir $K = 0.003 \text{ m}$) se tiene que $X_C = 117.40 \text{ m}$. En la fig 3.14 se presentan estos resultados y los obtenidos con el método de Bauer para hacer una comparación entre ellos. Se puede ver en esta figura que

las distancias al punto crítico resultan menores con el método de Keller y Rastogui que con el de Bauer. Esto puede ser debido a que en su método, Bauer define la frontera superior de la capa límite como el punto donde la velocidad local, u , es igual al 99% de la velocidad del flujo potencial, U_0 ; se ha visto, sin embargo, que las oscilaciones turbulentas llegan en ocasiones, a sobrepasar la distancia δ , así definida; en otras palabras, el flujo turbulento llega, a veces, a penetrar en regiones de flujo potencial a distancias del orden de 1.2 δ . Esta característica de la capa límite turbulenta es importante en el fenómeno de la aeración si se considera que éste depende físicamente de la turbulencia que se tenga en la superficie del agua. Este efecto fue tomado en cuenta por Keller y Rastogui en el procedimiento numérico seguido para la obtención de la solución general de las ecuaciones de Navier - Stokes aplicadas a una capa límite turbulenta (ecs 3.18 y 3.19); es por ello que quizá el método de Keller y Rastogui proporcionen distancias menores al punto crítico.

En cuanto al efecto de la rugosidad, también se demuestra que cuando el número de Reynolds ($R = VX/v$) es alto (p. ej. flujos en vertedores de gran pendiente), una diferencia en el valor estimado de la rugosidad no produce errores serios en la predicción del punto crítico. Para el ejemplo anterior el error sería del 5% (aceptando que el valor correcto fuera $X_c = 117$ m), para una diferencia del 100% en el valor de la

rugosidad.

3.5 *Análisis comparativo entre los puntos críticos calculados y observados*

Con el propósito de comparar los puntos críticos observados en diferentes prototipos con los calculados con la teoría de la afloración de la capa límite, se han construido las rectas dimensionales de la fig 3.15; cada recta de esta figura une las coordenadas de los puntos críticos calculados con el método de Bauer para cada combinación de gasto unitario y pendiente de la plantilla pero con un valor fijo de la rugosidad de las paredes (expresada en términos del coeficiente de rugosidad de Manning).

Analizando la fig 3.15 se ve que cada recta presenta los mismos efectos de la rugosidad y pendiente, sobre la sección de afloramiento, que los reportados por Bauer y Keller y Rastogi durante el desarrollo de sus métodos. Esto es, para un mismo tirante, a medida que crece la rugosidad, el punto crítico aparece más próximo al origen. La pendiente tiene un efecto significativo para valores menores de $\theta = 30^\circ$, donde θ es el ángulo de inclinación de la plantilla con respecto a la horizontal, éstos es, los puntos calculados con $\theta < 30^\circ$ tienden a separarse de los calculados con $\theta \geq 30^\circ$; por esta razón se ha graficado en la fig 3.15b los puntos con pendientes menores de 30° y en la fig 3.15a los correspondientes a

pendientes mayores o iguales a dicho valor.

Sobre las rectas teóricas de la fig 3.15a se han superpuesto todas las mediciones en prototipo, que fue posible obtener en la literatura, de distancias y tirantes de aparición del agua blanca; todas estas mediciones corresponden a pendientes mayores de 30° , razón por la cual fueron ubicados en la fig 3.15a.

Comparando los puntos teóricos con los puntos observados, presentados en la fig 3.15a, se puede apreciar una tendencia de las rectas teóricas de proporcionar, para un mismo tirante, distancias de aparición menores que las que ocurren en la naturaleza, sobre todo en el caso de la presa Norris; esto quiere decir que la capa límite turbulenta aflora en la superficie libre del agua a cierta distancia aguas arriba de la sección donde principia el agua blanca; lo que hace pensar que una vez que la capa límite ha aflorado se requeriría de cierta distancia, a partir de su afloramiento, para que la turbulencia generada en la superficie sea suficiente como para provocar el fenómeno o, que el afloramiento de la capa límite, si bien puede contribuir a que se presente el fenómeno, no es la única causa que lo produce, pudiéndose tener alguna contribución por parte del afloramiento de los vórtices longitudinales mencionados por el Dr. Levi. Por lo demás, no considerando las mediciones en la presa Norris; donde pudiera existir algún error en las mediciones de los tirantes y/o distancias

de afloramiento (desafortunadamente no fue posible obtener la ref 29 donde fueron publicadas dichas mediciones para poder comentar más al respecto), puede pensarse que la teoría de la capa límite da resultados aproximados y quizá por ello, en la actualidad siga siendo utilizada en las investigaciones sobre el agua blanca.

Para tratar de darle alguna utilidad práctica a la fig 3.15a se ha trazado la recta A a través de los puntos experimentales; ésta corresponde a un valor promedio de la rugosidad en prototipos, para el cual se estima un valor igual a $n = 0.014$ y para pendientes de la rápida del vertedor de más de 30° . Sobre la fig 3.15a se puede graficar el perfil de la superficie libre del agua, para determinadas condiciones hidráulicas y geométricas en un vertedor, y puede definirse el punto de intersección de dicho perfil con la recta A; de este punto se obtienen la distancia y el tirante de aparición del agua blanca para los valores de gasto, pendiente y rugosidad dados. Por supuesto la predicción así obtenida será un valor aproximado tomando en cuenta su base empírica, sin embargo, el procedimiento resulta fácil de aplicar y permite obtener el tirante de aparición; además, corrige la tendencia, de la teoría del afloramiento de la capa límite turbulenta, de proporcionar distancias de aparición más cortas que las que ocurren en la naturaleza.

Para un caso en particular; si el vertedor es de paramento ver

tical aguas arriba, conviene emplear el método de Keller y Rastogui para tener una aproximación sobre la sección donde principia el agua blanca, este método tiene la ventaja de que no se requiere de tanteos para obtener la distancia al punto crítico, sin embargo, no proporciona el tirante de aparición, si por alguna razón éste fuera de interés, conviene emplear el método de Bauer.

3.6 *Tratamiento de la aeración basado en la teoría del afloramiento de las estrias vorticosas*

Hasta aquí se ha descrito dos métodos de predicción del punto crítico basados en la teoría de la capa límite. Con relación a la hipótesis sugerida por el Dr. Levi, es muy poco lo que se ha avanzado hasta la fecha, principalmente por falta de mediciones experimentales. No obstante, Levi ha demostrado que los vórtices longitudinales que producirían el agua blanca tienden a alejarse cada vez más del piso, a medida que avanzan en la dirección del escurrimiento. Para tal propósito Levi consideró las estrias vorticosas, aproximadamente equidistantes que contiene la subcapa laminar y aceptó que dichas estrías, que viajan en el sentido de la corriente, son vórtices longitudinales que giran en sentido alternado (ref 39). Para estos vórtices, representados en el sistema coordenado x, y, S de la fig 3.16; tomando el eje S , sobre la pared, en el sentido del flujo, el eje x , también sobre la pared, normal al eje S , y el eje y , perpendicular a la pared, hacia arriba, Levi ob

tuvo, para las componentes v_x y v_y de la velocidad de desplazamiento de cada centro vorticoso (que gira en sentido antihorario), las expresiones siguientes

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{H}{2a} \frac{\coth \eta \operatorname{cosech}^2 \eta}{\cot^2 \xi + \coth^2 \eta} \quad (3.26a)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = - \frac{H}{2a} \frac{\cot \xi \operatorname{cosec}^2 \xi}{\cot^2 \xi + \coth^2 \eta} \quad (3.26b)$$

donde

$$\xi = \frac{2\pi}{a} x \quad ; \quad \eta = \frac{2\pi}{a} y$$

H , intensidad del vórtice

a , distancia inicial entre vórtices de un mismo sentido de rotación

x, y , coordenadas del centro vorticoso en el sistema x y

Los centros vorticosos que giran en sentido horario tienen estas mismas componentes de velocidad pero cambiadas de signo.

Dividiendo las ecs 3.26a y b miembro a miembro se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\cot \xi \operatorname{cosec}^2 \xi}{\coth \eta \operatorname{cosech}^2 \eta}$$

e integrando

$$\cot^2 \xi + \coth^2 \eta = C^2 \quad (3.27)$$

donde

C , es una constante

La ec 3.27 representa (ref 27) la proyección sobre el plano xy de la trayectoria de los centros vorticosos. Se desprende de ella que la distancia entre vórtices va variando con la posición y por tanto con la abscisa longitudinal S.

A continuación, Levi consideró el tubo vorticoso de diámetro D, mostrado en la fig 3.17, con una velocidad V en la superficie de dicho tubo; definió además, al ángulo de giro $\phi(S)$ como el ángulo que forma V con el eje del tubo (ver fig 3.17); de esto último se infiere que

$$V_s = \frac{ds}{dt} = V \cos \phi(s) \quad (3.28a)$$

$$V_\theta = V \sin \phi(s) = - \frac{H}{\pi D} \quad (3.28b)$$

donde

V_s , componente longitudinal de la velocidad V

V_θ , componente acimutal de la velocidad V

El signo menos en la ec 3.28b se debe a que, en la fig 3.17, se ha considerado al vector V contrario al sentido de rotación del vórtice (rotación antihoraria).

Por otra parte, la variación en el tiempo de la posición de cada centro vorticoso en el eje y viene dado por

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dt}$$

de donde se desprende que

$$\frac{dy}{ds} = \left(\frac{dy}{dt} \right) / \left(\frac{ds}{dt} \right)$$

y por las ecs 3.26b, 3.27 y 3.28a y b

$$\frac{dy}{ds} = \frac{vD}{2a c^2} \tan \phi(s) \cot \xi \operatorname{cosec}^2 \xi \quad (3.29)$$

La ec 3.29 representa la variación de la distancia entre el eje del vértice y la frontera, además, siendo la derivada positiva (pendiente positiva), el Dr. Levi demuestra que cada estría se va alejando del piso a medida que avanza en la dirección del escurrimiento.

Finalmente, para una sección aguas abajo de la cresta, donde la estría ya halla alcanzado cierta elevación, Levi obtuvo, a partir de la ec 3.29 la siguiente relación

$$\frac{dy}{ds} = 0.25 \tan \phi(s) \quad (3.30)$$

Asimismo, a partir de las mediciones experimentales en modelos y prototipos, reportadas en la literatura, Levi construyó la gráfica de la fig 3.18, donde ha ubicado, en las ordenadas, los tirantes de las secciones donde se inició el agua blanca y,

en las abscisas, sus distancias correspondientes, medidas a partir del umbral del perfil del vertedor (punto o fig 3.17). En la fig 3.18 Levi ajustó una recta a través de los puntos experimentales obteniendo para su pendiente un valor promedio igual a

$$\frac{Y}{S} = 0.00628 \quad (3.31)$$

Al sustituir este valor por $\frac{dy}{ds}$ en la ec 3.30, Levi obtuvo

$$\tan \phi(s) = 0.025 \quad (3.32)$$

Por otra parte, de las ecs 3.28a y b se obtiene

$$\tan \phi(s) = \frac{V_\theta}{V_s} = 0.025 \quad (3.33)$$

Lo cual quiere decir que, de ser cierta la hipótesis del Dr. Levi, en la sección de afloramiento, la componente longitudinal de la velocidad tendría que ser aproximadamente 40 veces su velocidad de rotación. De esta manera, el Dr. Levi, establece las condiciones cinemáticas necesarias para que la sección crítica de afloramiento de los vórtices coincida con la sección donde principia el agua blanca. De aquí en adelante se requerirá de la experimentación para que en primer lugar se pueda comprobar el resultado 3.33; y en segundo, poder desarrollar un método de predicción del inicio de arrastre.

Para la verificación experimental de su teoría, el Dr. Levi sugiere obtener los siguientes datos necesarios

1. Localización de la zona de aparición de las estrías sobre el cimacio
2. Su separación inicial entre sí y con respecto a la plantilla.
3. Su ángulo de giro
4. Su diámetro inicial

Finalmente, los métodos de predicción descritos anteriormente permiten contestar la interrogante de si habrá o no inclusión de aire, para ciertas características geométricas e hidráulicas, en un vertedor. En el caso de que se tenga aeración, se presenta en el siguiente capítulo una estimación de los efectos que esto produce en las características medias del escurrimiento y cuyo conocimiento implicará un mejor diseño de la estructura disipadora de energía al pie del vertedor, o bien, alturas de paredes laterales más adecuadas, evitando así los posibles derrames.

Tabla 3.1 cálculo del punto crítico para $K=0.015m$.
(Método de Bayer)

| X (m) | X/K | δ/X | δ (m) | $U^2/2g$ | U_0 (m/s) | q/U_0 (m) | Y (m) |
|------------|---------------------|------------|-------------------|----------|------------------|------------------|------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) |
| 10 | 6.66×10^3 | 0.00764 | 0.076 | 8.00 | 12.521 | 2.671 | 2.679 |
| 50 | 3.33×10^4 | 0.00619 | 0.309 | 40.00 | 28.00 | 1.194 | 1.225 |
| 100 | 6.66×10^4 | 0.00566 | 0.566 | 80.00 | 39.597 | 0.845 | 0.902 |
| 150 | 10.0×10^4 | 0.00537 | 0.805 | 120.00 | 48.497 | 0.690 | 0.771 |
| 200 | 13.33×10^4 | 0.00517 | 1.034 | 160.00 | 56.00 | 0.597 | 0.701 |

Tabla 3.2 cálculo del punto crítico para $K=0.003m$.
(Método de Bayer)

| X (m) | X/K | δ/X | δ (m) | $U^2/2g$ | U_0 (m/s) | q/U_0 (m) | Y (m) |
|------------|--------------------|------------|-------------------|----------|------------------|------------------|------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) |
| 10 | 3.33×10^3 | 0.0083 | 0.083 | 8.00 | 12.521 | 2.671 | 2.6793 |
| 50 | 1.66×10^4 | 0.00678 | 0.339 | 40.00 | 28.00 | 1.194 | 1.228 |
| 100 | 3.33×10^4 | 0.00619 | 0.619 | 80.00 | 39.597 | 0.845 | 0.907 |
| 150 | 5.00×10^4 | 0.00587 | 0.880 | 120.00 | 48.497 | 0.690 | 0.778 |
| 200 | 6.66×10^4 | 0.00566 | 1.1328 | 160.00 | 56.00 | 0.597 | 0.710 |

Tabla 3.3 características empleadas en el modelo de Keller y Raetogui.
Ref. 19.

| H_0 , en M | θ , en grados | K, en m. |
|--------------|----------------------|------------------------|
| 1.52 | 5 | 3.088×10^{-3} |
| 3.05 | 10 | |
| 4.57 | 30 | 15.24×10^{-4} |
| 6.10 | 50 | |
| 7.62 | 70 | 30.48×10^{-4} |
| 9.15 | | |

Ta bla 3.4 Distancias calculadas con el modelo de Keller y Rastogui
(Ref. 19)

| Car ga de diseo, en m | Pendiente del vertador, en grados. | | | | |
|-----------------------|------------------------------------|----|----|----|----|
| | 5 | 10 | 30 | 50 | 70 |

distancia desde la cresta al punto crico, en m

a).- $K=3.048 \times 10^{-4}$ m.

| | | | | | |
|------|---------|---------|--------|--------|--------|
| 1.52 | 57.790 | 48.46 | 35.57 | 31.58 | 30.39 |
| 3.05 | 120.940 | 1100.31 | 73.73 | 65.53 | 67.73 |
| 4.57 | 186.450 | 154.26 | 113.51 | 100.70 | 96.62 |
| 6.10 | 253.350 | 211.90 | 155.78 | 137.89 | 132.37 |
| 7.62 | 320.250 | 264.78 | 194.83 | 172.76 | 165.81 |
| 9.15 | 389.560 | 325.31 | 238.60 | 211.96 | 203.24 |

b).- $K=15.24 \times 10^{-4}$ m.

| | | | | | |
|------|---------|--------|--------|--------|--------|
| 1.52 | 51.020 | 42.37 | 31.33 | 27.89 | 26.88 |
| 3.05 | 107.870 | 89.64 | 66.11 | 58.67 | 59.54 |
| 4.57 | 167.090 | 138.53 | 102.14 | 90.59 | 87.20 |
| 6.10 | 227.05 | 188.09 | 138.71 | 123.23 | 118.66 |
| 7.62 | 289.19 | 238.84 | 175.96 | 156.67 | 150.48 |
| 9.15 | 350.49 | 290.72 | 214.24 | 190.07 | 182.85 |

c).- $K=30.48 \times 10^{-4}$ m.

| | | | | | |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1.52 | 48.16 | 39.93 | 29.57 | 26.33 | 25.36 |
| 3.05 | 102.17 | 84.64 | 62.76 | 55.78 | 53.77 |
| 4.57 | 158.34 | 131.55 | 97.05 | 86.23 | 83.03 |
| 6.10 | 216.23 | 178.89 | 132.07 | 117.53 | 113.23 |
| 7.62 | 274.28 | 227.99 | 168.22 | 149.57 | 103.74 |
| 9.15 | 333.36 | 276.39 | 204.06 | 181.42 | 176.72 |

Tabla 3.5. Valores de X_c/K y $q/(9k^3)^{1/2}$ (ec 3.23) Ref. 19)

| Pendiente del vertedor, en grados. | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|--------|-------|-------|-------|-------|
| | 5 | 10 | 20 | 30 | 50 | 70 |
| $(q / (9k^3)^{1/2}) \times 10^{-4}$. | $(X_c/K) \times 10^{-4}$. | | | | | |
| a). $-K=3.048 \times 10^{-4}$ m. | | | | | | |
| 25.12 | 18.97 | 15.91 | 13.89 | 11.68 | 10.37 | 9.97 |
| 71.04 | 39.71 | 32.93 | 27.56 | 24.21 | 21.52 | 20.60 |
| 130.50 | 61.21 | 50.64 | 41.99 | 37.26 | 33.07 | 31.72 |
| 200.92 | 83.18 | 69.56 | 57.25 | 51.15 | 45.27 | 43.46 |
| 280.79 | 105.14 | 71.59 | 53.98 | 63.96 | 56.71 | 54.44 |
| 369.11 | 127.90 | 106.80 | 86.78 | 78.33 | 69.59 | 66.73 |
| b). $K=6.096 \times 10^{-4}$ m. | | | | | | |
| 8.88 | 9.15 | 7.63 | 6.40 | 5.58 | 4.92 | 4.84 |
| 25.12 | 19.11 | 15.83 | 12.37 | 11.65 | 10.42 | 10.01 |
| 46.14 | 29.53 | 24.44 | 20.26 | 18.04 | 15.99 | 15.34 |
| 71.04 | 10.03 | 32.97 | 27.56 | 24.27 | 21.65 | 20.66 |
| 99.28 | 50.89 | 41.99 | 34.45 | 30.9 | 27.48 | 26.33 |
| 130.50 | 61.48 | 50.85 | 41.99 | 37.48 | 33.14 | 31.66 |
| c). $-K=15.24 \times 10^{-4}$ m. | | | | | | |
| 2.25 | 3.35 | 2.78 | 2.36 | 2.06 | 1.83 | 1.76 |
| 6.35 | 7.08 | 5.89 | 4.95 | 4.34 | 3.85 | 3.71 |
| 11.67 | 10.97 | 7.10 | 7/55 | 6.71 | 5.95 | 5.73 |
| 17.97 | 14.91 | 12.35 | 10.20 | 9.11 | 8.09 | 7.79 |
| 25.11 | 18.99 | 15.68 | 13.06 | 11.85 | 10.29 | 9.88 |
| 33.01 | 23.01 | 19.09 | 15.62 | 14.07 | 12.48 | 12.01 |
| d). $-K=30.48 \times 10^{-4}$ m. | | | | | | |
| 0.79, | 1.58 | 1.31 | 1.12 | 0.97 | 0.86 | 0.83 |
| 2.25 | 3.36 | 2.78 | 2.36 | 2.06 | 1.83 | 1.77 |
| 4.13 | 5.20 | 4.32 | 3.61 | 3.19 | 2.83 | 2.73 |
| 6.35 | 7.10 | 5.87 | 4.86 | 4.34 | 3.86 | 3.72 |

(2)

| | | | | | | |
|-------|-------|------|------|------|------|------|
| 8.88 | 9.00 | 7.49 | 6.18 | 5.52 | 4.94 | 4.72 |
| 11.67 | 10.94 | 9.07 | 7.54 | 6.70 | 5.96 | 5.80 |

Tabla 3.6 Influencia del término de la presión de la ec 3.18
(ref 19)

| Carga de diseño H en m. | Pendiente vertedor en grados | Rugosidad vertedor en $m(10^{-4})$ | Distancia X_c , al pto. crítico, en m. Distrib. presión lineal | Cero presión cresta | Error como porcentaje (%) |
|-------------------------------|------------------------------------|--|--|---------------------------|--------------------------------------|
| 9.15 | 20 | 15.24 | 239.17 | 239.32 | -0.06 |
| 1.52 | 50 | 15.24 | 27.91 | 27.83 | +0.29 |
| 9.15 | 50 | 15.24 | 190.20 | 190.07 | +0.07 |
| 9.15 | 70 | 15.24 | 182.97 | 181.88 | +0.60 |

Tabla 3.7 Relación de los
coeficientes a y b con el valor
de θ

| θ en grados | a | b |
|-----------------------|-------|-------|
| 5 | 1.889 | 0.714 |
| 10 | 1.570 | 0.714 |
| 20 | 1.335 | 0.710 |
| 30 | 1.160 | 0.713 |
| 50 | 1.030 | 0.714 |
| 70 | 0.999 | 0.711 |

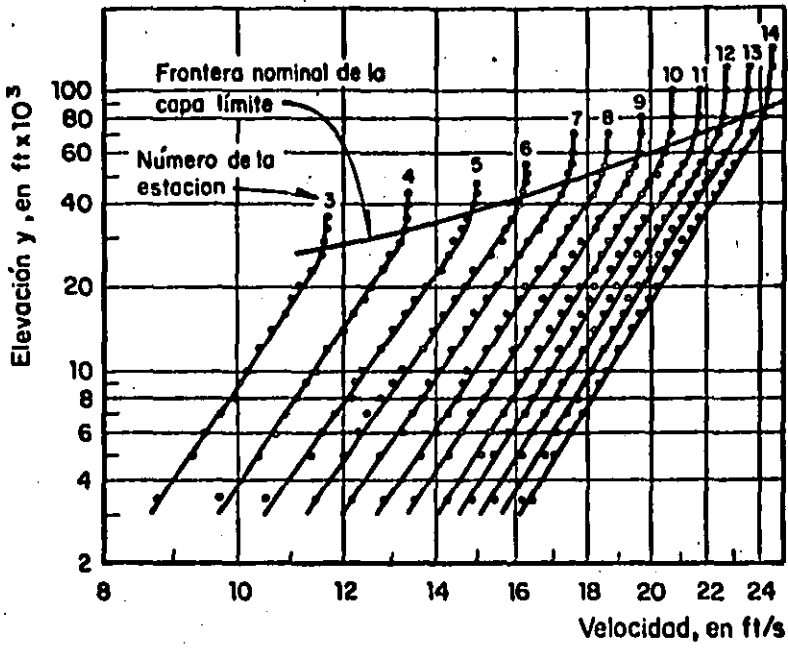


Fig 3.3 Perfiles de velocidad para pared lisa (ref 11)

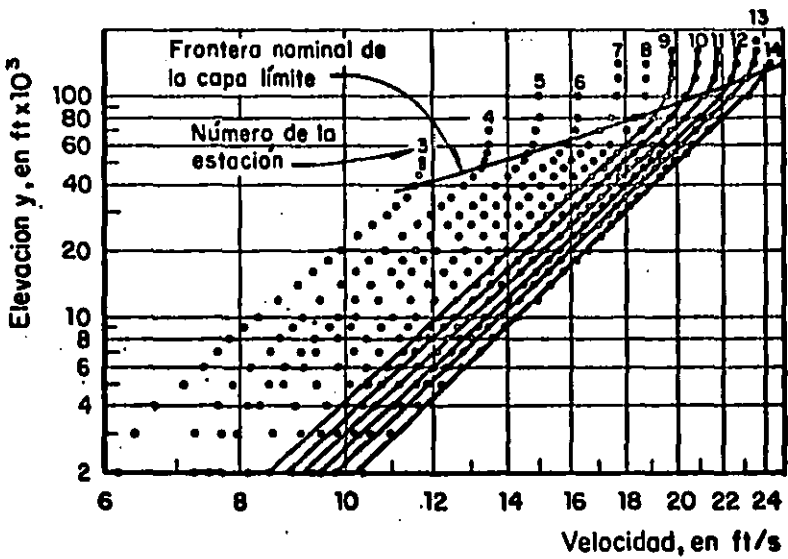


Fig 3.4 Perfiles de velocidad para pared rugosa (ref 11)

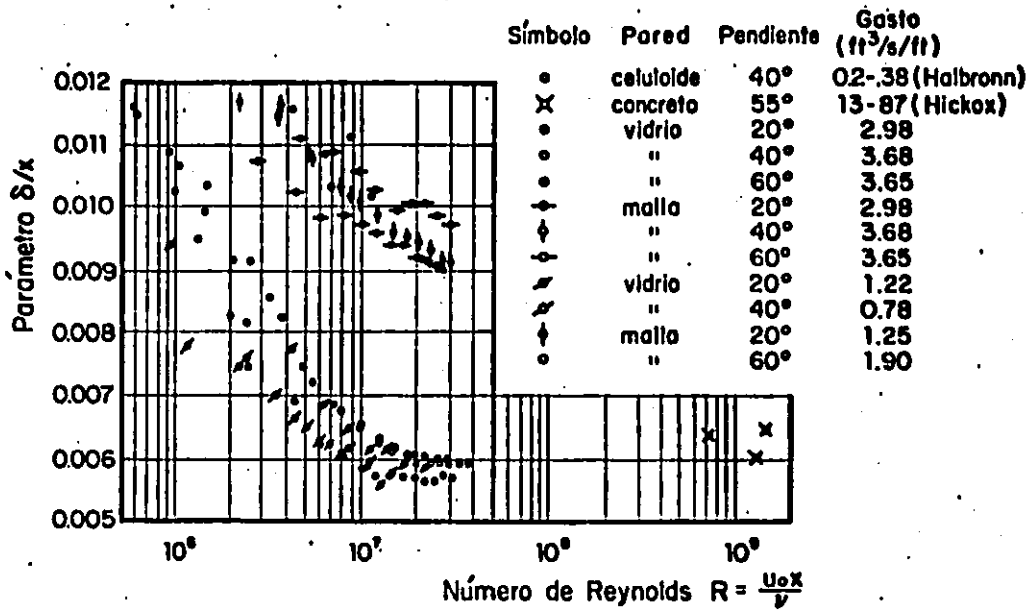


Fig 3.5 Valores de δ/x como función del número de Reynolds (ref 11)

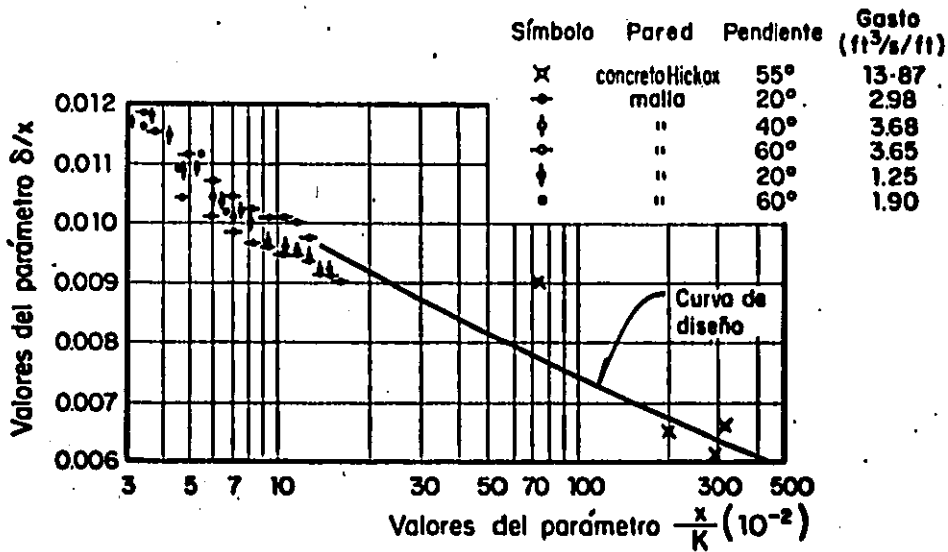


Fig 3.6 La relación $\frac{\delta}{x}$ como función de $\frac{x}{K}$ (rugosidad relativa) (ref 11)

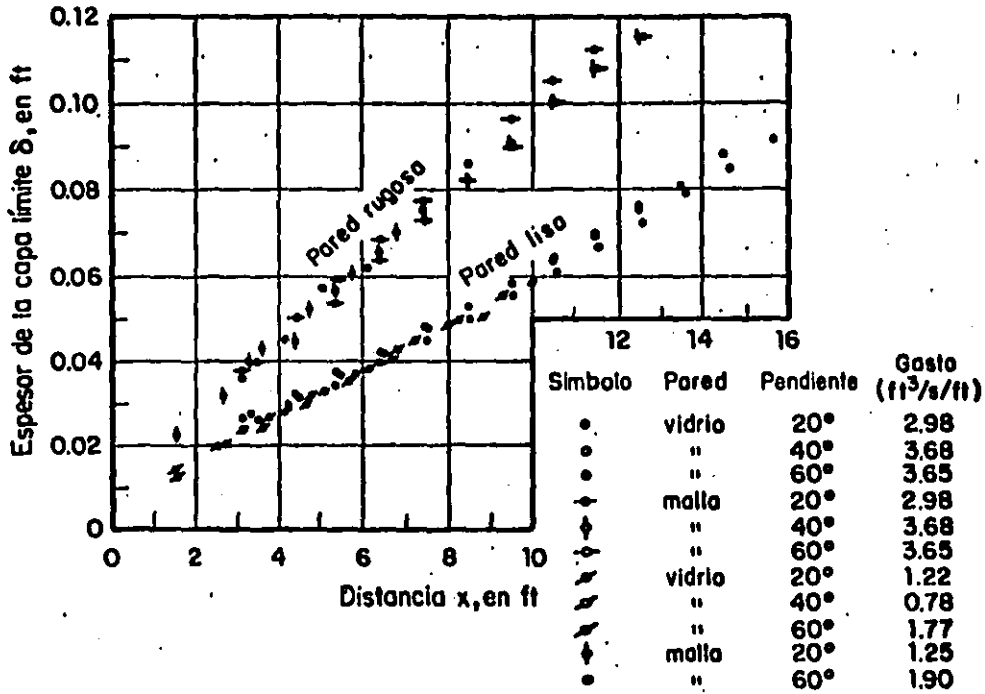


Fig 3.7 Espesor de la capa límite δ , como función de la distancia x , en el sentido del flujo (ref 11)

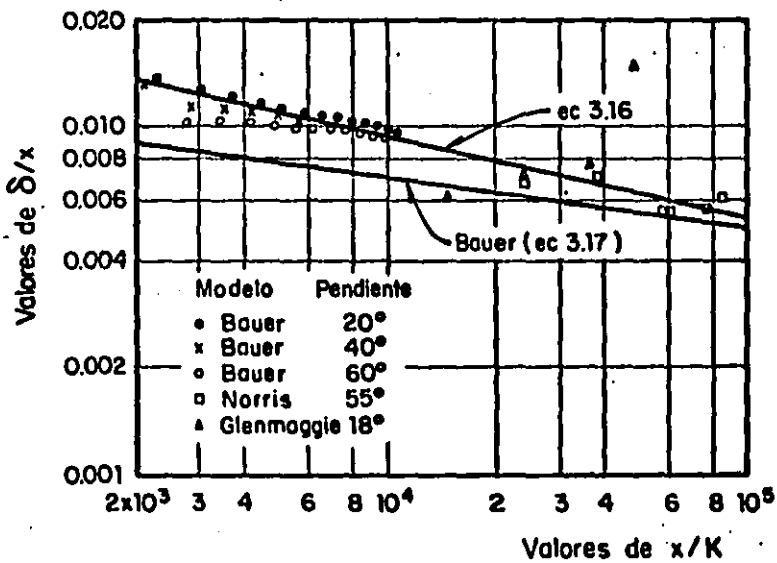


Fig 3.8 Corrección por rugosidad de los resultados de Bauer (fig 3.6) (ref 28)

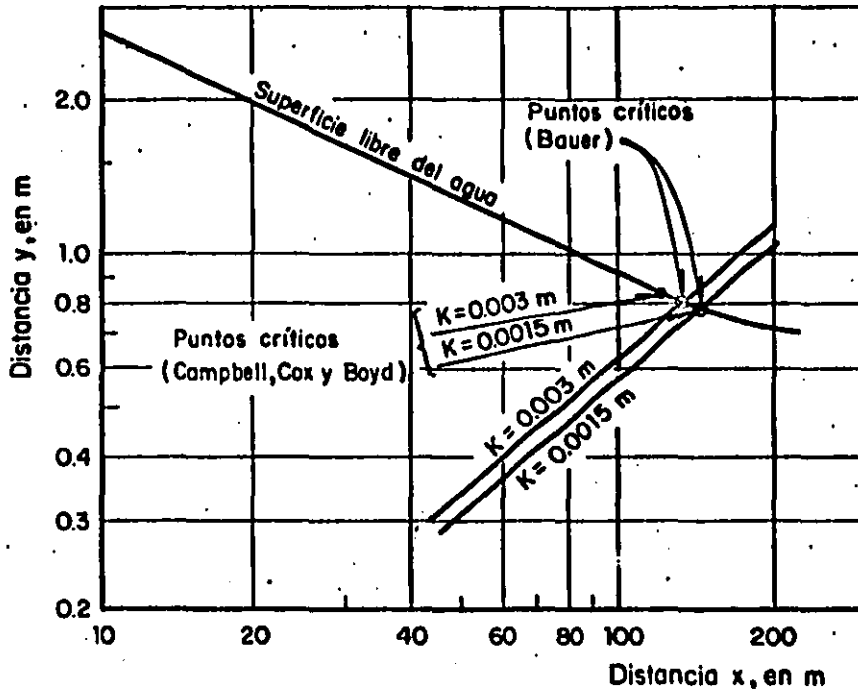


Fig 3.9 Aplicación del método de Bauer

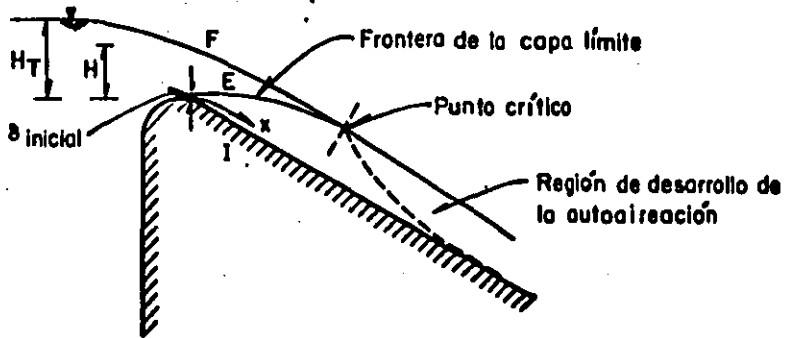
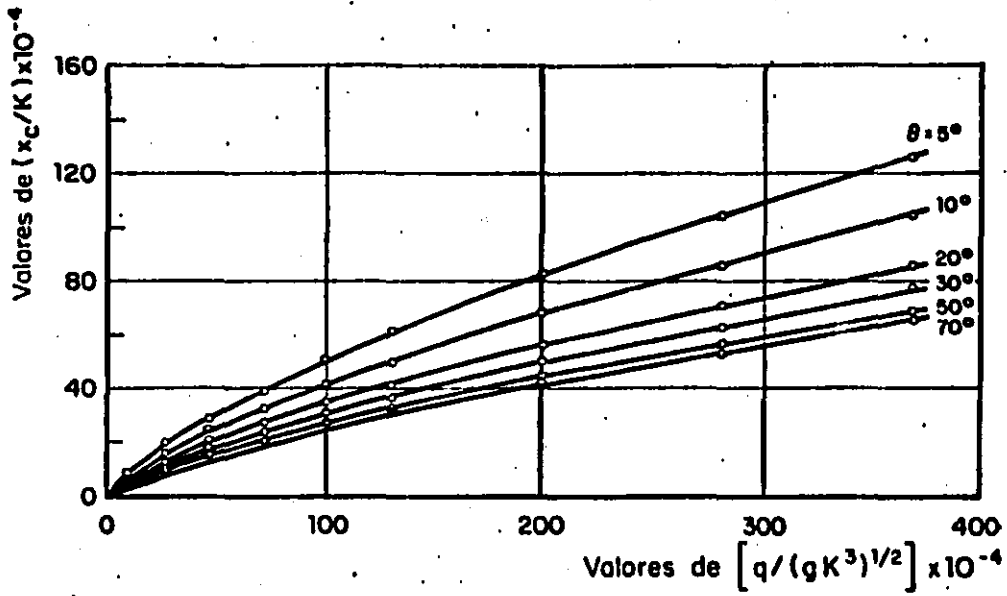
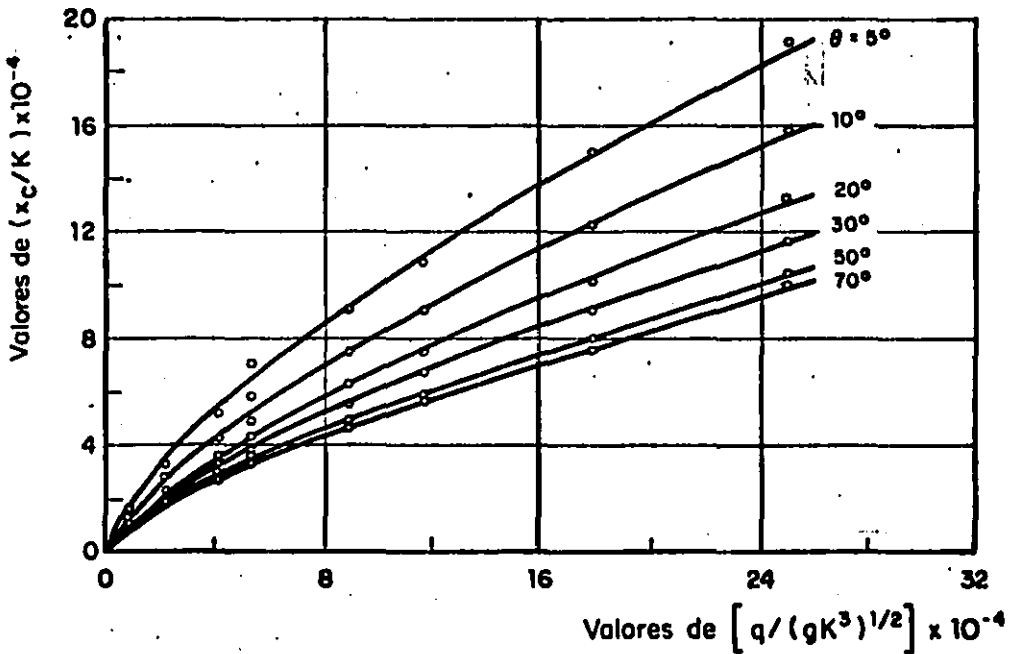


Fig 3.10 Definición de parámetros para el método de Keller y Rastogui (ref 12)



a)



b)

Fig 3.11 Curvas de diseño para localizar el punto crítico (ref 19)

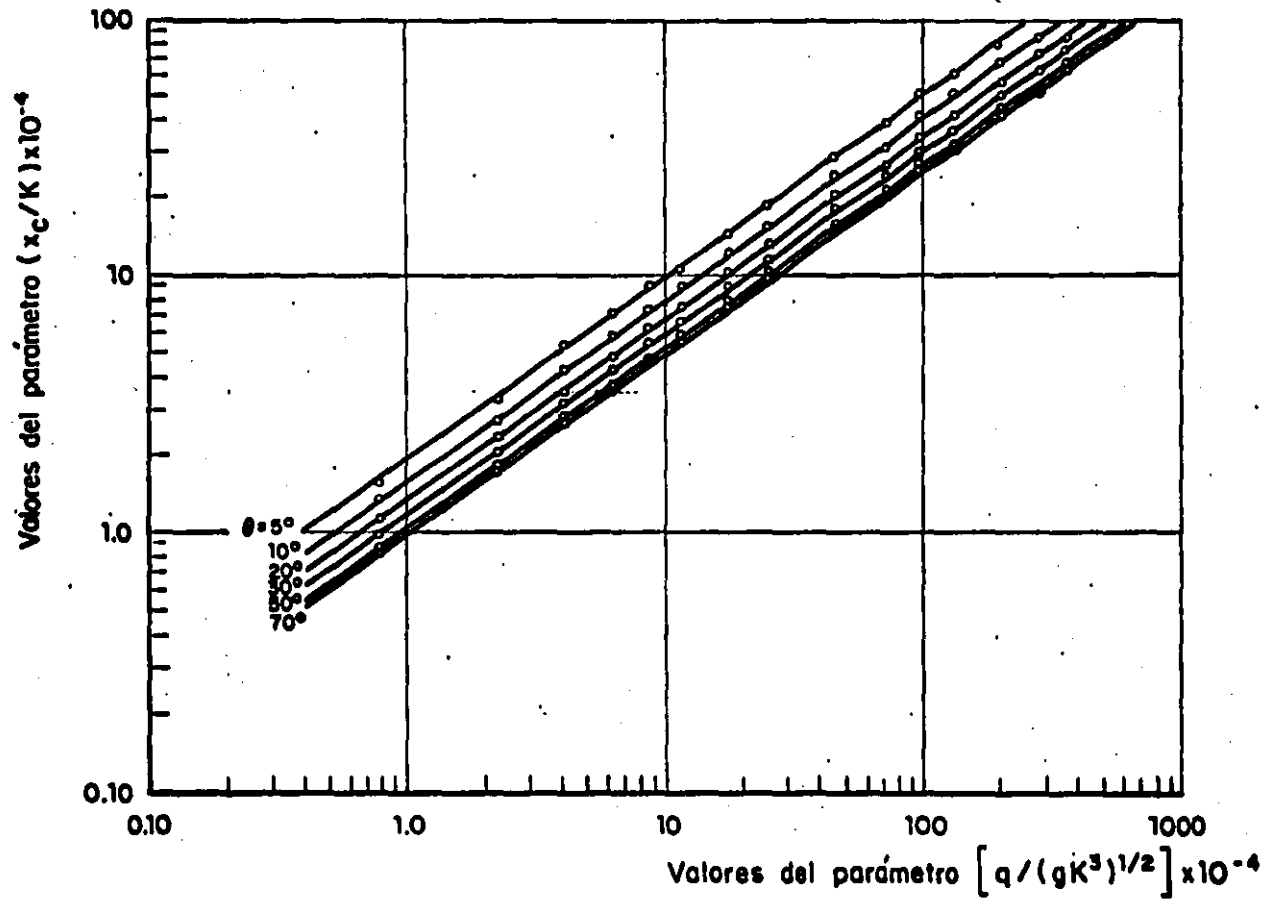


Fig 3.12 Representación gráfica de la relación funcional 3.29

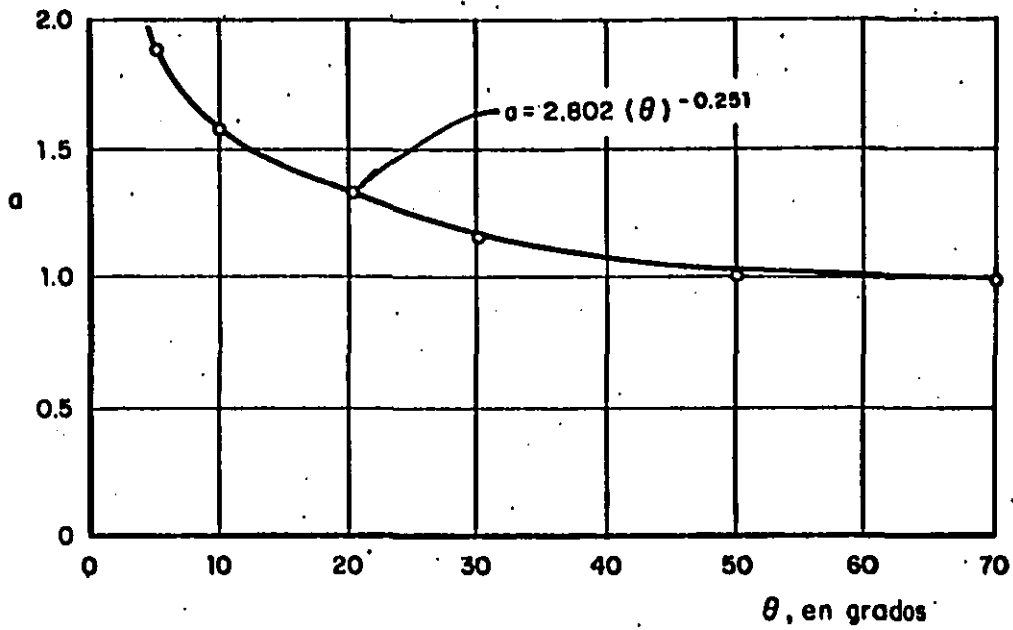


Fig 3.13 Correspondencia entre los valores del coeficiente α y los valores de θ

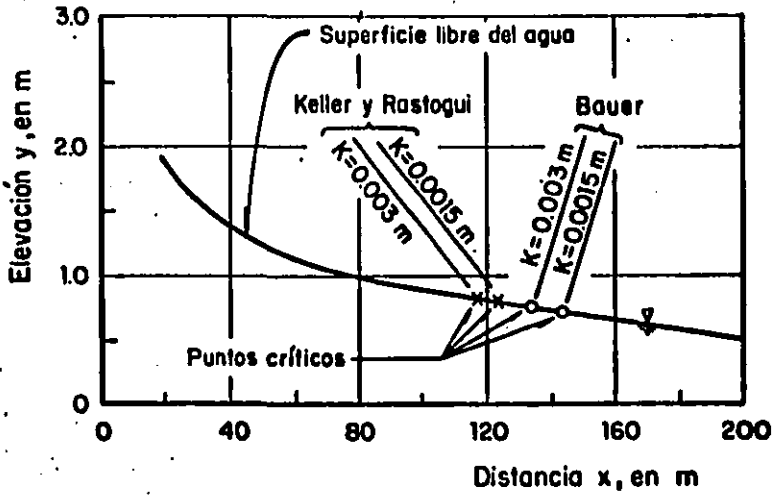
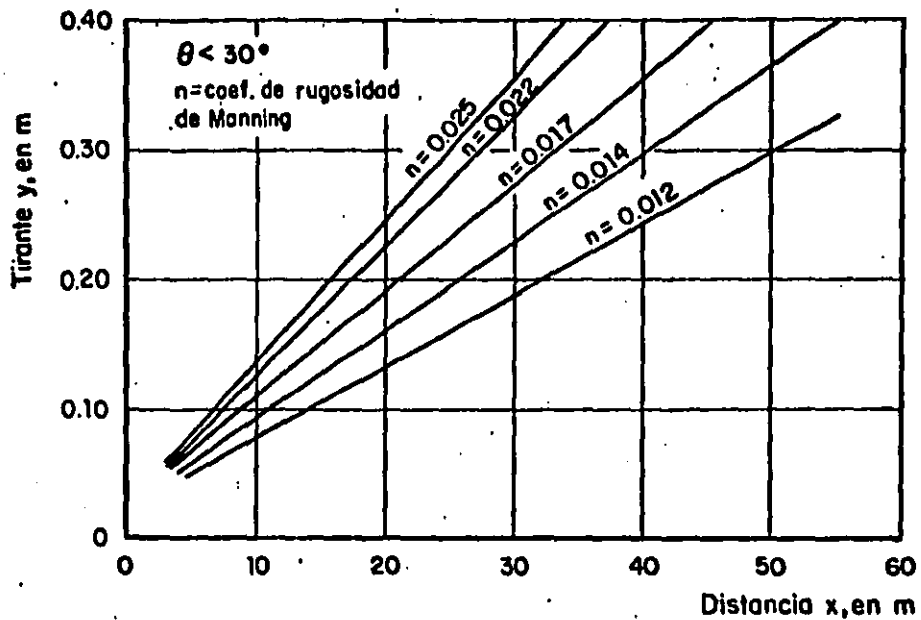
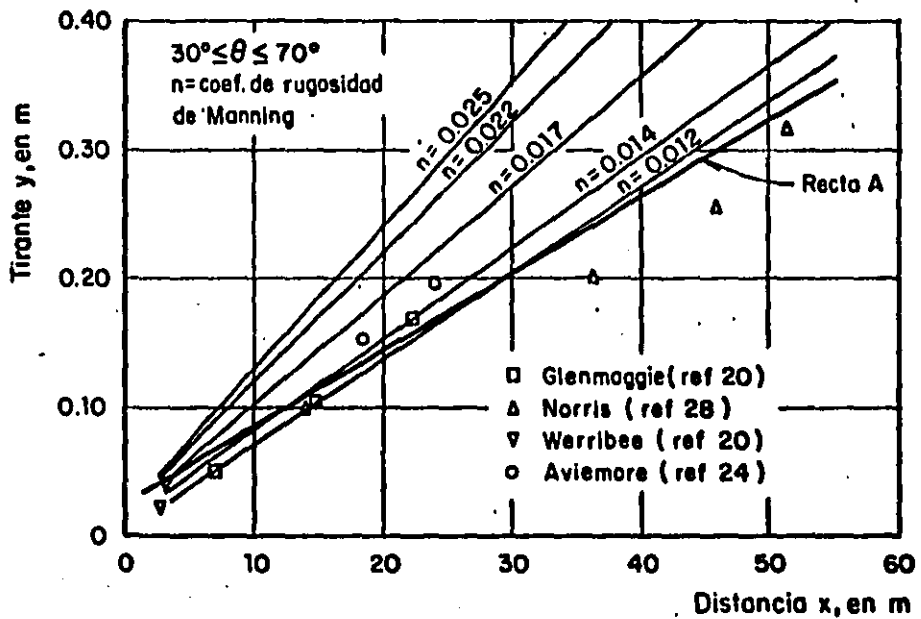


Fig 3.14 Comparación de los resultados obtenidos con los métodos de Bauer y Keller y Rastogui



a)



b)

Fig 3.15 Comparación entre los puntos críticos con capa límite y los observados en diferentes prototipos

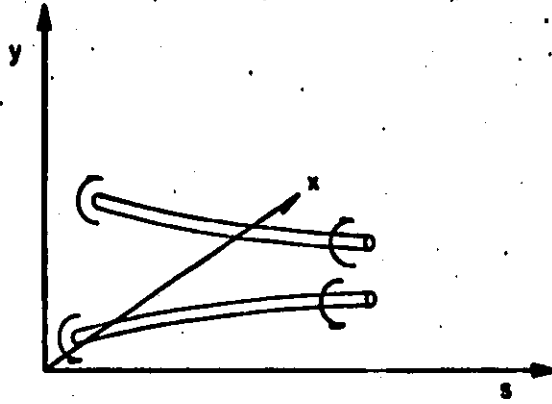


Fig 3.16 Representación de las estrías vorticosas en el sistema xys (ref 27.)

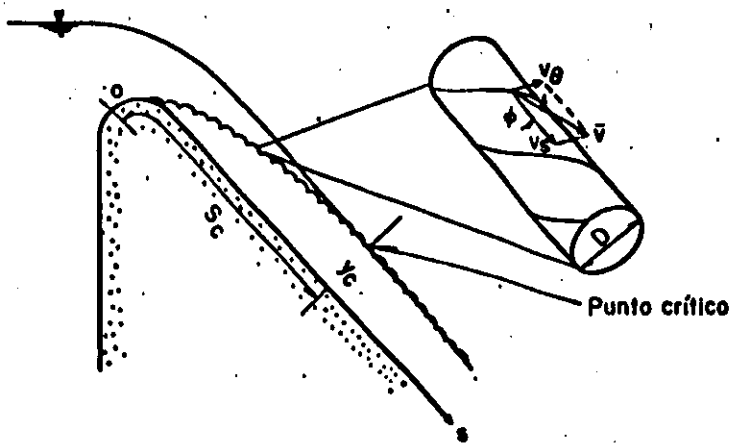


Fig 3.17 Desarrollo de la aireación, según E. Levi

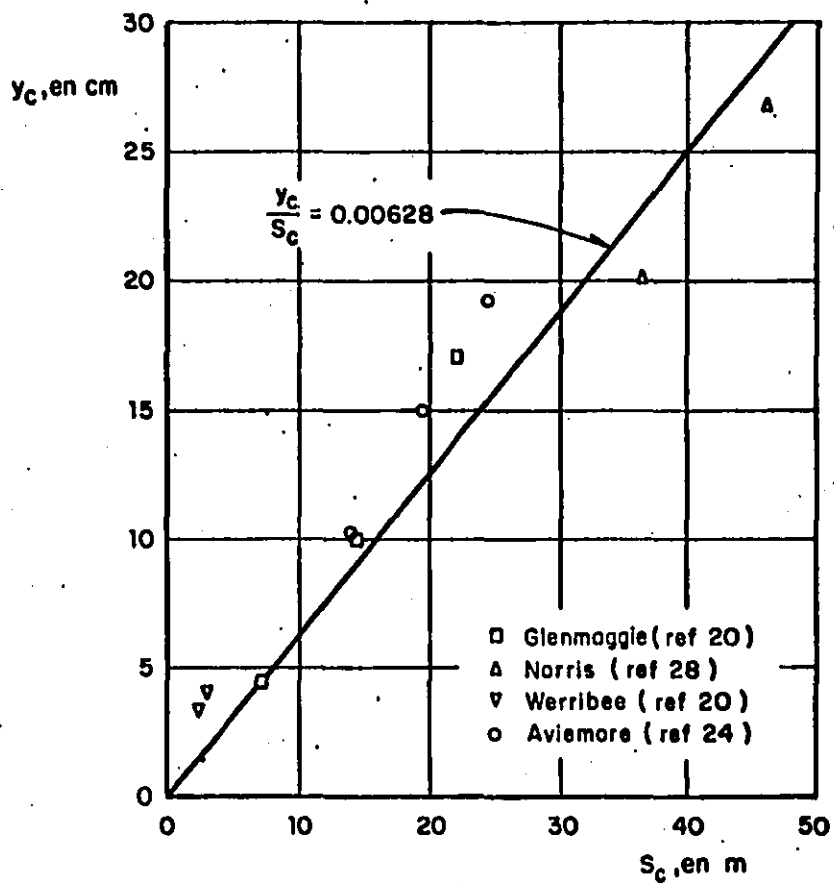


Fig 3.18 Secciones críticas observadas en diferentes prototipos (ref 27)

4. ESTIMACION DE LOS EFECTOS DE LA INCLUSION DE AIRE SOBRE LAS CARACTERISTICAS MEDIAS DEL FLUJO

4.1 *Introducción*

En este capítulo se pretende estimar los efectos que sobre las características medias de un flujo a superficie libre, produce la inclusión de aire. La estimación de estos efectos está basada en algunas de las relaciones empíricas presentadas en la ref. 3 y en un reanálisis de las experiencias de la misma y de la ref 5.

4.2 *Análisis experimental de los efectos de la inclusión de aire*

La mayoría de las investigaciones que se han llevado a cabo para tratar los efectos de la inclusión de aire tienen una

base experimental. De dichas investigaciones se pueden mencionar los trabajos de Straub y Anderson (ref 3), Anderson (ref 5), Keller (ref 26), Cain et al (ref 24), Rao et al (ref 6), Hall (ref 4), etc. Todos estos reportes cubren prácticamente todas las regiones de flujo aireado descrito en 2.2.2. Desafortunadamente a excepción de los resultados de Straub y Anderson y Anderson (refs 3 y 5) los demás no fueron publicados totalmente; por ello el reanálisis planteado en 4.2.2 está basado en los reportes de las refs 3 y 5. El propósito de las investigaciones de Straub y Anderson y Anderson fue la de analizar las características de un flujo uniformemente aireado, ésto es, un flujo donde el tirante y el perfil de concentración de aire no cambian de una sección a otra.

4.2.1 Experiencias de Straub y Anderson (ref 3)

Straub y Anderson realizaron sus experimentos en un canal de 15.24 m de largo, 0.4572 m de ancho, en el cual podía establecerse un tirante máximo de 0.30 m. La rugosidad de la plantilla del canal se incrementó con la colocación, sobre mastique, de partículas de arena con diámetro medio de 0.712 mm y espaciamiento promedio entre ellos de 1 mm. Los experimentos fueron realizados variando la pendiente desde $\theta = 7.5^\circ$ hasta $\theta = 75^\circ$, los gastos desde $Q = 0.062 \text{ m}^3/\text{s}$ hasta $Q = 0.4248 \text{ m}^3/\text{s}$ y esencialmente consistieron en medir, en

una sola estación localizada a 13.71 m de la entrada del canal, las características medias del flujo aireado, ésto es, tirante, velocidad, concentración media de aire \bar{c} , etc.

A partir de sus observaciones, Straub y Anderson suponen al flujo aireado compuesto de dos regiones; una superior formada por gotas de agua que han sido desprendidas del cuerpo de agua y que se mueven en la atmósfera con velocidades más o menos arbitrarias, y la inferior consistente de burbujas de aire dentro del cuerpo de agua y que son distribuidas a través del flujo por fluctuaciones turbulentas. La frontera entre ambas regiones queda definida por un tirante llamado de transición d_T .

4.2.1.1 Concentración de aire en la región superior

Según Straub y Anderson, el valor medio de las fluctuaciones de velocidad, normales al fondo del canal es cero; suponen, además, que las distancias a partir de la superficie de la cual las partículas de agua son proyectadas a la atmósfera están representadas por una distribución de tipo Gaussiana. Con esta hipótesis, la frecuencia $f(y')$ de las partículas proyectadas a una distancia y' sobre el tirante de transición se puede expresar, como:

$$f(y') = \frac{2}{h\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{y'}{h}\right)^2} \quad (4.1)$$

donde

y' = $y - d_T$, distancia de un punto en particular en la región superior, medida a partir del tirante de transición d_T

h , primer momento de la distribución; se puede entender como la distancia promedio que alcanzan las partículas y será una variable que depende de las condiciones de flujo

En la ec 4.1 los autores han utilizado el factor 2 para indicar que sólo se consideran las partículas que son proyectadas hacia arriba, esto es, sólo se considera la mitad de una distribución Gaussiana completa; de tal manera que

$$\int_0^{\infty} f(y') dy' = 1 .$$

El número de partículas que alcanzan o pasan a través de un área unitaria correspondiente a la elevación y' durante un período de muestreo dado es

$$N_{y'} = N_T P_{y'} \quad (4.2)$$

donde

N_T , número de partículas que salen o regresan a la superficie de transición por unidad de área durante el período de muestreo

$P_{y'} = \int_{y'}^{\infty} f(y') dy'$, frecuencia acumulativa por unidad de área de superficie de transición

De acuerdo con los autores, se considera que el número promedio de partículas de agua que alcanzan o pasan a través de

una área horizontal por unidad de tiempo, es proporcional a la concentración promedio de partículas de agua; de acuerdo con esto y utilizando la ec 4.1, la concentración de aire a una distancia y' y la concentración de aire en la superficie de transición, Straub y Anderson obtuvieron para la distribución de la concentración de aire en la región superior la expresión

$$\frac{1 - c(y')}{1 - c_T} = \frac{2}{h \sqrt{\pi}} \int_{y'}^{\infty} e^{-\left(\frac{y'}{h}\right)^2} dy' \quad (4.3)$$

donde

c_T , concentración de aire para el tirante d_T

at.

4.2.1.2 Concentración de aire en la región inferior

Para la región inferior, los autores suponen que el aire, dentro del flujo, se difunde en la vertical de manera similar a la de la cantidad de movimiento en flujo turbulento, esto es, el transporte de las burbujas de aire es proporcional al de cantidad de movimiento, siendo el factor de proporcionalidad el coeficiente β .

Para la distribución de la concentración de aire en la región inferior, los autores parten de una analogía con el transporte de sedimentos en suspensión; donde de acuerdo con

la teoría de la difusión del sedimento se tiene bajo condiciones de equilibrio (ref 40)

$$\epsilon_h \frac{d\bar{c}}{dy} + \bar{c} w = 0 \quad (4.4)$$

donde

- \bar{c} , concentración media de sedimentos a una elevación y
- y , coordenada sobre un plano vertical
- w , velocidad de caída de las partículas de sedimento
- ϵ_h , coeficiente de mezclado, aplicado al caso de transferencia de sedimento

Para el caso de flujos aireados, el equilibrio se alcanza cuando el aire que sube por flotación es igual al que es forzado a bajar por difusión turbulenta, por tanto la ec 4.4 aplicada a este caso se transforma en

$$\epsilon_b \frac{dc}{dy} - C v_b = 0 \quad (4.5)$$

donde

- C , concentración de aire a una distancia normal y , a partir del fondo
- v_b , velocidad de ascenso de las burbujas de aire
- ϵ_b , coeficiente de mezclado aplicado al caso de transferencia de burbujas de aire

La variación del coeficiente ϵ_b en toda la vertical es desconocida; sin embargo, la hipótesis de Straub y Anderson es su

poner que ϵ_p es proporcional al coeficiente de mezclado turbulento ϵ_m , el cual se puede expresar en la forma

$$\epsilon_m = (\tau/\phi) / (dv/dy) \quad (4.6)$$

donde

- τ , esfuerzo cortante en flujos turbulentos
- dv/dy , gradiente de velocidad
- ϕ , densidad del flujo

El esfuerzo cortante varía linealmente desde un máximo en el fondo a cero en la superficie libre, por tanto, el esfuerzo cortante a una distancia y , es

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{D}\right)$$

donde

- $\tau_0 = \phi g D S$, esfuerzo cortante en el fondo
- D , tirante del flujo

Para flujos aireados, Straub y Anderson consideran

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{d_T}\right) \quad (4.7)$$

Sustituyendo 4.7 en 4.6 se tiene

$$\epsilon_m = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{d_T}\right) / (dv/dy) \phi \quad (4.8)$$

Por otra parte, de acuerdo con la distribución de velocidades de Prandtl-Von Karman, se puede expresar a dv/dy como

$$\frac{dv}{dy} = \frac{V_*}{ky} = \frac{\sqrt{I_0/\phi}}{ky} = \frac{\sqrt{g d_T S}}{ky} \quad (4.9)$$

donde

$$V_* = \sqrt{g d_T S}, \quad \text{velocidad al cortante}$$

$$k, \quad \text{constante universal de Von Karman}$$

$$S = \text{sen } \theta$$

Reemplazando 4.9 en 4.8

$$c_m = V_* ky \left(1 - \frac{y}{d_T}\right) \quad (4.10)$$

Y, de acuerdo con la hipótesis de Straub y Anderson

$$c_b = \beta V_* ky \left(1 - \frac{y}{d_T}\right) \quad (4.11)$$

Reemplazando 4.11 en 4.5

$$CV_b = \beta V_* K \left(1 - \frac{y}{d_T}\right) y \frac{dc}{dy} \quad (4.12)$$

Para integrar la ec 4.11 los autores suponen que V_b es independiente de y ; con ello la solución de la ecuación resulta

$$C = C_1 \left(y/d_T - y\right)^2 \quad (4.13)$$

donde

$$z = \frac{V_b}{\beta K V_*}$$

C_1 concentración de aire para $y = d_T/2$

Las expresiones 4.3 y 4.13, obtenidas por Straub y Anderson, representan en forma aceptable la distribución de la concentración de aire en la sección vertical de un canal y es uno de los avances más importantes que se han obtenido para describir el contenido de aire en flujos aireados.

4.2.2 Reanálisis de las experiencias de Straub y Anderson (ref 3) y Anderson (ref 5)

En un principio se pensaba que todas las mediciones reportadas por Straub y Anderson (ref 3) y aún las presentadas por Anderson (ref 5) estaban en régimen uniforme, sin embargo, al graficarlos en la forma mostrada en la fig 4.1 (para las mediciones reportadas en la ref 3 y que representan una condición rugosa) se pudo apreciar que sólo algunas de dichas mediciones tienen la condición de uniformidad.

En la fig 4.1 las abcisas son los valores de x/y_c ; donde x corresponde a la distancia medida desde la entrada del canal a la estación donde se efectuaron las mediciones, y_c es el tirante crítico que corresponde a cada gasto probado durante los experimentos; las ordenadas son los valores de y_c/E ; donde, para cada gasto, E es la energía del flujo en la estación

de medición definida como $E = \bar{d} \cos \theta + \bar{V}/29$; \bar{d} representa al tirante medio del flujo, que existiría si todo el aire atrapado fuera removido y se puede definir como (ref 3)

$$\bar{d} = \int_0^{\infty} (1-c) dy = (1-\bar{c})y_u \quad (4.14)$$

donde

y_u , tirante normal medido desde el fondo del canal hasta un punto tal que la concentración de aire sea del 99 por ciento

\bar{V} , es la velocidad del agua asociada al tirante \bar{d}

En la misma fig 4.1 se graficaron algunos puntos que definen la región de flujo no aireado; estos puntos fueron calculados con el método de Bauer (cap 3) para cada una de las pendientes utilizadas por Straub y Anderson. La tabla 4.1 explica los cálculos efectuados.

Al analizar la fig 4.1 es claro que no todas las mediciones de Straub y Anderson representan a un régimen uniforme. Para una misma pendiente, la variación de y_c/E , con valores pequeños de x/y_c , hace pensar que a medida que se incrementa el gasto las mediciones de Straub y Anderson dejan de estar en régimen uniforme; este hecho resulta más marcado mientras mayor es la pendiente.

Para comprobar lo expuesto arriba, los resultados de la fig

4.1, correspondientes a una pendiente de 45° , se recalcularon tomando como origen de distancias x a partir del punto de inyección, calculado previamente para el canal de Straub y Anderson; estos resultados fueron reubicados en la fig 4.2, donde también se han incluido las mediciones que, sobre el vertedor de la Presa Aviemore, llevaron a cabo Cain y Wood (ref 24). Dentro de las características principales de estas mediciones se puede decir que fueron realizadas sobre un vertedor de 45° , en cinco estaciones de medición localizadas aguas abajo del punto de inyección, con dos gastos unitarios de 2.23 y 3.15 $\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$; las concentraciones medias de aire fueron menores de 0.5 y para este análisis, lo más importante es que todas las mediciones resultaron estar fuera de la región de flujo uniforme, esto es, representan a un flujo parcialmente aireado donde las características hidráulicas y contenido de aire cambian de una sección a otra. Lo relevante de todo esto es que permite comprobar que algunas de las mediciones de Straub y Anderson se encuentran en la región de flujo parcialmente aireado ya que como se ve en la fig 4.2 estas mediciones coinciden con algunas de las mediciones de Cain y Wood. Si bien éstas últimas tienden a desviarse de las mediciones de Straub y Anderson, a medida que crecen los valores de x/y_c ; esto se puede explicar si se piensa que dado el ancho reducido del canal de Straub y Anderson es probable que se hayan presentado efectos de las paredes que harían crecer el valor de E al tenerse mayor turbulencia y grado de aeración al que se tendría si estos efectos no existie

ran.

Aceptando las ideas anteriores, la fig 4.1 se ha dividido en tres regiones de flujo; una región de flujo no aireado, limitado en la dirección aguas abajo por el punto de inyección correspondiente a cada pendiente, una región de flujo parcialmente aireado donde se aprecia una variación en los valores de y_c/E y finalmente la región de flujo uniformemente aireado. Las fronteras entre dichas regiones de flujo fueron trazadas en forma aproximada y se puede ver que para pendientes de 22.5° y 30° la región de flujo parcialmente aireado presenta algunos puntos que aparentemente están en régimen uniforme, esto también se podría explicar por la influencia de las paredes ya mencionado.

Anderson (ref 5) realizó experimentos en el mismo canal empleado por Straub y Anderson. Utilizando la rugosidad propia del mismo canal, es decir, removiendo las partículas de arena que le daban una rugosidad artificial mayor, Anderson llevo a cabo los mismos experimentos que los reportados en la ref 3 con el fin de contar con los mismos resultados experimentales pero representativos de una superficie lisa. Para estos datos se hizo el mismo análisis anterior, sin embargo, parece ser que para este caso los efectos de las paredes son mayores. No obstante, para una pendiente de 45° es posible apreciar una ligera variación de y_c/E ; como se ve en la fig 4.3 .

En el análisis de resultados llevados a cabo por los autores en las refs 3 y 5 se afirma que para un determinado gasto y rugosidad, la concentración media de aire \bar{C} se incrementa en forma apreciable en relación directa con la pendiente. Se dice también que para una misma pendiente y rugosidad, el valor de \bar{C} tiende a disminuir a medida que aumenta el gasto; éste último resultado se explica mejor si se piensa que tal y como se ve en la fig 4.1, para una misma pendiente, mientras mayor es el gasto, ésto es, a valores menores de x/y_c , las mediciones reportadas en las refs mencionadas dejan de estar en régimen uniforme; con ello los valores de \bar{C} resultan menores puesto que se alejan de las condiciones de equilibrio. Para apoyar esta idea, se presenta en la fig 4.4a, algunos de los resultados obtenidos por Straub y Anderson en la ref 3; en esta figura los autores han relacionado la concentración media de aire con las características del flujo (el gasto y la pendiente); para este caso la rugosidad del canal es una constante y afirman que para canales con distinta rugosidad, la curva de la fig 4.4a probablemente sería similar en forma, pero difiera en una cantidad que correspondería al cambio en la rugosidad.

Analizando la fig 4.4a, es de notarse un hecho relevante; para una misma pendiente, los valores de \bar{C} tienden a alcanzar un valor límite a medida que crecen los valores de la relación $S/q^{1/5}$, es decir, a medida que los valores del gasto uni

tario q , son más pequeños; este efecto resulta más apreciable en la fig 4.4b, donde se utilizó, en lugar de \bar{C} , los valores de la concentración de aire C_T , medidos en el nivel de transición (tirante d_T); este resultado es explicado por los autores en la ref 3 donde se lee "Parece ser que, para una misma pendiente, a medida que el gasto disminuye abajo de un cierto valor, un factor adicional llega a ser importante en la reducción en los valores de C_T " (en la fig 4.4b, se aprecia que los valores de C_T no sólo alcanzan un valor límite sino que después de él, tienden a reducirse); aquí los autores se refieren al hecho de que cuando crecen los valores de $S/q^{1/5}$, más allá de un cierto valor, la concentración en el nivel de transición sufre una reducción; esta reducción es atribuida a un factor de naturaleza desconocida que crea una inestabilidad en el flujo cuando los tirantes son pequeños.

Aún y cuando en la fig 4.4a no se aprecia una reducción en los valores de \bar{C} , si es de notarse el hecho de que estos valores alcanzan un equilibrio que los hace independientes del gasto (línea punteada de la fig 4.4a); esta apreciación es más notable con pendientes mayores; y es un resultado que apoya la idea de que no todas las mediciones de Straub y Anderson están en régimen uniforme, además, permite explicar que los valores límite o de equilibrio de \bar{C} , se alcanzan cuando los gastos son pequeños, es decir, cuando se tiene un régimen uniforme. Viéndolo desde este punto de vista, se descartaría

la idea de la existencia del factor adicional que crea inestabilidad en el flujo.

De lo anterior resulta una conclusión interesante: en un flujo uniformemente aireado, donde el perfil de concentración de aire no cambia de una sección a otra, el valor de \bar{C} dependerá exclusivamente de la pendiente y de la rugosidad, con esta hipótesis, la fig 4.5 representa, para el canal de Straub y Anderson, la concentración media de aire \bar{C} , como una función del ángulo que la plantilla del canal forma con la horizontal. En la misma fig 4.5 se han ubicado los resultados de Anderson que representan a una superficie lisa y algunas mediciones en prototipos que se han obtenido de la literatura, correspondiente a un régimen uniforme; estas últimas mediciones concuerdan en forma aceptable con las mediciones de Straub y Anderson no obstante que aquellas fueron llevadas a cabo en dos rápidas con diferentes gastos, pendientes y rugosidades. Con ésto último, la curva trazada en la fig 4.5, correspondiente a un canal rugoso, representa a valores promedio de \bar{C} para una rugosidad común en los concretos de los prototipos, no obstante, es de notarse el efecto significativo de rugosidades mucho menores como lo demuestra la curva correspondiente a superficie lisa.

En forma aproximada la fig 4.5 permite obtener el valor de \bar{C} en condiciones uniformes lo cual es útil en los procedimientos de diseño; en la fig 4.5 se ha preferido utilizar a \bar{C}_u en

lugar de \bar{C} para diferenciarlo de aquellos valores que no se encuentran en condiciones uniformes.

A la distancia necesaria para que el flujo alcance las condiciones de régimen uniforme se le designa, en la literatura, como longitud de desarrollo; se interpreta a esta longitud como la diferencia entre la distancia a la que se considera que el flujo ha alcanzado las condiciones uniformes y la distancia al punto de inyección.

Para los datos de Straub y Anderson (condición rugosa), la longitud de desarrollo fue normalizada con respecto al tirante crítico y se presenta en la fig 4.6 en función de la pendiente; la variación de esta longitud está basada en la distribución de las regiones de flujo de la fig 4.1 . Para esta distribución, se puede ver que a medida que crece la pendiente, la longitud de desarrollo es mayor; comparando los datos del modelo de Straub y Anderson con las mediciones en prototipo reportadas en la ref 24 (ver fig 4.2) parece ser que para los valores del vertedor de la presa Aviemore, la longitud de desarrollo tiende a ser mayor que para el modelo de Straub y Anderson; esto pudiera deberse a que se hayan presentado, en el modelo, efectos de las paredes, como ya se ha mencionado estos efectos incrementarían el valor de E , con lo que se alcanzarían las condiciones de equilibrio en una distancia más corta.

4.3 *La pérdida de energía con relación a la inclusión de aire*

La cuantificación de la pérdida de energía en flujos sobre rápidas y vertedores es importante para el diseño de las estructuras disipadoras de energía. En flujos aireados donde el aire llega a penetrar a una región muy próxima a la frontera sólida de la estructura, se produce una disminución en la intensidad del cortante a lo largo de dicha frontera, esto se debe a que con el aire, la densidad del flujo es menor. Por otra parte, la superficie de contacto entre el agua y las paredes, sobre la cual se produce la turbulencia, disminuye con el área ocupada por el aire; de esta manera el aire amortigua las fluctuaciones turbulentas y uniformiza el perfil de velocidades.

Lo anterior explica el porque las pérdidas por fricción son menores en los flujos aireados que en los no aireados; esta disminución en las pérdidas resulta mayor a medida que crece la cantidad de aire que llega al fondo. Por otra parte, como consecuencia de un incremento en el radio hidráulico, debido al abultamiento del flujo y a la disminución de las pérdidas por fricción, se tiene como resultado un incremento en la velocidad de la mezcla; para los datos de Straub y Anderson esta velocidad ha llegado a valores de 1.7 veces la velocidad que se tendría si el flujo fuera no aireado.

Para dar una idea de la disminución de las pérdidas, se presenta en la fig 4.7 la variación del coeficiente de Chezy para las regiones de flujo presentadas en la fig 4.1. Para la región de flujo no aireado, zona definida con C_{cho} , el coeficiente de Chezy resultó ser de $C_{cho} = 50 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, para la región de flujo uniformemente aireado, zona definida con C_{chu} , el coeficiente alcanza valores de $C_{chu} = 98.66 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ para una pendiente de 60° . Es de notarse que mientras mayor es la pendiente, mayor cantidad de aire tendrá el escurrimiento, ésto se refleja en coeficientes de Chezy más altos, es decir, menores pérdidas. Para apoyar esta idea, los coeficientes de Chezy, correspondientes a la región de flujo uniforme, fueron graficados en función de la concentración media de aire \bar{C} ; este resultado se presenta en la fig 4.8 donde se puede apreciar el efecto del contenido de aire sobre la disminución de las pérdidas.

Para la región de transición, línea punteada en la fig 4.7, el coeficiente varía en relación al contenido de aire; para los datos de Straub y Anderson, esta variación se ha supuesto lineal tal como se muestra en la fig 4.7. La figura podría utilizarse para obtener el coeficiente de Chezy según la región de flujo que se tenga.

4.4 Procedimiento de diseño

El procedimiento que a continuación se expone está basado en

el reanálisis de los resultados experimentales reportados. El objetivo de este procedimiento es calcular, a partir de datos usualmente conocidos de antemano, como el gasto, pendiente y rugosidad, las características medias de un flujo aireado. El procedimiento resultará aproximado ya que como se mencionó al analizar la fig 4.2, la extrapolación de los datos de Straub y Anderson a prototipos presenta influencias de las paredes que podrían alterar los resultados.

Como principio, la fig 4.1 podría utilizarse para conocer el tipo de flujo que se tiene, ésto se obtendría en función de la pendiente, el tirante crítico y la ubicación de la estación de interés. Asimismo, de la misma figura podría obtenerse el valor de la energía E.

Para la región de flujo parcialmente aireado, se calcula el valor de la concentración media de aire \bar{C} a partir de la fig 4.4a; si el flujo es uniformemente aireado, el valor de \bar{C} se obtiene de la fig 4.5 que es función exclusivamente de la pendiente.

Para cualquier región de flujo, el valor del coeficiente de Chezy se puede obtener de la fig 4.7 conociendo este valor, el tirante \bar{d} se puede obtener a partir de la ecuación

$$q = C_{ch} \bar{d}^{3/2} (\text{sen } \theta)^{1/2} \quad (4.15)$$

Para la región de flujo parcialmente aireado, y

$$q = C_{chu} \bar{d}^{3/2} (\text{sen } \theta)^{1/2} \quad (4.16)$$

Para la región de flujo uniformemente aireado.

En la ec 4.15 el coeficiente C_{ch} se puede obtener de la fig 4.7 utilizando la extrapolación lineal correspondiente.

El valor de la velocidad del flujo aireado \bar{v} se puede obtener de la ecuación para E.

$$E = \bar{d} \cos \theta + \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

El tirante máximo que puede alcanzar el flujo, debido al abultamiento y_u , se puede obtener con la ec 4.14 una vez que \bar{d} y \bar{c} son conocidos.

Es importante señalar que para el caso de vertedores de ancho de plantilla grande donde desaparecen los efectos de las paredes, la longitud de desarrollo podría alcanzar valores de dos veces la longitud de desarrollo de los datos de Straub y Anderson (fig 4.6).

Los resultados obtenidos con el procedimiento anterior tienen aplicación directa en el dimensionamiento de tanques amorti-

guadores.

4.5 Aplicación de los resultados en la ecuación de cantidad de movimiento

La aplicación del principio de la cantidad de movimiento al esquema mostrado en la fig 4.9 conduce a la siguiente ecuación

$$\frac{\gamma}{g} q (1/2 \cos \beta - \bar{V}_1 \cos \theta) = EP \quad (4.17)$$

donde

- β ángulo que forma la plantilla del tanque con la horizontal, en grados
- θ ángulo que forma la plantilla de la rápida con la horizontal, en grados
- γ peso específico del agua, en kg/m^3
- g aceleración de la gravedad, en m/s^2
- q gasto unitario, en $\text{m}^3/\text{s/m}$
- \bar{V}_1 velocidad media del flujo aireado en la sección 1, en m/s
- \bar{V}_2 velocidad media del agua en la sección 2, en m/s
- EP resultante de las fuerzas externas que actúan en el volumen de control de la fig 4.9, en kg/m

El término EP se puede separar en

$$EP = P_1 \cos \theta - P_2 \cos \beta + W \sin \beta \cos \beta - E_2 \cos \beta \quad (4.18)$$

donde

- P_1 resultante de la fuerza de presión que actúa en la sección 1, en kg/m
- P_2 resultante de la fuerza de presión que actúa en la sección 2, en kg/m
- W peso del agua que se encuentra entre las secciones 1 y 2, en kg/m
- F_f fuerza de fricción externa que actúa a lo largo de la superficie de contacto entre el agua y el tanque, en kg/m

Para un flujo aireado en la sección 1; la fuerza de presión

P es

$$P_1 = \frac{1}{2} \gamma ((1-\bar{C}) y_{u_1}) = \frac{1}{2} \gamma \bar{d}_1^2 \quad (4.19)$$

La fuerza de presión en la sección 2 es

$$P_2 = \frac{1}{2} \gamma d_2^2 \quad (4.20)$$

Despreciando la fuerza de fricción F_f y considerando que $\sin \beta = 0$ y $\cos \beta = 1$ resulta para la ec 4.18

$$\Sigma P = \frac{1}{2} \gamma \bar{d}_1^2 \cos \theta - \frac{1}{2} \gamma d_2^2 \quad (4.21)$$

Sustituyendo 4.21 en 4.18

$$\frac{\gamma}{g} q (V_2 - \bar{V}_1 \cos \theta) = \frac{1}{2} \gamma \bar{d}_1^2 \cos \theta - \frac{1}{2} \gamma d_2^2$$

Ordenando términos y despejando a d_2 se llega a:

$$d_2 = \sqrt{d_1^2 \cos \theta + \frac{2q}{g} \left(v_1 \cos \theta - \frac{q}{d_2} \right)} \quad (4.22)$$

Al resolver por tanteos la ec 4.22 se obtiene el tirante con jugado mayor del salto hidráulico que se forma dentro del tanque amortiguador; lo que permite el dimensionamiento del mismo.

Tabla 4.1 Resumen de los datos de Straub y Anderson, condición rugosa

| GASTO M ³ /S | Y _c M | \bar{u} M | \bar{v} m/S | E m | X/Y _c | Y _c /E. |
|----------------------------|---------------------|----------------|------------------|--------|------------------|--------------------|
| Pendiente 22.5° | | | | | | |
| 0.0623 | 0.1237 | 0.0267 | 5.0440 | 1.3214 | 110.8812 | 0.0936 |
| 0.0906 | .1588 | .0350 | 5.7450 | 1.7145 | 86.3728 | .0926 |
| .1189 | .1903 | .0410 | 6.2790 | 2.0474 | 72.0757 | .0930 |
| .1473 | .2195 | .0480 | 6.7360 | 2.3570 | 62.4875 | .0931 |
| .1812 | .2510 | .0530 | 7.3460 | 2.7994 | 54.4286 | .0900 |
| .2039 | .2727 | .0590 | 7.5900 | 2.9907 | 50.2970 | .0912 |
| .2322 | .2974 | .0640 | 7.8640 | 3.2111 | 46.1197 | .0926 |
| .2719 | .3304 | .0710 | 8.3820 | 3.6465 | 41.5133 | .0910 |
| .3625 | .4002 | .0870 | 9.1140 | 4.3141 | 34.2900 | .0930 |
| Pendiente 30° | | | | | | |
| 0.0623 | 0.1237 | 0.0230 | 5.8830 | 1.7839 | 110.8812 | 0.0693 |
| .0906 | .1588 | .0300 | 6.6140 | 2.2556 | 86.3728 | .0700 |
| .1189 | .1903 | .0345 | 7.5900 | 2.9661 | 72.0757 | .0650 |
| .1473 | .2195 | .0400 | 8.0770 | 3.3597 | 62.4875 | .0660 |
| .1812 | .2520 | .0470 | 8.5040 | 3.7266 | 54.4286 | .0680 |
| .2039 | .2727 | .0500 | 8.9000 | 4.0805 | 50.2970 | .0670 |
| .2322 | .2974 | .0550 | 9.2050 | 4.3663 | 46.1197 | .0680 |
| .2719 | .3304 | .0620 | 9.7230 | 4.8721 | 41.5133 | .0680 |
| .3625 | .4002 | .0740 | 10.7290 | 5.9311 | 34.2900 | .0675 |

Tabla 4.1 Continuación.

| GASTO m ³ /s | Yc m | \bar{d} m | \bar{v} m/s | E m | X/Yc | Yc/E |
|----------------------------|---------|----------------|------------------|--------|----------|--------|
| Pendiente 37.5° | | | | | | |
| 0.0623 | 0.1237 | 0.0183 | 7.376 | 2.7875 | 110.8812 | 0.0444 |
| .0906 | .1588 | .0239 | 8.2910 | 3.5226 | 86.3728 | .0451 |
| .1189 | .1903 | .0282 | 9.2350 | 4.3692 | 72.0757 | .0440 |
| .1473 | .2195 | .0326 | 9.8450 | 4.9659 | 62.4875 | .0442 |
| .1812 | .2520 | .0402 | 9.8450 | 4.9720 | 54.4286 | .0507 |
| .2039 | .2727 | .0454 | 9.7840 | 4.9223 | 50.2970 | .0554 |
| .2322 | .2974 | .0500 | 10.1800 | 5.3216 | 46.1197 | .0559 |
| .2719 | .3304 | .0566 | 10.5160 | 5.6930 | 41.5133 | .0580 |
| .3625 | .4002 | .0696 | 11.4300 | 6.7140 | 34.2900 | .0596 |
| .4248 | .4448 | .0780 | 12.1010 | 7.5242 | 30.8300 | .0591 |
| Pendiente 45° | | | | | | |
| 0.0623 | 0.1237 | 0.0161 | 8.4430 | 3.6446 | 110.8812 | 0.0339 |
| .0906 | .1588 | .0190 | 10.3940 | 5.5198 | 86.3728 | .0290 |
| .1189 | .1903 | .0240 | 10.7900 | 5.9509 | 72.0757 | .0320 |
| .1473 | .2195 | .0280 | 11.4910 | 6.7498 | 62.4875 | .0325 |
| .1812 | .2520 | .0324 | 12.1920 | 7.5991 | 54.4286 | .0332 |
| .2039 | .2727 | .0361 | 12.3750 | 7.8414 | 50.2970 | .0348 |
| .2322 | .2974 | .0417 | 12.2220 | 7.6430 | 46.1197 | .0390 |
| .2719 | .3304 | .0489 | 12.1920 | 7.6108 | 41.5133 | .0434 |
| .3625 | .4002 | .0619 | 12.802 | 8.3970 | 34.2900 | .0976 |
| .4248 | .4448 | .0731 | 12.7100 | 8.2853 | 30.8300 | .0540 |

Tabla 4.1 continuación.

| Gasto m ³ /s | Yc m | d m | $\frac{Q}{A}$ m/s | E m | X/Yc | Yc/E |
|----------------------------|---------|--------|----------------------|---------|----------|--------|
| Pendiente 60° | | | | | | |
| 0.0623 | 0.1237 | 0.0121 | 11.2780 | 6.4889 | 110.8812 | 0.0191 |
| 0906 | .1588 | .0167 | 11.8260 | 7.1365 | 86.3728 | .0223 |
| .1189 | .1903 | .0196 | 13.1670 | 8.8462 | 72.0757 | .0215 |
| .1473 | .2195 | .0231 | 13.9290 | 9.9003 | 62.4875 | .0222 |
| .1812 | .2520 | .0271 | 14.6910 | 11.0138 | 54.4286 | .0230 |
| .2039 | .2720 | .0306 | 14.569 | 10.8336 | 50.2970 | .0251 |
| .2322 | .2974 | .0354 | 14.3260 | 10.4782 | 46.1197 | .0280 |
| .2719 | .3304 | .0398 | 15.0270 | 11.5291 | 41.5133 | .0290 |

Tabla 4.2 Resumen de los cálculos efectuados para construir la fig.4.2
(datos de la ref 24).

| Est | X (m) | q (m ³ /sm) | \bar{V} (m/s) | \bar{d} (m) | E (m) | γ_c/E | X/ γ_c |
|-----|----------|---------------------------|--------------------|------------------|------------|--------------|---------------|
| 501 | 2.3 | 3.15 | 16.74 | .188 | 14.41 | .069 | 2.3 |
| 502 | 1.4 | 3.15 | 16.8 | .187 | 14.51 | .068 | 8.4 |
| 503 | 14.5 | 3.15 | 17.5 | .180 | 15.73 | .063 | 14.5 |
| 504 | 20.6 | 3.15 | 17.74 | .177 | 16.16 | .061 | 20.6 |
| 505 | 26.7 | 3.15 | 18.2 | .173 | 17.40 | .057 | 26.7 |

Tabla 4.2 continuación:

| Est. | X (m) | q (m ³ /sm) | \bar{V} (m/s) | \bar{d} (m) | E (m) | γ_c/E | X/ γ_c |
|------|----------|---------------------------|--------------------|------------------|----------|--------------|---------------|
| 501 | 7.7 | 2.23 | 15.4 | .14 | 12.19 | .064 | 9.74 |
| 502 | 13.8 | 2.23 | 16.64 | .13 | 14.20 | .055 | 17.46 |
| 503 | 19.9 | 2.23 | 16.64 | .13 | 14.20 | .055 | 25.18 |
| 504 | 26 | 2.23 | 17.2 | .12 | 15.17 | .052 | 32.91 |
| 505 | 32.1 | 2.23 | 17.6 | .12 | 15.90 | .049 | 40.63 |

4.3 Resumen de los cálculos efectuados para construir la fig.4.2 (datos de la ref 3)

| GASTO. (m ³ /5) | Yc (m) | \bar{d} (m) | \bar{v} (m/5) | E (m) | X (m) | X/Yc | Yc/E |
|-------------------------------|-----------|------------------|--------------------|----------|----------|-------|-------|
| .0623 | .123 | .0267 | 8.44 | 3.64 | 13.71 | 90.67 | .0339 |
| .0906 | .158 | .019 | 10.39 | 5.519 | 13.71 | 70.63 | .029 |
| .1189 | .140 | .024 | 10.79 | 5.95 | 13.71 | 58.93 | .032 |
| .1473 | .219 | .028 | 11.49 | 6.749 | 13.71 | 51.09 | .0325 |
| .1812 | .252 | .032 | 12.19 | 7.599 | 13.71 | 44.50 | .033 |
| .2039 | .272 | .036 | 12.37 | 7.84 | 13.71 | 41.13 | .034 |
| .2322 | .297 | .041 | 12.22 | 7.64 | 13.71 | 37.71 | .039 |
| .2719 | .330 | .0489 | 12.19 | 7.61 | 13.71 | 34.0 | .043 |
| .3625 | .400 | .0619 | 12.80 | 8.397 | 13.71 | 28.0 | .0476 |
| .4248 | .44 | .073 | 12.71 | 8.28 | 13.71 | 25.21 | .054 |

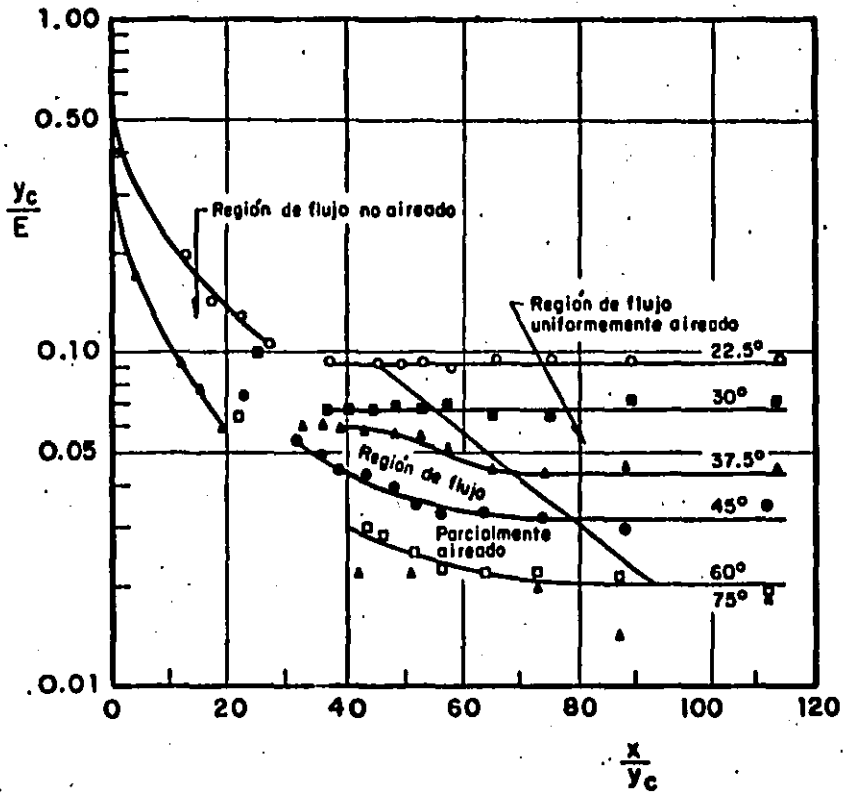


Fig 4.1 Regiones de flujo para los datos de Straub y Anderson, condición rugosa

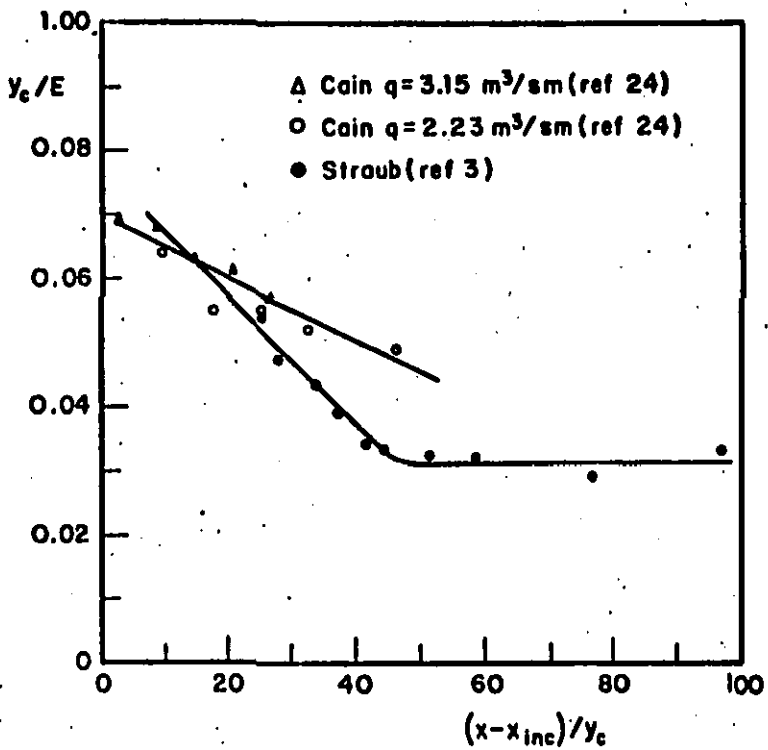


Fig 4.2 Comparación entre los datos de Straub y Anderson y de Cain y Wood (para $\theta=45^\circ$)

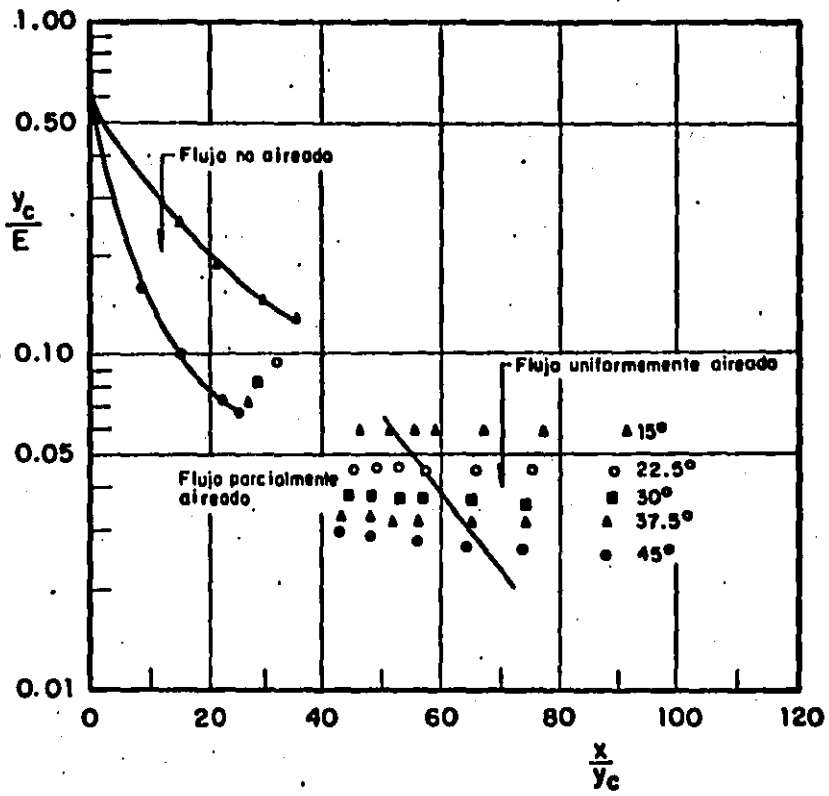


Fig 4.3 Regiones de flujo para los datos de Anderson, condición lisa

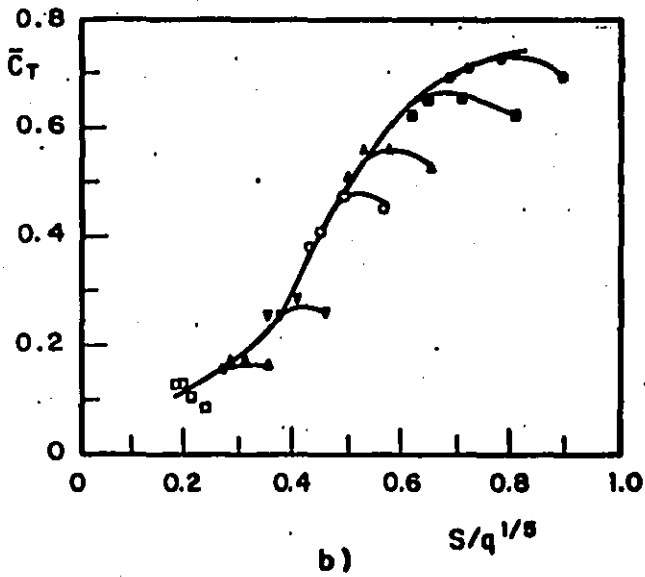
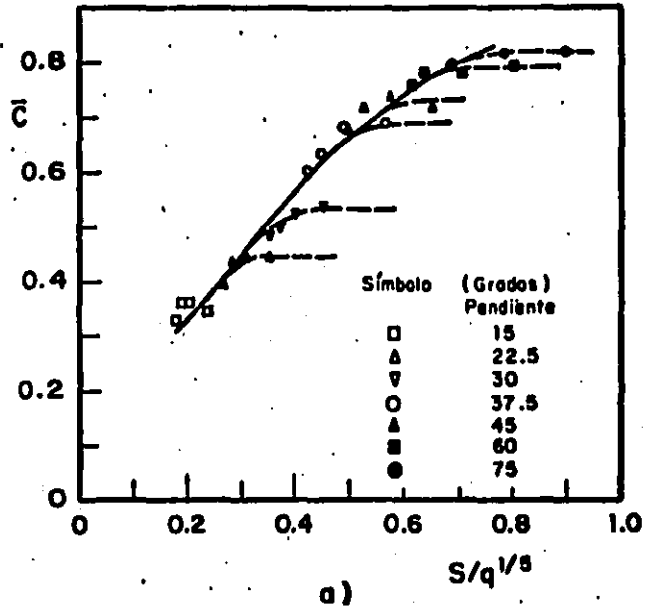


Fig 4.4 Concentración de aire como una función de $S/q^{1/5}$ (ref 3)

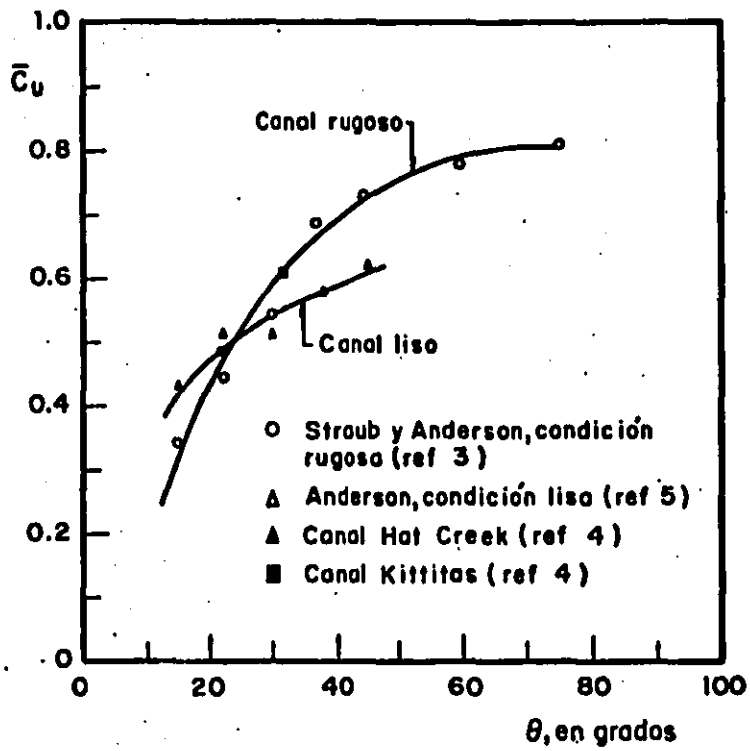


Fig 4.5 Concentración media de aire para la región de flujo uniforme en función de la pendiente del canal

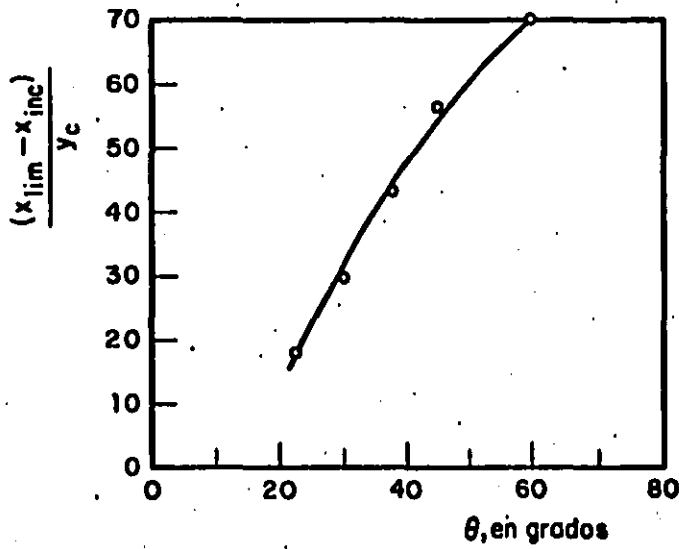


Fig 4.6 Variación de las regiones en transición (longitud de desarrollo) con la pendiente,condición rugosa

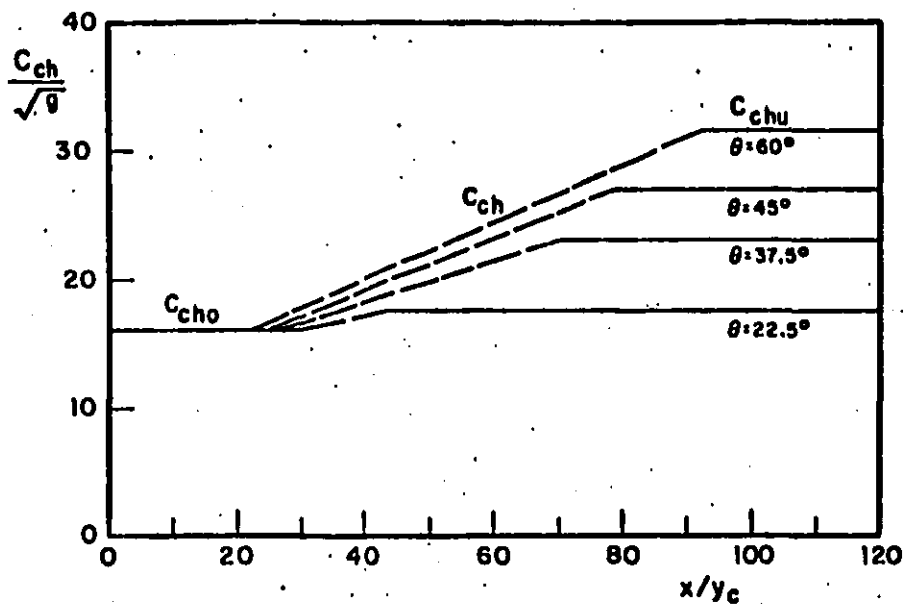


Fig 4.7 Variación del coeficiente de Chezy para un flujo aireado, condición rugosa

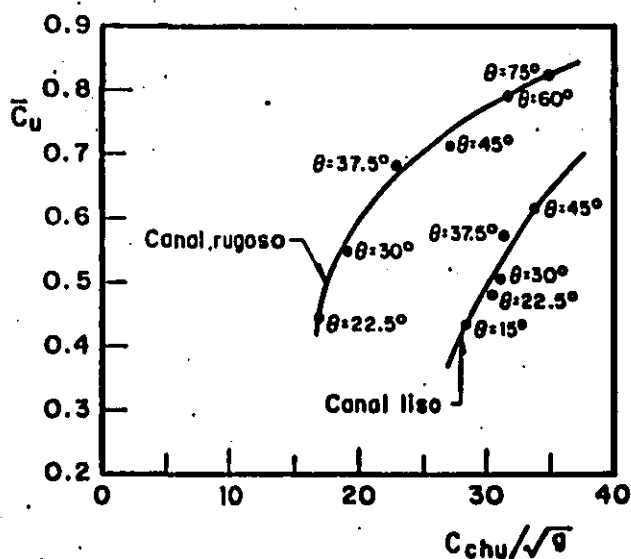


Fig 4.8 Variación del coeficiente de Chezy con el contenido de aire, para régimen uniforme

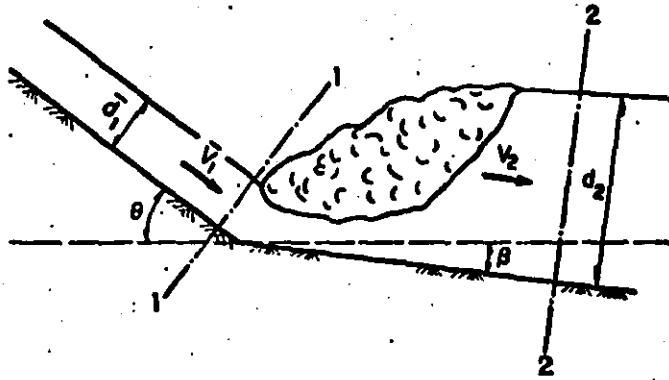


Fig 4.9 Aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento a la región final de un flujo aireado

5. CONCLUSIONES

Después de haber desarrollado los cuatro capítulos anteriores es claro que hasta la fecha aún no se ha comprendido por completo el fenómeno del agua blanca. Se saben sus consecuencias pero no la causa que lo produce. Hasta ahora se han planteado hipótesis que intentan explicar este fenómeno, sin embargo, estas hipótesis o bien son sugestivas o se han planteado en función de evidencias experimentales a nivel de modelos a escala reducida. Es bien sabido que tratar de modelar los efectos de resistencia en los flujos a alta velocidad es sumamente difícil, por esta razón los métodos de predicción expuestos en el capítulo 3 están basados en pruebas de laboratorio donde no pudo reproducirse el agua blanca, y por tanto los trabajos sólo se concretaron a estudiar el de-

sarrollo de la capa límite. Esto quiere decir que los métodos serán válidos en tanto la hipótesis en que se apoyan sea también válida. En realidad, no es claro todavía el principio del fenómeno; por un lado, se tiene la idea de que éste principia en forma súbita y en una línea bastante definida y transversal a la dirección del escurrimiento (hipótesis de la afloración de la capa límite turbulenta), por otro lado se tiene la idea de que el agua blanca principia primero en forma de franjas aisladas (hipótesis de la afloración de estrias vorticosas longitudinales). A decir verdad, ninguna de estas ideas ha sido completamente demostrada, lo que sí es claro es que la apariencia completamente blanca del flujo va precedida (en algunos casos) de las franjas espumosas aisladas arriba mencionadas. Sin embargo, se ha comprobado que los resultados que proporcionan los métodos de predicción del capítulo 3 resultan una buena aproximación si se les compara con las escasas mediciones en prototipo con que se cuenta. Es por ello que quizá la hipótesis de la afloración de la capa límite turbulenta ha recibido mayor atención y en la actualidad es ampliamente aceptada. No obstante, se plantea la necesidad de estudiar todas las alternativas que pudieran explicar el fenómeno del agua blanca, y no simplemente dedicarse a una sola, máxime cuando ésta (teoría de la turbulencia) presenta ciertas objeciones que hay que conciliar.

La teoría de la afloración de estrias vorticosas longitudina

les abre una alternativa interesante para comprender el origen del agua blanca. Para ello se requiere estudiar la teoría con mayor profundidad y llevar a cabo pruebas experimentales (de preferencia en prototipos) con el propósito de contar con datos suficientes que permita comprobar la teoría y desarrollar un método de predicción para determinar el punto o sección crítica donde se inicia la aeración. Además conseguir un método de predicción basado en esta teoría resultaría sumamente interesante ya que permitiría comparar los resultados que se obtuvieran con aquellos proporcionados por los métodos de predicción basados en la teoría de la afloración de la capa límite.

Otra posibilidad que podría resultar interesante es la de considerar que el origen del agua blanca se debe al afloramiento de la capa límite turbulenta y al afloramiento y ruptura de los vórtices longitudinales; ésto se desprende de los resultados obtenidos con capa límite, ya que, como se vio en el capítulo 3, proporcionan distancias de aparición del punto crítico más cortas que las que ocurren en la naturaleza (mediciones en prototipo reportadas en la literatura), lo que induce a pensar que el afloramiento de la capa límite no es la única causa que origina el fenómeno. Esta idea complicaría el análisis, pero abre otro camino para explicar el origen del agua blanca.

Por otro lado, el problema que presenta el cálculo de la mezcla agua-aire no está resuelto aún. Se han venido publicando algunos trabajos que presentan metodologías que permiten estimar los efectos de la inclusión de aire sobre los escurrimientos; estos procedimientos parten de una base experimental en donde las mediciones en modelos y/o prototipos han tenido un papel muy importante; destacan entre dichas mediciones las efectuadas por Straub y Anderson (ref 3) y Anderson (ref 5) ya que han sido publicadas en su totalidad lo cual ha hecho que sigan siendo utilizadas con frecuencia.

Ha sido práctica común aceptar que estas mediciones representan a un flujo uniformemente aireado y con esta base se han presentado los métodos (refs 3, 7 y 8), ésto no resulta tan cierto, ya que como se vio en el capítulo 4, al reanalizar los resultados experimentales de Straub y Anderson se pudo apreciar que no todas las mediciones de dichos autores son representativas de un flujo uniformemente aireado. El mismo reanálisis ha permitido presentar una metodología con la cual es posible estimar, para un flujo parcialmente o uniformemente aireado, los efectos que produce, en el escurrimiento, el aire atrapado. Debido a que la metodología presentada está fundamentada, principalmente, en las observaciones de Straub y Anderson, resulta aplicable en rápidas de sección rectangular y con una rugosidad en el concreto representada con $n = 0.014$. No obstante, ésto no le resta

utilidad al método puesto que las rápidas de sección rectan
gular y $n = 0.014$ son comunes en la práctica.

Con la metodología presentada también es posible determinar
concentraciones medias de aire lo cual resulta de utilidad
cuando se desea obtener el abultamiento del flujo y con ello
un adecuado dimensionamiento de las paredes laterales, evi-
tando así los posibles derrames.

En el caso de un vertedor, la metodología propuesta podra
utilizarse para tener una primera idea, aunque los resulta-
dos habra que tomarlos con reserva sobre todo porque en un
vertedor la longitud de desarrollo resulta mayor que la ob-
tenida a partir de las observaciones de Straub y Anderson;
donde debido al ancho reducido del canal, probablemente se
tuvieron influencias de las paredes.

ANEXO A**APLICACION DE LAS LEYES DE CONSERVACION EN LA ZONA DE DESARROLLO DE LA AERACION**

La cuantificación de los efectos de la inclusión de aire sobre las características medias de un flujo aireado a superficie libre se podría estimar en forma teórica aplicando las leyes de conservación en la zona de desarrollo de la aeración.

En este anexo se pretende mostrar esta alternativa; para lo cual se tomaron las ideas expresadas en la ref 7. Antes de pasar al desarrollo del tratamiento analítico de la aeración es conveniente presentar las bases teóricas sobre las cuales se apoya dicho desarrollo. Las ideas que a continuación se presentan fueron tomadas de la ref 1.

A.1 El Concepto de Arrastre

Los escurrimientos a superficie libre son normalmente casos de flujos turbulentos; se entenderá por turbulencia, dentro de una masa fluida en movimiento, un estado de agitación de sordenada, que puede imaginarse como la coexistencia con el flujo principal de un gran número de remolinos de distintos tamaños, que generalmente presentan el aspecto de ovoides deformados. La región de turbulencia es de una extensión finita y colinda con un flujo no turbulento de una velocidad media casi uniforme.

Como es sabido, la región turbulenta se desarrolla con la distancia hacia aguas abajo conforme el flujo no turbulento es contaminado. En flujos sobre vertedores o escurrimientos de alta velocidad es común tener, en adición a esta contaminación, un flujo de aire dentro de la capa turbulenta (el proceso de la inclusión de aire se describe en el capítulo 2).

Según Ellison y Turner (ref 1) la velocidad de entrada del aire a través de la superficie de contacto agua-aire, es proporcional a la velocidad característica (escala de velocidad) del flujo principal y, la constante de proporcionalidad es conocida como constante de arrastre, E . Según este principio se define a la constante de arrastre en la forma siguiente.

Considerando el caso de un flujo bidimensional en un canal donde se toma el eje "X" a lo largo del mismo y el eje "Y" perpendicular a él, se define una longitud característica, y_u , como el tirante normal medido desde el fondo del canal hasta un punto tal que la concentración de aire sea del 99% (la elección de este valor se debe a la facilidad y seguridad con la que se ha medido en modelos y prototipos (ref 3)); puede entonces definirse una velocidad característica como

$$\bar{U} = \frac{1}{y_u} \int_0^{y_u} u \, dy$$

donde

U velocidad de la mezcla agua-aire a una distancia y de la pared

La constante de arrastre, E, se puede expresar, de acuerdo con la definición dada anteriormente, por

$$E = \frac{1}{\bar{U}} \frac{d}{dx} (y_u \bar{U}) \quad (A.1)$$

El planteamiento teórico que sigue está basado en el concepto de arrastre ya descrito y en las ecuaciones clásicas de la hidráulica: conservación de masa, de cantidad de movimiento y de energía. En ellas, dos de los parámetros más importantes son:

- a) La densidad en forma adimensional, $\bar{\rho}$, que toma en cuenta la variación de la densidad de la mezcla, definida por

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\rho_w y_u \bar{U}} \int_0^{y_u} \rho_m u dy \quad (\text{A.2})$$

donde

ρ_w densidad del agua

ρ_m densidad de la mezcla agua-aire

- b) Características medias del flujo de la mezcla, expresadas en función del número de Froude y definido para este caso como

$$F = \bar{U} / (\bar{\rho} g y_u \cos \theta)^{1/2} \quad (\text{A.3})$$

donde

θ ángulo que forma la plantilla del canal con la horizontal

A.2 Ecuaciones Básicas para Canales

A.2.1 Ecuación de Continuidad de Masa

Un análisis cuidadoso de la ec A.1 permitirá descubrir en ella a la ecuación de continuidad, ya que; $\frac{1}{\bar{U}} \frac{d(q)}{dx} = \text{CTE} = E$; en otras palabras, el incremento en el caudal q , de mezcla,

es debido solamente a la entrada de aire al Flujo.

Desarrollando la ec A.1 en términos de $\bar{\rho}$, y_u y F , se obtiene

$$E = \frac{1}{\bar{U}} \left(y_u \frac{d\bar{U}}{dx} + \bar{U} \frac{d y_u}{dx} \right) \quad (\text{A.4})$$

De acuerdo con la ec A.3

$$\bar{U} = F (\bar{\rho} g y_u \cos \theta)^{1/2}$$

es decir, $\bar{U} = f(F, \bar{\rho}, y_u)$, por lo tanto

$$\frac{d\bar{U}}{dx} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial y_u} \frac{d y_u}{dx} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial F} \frac{dF}{dx} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx}$$

Sustituyendo los valores de U y dU/dx , la ec A.4 se transforma en

$$E = \frac{3}{2} \frac{d y_u}{dx} + \frac{y_u}{F} \frac{dF}{dx} + \frac{1}{2} \frac{y_u}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx} \quad (\text{A.5})$$

En la deducción anterior se ha considerado que la constante de arrastre es función solamente de $\bar{\rho}$, F y y_u , es decir, se considera que la diferencia entre las densidades del agua y del fluido ambiente es siempre la misma.

A.2.2 Conservación de la Cantidad de Movimiento

Para deducir la ecuación de cantidad de movimiento para un

canal prismático con flujo turbulento se partirá del principio de conservación de la propiedad "q". Según este principio: el flujo neto de una cierta propiedad "q" que atraviesa un diferencial de área de un volumen de control ubicado dentro de un tubo de corriente, más el cambio en el almacenamiento dentro del volumen de control es igual a la creación o destrucción de energía dentro del mencionado volumen de control. En forma analítica lo anterior se expresa como

$$\oint_S \rho q U \bar{n} ds + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho q dV = \int_V R(\rho q) dV \quad (A.6)$$

donde

- ρ densidad del flujo con propiedad q
- U velocidad con la cual la propiedad q atraviesa la superficie de control S
- \bar{n} vector unitario normal hacia afuera sobre S
- V volumen de control que encierra la superficie S
- R variable que representa una creación o destrucción de energía

Para expresar la ec A.6 en términos de transporte de cantidad de movimiento, se hace $q = U_j$ (la componente de \bar{U} en la dirección j). En este caso, la integral del lado derecho de la ec A.6 representará, la creación o destrucción de la cantidad de movimiento, ejercida por la fuerza resultante de las de cuerpo, normal y tangencial. De esta forma, la ec

A.6 se transforma en

$$\oint_S \rho U_j U \bar{n} ds + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho U_j dV = F_{nj} + F_{\tau j} + F_{cj} \quad (\text{A.7})$$

donde

- F_{nj} resultante de las fuerzas normales a la superficie S en la dirección j
- $F_{\tau j}$ resultante de las fuerzas tangenciales a la superficie S en la dirección j
- F_{cj} resultante de las fuerzas de cuerpo en el volumen V en la dirección j

Mediante el teorema de la divergencia de Gauss es posible transformar integrales de superficie en integrales de volumen o viceversa, ésto es

$$\int_V \nabla \rho U_j U dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho U_j dV = F_{nj} + F_{\tau j} + F_{cj} \quad (\text{A.8})$$

El flujo aquí tratado es permanente por lo que

$$\int_V \nabla \rho U_j U dV = F_{nj} + F_{\tau j} + F_{cj} \quad (\text{A.9})$$

La fuerza de presión o normal F_{nj} puede representarse por

$$F_{nj} = - \oint_S P_j \cdot \bar{n} ds \quad (\text{A.9a})$$

donde

P_j componente en la dirección j de la presión normal a la superficie S

O bien, por el teorema de Gauss

$$F_{nj} = - \oint_S P_j \bar{n} dS = - \int_V \nabla P_j dV$$

Por lo tanto, la ec A.9 se transforma en

$$\int_V \rho U_j U dV = - \int_V \nabla P_j dV + F_{\tau j} + F_{c j}$$

Si se reduce el volumen de control a un punto con el propósito de no manejar integrales de volumen se tiene que

$$\nabla(\rho U_j U) = - \nabla P_j + f_{\tau j} + f_{c j} \quad (\text{A.9b})$$

donde

$f_{\tau j} = F_{\tau j}/V$ resultante de las fuerzas tangenciales exteriores por unidad de volumen

$f_{c j} = F_{c j}/V$ resultante de las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen

Al considerar un flujo unidimensional según el eje X , el transporte de cantidad de movimiento es

$$\frac{d}{dx} (\rho \bar{U}^2) = - \frac{d}{dx} (P) + f_{\tau x} + f_{c x} \quad (\text{A.9c})$$

donde

$$U = U_x$$

$$P = P_x = \rho g y_u \cos \theta$$

Si se integra la ec A.9c a lo largo de la normal al flujo desde la plantilla del canal hasta y_u

$$\int_0^{y_u} \frac{d}{dx} (\rho U^2) dy = - \frac{d}{dx} \int_0^{y_u} \rho g \cos \theta y dy + f_{rx} y_u + f_{cx} y_u \quad (A.10)$$

donde

θ, y, y_u ya han sido definidas y donde se ha sacado el operador $\frac{d}{dx}$ fuera de la segunda integral por no ser el integrando función de x

Los términos del lado derecho de la ec A.10 representan, para un canal de ancho unitario, la fuerza de presión, la fuerza tangencial por unidad de área y la fuerza de cuerpo por unidad de área respectivamente.

La fuerza exterior tangencial por unidad de área $f_t y_u$, que actúa sobre el fluido es la debida al arrastre friccional o esfuerzo cortante que se produce sobre la frontera sólida. Esta fuerza puede expresarse en función de un coeficiente de arrastre C_1 , de la densidad del fluido ρ y de la velocidad \bar{U} del mismo, en la forma siguiente (ref 7)

$$f_{\tau x} y_u = - C_1 \rho \bar{U}^2 \quad (\text{A.11})$$

El signo negativo se debe a que la fuerza tangencial es contraria al movimiento del fluido.

La componente de la fuerza de cuerpo por unidad de área, en la dirección x , debida sólo al campo gravitacional, puede expresarse como

$$f_{c x} y_u = \int_0^{y_u} \rho g \operatorname{sen} \theta dy \quad (\text{A.12})$$

Reemplazando ρ por ρ_m (densidad de la mezcla) y sustituyendo A.11 y A.12 en A.10 se tiene

$$\int_0^{y_u} \frac{d}{dx} (\rho_m U^2) dy = - \frac{d}{dx} \int_0^{y_u} \rho_m g \cos \theta y dy - C_1 \rho_m U^2 + \int_0^{y_u} \rho g \operatorname{sen} \theta dy \quad (\text{A.13})$$

Mediante la regla de Leibnitz, (ref 41) es posible que el signo de derivación quede fuera de la primera integral de la ec A.13 . Según esta regla

$$\frac{d}{dx} \int_0^{y_u} \rho_m U^2 dy = \int_0^{y_u} \frac{d}{dx} \rho_m U^2 dy - (\rho_a U_a^2) \frac{d y_u}{dx}$$

donde

ρ_a , densidad del aire

U_a , velocidad del aire

El segundo término del lado derecho de la ecuación anterior, está asociada con un flujo por la frontera, en este caso un flujo de aire. Sin embargo, este flujo en términos de cantidad de movimiento es despreciable comparado con el del flujo principal (la densidad del agua es aproximadamente 800 veces la del aire), o bien, comparado con el flujo másico considerado en la ecuación de continuidad, donde debido a la inclusión de aire existe un significativo incremento de volumen. Por tanto, despreciando el flujo por la frontera superior la ec A.13 se transforma en

$$\frac{d}{dx} \int_0^{y_u} \rho_m U^2 dy = - \frac{d}{dx} \int_0^{y_u} \rho_m g \cos \theta y dy - C_1 \rho_m \bar{U}^2 + \int_0^{y_u} \rho_m g \operatorname{sen} \theta dy \quad (\text{A.14})$$

La ec A.14 representa el balance de cantidad de movimiento del fluido contenido en el volumen elemental de ancho unitario limitado por x , $x + dx$, $y = 0$, $y = y_u$.

Siguiendo las ideas expresadas en la ref 7 y a través de procedimientos algebraicos, la ec A.14 se expresará en forma parecida a la ec A.5; para tal efecto, se divide la ec A.14 entre la densidad del agua pura, ρ_w , y se definen los parámetros adimensionales siguientes:

$$S_1 = \frac{1}{\bar{U}^2 y_u} \int_0^{y_u} \frac{\rho_m}{\rho_w} U^2 dy \quad (\text{A.15})$$

$$S_2 = \frac{1}{\bar{\rho} y_u^2} \int_0^{y_u} \frac{\rho_m}{\rho_w} y \, dy \quad (\text{A.16})$$

$$S_3 = \frac{1}{\bar{\rho} y_u} \int_0^{y_u} \frac{\rho_m}{\rho_w} \, dy \quad (\text{A.17})$$

Con auxilio de las expresiones A.3 y A.15 a A.17 se tiene

$$\begin{aligned} S_3 \tan \theta - C_1 \bar{\rho} F^2 = 2(S_1 \bar{\rho} F^2 + S_2) \frac{d y_u}{dx} + (2 S_1 \bar{\rho} F^2) \frac{y_u}{F} \frac{dF}{dx} + \\ + (2 S_1 \bar{\rho} F^2 + S_2) \frac{y_u}{\bar{\rho}} \frac{d \bar{\rho}}{dx} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

A.2.3 Conservación de la Energía

Si en la ec A.6 se hace $q = E^*$ se obtendrá la ecuación de la energía; E^* será la energía por unidad de masa o específica. Esta energía es de tres tipos a saber:

- a) $e_k = U^2/2$, energía cinética específica, asociada con el movimiento de la masa (energía de la mezcla agua-aire);
- b) e_i , energía interna específica asociada con la temperatura de la masa (energía molecular y atómica);

- c) $e_p = gZ$, energía potencial específica, asociada con la posición de la masa para campos gravitacionales, donde Z es la elevación local del fluido.

Al aplicar el principio de la conservación de la propiedad "q" en términos de la energía se establece lo que se conoce como el principio de la conservación de la energía y se puede expresar en términos de la rapidez de variación de la energía, debida a las velocidades con las cuales se transfiere calor y se efectúa trabajo. En esta forma, el lado derecho de la ec A.6 estará representado por

$$\int_V R(\bar{\rho} E^*) dV = \frac{\delta Q}{\delta t} - \frac{\delta W}{\delta t} \quad (A.19)$$

donde

$\frac{\delta Q}{\delta t}$ transferencia de calor en el sistema por sus contornos; implica una energía en transición desde una masa a otra como resultado de una diferencia de temperatura

$\frac{\delta W}{\delta t}$ trabajo hecho sobre los contornos del sistema, implica una energía en transición y que tiene lugar cuando fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema lo mueven una cierta distancia

Las variaciones más significativas en la energía interna, e , son las debidas a variaciones en la temperatura (ref 2) y suponiendo a éstas despreciables, los términos e y δQ no se considerarán con lo cual la ec A.6 aplicada en términos de la energía

queda

$$\oint_S \rho (U^2 + gZ) U \bar{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho (U^2 + gZ) dV = - \frac{\delta W}{\delta t} \quad (\text{A.20})$$

El trabajo realizado sobre los contornos del sistema incluye

- a) $\delta W_{\text{presión}}$, trabajo efectuado por las fuerzas normales (presión) actuando sobre las fronteras del mismo.
- b) $\delta W_{\text{tangencial}}$, trabajo de las fuerzas tangenciales (esfuerzos cortantes) realizado en las fronteras del sistema.

En el presente desarrollo el término δW no incluye el trabajo realizado por las fuerzas másicas, debidas a la gravedad, ya que este efecto está considerado en el término e_p como energía potencial.

Para aplicar la ec A.20 al caso de un canal prismático de pendiente fuerte el trabajo (en la unidad de tiempo) efectuado por las fuerzas normales, es igual a la fuerza debida a la presión local multiplicada por la componente de la velocidad en la dirección de la fuerza, ésto es, utilizando la expresión A.9a

$$\delta W_{\text{presión}} = F_n U_j = - \oint_S p \bar{n} U dS$$

Anflogamente

$$\delta W_{\text{tangencial}} = F_{\tau} U_{\tau}$$

donde

U_j componente de la velocidad en la dirección de la fuerza

Con las expresiones anteriores la ec A.20 se transforma en

$$\oint_S \rho (U^2 + gZ) \bar{U} \bar{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho (U^2 + gZ) dV = - \oint_S P U \cdot \bar{n} dS + F_{\tau} U_{\tau} \quad (\text{A.21})$$

Mediante el teorema de la divergencia de Gauss la ec A.21 se transforma en

$$\int_V \nabla (\rho (U^2 + gZ) \bar{U}) dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho (U^2 + gZ) dV = - \int_V \nabla (PU) dV + F_{\tau} U_{\tau} \quad (\text{A.22})$$

Considerando un volumen de control reducido a un punto y además flujo permanente, la ec A.22 deviene en

$$\nabla (\rho (U^2 + gZ) \bar{U}) = - \nabla (P\bar{U}) + f_{\tau} U_{\tau} \quad (\text{A.23})$$

donde

$f_{\tau} U_{\tau}$ trabajo, en la unidad de tiempo, realizado por las fuerzas tangenciales por unidad de volumen

Si se considera un flujo unidimensional en la dirección x

$$\frac{d}{dx} (\rho (U^3 + gZU)) = - \frac{d}{dx} (PU) + f_T U$$

e integrando en la dirección y , se tiene

$$\int_0^{y_u} \frac{d}{dx} (\rho (U^3 + gZU)) dy = - \frac{d}{dx} \int_0^{y_u} \rho g \cos \theta y U dy + f_T y_u U$$

por la ec A.11 y reemplazando ρ por ρ_m

$$\int_0^{y_u} \frac{d}{dx} (\rho_m (U^3 + gZU)) dy = - \frac{d}{dx} \int_0^{y_u} \rho_m g \cos \theta y U dy - C_2 \rho_m \bar{U}^3 \quad (A.24)$$

donde

C_2 coeficiente de arrastre

Para canales prismáticos con pendiente negativa, esto es,

$\frac{dz}{dx} = - \sin \theta$ la ec A.24 resulta

$$\int_0^{y_u} \frac{d}{dx} \rho_m U^3 dy = - \frac{d}{dx} \int_0^{y_u} \rho_m g \cos \theta y U dy - C_2 \rho_m \bar{U}^3 + \int_0^{y_u} \rho_m g \sin \theta U dy \quad (A.25)$$

Interesa ahora expresar la ec A.25 en forma parecida a las ecs A.5 y A.18, para tal efecto es necesario intercambiar los signos de integración y derivación en la primera integral de la ec A.25, esto es, aplicando la regla de Leibnitz y dado que la velocidad es función de y , se tiene

$$\int_0^{y_u} \frac{d}{dx} \rho_m U^3 dy = \frac{d}{dx} \int_0^{y_u} \rho_m U^3 dy + \rho_a U_a^3 \frac{d y_u}{dx}$$

Si se considera que el transporte de energía por la frontera superior debido a la inclusión de aire es despreciable en comparación con la del flujo en la ecuación de continuidad (recuérdese que $\rho_w/\rho_a = 800$), se tiene que

$$\rho_a U_a^3 \frac{d y_u}{dx} = 0$$

Por lo tanto, la ec A.24 resulta

$$\frac{d}{dx} \int_0^{y_u} \rho_m U^3 dy = - \frac{d}{dx} \int_0^{y_u} \rho_m g \cos \theta y U dy - C_2 \rho_m \bar{U}^3 + \int_0^{y_u} \rho_m g \sin \theta U dy \quad (\text{A.26})$$

Luego, en forma análoga a lo expresado para la ecuación de continuidad de movimiento, se define para la ecuación de energía los parámetros adimensionales siguientes

$$S_4 = \frac{1}{\bar{\rho} y_u \bar{U}^3} \int_0^{y_u} \frac{\rho_m}{\rho_w} U^3 dy \quad (\text{A.27})$$

$$S_5 = \frac{1}{\bar{\rho} y_u^2 \bar{U}} \int_0^{y_u} \frac{\rho_m}{\rho_w} U y dy \quad (\text{A.28})$$

$$S_6 = \frac{1}{\bar{\rho} y_u \bar{U}} \int_0^{y_u} \frac{\rho_m}{\rho_w} U dy \quad (\text{A.29})$$

Y con auxilio de las ecuaciones anteriores y de la A.3; la ec A.26 resulta finalmente

$$S_6 \tan \theta - C_2 \bar{\rho} F^2 = \frac{5}{2} (S_4 F^2 \bar{\rho} - S_5) \frac{dy_u}{dx} + \left(\frac{5}{2} S_4 F^2 \bar{\rho} + \frac{3}{2} S_5 \right) \frac{y_u}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx} + \\ + (3 S_4 \bar{\rho} F^2 + S_5) \frac{y_u}{F} \frac{dF}{dx} \quad (\text{A.30})$$

El siguiente paso consiste en resolver las ecs A.5, A.18 y A.30 para las incógnitas $\frac{dy_u}{dx}$, $\frac{y_u}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx}$ y $\frac{y_u}{F} \frac{dF}{dx}$

Sustituyendo $\frac{dy_u}{dx}$ de la ec A.5 en A.18 y A.30 se tiene

$$(S_3 \tan \theta - C_1 \bar{\rho} F^2) = \left(\frac{2}{3} S_1 \bar{\rho} F^2 - \frac{4}{3} S_2 \right) \frac{y_u}{F} \frac{dF}{dx} + \\ + \left(\frac{4}{3} S_1 \bar{\rho} F^2 + \frac{1}{3} S_2 \right) \frac{y_u}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx} + \left(\frac{4}{3} S_1 \bar{\rho} F^2 + \frac{4}{3} S_2 \right) E \quad (\text{A.31})$$

$$(S_6 \tan \theta - C_2 \bar{\rho} F^2) = \left(\frac{4}{3} S_4 \bar{\rho} F^2 - \frac{2}{3} S_5 \right) \frac{y_u}{F} \frac{dF}{dx} + \\ + \left(\frac{5}{3} S_4 \bar{\rho} F^2 + \frac{2}{3} S_5 \right) \frac{y_u}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx} + \left(\frac{5}{3} S_4 \bar{\rho} F^2 + \frac{5}{3} S_5 \right) E \quad (\text{A.32})$$

Dividiendo A.31 y A.32 entre F^2 , resulta

$$\left(\frac{S_3}{F^2} \tan \theta - C_1 \bar{\rho} \right) = \left(\frac{2}{3} S_1 \bar{\rho} - \frac{4}{3} \frac{S_2}{F^2} \right) \frac{y_u}{F} \frac{dF}{dx} + \\ + \left(\frac{4}{3} S_1 \bar{\rho} + \frac{1}{3} \frac{S_2}{F^2} \right) \frac{y_u}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx} + \left(\frac{4}{3} S_1 \bar{\rho} + \frac{4}{3} \frac{S_2}{F^2} \right) E \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{S_6}{F^2} \tan \theta - C_2 \bar{\rho} \right) &= \left(\frac{4}{3} S_4 \bar{\rho} - \frac{2}{3} \frac{S_5}{F^2} \right) \frac{y_U}{F} \frac{dF}{dx} + \\
 + \left(\frac{5}{3} S_4 \bar{\rho} + \frac{2}{3} \frac{S_5}{F^2} \right) \frac{y_U}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx} &+ \left(\frac{5}{3} S_4 \bar{\rho} + \frac{5}{3} \frac{S_5}{F^2} \right) E \quad (A.34)
 \end{aligned}$$

Los valores numéricos de los coeficientes S_1 a S_6 se pueden obtener a partir de experimentos. De los datos reportados en la literatura se ha visto que dichos valores son cercanos a la unidad (ref 7). En la práctica los números de Froude para canales con fuerte pendiente son generalmente altos (en modelos, ref 3, 6 y 8, se han obtenido números de Froude mayores de 4, y en prototipos llegan a ser todavía mayores), por lo que parece razonable desprestigiar en las ecs A.33 y A.34 aquellos términos que estén divididos entre F^2 .

Si así se hace, resulta para las ecs A.33 y A.34

$$- C_1 \bar{\rho} = \frac{2}{3} S_1 \bar{\rho} \frac{y_U}{F} \frac{dF}{dx} + \frac{4}{3} S_1 \bar{\rho} \frac{y_U}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx} + \frac{4}{3} S_1 \bar{\rho} E \quad (A.35)$$

$$- C_2 \bar{\rho} = \frac{4}{3} S_4 \bar{\rho} \frac{y_U}{F} \frac{dF}{dx} + \frac{5}{3} S_4 \bar{\rho} \frac{y_U}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx} + \frac{5}{3} S_4 \bar{\rho} E \quad (A.36)$$

Dividiendo A.35 y A.36 entre $\bar{\rho}$ queda

$$- C_1 = \frac{2}{3} S_1 \frac{y_U}{F} \frac{dF}{dx} + \frac{4}{3} S_1 \frac{y_U}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx} + \frac{4}{3} S_1 E \quad (A.37)$$

$$- C_2 = \frac{4}{3} S_4 \frac{y_U}{F} \frac{dF}{dx} + \frac{5}{3} S_4 \frac{y_U}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx} + \frac{5}{3} S_4 E \quad (A.38)$$

Al resolver en forma simultánea estas últimas ecuaciones eliminando, y_u se obtiene

$$\frac{\bar{\rho}}{F} \frac{dF}{d\bar{\rho}} = \frac{5S_4C_1 - 4C_2S_1}{2C_2S_1 - 4S_4C_1 - 2S_1S_4E} \quad (\text{A.39})$$

El valor del parámetro adimensional $\bar{\rho}$ y de la concentración media de aire \bar{C} se pueden obtener en forma experimental. Sin embargo, es más útil y con mayor sentido físico esta última; por ello es conveniente encontrar una relación entre \bar{C} y $\bar{\rho}$, esto es, partiendo de la definición de \bar{C}

$$\bar{C} = \frac{V_a}{V_m}, \quad (1 - \bar{C}) = \frac{V_w}{V_m} \quad (\text{A.40})$$

donde

- V_a volumen de aire
- V_w volumen de agua
- V_m volumen de mezcla agua-aire

Y, considerando que

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_m}{\rho_w} = \frac{\frac{W_m}{V_m}}{\frac{W_w}{V_w}} = \frac{W_m}{W_w} \frac{V_w}{V_m} \quad (\text{A.41})$$

donde

- W_m masa de la mezcla agua-aire
- W_w masa del agua

Aceptando que $W_m = W_w$, y por las ecs A.40 y A.41 se concluye que

$$\bar{\rho} = (1 - \bar{C}) \quad (\text{A.42})$$

Sustituyendo A.42 en A.39 se obtiene la ecuación diferencial que representa a las características de un flujo aireado

$$\frac{(1 - \bar{C})dF}{Fd(1 - \bar{C})} = \frac{5S_4 C_1 - 4C_2 S_1}{2C_2 S_1 - 4S_4 C_1 - 2S_1 S_4 E} \quad (\text{A.43})$$

La solución de la ecuación diferencial A.43 sería factible si se contara con mediciones experimentales para valuar los parámetros que aparecen en el lado derecho de dicha ecuación; así, la solución tendría un carácter general ya que tomaría en cuenta el grado de desarrollo de la aeración en el escurrimiento. Sin embargo, no fue posible contar con dichas mediciones que hiciera factible tal solución.

El tratamiento analítico presentado en este anexo es uno de los intentos que se han llevado a cabo para tratar de representar los efectos del aire atrapado en el escurrimiento y se ha incluido en este trabajo para mostrar una manera de atacar el problema.

REFERENCIAS

1. Ellison, T.H., and Turner, J.S., "Turbulent Entrainment in Stratified Flows", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 6, Part 3, 1959, pp. 423
2. Daily, W.J., y Harleman F.R.D., Dinámica de los Fluidos, E. Trillas, México, 1969
3. Straub, L.G., and Anderson, F.G., "Experiments on Self-Aerated Flow in Open Channels", Journal of Hydraulics Division, ASCE, Hy 7, Vol. 84, Proc. Paper 1890, Dec, 1958, pp. 1
4. Hall, S.L., "Enrainment of Air in Flowing Water", Transactions of the ASCE, Vol. 108, 1943, pp. 1393
5. Anderson, A.G., "Influence of Channel Roughness on Aeration of High Velocity, Open Channel Flow", International Association of Hydraulic Research, 11 th Congress, Leningrad, USSR, Vol. 1, "High Velocity Flow", 1965, Paper No. 1.37
6. Rao, L.N.S., Seetharamiah, K., and Gangadharaiah, T., "Characteristics of Self-Aerated Flows", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 96, No. Hy 2, Proc. Paper 7055, Feb, 1970, pp. 331
7. Gangadharaiah, T., Nagar, S., Rao, L.N.S., and Seetharamiah, K., "Inception and Entrainment in Self-Aerated

- Flows", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 96, No. Hy 7, July, 1970, pp. 1549
8. Thandaveswara, B.S., and Rao, L.N.S., "Developing Zone Characteristics in Aerated Flow", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 104, No. Hy 3, March, 1978, pp. 385
 9. Lane, E.W., "Entrainment of Air in Swiftly Flowing Water", Civil Engineering, ASCE, Vol. 9, No. 2, 1939, pp. 88
 10. Straub, L.G., and Lamb, O.P., "Experimental Studies of Air Entrainment in Open Channel Flow", Proceedings, Minnesota International Hydraulics Convention, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota, Sept. 1-4, 1953, pp. 425
 11. Bauer, W.J., "Turbulent Boundary layer on Steep Slopes", Transactions ASCE, Vol. 119, 1954, pp. 1212
 12. Keller, J.R., and Rastogui, K.A., "Prediction of Flow Development on Spillways", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 101, No. Hy 9, Sept, 1975, pp.1171
 13. Maza, J.A., García, F.M., y Aguilar, M.L., Introducción a la Hidrodinámica, Informe Interno del Instituto de Ingeniería
 14. Raudkivi, A.J., and Callander, R.A., Advanced Fluid

Mechanics, E. Arnold. Ltd, London, 1975

15. Levi, E., Complementos de Mecánica de Fluidos, Publicación D-15, del Instituto de Ingeniería, Oct, 1980
16. Streeter, L.V., Mecánica de los Fluidos, Mc Graw-Hill
17. Rouse, H., Fluid Mechanics for Hydraulics Engineers
Dover, 1961
18. Patankar, S.V., and Soalding, D.F., Heat and Mass Transfer in Boundary Layers, 1st ed., Morgan Grampian, London, England, 1967, 2nd ed., Intertext, London, England, 1970
19. Keller, J.R., and Rastogui, K.A., "Design Chart for Predicting Critical Point on Spilways", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 103, No. Hy 12, Dec, 1977, pp. 1417
20. Michels, V., and Lovely, M., "Some Prototype Observations of Air Entrained Flow", Proceedings of the Minnesota International Hydraulics Convention, Part IV, 1953, pp. 403
21. Keller, R.J., "Field Measurement of Self-Aerated High Speed Open Channel Flow", thesis presented to the University of Canterbury, at Christchurch, New Zealand, in 1972, in partial fulfillment of the requirements for

the degree of Doctor of Philosophy

22. Henderson, F.M., Open Channel Flow, Mc Millan Co, New York, N.Y., 1966
23. "Corps of Engineers Hydraulics Design Criteria", U.S. Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station, Vicksburg, Miss., 1952
24. Cain, P., and Wood, R.I., "Measurements of Self-Aerated Flow on a Spillway", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 107, No. Hy 11, Nov, 1981
25. Jevdjevich, V., and Levin, L., "Entrainment of Air in Flowing Water and Technical Problems Connected with it", Proceedings of the Minnesota International Hydraulics Convention, Part IV, 1953, pp. 439
26. Keller, J.R., and Wood, R.I., "Developing Region in Self-Aerated Flows", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 100, No. Hy 4, April, 1974
27. Levi, E., "La Afloración de las Estrías Vorticosas en las Láminas Vertientes", Revista Ingeniería, Enero-Marzo, 1972, pp. 108
28. Campbell, B.F., Cox, G.R., Boyd, B.M., "Boundary Layer Development and Spillway Energy Losses", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 91, No. Hy 3, May, 1965, pp. 149

29. Hickox, F.H., "Air Entrainment on Spillway Faces", Civil Engineering, New York, N.Y., Vol. 15, Dec, 1945, pp. 562
30. Levi, E., Discusión a la ref 28, Journal of the Hydraulics División, ASCE, Nov, 1965
31. Levi, E., "Consideraciones sobre Turbulencia y Arrastre de Aire en Rápidas", Memorias del II Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Vol. 2, 1966, pp. 89
32. Canales, L.L., "Métodos para la Predicción de Arrastre de Aire en Vertedores", Tesis de Licenciatura, UNAM, México, 1970
33. Echavez, A.G., Cavitación en Vertedores, Publicación No. 415 del Instituto de Ingeniería, Feb, 1979
34. Killen y Anderson, IARH, Kyoto, 1969
35. Rao (ref 7 de la ref 7)
36. Hinze, J.O., Turbulence, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y., 1959
37. Chow V.T., open Chanel Hyd, McGraw-Hill Book Co., Inc. New York. N.Y., 1959
38. Levi, E., Mecánica de los fluidos, U.N.A.M., 1965
39. Levi, E., "Investigación de las estrias longitudinales de las láminas vertientes" Ingeniería, Vol. 34, No. 2, 1964
40. Bogardi, J; Sediment Transport In Alluvian Streams, Akademiai Kiado, Budapest 1978
41. Spiegel, Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas, Colección Shaum, McGraw-Hill