01161

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería

División de Estudios de Posgrado

CARACTERISTICAS DINAMICAS DE UN MODELO DE INTERACCION CIMENTACION-CORTINA

T E S I S

01161
1982

Que para obtener el grado de:

MAESTRO EN INGENIERIA

Presenta el Ingeniero:

JOSE VILLARREAL REYES

Asesor: M en I BELZAY MARTINEZ R.

México, D. F. 1982

1. INTRODUCCION

En la República Mexicana, la respuesta dinámica de estructuras civiles es un aspecto que requiere de atención especial, ya que parte importante del territorio nacional se localiza en zonas de moderada a elevada intensidad. La regionalización sísmica del país se indica en un mapa (Esteva, 1970), en el cual también aparecen los ríos más importantes (fig 1).

Como se observa, las regiones que tienen el mayor potencial hidráulico se localizan en las zonas de mayor actividad sísmica del país; en consecuencia, un número considerable de presas se localiza en dichas zonas.

Debido a lo anterior, es necesario conocer en forma racional el comportamiento sísmico de la cortina de una presa, ya que la falla de aquélla puede causar la pérdida de vidas humanas y daños materiales de consideración.

De acuerdo con sus características estructurales las cortinas de las presas se designan así: a. Cortinas de gravedad, construidas a base de mampostería; b. De arco (o de bóveda), hechas de concreto, y c. De tierra y enrocamiento. En el presente trabajo sólo se estudiará un aspecto particular del comportamiento dinámico de estructuras del tipo c; ese aspecto se relaciona con las frecuencias naturales de vibración.

En general, la respuesta sísmica de cortinas de tierra y enrocamiento es un problema bastante complejo debido a las incertidumbres que existen en los parámetros que rigen su comportamiento. Entre estos parámetros están los que se refieren a las propiedades dinámicas de los materiales constitutivos tanto de la estructura como del suelo de cimentación, y al comportamiento no lineal de dichos materiales. También influye el tipo de excitación que actúa sobre la cortina, la forma en que las ondas sísmicas inciden en las fronteras de la estructura, así como la forma y dimensiones de la cortina, que pueden producir efectos tridimensionales.

Desde que se inició el estudio dinámico de las cortinas los métodos analíticos han ido evolucionando, desde un modelo unidimensional (Mononobe et al, 1936) hasta procedimientos que toman en cuenta los efectos tridimensionales (Martínez y Bielak, 1980).

Sin embargo, ha sido necesario incluir algunas hipótesis a fin de estudiar este problema y obtener soluciones sencillas. Algunas veces esas hipótesis han originado modelos analíticos simplificados que no representan satisfactoriamente el comportamiento de estructuras reales; no obstante, han sido de gran utilidad ya que han permitido establecer procedimientos cada vez más elaborados, los cuales han contribuido a cuantificar la respuesta dinámica de este tipo de estructuras.

Los métodos para el análisis dinámico de estructuras generalmente suponen que estas se apoyan sobre un semiespacio infinitamente rígido. Sin embargo, dependiendo de las propiedades mecánicas del suelo, la influencia de éste sobre la estructura puede ser importante. A su vez, la presencia de una estructura puede afectar en mayor o menor grado el comportamiento del suelo. Esta influencia recíproca entre el suelo de cimentación y la estructura se conoce como interacción suelo-estructura.

Un sistema de interacción suelo-estructura es el que forma, por ejemplo, una cortina y el suelo sobre el que ésta se apoya. En este trabajo se estudiará un sistema de este tipo y se le llamará sistema <u>cimentación-cortina</u>.

La mayoría de los investigadores que han fijado su atención en el problema del comportamiento sísmico de cortinas de tierra han presentado trabajos considerando que éstas se apoyan sobre una base rígida; hasta la fecha son escasos los estudios que se han publicado sobre el comportamiento dinámico de sistemas cimentación-cortina. Entre los trabajos que se refieren a este problema se puede mencionar en primer término un estudio relacionado con las características dinámicas de una cortina apoyada sobre una cimentación elástica (Chopra y Perumalswami, 1969). En ese procedimiento se admite un estado de deformación plana y se representa la sección transversal de la cortina mediante un triángulo simétrico formado por un conjunto de elementos finitos triangulares (fig 2a). Se supone que el terreno de cimentación es un semiespacio elástico, el cual se idealiza con una serie de puntos nodales a lo largo de la línea donde se intersectan la base de la cortina y el semiespacio elástico (fig 2b).

En ése estudio se concluye que la flexibilidad de la cimentación tiene una influencia importante sobre las frecuencias naturales y las formas modales de la cortina; además, la influencia de la interacción depende principalmente de las características geométricas de la sección transversal de la cortina. Con el modelo de interacción adoptado se puede disipar una cantidad considerable de energía, al propagarse las ondas sísmicas dentro del semiespacio elástico (Chopra y Perumalswami, 1969).

Utilizando la técnica del elemento finito se desarrolló un modelo elástico para calcular la respuesta sísmica de estructuras complicadas considerando la flexibilidad del terreno de cimentación (Wilson, 1969). Con ese procedimiento se realizó el análisis sísmico de una cortina térrea, a fin de ilustrar la utilidad de dicho modelo.

En el estudio mencionado se considera que la sección transversal de la cortina es un triángulo simétrico constituido por un conjunto de elementos finitos cuadrangulares y triangulares; la sección transversal de la cimentación se representa mediante un arreglo de elementos finitos rectangulares (fig 3).

Los resultados del modelo de interacción cimentación-cortina mostraron diferencias importantes entre la respuesta en la base de la cortina considerando el fenómeno de interacción, y la respuesta en la superficie del campo libre.

Más recientemente se estudió en forma paramétrica el efecto del fenómeno de interacción sobre la respuesta sísmica de un sistema cimentación-cortina (Idriss et al, 1974). Para representar la cortina y la cimentación se utilizaron elementos finitos bidimensionales; se consideró que los materiales constitutivos tienen comportamiento lineal y elástico.

Se estudiaron cinco estructuras diferentes, a fin de analizar la influencia de los siguientes parámetros: a. Relación entre el periodo fundamental de la cortina -suponiéndola apoyada sobre una base rígida- y el periodo fundamental del depósito de suelo; b. Relación entre el ancho de la base de la cortina (B) y el espesor del depósito de suelo (H_s); c. Relación entre las velocidades de propagación de las ondas transversales en el material constitutivo de la cortina y en el de la cimentación.

En esa investigación se concluye que para los casos estudiados la relación B/H_s es el parámetro que mejor se relaciona con los efectos de interacción cimentación-cortina; en los demás parámetros esta correlación no es tan evidente (Idriss et al, 1974).

La fig 4 muestra una de las estructuras analizadas en la cual se puede observar la influencia de la flexibilidad de la cimentación sobre la respuesta de la cortina.

En otro trabajo se usó el método de diferencias finitas para analizar el problema de interacción dinámica en un sistema cimentación-cortina (Prater, 1977). Las características del sistema usado en esa investigación se indican en la fig 5.

A partir de los resultados presentados en forma tabular se deduce que la respuesta de la cortina depende principalmente de las condiciones de frontera usadas en los lados verticales del modelo (fig 5), y de la rigidez de la cimentación.

También se ha estudiado el fenómeno de interacción cimentación-cortina mediante un modelo bidimensional que toma en cuenta el efecto del agua almacenada (Barbat et al, 1977). Dicho modelo utiliza la técnica del elemento finito para representar la cortina y la cimentación, y el método de diferencias finitas para idealizar el agua (fig 6). Con el procedimiento citado se analiza simultáneamente la interacción cortina-cimentación-agua. Se concluye que tanto las fuerzas hidrodinámicas como las de interacción cimentación-cortina modifican la respuesta de la cortina.

En el Instituto de Ingeniería, UNAM, se desarrolló recientemente un método para el análisis sísmico tridimensional de cortinas térreas (Martínez y Bielak, 1980). A partir de ese método, en el presente trabajo se realiza un análisis paramétrico de las frecuencias naturales de un sistema cimentación-cortina, a fin de estudiar la influencia de la cimentación sobre dichas frecuencias. Además, para examinar la validez del método se comparan sus resultados, con los obtenidos mediante otro modelo analítico.

2. OBJETIVOS Y ALCANCE

Se ha desarrollado un método para el análisis sísmico tridimensional de cortinas de presas de tierra y enrocamiento (Martínez y Bielak, 1980). En este procedimiento se ha idealizado la estructura como un prisma de eje recto constituido por un material elástico viscoso.

En esencia el método consiste en discretizar la sección transversal de la cortina con elementos finitos bidimensionales y en aproximar la tercera dimensión mediante una función que satisface las condiciones laterales de frontera del prisma en estudio. Los procedimientos que aproximan el comportamiento tridimensional mediante técnicas de discretización y series de funciones continuas se denominan métodos simianalíticos (Zienkiewicz, 1977).

Para ejemplificar la utilidad del método se implantó un programa para computadora llamado RESTRI, escrito en lenguaje FORTRAN IV básico (Martínez y Bielak, 1980, Martínez y Villarreal, 1981-a).

Por medio de RESTRI se ha analizado la respuesta de cortinas en las cuales el efecto tridimensional puede ser importante, esto es, cuando la relación entre la longitud de la cortina y su altura es menor que 3, como es el caso de cortinas localizadas en cañones angostos (Martínez y Bielak, 1980).

Las estructuras estudiadas corresponden a cortinas apoyadas sobre una base infinitamente rígida. Se supone que la sección transversal de la cortina es un triángulo simétrico y que el material constitutivo es homogéneo, isótropo y linealmente elástico. Además, se considera que los desplazamientos relativos entre la cortina y los planos que forman la boquilla de la estructura son nulos. Se ignora el efecto del agua almacenada.

Recientemente se utilizó el programa RESTRI para calcular las frecuencias naturales de modelos físicos de cortinas ensayados dinámicamente. Al comparar las frecuencias teóricas con los valores determinados experimentalmente se obtuvo una concordancia razonable, a pesar de las limitaciones inherentes al método de análisis (Martínez y Villarreal, 1981-a y b).

En el método analítico representado por el programa RESTRI, la función utilizada para aproximar el comportamiento tridimensional de la cortina es una serie trigonométrica que satisface la condición de desplazamientos relativos nulos en los apoyos de la estructura. En el análisis convencional de vigas y columnas esta condición equivale a suponer que los elementos estructurales recién citados están articulados en sus extremos.

Para poder aplicar el método en cuestión a casos más generales de cortinas de tierra y poder estudiar el efecto de empotramiento observado en ensayes dinámicos de modelos (Martínez, 1971; Díaz-Rodríguez et al, 1975), se modificaron algunos algoritmos del programa RESTRI (Martínez y Villarreal, 1981-c).

A la nueva versión del programa se le ha llamado RESTRI-1, y únicamente resuelve el problema de valores característicos para dos casos diferentes de condiciones laterales de frontera, dependiendo de la función utilizada para representar el efecto tridimensional. En un caso las condiciones de frontera equivalentes a una viga doblemente articulada se alcanzan por medio de una función trigonométrica. En el otro caso se utilizan funciones hiperbólicas y trigonométricas para representar las condiciones de frontera equivalentes a una viga doblemente empotrada.

En un trabajo reciente se examinó la influencia de la asimetría de la sección transversal y el efecto de un núcleo de menor rigidez sobre las frecuencias naturales de estructuras térreas de comportamiento tridimensional (Martínez y Villarreal, 1981-c). También se analizó la influencia de las condiciones laterales de frontera del prisma utilizado para representar la estructura, sobre dichas frecuencias. Ese estudio se basó en los resultados obtenidos al aplicar el programa RESTRI-1 a diferentes estructuras con las características recién indicadas.

Los casos estudiados con RESTRI-1 correspondieron a cortinas de sección transversal triangular apoyadas sobre una base infinitamente rígida y constituidas por un medio isótropo y elástico lineal (Martínez y Villarreal, 1981-c).

A fin de poder estudiar el efecto de interacción dinámica en un sistema cimentación-cortina sobre las frecuencias naturales de estructuras térreas tridimensionales, en este trabajo se propone un modelo para representar dicho sistema.

El modelo consiste en suponer que la cortina se apoya sobre un prisma virtual de suelo, el cual a su vez descansa sobre un semiespacio infinitamente rígido (fig 7).

Se supone que el sistema descrito está constituido por un medio isótropo y elástico lineal. Además, se consideran nulos los desplazamientos relativos entre el sistema cimentación-cortina y las paredes que forman la boquilla. Estas paredes, que se supone indeformables, penetran en el terreno de cimentación para formar la boquilla o cañón, cuya forma tiene como casos límite un rectángulo o un triángulo (fig 7b). No se considera el efecto del agua almacenada.

Para poder aplicar el método analítico propuesto previamente (Martínez y Bielak, 1980) al sistema cimentación-cortina en estudio, se modificaron algunas subrutinas de RESTRI-1 así como algunos formatos de lectura de datos e impresión de resultados. A esta nueva versión del programa se le llamó PRESAS (Martínez y Villarreal, 1982).

Con PRESAS se pueden obtener las frecuencias naturales y las formas modales de sistemas cortina-cimentación como los mostrados en la fig 7.

Hay que hacer notar que el método es aplicable a cortinas apoyadas en cimentaciones flexibles, y a estructuras apoyadas sobre una base rígida. En este último caso basta prescribir al módulo de elasticidad de la cimentación (E_1) un valor elevado (por ejemplo, 10^6 ton/m²) para tener la condición de rigidez infinita.

Por otra parte, en un estudio específico relacionado con el análisis y diseño de una nueva cortina de tierra, o con la revisión de alguna ya construida, generalmente existe información detallada sobre las características de la estructura y las propiedades mecánicas de los materiales que la constituyen. También se tiene información acerca de las características estratigráficas del terreno de cimentación, las propiedades mecánicas de este último y la forma y dimensiones del cañón donde se localiza la cortina.

De esta manera, para fijar las características geométricas del sistema cimentación-cortina que aquí se estudia es necesario establecer el ancho y la altura del prisma virtual de suelo (fig 7-a), ya que su longitud la determina la boquilla (fig 7-b). Para esto se requiere conocer los parámetros B_a (que constituye una medida del ancho del prisma), y H_s, que es la altura (fig 7). En ocasiones H_s puede ser un parámetro conocido. Esto sucede, por ejemplo, cuando en el sitio donde se desplanta la estructura se localiza un depósito deformable de espesor H_s, sobre una formación rígida con una frontera bien definida.

Con los resultados obtenidos al aplicar el programa PRESAS a distintos sistemas cimentación-cortina se efectuó un análisis paramétrico a fin de investigar la influencia de algunas variables sobre las frecuencias naturales del sistema estructural en cuestión.

Los casos estudiados correspondieron a cortinas homogéneas de sección transversal simétrica apoyadas sobre un medio elástico idealizado mediante uno o dos estratos horizontales.

El análisis parámetrico se realizó en dos etapas, de acuerdo con los siguientes objetivos generales:

1) Determinar los valores del parámetro B_a (fig 7) a partir de los cuales la influencia de L_s sobre las frecuencias naturales del sistema cimentación-cortina es mínima.

2) Cuantificar la influencia del espesor del prisma de cimentación y de sus propiedades mecánicas, sobre las frecuencias naturales del sistema cimentación-cortina.

La primera etapa consistió en seleccionar inicialmente un valor de H_s, y en hacer variar el parámetro B_a a fin de generar distintos prismas de cimentación con igual altura. Después se escogieron otros valores de H_s, y en cada uno de ellos se procedió en forma análoga. De esta manera fue posible investigar la influencia del ancho del pisma de cimentación sobre las frecuencias naturales del sistema cimentación-cortina.

El análisis de los resultados obtenidos durante esta etapa condujo a un valor del parámetro B_a que a su vez permitió establecer el ancho del prisma virtual de suelo.

En la segunda etapa se consideraron dos grupos de sistemas cimentación-corna en los cuales el ancho del prisma de suelo permaneció constante. Un grupo se caracterizó porque el terreno de cimentación se idealizó mediante un estrato homogéneo de espesor H_s y módulo de elasticidad E_1. En el otro grupo se supuso que el depósito de suelo está constituido por dos estratos horizontales, y se introdujeron los conceptos de relación de espesor (H_1/H_s) y relación de rigidez de la cimentación. En este trabajo se usó la relación entre los módulos de elasticidad de cada estrato (E_2/E_1) para expresar dicha relación de rigidez.

Al asignar distintos valores a los parámetros citados en el párrafo anterior, se buscó alcanzar los siguientes objetivos específicos:

1) Cuantificar el efecto del espesor (H_s) del prisma que representa la

cimentación, suponiendo que ese prisma está constituido por un estrato homogéneo.

2) Estudiar el efecto de la rigidez del material constitutivo de dicho prisma sobre las frecuencias naturales del sistema cimentación-cortina. Como una medida de la rigidez se usó el módulo de elasticidad.

3) Analizar la influencia que sobre las frecuencias naturales puede tener la relación de espesores (H_1/H_s), suponiendo que la cimentación está formada por dos estratos horizontales.

4) Cuantificar el efecto de la relación entre las rigideces de los materiales constitutivos de cada estrato, considerando que el depósito está formado por dos capas.

Como resultado de este análisis se espera obtener algunas recomendaciones que contribuyen a racionalizar el diseño sísmico de cortinas de tierra y enrocamiento, y en general de estructuras térreas.

Además del análisis paramétrico mencionado, se compararon los resultados obtenidos con el método analítico representado por PRESAS con los de un procedimiento propuesto anteriormente para estudiar la interacción dinámica de un sistema cimentación-cortina (Chopra y Perumalswami, 1969).

En este último procedimiento se acepta la hipótesis de un estado de deformación plana; se supone que el material constitutivo es isótropo y linealmente elástico y que la sección transversal de la cortina es un triángulo simétrico. Dicha sección se representa mediante un conjunto de elementos finitos triangulares con nudos en los vértices (fig 2a). Además, se supone que el terreno de cimentación sobre el que se apoya la cortina es un semiespacio elástico. Para tomar en cuenta el efecto de la cimentación se utilizó un conjunto de puntos nodales a lo largo de la línea que forman la base de la cortina y la frontera del semiespacio (fig 2b).

Por otra parte, el método utilizado en la presente investigación, además de considerar el comportamiento tridimensional de las cortinas, considera que el terreno de cimentación es un volumen finito de suelo (un prisma) cuya sección transversal se idealiza con elementos finitos triangulares (fig 8). Con este método también se pueden estudiar sistemas cimentación-cortina en los cuales sea válida la hipótesis de un estado de deformación plana. Para ello basta suponer que la longitud de la cortina es grande, lo que equivale a suponer que la relación L/H es igual, por ejemplo, a 10^6 (Martínez y Villarreal, 1981-a).

Esta comparación tuvo por objeto analizar las diferencias que se presentan cuando dos métodos distintos se utilizan para resolver el mismo problema, el cual consiste en la obtención de las frecuencias naturales y las formas modales de estructuras térreas apoyadas sobre cimentaciones flexibles.

En el capítulo siguiente se describe el método analítico usado en este trabajo y en el cap 4 se presenta el modelo de interacción cimentación-cortina propuesto. En el cap 5 se realiza un análisis paramétrico sobre las frecuencias naturales de cortinas apoyadas en cimentaciones elásticas. La comparación entre los resultados de dos métodos analíticos es el objetivo del cap 6. Las conclusiones y recomendaciones se presentan en el cap 7. Además, se anexan los siguientes apéndices:

A : Matrices elementales de masa y rigidez para un elemento finito triangular con nudos en los vértices, considerando un estado de deformación plana.

B : Método generalizado de Lanczos para la solución del problema de valores característicos con matrices bandeadas.

3. METODO DE ANALISIS

Actualmente una de las técnicas más utilizadas en el análisis estructural es el método del elemento finito, lo cual se debe a las ventajas que presenta en comparación con otros procedimientos. Con el método del elemento finito se pueden analizar en forma estática o dinámica una gran variedad de sistemas estructurales, incluyendo aquellos con características geométricas y mecánicas complicadas, y condiciones de frontera más elaboradas.

Este método ha alcanzado un rápido desarrollo debido principalmente al avance de las técnicas de computación, lo que ha permitido su aplicación a problemas cada vez más complicados. De hecho, la utilidad potencial del método del elemento finito depende en buena medida de la capacidad de la computadora que se tenga a disposición.

El análisis tridimensional de estructuras ha ido evolucionando rápidamente debido a que el método citado se ha aplicado con éxito a este tipo de análisis. Sin embargo, el uso de elementos finitos tridimensionales (prismáticos) tiene la desventaja de incluir un gran número de puntos nodales (grados de libertad) en la estructura, lo que conduce a un elevado costo de computación por el excesivo tiempo de máquina que requiere esta técnica. Además, la computadora que se utilice debe tener una gran capacidad de memoria para almacenar y manejar la información que se genera durante el análisis. Esto hace que el uso intensivo de la metodología basada en elementos finitos tridimensionales por lo general resulte incosteable.

Por lo anterior, se han desarrollado métodos equivalentes a fin de efectuar un análisis tridimensional simplificado utilizando un conjunto de elementos finitos planos, con un grado de aproximación razonable. A estos métodos se les conoce como semianalíticos (Zienkiewicz, 1977).

En esos métodos se sustituye el análisis tridimensional propiamente dicho por un análisis bidimensional (estado de deformación plana), y se toma en cuenta el efecto tridimensional mediante una serie de funciones, lo que simplifica notablemente la solución del problema.

El procedimiento para el análisis sísmico tridimensional de cortinas de tierra desarrollado por Martínez y Bielak, es uno de estos métodos semianalíticos equivalentes. La solución se obtiene discretizando la sección transversal por medio de elementos finitos bidimensionales y suponiendo la forma de la solución en la tercera dimensión como la suma de una serie de funciones que satisfacen las condiciones laterales de frontera.

Al examinar el efecto de la relación longitud/altura sobre la frecuencia fundamental de estructuras localizadas en boquilla de sección triangular se ha observado que el método semianalítico citado pierde precisión, especialmente cuando la relación L/H es mayor que 4. Esto se debe probablemente a que cada elemento finito con que se discretiza la sección transversal de la estructura debe tener las mismas propiedades mecánicas y geométricas a lo largo del eje de la cortina.

En el caso de estructuras cuya boquilla está formada por paredes inclinadas es necesario aproximar la geometría de su sección longitudinal como se muestra en la fig 9. Esto da lugar a una incompatibilidad de deformaciones en las fronteras correspondientes a los extremos de cada elemento finito pseudoprismático.

Los efectos del fenómeno anterior no han sido estudiados con detalle, sin embargo, es muy probable que para cortinas en cañones angostos, es decir, con relaciones L/H reducidas, los efectos negativos de dicha incompatibilidad sean insignificantes.

Lo anterior se basa en los resultados de una calibración efectuada recientemente (Martínez y Villarreal, 1981-a). Al comparar las frecuencias naturales de diferentes modelos físicos de presas de tierra — calculadas con el método citado — con las frecuencias determinadas experimentalmente se observó una concordancia razonable, a pesar de las limitaciones del método de análisis.

En este capítulo se presenta un procedimiento para resolver el problema de valores característicos de una estructura de material térreo de comportamiento elástico lineal, el cual se basa en el método semianalítico antes mencionado.

Con este procedimiento se obtienen las frecuencias naturales y formas modales de este tipo de estructuras. El método es aplicable a sistemas cimentación-cortina, siempre que la estructura y su cimentación se consideren como un solo sistema estructural.

3.1 *Formulación del problema de valores característicos*

Para resolver el problema de respuesta dinámica de estructuras térreas es necesario establecer un conjunto de hipótesis relacionadas con las características mecánicas del material constitutivo y con la geometría de la cortina, y prescribir ciertas condiciones en las fronteras de esta última, así como su estado inicial. Además, hay que conocer las fuerzas externas que actúan sobre la estructura.

Para la formulación analítica de este problema se aceptan las siguientes hipótesis: a. El material que constituye la estructura es un sólido linealmente elástico e isótropo, y b. Los desplazamientos y las deformaciones del material constitutivo son pequeños e infinitesimales, respectivamente.

Se supone que la estructura es un prisma de eje recto que se apoya sobre una base rígida. La sección transversal del prisma puede ser cualquier región cerrada conexa mientras que la sección longitudinal (boquilla) puede tener como formas extremas un rectángulo o un triángulo simétrico. Para ejemplifcar este tipo de sólidos, en la fig 10 se presenta un prisma de sección transversal triangular y boquilla rectangular referido al sistema cartesiano x, y, z.

Considérese que R es la región ocupada por el prisma en estudio y S la frontera que la limita. Sean S_1 y S_2 dos porciones complementarias de S donde se prescriben las condiciones de frontera. En S_1 se conocen los desplazamientos relativos entre la estructura y la boquilla; en S_2 se prescriben las tracciones (fig 10).

En el prisma en estudio se supone que los desplazamientos relativos en la frontera S_1 son nulos, mientras que la frontera S_2 se considera libre de esfuerzos.

El estado inicial de la estructura consiste en establecer los campos de desplazamientos y de velocidades en la región R para un instante determinado. En este trabajo se supone que en el instante inicial la estructura está en reposo.

El problema descrito constituye – dentro de la elastodinámica lineal – un problema de valores iniciales con condiciones de frontera mixtas.

La solución se puede obtener resolviendo directamente la ecuación de equilibrio dinámico de un sólido elástico (ecuación de Navier)

$$\rho\, \partial^2 u_i/\partial t^2 - G u_{i,jj} - G u_{j,ji}/(1-2\nu) = F_i \quad \text{en} \quad R \times (0, t_1) \tag{1}$$

junto con las condiciones de frontera

$$u_i = 0 \quad \text{en} \quad S_1 \tag{2a}$$

$$T_i = 0 \quad \text{en} \quad S_2 \tag{2b}$$

y el estado inicial

$$u_i(\underline{x}\ ,\ 0) = 0 \text{ en } R \qquad (3a)$$

$$\dot{u}_i(\underline{x}\ ,\ 0) = 0 \text{ en } R \qquad (3b)$$

En la ec(1)ρ es la densidad del material constitutivo, G el módulo de rigidez al cortante de dicho material y ν su relación de Poisson; u_i son las componentes del tensor de desplazamientos en un sistema cartesiano; F_i son las componentes cartesianas de las fuerzas de cuerpo; T_i son las componentes del tensor de esfuerzos (tensiones); $\underline{x}$ es un punto en R y está definido por sus coordenadas x, y, z; $(0,t_1)$ representa un intervalo finito de tiempo.

La notación usada en los subíndices de las ecuaciones anteriores corresponde a la notación indicial (Malvern, 1969).

Actualmente sólo se conocen soluciones explícitas para algunos casos particulares de estructuras con geometría y condiciones de frontera sencillas (Bielak, 1975).

En este trabajo sólo se resolverá el problema de valores característicos, el cual constituye un caso particular de la respuesta dinámica. En el problema de valores característicos se supone que las fuerzas de cuerpo F_i son nulas.

Las estructuras que constituyen el objeto de este trabajo son tridimensionales, con características geométricas y mecánicas complicadas, por lo que su respuesta dinámica se obtiene generalmente en forma aproximada mediante algún método numérico. Para plantear la solución del problema en cuestión conviene partir no directamente de las ecuaciones que rigen el fenómeno —ecs (1) a (3)— sino de un principio variacional equivalente (Bielak, 1975).

Uno de los principios variacionales de Gurtin para problemas de valores iniciales en elastodinámica fue simplificado para facilitar su aplicación en este tipo de problemas (Herrera y Bielak, 1974). Este principio variacional, para las condiciones de frontera dada por las ecs (2a) y (2b) y para las condiciones iniciales expresadas por las ecs (3a) y (3b) establece lo siguiente (Bielak, 1975):

> " Sea K el conjunto formado por las funciones continuas que poseen derivadas continuas en $R\times(0,t_1)$. Para cada $u \in K$ defínase el funcional Ω por
>
> $$\Omega(\underline{u}) = 1/2 \int_R \left\{ \rho \dot{u}_i \dot{u}_i + G \left[u_{i,jj} (u_{i,j} + u_{j,i}) + 2\nu\, u_{i,i} u_{j,j} /(1 - 2\nu) \right] - 2u_i F_i \right\} dx \qquad (4)$$
>
> Entonces
>
> $$\delta\Omega(u) = 0 \quad \text{sobre} \quad K \; \forall \; t \in (0,t_1) \qquad (5)$$
>
> si y solo si $\underline{u}$ es solución del problema expresado por las ecs (1) a (3b)"

En las ecs (4) y (5) se usó la notación indicial antes mencionada.

El principio variacional anterior conduce de manera congruente a la aplicación del método del elemento finito, por lo que en este trabajo se aplicará dicho método a fin de obtener la solución del problema de valores característicos.

Para ello supóngase que la solución se puede expresar mediante la función u que define el campo de desplazamientos del prisma utilizado para representar la cortina. Debido a que los desplazamientos están restringidos en las caras extremas (fig 10), es razonable suponer que los desplazamientos en dirección del eje z son nulos, mientras que los asociados a los ejes x-y dependen de las tres coordenadas espaciales y del tiempo (Martínez y Bielak, 1980).

Por lo anterior, conviene representar el campo de desplazamientos $u_\alpha(x,y,z,t)$ mediante la siguiente expresión:

$$u_\alpha (x,y,z,t) = \sum_{j=1,2} u_{\alpha j} (x,y,t) \psi_j(z); \quad \alpha = 1,2 \qquad (6)$$

donde $u_{\alpha j}(x,y,t)$ son funciones que representan los desplazamientos dinámicos de la cortina en el plano x-y mientras que $\psi_j(z)$ es una función que aproxima dicho campo en dirección del eje z y satisface determinadas condiciones en las fronteras laterales del prisma en estudio.

Tal como se indica más adelante, las funciones $\psi_j(z)$ dependen del tipo de condiciones prescritas en las caras extremas del prisma utilizado para idealizar la estructura. En un caso se usará una función trigonométrica para representar la condición de articulación, y en el otro una combinación de funciones trigonométricas e hiperbólicas para expresar la condición de empotramiento.

La sección transversal del prisma se representa mediante un conjunto de elementos finitos, y los desplazamientos $u_{\alpha j}$ dentro de cada elemento se aproximan así:

$$u^e_{\alpha j}(x,y,t) = N^T_\alpha (x,y) \sum_j \underset{\sim}{\chi}_j(t) \quad ; \quad \alpha = 1,2 \tag{7}$$

donde

$N_\alpha(x,y)$ = Matriz de interpolación con que se aproximan los desplazamientos en el plano x-y

$\underset{\sim}{\chi}_j(t)$ = Vector de desplazamientos nodales dinámicos asociado al modo longitudinal j.

En el método de análisis se utilizan elementos finitos triangulares con nudos en los vértices. En cada nudo se tiene un desplazamiento horizontal u_1 y otro vertical u_2

Para estructuras en boquilla triangular o trapecial la sección transversal en estudio se asocia al plano de simetría x-y; en cortinas con boquilla rectangular la sección transversal en cuestión puede ser cualquier plano paralelo al x-y.

Al aplicar el método del elemento finito a la sección transversal de la cortina se obtienen las matrices elementales de rigidez y de masa (k_e, m_e)

y a partir de éstas se determinan respectivamente las matrices globales de rigidez, K, y de masa, M. Entonces el problema de vibraciones libres no amortiguadas de un sistema discreto se expresa:

$$M \ddot{\underline{u}} + K \underline{u} = 0 \tag{8}$$

donde $\underline{u}$ representa el vector de desplazamientos nodales.

Suponiendo que

$$\underline{u}\,(x,y,t) = \underset{\sim}{\phi}\,(x,y) \text{ sen } \omega t \tag{9}$$

donde

$\underset{\sim}{\phi}\,(x,y)$ = Vector característico en el plano x-y

ω = Frecuencia circular natural no amortiguada,

la ec (8) también se puede escribir

$$\hat{\omega}^2 M \underset{\sim}{\phi} = K \underset{\sim}{\phi} \tag{10}$$

Puede demostrarse que al sustituir la función u_α dada por la ec (6) en el funcional que expresa el principio variacional dado por las ecs (4) y (5) se llega a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que representa la respuesta dinámica del prisma en estudio, con condiciones iniciales nulas (Bielak, 1975).

Entonces, la expresión correspondiente al problema de valores característicos se obtiene eliminando las fuerzas de cuerpo F_i que aparecen en la ec (4).

Para la solución del problema de valores características se plantearon dos casos diferentes de condiciones laterales de frontera:

a) Desplazamientos relativos nulos en los planos que limitan las caras extremas del prisma.

b) Desplazamientos y giros relativos nulos en los planos mencionados

Para los casos a) y b) se estudiarán cortinas en boquillas rectangular y triangular; las cortinas en cañón trapecial constituyen un caso intermedio (Martínez y Bielak, 1980).

A continuación se resume la formulación del problema de valores característicos.

3.1.1 *Desplazamientos relativos nulos en las caras extremas del prisma*

Este caso ha sido descrito previamente (Martínez y Bielak, 1980) y consiste en suponer que la función $\Psi(z)$ que aparece en la ec(6)tiene esta forma

$$\Psi_j(z) = \text{sen}\ \pi j\ (z + L/2)/L \tag{11}$$

siendo L la longitud del prisma en estudio

Al sustituir la ecuación anterior en (6) se satisfacen las siguientes condiciones de frontera para cualquier instante $t\varepsilon(0,t_1)$

$$\left.\begin{aligned} u_\alpha(x,y,-L/2,t) &= 0 \\ u_\alpha(x,y,L/2,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \alpha = 1,2 \tag{12}$$

3.1.1.1 *Cortinas en boquilla rectangular*

A partir de las ecs (6) y (11) puede demostrarse que el principio variacional previamente citado conduce a la siguiente expresión para el problema de valores característicos (Martínez y Bielak, 1980).

$$\left[\hat{K} + (\pi j/(J/H)\ )^2\ \hat{M}\right]\underset{\sim}{\phi} = \hat{\omega}^2\ \hat{M}\ \underset{\sim}{\phi} \tag{13}$$

para todo el sistema de elementos finitos

En la ecuación anterior

$\hat{K}$ = Matriz global adimensional de rigidez para el estado de deformación plana.

$\hat{M}$ = Matriz global adimensional de masa para el estado deformación plana.

H = Altura de la estructura

$\underset{\sim}{\phi}$ = Vector característico para vibración transversal en un plano paralelo al x-y

$\hat{\omega}$ = Frecuencia circular natural adimensional

A su vez, $\hat{K}$, $\hat{M}$, y $\hat{\omega}$ se expresan así:

$$\hat{K} = \sum_e \bar{k}_e/GH \tag{14}$$

$$\hat{M} = \sum_e m_e/\rho H^3 \tag{15}$$

$$\hat{\omega} = \omega/(V_s/H) \tag{16}$$

donde

$\bar{k}_e$ y $\bar{m}_e$ son las matrices elementales de rigidez y de masa para el estado de deformación plana

G = Módulo de rigidez al cortante del material constitutivo

V_s = Velocidad de propagación de las ondas de cortante en el material

ρ = Densidad del material; ω se definió previamente al introducir la ec (9)

En el Apéndice A se presenta un desarrollo para obtener las matrices $\bar{k}_e$ y $\bar{m}_e$ de un elemento finito triangular con nudos en sus vértices

La ec (13) también se puede escribir

$$\hat{K}\,\phi = \hat{\lambda}^2\,\hat{M}\,\underset{\sim}{\phi} \tag{17}$$

donde

$$\hat{\lambda}^2 = \hat{\omega}^2 - (\pi j/(L/H)\,)^2 \tag{18}$$

Al resolver el problema de valores característicos representado por la ec (17) se obtienen las frecuencias adimensionales para el estado de deformación plana, $\hat{\lambda}_n$, y los vectores característicos $\underset{\sim}{\phi}_n(x,y)$, correspondientes a dichas frecuencias

Las frecuencias naturales tridimensionales se determinan con la ecuación

$$\hat{\omega}_{nj} = \left[\hat{\lambda}^2{}_n + (\pi j/(L/H)\,)^2\right]^{1/2} \tag{19}$$

Los vectores característicos tridimensionales $\underset{\sim}{\phi}_{nj}$ se calculan con la expresión

$$\underset{\sim}{\phi}_{nj} = \underset{\sim}{\phi}_n\,(x,y)\left[\text{sen}\ \pi j(z + L/2)/L\right] \tag{20}$$

3.1.1.2 *Cortinas en boquilla triangular*

Para formular el problema es necesario introducir la relación L_e/L en las matrices elementales de rigidèz y de masa, siendo L la longitud de la corona (constante), y L_e la longitud de un *prisma horizontal* cuya sección transversal es el área del elemento finito triangular e (Martínez y Bielak, 1980). L_e es una función lineal de la altura a la que se localiza el centroide de dicho elemento.

Para todo el sistema de elementos finitos se obtiene

$$\left[\hat{K}_0 + (\pi j/(L/H))^2\,\hat{M}_1\right]\underset{\sim}{\phi} = \hat{\omega}^2\,\hat{M}_0\,\underset{\sim}{\phi} \tag{21}$$

donde

$$\hat{K}_0 = \sum_e (L_e/L)\ \overline{K}_e/GH \qquad (22)$$

$$\hat{M}_1 = \sum_e (L/L_e)\ \overline{m}_e/\rho H^3 \qquad (23)$$

$$\hat{M}_0 = \sum_e (L_e/L)\ \overline{m}_e/\rho H^3 \qquad (24)$$

Las matrices $\overline{K}_e$ y $\overline{m}_e$ se definieron previamente, lo mismo $\underset{\sim}{\phi}$ y $\hat{\omega}$

Al resolver la ec (21) se obtienen directamente las frecuencias naturales tridimensionales $\hat{\omega}_{nj}$ y los vectores característicos $\underset{\sim}{\phi}_{nj}$ para vibración transversal en el plano de simetría x-y. Para este plano (es decir, para $z/L = 0$) los vectores característicos $\underset{\sim}{\phi}_{nj}$ se pueden expresar así

$$\underset{\sim}{\phi}_{nj}(x,y) = \underset{\sim}{\phi}_n\ (x,y) \text{ sen } \pi j/2 \qquad j=1,2,\ldots \qquad (25)$$

También

$$\underset{\sim}{\phi}_{nj}\ (x,y) = \underset{\sim}{\phi}_n(x,y) \left[-1\right]^{(3j+1)/2} \quad j=1,3,5 \qquad (26)$$

El significado de los vectores $\underset{\sim}{\phi}_n(x,y)$ que aparecen en la ecuación anterior es diferente al que tienen en la ec (20). En efecto, para cortinas en boquilla triangular los vectores $\phi_n(x,y)$ ya toman en cuenta el efecto tridimensional, puesto que se calculan a partir de las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ previamente determinadas.

3.1.2 *Desplazamientos y giros relativos nulos en las caras extremas del prisma*

En este trabajo se ha utilizado la función que expresa los modos de vibración de una viga doblemente empotrada para representar la condición de empotramiento en las caras extremas del prisma. La función $\psi(z)$ que representa esta condición es (Biggs, 1964)

$$\psi_j(z) = (A/B)_j \left[\operatorname{senh} \beta_j(z + L/2) - \operatorname{sen} \beta_j(z + L/2)\right]$$

$$+ \cosh \beta_j(z + L/2) - \cos \beta_j(z + L/2) \qquad (27)$$

donde

$$(A/B)_j = (\cos \beta_j L - \cosh \beta_j L)/(\operatorname{senh} \beta_j L - \operatorname{sen} \beta_j L) \qquad (28)$$

$$\beta_j = (j + 1/2)\,\pi/L \qquad (29)$$

L = Longitud de la estructura

Al introducir en la ec (6) la función $\psi_j(z)$ dada por la ec (27), la función de desplazamientos $u_\alpha(x,y,z)$ satisface las siguientes condiciones de frontera

$$\left.\begin{aligned} u_\alpha(x,y,-L/2) &= 0 \\ u_\alpha(x,y,L/2) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

$$\left.\begin{aligned} u'_\alpha(x,y,-L/2) &= 0 \\ u'_\alpha(x,y,L/2) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \alpha = 1,2 \qquad (31)$$

donde u'_α significa la derivada de u_α respecto a z. Las ecs (31), que representan la condición de giros nulos en los extremos del prisma, constituyen restricciones adicionales con las que se ha tratado de aproximar el efecto de empotramiento observado en algunos modelos físicos de cortinas.

3.1.2.1 *Cortinas en boquilla rectangular*

A partir de la función de desplazamientos $u_\alpha(x,y,z)$ dada por la ec (6) y de la función $\psi_j(z)$ dada por la ec (27), y siguiendo un procedimiento análogo al descrito en el inciso 3.1.1.1 se obtiene la siguiente expresión adimensional para el problema de valores característicos:

$$\left[\hat{\hat{K}} + \left[\pi(j+1/2)((j+1/2)\pi-3/2)/(L/H)^2\right]\hat{\hat{M}}\right]\underset{\sim}{\phi} = \hat{\omega}^2\,\hat{\hat{M}}\,\underset{\sim}{\phi} \qquad (32)$$

En esta ecuación las matrices $\hat{K}$ y $\hat{M}$ tienen el mismo significado que en el inciso 3.1.1.1 y están dadas por las ecs (14) y (15); $\hat{\omega}$, $\underset{\sim}{\phi}$ y L/H ya se definieron.

Con suficiente aproximación la ec (32) también se expresa de una manera más sencilla:

$$\left[\hat{K} + (j\pi\ /(L/H))^2\ (1 + 0.52/j)\ \hat{M}\right]\underset{\sim}{\phi} = \hat{\omega}^2\ \hat{M}\ \underset{\sim}{\phi} \tag{33}$$

La solución de la ec (33) permite determinar las frecuencias naturales tridimensionales $\hat{\omega}_{nj}$ de cortinas en boquilla rectangular:

$$\hat{\omega}_{nj} = \left\{\hat{\lambda}_n^2 + (j\pi\ /(L/H))^2\ (1 + 0.52/j)\right\}^{1/2} \tag{34}$$

donde $\hat{\lambda}_n$ se definió al introducir la ec (18). Los demás términos quedaron definidos con anterioridad.

Los vectores característicos tridimensionales $\underset{\sim}{\phi}_{nj}$ se expresan a partir de los vectores $\underset{\sim}{\phi}_n$ asociados a las frecuencias $\hat{\lambda}_n$, y de la función $\Psi_j(z)$ dada por la ec (27).

$$\underset{\sim}{\phi}_{nj} = \underset{\sim}{\phi}_n(x,y)\ \Psi_j(z) \tag{35}$$

3.1.2.2 *Cortinas en boquilla triangular*

Introduciendo la relación L_e/L en las matrices elementales de rigidez y de masa, y utilizando la ec (32) se llega a la siguiente expresión para el problema de valores característicos de cortinas en boquilla triangular:

$$\left[\hat{K}_0 + (j\pi/(L/H))^2(1 + 0.52/j)\ \hat{M}_1\right]\underset{\sim}{\phi} = \omega^2\ \hat{M}_0\ \underset{\sim}{\phi} \tag{36}$$

En la ecuación anterior $\hat{K}_0$, $\hat{M}_1$ y $\hat{M}_0$ son matrices que se calculan con las ecs (22) a (24); los demás términos ya se definieron.

La solución de la ec (36) permite determinar en forma directa las frecuencias naturales tridimensionales $\hat{\omega}_{nj}$ y los vectores característicos $\underset{\sim}{\phi}_{nj}$ para vibración transversal en el plano de simetría x-y. Las observaciones del inciso 3.1.1.2 relativas a los vectores $\underset{\sim}{\phi}_{nj}$ también son válidas para este inciso.

4. MODELO DE INTERACCION CIMENTACION-CORTINA

En general, las características de las ondas de esfuerzo que se generan durante un sismo se van modificando de acuerdo con las propiedades de los materiales que atraviesan al propagarse en el interior de la Tierra. Así, al aproximarse un tren de ondas a la superficie del terreno se producen cambios en la amplitud y frecuencia de los movimientos sísmicos, en la velocidad de propagación y en la dirección en que se transmiten dichas ondas, de acuerdo con la deformabilidad de las capas más superficiales.

En estructuras desplantadas sobre un depósito de suelo blando que a su vez se apoya en roca sana o terreno firme se ha observado que las aceleraciones en la superficie del terreno próximo a la estructura, o en la base de esta última, son superiores a las aceleraciones registradas en el terreno firme subyacente. Este fenómeno, llamado amplificación dinámica, ha sido estudiado mediante diversos modelos analíticos (Ruiz, 1977).

En vista de que las condiciones topográficas y geológicas locales modifican las características de las perturbaciones sísmicas y éstas a su vez influyen en la respuesta de las estructuras, el fenómeno de interacción suelo-estructura adquiere mayor importancia, especialmente cuando el suelo es de naturaleza deformable (Ruiz, 1977). La importancia de este fenómeno se ha puesto de manifiesto al analizar los registros de respuesta de estructuras y cimentaciones sometidas a temblores intensos.

Por lo señalado anteriormente, el problema de interacción dinámica entre una estructura y el suelo sobre el que se apoya ha recibido la atención de un buen número de investigadores. La mayoría de los trabajos experimentales y analíticos realizados hasta ahora han permitido estudiar algunos aspectos del fenómeno de interacción en sistemas estructurales convencionales. Sin embargo, en estructuras especiales como cortinas de tierra y enrocamiento los estudios analíticos sobre este tema son escasos, debido principalmente a que el comportamiento de este tipo de estructuras es complejo.

En la actualidad el fenómeno de interacción dinámica suelo-estructura se puede estudiar mediante procedimientos analíticos cada mez más refinados debido al avance de los sistemas de cómputo utilizados en la solución numérica de esta clase de problemas. Además, como el problema de interacción cimentación-cortina no ha sido suficientemente estudiado, es necesario realizar investigaciones que contribuyan a explicar de manera satisfactoria el comportamiento de esta clase de estructuras.

Generalmente la interacción dinámica suelo-estructura se estudia mediante uno de los siguientes criterios: a. Considerar que la estructura se apoya sobre un semiespacio elástico (fig 2), ó b. Suponer que el suelo de cimentación es una región finita (fig 3).

Con el criterio a. se estudia la respuesta dinámica de estructuras que se desplantan sobre una cimentación flexible, suponiendo que el suelo es un semiespacio elástico. A los métodos analíticos que se basan en este criterio se les conoce como *métodos del semiespacio*.

Aunque esos métodos se han aplicado a una variedad de problemas, solo se han obtenido soluciones exactas para algunos casos particulares. Por otra parte, la utilidad práctica de dichos métodos radica en el hecho de que se han obtenido expresiones para el diseño de cimentaciones de maquinaria; además, se han resuelto algunos problemas de interacción suelo-estructura en los cuales la cimentación es de tipo superficial, así como problemas de respuesta de campo libre (Romo, 1980).

Los métodos para analizar el problema de interacción dinámica suelo-estructura que se basan en el criterio b. se conocen como *métodos discretos*.

En la actualidad existen varias técnicas para efectuar el análisis dinámico con los métodos discretos; sin embargo, el análisis de interacción dinámica mediante estos métodos generalmente se realiza por medio de la técnica del elemento finito.

Tanto los métodos del semiespacio como los métodos discretos tienen sus ventajas y limitaciones y algunas veces, al evaluar la respuesta sísmica de estructuras conducen a resultados muy diferentes (Seed et al, 1974).

Por otra parte, dependiendo de la forma de llevar a cabo el análisis, los métodos citados se clasifican a su vez en: a. Método de la subestructura y b. Método directo.

En el método de la subestructura el sistema estructural original se divide en dos subestructuras: una es el suelo de cimentación y la otra es la estructura propiamente dicha. El análisis se realiza en dos etapas; en la primera se determinan las funciones de impedancia del depósito de suelo, en el dominio de la frecuencia, y las características de refracción de las ondas en la interfase suelo-estructura. En la segunda etapa se usan estas propiedades como condiciones de frontera en la base de la estructura y se lleva a cabo el análisis dinámico con un sistema de cargas que se obtiene directamente de los movimientos de campo libre (Romo, 1980). Para facilitar el análisis, es común que en esta etapa – a partir de las funciones de impedancia – los efectos del suelo se representen mediante un sistema de resortes y amortiguadores en paralelo (fig 11); así, el estudio de la respuesta estructural se realiza en el dominio del tiempo.

En el método directo el análisis de interacción dinámica suelo-estructura se efectúa suponiendo que el terreno de cimentación y la estructura forman un solo sistema estructural. De esta manera el análisis se lleva a cabo en una sola etapa, utilizando una determinada excitación en la base del depósito de suelo.

Se ha demostrado que para sistemas suelo-estructura discretizados con elementos finitos, al efectuar el análisis con el método directo o con el método de la subestructura se obtienen resultados idénticos (Gutiérrez, 1976). Para lograr esto es necesario que al efectuar el análisis con el método directo, la excitación definida en la base del depósito sea consistente con el movimiento de campo libre utilizado en el método de la subestructura.

El método de análisis usado en este trabajo forma parte de los métodos discretos. Además, como se considera que el terreno de cimentación y la cortina constituyen un solo sistema estructural, el método de análisis es directo.

A continuación se describe el modelo usado para estudiar la interacción dinámica cimentación-cortina.

4.1 *Modelo de interacción*

Debido a las características del método de análisis, se propone como modelo de interacción el sistema estructural que resulta al suponer que la cortina se apoya sobre una región finita de suelo, tal como se muestra en la fig 12.

Las características de la región de suelo (prisma virtual de suelo) son las siguientes:

a) La sección transversal del prisma es un rectángulo de base B_s y altura H_s (fig 7a); la base B_s se calcula así:

$$B_s = B_p + 2B_a$$

donde B_p es la base de la cortina y B_a es una distancia horizontal referida a la fig 7a.

b) La sección de la boquilla tiene como formas geométricas extremas un rectángulo ó un triángulo simétrico (fig 7b).

c) Se supone que el prisma virtual de suelo se apoya tanto longitudinal como transversalmente en una superficie infinitamente rígida.

Además, se considera que el sistema estructural formado por la cortina y el terreno de cimentación son dos prismas de eje recto unidos en la interfase de ambos prismas. Un prisma representa la cortina y el otro es un prisma virtual de suelo; el material constitutivo de ambos es un medio elástico, lineal e isótropo.

Los desplazamientos relativos entre la superficie del sistema estructural descrito y las paredes rígidas sobre las que se apoya el sistema se consideran nulos; se desprecia el efecto del agua almacenada.

De acuerdo con el método de análisis aquí empleado,la sección transversal del sistema cimentación-cortina se discretiza mediante elementos finitos triangulares con nudos en los vértices (fig 8); el efecto tridimensional se aproxima por medio de una serie de funciones completas que dependen de las condiciones laterales de frontera.

Para estudiar el problema de interacción dinámica con el modelo recién descrito, se modificaron algunas subrutinas del programa RESTRI-1 (Martínez y Villarreal, 1981-c), especialmente aquellas relaciones con la lectura e impresión de resultados. También se modificaron algunas iteraciones a fin de poder efectuar un análisis paramétrico de las frecuencias naturales de sistemas como el mostrado en la fig 7. A esta nueva versión del programa se le llamó PRESAS (Martínez y Villarreal, 1982).

4.2 *Programa para computadora PRESAS*

Para ilustrar la utilidad y el alcance del método de análisis descrito en el cap 3 y aplicarlo a un sistema cimentación-cortina, se dearrolló un programa para computadora digital denominado PRESAS, el cual es una versión modificada del programa RESTRI-1.

Con el programa original se pueden obtener las frecuencias naturales y las formas modales de cortinas apoyadas sobre bases infinitamente rígidas.

Con el programa PRESAS se ha ampliado el alcance del método numérico desarrollado por Martínez y Bielak. En efecto, el procedimiento es aplicable a estructuraas térreas apoyadas sobre suelo flexible, incluyendo el caso particular de cortinas apoyadas sobre bases rígidas.

El programa se implantó en el sistema BURROUGHS 6800 del Centro del Servicio de Cómputo, UNAM; como lenguaje de codificación se usó el FORTRAN IV básico.

En el desarrollo del programa se utilizó el criterio de la memoria dinámica para almacenar los arreglos más importantes, lo que permitó reducir la capacidad de memoria que se requiere para resolver este tipo de problemas mediante computadora digital.

Dentro de los arreglos citados en el párrafo anterior están los datos de los elementos finitos utilizados en la discretización (coordenadas, propiedades físicas), las matrices de rigidez y de masa, así como los resultados del problema de valores característicos (frecuencias naturales y formas modales).

El programa consta esencialmente de tres etapas:

En la primera se leen todos los parámetros que definen las propiedades geométricas y mecánicas de la estructura en estudio. Una lista de estos parámetros se presenta en el instructivo para usar el programa PRESAS (Martínez y Villarreal, 1982).

En la segunda etapa, a partir de los datos previamente almacenados se obtienen las matrices elementales de rigidez y de masa para el estado de deformación plana. A continuación, cada matriz elemental de rigidez se modifica para tomar en cuenta el efecto tridimensional, y después se ensamblan estas matrices para obtener la matriz global de rigidez para los casos descritos en el cap 3. Ensamblando las matrices elementales de masa se generan directamente las matrices globales de masas $\hat{M}_1$ y $\hat{M}_0$ de acuerdo con lo señalado en el cap 3.

La última parte del programa utiliza el método de Lanczos para plantear el problema de valores característicos (Weaver y Yoshida, 1971). Las frecuencias naturales se obtienen con el método de bisección desarrollado en Oxford (Wilkinson, 1965) y el cálculo de los vectores característicos (o formas modales) correspondientes se lleva a cabo con el método de iteración inversa (Bathe y Wilson, 1976).

En el apéndice B se presenta el desarrollo del algoritmo para plantear el problema de valores característicos usando el método generalizado de Lanczos.

5. ANALISIS PARAMETRICO

Para cuantificar el efecto de algunas variables del suelo de cimentación sobre las frecuencias naturales de cortinas térreas, se analizan en forma paramétrica los resultados numéricos de distintos sistemas cimentación-cortina, como el mostrado en la fig 7.

Los casos estudiados corresponden a cortinas simétricas y homogéneas de sección transversal triangular, apoyadas sobre una cimentación elástica idealizada mediante uno o dos estratos horizontales.

Con este análisis se trata de establecer las condiciones bajo las cuales los efectos de interacción dinámica entre cortina y subsuelo pueden ser importantes. La geometría y los parámetros mecánicos de la cortina permanecen fijos, y se varían las propiedades del prisma que representa el subsuelo de cimentación.

La cortina tiene las siguientes propiedades; su sección transversal es un triángulo simétrico de 91.44 m de altura y taludes 1.5:1; sus características mecánicas son:

Módulo de elasticidad, E_p = 57 160 ton/m²

Peso volumétrico, γ = 2.08 ton/m³
Relación de Poisson, ν = 0.45

Los parámetros geométricos del sistema cimentación-cortina (fig 7) son:

$\alpha = B_a/H_p$ = relación entre la extensión transversal del prisma de suelo y la altura de la cortina

$\beta = H_s/H_p$ = relación entre el espesor del prisma de suelo y la altura de la cortina

$\xi = H_1/H_s$ = relación entre los espesores de los estratos que representan el suelo

B_a es una medida del ancho de la sección transversal del prisma virtual de suelo y H_1 es el espesor del estrato superior (fig 7).

Los parámetros mecánicos que aquí se incluyen son:

$\eta = E_1/E_p$ = relación de rigidez del sistema cimentación-cortina

$\eta_s = E_2/E_1$ = relación de rigidez de la cimentación

E_1 es el módulo de elasticidad del estrato superior y E_2 el del estrato inferior; E_p es el módulo de elasticidad del material constitutivo de la cortina.

De esta manera se estudia la influencia de la geometría y de la rigidez de la cimentación sobre las frecuencias naturales del sistema. Cabe recordar que en este trabajo la rigidez se mide en función del módulo de elasticidad de los materiales constitutivos.

El análisis paramétrico se lleva a cabo en dos etapas básicas:

1. Determinación de los valores del parámetro α – que es función directa

de la distancia B_a — a partir de los cuales la influencia de α sobre las frecuencias naturales del sistema cimentación-cortina es mínima.

2. Evaluación de la influencia del espesor del prisma de cimentación y de sus propiedades mecánicas sobre las frecuencias naturales del sistema cimentación-cortina.

El análisis paramétrico se realiza con los resultados obtenidos al aplicar el programa PRESAS a distintos sistemas. Estos resultados se presentan en forma gráfica, destacando alguno de los parámetros que influyen en el comportamiento dinámico de la estructura.

A continuación se describen las etapas del análisis y se interpretan los resultados obtenidos.

5.1 *Influencia del parámetro* α

Para estudiar la influencia del parámetro α en el sistema de interacción propuesto se procede así:

a) Se estudian depósitos de suelo idealizados mediante un solo estrato. Para lograrlo, al parámetro ξ — asociado al espesor H_1 — se asigna un valor de 1.

b) Se consideran distintos valores del parámetro α , a fin de estudiar las frecuencias naturales de sistemas cimentación-cortina que difieren sólo en el valor de α.

c) Para cada α se considera un conjunto de valores del parámetro β, lo que equivale a estudiar depósitos de suelo de distintos espesores.

d) Para cada sistema definido con un valor de α y otro de β se estudian depósitos de diferente rigidez, dependiendo del parámetro η utilizado en el análisis.

Los valores de α fueron 0, 1, 3, 6 y 10, lo que equivale a estudiar prismas de suelo con valores de B_a comprendidos entre 0 y 10 H_p; al parámetro β se asignaron estos valores: 1, 2 y 3, con lo que se incluyen depósitos de suelos con espesores de hasta tres veces la altura de la cortina; al parámetro η se asignaron estas cantidades: 0.25, 1, 3 y 10, lo que permitió estudiar suelos de baja rigidez, de rigidez intermedia y suelos muy rígidos. En la fig 13 se muestra un diagrama con los valores numéricos de los parámetros que intervienen en esta etapa del análisis.

Inicialmente sólo se estudiaron estructuras térreas en boquilla de sección rectangular; con base en los resultados obtenidos también se analizó un número limitado de cortinas en boquilla triangular. Para destacar la importancia del efecto tridimensional, todos los sistemas de interacción aquí estudiados se consideraron localizados en boquillas angostas. Por este motivo se escogió un relación entre la longitud de la cortina y su altura (L_p/H_p) igual a 2.

5.1.1 *Interpretación de resultados*

Con los resultados mostrados en las figs 15a a 15c se observa la influencia del parámetro α sobre las frecuencias naturales, $\hat{\omega}_{nj}$, de estructuras en boquilla rectangular. Los resultados corresponden a valores de n = 1 (modo fundamental de vibración transversal) y j = 1,2 y 3 (modos de vibración longitudinal); para cada valor de j se tienen cuatro curvas, una para cada valor de la relación de rigidez.

Después de analizar los resultados mostrados en las figs 15a a 15c se puede establecer lo siguiente:

a) La masa del prisma virtual de suelo tiene una influencia muy pequeña sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ de sistemas cimentación-cortina en los cuales la rigidez del depósito de suelo es baja (η = 0.25). Para valores de α = 2 la influencia de este parámetro es nula; esto indica que las frecuencias asociadas al modo fundamental transversal (n = 1) de sistemas con η = 0.25 obtenidas usando una cimentación muy ancha: B_s = 23 H_p (α = 10), son muy parecidas a las obtenidas usando un prisma con un ancho menor: B_s = 7 H_p (α = 2).

b) En sistemas cimentación-cortina con una relación de rigidez η igual a 10 la influencia de la masa de la cimentación sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{1j}$ sólo se manifiesta cuando $\beta = 3$ y α es mayor que 4, es decir, cuando las dimensiones del prisma de suelo son muy grandes; en cambio, cuando esas dimensiones son pequeñas las frecuencias naturales asociadas al modo fundamental transversal de sistemas con $\eta = 10$ son independientes del valor de α.

c) En un sistema cimentación-cortina con $\eta = 1$ y $\beta = 1$, el ancho del prisma de suelo tiene muy poca influencia sobre los valores de $\hat{\omega}_{1j}$; a partir de $\alpha = 2$ dicha influencia es nula. Cuando $\eta = 1$ y $\beta = 2$, $\beta = 3$, la influencia de la masa de la cimentación sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{1j}$ es despreciable para valores de α mayores que 4.

d) En un sistema con $\eta = 3$ y $\beta = 1$ la masa de la cimentación no influye en los valores de $\hat{\omega}_{1j}$; sin embargo, para sistemas con $\eta = 3$ y $\beta = 2$, $\beta = 3$ esta influencia es importante; en estos últimos casos el ancho del prisma virtual de suelo deja de influir en las frecuencias $\hat{\omega}_{1j}$ cuando α alcanza un valor mayor que 6.

e) A medida que aumentan de orden los modos de vibración longitudinal (j), las frecuencias naturales de los sistemas estudiados tienden a ser independientes de las propiedades mecánicas y geométricas de la cimentación.

f) La presencia de un suelo deformable produce una disminución de la rigidez estructural del sistema cimentación-cortina, especialmente cuando la relación de rigidez, η, vale 0.25 y 1; además, al aumentar el espesor de la cimentación, la pérdida de rigidez en el sistema es mayor cuando la cimentación tiene una rigidez intermedia $\eta = 1$ y $\eta = 3$ (figs 15b y 15c).

Con los resultados de las figs 16a a 16c también se estudia la influencia de α sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ de una estructura en boquilla rectangular, al aumentar el orden de los modos transversales.

Los resultados de esas figuras corresponden a las frecuencias del modo fundamental longitudinal ($j = 1$) de sistemas cimentación-cortina con $\beta = 1$ y cuatro valores de la relación de rigidez del sistema.

Las frecuencias $\hat{\omega}_{11}$ señaladas en la fig 16a son las del modo fundamental transversal ($n = 1$). Este caso ya se estudió: corresponde al conjunto de curvas con $j = 1$ de la fig 15a.

En las figs 16b y 16c se muestran respectivamente las frecuencias $\hat{\omega}_{21}$ y $\hat{\omega}_{31}$ o sea, para los casos en que $n = 2$, $n = 3$.

De los resultados de las figs 16a a 16c se concluye que la influencia del parámetro α sobre los valores de $\hat{\omega}_{nj}$ (con excepción de los sistemas con cimentación rígida, $\eta = 10$) crece considerablemente a medida que aumenta el orden de los modos de vibración transversal.

De otra parte, al crecer el valor de n, las curvas asociadas a distintos sistemas cimentación-cortina tienden a separarse, lo que hace que el valor de $\hat{\omega}_{n1}$ dependa en gran medida del valor de la relación de rigidez del sis ma. Esto significa que el incremento en la rigidez de la estructura, pro ducido al vibrar en los modos transversales superiores, es función de la rigidez de la cimentación.

Para observar el efecto del parámetro α sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$($j = 1$, $n = 1,2,3$) de sistemas con cimentaciones de gran espesor ($\beta = 3$), se elabo raron las figs 17a a 17c, que son análogas a las figs 16a a 16c.

Después de observar los resultados de las figs 17a a 17c, se establece que en sistemas en los cuales el espesor del depósito de suelo es grande ($\beta = 3$), la pérdida de rigidez estructural (producida por un incremento en la masa) es muy importante cuando la cimentación es rígida ($\eta = 10,3$); en los casos en que $\eta = 1$ dicha pérdida es casi nula para valores de α ma yores que 4.

Además, en los casos de cimentaciones muy flexibles, $\eta = 0.25$, el ancho de la cimentación no influye sobre las frecuencias naturales $\hat{\omega}_{n1}$ para valores de α mayores que 2.

Así, de los casos mostrados en las figs 16a a 17c (correspondientes a sistemas en boquilla rectangular) se puede concluir que:

a) La influencia del parámetro α sobre los valores de $\hat{\omega}_{n1}$ crece con los modos superiores de vibración transversal.

b) En sistemas con $\eta = 10$ y $\eta = 3$, la influencia que tiene el ancho del prisma de suelo aumenta con el espesor del depósito, H_s. En sistemas con $\eta = 1$ y $\eta = 0.25$ dicha influencia disminuye con el espesor H_s.

c) Los valores de $\hat{\omega}_{n1}$ para los primeros modos transversales dependen principalmente de la rigidez de la cimentación.

Por otra parte, en las figs 18a a 18c se muestran los resultados de estructuras en boquilla triangular; dichas figuras son análogas a las figs 17a a 17c.

Al observar esos resultados se concluye que para sistemas cimentación-cortina en boquilla triangular la influencia del parámetro α sobre las frecuencias naturales prácticamente es nula; además, se observa que los valores $\hat{\omega}_{nj}$ dependen de la relación de rigidez η al crecer el orden de n.

Del análisis de resultados presentados hasta aquí se concluye que la influencia del parámetro α depende directamente de la relación de rigidez del sistema y del espesor del depósito de suelo, principalmente en los primeros modos de vibración transversal; esto significa que en cimentaciones de rigidez elevada ($\eta = 10$ y 3) la influencia de α se incrementa con el espesor H_s y en cimentaciones flexibles ($\eta = 1$ y 0.25) disminuye dicho efecto al aumentar el espesor del prisma de suelo.

Otro factor que se debe tomar en cuenta al decidir qué valor debe asignarse al parámetro α, es el tiempo de computadora que se requiere para resolver un determinado problema. En efecto, mientras mayor es el valor que se asigna al parámetro α, mayor es el número de grados de libertad que se deben incluir en la idealización de la estructura; esto último aumenta del tiempo de computadora necesario para resolver el problema y eleva considerablemente el costo de la solución numérica.

Para ejemplificar lo anterior, en la fig 8 se ha discretizado la sección transversal del sistema cimentación-cortina en estudio. En dicha figura se han dibujado las mallas de elementos finitos usados en estos casos: $\alpha = 0$, $\alpha = 6$ y $\alpha = 10$. Para $\alpha = 1$ y 3 se usaron mallas que sólo difieren en la longitud del parámetro B_a. En esa figura se puede observar cómo aumentan los nudos utilizados en la idealización de la estructura al aumentar el ancho de la cimentación, que a su vez está relacionado con α.

Por otra parte, en la Tabla 1 se indican los tiempos de ejecución requeridos para resolver el problema de valores característicos de sistemas cimentación-cortina que únicamente se distinguen por el valor de α. En todos los problemas resueltos se consideraron diez modos transversales y tres longitudinales. Como se observa, los tiempos de ejecución se incrementan notablemente a medida que crece α; por esta razón es recomendable limitar el ancho del prisma virtual de suelo, y el número de nudos con que se discretiza el sistema.

5.2 *Influencia de las propiedades mecánicas y geométricas*

Para analizar la influencia de las características mecánicas y geométricas del prisma virtual de suelo sobre las frecuencias naturales adimensionales $\hat{\omega}_{nj}$ de sistemas cimentación-cortina, se consideraron dos grupos de sistemas estructurales. En el primer grupo se idealizó la cimentación mediante un estrato de espesor H_s y módulo de elasticidad E_1. En el segundo se supuso que el depósito de suelo está formado por dos estratos horizontales; en este caso H_s es el espesor total del depósito, mientras que H_1 y E_1 representan el espesor y el módulo de elasticidad del estrato superior.

5.2.1 *Depósito de suelo idealizado con un estrato*

En este tipo de sistemas se estudia la influencia de los parámetro β y η

que equivalen, respectivamente, a las relaciones H_s/H_p y E_1/E_p. Los valores asignados al parámetro β fueron 1, 2 y 3, incluyendo casos de sistemas con un espesor máximo de H_s igual a tres veces la altura de la cortina; para cada valor de β se estudian sistemas con relaciones de rigidez η de 0.25, 1, 3, 10 e ∞, lo que equivale a considerar desde una cimentación muy flexible hasta una infinitamente rígida.

En la fig 14a se presenta un diagrama con los valores de los parámetros usados en esta parte del análisis. Las características geométricas y mecánicas de la cortina se mencionaron al principio de este capítulo.

A todos los sistemas cimentación-cortina estudiados se asignó un valor de $\alpha = 6$ ($B_s = 1371.6$ m), según los resultados del subcap 5.2. Como ya se indicó, para valores de α mayores o iguales que 6 la influencia de este parámetro sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ prácticamente es despreciable, con excepción de los modos superiores de vibración transversal de algunos de los casos analizados en el subcap 5.2. Sin embargo, para los fines de este trabajo se considera aceptable el valor de α aquí seleccionado.

5.2.1.1 *Interpretación de resultados*

En las figs 19a a 19c se muestra el efecto de la relación de rigidez η sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ de sistemas cimentación-cortina en boquilla rectangular. En cada figura se indican las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ ($n = 1,2,\ldots 8$; $j = 1$) para distintos valores de la relación de rigidez (0.25, 1,3, 10 e ∞) identificados mediante distintos símbolos.

En esas figuras los puntos que representan las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ para un valor determinado de η se unieron con una línea auxiliar, a fin de hacer notar la tendencia de dichas frecuencias al aumentar n.

En la fig 19a se presentan los resultados de sistemas cimentación-cortina para $\beta = 1$; en ella se observa cómo la rigidez de la cimentación tiene gran influencia sobre las frecuencias del sistema, principalmente en los modos superiores de vibración transversal. Algo semejante sucede en las figs 19b y 19c para sistemas con $\beta = 2$ y $\beta = 3$ respectivamente.

En las figuras citadas se observa que las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ de sistemas con cimentaciones rígidas (η = 10,∞) definen dos curvas de pendiente elevada; en sistemas con cimentaciones flexibles las curvas respectivas tienen menor pendiente; esto indica que las frecuencias naturales de sistemas estructurales apoyados en bases rígidas están bastante separadas entre sí, a medida que aumenta el número de orden (n) de cada modo transversal; este fenómeno es muy parecido al que se observa al estudiar una cortina apoyada sobre un semiespacio infinitamente rígido.

Por otra parte, cuando la cimentación es flexible (η = 0.25,1) se produce interacción entre la cortina y la cimentación que modifica la rigidez de todo el sistema, de modo que las frecuencias resultan más próximas entre sí al aumentar el orden de cada modo.

El fenómeno recién descrito también se observa cuando la cimentación es aparentemente rígida (η = 3), en cuyo caso la interacción cimentación-cortina aún puede ser importante.

Por lo anterior, en sistemas estructurales apoyados sobre cimentaciones rígidas es razonable obtener la respuesta estructural a partir de los primeros modos de vibración; sin embargo, en sistemas apoyados sobre cimentaciones flexibles ese criterio puede conducir a errores en la evaluación de dicha respuesta.

En las figs 20a y 20b se presentan las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ de sistemas cimentación cortina en boquilla triangular; en esas figuras se aprecia cómo la influencia de la rigidez de la cimentación es sensiblemente menor que en los sistemas en boquilla rectangular, notándose esta influencia sólo en el caso en que el espesor del depósito de suelo es grande (β = 3, fig 20b).

De los resultados mostrados en la fig 20a se concluye que para estructuras en boquilla triangular y β = 1 los efectos de interacción dinámica entre la cortina y su cimentación son pequeños; en caso de que el espesor del depósito sea grande, el fenómeno de interacción es importante.

Por otra parte, con los resultados de las figs 21a a 21d se estudia el efecto del espesor de la cimentación (β) sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ de sistemas en boquilla rectangular. En cada figura se presentan los resultados de sistemas con β = 1,2 y 3 para los tres primeros modos de vibración longitudinal (j = 1, 2, 3).

Los resultados de la fig 21a son de sistemas con η = 0.25; en ella se aprecia cómo la influencia del parámetro β casi es despreciable. También se observa que los valores de $\hat{\omega}_{nj}$ en cada grupo de curvas tienden a unirse al aumentar j, lo cual también se observó al estudiar los resultados de las figs 15a a 15c. En la fig 21b se muestran los resultados de sistemas con η = 1; se aprecia cómo la influencia del espesor del depósito de suelo es más significativa que en sistemas estructurales con η = 0.25; dicha influencia es más notable en los modos de vibración transversal.

Los resultados de las figs 21c y 21d corresponden a sistemas con η iguales a 3 y 10 respectivamente; en ellas se manifiesta más claramente la infuencia del espesor del depósito de suelo.

De las figs 21a a 21b se deduce que mientras mayor es el valor de β menores son los valores de $\hat{\omega}_{nj}$, lo cual parece razonable, ya que al tratarse de un problema de masas y rigideces, al mantener fija la rigidez e incrementar la masa del sistema éste se vuelve más flexible. Esta pérdida de rigidez estructural depende principalmente de la rigidez de la cimentación, esto es, mientras mayor es el valor de η mayor es la pérdida relativa de rigidez del sistema al aumentar el espesor de la cimentación.

5.2.2 *Depósito de suelo idealizado con dos estratos*

En los sistemas cimentación-cortina aquí analizados, se ha supuesto que el depósito de suelo está formado por dos estratos horizontales entre los cuales existe una frontera bien definida.

Para este tipo de sistemas se estudiaron casos en los que el cociente E_1/E_p (o sea, el parámetro η) vale 1 y 0.25. Se escogieron estas cantidades porque corresponden a suelos de baja rigidez, en los cuales la interacción dinámica entre cortina y cimentación adquiere mayor importancia.

Los parámetros que aquí se estudian son ξ y n_s, que equivalen respectivamente a las relaciones H_1/H_s y E_2/E_1. Se consideraron depósitos de suelo de espesores iguales a H_p y $3H_p$, es decir, valores de β iguales a 1 y 3; al parámetro ξ se asignaron estos valores: 0, 0.167, 0.333, 0.667 y 1. Con $\xi = 0$ ó $\xi = 1$ se estudian depósitos de suelo homogéneos; en el primer caso el estrato inferior ocupa todo el volumen de la cimentación; en el segundo caso la cimentación está formada únicamente por el estrato superior.

Los valores de la relación n_s se escogieron de acuerdo con la rigidez relativa del estrato superior (es decir, η) utilizado en cada caso. En los sistemas donde se usó $\eta = 0.25$ se tomaron valores de la relación n_s de 1, 4, 12, 40 e ∞. Así, se incluyeron dos condiciones extremas: en una los estratos superior e inferior tuvieron la misma rigidez ($n_s = 1$) y en la otra el estrato inferior se supuso rígido ($n_s = \infty$).

Con excepción de los sistemas con $\eta = 1$ ó $\xi = 0$ y $\xi = 1$, en los demás se consideró que la rigidez del estrato superficial es inferior a la del estrato subyacente. Como en los casos estudiados en el inciso 5.2.1, aquí se adoptó un valor del parámetro α igual a 6.

5.2.2.1 *Interpretación de resultados*

En las figs 22a a 22c se presentan las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ de sistemas cimentación-cortina con $\beta = 1$ y $\eta = 0.25$. Este último valor significa que el estrato superficial está constituido por un material muy flexible ($E_1 = 0.25\ E_p$).

En esas figuras, las ordenadas representan las frecuencias adimensionales $\hat{\omega}_{nj}$, mientras que las abscisas indican el órden (n) de los modos de vibración transversal; los puntos discretos son los valores de $\hat{\omega}_{n1}$ y las líneas que los unen permiten destacar los casos en que $n_s = 1$ y $n_s = \infty$.

Los resultados de la fig 22a corresponden a sistemas con $\xi = 0.167$ o sea, el espesor del estrato superior es 1/6 del espesor total del depósito; de esos resultados se deduce que la rigidez del estrato inferior es determinante en los valores de $\hat{\omega}_{nj}$; en efecto, al aumentar dicha rigidez las frecuencias crecen rápidamente hasta alcanzar, en el caso en que $E_2 = \infty$, una tendencia parecida al de una estructura apoyada sobre una base rígida (fig 19a).

Los resultados de la fig 22b son de sistemas con $\xi = 0.333$; al comparar estos resultados con los de la fig 22a se observa una disminución del efecto de la rigidez del estrato inferior sobre $\hat{\omega}_{nj}$; en sistemas en los que dicho estrato es infinitamente rígido (fig 22b) las frecuencias presentan una tendencia parecida a la de suelos de rigidez intermedia (fig 19a).

Los resultados que se presentan en la fig 22c provienen de sistemas cimentación-cortina con $\xi = 0.667$, o sea, depósitos cuyo estrato superior es de mayor espesor comparado con el de los otros casos. Como la tendencia de las frecuencias ahí mostradas es semejante a la de un suelo blando (fig 19a), se deduce que el parámetro η_{ς} – asociado con la rigidez relativa del estrato inferior – prácticamente no influye sobre los valores de $\hat{\omega}_{nj}$ mostrados en la fig 22c.

Así, de las figs 22a a 22c se establece que para sistemas en los que la rigidez del estrato superior es relativamente baja, la influencia de dicha rigidez sobre las frecuencias aumenta proporcionalmente con el espesor de ese estrato.

Para apoyar lo anterior, en las figs 23a a 23c se muestran las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ de sistemas cimentación-cortina en los cuales el parámetro β es igual a 3 y η vale 0.25; dichos sistemas son análogos a los estudiados mediante las figs 22a a 22c y sólo difieren en el valor de β.

Después de observar los resultados de las figs 23a a 23c, se concluye que la influencia de un estrato superior muy deformable ($\eta = 0.25$) sobre las frecuencias naturales del sistema depende del espesor de dicho estrato.

Para los sistemas analizados mediante las figs 22a a 23c, la influencia mencinada en el párrafo anterior aumenta rápidamente con el parámetro ξ (asociado al espesor del estrato superior). En efecto, la pendiente de la curva que contiene las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ de sistemas en los que $n_s \to \infty$ (o sea, la rigidez del estrato inferior es infinita), disminuye notablemente al crecer H_1, el espesor del estrato superior, (figs 23c, 24b y 24c); en estos casos el comportamiento es análogo al de una cimentación flexible (figs 19a a 19c).

En la Tabla 2 se indican los espesores H_1 de los sistemas estudiados a través de las figs 22a a 24c; dichos espesores se expresan en función de H_p (altura de la cortina). Al analizar esos valores se encuentra que los sistemas asociados a la fig 23a constituyen un caso intermedio entre los sistemas de las figs 22b a 22c; además, los sistemas de la fig 22c son un caso intermedio entre los representados por las figs 23a y 23b.

De lo observado en las figs 22a a 23c se concluye que cuando el espesor del estrato superior es pequeño, comparado con la altura de la cortina ($H_1 = 0.167H_p$), las frecuencias naturales del sistema son parecidas a las que se obtendrían si la cortina se apoyara directamente sobre el estrato inferior.

Por el contrario, cuando el espesor del estrato superficial es mayor que $2H_p/3$, las frecuencias son parecidas a las de un sistema apoyado únicamente sobre el estrato superior. Además, para aquellos sistemas en que $H_1 = 0.333\ H_p$ y $H_1 = 0.5\ H_p$ se obtienen resultados parecidos a los de un sistema cuya cimentación es de rigidez intermedia.

Hay que recordar que los resultados de las figs 22 y 23 corresponden a sistemas en lo que la rigidez del estrato superior es relativamente baja ($n = 0.25$).

Para observar la tendencia de las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ al aumentar la rigidez del estrato superior, se elaboraron las figs 24a a 25c (semejantes a las figs 22a a 23c) para sistemas cimentación-cortina con una relación n igual a 1. Esto significa que en los nuevos sistemas estructurales la rigidez del estrato superior es igual a la del material constitutivo de la cortina.

En las figs 24a a 24c se presentan las frecuencias de sistemas para una relación β igual a 1. Se observa que la pendiente de la curva que representa un valor de $\eta_s = \infty$ disminuye más lentamente al aumentar el espesor del estrato superior (es decir, al aumentar ξ), con respecto a los casos homogéneos que se presentan en las figs 22a a 22c.

En efecto, mientras que en sistemas con $\eta = 0.25$ la influencia del estrato superior se manifiesta para un valor $\xi = 0.333$, en sistemas con $\eta = 1$ ese efecto se evidencia para $\xi = 0.667$. Esto indica que el efecto de la rigidez relativa del estrato superior depende del espesor de ese estrato. Esto se observa en las figs 24a y 24b, donde la pendiente de un caso extremo (estrato inferior de rigidez infinita) es parecida a la de una cortina apoyada sobre un semiespacio infinitamente rígido.

Por otra parte, en los resultados de la fig 24c se observa una disminución en la pendiente de la curva que une las frecuencias para el caso en que $\eta_s = \infty$, con respecto a la pendiente de las curvas homólogas mostradas en las figs 24a y 24b. Además, teniendo en cuenta que las frecuencias naturales de un sistema con $\eta_s = \infty$ constituyen la frontera superior de las frecuencias de los demás sistemas estructurales, se llega a lo siguiente:

a) En los casos mostrados en la fig 24c, el espesor y la rigidez del estrato superior (medida a través de η) tienen una influencia determinante sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$, y por el contrario, en los sistemas incluidos en las figs 24a y 24b estos parámetros tienen muy poca influencia.

b) La influencia de la relación η_s es desprecialbe en los sistemas representados en la fig 24c, mientras que en los incluidos en las figs 24a y 24b este parámetro es determinante sobre los valores de $\hat{\omega}_{nj}$.

Por otro lado, al observar los resultados de las figs 25a a 25c, correspondientes a sistemas con $\eta = 1$ y $\beta = 3$, se llega a conclusiones parecidas a las que se obtuvieron mediante las figs 22a a 22c. Esto es, se aprecia claramente que al aumentar el espesor del estrato superior, la relación de rigidez del sistema (n) influye en forma determinante sobre las frecuencias naturales de los sistemas en estudio (figs 25a a 25c).

Con el fin de asociar el espesor del estrato superior y la altura de la cortina, en la Tabla 2 se indica el espesor relativo de dicho estrato, para los sistemas asociados a las figs 24 y 25.

De esta manera, con los resultados de las figs 24a a 25c y considerando los resultados de la Tabla 2, se llega a lo siguiente:

1) Las conclusiones expresada para los sistemas con $H_1 = 0.167\ H_p$ y $H_1 \geq 0.667\ H_p$ y $n = 0.25$ son aplicables a los casos homólogos con $n = 1$.

2) Para los sistemas en que $H_1 = 0.333\ H_p$ las frecuencias son parecidas a las que se obtendrían si la cortina se apoyara directamente sobre el estrato inferior. Para un sistema con $H_1 = 0.333\ H_p$ y $n = 0.25$ se encuentra que la rigidez del estrato superior influye sobre los valores de $\hat{\omega}_{nj}$.

3) En los sistemas con $H_1 = 0.5\ H_p$ se tienen resultados parecidos a los de un caso con rigidez intermedia.

4) La influencia del estrato superior sobre las frecuencias naturales de sistemas con $n = 1$ depende del espesor de dicho estrato.

Por otra parte, los resultados de las fig 22 a 25 se presentan de manera distinta en las figs 26 a 29. Como era de esperarse, al observar estas últimas se llega a las conclusiones recién expresadas.

Como se recordará, en las figs 22 a 25 se consideró un solo valor de ξ (relacionado con el espesor del estrato superior) y diferentes ralaciones n_s.

Ahora, en las figs 26 a 29 se ha supuesto un valor constante de la relación n_s (o sea, se fijó la relación E_2/E_1) y diferentes relaciones ξ, marcadas con distintos símbolos. En las figs 26 a 29 también se destacan dos casos límite ($\xi = 0$, $\xi = 1$), los cuales corresponden a depósitos homogéneos. En el primer caso se considera nulo el espesor del estrato superior; en el segundo caso se supone que dicho estrato ocupa todo el depósito.

En las figs 26a a 26c se muestran los resultados de sistemas cimentación-cortina con $\eta = 0.25$ y $\beta = 1$; en ellas se observa claramente que las frecuencias asociadas a un valor $\xi = 0.167$ siguen una tendencia parecida a las que se tienen cuando $\xi = 0$, es decir, cuando sólo existe el estrato inferior. Los casos en que $\xi = 0.333$ constituyen un caso intermedio entre los dos extremos.

Los resultados de las figs 27a a 27c se obtuvieron para estructuras con $\eta = 0.25$ y $\beta = 3$; después de observarlos se llega a lo siguiente: a. Los valores de $\hat{\omega}_{nj}$ son independientes del parámetro η_s, y b. Dependen en gran medida del espesor del estrato superior.

El análisis de las figs 26 y 27 conduce a las mismas conclusiones obtenidas a partir de las figs 22 y 23.

En las figs 28a a 28c se presentan los resultados de sistemas con $\eta = 1$ y $\beta = 1$, y en las figs 29a a 29c los de sistemas con $\eta = 1$ y $\beta = 3$.

Después de analizar los resultados de esas figuras, se establece que en efecto, la influencia del estrato superior sobre las frecuencias naturales del sistema cimentación-cortina depende del espesor y de la rigidez de dicho estrato.

Por último, las conclusiones expresadas en este inciso se pueden resumir así:

1) Cuando el espesor del estrato superior es muy delgado ($H_1 \leq 0.167\ H_p$), las frecuencias naturales del sistema se pueden obtener con suficiente aproximación considerando que la cortina se apoya directamente sobre el estrato inferior.

2) Cuando el espesor del estrato superficial es grande (mayor que 2/3 la

altura de la cortina) las frecuencias se pueden calcular suponiendo que sólo existe dicho estrato.

3) Para los casos en que $H_p/6 < H_1 < 2H_p/3$ las frecuencias naturales del sistema se deben calcular tomando en cuenta los parámetros ξ y n_s. Esto significa que en los valores de $\hat{\omega}_{nj}$ influyen las características de los dos estratos con que se representa la cimentación.

6. CALIBRACION DEL MODELO

En este capítulo se comparan las características dinámicas de un sistema cimentación-cortina, las cuales se calcularon a partir de dos modelos que difieren fundamentalmente por la forma en que toman en cuenta el efecto del suelo sobre la estructura.

La calibración tiene por objeto examinar las diferencias que se presentan cuando se utilizan dos métodos distintos para resolver el mismo problema, el cual consiste en determinar las frecuencias naturales y formas modales de cortinas térreas de longitud infinita apoyadas sobre cimentaciones elásticas. Como base de comparación se utilizó un método que admite un estado de deformación plana porque no se encontró, dentro de la bibliografía disponible, ningún resultado relativo al análisis dinámico tridimensional de de sistemas cimentación-cortina.

Cabe mencionar que en un estudio reciente se compararon los resultados del método análitico usado en este trabajo, con los de ensayes dinámicos en modelos físicos (Martínez y Villarreal, 1981-b); para realizar esas comparaciones se tomó como base la información de ensayes efectuados en el Instituto de Ingeniería, UNAM. Como resultado, se encontró una concordancia razonable entre la información teórica y la experimental.

Además, se han comparado los resultados analíticos del método aquí utilizado, con la información instrumental proveniente de ensayes dinámicos en prototipos, y registros de respuesta de cortinas sometidas a temblores (Martínez, 1982); los resultados de esas calibraciones han sido alentadores.

Con fines ilustrativos, en la Tabla 3 se presenta una de las comparaciones hechas por Martínez y Villarreal en la cual se utilizaron los resultados de pruebas de vibración en modelos de cortinas hechos de arena (Díaz-Rodríguez et al, 1975). Además, en la Tabla 4 se suministran algunos resultados obtenidos por Martínez al comparar los periodos de vibración de estructuras térreas idealizadas, con los periodos registrados durante ensayes dinámicos en cortinas reales (Keightley, 1966; Prince et al, 1970).

Para la presente calibración se consideraron dos métodos analíticos; uno supone que la cortina se apoya sobre un semiespacio elástico (Chopra y Perumalswami, 1969) mientras que el otro considera que la estructura se apoya sobre una región finita de suelo.

La primera de las técnicas citadas en el párrafo anterior, por la forma de idealizar el subsuelo y de obtener las ecuaciones de equilibrio dinámico, pertenece a los métodos del <u>semiespacio</u> y de la <u>subestructura</u>, respectivamente; además, por la forma como se representa la sección transversal del sistema en estudio (fig 2) se trata de un método <u>discreto</u>.

Dicha técnica considera que la cortina es un prisma de eje recto y longitud infinita, constituido por un material elástico lineal. La sección transversal de la cortina se representa por medio de un conjunto de elementos finitos triangulares con nudos en los vértices (fig 2a); el semiespacio se idealiza mediante un conjunto de puntos nodales a lo largo de la línea donde se intersectan la base de la cortina y el semiespacio (fig 2b); además, supone que este último está formado por un material homogéneo, isótropo y linealmente elástico.

Para formular el problema dinámico del sistema en cuestión se consideran por separado el movimiento de la cimentación y el de la cortina. Así, para obtener la ecuación de equilibrio dinámico de la cimentación primero se inducen desplazamientos unitarios al conjunto de puntos nodales con que se representa a la cimentación, luego se supone una ley de variación entre los desplazamientos de dos puntos nodales adyacentes y por último se utilizan las ecuaciones de movimiento de un sólido elástico.

Por otra parte, la ecuación de movimiento de la cortina se establece a partir de la técnica del elemento finito. Después de combinar las expresiones que resultan para ambas subestructuras se obtiene la ecuación de equilibrio dinámico del sistema cimentación-cortina.

El segundo procedimiento ya se describió en el Cap 3; el modelo utilizado para idealizar al sistema cimentación-cortian es el que se menciona en el Subcap 4.1. El procedimiento utilizado es un método discreto y además directo.

Con el método discreto utilizado se pueden obtener las características dinámicas tridimensionales de estructuras térreas lineales. Sin embargo, para poder comparar los resultados que se obtienen con este método y los que se tienen con el método propuesto por Chopra y Perumalswami (que admite un estado de deformación plana), es necesario asignar a la estructura una longitud suficientemente grande a fin de que dicha hipótesis se cumpla en ambos métodos (por ejemplo, $L_p = 10^9$ m), y la calibración sea válida.

Además, como la hipótesis del semiespacio supone infinitas la profundidad y extensión del suelo, y en el método utilizado es necesario que las dimensiones del prisma usado para representar la cimentación sean finitas, se supuso que dicho prisma tenía una altura $H_s = 3H_p$ y un ancho $B_s = 15H_p$, siendo H_p la altura de la cortina.

Para los fines de la presente comparación se consideran apropiadas las dimensiones anteriores.

Con el modelo utilizado se obtuvieron las frecuencias naturales adimensionales $\hat{\omega}_n$ y las formas modales $\hat{\phi}_n$ de los primeros modos de vibración transversal (n = 1,2,...8) de una cortina simétrica y homogénea de sección transversal triangular, para diferentes condiciones de rigidez de la cimentación.

Para el análisis de estos sistemas se escogieron las siguientes propiedades:

La cortina tiene 91.44 m de altura y sus taludes son 1.5:1; el material constitutivo tiene un módulo de elasticidad E_p = 57 160 ton/m², relación de Poisson ν = 0.45 y peso volumétrico γ = 2.08 ton/m³. Además, el material que forma el prisma de suelo tiene estas propiedades: γ = 1.08 ton/m³ y ν = 0.45, mientras que su módulo de elasticidad E_1 depende del parámetro $\eta = E_1/E_p$ (relación de rigidez). Con fines comparativos se consideraron los siguientes valores de η: 0.25,1,3,10 e ∞, los cuales se tomaron del trabajo de Chopra y Perumalswami.

En la fig 30 se presentan las frecuencias naturales adimensionales — determinadas con los procedimientos citados — de sistemas cimentación-cortina con diferentes relaciones de rigidez.

Con línea interrumpida se han unido los valores de $\hat{\hat{\omega}}_n$ — calculados con el método del semiespacio — para los primeros cinco modos de vibración transversal; los resultados obtenidos con el método utilizado $(\hat{\omega}_n)$ se han unido mediante trazo continuo, y corresponden a los primeros ochos modos de vibración.

En la fig 31 se han dibujado las configuraciones asociadas al modo fundamental de cortinas apoyadas sobre cimentaciones de distinta rigidez; los resultados de método del semiespacio $(\hat{\hat{\phi}}_1)$ se muestran en la fig 31a, mientras que las configuraciones $\hat{\phi}_1$ obtenidas con el método utilizado se presentan en la fig 31b.

La comparación entre las características dinámicas de estos sistemas estructurales se llevó a cabo en dos etapas, a fin de alcanzar estos objetivos:

1) Examinar las diferencias entre las frecuencias naturales $\hat{\hat{\omega}}_n$ y $\hat{\omega}_n$

al aumentar n, para cada valor del parámetro η seleccionado.

2) Estudiar las diferencias entre las formas modales asociadas al primer modo de vibración, $\hat{\hat{\phi}}_1$ y $\hat{\phi}_1$, de sistemas con distintos valores de η.

No se trata de establecer con cuál método se determinan mejor las características dinámicas de las estructuras, sino solamente estudiar las diferencias entre los resultados de esos métodos.

Se ha encontrado que los métodos del semiespacio, debido a sus hipótesis, conducen a mejores resultados cuando se les aplica a determinados problemas; lo mismo sucede con los métodos que discretizan al suelo mediante un prisma. Por ejemplo, dentro de los límites de la elasticidad lineal, el método del semiespacio es más preciso cuando se utiliza en problemas de depósitos de suelos homogéneos de grandes dimensiones, mientras que los métodos discretos, como el que aquí se ha utilizado, dan mejores soluciones cuando se aplican a problemas de suelos estratificados cuyas dimensiones son del orden de la altura de la estructura (Romo, 1980; Seed et al, 1974).

Para validar la presente calibración, ésta se hará en el campo de aplicación del método del semiespacio, es decir, en suelos homogéneos de grandes dimensiones, ya que con dicho método no es posible estudiar con precisión suelos estratificados.

6.1 *Comparación entre las frecuencias naturales*

Después de observar los resultados de la fig 30 se establece lo siguiente:

a) Las frecuencias naturales $\hat{\omega}_n$ $(n = 1,2,\ldots 5)$ de sistemas en los cuales la rigidez de la cimentación es infinita $(\eta = \infty)$ coinciden con los valores de $\hat{\hat{\omega}}_n$ determinados previamente (Chopra y Perumalswami, 1969)

b) Para los casos en que $\eta = 10$ (suelo rígido) las frecuencias $\hat{\hat{\omega}}_1$ y $\hat{\omega}_1$ (asociadas al modo fundamental) prácticamente coinciden; las demás frecuencias son muy parecidas en los modos pares $(n = 2,4)$ y difieren en los modos nones (n = 3,5).

c) En general, en los sistemas con n igual a 0.25, 1 y 3 las frecuencias $\hat{\hat{\omega}}_n$ y $\hat{\omega}_n$ difieren en menos de 30 por ciento en los primeros tres modos de vibración, especialmente cuando n = 2 y n = 3. En los modos subsecuentes dichas frecuencias presentan diferencias superiores al 100 por ciento.

A continuación se exponen las posibles causas de las diferencias anteriores:

En el planteamiento del problema de valores característicos, el método del semiespacio considera que los efectos inerciales en el sistema cimentación-cortina se deben únicamente a la masa de la cortina. En cambio, en el método utilizado en el presente trabajo, las fuerzas de inercia son producidas por la masa de la cortina y la del prisma virtual de suelo.

Respecto a la matriz de rigidez, aunque con enfoques analíticos diferentes, ambos métodos toman en cuenta la rigidez de la cortina y de la cimentación.

En el método del semiespacio la rigidez de la cimentación contribuye a la rigidez de todo el sistema mediante los nudos que representan el semiespacio (fig 2b). La matriz de rigidez global del sistema se forma como sigue:

Primero se dan desplazamientos dinámicos unitarios (horizontales y verticales) en todos los puntos con que se representa el semiespacio, para obtener la matriz de rigidez de la cimentación (en el dominio de la frecuencia); después, usando la técnica del elemento finito y considerando dos grados de libertad en cada nudo de la sección transversal de la cortina (incluyendo los de la interfase) se obtiene la matriz de rigidez de la cortina, que es constante.

Por último se combinan las matrices de rigidez de la cimentación y de la cortina, con lo cual se garantiza la compatibilidad y el equilibrio dinámico del sistema.

En el método discreto utilizado, la matriz de rigidez de todo el sistema se forma a partir del método del elemento finito, considerando dos grados de libertad en cada nudo de la sección transversal (fig 8); en los nudos que quedan a lo largo de la frontera los desplazamientos son nulos. Por lo tanto, la matriz global de rigidez está formada por la matriz de rigidez de la cortina y la del prisma virtual de suelo.

De esta manera, cuando la rigidez de la cimentación es infinita ambos métodos resuelven el mismo problema de valores característicos. Sin embargo, cuando la rigidez de la cimentación disminuye, el problema de valores característicos formulado de acuerdo con cada uno de estos métodos presenta diferencias notables, las cuales se evidencian en las soluciones numéricas respectivas.

Por ahora no se pueden explicar en forma definitiva las diferencias entre las frecuencias $\hat{\omega}_n$ y $\hat{\hat{\omega}}_n$ de los modos de vibración de cortinas apoyadas en cimentaciones flexibles. Unicamente se puede afirmar, a partir de las frecuencias $\hat{\hat{\omega}}_n$ obtenidas mediante el método del semiespacio (Chopra y Perumalswami, 1969), que los sistemas cimentación-cortina estudiados presentan un incremento de rigidez en los modos transversales superiores, comparable al que se observa en una cortina apoyada sobre una cimentación de rigidez infinita.

Por otra parte, las frecuencias $\hat{\omega}_n$ calculadas con el método discreto usado en el presente trabajo indican claramente la influencia de suelos de baja rigidez ($\eta = 0.25$, $\eta = 1$) sobre dichas frecuencias, al mostrar $\hat{\omega}_n$ un ligero crecimiento al aumentar el orden de los modos transversales, n. Para los casos en que $\eta = 3$ y $\eta = 10$ el efecto del suelo no es tan importante, y prácticamente desaparece cuando $\eta = \infty$.

6.2 *Comparación entre las formas modales*

Después de observar los resultados de las figs 31a y 31b se concluye que para los casos de cimentaciones rígidas ($\eta = 10, \infty$) prácticamente coinciden las formas modales $\hat{\phi}_1$ y $\hat{\hat{\phi}}_1$, tal como sucedió con las frecuencias naturales. Sin embargo, al disminuir la rigidez de la cimentación las diferencias entre esas formas modales son notables.

En cortinas homogéneas y simétricas de longitud infinita y sección transversal triangular, las deformaciones atribuibles a efectos de cortante puro se manifiestan principalmente en el modo fundamental, mientras que en los modos superiores hay efectos de flexión importantes; la presencia de desplazamientos nodales verticales comparables a los desplazamientos horizontales revela efectos de flexión.

Para los casos en que $\eta = 10$ y $\eta = \infty$, coinciden los resultados de las figs 31a y 31b; en ellas se observan claramente estados de esfuerzo cortante puro para el modo fundamental; esto significa que los desplazamientos horizontales predominan sobre los verticales, es decir, las deformaciones por cortante se distribuyen uniformemente en planos horizontales. Sin embargo, para los demás valores de η los resultados obtenidos mediante el método directo siguen mostrando un patrón de deformaciones por cortante, mientras que los obtenidos con el método del semiespacio indican desplazamientos importantes en dirección vertical, en particular cuando $\eta = 1$ y $\eta = 0.25$, los cuales se alejan del patrón de esfuerzo cortante puro.

Lo anterior puede deberse a la forma de suponer las condiciones de frontera en la sección transversal de la cimentación. En tanto que en el método del semiespacio las condiciones de frontera darían a la estructura libertad de vibrar en dirección vertical (fig 2a), en el método directo aquí utilizado, las condiciones de frontera restringen la vibración del prisma de suelo en tres de sus caras (fig 8).

De lo expresado en los párrafos anteriores se concluye que ambos métodos proporcionan resultados semejantes al tratarse de sistemas con cimentaciones muy rígidas; sin embargo, para cimentaciones flexibles conducen a diferencias notables, principalmente en las frecuencias asociadas a los modos transversales superiores y en la configuración del modo fundamental.

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Después de analizar los resultados presentados en los capítulos 5 y 6 se pueden establecer las siguientes conclusiones:

1) La presencia de una cimentación deformable disminuye la rigidez estructural de un sistema cimentación-cortina localizado en un cañón angosto de sección rectangular. Cuando la relación de rigidez (η) del sistema es menor o igual que 1, se presenta el fenómeno de interacción dinámica entre la cortina y el terreno sobre el que se apoya; en sistemas aparentemente rígidos, con relación de rigidez igual a 3, el fenómeno recién citado también puede ser importante. Cuando esa relación es mayor que 10 no se manifiesta la interacción entre la cortina y su cimentación. En sistemas localizados en cañones de sección triangular el efecto de una cimentación deformable sólo se evidencia cuando el espesor de la cimentación es grande ($\beta = 3$).

2) El ancho de la cimentación (el cual depende de α) influye sobre las frecuencias naturales de un sistema en boquilla de sección rectangular, de acuerdo con la rigidez relativa de la cimentación y el espesor del prisma virtual de suelo. En sistemas con $\eta = 0.25$ y $2 \leq \beta \leq 3$ prácticamente no influye el ancho de la cimentación sobre los valores de

$\hat{\omega}_{nj}$; tampoco se presenta ese efecto cuando $1 \leq \eta \leq 10$ y $\beta = 1$. En sistemas estructurales con $2 \leq \beta \leq 3$ el ancho de la cimentación influye sobre $\hat{\omega}_{nj}$ únicamente en estos casos: a) $\eta = 1$ y $\alpha < 4$, y b) $\eta = 3$ y $\alpha < 6$. Cuando el sistema cimentación-cortina tiene una relación de rigidez igual a 10, el efecto del ancho del prisma de suelo sólo se manifiesta en estos casos: a) $\beta = 3$ y $\alpha \geq 4$, y $\beta = 3$ y $\alpha < 4$.

3) A medida que aumenta el espesor del depósito de suelo (que es función de β) el sistema cimentación-cortina se vuelve más flexible. Este fenómeno, producido por un incremento en la masa del sistema estructural, depende principalmente de la rigidez de la cimentación. Esto significa que mientra mayor es la rigidez de la cimentación, mayor es la disminución de rigidez relativa del sistema al aumentar el espesor del prisma virtual de suelo.

4) Las frecuencias naturales $\hat{\omega}_{nj}$ asociadas a los modos de vibración transversal dependen principalmente de las propiedades mecánicas del terreno de cimentación; en cambio, las frecuencias asociadas a los modos de vibración longitudinal prácticamente son independientes de dichas propiedades, y sólo son función de las características de la cortina.

5) En sistemas cimentación cortina en los cuales la cimentación se idealiza mediante dos estratos horizontales, el parámetro que más influye sobre las frecuencias del sistema es el espesor del estrato superior. Además, de acuerdo con el espesor de dicho estrato es el grado de influencia de la rigidez de la cimentación sobre las frecuencias del sistema.

6) Las frecuencias $\hat{\omega}_n$ ($n = 1, 2, \ldots 5$) de una cortina apoyada sobre una cimentación infinitamente rígida, determinadas con el método descrito en el cap 3, coinciden con las frecuencias calculadas mediante un procedimiento basado en la hipótesis del semiespacio. Cuando la cimentación es flexible dichas frecuencias presentan diferencias notables, principalmente en los modos $n = 4$ y $n = 5$.

Las configuraciones asociadas al modo fundamental, calculadas con los dos procedimientos recién citados, prácticamente coinciden cuando la estructura se apoya sobre una cimentación rígida. En los casos de cimentaciones flexibles, existen diferencias importantes entre las configuraciones del modo fundamental determinadas mediante ambos métodos.

7) El método de análisis (cap 3), el modelo de interacción cimentación-cortina (cap 4) y los resultados del problema de interacción (caps 5 y 6) son de utilidad en el estudio sísmico de cortinas térreas, ya que con ellos es posible:

   a. Proponer coeficientes de diseño sísmico correspondientes a una estructura como la idealizada en este trabajo, que tomen en cuenta las propiedades del suelo de cimentación. b. Revisar las características dinámicas de cortinas en condiciones normales de operación, localizadas en zonas sísmicas. c. Dar un primer paso para estimar en forma cualitativa la pérdida de bordo libre atribuible a esfuerzos cortantes sísmicos; para ello tendrían que considerarse, entre otros factores, las formas modales y frecuencias naturales de la cortina en cuestión.

8) El método de análisis aquí utilizado se basa en algunas hipótesis sencillas, las cuales limitan el alcance de dicho método. Además, en el análisis paramétrico sobre las frecuencias naturales de sistemas cimentación-cortina sólo se incluyeron algunos sistemas con características geométricas y mecánicas sencillas. No obstante estas limitaciones, se piensa que los resultados que aquí se presentaron pueden contribuir al diseño sísmico de cortinas térreas.

Tomando como base lo expresado en los capítulos anteriores, así como las conclusiones recién señaladas, se recomienda lo siguiente:

1) Para el análisis sísmico de estructuras térreas apoyadas sobre cimentaciones flexibles, es necesario tener presente que las características dinámicas de este tipo de estructuras difieren de las que

resultan al analizar cortinas apoyadas sobre bases rígidas.

2) Realizar estudios teóricos y experimentales sobre el fenómeno de interacción dinámica de sistemas cimentación-cortina, a fin de contribuir a la solución de este problema.

Por ejemplo, a partir de los resultados de este trabajo, se recomienda obtener la respuesta sísmica de este tipo de estructuras, para conocer los estados de esfuerzo y de desplazamiento inducidos por sismos reales o simulados. Para ésto será necesario considerar otros fenómenos, tales como el de propagación de ondas sísmicas en un medio elástico, la incidencia de las ondas en las fronteras de la estructura, la posibilidad de utilizar un criterio de fronteras absorbentes etc.

3) Obtener expresiones sencillas que permitan calcular las frecuencias naturales de estructuras térreas apoyada sobre bases rígidas o flexibles. Estas expresiones deberán incluir las propiedades geométricas y mecánicas de la cortina y de la cimentación.

Lo anterior se puede lograr tomando como base los resultados presentados en este trabajo, y en casos necesario, utilizando los que se obtengan al aplicar el programa PRESAS a modelos de cortinas térreas distintos de los que aquí se estudiaron.

4) Continuar desarrollando el método de análisis utilizado en este trabajo, a fin de ampliar su alcance. Este método presenta buenas perspectivas en el estudio sísmico de estructuras térreas tridimensionales. Entre las modificaciones que servirían para este propósito están: a. Considerar la no linealidad y anisotropía de los materiales constitutivos; b. Estudiar el problema que se presenta cuando la estructura tiene una boquilla diferente de la rectangular; c. Considerar la deformabilidad de la boquilla; d. Incluir el efecto del agua almacenada.

5) Calibrar los resultados del método analítico en cuestión,con objeto

de validar los avances que se alcancen en futuras investigaciones. Para ello será necesario comparar esos resultados con:

a. Los datos registrados en cortinas térreas reales. Para ésto se requiere la información disponible sobre la respuesta de prototipos sometidos a solicitaciones dinámicas (temblores, explosiones, vibración forzada, etc). b. Los resultados experimentales de ensayes dinámicos en modelos físicos. Para ésto, además de usar la información existente, conviene realizar pruebas en modelos físicos a escala reducida, a fin de establecer un control más riguroso sobre los parámetros y las hipótesis que se utilizan en el método analítico aquí empleado. c. Los resultados presentados por otros autores que desarrollen métodos analíticos basados en hipótesis semejantes. Con este tipo de calibraciones se trataría de explicar las causas que generan las posibles discrepancias entre esos métodos y el que aquí se ha utilizado.

Como resultado de las calibraciones señaladas, se establecerían nuevas líneas de investigación a fin de mejorar el estado del conocimiento sobre la respuesta sísmica tridimensional de cortinas construidas con materiales térreos.

8. RECONOCIMIENTOS

Este trabajo se desarrolló como un proyecto de investigación del Instituto de Ingeniería, UNAM.

El autor agradece al M en I Belzay Martínez R., investigador de dicho instituto, por su atinada dirección durante las distintas etapas del proyecto; a los investigadores Dr. Luis Esteva M., del mencionado instituto, M en I Abraham Díaz-Rodríguez y M en C Enrique del Valle C., de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, sus valiosos comentarios y sugerencias.

Además, agradece a la Srita. Tere Roldán V. y a Víctor M. Ramírez su participación en la transcripción del texto.

9. REFERENCIAS

1. L. Esteva (1970)
"Regionalización sísmica de México para fines de Ingeniería", *Informe del Instituto de Ingeniería*, UNAM, No. 246, México, D.F.

2. N. Mononobe, A. Takata y M. Matumura (1936)
"Seismic stability of an earth dam", *Trans. 2nd Int. Congr on Large Dams*, Vol. IV, Washington, D.C., EUA.

3. B. Martínez y J. Bielak (1980)
"On the three-dimensional seismic response of earth structures". *Proc. VII World Conf on Earthq. Engng.* Vol. 8, pp 523-530, Estambul, Turquía.

4. A.K. Chopra y P.R. Perumalswami (1969)
"Dam-foundation interaction during earthquakes", *Proc. IV WCEE*, Vol III, pp A-6 37 - A-6 52, Santiago, Chile

5. E.L. Wilson (1969)
"A method of analysis for the evaluation of foundation-structure interaction", *Proc. IV WCEE*, Vol III, pp A-6 87 - A-6 99, Santiago, Chile.

6. I.M. Idriss, J.M. Mathur y H.B. Seed (1974)
"Earth dam-foundation interaction during earthquakes", *Earthq. Engng. and Struc. Dyn*, Vol 2, pp 313-323

7. E.G. Prater (1977)
"Response of an earth dam founded on a soil deposit to travelling seismic waves", *Proc VI WCEE*, Vol II, pp 1393-1394, Nueva Delhi, India.

8. H.Barbat, V. Breaben y C.D. Ionescu (1977)
"Dam-reservoir interaction for a dam with flat upstream face during earthquakes", *Proc VI WCEE*, Vol II, pp 1301-1306, Nueva Delhi, India.

9. O.C. Zienkiewicz (1977)
"The finite element method", *McGraw Hill Book Company*

10. B. Martínez y J. Villarreal (1981-a)
"Instructivo del programa para computadora RESTRI, para el análisis sísmico de presas de tierra y enrocamiento", *Informe del Instituo de Ingeniería*, UNAM, México, D.F.

11. B. Martínez y J. Villarreal (1981-b)
"Comparación de resultados de un método para el análisis sísmico de presas de tierra, con los de ensayes dinámicos en modelos físicos", *Revista de la Soc. Mex. de Ing. Sísmica*, No. 23, pp 29-54, México.

12. B. Martínez (1971)
"Comportamiento dinámico de modelos de presas construidos con material gelatinoso". *Memorias del III Congreso Nac. de Ing. Sísmica*, Acapulco, México.

13. J.A. Díaz-Rodríguez, O.A. Rascón y E. Rodríguez (1975)
"Comportamiento dinámico de modelos de cortinas de enrocamiento", *Memorias del IV Congreso Nac. de Ing. Sísmica*, Oaxaca, México.

14. B. Martínez y J. Villarreal (1981-c)
"Características dinámicas de estructuras térreas tridimensionales lineales", *Informe del Instituto de Ingeniería*, UNAM, No.453, México., D.F. (en prensa)

15. B. Martínez y J. Villarreal (1982)
"PRESAS: Un programa para obtener las características dinámicas de cortinas térreas", *Informe del Instituto de Ingeniería*, UNAM, México, D.F. (en preparación)

16. L.E. Malvern (1969)
"Introduction to the mechanics of a continuous medium". *Prentice-Hall*, Inc.

17. J. Bielak (1975)
"Análisis símico tridimensional de terraplenes". *Informe del Instituto de Ingeniería*, UNAM, México, D.F.

18. I. Herrera y J. Bielak (1974)
"A simplified version of Gurtin's variational principles". *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 53, No 2, pp 131-149

19. J.M. Biggs
"Introduction to structural dynamics", *McGraw-Hill Book Company*

20. S. Ruiz (1977)
"Influencia de las condiciones locales en las características de los sismos", *Informe del Instituto de Ingeniería*, UNAM, No. 387, México D.F.

21. H.B. Seed, J. Lysmer y R. Hwang (1974)
"Soil-structure interaction analyses for evaluating seismic response", *Report EERC 74-6*, University of California, Berkeley, EUA

22. M.P. Romo (1980)
"Análisis dinámico de sistemas suelo-estructura y presas de tierra", *Memorias de la X Reunión Nacional de Mecánica de Suelos*, Tomo 1, pp 112-132, Morelia, México.

23. J.A. Gutiérrez (1976)
"A subestructure method for earthquake analysis of structure-soil interaction", *Report EERC 76-10*, University of California, Berkeley, EUA.

24. W. Weaver y D.M. Yoshida (1971)
"The eigenvalue problem for banded matrices", *Computers and Structures*, Vol 1, pp 651-654, Pergamon Press.

25. J.H. Wilkinson (1965)
"The algebraic eigenvalue problem". *Clarendon Press*

26. K.J. Bathe y E.L. Wilson (1976)
"Numerical methods in finite element analysis" , *Prentice Hall Press*

27. B. Martínez (1982)
Comunicación personal

28. J. Prince, R. Cervantes y H. Rodríguez (1970)
"Excitación dinámica de la presa El Infiernillo: III. Frecuencias y configuraciones de resonancia", *Informe del Instituto de Ingeniería*, UNAM, No. 266, México, DF.

29. W.O. Keightley (1966)
"Vibrational characteristics of an earth dam", *Bull. of the Seism. Soc. of America*, Vol 56, No. 6, pp 1207-1226

Tabla 1. Tiempo de computadora (Burroughs 6800) requerido por distintos sistemas cimentación-cortina

α	Tiempo
0	25 s
1	42 s
3	65 s
6	140 s
10	320 s

Tabla 2. Espesor del estrato superior de suelo (H_1) de varios sistemas cimentación-cortina

ξ	β	H_1/H_p	Figs. de ref.
0.167	1	0.167	22a y 24a
0.333	1	0.333	22b y 24b
0.167	3	0.500	23a y 25a
0.667	1	0.667	22c y 24c
0.333	3	1.000	23b y 25b
0.667	3	2.000	23c y 25c

Tabla 3. Frecuencias determinadas en modelos de arena* vs. calculadas (Martínez y Villarreal, 1981-b).

Modelo físico	Frecuencia, en Hz	
	Frecuencia de resonancia, F^{**}_{nj} (experimental)	Frecuencia natural, f^{**}_{nj} (teórica)
MA-1	F_{11} = 50.20	f_{11} = 55.55
MA-2	F_{11} = 55.00	f_{11} = 55.75
MA-3	F_{11} = 58.25	f_{11} = 56.59

* Díaz-Rodríguez et al, (1975)

** n = modo transversal; j = modo longitudinal

Tabla 4. Periodos de vibración medidos en cortinas reales vs. periodos calculados (Martínez, 1982)

Modo+ (n =1) j	Periodo, en s			
	Presa Bouquet*		Presa El Infiernillo**	
	Experimental	Teórico	Experimental	Teórico
1	0.448	0.515	0.610	0.657
2	0.373	0.413	0.488	0.461
3	0.319	0.330	0.417	0.356
4	0.276	0.272	0.365	0.292

* Keightley, 1966

** Prince et al, 1970

\+ n = modo transversal; j = modo longitudinal

Fig 1. Zonificación sísmica de la República Mexicana (ref 1)

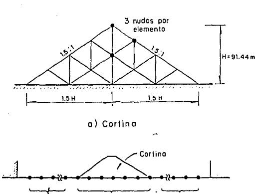


Fig 2. Idealización de un sistema cimentación-cortina mediante elementos finitos (Chopra y Perumalswami, 1969)

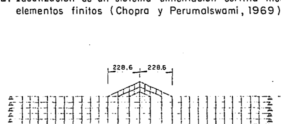


Fig 3. Representación de un sistema cimentación-cortina mediante un conjunto de elementos finitos (Wilson, 1969)

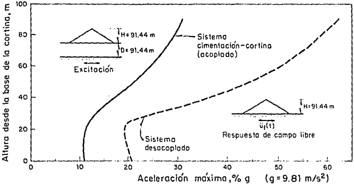


Fig 4. Influencia de la flexibilidad de la cimentación sobre la respuesta de una cortina de tierra (Idriss et al, 1974)

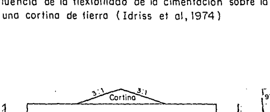


Fig 5. Geometría de un sistema cimentación-cortina analizado con el método de diferencias finitas (Prater, 1977)

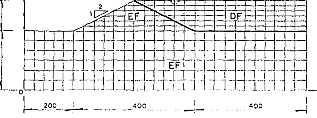
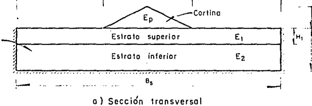
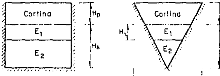


Fig 6. Modelo discreto utilizado para analizar la interacción cortina-cimentación-agua (Barbat et al, 1977)



a) Sección transversal



b) Sección longitudinal

Fig 7. Modelo propuesto para estudiar la interacción dinámica cimentación-cortina

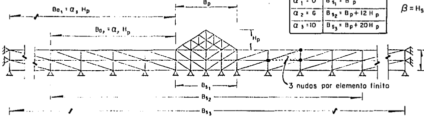
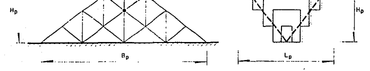


Fig 8. Discretización de la sección transversal del modelo propuesto (β=1)



a) Sección transversal

b) Sección longitudinal

Fig 9. Pseudoprismas elementales usados en el modelo propuesto. Cortina en boquilla triangular

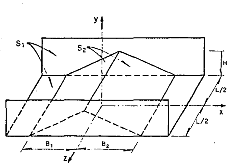


Fig 10. Idealización de una cortina térrea mediante un sólido prismático

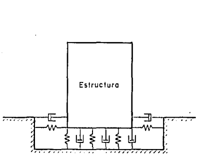


Fig 11. Sistema de resortes y amortiguadores utilizado para representar el efecto dinámico de la cimentación

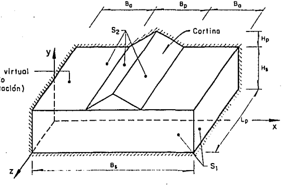


Fig 12. Modelo de interacción cimentación-cortina propuesto

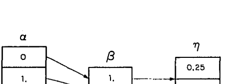
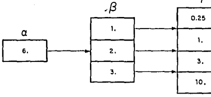
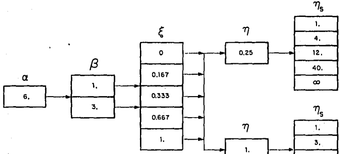


Fig 13. Valores de α, β y η utilizados en la primera etapa del análisis paramétrico



a) Un estrato de suelo



b) Dos estratos

Fig 14. Valores usados en la segunda etapa del análisis paramétrico

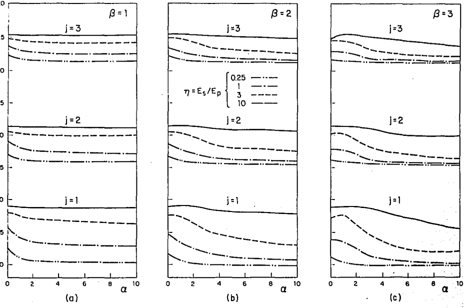


Fig 15. Influencia del parámetro α sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ de una estructura en boquilla rectangular ($n = 1$; $j = 1, 2, 3$)

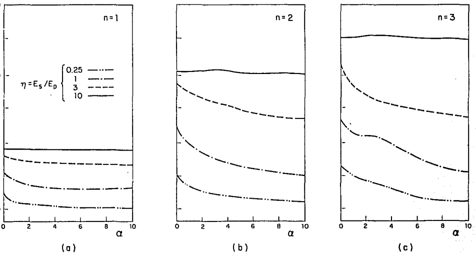


Fig 16. Influencia del parámetro α sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ de una estructura en boquilla rectangular y $\beta = 1$ ($n = 1,2,3$; $j = 1$)

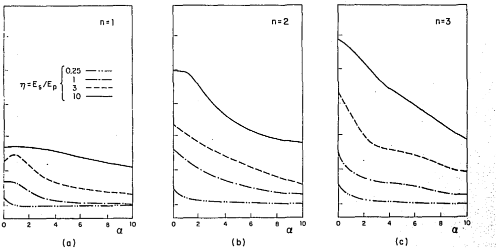


Fig 17. Influencia del parámetro α sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ de una estructura en boquilla rectangular y $\beta = 3$ (n=1,2,3 ; j=1)

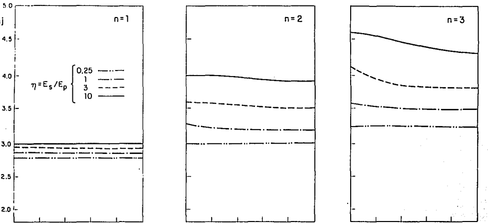


Fig 18. Influencia del parámetro α sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ de una cortina en boquilla triangular y $\beta = 3$ (n=1,2,3; j=1)

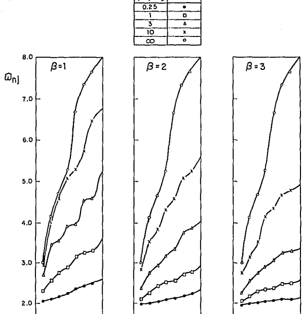


Fig 19. Efecto del parámetro η sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ de un sistema cimentación-cortina en boquilla rectangular (j=1)

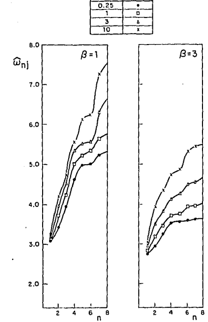


Fig 20. Efecto del parámetro η sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ de un sistema cimentación–cortina en boquilla triangular (j=1)

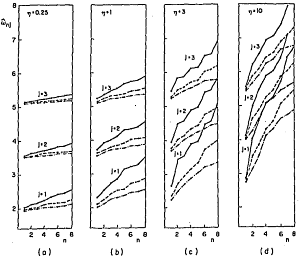


Fig 21. Efecto del parámetro β sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ de una estructura en boquilla rectangular

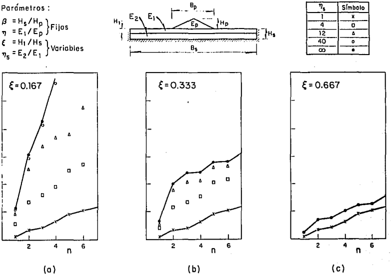


Fig 22. Influencia del parámetro η_s sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ (j=1) de un sistema cimentación–cortina con β=1 y η=0.25. Suelo idealizado con dos estratos

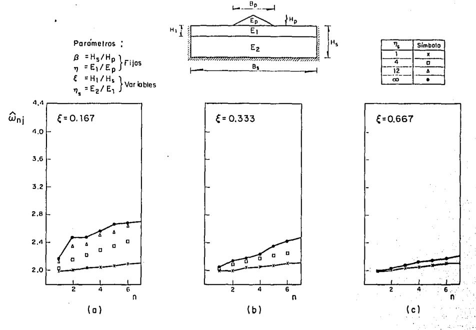


Fig 23. Influencia del parámetro η_s sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ (j=1) de un sistema cimentación-cortina con $\beta=3$ y $\eta=0.25$. Suelo idealizado con dos estratos

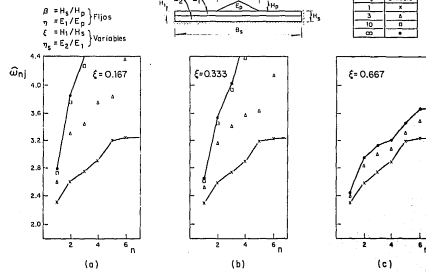


Fig 24. Influencia del parámetro η_s sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ (j=1) de un sistema cimentación-cortina con $\beta=1$ y $\eta=1$. Suelo idealizado con dos estratos

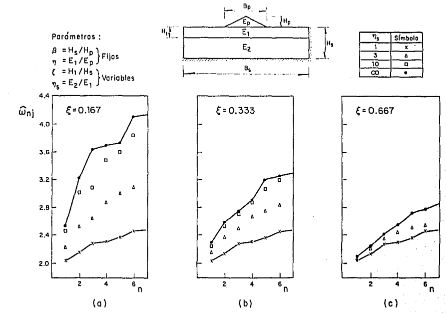


Fig 25. Influencia del parámetro η_s sobre las frecuencias $\widehat{\omega}_{nj}$ (j=1) de un sistema cimentación-cortina con $\beta=3$ y $\eta=1$. Suelo idealizado con dos estratos

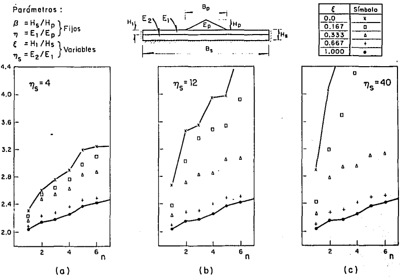


Fig 26. Influencia del parámetro ξ sobre las frecuencias $\widehat{\omega}_{nj}$ (j=1) de un sistema cimentación – estructura con β=1 y η=0.25. Suelo idealizado con dos estratos

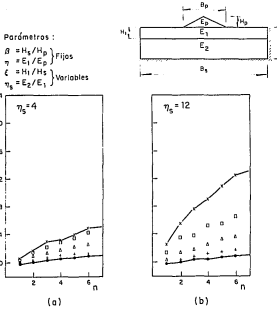


Fig 27. Influencia del parámetro ξ sobre las frecuencias $\widehat{\omega}_{nj}$ (j=1) de un sistema cimentación-estructura con $\beta = 3$ y $\eta = 0.25$. Suelo idealizado con dos estratos

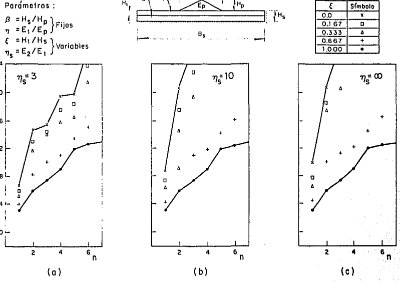


Fig 28. Influencia del parámetro ξ sobre las frecuencias $\widehat{\omega}_{nj}$ (j=1) de un sistema cimentación-estructura con β=1 y η=1. Suelo idealizado con dos estratos

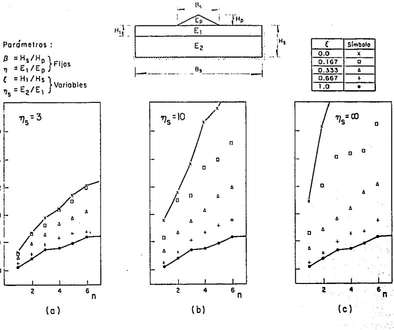


Fig 29. Influencia del parámetro ξ sobre las frecuencias $\hat{\omega}_{nj}$ (j=1) de un sistema cimentación-estructura con β=3 y η=1. Suelo idealizado con dos estratos

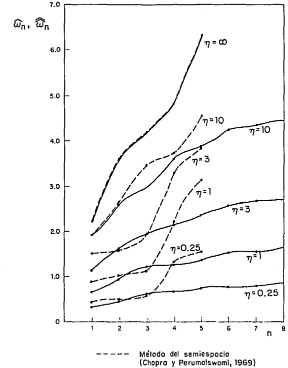
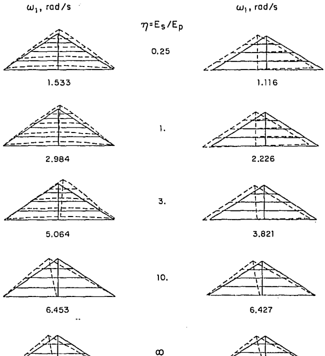


Fig 30. Frecuencias naturales de un sistema cimentación-cortina determinadas con dos procedimientos. Estado de deformación plana



a) Método del semiespacio (Chopra y Perumalswami, 1969)

b) Método discreto propuesto

Fig 31. Formas modales de cortinas térreas para diferentes valores del parámetro η. Estado de deformación plana

APENDICE A. MATRICES ELEMENTALES DE RIGIDEZ Y DE MASA

En este apéndice se obtienen las matrices elementales de rigidez y de masa de un elemento finito triangular con nudos en los vértices, suponiendo un estado de deformación plana.

Cada elemento finito triangular queda definido con tres puntos nodales referidos a un sistema cartesiano de referencia (fig A.1). A cada punto nodal se asocian dos desplazamientos; uno horizontal (u) y otro vertical (v) en dirección de los ejes x, y respectivamente.

A.1 *Matriz elemental de rigidez*

Sean u(x,y) y v(x,y) las componentes horizontal y vertical del campo de desplazamientos en un punto P(x,y) de un elemento finito triangular (fig A.1). Supóngase que dicho campo se puede expresar así:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \qquad (a.1)$$

$$v(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \qquad (a.2)$$

donde α_i $(i = 1,2,\ldots,6)$ son coeficientes por determinar

Las ecuaciones anteriores también se pueden escribir en forma vectorial

$$u(x,y) = (1 \quad x \quad y) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \underline{P}^T \ \underline{\alpha} \qquad (a.3)$$

$$v(x,y) = (1 \quad x \quad y) \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} = \underline{P}^T \ \underline{\alpha} \qquad (a.4)$$

siendo $\underline{P}^T$ el vector traspuesto de $\underline{P}$

Entonces, el campo de desplazamientos horizontales en cada punto nodal del elemento finito queda:

$$\left.\begin{aligned} u(x_1,y_1) &= u_1 = (\ 1 \quad x_1 \quad y_1)\ \underline{\alpha} \\ u(x_2,y_2) &= u_2 = (\ 1 \quad x_2 \quad y_2)\ \underline{\alpha} \\ u(x_3,y_3) &= u_3 = (\ 1 \quad x_3 \quad y_3)\ \underline{\alpha} \end{aligned}\right\} \qquad (a.5)$$

donde $(x_i,\ y_i)$ son las coordenadas del i-ésimo punto nodal $(i=1,2,3)$; u_i son los desplazamientos horizontales asociados al i-ésimo punto nodal; $\underline{\alpha}$ es un vector que se definió al introducir la ec (a.3).

El sistema de ecuaciones (a.5) también se expresa en forma matricial

$$\underline{u} = C\ \underline{\alpha} \qquad (a.6)$$

donde:

$$\underline{u}^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad (a.7)$$

y

$$C = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(a.8)}$$

Procediendo en forma análoga con el campo de desplazamientos verticales $\underline{v}$ se llega a

$$\underline{v} = C\,\underline{\alpha}' \qquad \text{(a.9)}$$

donde

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(a.10)}$$

C es una matriz dada por (a.8) y $\underline{\alpha}'$ es un vector que se definió al introducir la ec (a.4).

Despejando $\underline{\alpha}$ y $\underline{\alpha}'$ de las ecs (a.6) y (a.9) respectivamente se obtiene:

$$\underline{\alpha} = C^{-1}\,\underline{u} \qquad \text{(a.11)}$$

$$\underline{\alpha}' = C^{-1}\,\underline{v} \qquad \text{(a.12)}$$

donde C^{-1} es la matriz inversa de C. La matriz C^{-1} tiene esta forma

$$C^{-1} = \frac{1}{2A_e}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(a.13)}$$

En la ecuación anterior A_e es el área del elemento finito e. A_e se calcula a partir de las coordenadas de los vértices

$$A_e = \frac{1}{2}\,(x_2\,y_3 + x_3\,y_1 + x_1\,y_2 - x_2\,y_1 - x_3\,y_2 - x_1\,y_3) \qquad \text{(a.14)}$$

Los coeficientes a_i, b_i, c_i se determinan mediante las siguientes expresio nes

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j \qquad \text{(a.15)}$$

$$b_i = y_j - y_k \qquad \text{(a.16)}$$

$$c_i = x_k - x_j \qquad \text{(a.17)}$$

$$i,j,k = \begin{cases} 1,\ 2,\ 3 \\ 2,\ 3,\ 1 \\ 3,\ 1,\ 2 \end{cases}$$

Sustituyendo las ecs (a.11) y (a.12) en (a.3) y (a.4) respectivamente, se obtiene

$$u(x,y) = \underline{P}\ C^{-1}\underline{u} \qquad \text{(a.18)}$$

$$v(x,y) = \underline{P}\ C^{-1}\underline{v} \qquad \text{(a.19)}$$

Entonces, para un elemento finito triangular los campos de desplazamientos horizontales y verticales (u,v) en un punto P(x,y) se expresan en función de los desplazamientos nodales respectivos ($\underline{u}$, $\underline{v}$), de las coordenadas de los puntos nodales (C^{-1}) y de las coordenadas del punto ($\underline{P}$). De esta mane ra se eliminan los coeficientes α_i (i=1,2,...,6) que aparecen en las ecs (a.1) y (a.2)

De otra parte, para un material elástico lineal las relaciones deformación-desplazamiento se expresan

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \partial\ u(x,y)\ /\ \partial x \\ \varepsilon_y &= \partial\ v(x,y)\ /\ \partial y \\ \gamma_{xy} &= \partial\ u(x,y)\ /\ \partial y\ +\ \partial\ v(x,y)\ /\ \partial x \end{aligned}\right\} \quad (a.20)$$

En forma matricial estas relaciones también se pueden escribir

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \quad (a.21)$$

Sustituyendo las ecs (a.18) y (a.19) en la ec (a.21)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{P}\ C^{-1}\underline{u} \\ \underline{P}\ C^{-1}\underline{v} \end{Bmatrix} \quad (a.22)$$

Aquí C^{-1}, $\underline{u}$ y $\underline{v}$ son constantes ya que dependen sólo de las coordenadas de los puntos y $\underline{P}$ es una función de (x,y). Por lo tanto,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (0\ 1\ 0) & 0 \\ 0 & (0\ 0\ 1) \\ (0\ 0\ 1) & (0\ 1\ 0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C^{-1}\underline{u} \\ C^{-1}\underline{v} \end{Bmatrix} \quad (a.23)$$

Sustituyendo en (a.23) las ecs (a.7), (a.8) y (a.10) y multiplicando matricialmente se llega a

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \qquad (a.24)$$

Esta ecuación es equivalente a

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \qquad (a.25)$$

que también se puede escribir así

$$\underline{\varepsilon} = B\,\tilde{\underline{u}} \qquad (a.26)$$

siendo

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (a.27)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \qquad (a.28)$$

y

$$\underset{\sim}{\underline{u}}^T = (\, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 \,) \qquad (a.29)$$

donde $\underset{\sim}{\underline{u}}^T$ es el vector traspuesto de $\underset{\sim}{\underline{u}}$

La relación constitutiva correspondiente a un material homogéneo, lineal e isótropo para el estado de deformación plana, se puede expresar en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \zeta_{xy} \end{pmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} 1 & d_2 & 0 \\ d_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \qquad (a.30)$$

donde

$$d_1 = E(1 - \nu)/(1 + \nu)(1 - 2\nu) \qquad (a.31)$$

$$d_2 = \nu/(1 - \nu) \qquad (a.32)$$

$$d_3 = (1 - 2\nu)/2(1 - \nu) \qquad (a.33)$$

siendo E el módulo de Young y ν la relación de Poisson del material constitutivo del sólido en estudio.

La ec (a.30) se puede escribir como

$$\underline{\sigma} = D\,\underline{\varepsilon} \qquad (a.34)$$

donde

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \qquad \text{(a.35)}$$

$$D = d_1 \begin{bmatrix} 1 & d_2 & 0 \\ d_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(a.36)}$$

y $\underline{\varepsilon}$ se definió en la ec (a.25).

Sustituyendo la ec (a.24) en (a.34) se tiene

$$\underline{\sigma} = D \; B \; \underline{\tilde{u}} \qquad \text{(a.37)}$$

Por otra parte, la energía total en un elemento finito se expresa

$$E_t = E_i - E_e \qquad \text{(a.38)}$$

donde

E_i = Energía interna (o de deformación) del elemento finito.
E_e = Energía externa que actúa en el elemento.

La energía interna está dada por la ecuación

$$E_i = \frac{1}{2} \int_A (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dxdy \qquad \text{(a.39)}$$

la cual también se puede escribir como

$$E_i = \frac{1}{2} \int_A \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} \; dxdy \qquad \text{(a.40)}$$

donde $\underline{\varepsilon}^T$ es el vector traspuesto de $\underline{\varepsilon}$ definido en la ec (a.25) y $\underline{\sigma}$ está definido por la ec (a.37).

La energía externa originada por las fuerzas que actúan en el elemento finito se calcula así:

$$E_e = \sum_{i=1}^{3} (F_{x_i} u_i + F_{y_i} v_i) \qquad (a.41)$$

donde F_{x_i} y F_{y_i}, son respectivamente, las fuerzas horizontal y vertical que actúan en el nudo i del elemento finito; u_i, v_i, $(i = 1,2,3)$ ya se definieron mediante las ecs (a.7) y (a.10), respectivamente.

Definiendo al vector de fuerzas externas como

$$\underline{F}^T = \left[F_{x_1}, F_{y_1}, F_{x_2}, F_{y_2}, F_{x_3}, F_{y_3} \right] \qquad (a.42)$$

donde $\underline{F}^T$ es el vector traspuesto de $\underline{F}$, entonces al escribir la ec (a.39) en forma matricial se tiene:

$$E_e = \underline{\tilde{u}}^T \underline{F} \qquad (a.43)$$

donde $\underline{\tilde{u}}^T$ se definió en la ec (a.27) y $\underline{F}$ es el vector definido al introducir la ec (a.42)

Sustituyendo las ecs (a.40) y (a.43) en la ec (a.38) se obtiene

$$E_t = \frac{1}{2} \int_A \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} \, dxdy - \underline{\tilde{u}}^T \underline{F} \qquad (a.44)$$

Sustituyendo ahora las ecs (a.24) y (a.34) en (a.44)

$$E_t = \frac{1}{2}\int_A \underline{\tilde{u}}^T B^T DB \underline{\tilde{u}} \, dxdy - \underline{\tilde{u}}^T \underline{F} \qquad (a.45)$$

Minimizando la energía total E_t respecto a u_i, v_i

$$\partial E_t/\partial u_i + \partial E_t/\partial v_i = 0 \qquad (a.46)$$

se llega a

$$\int_A B^T DB \underline{\tilde{u}} \, dA_e - \underline{F} = 0 \qquad (a.47)$$

Como B, D y $\underline{\tilde{u}}$ son constantes,

$$\left[B^T DB \int_A dA_e \right] \underline{\tilde{u}} = \underline{F} \qquad (a.48)$$

Y por definición, la matriz de rigidez del elemento finito es

$$k_e = B^T DB \int_A dA_e = B^T DBA_e \qquad (a.49)$$

Ahora, sustituyendo en esta última expresión las ecs (a.26) y (a.36) se tiene

$$k_e = \frac{d_1}{4A_e} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_2 & 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ d_2 & 1 & 0 & 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & d_3 & c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \qquad (a.50)$$

donde los coeficientes d_i ($i = 1,2,3$) dependen de las propiedades mecánicas del material constitutivo y b_i, c_i $(i = 1,2,3)$ dependen de las coordenadas de los puntos nodales del elemento en estudio

A.2 *Matriz elemental de masa*

La matriz elemental de masa está dada por la expresión (Zienkiwicz, 1977)

$$m_e = \int_{V_e} \rho N^T N dV_e \qquad (a.51)$$

donde ρ es la densidad del material constitutivo del elemento finito y N^T es la traspuesta de la matriz de interpolación; esta última se obtiene al escribir en forma matricial las ecs (a.18) y (a.19), esto es

$$\underline{u}\ (x,y) = N\ \underline{\tilde{u}} \qquad (a.52)$$

En la ecuación anterior $\underline{\tilde{u}}$ es un vector que ya se definió al introducir la ec (a.26);
$\underline{u}\ (x,y)$ tiene esta forma:

$$\underline{u}\ (x,y) = \begin{pmatrix} u\ (x,y) \\ v\ (x,y) \end{pmatrix} \qquad (a.53)$$

y N^T, la traspuesta de la matriz N queda expresada como

$$N^T = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} a_1+b_1x+c_1y & 0 \\ 0 & a_1+b_1x+c_1y \\ a_2+b_2x+c_2y & 0 \\ 0 & a_2+b_2x+c_2y \\ a_3+b_3x+c_3y & 0 \\ 0 & a_3+b_3x+c_3y \end{bmatrix} \qquad (a.54)$$

Para el caso de un estado de deformación plana se supone que la densidad del elemento finito es constante en todo el elemento, y que su espesor es unitario; por lo tanto, la ec (a.51) se puede escribir:

$$m_e = \rho \int_{A_e} N^T N dA_e \qquad (a.55)$$

En general resulta complicado efectuar la integración indicada en la ec (a.55), aun para el caso de un dominio triangular; por este motivo, para facilitar dicha integración conviene efectuar un cambio de coordenadas. En este caso se utilizarán las llamadas coordenadas triangulares tal como se muestra en la fig A.2.

Las coordenadas triangulares (ζ, η) se relacionan con las coordenadas cartesianas (x,y) mediante las transformaciones

$$x = x_1 + \zeta\,(\eta c_1 + c_3) \qquad (a.56.1)$$

$$y = y_1 - \zeta\,(b_3 + \eta b_1) \qquad (a.56.2)$$

Sustituyendo las ecs (a.56) en la ec (a.54) se llega a

$$N^T = \begin{bmatrix} (1-\zeta) & 0 \\ 0 & (1-\zeta) \\ \zeta(1-\eta) & 0 \\ 0 & \zeta(1-\eta) \\ \eta\zeta & 0 \\ 0 & \eta\zeta \end{bmatrix} \qquad (a.57)$$

Además se tiene que

$$dA_e = dxdy = |J|d\zeta d\eta \qquad (a.58)$$

donde $|J|$ es el determinante de J, la matriz Jacobiana, que se obtiene a partir de las derivadas parciales de las ecs (a.56) respecto a las variables η y ζ. Esta matriz Jacobiana tiene la forma

$$J = \begin{bmatrix} \partial x/\partial \zeta & \partial x/\partial \eta \\ \partial y/\partial \zeta & \partial y/\partial \eta \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el Jacobiano $|J|$ se expresa como:

$$J = \partial x/\partial \zeta \; \partial y/\partial \eta - \partial x/\partial \eta \; \partial y/\partial \zeta \qquad (a.59)$$

entonces, la ec (a.55) queda así

$$m_e = \rho \int_0^1 \int_0^1 N^T N |J| d\eta d\zeta \qquad (a.60)$$

sustituyendo las ecs (a.57) y (a.58) en la ec (a.60), realizando las operaciones matriciales correspondientes e integrando se obtiene que

$$m_e = \frac{\rho A_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (a.61)$$

donde A_e el área del elemento finito, la cual está dada por la ec (a.14). A la matriz de masas expresada por la ec (a.61) se le conoce como <u>matriz de masas consistentes</u>. Generalmente el uso de esta matriz conduce a cálculos númericos laboriosos, por lo que en la práctica común se acostumbra concentrar la masa de cada elemento por partes iguales en cada nudo, lo cual da lugar a la matriz de masas concentradas, que está dada por la expresión

$$m_e = \frac{\rho A_e}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (a.62)$$

Por otra parte, al resolver el problema de valores característicos utilizando sucesivamente una matriz de masas consistentes (ec a.61) y una de masas concentradas (ec a.62) se ha encontrado que las frecuencias naturales correspondientes al primer caso no difieren significativamente de las del segundo. Sin embargo, el esfuerzo numérico que se requiere cuando se utiliza la matriz de masas concentradas es muy inferior al que se muestra en caso de emplear la matriz de masas consistentes.

En este trabajo, el programa PRESAS (Martínez y Villarreal, 1982) permite resolver el problema de valores característicos de sistemas estructurales utilizando indistintamente las matrices de masas correspondientes a los casos citados.

A.3 *Referencias*

1. O.C. Zienkewics (1977)
   "The finite element method", *McGraw Hill Book Company*

2. B. Martínez y J. Villarreal (1982)
   "PRESAS: un programa para obtener las características dinámicas de cortinas térreas", *Informe del Instituto de Ingeniería*, UNAM, México, D.F.

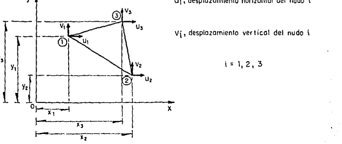


Fig A-1 Elemento finito triangular utilizado en el presente trabajo

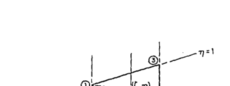


Fig A-2 Sistemas de referencia x-y y ζ-η para la matríz elemental de masa

APENDICE B. METODO GENERALIZADO DE LANCZOS

B.1 *Introducción*

En el análisis dinámico de sistemas discretos, como el que resulta al idealizar una cortina de tierra mediante la técnica de elemento finito, la ecuación de equilibrio dinámico de un sistema de n grados de libertad es de la forma

$$M\ddot{\underline{u}} + C\dot{\underline{u}} + K\underline{u} = \underline{P}(t) \qquad (b.1)$$

donde M, C y K son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente; $\underline{u}$ y $\underline{P}(t)$ son los vectores de desplazamientos y de cargas externas, respectivamente. Un punto sobre la $\underline{u}$ indica la derivada con respecto al tiempo. Las matrices mencionadas son de n x n y los vectores son de dimensión n.

La solución de la ecuación matricial (b.1) se puede obtener mediante superposición modal. Para ello se requiere resolver previamente el problema de valores característicos asociado a la estructura, el cual es de la forma

$$(K - \omega^2 M)\underline{\psi} = \underline{0} \qquad (b.2)$$

donde ω es la frecuencia natural no amortiguada y $\underline{\psi}$ es el vector característico respectivo; K y M se definieron previamente.

Si la matriz M que aparece en la ec (b.2) se escribe en la forma

$$M = a\,I \qquad (b.3)$$

donde I es la matriz identidad y a es una constante, entonces la ec (b.2) representa la *forma estándar* del problema de valores característicos.

En este tipo de problemas es común que las matrices K y M sean simétricas bandeadas. Esto significa que los coeficientes diferentes de cero se localizan en una banda cuyo eje es la diagonal principal de la matriz, tal como se indica en la fig B.1-a. Los cuadros llenos ahí mostrados corresponden a la diagonal principal.

Otra forma de expresar una matriz simétrica bandeada consiste en escribir los elementos de la semibanda superior en un arreglo rectangular asociado, tal como se indica en la fig B.1-b. El número de renglones en este arreglo es igual al número de renglones de la matriz original y el número de columnas corresponde al ancho de la banda superior (ABS) de dicha matriz.

El ABS equivale al número de diagonales que quedan sobre la diagonal principal, incluyendo a esta última, de la banda recién citada (figs B.1-a y b).

Cuando se tiene un problema de este tipo donde las matrices K y M son simétricas bandeadas, y además la matriz M no necesariamente tiene la forma dada por la ec (b.3), existe un procedimiento conocido como *método generalizado de Lanczos* (Weaver y Yoshida, 1971), que facilita la solución del problema de valores característicos expresado por la ec (b.1).

En ese procedimiento se aprovecha la simetría y el ABS de ambas matrices a fin de reducir las necesidades de memoria en el sistema de cómputo utilizado para resolver dicho problema.

El método consiste en transformar la matriz K a la forma tridiagonal simétrica (o sea una matriz con ABS=2, fig B.2) y en transformar M a la matriz identidad. Para lograr esto último se requiere que la matriz M sea positiva definida (Bathe y Wilson, 1976).

Una vez que se ha obtenido la matriz tridiagonal el problema de valores característicos se puede expresar en la forma estándar. Esto permite resolver dicho problema mediante alguna de las técnicas conocidas para matrices tridiagonales.

En este apéndice se desarrolla el algoritmo para tridiagonalizar la matriz K con lo cual el problema representado por la ec (b.2) queda expresado en su forma estándar.

B.2 *Método generalizado de Lanczos*

En el método generalizado de Lanczos se supone que el problema de valores característicos es de la forma (Lanczos, 1950)

$$A\underline{x} = \lambda B\underline{x} \qquad \text{(b.4)}$$

donde A y B son matrices reales y simétricas, siendo B una matriz positiva definida. El vector columna $\underline{x}$ representa un vector característico y λ es el valor característico correspondiente.

El método consiste en suponer la existencia de una matriz de transformación R, no necesariamente única, que satisface simultáneamente las siguientes ecuaciones:

$$R^T AR = T \qquad \text{(b.5)}$$

$$R^T BR = I \qquad \text{(b.6)}$$

donde R^T es la matriz traspuesta de R, T es una matriz tridiagonal simétrica; I es la matriz identidad; A y B ya se definieron.

En la ec (b.6) se establece la ortogonalidad de la matriz R con respecto a la matriz B,

Sea R la matriz formada por un conjunto de vectores columna $\underline{r}_i$ de dimensión n (i=1,2,...,n). Entonces, al escribir R así:

$$R = \left[\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots, \underline{r}_i, \ldots, \underline{r}_n \right] \qquad (b.7)$$

$$(i=1,2,\ldots,n)$$

la condición de ortogonalidad dada por la ec (b.6) se puede expresar

$$\underline{r}_i^T B \, \underline{r}_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i=j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \qquad (b.8)$$

Supóngase ahora que el vector $\underline{x}$ es de la forma

$$\underline{x} = R\underline{y} \qquad (b.9)$$

Sustituyendo esta última ecuación en (b.4) y premultiplicando por R^T la expresión resultante,se llega a

$$R^T AR \, \underline{y} = \lambda R^T BR \, \underline{y} \qquad (b.10)$$

Utilizando las ecs (b.5) y (b.6) se obtiene

$$T\underline{y} = \lambda \underline{y} \qquad (b.11)$$

Ahora, premultiplicando las ecs (b.5) y (b.6) por $(R^T)^{-1}$ -la matriz inversa de R^T- y sustituyendo la ec (b.6) en (b.5) se tiene

$$AR = BRT \qquad (b.12)$$

Suponiendo que la matriz T tiene esta forma

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \underline{0} & \\ & \beta_2 & \cdots & & \\ \underline{0} & & \cdots & \beta_{n-1} & \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_n & \end{bmatrix} \qquad (b.13)$$

donde α_i y β_i son escalares $(i=1,2,\ldots,n)$, al sustituir las ecs (b.7) y (b.13) en (b.12) se obtiene

$$A\underline{r}_i = \beta_{i-1}B\underline{r}_{i-1} + \alpha_i B\underline{r}_i + \beta_i B\underline{r}_{i+1} \qquad (b.14)$$

Premultiplicando la ec (b.14) por $\underline{r}_i^T$ y recordando la ortogonalidad de la matriz R con respecto B se tiene que

$$\alpha_i = \underline{r}_i^T A\underline{r}_i \qquad (b.15)$$

donde $\underline{r}_i^T$ es el vector traspuesto de $\underline{r}_i$

De esta manera, al conocer el vector $\underline{r}_i$ se conoce el escalar α_i.

Para desarrollar el algoritmo en estudio es necesario fijar en primer lugar el vector $\underline{r}_1$. Esto se consigue a partir de la ec (b.8), haciendo que cualquier matriz B satisfaga la siguiente expresión:

$$\underline{r}_1^T B\underline{r}_1 = 1 \qquad (b.16)$$

donde

$$\underline{r}_1^T = \left[1/\sqrt{B_{1,1}},\ 0,0,\ldots,0\right] \qquad (b.17)$$

siendo $B_{1,1}$ el elemento de la matriz B correspondiente a $i = j = 1$.

Para completar el algoritmo se necesitan expresiones para β_i y para $\underline{r}_{i+1}$

La ec (b.14) se puede escribir como

$$\beta_i B\, \underline{r}_{i+1} = \underline{v}_i \tag{b.18}$$

donde

$$\underline{v}_i = A\underline{r}_i - \beta_{i-1} B\underline{r}_{i-1} - \alpha_i B\underline{r}_i \tag{b.19}$$

Considerando que β_o y $\underline{r}_o$ pueden tomar valor arbitrarios, por conveniencia se puede hacer $\beta_o=0$. Entonces, para i=1 la ec (b.19) queda

$$\underline{v}_1 = A\underline{r}_1 - \alpha_1 B\underline{r}_1 \tag{b.20}$$

con lo cual $\underline{v}_1$ es un vector conocido

Puesto que B es una matriz positiva definida, puede expresarse como el producto de una matriz triangular superior (U) y una matriz triangular inferior (U^T), siendo U^T la matriz traspuesta de U. Entonces,

$$B = U^T U \tag{b.21}$$

Sustituyendo la ec (b.21) en la (b.18)

$$\beta_i U^T U \underline{r}_{i+1} = \underline{v}_i \tag{b.22}$$

Definiendo ahora el siguiente vector

$$\underline{z}_i = \beta_i U \underline{r}_{i+1} \tag{b.23}$$

la ec (b.22) se puede escribir como

$$U^T \underline{z}_i = \underline{v}_i \tag{b.24}$$

y por medio de un proceso de reducción progresiva (Bathe y Wilson, 1976) se obtiene $\underline{z}_i$.

Para obtener β_i, considérese nuevamente la ec (b.23). Al obtener $\underline{z}_i^T$, el vector traspuesto de $\underline{z}_i$, se llega a

$$\underline{z}_i^T = \beta_i \underline{r}_{i+1}^T U^T \qquad (b.25)$$

Entonces, multiplicando la ec (b.25) por el vector $\underline{z}_i$ dado por la ec (b.23) resulta:

$$\underline{z}_i^T \underline{z}_i = \beta_i^2 \underline{r}_{i+1}^T U^T U \underline{r}_{i+1} \qquad (b.26)$$

Sustituyendo la ec (b.21) en la expresión anterior y recordando la condición de ortogonalidad dada por la ec (b.8) se obtiene

$$\underline{z}_i^T \underline{z}_i = \beta_i^2$$

Luego

$$\beta_i = (\underline{z}_i^T \underline{z}_i)^{1/2} \qquad (b.27)$$

Para obtener $\underline{r}_{i+1}$ primero se divide la ec (b.23) entre β_i con lo cual se tiene

$$U\underline{r}_{i+1} = \frac{1}{\beta_i} \underline{z}_i \qquad (b.28)$$

A partir de la ec (b.28) y mediante un proceso de sustitución regresiva (Bathe y Wilson, 1976) se obtiene finalmente el vector $\underline{r}_{i+1}$.

Con las ecs (b.24) y (b.28) se completa el algoritmo en cuestión. El proceso termina cuando se conocen todos los $\underline{r}_i$ vectores columna que forman la matriz R y los coeficientes α_i y β_i de la matriz T para i = 1,...,n.

Debe hacerse notar que el algoritmo anterior falla cuando $\beta_i = 0$ (ec b.22).

En este caso el vector $\underline{r}_{i+1}$ se debe tomar arbitrariamente así:

$$\underline{r}_{i+1} = \left[\underline{0,0\ldots,}\ 1/\sqrt{B_{i+1,i+1}}\ ,0,\ldots,0 \right] \qquad \text{(b.29)}$$

Además, la ortogonalidad de los vectores de R tiende a deteriorarse en cada nuevo paso (Wilkinson, 1965), por lo que es necesario reortogonalizar dichos vectores con respecto a B en cada nueva evaluación.

De esta manera, una vez conocidas las matrices T y R, el problema de valores característicos se resuelve así:

En primer lugar se sustituye la matriz T en la ec (b.11) y se resuelve el problema de valores característicos representado por dicha ecuación. La solución de este problema conduce a un conjunto de valores característicos λ_i y a un conjunto de vectores característicos auxiliares $\underline{y}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Después se sustituyen la matriz R y los vectores $\underline{y}_i$ en la ec (b.9) a fin de obtener los vectores característicos $\underline{x}$ del problema original. De esta manera se obtienen las frecuencias naturales (λ_i) y las formas modales respectivas $(\underline{x}_i)$ del sistema estructural en estudio.

A fin de implantar en computadora el algoritmo del método generalizado de Lanczos antes descrito se desarrolló un paquete de cinco subrutinas en lenguaje FORTRAN-IV (Weaver y Yoshida, 1971).

Para utilizar esas subrutinas se requiere transformar previamente las matrices A y B -que aparecen en la ec (b.4)- a su forma rectangular asociada (fig B.1-b). Con esto se consigue una reducción importante en las necesidades de memoria del sistema de cómputo usado para resolver el problema.

A continuación se listan las subrutinas recién mencionadas

DBSOL - Esta subrutina reduce la forma *no estándar* del problema de valores característicos expresada por la ec (b.4), a la forma estándar tridiagonal dada por la ec (b.10).

BDCOMP - En esta subrutina se transforma una matriz bandeada simétrica y positiva definida a la forma $B = U^T U$ (donde U es una matriz triangular superior) por el método de la raíz cuadrada de Cholesky (Weaver, 1967). Con ésto se obtienen las matrices que aparecen en la ec (b.21).

BSOL1 - En esta subrutina se resuelve un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales en las cuales la matriz de coeficientes es un arreglo triangular inferior. El objetivo de esta subrutina es resolver la ec (b.24).

BSOL2 - En esta subrutina se resuelve un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que al expresarse en forma matricial da lugar a una matriz triangular superior. Así, se resuelve el sistema de ecuaciones representado por la ec (b.28).

BMULT - Esta subrutina multiplica una matriz bandeada simétrica por un vector. Además, se utiliza al efectuar las operaciones de la ec (b.15) y en el proceso de reortogonalizar la matriz R con respecto a B.

Las cinco subrutinas anteriores se adaptaron al programa PRESAS para la solución del problema de valores característicos de cortinas de tierra. Las instrucciones correspondientes a dichas subrutinas se encuentran dentro del listado completo del programa PRESAS (Martínez y Villarreal, 1982).

B.3 *Referencias*

1. W. Weaver y D.M. Yoshida (1971)
"The eigenvalue problem for banded matrices"
Computers and Structures, Vol 1, pp 651-654, Pergamon Press

2. K.J. Bathe y E.L. Wilson (1976)
"Numerical methods in finite element analysis", *Prentice Hall Press*.

3. C. Lanczos (1950)
"An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators", *Journal of Res. Nat. Bur Stand*, Vol 45, pp 255-282

4. J.H. Wilkinson (1965)
"The algebraic eigenvalue problem", *Clarendon Press*

5. W. Weaver Jr. (1967)
"Computer programs for structural analysis", *D. Van Nostrand*, Princeton, New Jersey, USA.

6. B. Martínez y J. Villarreal (1982)
"PRESAS: un programa para obtener las características dinámicas de cortinas térreas", *Informe del Instituto de Ingeniería*, UNAM, México, D.F.

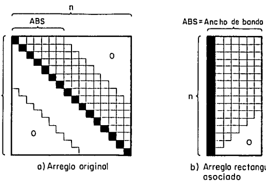


Fig B-1. Matriz simétrica bandeada de n x n

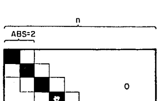


Fig B-2. Matriz tridiagonal simétrica de n x n