UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA ESTRUCTURA DE LOS DENDROIDES SUAVES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

(M A T E M A T I C A S)

P r e s e n t a :

Mat. Sergio Macías Alvarez

Ciudad Universitaria, Octubre de 1987

CONTENIDO

CONTINUOS

El objetivo de este capítulo es el de presentar los resultados de la Teoría de Continuos que servirán como base para nuestro trabajo posterior, esto no significa que sean los resultados más importantes de dicha Teoría. La persona interesada en profundizar en este Tema puede consultar el libro de Nadler (véase [9]).

Por un **Continuo** *entendemos un espacio métrico, compacto y conexo con más de un punto. Así que cualquier subconjunto compacto y conexo con más de un punto de* $\mathbb{R}^n$ *es un continuo. Un* **Subcontinuo** *será un subconjunto compacto, conexo y no vacío de un continuo.*

Diremos que un continuo X *es* **Unicoherente** *si cada vez que* A *y* B *sean subcontinuos de* X *tales que* $X = A \cup B$*, se tiene que* $A \cap B$ *es conexo. Un continuo es* **Hereditariamente Unicoherente** *si cualquiera de sus subcontinuos es unicoherente.*

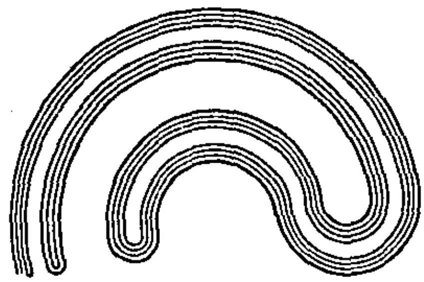
Una función continua y suprayectiva f *de un continuo* X *sobre un continuo* Y *es* **Monótona** *si para cada* $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ *es un subconjunto conexo de* X*. Una propiedad importante de las funciones monótonas es que: la imagen inversa de un subcontinuo bajo una función monótona es un subcontinuo. Para ver esto, sean* $f : X \to Y$ *una función monótona entre continuos y* $A \subset Y$ *un subcontinuo de* Y*, basta ver* $f^{-1}(A)$ *es conexa. Supongamos que* $f^{-1}(A)$ *no es conexa, i.e.* $f^{-1}(A) = H \cap K$*, donde* H *y* K *están separados. Sean* $H' = f(H)$ *y* $K' = f(K)$*. Es claro que* $A = H' \cup K'$*. Afirmamos que* $H = f^{-1}(f(H))$*. Ya sabemos que* $H \subset f^{-1}(f(H))$*. Sea* $h \in H$, $f^{-1}(f(h))$ *es conexo e interseca a* H*, así que* $f^{-1}(f(h)) \subset H$*. Análogamente se tiene que* $K = f^{-1}(f(K))$*. Si* $y \in H' \cap K'$ *entonces* $f^{-1}(y) \subset H \cap K$*, lo cual no es posible. Así que* $H' \cap K' = \emptyset$*, lo que implica que* H' *y* K' *están separados, por ser cerrados, lo que contradice la conexidad de* A*.*

Lo anterior nos sirve para mostrar que si X *es un continuo unicoherente y* $f : X \to Y$ *es una función monótona entonces* Y *es unicoherente. Sean* H' *y* K' *dos subcontinuos de* Y *tales que* $Y = H' \cup K'$*. Sean* $H = f^{-1}(H')$ *y* $K = f^{-1}(K')$*. Por* *lo que acabamos de probar, H y K son dos subcontinuos de X que cumplen con que $H \cup K = X$. Como X es unicoherente, $H \cap K$ es conexo. De aquí que se tiene que $f(H \cap K) = f(f^{-1}(H') \cap f^{-1}(K')) = f(f^{-1}(H' \cap K')) = H' \cap K'$ es conexo.*

Un continuo es **Descomponible** *si es la unión de dos subcontinuos propios; y es* **Indescomponible** *si no es descomponible. Hay que observar que la mayoría de los continuos que nos podemos imaginar son descomponibles. Debido a esto, mostraremos un ejemplo de un continuo indescomponible conocido como el* **Continuo de Knaster**, *el cual consiste de:*

(1) Todas las semicircunferencias con ordenadas no negativas con centro en el punto $(\frac{1}{2}, 0)$ y que pasan por todos los puntos del conjunto de Cantor.

(2) Todas las semicircunferencias con ordenadas no positivas que tienen, para $n \in \mathbb{N}$, el centro en el punto $(\frac{5}{2 \cdot 3^n}, 0)$ y pasan por cada punto del conjunto de Cantor en el intervalo $(\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}})$.



Más información sobre el Continuo de Knaster puede ser encontrada en el libro de Kuratowski (véase [8]).

Dados un continuo X y p un punto de X, la **Composante**, *κ_p, de p es el conjunto de los puntos $x \in X$ para los cuales existe un subcontinuo propio de X que contiene tanto a p como a x. Por ejemplo, si $X = [0,1]$ entonces $\kappa_0 = [0,1)$,*

$\kappa_1 = [0,1]$ y para $x \in (0,1)$, $\kappa_x = X$. Observemos que, en general, si X es un continuo descomponible entonces existe $x \in X$ tal que $\kappa_x = X$. Pues si $X = A \cup B$, con A y B dos subcontinuos propios y no vacíos de X, entonces para cualquier $x \in A \cap B$, $\kappa_x = X$. Mientras que si X ahora denota a un continuo indescomponible entonces las composantes de X son ajenas dos a dos. Para mostrarlo, sean $x, y \in X$ y supongamos que existen $a \in \kappa_x \cap \kappa_y$ y $b \in \kappa_x - \kappa_y$. De aquí tenemos la existencia de tres subcontinuos propios A, B, C de X tales que

$$a, x \in A; \qquad x, b \in B; \qquad y, a \in C.$$

Por lo tanto, $A \cup B \cup C$ es un subcontinuo que contiene tanto a b como a y, pero esto implica que $X = A \cup B \cup C$, de donde se obtiene que X es descomponible, lo que contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, las composantes de X son ajenas dos a dos. Otro hecho importante que se puede mostrar es que todo continuo indescomponible tiene una cantidad no numerable de composantes. (véase [6])

Ahora vamos a definir un concepto que es fundamental en la Teoría de los Dendroides Suaves, el cual nos dice qué significa que una sucesión de subcontinuos converja. Para esto tomemos un continuo X y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X, definimos el **Límite Inferior** de la sucesión $\{A_n\}$ como el conjunto de todas las $x \in X$ para las cuales toda vecindad de x interseca a casi todas las A_n, el límite inferior se denota como liA_n. El **Límite Superior** de la sucesión $\{A_n\}$, denotado lsA_n, es, por definición, el conjunto de las $x \in X$ tales que toda vecindad de x interseca a una infinidad de las A_n. Es claro que $liA_n \subset lsA_n$, y no es difícil mostrar que tanto liA_n como lsA_n son cerrados y que si $\{A_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{A_n\}$ entonces

$$liA_n \subset liA_{n_k} \subset lsA_{n_k} \subset lsA_n.$$

Para esclarecer estas nociones consideremos el siguiente ejemplo en $\mathbb{R}^2$.

Sean

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0, -1 \leq y \leq 0\},$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, y = 0\},$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$, sean

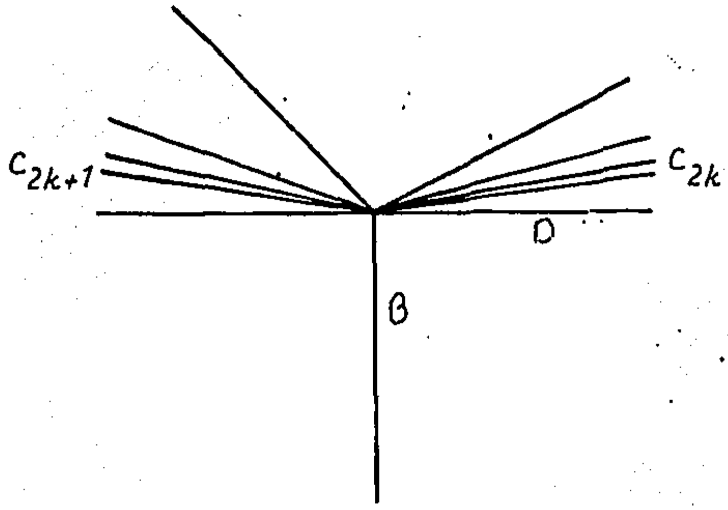
$$C_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = \frac{(-1)^n}{n} x, y \geq 0, |(x,y)| \leq 1\},$$

y

$$A_n = C_n \cup B.$$

Es fácil ver que

$$liA_n = B, \qquad y \text{ que } \qquad lsA_n = B \cup D.$$



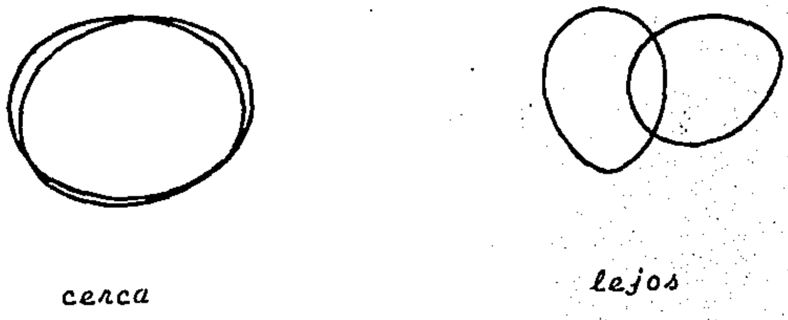
Si $liA_n = lsA_n = A$ entonces diremos que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A y lo escribiremos como $limA_n = A$.

Ahora nuestro propósito es mostrar cómo se le pueden asociar a cada continuo dos espacios métricos llamados Hiperespacios.

Si X es un continuo entonces los **Hiperespacios** *asociados a X son: la familia de todos los subconjuntos compactos y no vacíos de X, denotado 2^X; y la familia de todos los subcontinuos no vacíos de X denotado como $C(X)$. Notemos que, por definición, $C(X) \subset 2^X$. Para convertir a 2^X y, por consiguiente, a $C(X)$ en espacios métricos definimos, en 2^X, la métrica llamada* **Métrica de Hausdorff,** *como sigue:*

$$\rho(A,B) = inf\{\epsilon > 0 | A \subset V_\epsilon(B) \quad y \quad B \subset V_\epsilon(A)\}.$$

Intuitivamente, bajo esta métrica, dos conjuntos están cerca si son parecidos tanto en tamaño como en forma y están encimados, como se muestra en el dibujo.

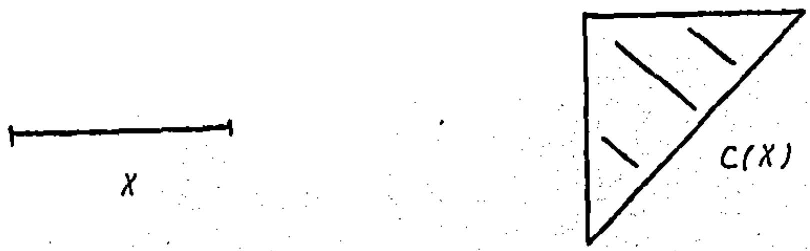


De manera similar se pueden definir $\left(2^{2^X},\sigma\right)$ *y* $(C(C(X)),\sigma)$, *donde* σ *es la métrica de Hausdorff correspondiente.*

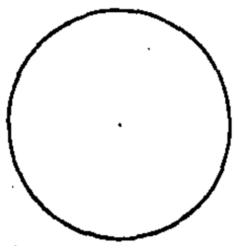
No es difícil probar que con esta métrica la sucesión $\{A_n\}$ *converge si y sólo si* $lim A_n = A$.

Para entender mejor la que son 2^X *y* $C(X)$, *diremos que siempre son compactos y arcoconexos.* 2^X *siempre contiene a un subconjunto homeomorfo al* **Cubo de Hilbert** , *lo que implica que siempre* 2^X *tiene dimensión infinita. Mientras que* $C(X)$ *puede ser muy variado, de hecho puede tener dimensión finita. Como ejemplo de este último hecho tenemos que:*

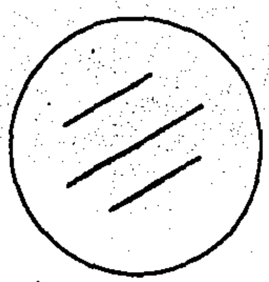
(1) *Si* $X = [0,1]$ *entonces* $C(X) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x,y \in X \quad y \quad x \leq y\}$.



(2) *Si* $X = S^1$ *entonces* $C(X) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \quad |(x,y)| \leq 1\}$.



X



$C(X)$

Otros resultados importantes son los siguientes:

Si X *es un continuo que satisface la siguiente propiedad, conocida como la* **Propiedad de Kelley;**

(κ) *Para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta = \delta(\epsilon)$ *tal que si* $a, b \in X$, $d(a,b) < \delta$ *y* $a \in A \in C(X)$ *entonces existe* $B \in C(X)$ *tal que* $b \in B$ *y* $\rho(A, B) < \epsilon$.

entonces se tiene que 2^X *y* $C(X)$ *son contraíbles. Debido a que los continuos localmente conexos satisfacen la propiedad de Kelley, sus hiperespacios son contraíbles. (véase [6])*

2^X *es homeomorfo al Cubo de Hilbert si y sólo si* X *es localmente conexo. Mientras que* $C(X)$ *es homeomorfo al Cubo de Hilbert si y sólo si* X *es localmente conexo y no tiene arcos libres. (Recordemos que un arco* α *es la imagen de un encaje,* Ω_α, *de* $[0,1]$ *en* X. *Un arco* α *se dice que es* **Libre** *si* $\Omega_\alpha((0,1))$ *es un abierto de* X.*) (véase [3])*

Una herramienta que ha sido muy importante dentro de la Teoría de Hiperespacios de un Continuo, y que será de gran utilidad posteriormente, es la noción de función de Whitney.

Una Función de Whitney μ *para* 2^X $(C(X))$ *es una función continua* $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ $(\mu : C(X) \to \mathbb{R})$ *que satisface las dos condiciones siguientes:*

(1) *Para cada* $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$;

(2) *Si* $A, B \in 2^X$ $(C(X))$, $A \subset B$ *y* $A \neq B$ *entonces* $\mu(A) < \mu(B)$.

Intuitivamente una función de Whitney nos da una manera de "medir el tamaño" de lo elementos de 2^X *o de* $C(X)$.

Para terminar este capítulo daremos la definición de arco ordenado en 2^X, *y probaremos un par de lemas técnicos que usaremos después*

Un arco ordenado Σ *en* 2^X *es un arco* $\Sigma \subset 2^X$ *el cual satisface la propiedad de que siempre que* $A, B \in \Sigma$, *se tenga que* $A \subset B$ *o* $B \subset A$. *De hecho, si* Ω *es un subcontinuo no degenerado de* 2^X *entonces* Ω *es un arco ordenado si y sólo si cada vez que* $A, B \in \Omega$, *sucede que* $A \subset B$ *o* $B \subset A$. *Otra propiedad importante de los arcos ordenados en* 2^X *es que si* Σ *es un arco ordenado en* 2^X *entonces* $\cap\Sigma \in C(X)$. *(véase [7])*

Supongamos que X *es un continuo y que* pq *denota a un arco contenido en* X *de* p *a* q. *Si* D *es un abierto de* X *que contiene a* p *y no contiene a* q *entonces existe un abierto* E *de* X *tal que* $p \in E \subset \overline{U} \subset D$ *y que* $\partial E \cap pq$ *consiste de un sólo punto. Para ver esto, observemos primero que, como* X *es regular, existe un abierto* F *de* X *tal que* $p \in F \subset \overline{F} \subset D$. *Como el arco* pq *es conexo,* $p \in F$ *y* $q \neq F$, *tenemos que* $pq \cap \partial F \neq \emptyset$. *Sea* t *el primer punto de* pq *que toca a la* ∂F. *Como* X *es completemente normal y los conjuntos* $pt - \{t\}$ *y* $tq - \{t\}$ *están separados, existen dos conjuntos abiertos y ajenos* U *y* V *de* X *tales que* $pt - \{t\} \subset U$ *y* $tq - \{t\} \subset V$. *Sea* $E = U \cap F$. *Claramente* $t \in \partial E$. *Si sucediera que existe* $s \in (\partial E - \{t\}) \cap pq$, *tendríamos que* $s \in (tq - \{t\})$, *pues* $pt - \{t\} \subset E$. *Pero esto implicaría que* $V \cap E \neq \emptyset$, *de donde* $U \cap V \neq \emptyset$, *lo cual es una contradicción. Por lo tanto,* $pq \cap \partial E = \{t\}$. *Además,* $p \in E \subset \overline{E} \subset \overline{F} \subset D$.

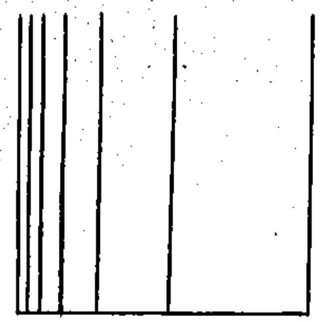
Por último, si tenemos un continuo X *y un subconjunto propio y abierto* U

de X, entonces toda componente de $\overline{U}$ interseca a ∂U. Supongamos que esto no es cierto, así que existe un punto $p \in \overline{U}$ tal que si C_p es la componente de $\overline{U}$ que contiene a p entonces $C_p \cap \partial U = \emptyset$. Consideremos los complementos, en $\overline{U}$, de todos los conjuntos abiertos y cerrados que contengan a p, éstos cubren a ∂U. Por ser ∂U compacta, basta un número finito de ellos para cubrirla. De aquí que la intersección, H, de los complementos de este número finito de abiertos y cerrados de $\overline{U}$ que, como no interseca a ∂U, es un conjunto abierto y cerrado de X, pero esto implica que $H = X$, pues X es conexo, de donde $U = X$, lo que contradice la elección de U.

DENDROIDES

Un **Dendroide** *es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente. Un ejemplo de un dendroide es el conocido Espacio Peine, definido como:*

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = \frac{1}{n}, y \in [0,1]\} \cup$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [0,1], y = 0\} \cup$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0, y \in [0,1]\}.$$



Notemos que un subcontinuo de un dendroide es arcoconexo, pues si Y es un subcontinuo de un dendroide X, tomamos dos puntos $x, y \in Y$ y consideramos el arco Σ contenido en X que contiene a x y a y como puntos extremos. Como X es hereditariamente unicoherente, $\Sigma \cap Y$ es conexa. Por el hecho de que $x, y \in \Sigma \cap Y \subset \Sigma$, se sigue que $\Sigma \cap Y = \Sigma$ y que $\Sigma \subset Y$. Por lo tanto, se tiene lo afirmado. Además, de este hecho, es inmediato que todo subcontinuo de un dendroide es un dendroide.

Sea X un dendroide, afirmamos que X es hereditariamente descomponible. Por lo mostrado en el párrafo anterior, basta ver que X es descomponible. Supongamos que X es indescomponible y sean $x, y \in X$ de tal forma que estén *en distintas composantes, recordemos que X tiene una cantidad no numerable de ellas. Consideremos el arco xy†, como x y y están en distintas composantes y X es indescomponible, tenemos que el arco xy debe de ser todo X, pero esto es una contradicción, pues un arco sí es descomponible.*

Como un continuo de dimensión mayor que uno contiene a un continuo indescomponible y todo dendroide es hereditariamente descomponible, obtenemos que todo dendroide tiene dimensión mayor o igual que uno. Pero como los dendroides son arcoconexos, concluimos que todo dendroide tiene dimensión uno.

Diremos que un punto p de un dendroide X es un **Punto Extremo** *de X, si p es un punto extremo de cualquier arco de X que lo contenga.*

Una propiedad técnica de los dendroides que será utilizada posteriormente es la siguiente: Sean X un dendroide y $p, q \in X$. Si $a \in pq$ y $c \in X$ entonces

$$pc = pa \cup ac \quad \text{o} \quad qc = qa \cup ac.$$

Esto sucede ya que, llamando x al primer punto del arco que toca a pq se tiene que $x \in pa$ o $x \in qa$. Si $x \in pa$ entonces $a \in qc$ y $qc = qa \cup ac$. Si $x \in qa$ entonces $a \in pc$, de donde $pc = pa \cup ac$.

El siguiente resultado, debido a Borsuk [1], muestra una propiedad bastante importante de los dendroides, que a su vez es la base para probar otros resultados también importantes, como son: Si un dendroide tiene exactamente dos puntos extremos entonces es un arco; y todo dendroide tiene la propiedad del punto fijo. Este último teorema también es de Borsuk [1].

El resultado mencionado es: Si X es un dendroide y $\varsigma\colon [0,\infty) \to X$ es una función continua e inyectiva entonces la cerradura del conjunto $P = \varsigma([0,\infty))$ es un arco.

---

†pq denota al arco entre p y q, que es único por ser X hereditariamente unicoherente. Además, si $Y \subset X$ y $p \notin Y$, entonces existe un único arco que va de p a Y.

Primero diremos que $a \in X$ es un **Punto Límite** *para ς si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ tal que $lim x_n = \infty$ y $lim \varsigma(x_n) = a$.*

Afirmamos que ningún punto límite a_0 para ς pertenece a P. De otra manera, existiría una $x_0 \in [0,\infty)$ tal que $\varsigma(x_0) = a_0$. Como todo subcontinuo de un dendroide es un dendroide, tenemos que $C = \overline{\varsigma([x_0,\infty))}$ es arcoconexo. Más aún, para cualquier $x_1 > x_0$,

$$C = \varsigma([x_0,x_1]) \cup \overline{\varsigma([x_1,\infty))}.$$

Como C es unicoherente y $\varsigma(x_0), \varsigma(x_1) \in \varsigma([x_0,x_1]) \cap \overline{\varsigma([x_1,\infty))}$, concluimos que $\varsigma([x_0,x_1]) \subset \overline{\varsigma([x_1,\infty))}$. Esto significa que si $x_1 \geq x_0$ entonces $\varsigma([x_1,\infty))$ es denso en C. Como C es un continuo descomponible, existen dos subcontinuos de C, C_0 y C_1 tales que

$$C = C_0 \cup C_1, C - C_0 \neq \emptyset \neq C - C_1; a_0 = \varsigma(x_0) \in C_0.$$

Poniendo $G_\nu = C - C_\nu$, $\nu = 0,1$, obtenemos dos subconjuntos abiertos, no vacíos y ajenos de C. Como $\varsigma([x_0,\infty))$ es denso en C, existe $x_1 > x_0$ tal que $\varsigma(x_1) \in G_0$. Como $\varsigma([x_1,\infty))$ es denso en C, existe $x_2 > x_1$ tal que $\varsigma(x_2) \in G_1$. Ahora bien, $\varsigma([x_1,x_2])$ es un arco que interseca tanto a C_0, como a C_1, así que podemos encontrar $x_3 \in [x_1,x_2]$ tal que $\varsigma(x_3) \in \partial C_1$ y $\varsigma((x_3,x_2]) \subset C_0$. Como $\varsigma([x_2,\infty))$ es denso, existe $x_4 > x_2$ tal que $\varsigma(x_4) \in G_0$. Otra vez $\varsigma([x_2,x_4])$ es un arco que interseca a C_0 y a C_1, de donde existe $x_5 \in [x_2,x_4]$ tal que $\varsigma(x_5) \in \partial C_1$ y $\varsigma([x_2,x_5)) \subset C_0$. Por la construcción hecha, $\varsigma((x_3,x_5])$ es un arco tal que $\varsigma(x_3), \varsigma(x_5) \in \partial C_1$ y $\varsigma((x_3,x_5)) \subset C_0$. Por lo tanto, el continuo $C_1 \cup \varsigma([x_3,x_5]) \subset X$ no es unicoherente, lo que contradice el hecho de que X es un dendroide.

Así hemos mostrado que ningún punto límite para ς pertenece a P. De aquí se sigue que para cualquier $x > 0$, los conjuntos $\varsigma([0,x])$ y $\overline{\varsigma([x,\infty))}$ tienen a $\varsigma(x)$ como su único punto en común. En consecuencia, $\varsigma(x)$ corta al conjunto $\overline{\varsigma([0,\infty))}$ entre el punto $\varsigma(0)$ y cualquier punto $a \in \overline{\varsigma([0,\infty))} - \varsigma([0,\infty))$. Pero, como C es un dendroide, existe un arco α contenido en C tal que α une a $\varsigma(0)$ con a, donde

$a \in \overline{\varsigma([0,\infty))} - \varsigma([0,\infty))$. *Pero esto implica que* $\varsigma([0,\infty)) \subset \alpha$, *pues de otro modo, existiría* $x \in [0,\infty)$ *tal que* $\varsigma(x) \in \varsigma([0,\infty)) - \alpha$, *pero entonces* $\varsigma(x)$ *no cortaría a* $\overline{\varsigma([0,\infty))}$, *lo cual no es posible. Como* $\varsigma([0,\infty)) \subset \alpha$ *tenemos que* $C = \overline{\varsigma([0,\infty))}$ *es un subarco de* α.

Ahora mostraremos que si X *es un dendroide con exactamente dos puntos extremos entonces* X *es un arco. Sean* p *y* q *los puntos extremos de* X, *y supongamos que no es cierto el resultado. Sean* $x \in X - pq$ *y* y *el primer punto del arco* xp *que toca al arco* pq. *Sea* $\Im$ *la familia de todos los arcos contenidos en* X *que tienen a* y *como uno de sus puntos extremos y que contienen a* x. *Ordenemos parcialmente a* $\Im$ *por medio de la inclusión.*

Tomemos una cadena $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ *de elementos de* $\Im$, *probaremos que* $\overline{\cup I_\alpha}$ *es un arco. Si* $\cup I_\alpha \subset I_\beta$, *para alguna* $\beta \in \Gamma$, *entonces* $\overline{\cup I_\alpha} = I_\beta$, *de donde* $\overline{\cup I_\alpha}$ *es un arco. Así podemos suponer que para toda* $\beta \in \Gamma$, $\cup I_\alpha \not\subset I_\beta$. *Afirmamos que existe una subfamilia numerable* $\{I_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ *tal que* $\cup I_{\alpha_n} = \cup I_\alpha$.

Como X *es un espacio métrico y compacto,* $\cup I_\alpha$ *tiene un subconjunto denso y numerable,* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Sea* $x_{n_1} = x_1$, *y consideremos un arco* I_α *tal que* $x_{n_1} \in I_\alpha$, *llamaremos* I_{α_1} *a este arco. Sea* x_{n_2} *el primer elemento de* $\{x_n\}$ *que no está en el arco* I_{α_1}, *y consideremos un arco, que nombraremos* I_{α_2} *que lo contenga. Sea* x_{n_3} *el primer elemento de* $\{x_n\}$ *que no está en* I_{α_2}, *y consideremos un arco* I_{α_3} *que lo contenga. Procediendo inductivamente obtenemos una sucesión de puntos* $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *y una sucesión de arcos* $\{I_{\alpha_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tales que, por la construcción hecha,* $x_{n_k} \neq x_{n_j}$ *si* $j \neq k$, *y que para toda* $k \in \mathbb{N}$, $I_{\alpha_k} \subset I_{\alpha_{k+1}}$. *Ahora veremos que* $\cup I_{\alpha_k} = \cup I_\alpha$. *Es claro que* $\cup I_{\alpha_k} \subset \cup I_\alpha$. *Para mostrar la otra contensión, notemos que dada* $x_m \in \{x_n\}$, *existe* $x_{n_k} \in \{x_{n_j}\}$, *con* $n_k > m$, *tal que* $x_m \in I_{\alpha_{k-1}}$, *pues de otro modo tendríamos que* $x_m \notin I_{\alpha_{k-1}}$, *de donde* x_{n_k} *no sería el primer elemento de* $\{x_n\}$ *que no estaría en* $I_{\alpha_{k-1}}$, *lo que contradice la definición de* $\{x_{n_k}\}$. *Por lo tanto,* $\{x_n\} \subset \cup I_\alpha$.

Supongamos que existe $z \in \cup I_\alpha - \cup I_{\alpha_k}$. *Como* $z \in \cup I_\alpha$, *existe* $\beta \in \Gamma$ *tal que* $z \in I_\beta$. *Como* $z \in I_\beta - \cup I_{\alpha_k}$, *se tiene que para cada* $k \in \mathbb{N}$, $I_{\alpha_k} \subset I_\beta$, *por ser* $\cup I_\alpha$ *una cadena. Pero esto implica que* $\{x_n\} \subset I_\beta$. *De donde* $\cup I_\alpha \subset I_\beta$, *lo que contradice nuestra suposición. Por lo tanto,* $\cup I_\alpha = \cup I_{\alpha_k}$.

Para mostrar que $\overline{\cup I_\alpha}$ *es un arco, basta ver que existe una función continua* e inyectiva $\varsigma: [0,\infty) \to X$ tal que $\varsigma([0,\infty)) = \cup I_{\alpha_k}$. Como I_{α_1} es un arco, existe un hoemorfismo $\varsigma_1: [0,1] \to I_{\alpha_1}$. Como I_{α_2} es un arco e $I_{\alpha_1} \subset I_{\alpha_2}$, existe un homemorfismo $\varsigma_2: [0,2] \to I_{\alpha_2}$ tal que $\varsigma_2|_{[0,1]} = \varsigma_1$. Inductivamente, como I_{α_k} es un arco e $I_{\alpha_{k-1}} \subset I_{\alpha_k}$, existe un homeomorfismo $\varsigma_k: [0,k] \to I_{\alpha_k}$ tal que $\varsigma_k|_{[0,k-1]} = \varsigma_{k-1}$. Esta familia de homemorfismos nos permite definir una función continua e inyectiva

$$\varsigma: [0.\infty) \to \cup I_{\alpha_k}$$

como

$$\varsigma(x) = \varsigma_k(x), \quad si \quad x \in [0,k].$$

Por lo tanto, $\overline{\cup I_\alpha}$ es un arco.

Con lo anterior hemos mostrado que toda cadena de $\Im$ tiene una cota superior, así que por el Lema de Zorn, $\Im$ tiene un elemento máximo I, el cual es un arco que tiene a y como uno de sus puntos extremos y que contiene a x. Como X es hereditariamente unicoherente y $x \notin pq$, el otro extremo, r, de I no puede estar en pq. Como I es un elemento máximo de $\Im$, I no puede estar contenido en ningún arco de X. En consecuencia, r es un punto extremo de X, lo que está en contradicción con el hecho de que X tiene exactamente dos puntos extremos.

Como consecuencia inmediata de la demostración de este resultado tenemos que: Todo Dendroide tiene al menos dos puntos extremos; y que Si un Dendroide tiene exactamente tres puntos extremos entonces se puede poner como la unión de tres arcos que tienen un punto extremo en común. Esto último se utilizará en la caracterización de los dendroides no suaves en términos de subdendrides prohibidos.

Por último veremos que si X es un dendroide entonces toda función continua de X en sí mismo tiene un punto fijo, esto es, existe $x \in X$ tal que $g(x) = x$. Supongamos que el resultado no es cierto. Así que existe una función contunua $f: X \to X$ tal que para toda $p \in X, f(p) \neq p$. Como f no tiene puntos fijos, existe

$\epsilon > 0$ tal que

$$(1) \text{ para toda } x \in X, d(p, f(p)) \geq \epsilon.$$

Pues, si definimos $h: X \to \mathbb{R}$ como $h(p) = d(p, f(p))$, tenemos que como h es continua y X es compacto, h alcanza su mínimo. Llamando ϵ al mínimo obtenemos lo que queremos.

Ahora, para cada número natural n, vamos a construir un sistema de n puntos $a_1, ..., a_n \in X$ que satisface las siguientes condiciones:

(2_n) Para cada $i < n$, $d(a_i, a_{i+1}) = \frac{\epsilon}{2}$;

(3_n) Para cada $i < n$, si $p \in a_i a_{i+1}$ y $a_i \neq p \neq a_{i+1}$ entonces $d(a_i, p) < \frac{\epsilon}{2}$;

(4_n) $a_1 a_n = \cup_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1}$;

(5_n) Si $n > 1$ entonces $a_n \in a_1 f(a_n)$ y $a_1 \neq a_n \neq f(a_n)$.

Para el caso de un sólo punto $a_1 \in X$, las condiciones $(2_n), ..., (5_n)$ se cumplen por vacuidad. Aseguramos que calquier sistema $a_1, ..., a_n$ que satisface las condiciones $(2_n), ..., (5_n)$ puede ser completado, añadiéndole un punto $a_{n+1} \in X$ de tal forma que se satisfagan $(2_{n+1}), ..., (5_{n+1})$.

Para mostrar lo que se afirma en el párrafo anterior, sea a_{n+1} el primer punto del arco $a_n f(a_n)$ que cumple con que $d(a_n, a_{n+1}) = \frac{\epsilon}{2}$. Este punto también satisface las siguientes condiciones:

(6) $a_{n+1} \in a_n f(a_n)$ y $a_n \neq a_{n+1} \neq f(a_n)$;

(7) $d(a_n, a_{n+1}) = \frac{\epsilon}{2}$;

(8) *Si* $p \in a_n a_{n+1}$ *y* $a_n \neq p \neq a_{n+1}$ *entonces* $d(a_n, p) < \frac{\epsilon}{2}$.

Ahora las condiciones (2_{n+1}) *y* (3_{n+1}) *se siguen de* (2_n) *y* (7) *y de* (3_n) *y* (8), *respectivamente. Como de* (6) *y de* (5_n) *es claro que*

$$(9) a_1 a_n \cap a_n a_{n+1} = \{a_n\},$$

vemos que (4_{n+1}) *se cumple.*

Observemos que (1) *y* (8) *implican que para toda* $p \in a_n a_{n+1}$,

$$d(a_n, f(p)) \geq d(p, f(p)) - d(a_n, p) > \frac{\epsilon}{2},$$

lo que implica que $a_n a_{n+1} \cap f(a_n a_{n+1}) = \emptyset$. *Como*

$$f(a_n) f(a_{n+1}) \subset f(a_n a_{n+1}),$$

se tiene que

$$(10) a_n a_{n+1} \cap f(a_n) f(a_{n+1}) = \emptyset.$$

Consideremos el arco $a_1 f(a_{n+1})$. *Si* $a_{n+1} \notin a_1 f(a_{n+1})$, *tendríamos que* $a_{n+1} \in f(a_n) f(a_{n+1})$, *lo que contradice* (10). *Por lo tanto, se satisface* (5_{n+1}).

Así hemos demostrado, bajo la suposición de que existe una función continua f *de* X *en sí mismo que satisface la condición* (1), *que cualquier sistema de puntos* $a_1, ..., a_n$ *que satisface* $(2_n), ..., (5_n)$ *puede ser agrandado a un sistema* $a_1, ..., a_{n+1}$ *que satisface* $(2_{n+1}), ..., (5_{n+1})$. *Se sigue entonces que existe una sucesión* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *de* *puntos de X tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, el sistema $a_1, ..., a_n$ cumple con las condiciones $(2_n), ..., (5_n)$.*

Sea $\varsigma_n: [n-1, n] \to a_n a_{n+1}$ un homeomorfismo tal que $\varsigma_n(n-1) = a_n$ y que $\varsigma_n(n) = a_{n+1}$. Se sigue de (4_n) que poniendo

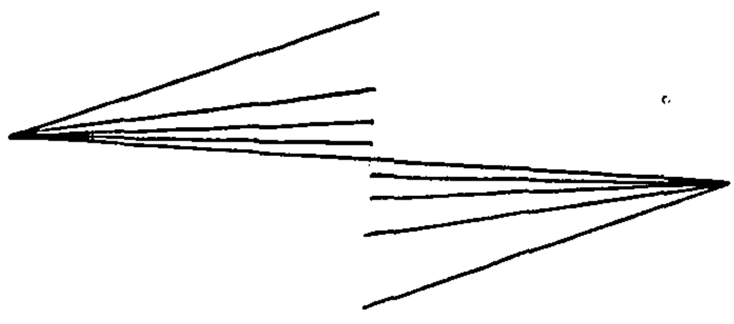
$$\varsigma(x) = \varsigma_n(x) \text{ si } x \in [n-1, n]$$

obtenemos una función continua e inyectiva del rayo $[0, \infty)$ en

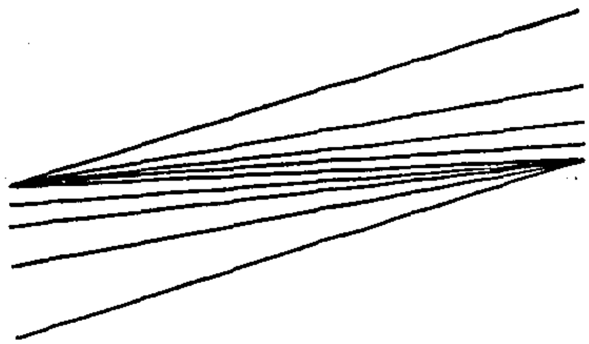
$$P = \cup_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}.$$

Pero $\overline{P}$ es un arco. Así que existe un homeomorfismo h de $\overline{P}$ en $[0,1]$. Como $[0,1]$ es compacto, $\{h(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene un punto límite, lo que implica que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ también tiene un punto límite, pero esto contradice (2_n). Por lo tanto, toda función continua de un dendroide en sí mismo tiene un punto fijo.

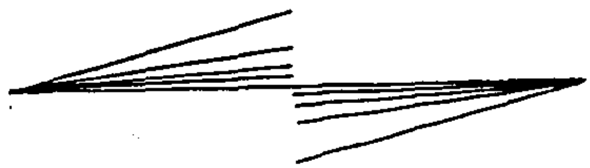
Por lo que hemos hecho, parecería que todo dendroide es contraíble, sin embargo, no es difícil probar que el siguiente dendroide no es cotraíble.



Otro hecho interesante es que no todo subdendroide de un dendroide contraíble es contraíble, como lo muestra el siguiente ejemplo.



contraíble



no contraíble

En el siguiente capítulo veremos una familia especial de dendroides una de cuyas propiedades agradables es que son contraíbles.

DENDROIDES SUAVES

Un dendroide X es **Suave en el punto** *p si $limpa_n = pa$ para cualquier sucesión de arcos $\{pa_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $lima_n = a$. Y un dendroide X es* **Suave** *si existe un punto p en X tal que X sea suave en p. Observemos que si X no es suave en p entonces existe una sucesión de arcos $\{pa_n\}$ que no converge o que $limpa_n \neq pa$. Mostraremos que, sin pérdida de generalidad se puede suponer que siempre se da el segundo caso. Supongamos que la sucesión de arcos $\{pa_n\}$ no converge y que $lima_n = a$. Como $pa \subset lipa_n$, se sigue que existe una subsucesión $\{a'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{a_n\}$ tal que $limpa'_n \neq pa$. Pues, como $\{pa_n\}$ no converge, $lipa_n \neq lspa_n$. Tomando $x \in lspa_n - lipa_n$ y V una vecindad de x, como $x \in lspa_n$, V interseca a una infinidad de los arcos pa_n, la cual tendrá una subsucesión convergente $\{pa'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\{a'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$, pues para cada $n \in \mathbb{N}$, $pa_n \in C(X)$ y $C(X)$ compacto. Como $x \in limpa'_n$, $pa \subset lipa_n \subset limpa'_n$ y $x \notin lipa_n$, $limpa'_n \neq pa$.*

Lo primero que debemos observar es que la suavidad de los dendroides es hereditaria, esto es, todo subdendroide de un dendroide suave es suave. Para ver esto, tomemos X un dendroide suave en p y K un subdendroide de X. Si $p \in K$, no hay nada que probar. Supongamos que $p \notin K$. Sea $y \in K$ y consideremos el arco py. Sea t el primer punto de py que toca a K. Mostraremos que K es suave en t. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de K que converge a a. Por construcción, para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$pa_n = pt \cup ta_n.$$

De aquí que:

$$lipa_n = pt \cup lita_n$$

y que:

$$lspa_n = pt \cup lsta_n.$$

Como X es suave en p, $lipa_n = lspa_n$, de donde:

$$pt \cup lipa_n = pt \cup lspa_n,$$

lo que implica que:

$$lita_n = lsta_n.$$

Pues $pt \cap lita_n = \{t\} = pt \cap lsta_n$. Por lo tanto, K es suave en t.

Otro hecho importante es que si X es un dendroide suave en p entonces X es localmente conexo en p. Para mostrarlo, sea U un abierto de X que contenga a p y sea V la componente por trayectorias de U que contiene a p. Afirmamos que V es abierto en X. Pues de otro modo tendríamos que existiría $q \in V - V^\circ$, y podríamos encontrar una sucesión de puntos $q_n \in X - V$ que converge a q. Como U es abierto, sin perder generalidad supondremos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $q_n \in U$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el arco pq_n. Como cada $q_n \in U - V$, tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $pq_n \cap (X - U) \neq \emptyset$. Como X es suave en p, $lim pq_n = pq$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $pq_n \cap (X - U) \neq \emptyset$, llegamos a que $pq \cap (X - U) \neq \emptyset$. Pero, por otro lado, $pq \subset V \subset U$. Esta contradicción muestra lo afirmado. Hay que hacer notar que esta demostración prueba que, de hecho, X es localmente arcoconexo en p.

En base a lo demostrado en el párrafo anterior nos podemos preguntar: ¿Si X es un dendroide y p es un punto en donde X es localmente conexo entonces X es suave en p?. Desgraciadamente la respuesta es negativa, y como ejemplo tenemos el siguiente dendroide:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = \frac{1}{n}x, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Sea

$$K_3 = \{\cup_{n=1}^{\infty} A_n\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0, 0 \leq x \leq 2\}.$$

Aquí, $a_n = (1, \frac{1}{n})$, $a = (1,0)$ y $p = (2,0)$. *Claramente,* K_3 *es localmente conexo en* p, *pero* K_3 *no es suave en* p, *pues*

$$\lim pa_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0, 0 \leq x \leq 2\},$$

mientras que

$$pa = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0, 1 \leq x \leq 2\}.$$

Es importante hacer notar que K_3 *es un dendroide suave en* $s = (0,0)$.

Lo que sí es cierto es que si X es un dendroide suave en el punto p y $N(X)$ denota al conjunto de puntos de X en los cuales X no es localmente conexo entonces la componente por trayectorias del conjunto $X - N(X)$ que contiene a p es el conjunto de todos los puntos en donde X es suave. (véase [2])

Sea P el conjunto de puntos de X en donde X es suave. Por lo hecho antes, sabemos que $P \subset X - N(X)$. Sea C la componente por trayectorias de $X - N(X)$ que contiene a p. Para probar que $P \subset C$, tomemos $q \in P$ y $a \in pq$. Mostraremos que X es suave en a. Supongamos que esto no es cierto, entonces existen una sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X y un punto b de X tales que $\lim b_n = b$ y $\lim ab_n = B$ donde $ab \subset B$ y $ab \neq B$. Por la unicoherencia hereditaria de X, es claro que si $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$pb_n = pa \cup ab_n \qquad o \qquad qb_n = qa \cup ab_n$$

Alguna de estas igualdades debe de cumplirse una infinidad de veces, por eso, sin pérdida de generalidad podemos suponer que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$pb_n = pa \cup ab_n.$$

De esto obtenemos que

$$pb = \lim pb_n = pa \cup \lim ab_n = pa \cup B.$$

La primera igualdad se debe a la suavidad de X en p. Como para toda $n \in \mathbb{N}$, $a \in pb_n$, y $\lim pb_n = pb$ entonces $a \in pb$, de donde

$$pb = pa \cup ab.$$

De lo anterior tenemos que

$$pa \cup ab = pa \cup B.$$

Como $ab \neq B$, existe $x \in B - ab$. De la última igualdad concluimos que $x \in pa$. Por otro lado, como $x \in B = lim ab_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in ab_n$ de tal forma que $lim x_n = x$. Como $pb_n = pa \cup ab_n$ y $x_n \in ab_n$, se tiene que $a \in px_n$. Como para toda $n \in \mathbb{N}$, $a \in px_n$ y X es suave en p, obtenemos que $a \in px$. Lo cual no es posible. Por lo tanto, X es suave en a. Así que $P \subset C$.

Ahora veamos que $C \subset P$. Sea $q \in C$ y tomemos una sucesión convergente de puntos $a_n \in X$ con límite a. Así tenemos que $lim pa_n = pa$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea b_n el primer punto del arco $a_n p$ que toca al arco pq y sea b el primer punto del arco ap que toca a pq. Así que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$qa_n = qb_n \cup b_n a_n$$

y, además,

$$qa = qb \cup ba.$$

Como $b \in pq \subset C$, X es localmente conexo en b. Afirmamos que $lim b_n = b$. Pues si no fuera cierto, existiría una $\epsilon > 0$ tal que para cada $N \in \mathbb{N}$, existiría una $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ y $d(b, b_n) \geq \epsilon$. Por esto, sin perder generalidad supondremos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $d(b, b_n) \geq \epsilon$.

Mostraremos que $ba - \{b\} \subset li b_n a_n$. Sea $x \in ba - \{b\}$. Notemos que $x \notin pq$, y en consecuencia, para toda $n \in \mathbb{N}$, $x \notin pb_n$, pues $pb_n \subset pq$, $n \in \mathbb{N}$. Sea W una vecindad de x tal que $W \cap pq = \emptyset$, esto implica que $W \cap pb_n = \emptyset$. Como $x \in pa = lim pa_n$, podemos suponer que si $n \geq N$ entonces $W \cap pa_n \neq \emptyset$. Así que si $n \geq N$ entonces

$W \cap b_n a_n \neq \emptyset$. Por lo tanto, $ba - \{b\} \subset lib_n a_n$. Como $lib_n a_n$ es cerrado en X, $ba \subset lib_n a_n$.

Sea U una vecindad conexa de b tal que $\overline{U} \subset V_{\frac{\epsilon}{2}}(b)$. Como $ba \subset lib_n a_n$, existe $n > N$ tal que podemos encontrar $c_n \in b_n a_n$ tal que $c_n \in U$. Como $c_n \in b_n a_n$, $b_n \in bc_n$. Como $\overline{U}$ es un subdendroide de X, $bc_n \subset \overline{U}$, de donde $d(b, b_n) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, lo cual no puede ser. Por lo tanto, $lim b_n = b$.

Ahora sí probaremos que $lim ga_n = ga$. Como $b \in pq$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $b_n \in pq$,

$$lim qb_n = qb.$$

Así que resta ver que

$$lim a_n b_n = ab.$$

Observemos que $ab \subset lia_n b_n \subset lsa_n b_n$, entonces debemos mostrar que

$$lsa_n b_n \subset ab.$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n \subset pa_n$,

$$lsa_n b_n \subset lspa_n = pa = pb \cup ba.$$

Afirmamos que $(pb - \{b\}) \cap lsa_n b_n = \emptyset$. Pues de otro modo, existiría $x \in (pb - \{b\}) \cap lsa_n b_n$. Como $x \in lsa_n b_n$, existen una subsucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y

$x_{n_k} \in a_{n_k}b_{n_k}$ tales que $lim x_{n_k} = x$. Como $px_{n_k} = pb_{n_k} \cup b_{n_k}x_{n_k}$ y $lim b_{n_k} = b$, tenemos que $b \in lim px_{n_k} = px$. Pero $x \in pb - \{b\}$. Esta contradicción muestra lo afirmado. Por lo tanto, X es suave en q y $C \subset P$.

Lo que hemos visto es en qué puntos un dendroide es suave. Ahora lo que haremos es decir, en cierto tipo de dendroides, en qué puntos no puede ser suave un dendroide.

Tomemos un dendroide $K = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} pa_n}$, donde $lim a_n = a$, y $x \in K$ de tal forma que $xa \cup (\bigcup pa_n) \neq K$. Mostraremos que K no es suave en x.

Supongamos que K es suave en x, esto implica que $lim xa_n = xa$. Sea $t \in K - \bigcup pa_n$ y tal que $t \notin xa$. Como $t \notin xa = lim xa_n$, existen un abierto U que contiene a t y $N \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq N$ entonces $xa_n \cap \overline{U} = \emptyset$. Por otro lado, como $t \in lim pa_n$, sin perder generalidad podemos suponer que para $n \geq N$ se tiene que $pa_n \cap \overline{U} \neq \emptyset$, esto último implica que

$$t \in ls(pa_n \cap \overline{U}).$$

Por otra parte, afirmamos que si $n \geq N$ entonces

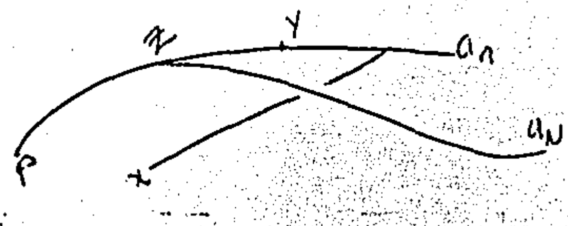
$$pa_n \cap \overline{U} = pa_N \cap \overline{U}.$$

Para probarlo, sean $n > N$ y z el último punto que tienen en común los arcos pa_n y pa_N. Queremos ver que

$$(pa_N \cup pa_n) \cap \overline{U} \subset pz.$$

Si esto no fuera cierto, sin pérdida de generalidad, existiría $y \in \overline{U} \cap za_n$. Como

$n > N$, resulta que $xa_n \cap \overline{U} = \emptyset$, de donde $xa_n \cap pa_n \subset ya_n$, pero esto implica que $y \in xa_N$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $pa_n \cap \overline{U} = pa_N \cap \overline{U}$.



Como para $n \geq N$ tenemos que $pa_n \cap \overline{U} = pa_N \cap \overline{U}$, resulta que

$$ls(pa_n \cap \overline{U}) = pa_N \cap \overline{U},$$

pero $t \in ls(pa_n \cap \overline{U})$, de donde $t \in pa_N$, lo que contradice la elección de t. Por lo tanto, K no es suave en x.

Ahora vamos a caracterizar a los dendroides no suaves en términos de subdendroides prohibidos. Para esto vamos a definir varios tipos de dendroides. (véase [5])

Un dendroide K es un **Dendroide del tipo 1** si

$K = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} pa_n}$, donde

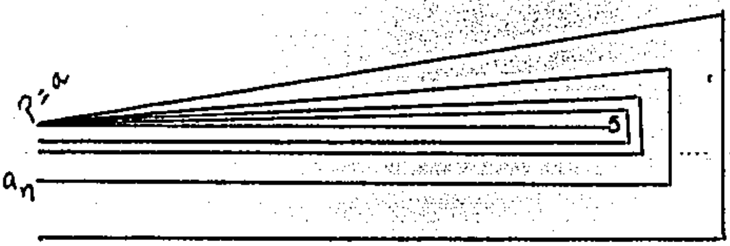
(1) $\lim a_n = a$,

(2) la sucesión de arcos $\{pa_n\}$ converge a un dendroide L,

(3) existen un punto extremo s de L, distinto de a, y un conjunto abierto D que contiene a s tales que $C_s \cap (\cup pa_n) = \emptyset$, donde C_s es la componente de $D \cap L$ que contiene a s. Al punto p se le llama el **Punto Extremo** de K.

Para un ejemplo de un dendroide del tipo 1, sea, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = \frac{1}{(n+1)}x, 0 \le x \le 1 + \frac{1}{n}\} \cup \\
\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 1 + \frac{}{n}, \frac{-1}{n} \le y \le \frac{1}{n}\} \cup \\
\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = \frac{-1}{n}, 0 \le x \le 1 + \frac{1}{n}\}.
\end{aligned}
$$



Sea $K_1 = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}$. En este caso, $a_n = (0, \frac{1}{n})$, $a = p = (0,0)$, $s = (1,0)$ y $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0, 0 \le x \le 1\}$.

Diremos que un dendroide K es un **Dendroide del tipo 2** *si*

$K = \{\cup_{n=1}^{\infty} sa_n\} \cup sabt \cup \{\cup_{n=1}^{\infty} tb_n\}$†, *donde*

(1) $lim a_n = a$ *y* $lim b_n = b$;

(2) $lim sa_n = sa$ *y* $lim tb_n = tb$;

(3) $lim(diam(sa_n \cap st)) = 0$ *y* $lim(diam(tb_n \cap st)) = 0$.

El **arco** *st es llamado el* **Arco Básico** *de K.*

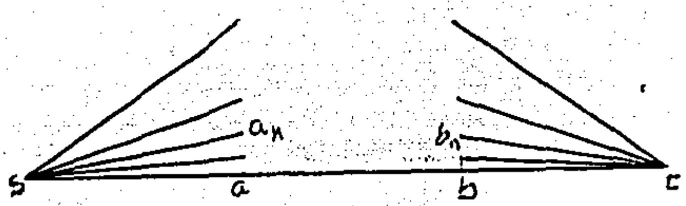
---

† $sabt$ denota al arco st e indica que $a, b \in st$ y que $a < b$ en el orden natural

Un ejemplo de un dendroide del tipo 2 se obtiene como sigue: Para cada $n \in \mathbb{N}$, *sean*

$$A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = \frac{1}{n}x, 0 \leq x \leq 1\},$$

A'_n *la reflexión de* A_n *con respecto a la línea* $x = 2$.



Sea $K_2 = \{\cup_{n=1}^{\infty} A_n\} \cup \{\cup_{n=1}^{\infty} A'_n\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0, 0 \leq x \leq 4\}$. *Aquí,* $a_n = (1, \frac{1}{n})$, $b_n = (3, \frac{1}{n})$, $a = (1,0)$, $b = (3,0)$, $s = (0,0)$ *y* $t = (4,0)$.

Un dendroide K *es un* **Dendroide del tipo 3** *si*

$K = \{\cup_{n=1}^{\infty} sa_n\} \cup pas$, *donde*

(1) $pa \cap \{\cup sa_n\} = \emptyset$;

(2) $lim a_n = a$;

(3) $lim sa_n = sa$;

(4) $lim(diam(sa_n \cap ps)) = 0$.

El arco ps *es el* **Arco Básico** *de* K, *y* p *es el* **Punto de Emanación** *de* K.

El Dendroide K_3, antes definido, es un ejemplo de un dendroide del tipo 3.

Por último, diremos que un dendroide K es un **Dendride del tipo 4** *si*

$K = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} pa_n}$, *donde*

(1)$lim a_n = a$;

(2)$\{pa_n\}$ *converge a un dendroide L;*

(3) *existe un punto extremo s de L, distinto de a, tal que K no es localmente conexo en s y $s \notin \cup pa_n$.*

Es importante hacer notar que todo dendroide del tipo 1 es un dendroide del tipo 4, mientras que no todo dendroide del tipo 4 es un dendroide del tipo 1. Para ver lo primero basta mostrar que si K es un dendroide del tipo 2 entonces K no es localmente conexo en s. Si K fuera localmente conexo en s, D debería de contener una vecindad conexa y abierta de s, pero esto implicaría que tal vecindad estaría contenida en C_s, y que $C_s \cap pa_n \neq \emptyset$, para n suficientemente grande, pues $s \in lim pa_n$.

Para probar lo segundo tenemos el siguiente ejemplo:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean:

$$v_n = (1 - \frac{1}{n}, 0, 0),$$

$$w_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}),$$

$$x_n = (1, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}),$$

$$y_n = (1, \frac{-1}{n}, \frac{1}{n}),$$

$$z_n = (0, \frac{-1}{n}, \frac{1}{n});$$

$$A_n = \{\lambda v_n | \lambda \in [0,1]\},$$

$$B_n = \{(1-\lambda)v_n + \lambda w_n | \lambda \in [0,1]\},$$

$$C_n = \{(1-\lambda)w_n + \lambda x_n | \lambda \in [0,1]\},$$

$$D_n = \{(1-\lambda)x_n + \lambda y_n | \lambda \in [0,1]\},$$

$$E_n = \{(1-\lambda)y_n + \lambda z_n | \lambda \in [0,1]\}.$$

$$F_n = A_n \cup B_n \cup C_n \cup D_n \cup E_n.$$

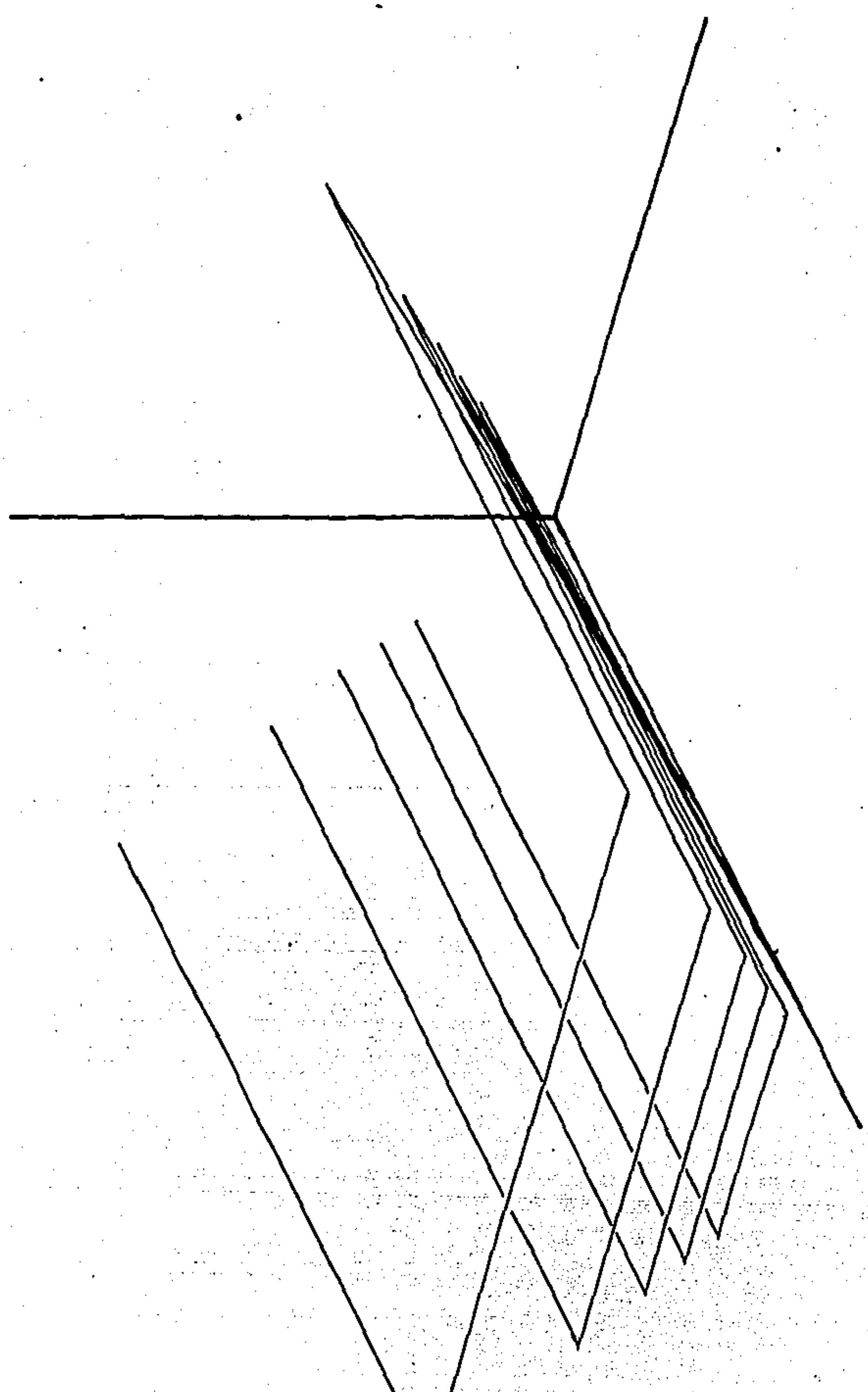
Definimos K_4 como

$$K_4 = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} F_n}.$$

Aquí: $a_n = z_n$, $p = a = (0,0,0)$, $s = (1,0,0)$ y $pa_n = F_n$. Como para toda $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in pa_n$ y $lim v_n = s$, tenemos que cualquier vecindad de s interseca a una infinidad de los arcos pa_n, así que K no puede ser un dendroide del tipo 1. Para ver que es del tipo 4, basta observar que K no es localmente conexo en s pues la sucesión de arcos $\{D_n\}$ converge a s y no hay manera de conectar a ningún punto de D_n, $n \in \mathbb{N}$, con s en una vecindad pequeña de éste. Un bosquejo de K_4 puede encontrarse en la siguiente página.

Observemos que el ejemplo anterior es un dendroide en $\mathbb{R}^3$. Debido a que en $\mathbb{R}^2$ no hay suficiente espacio creemos que para dendroides planos, los dendroides del tipo 1 y los dendroides del tipo 4 coinciden.

Ahora mostraremos que tanto los dendroides del tipo 2 como los del tipo 4 son no suaves y, como los dendroides del tipo 1 son del tipo 4, tendremos que los dendroides del tipo 1 también no suaves.



Sean $K = \{\bigcup sa_n\} \cup sabt \cup \{\bigcup tb_n\}$ un dendroide del tipo 2 y $x \in K$. Consideremos el arco xs y sea z el primer punto de este arco que toca al arco st. Si $z \in xa$, notemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $z \in xb_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea t_n el primer punto del arco $b_n z$ que toca al arco st. Como $lim(diam(tb_n \cap st)) = 0$, resulta que $lim t_n = t$. De aquí que $t \in lizb_n \subset lixb_n$. Pero, por otro lado $xb = xz \cup zb$ y $t \notin xz \cup zb$. Por lo tanto, K no es suave en x. Los casos en que $z \in ab$ y $z \in bt$ son análogos. Por lo tanto, todo dendroide del tipo 2 no es suave.

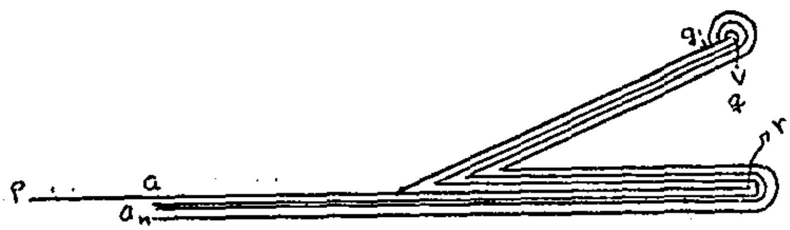
Sean $K = \overline{\bigcup pa_n}$ un dendroide del tipo 4 y $x \in K - \{s\}$. Para ver que K no es suave en x, basta probar que $xa \cup \{\bigcup pa_n\} \neq K$. Y para esto es suficiente mostrar que $s \notin xa$. Supongamos que $s \in xa$. Como s es un punto extremo de L y $a \in L$, se sigue que $x \notin L$ y que s es el primer punto del arco xp que toca a L. Por otra parte, como $x \notin L$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in pa_n$. Como $x \in pa_n$ y $s \in xp$, tenemos que $s \in pa_n$, lo que contradice la definición de s. Así que K no es suave en x. Para tener que K no es suave, sólo falta ver que no es suave en s, pero esto es claro pues K no es localmente conexo en s. Observemos que éste es el único uso que tiene la no conexidad local de K en s.

Lo que hemos hecho hasta este momento es mostrar que si un dendroide contiene subdendroides del tipo 1 o del tipo 2 entonces dicho dendroide es no suave. El inverso también es cierto y ambos resultados nos dan la caracterización de los dendroides no suaves antes mencionada.

Antes de probar que si un dendroide es no suave entonces contiene a un subdendroide del tipo 1 o del tipo 2, necesitamos ver que si X es un dendroide y p es un punto de X en donde X no es suave y p no es un punto de emanación de un subdendroide de X del tipo 1 entonces p es un punto de emanación de un subdendroide de X del tipo 3. (véase [5])

Sean X un dendroide y $p \in X$ un punto en donde X no sea suave, y no es un punto de emanación de un subdendroide del tipo 1. Como X no es suave en p, existe una sucesión de arcos $\{pa_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $lim a_n = a$ y $lim pa_n = L \neq pa$. Sea $K = L \cup \{\bigcup pa_n\}$.

Lo primero que mostraremos es que del hecho de que p no es un punto de amanación de un subdendroide de X del tipo 1 se sigue que L es un dendroide con *a lo más un punto extremo distinto de p o de a (p y a no necesariamente son puntos extremos de L). Supongamos que hay dos puntos extremos q y r de L que son distintos entre sí y que también ambos son distintos tanto de p como de a. Entonces $q \notin pr$ y $r \notin pa$, pues q y r son puntos extremos de L. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea D_n un conjunto abierto tal que $q \in D_n$, $\overline{D_{n+1}} \subset D_n$, $\overline{D_1} \cap pr = \emptyset$ y $lim(diam(D_n)) = 0$. Como p no es un punto de emanación de algún subdendroide del tipo 1, para toda $j \in \mathbb{N}$, existe $N(j) \in \mathbb{N}$ tal que $pa_{N(j)}$ interseca a C_j, la componente de $L \cap D_j$ que contiene a q. Observemos que $N(j)$ y $N(j+1)$ pueden ser tomados de tal forma que sean distintos, ya que C_j interseca a una infinidad de los arcos pa_n, pues de no hacerlo p sería un punto de emanación de un subdendroide de X del tipo 1, contrario a nuestra hipótesis.*



Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea q_j el último punto en común de los arcos pq y $pa_{N(j)}$. Como $C_j \subset L$ y $C_j \cap pa_{N(j)} \neq \emptyset$, $j \in \mathbb{N}$, tenemos que $q_j \in C_j$, de donde concluimos que $lim q_j = q$. Como para toda $j \in \mathbb{N}$, $q_j \in pq$, obtenemos que $pq_j \subset pq$, $j \in \mathbb{N}$. Sea E un conjunto abierto tal que

$$\{r\} \subset E \subset \overline{E} \subset X - pq.$$

Observemos que para toda $j \in \mathbb{N}$, $pa_{N(j)} \cap (pr \cup C_r)$ es conexo, donde C_r es la componente de $E \cap L$ que contiene a r. Como $q_j \notin pr \cup C_r$, $j \in \mathbb{N}$, tenemos que para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$pa_{N(j)} \cap (pr \cup C_r) \subset pq_j \subset X - C_r,$$

y esto implica que para toda $j \in \mathbb{N}$, $pa_{N(j)} \cap C_r = \emptyset$, lo que significa que p es un punto de emanación de un dendroide del tipo 1, pero esto contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, L tiene a lo más un punto extremos distinto de p o de a.

Como L tiene a lo más tres puntos extremos, L es un arco o es la unión de tres arcos con un punto extremo común. Notemos que en ambos casos L tiene un punto extremo distinto de p y de a. En el caso en que L es la unión de tres arcos es clara la afirmación. Si L es un arco, y p y a son sus puntos extremos entonces $L = pa$, pero sabemos que esto no es cierto, por lo tanto se cumple lo que se dijo.

Sea q el punto extremo de L distinto de p y de a, y construyamos las sucesiones $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como antes. Sin perder generalidad podemos suponer que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\partial D_n \cap pq$ consta de, exactamente, un punto, esto se sigue del primer lema técnico probado al final del capítulo de continuos. Sea t el último punto que tienen en común los arcos qp y qa. Como q es un punto extremo de L, $t \neq q$. Debido a que $lim(diam(D_n)) = 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t \notin D_m$. Como $lim q_n = q$, existe $J' \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq J'$ entonces $q_j \in D_m$. Ya que $lim a_{N(j)} = a$, existe $J \geq J'$ tal que si $j \geq J$ entonces $q_j a_{N(j)} \cap (K - D_m) \neq \emptyset$. Esto, junto con el hecho de que $q_j a_{N(j)}$ es conexo, implica que para cada $j \geq J$, $q_j a_{N(j)} \cap \partial D_m \neq \emptyset$. Para $j \geq J$, sea a'_j el primer punto del arco $q_j a_{N(j)}$ que toca a ∂D_m. Como X es compacto, podemos suponer que el límite de la sucesión $\{a'_n\}$ existe y es a'. Debido a que ∂D_m es cerrada y $ls q_j a_{N(j)} \subset L$ también lo es, resulta que $a' = \partial D_m \cap pq$. Observemos que, por construcción, $a' \in qt \subset pq \cap aq$ y que $a' \neq q$. Por otro lado, notemos que $qa' \subset li q_j a'_j \subset ls q_j a'_j$, además, también por construcción, para cada $j \geq J$, $q_j a'_j \subset \overline{D_m}$, de donde $ls q_j a'_j \subset \overline{D_m} \cap pq = qa'$. Por lo tanto, $lim q_j a'_j = qa'$.

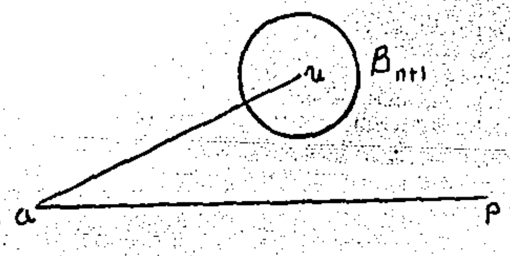
Sea $K' = \{\cup_{j\geq J} qa'_j\} \cup pa'q$. Para ver que K' es un dendroide del tipo 3, con p como su punto de emanación, basta probar que $lim(diam(qa'_j \cap pq)) = 0$ y que $lim qa'_j = qa'$. La primera igualdad se sigue de que $qa'_j \cap pq = qq_j \subset D_j$ y de que el $lim(diam(D_n)) = 0$. Para la segunda igualdad es suficiente darse cuenta de que para cada $j \geq J$, $qa'_j = qq_j \cup q_j a'_j$ y de que $lim qq_j = \{q\}$.

Ahora sí mostraremos que si un dendroide es no suave entonces contiene a un subdendroide del tipo 1 o a un dendroide del tipo 2. (véase [5])

Supongamos que X es un dendroide no suave y que no contiene a un subdendroide del tipo 1, veremos que contiene a un dendroide del tipo 2. Por lo que acabamos de ver, cada punto de X es un punto de emanación de un subdendroide del tipo 3. Sea p un punto extremo de X. Entonces existe un punto $s_0 \in X$ tal que ps_0 es el arco básico de un subdendroide del tipo 3, con p como su punto de emanación. Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base para X. Si existe un punto $x \in B_1$ tal que px es el arco básico de un subdendroide del tipo 3, con p como su punto de emanación y $ps_0 \subset px$, entonces sea $s_1 = x$; si no, sea $s_1 = s_0$. Supongamos que s_n ha sido definido de tal manera que ps_n es el arco básico de un subdendroide del tipo 3, con p como su punto de emanación y que $ps_{n-1} \subset ps_n$. Si existe $x \in B_{n+1}$ tal que px es el arco básico de un subdendroide del tipo 3, con p como su punto de emanación y que $ps_n \subset px$, entonces sea $s_{n+1} = x$; si no, sea $s_{n+1} = s_n$.

De esta manera hemos construido una cadena numerable de arcos $\{ps_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por el resultado de Borsuk mostrado en el capítulo anterior, tenemos que $P = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} ps_n}$ es un arco con p como uno de sus puntos extremos. Sea a el otro punto extremo de P. Sin perder generalidad supondremos que $lim s_n = a$. De aquí se obtiene que $lim ps_n = pa$. Como X no es suave en a, existe un punto $u \in X$ tal que au es el arco básico de un dendroide $K_u = \{\bigcup_{n=1}^{\infty} ub_n\} \cup abu$ del tipo 3, con a como su punto de emanación.

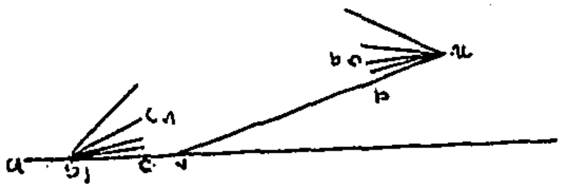
Afirmamos que $au \cap pa \neq \{a\}$, pues si $au \cap pa = \{a\}$, existiría $n \in \mathbb{N}$ tal que $u \in B_{n+1}$ y $B_{n+1} \cap pa = \emptyset$, y entonces pu sería un arco básico de un subdendroide del tipo 3, con p como su punto de emanación, y $ps_n \subset pu$, lo que implicaría que $s_{n+1} \in B_{n+1}$, lo cual contradice el hecho de que $s_{n+1} \in pa$. Así que existe $v \in X$ tal que $au \cap pa = av$.



Como $lim s_n = a$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $s_j \in av - \{v\}$. Entonces existe un dendroide $K_j = \{\bigcup_{n=1}^{\infty} s_j c_n\} \cup vcs_j$ del tipo 3, teniendo a vs_j como su arco básico y a v como su punto de emanación. Como, por construcción, $v \in s_j u$, tenemos que

$$K = \{\cup_{n=1}^{\infty} ub_n\} \cup ubcs \cup \{\cup_{n=1}^{\infty} s_j c_n\}$$

es un dendroide del tipo 2 con us_j como su arco básico.



Por lo tanto, tenemos que un dendroide es no suave si y sólo si contiene a un dendroide del tipo 1 o a un dendroide del tipo 2.

Como todo dendroide del tipo 1 es un dendroide del tipo 4 y todo dendroide del tipo 4 es no suave, resulta que:

Un Dendroide es no suave si y sólo si contiene a un dendroide del tipo 2 o a un dendroide del tipo 4.

SUAVIDAD POR ARCOS

En este capítulo se generaliza la noción de dendroide suave manteniendo la "condición de arco" y "la condición de suavidad" y quitando el requerimiento de que el continuo subyacente sea hereditariamente uncoherente. El continuo resultante, llamado suave por arcos, puede ser considerado como el análogo multidimensional de los dendroides suaves. Para los continuos de dimensión uno, los dendroides suaves y los continuos suaves por arcos, coinciden.

Sean X un continuo y p un punto de X. Diremos que X es **Suave por Arcos** *en p siempre que exista una función continua $\alpha : X \to C(X)$ que satisfaga las siguientes condiciones:*

(1) $\alpha(p) = \{p\}$;

(2) *para cada $x \in X - \{p\}$, $\alpha(x)$ es un arco de p a x;*

(3) *si $x \in \alpha(y)$ entonces $\alpha(x) \subset \alpha(y)$.*

Un continuo X es **Suave por Arcos** *si es suave por arcos en alguno de sus puntos.*

Notemos que si X es un dendroide suave en p entonces X es suave por arcos en p, pues definiendo $\alpha : X \to C(X)$ como $\alpha(x) = px$, se tiene lo afirmado, ya que si $\lim a_n = a$ entonces, por ser suave X en p, $\lim pa_n = pa$, lo que implica la continuidad de α. De aquí en adelante a $\alpha(x)$ lo denotaremos como px.

Observemos que si X es un continuo suave por arcos en p entonces podemos definir un orden parcial $\leq$ en X, diciendo que si $x, y \in X$ entonces $x \leq y$ siempre que $px \subset py$. Carruth prueba en [10] que cualquier espacio compacto parcialmente ordenado admite una **Métrica Radialmente Convexa**, *esto es una métrica d tal que si $x \leq y \leq z$ entonces $d(x,z) = d(x.y) + d(y,z)$.*

Una propiedad importante de los continuos suaves por arcos es que son contríbles. Para ver esto, tomamos X un continuo suave por arcos en el punto p, y $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney. Definimos $F : X \times [0,1] \to X$ como $F(x,t) = y$, donde y es el único punto del arco px para el que se cumple que $\mu(py) = t\mu(px)$.

Para probar que F es continua, sea $\{(x_n, t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de $X \times [0,1]$ que converge al punto (x,t) de $X \times [0,1]$. Tenemos que demostrar que la sucesión $\{F(x_n,t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto $F(x,t)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $F(x_n,t_n) = y_n$. Como X es compacto, podemos suponer que existe $y \in X$ tal que $\lim y_n = y$. Mostraremos que $F(x,t) = y$. Por la definición de F, tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\mu(py_n) = t_n\mu(px_n)$. Como X es suave por arcos en p, $\lim x_n = x$ y $\lim y_n = y$, resulta que $\lim px_n = px$ y que $\lim py_n = py$. De estas dos igualdades, de la continuidad de μ y del hecho de que $\lim t_n = t$, se obtiene que $\mu(py) = t\mu(px)$, lo que implica que $F(x,t) = y$. Por lo tanto, F es continua, y X es contraíble.

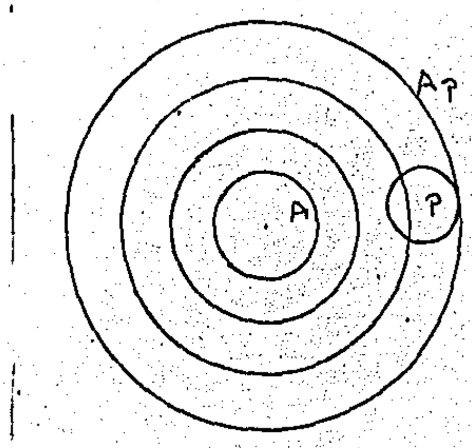
Como corolario de lo anterior, tenemos que todo dendroide suave es contraíble.

Ahora lo que vamos a hacer es dar una prueba constructiva de que $C(X)$ es suave por arcos en cada uno de sus puntos si X es localmente conexo.

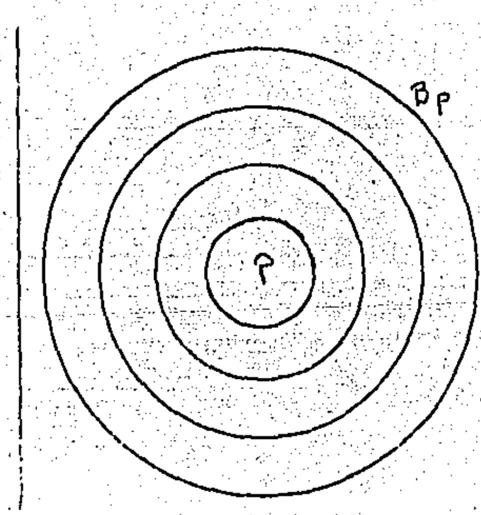
La idea de la demostración es la siguiente:

Tomemos P un elemento de $C(X)$ en el cual se verá que $C(X)$ es suave por arcos. Dada $A \in C(X)$, definiremos un arco de A a P, dándolo utilizando tres subarcos.

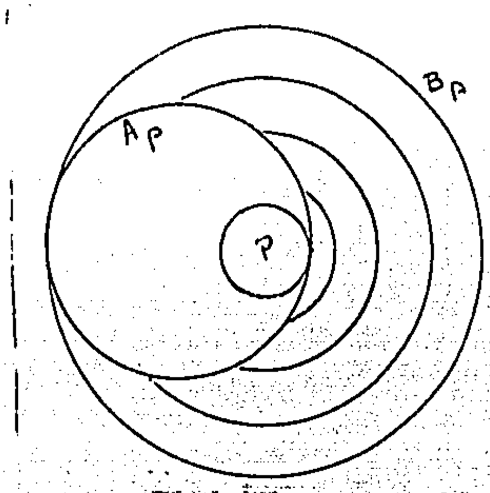
El primero consta de "inflar" a A hasta contener a P, llamemos a este conjunto A_P.



El tercero se construye "inflando" a P hasta contener a A_P, nombremos B_P al conjunto final que se obtiene.



Y para el segundo tenemos que ir de A_P hasta B_P y lo hacemos "inflando" a P y añadiéndole A_P a cada instante.



Para formalizar esto, necesitamos de varias funciones preliminares, y el concepto de métrica convexa.

Una métrica d para un continuo X es **convexa** *si cada vez que $x, y \in X$, se tiene que si $0 < s < d(x,y) = t$ entonces existe $z \in X$ tal que $d(x,z) = s$ y $d(z,y) = t - s$.*

Sea X un continuo localmente conexo, se puede suponer que su métrica es convexa (véase [11]). De aquí en adelante, X será un continuo localmente conexo, con métrica convexa d.

Definimos $K : C(X) \times [0,\infty) \to C(X)$ como

$$K(A,t) = \cup_{a\in A} B_t(a)$$

donde $B_t(a) = \{x \in X | d(a,x) \leq t\}$. Es fácil ver que $K(A,t)$ es un subconjunto cerrado de X, como éste es locamente conexo, es arcoconexo (véase [6]). Debido a que la métrica es convexa, se tiene que $B_t(a)$ es arcoconexo, lo que implica que $K(A,t)$ es conexo, pues cada $B_t(a)$ interseca a A y $A \in C(X)$. Por lo tanto, K está bien definida. Observemos que, intuitivamente, K "infla" a los elementos de $C(X)$.

Ahora veremos que si $t, s \in [0,\infty)$ y $A \in C(X)$ entonces $K(K(A,s),t) = K(A, s+t)$. Esta propiedad será útil para mostrar la continuidad de K. Es claro que $K(K(A,s),t) \subset K(A, s+t)$. Sea $x \in K(A, s+t)$. Como $x \in K(A, s+t)$, existe $a \in A$ tal que $d(x,a) \leq s+t$. Si $d(x,a) \leq s$ entonces $x \in K(A,s) \subset K(K(A,s),t)$. Supongamos que $d(x,a) > s$. Como $d(x,a) > s$, existe $z \in X$ tal que $d(x,z) = d(x,a) - s$ y $d(a,z) = s$ Esta última igualdad implica que $z \in K(A,s)$. Además, $d(z,x) = d(x,a) - s \leq s+t-s = t$, de donde $x \in K(K(A,s),t)$.

Para probar la continuidad de K, tomemos $\epsilon > 0$ y $(A,t), (B,s) \in C(X) \times [0,\infty)$ de tal forma que $\rho(A,B) < \frac{\epsilon}{3}$ y $|t-s| < \frac{\epsilon}{3}$. Como $\rho(A,B) < \frac{\epsilon}{3}$, $B \subset V_{\frac{\epsilon}{3}}(A) \subset K(A, \frac{\epsilon}{3})$, lo que implica que $K(B,s) \subset K(K(A,\frac{\epsilon}{3}),s) = K(A, \frac{\epsilon}{3}+s)$. Como $|s-t| < \frac{\epsilon}{3}$ se tiene que $\frac{\epsilon}{3} < \frac{2\epsilon}{3} + t$, de donde $K(A, \frac{\epsilon}{3}+s) \subset K(A, \frac{2\epsilon}{3}+t) = K(K(A,t), \frac{2\epsilon}{3}) \subset V_\epsilon(K(A,t))$. Por lo tanto, $K(B,s) \subset V_\epsilon(K(A,t))$. Análogamente se muestra que $K(A,t) \subset V_\epsilon(K(B,s))$. Por lo tanto, K es, de hecho, uniformemente continua.

Definimos $k : C(X) \times C(X) \to [0,\infty)$ como

$$k(A,B) = inf\{t > 0 | B \subset K(A,t)\}$$

Veamos que k es continua. Sean $\epsilon > 0$ y $(A_1,B_1), (A_2,B_2) \in C(X) \times C(X)$ tales que $\rho(A_1,A_2) < \frac{\epsilon}{2}$ y $\rho(B_1,B_2) < \frac{\epsilon}{2}$. Como $\rho(B_1,B_2) < \frac{\epsilon}{2}$,

$$B_2 \subset V_{\frac{\epsilon}{2}}(B_1) \subset K(B_1, \frac{\epsilon}{2}) \subset K(A_1, k(A_1,B_1) + \frac{\epsilon}{2})$$

Como $\rho(A_1, A_2) < \frac{\epsilon}{2}$, $A_1 \subset K(A_2, \frac{\epsilon}{2})$, lo que implica que

$$K(A_1, k(A_1, B_1) + \frac{\epsilon}{2}) \subset K(K(A_2, \frac{\epsilon}{2}), k(A_1, B_1) + \frac{\epsilon}{2}) = K(A_2, k(A_1, B_1) + \epsilon)$$

Por lo tanto, $B_2 \subset K(A_2, k(A_1, B_1) + \epsilon)$, lo que implica que $k(A_2, B_2) \leq k(A_1, B_1) + \epsilon$. Por lo tanto, $|k(A_1, B_1) - k(A_2, B_2)| < \epsilon$. Mostrando que k es una función uniformemente continua.

Sea P un elemento fijo de $C(X)$. Vamos a definir dos funciones j y m que nos serán útiles después. Sean $j, m : C(X) \to [0, \infty)$ definidas como

$$j(A) = k(A, P) \qquad y \qquad m(A) = k(P, K(A, k(A, P))).$$

Notemos que de la continuidad uniforme de k se sigue la continuidad uniforme tanto de j como de m.

Ahora supongamos que tenemos $f : C(X) \times [0, \infty) \to C(X)$ una función uniformemente continua y $h : C(X) \to [0, \infty)$ una función continua. Entonces la función $g : C(X) \to C(C(X))$ definida como

$$g(A) = \{f(A, t) | t \in [0, h(A)]\}$$

es una función continua.

Para mostrar que g está bien definida y que es continua, definimos $l : C(X) \times [0, \infty) \to C(C(X))$ como

$$l(A,t) = \{f(A,t) | x \in [0,t]\}.$$

l está bien definida puesto que $A \times [0,t]$ es un continuo. Veamos que l es continua en $(A,t) \in C(X) \times [0,\infty)$. Sea $\epsilon > 0$, como f es uniformemente continua, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para $(B,s) \in C(X) \times [0,\infty)$,

si $\rho(A,B) < \delta$ y $|t-s| < \delta$ entonces $\rho(f(A,t), f(B,s)) < \epsilon$.

Como δ sólo depende de ϵ, se tiene que si tomamos $s' \leq s$ y $t' \leq t$ de tal manera que $|t'-s'| < \delta$ entonces $\rho(f(A,t'), f(B,s')) < \epsilon$, lo que implica que

$$\sigma(l(A,t), l(B,s)) < \epsilon$$

Así que, l es uniformemente continua.

Observemos que si $A \in C(X)$ entonces

$$g(A) = (l \circ 1_{C(X)} \times h)(A,A)$$

Por lo tanto, g está bien definida y es continua. Aplicaremos este resultado para obtener tres funciones continuas que, en conjunto, nos definirán un arco del punto P, que ya habíamos tomado, a un punto $A \in C(X)$.

Definimos

$$\alpha_i : C(X) \longrightarrow C(C(X)) \qquad (i \in \{1,2,3\})$$

como

$$\alpha_1(A) = \{K(A,t) | t \in [0, j(A)]\};$$

$$\alpha_2(A) = \{K(A, j(A)) \cup K(P,t) | t \in [0, m(A)]\};$$

$$\alpha_3(A) = \{K(P,t) | t \in [0, m(A)]\}$$

Debido a la definición de K, es claro que α_i, $i \in \{1,2,3\}$ es un arco ordenado en $C(X)$ o un sólo punto.

Ahora vamos a definir

$$\alpha : C(X) \longrightarrow C(C(X))$$

como

$$\alpha(A) = \alpha_1(A) \cup \alpha_2(A) \cup \alpha_3(A).$$

Como $\alpha_i(A) \in C(C(X))$, $i \in \{1,2,3\}$, se tiene que $\alpha(A) \in C(C(X))$.

Mostraremos que $C(X)$ es suave por arcos en P, probando que α es una función continua que satisface las tres condiciones de la definición.

La continuidad de α se sigue de la continuidad de α_i, $i \in \{1,2,3\}$, y de la continuidad de la unión. Es claro que $\alpha(P) = \{P\}$. Sea $A \in C(X)$ tal que $A \neq P$, y sea $B \in \alpha_1(A) \cap \alpha_2(A)$. Como $B \in \alpha_1(A)$, existe $t_1 \in [0, j(A)]$ tal que $B = K(A, t_1)$. Ya que $B \in \alpha_2(A)$, existe $t_2 \in [0, m(A)]$ tal que $B = K(A, j(A)) \cup K(P, t_2)$, de aquí que $P \subset B = K(A, t_1)$, por lo tanto, $t_1 = j(A)$ y $\alpha_1(A) \cap \alpha_2(A) = \{K(A, j(A))\}$. De aquí que si $A \neq K(P, m(A))$ entonces $\alpha_1(A) \cup \alpha_2(A)$ es un arco ordenado de A a $K(P, m(A))$; y si $A = K(P, m(A))$ entonces $\alpha_1(A) \cup \alpha_2(A) = \{K(P, m(A))\}$.

Supongamos ahora que $B \in (\alpha_1(A) \cup \alpha_2(A)) \cap \alpha_3(A)$. Como $B \in \alpha_3(A)$, existe $t_3 \in [0, m(A)]$ tal que $B = K(P, t_3)$, así que $P \subset B$. Si $B \in \alpha_1(A)$ entonces $B = K(A, j(A))$. Debido a que $K(P, t_3) = K(A, j(A))$ se tiene que $t_3 = m(A)$. Si $B \in \alpha_2(A)$ entonces existe $t_4 \in [0, m(A)]$ tal que $B = K(A, j(A)) \cup K(P, t_4)$. Ya que $K(A, j(A)) \cup K(P, t_4) = K(P, t_3)$, otra vez se tiene que $t_3 = m(A)$. De aquí que $(\alpha_1(A) \cup \alpha_2(A)) \cap \alpha_3(A) = \{K(P, m(A))\}$. Como $\alpha_3(A)$ es un arco de P a $K(P, m(A))$, concluimos que $\alpha(A)$ es un arco de A a P.

Sólo resta verificar la tercera condición de la definición de suavidad por arcos. Sean $A \in C(X)$ y $B \in \alpha(A)$. Si $B \in \alpha_1(A)$ entonces existe $t_1 \in [0, j(A)]$ tal que $B = K(A, t_1)$. Afirmamos que $j(B) = j(A) - t_1$, para verlo, observemos que para cada $t \in [0, \infty)$, $K(B, t) = K(A, t_1 + t)$. Así que, si $t_1 + t < j(A)$ entonces $P \not\subset K(B, t)$, pero

$$P \subset K(A, j(A)) = K(A, t_1 + j(A) - t_1) = K(B, j(A) - t_1)$$

.

Por lo tanto, $j(B) = j(A) - t_1$. Así que si $t \in [0, j(B)]$ entonces $K(B, t) = K(A, t_1 + t) \in \alpha_1(A)$, de donde $\alpha_1(B) \subset \alpha_1(A)$. Para probar que $\alpha_2(B) = \alpha_2(A)$ y que $\alpha_3(B) = \alpha_3(A)$, basta mostrar que $K(B, j(B)) = K(A, j(A))$ y que $m(B) = m(A)$, respectivamente. Ya hemos visto que $j(B) = j(A) - t_1$, así que

$$K(B, j(B)) = K(A, t_1 + j(B) - t_1) = K(A, j(A)).$$

Como $K(B, j(B)) = K(A, j(A))$, tenemos que $m(B) = m(A)$.

Si $B \in \alpha_2(A)$ entonces para alguna $t_2 \in [0, m(A)]$, $B = K(A, j(A)) \cup K(P, t_2)$. Como $P \subset B$, $j(B) = 0$, así que $\alpha_1(B) = \{B\} \subset \alpha_2(A)$. Afirmamos que $m(B) = m(A)$. Como $B = K(A, j(A)) \cup K(P, t_2)$, $K(A, j(A)) \subset K(P, m(A))$ y $t_2 \leq m(A)$, se sigue que $B \subset K(P, m(A))$. Ya que $j(B) = 0$, $K(B, j(B)) = B$; de donde $m(B) \leq m(A)$. Debido a que $K(A, j(A)) \subset B = K(B, j(B))$, se tiene que $m(A) \leq m(B)$. Por lo tanto, $m(A) = m(B)$. Si $t \in [0, m(B)]$ entonces

$$K(B,j(B)) \cup K(P,t) = B \cup K(P,t) = K(A,j(A)) \cup K(P,t_2) \cup K(P,t)$$

De aquí que, si $t \in [0,t_2]$,

$$K(B,j(B)) \cup K(P,t) = K(A,j(A)) \cup K(P,t_2) = B$$

y si $t \in [t_2,m(B)]$ entonces

$$K(B,j(B)) \cup K(P,t) = K(A,j(A)) \cup K(P,t)$$

y así se sigue que $\alpha_2(B) \subset \alpha_2(A)$. Como $m(B) = m(A)$, $\alpha_3(B) = \alpha_3(A)$.

Finalmente, supongamos que $B \in \alpha_3(A)$. Entonces para alguna $t_3 \in [0,m(A)]$ se tiene que $B = K(P,t_3)$. Ya que $P \subset B$, $j(B) = 0$, de donde $\alpha_1(B) = \{B\} \subset \alpha_3(A)$. Debido a que $K(P,t_3) = B = K(B,j(B))$, resulta que $t_3 = m(B)$. Si $t \in [0,m(B)]$ entonces

$$K(B,j(B)) \cup K(P,t) = B \cup K(P,t) = K(P,t_3) \cup K(P,t) = K(P,t_3) = B.$$

De esta manera se tiene que $\alpha_2(B) \subset \alpha_3(A)$. Como $m(B) = t_3 \in [0,m(A)]$, es claro que $\alpha_3(B) \subset \alpha_3(A)$. Por lo tanto, $\alpha(B) \subset \alpha(A)$. Y, por lo tanto, $C(X)$ es suave en P.

BIBLIOGRAFIA

[1] K. Borsuk. A Theorem on Fixed Points, *Bull. Acad. Polon. Sci.* 2(1954).

[2] J.J. Charatonik and C. Eberhart. On Smooth Dendroids, *Fund. Math.* 67(1970).

[3] D.W. Curtis and R.M. Schori. Hyperspaces of Peano Continua are Hilbert Cubes, *Fund. Math.* 101(1978).

[4] J.T. Goodykoontz Jr. Arc-Smoothness in Hyperspaces, *Topology and its Applications* 15(1983).

[5] E.E. Grace and E.J. Vought. Weakly Monotone Images of Smooth Dendroids are Smooth, *Preprint.*

[6] J. Hocking and G. Young. Topology, *Reading, Mass. Addison-Wesly 1961.*

[7] J.L. Kelley. Hyperspaces of a Continuum, *Trans. Amer. Math. Soc.* 52(1942).

[8] K. Kuratowski. Topology, Vol. 2, *New York, Academic Press, 1968.*

[9] S.B. Nadler Jr. Hyperspaces of Sets, *New York, Marcel-Dekker inc. 1978.*

[10] J.H. Carruth. *A Note on Partially Ordered Compacta, Pacific J. Math.* 24(1968).

[11] E.E. *Moise*, **Grille Decomposition and Convexification Theorems for Compact Locally Connected Continua**, *Bull. Amer. Math. Soc. 55(1949).*