9

25

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO HISTORICO Y PEDAGOGICO DEL TEXTO ANALYSE DES INFINIMENT PETITS ... DEL MARQUES DE L'HOSPITAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

RODRIGO CAMBRAY NUÑEZ

1 9 9 5

FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

ESTUDIO HISTORICO Y PEDAGOGICO DEL TEXTO ANALYSE DES INFINIMENT PETITS... DEL MARQUES DE L'HOSPITAL

realizado por RODRIGO CAMBRAY NUÑEZ

con número de cuenta 8351579-2 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. ALEJANDRO RICARDO GARCIADIEGO DANTAN
Propietario	M. en C. JOSE RAFAEL MARTINEZ ENRIQUEZ
Propietario	M. en C. CARLOS ANTONIO ULIN JIMENEZ
Suplente	M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA
Suplente	DR. HECTOR MENDEZ LANGO

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

Tabla de contenido

Introducción

La obra *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* del Marqués de l'Hospital fue el primer libro de texto sobre análisis infinitesimal. Se publicó en 1696, durante el periodo en que se exploraba y desarrollaba la nueva rama de las matemáticas llamada cálculo diferencial e integral. Con este texto se formaron los primeros matemáticos en la geometría infinitesimal siguiendo la tradición leibniciana. Durante algún tiempo se convirtió en el único camino accesible al cálculo diferencial que era una 'especie de misterio' o una 'ciencia cabalística'.

El objetivo de este trabajo es resaltar la importancia del texto *Analyse des infiniment petits* desde los puntos de vista histórico y pedagógico. Por lo tanto es indispensable tener una idea clara de los antecedentes inmediatos del descubrimiento del cálculo. Este tema se trata en el primer capítulo de esta tesis; en él se explica lo que debe entenderse por análisis infinitesimal, se incluyen las dos generalizaciones más sobresalientes de la resolución del problema del trazado de tangentes a curvas: la de Fermat y la de Descartes. Aunque el texto de l'Hospital no trata sobre cálculo integral, se ha incluido parte del 'Tratado de los senos de un cuadrante de círculo' de Pascal, soslayado por algunos autores de libros sobre historia del cálculo (*v. gr.* González Urbaneja 1992), dada la trascendencia que tuvo este manuscrito para Leibniz —según lo señaló él mismo— en la invención de su cálculo.

En el segundo capítulo se presenta un breve resumen de las investigaciones de Leibniz que lo condujeron al descubrimiento de esta nueva rama de las matemáticas.

El tercer capítulo trata sobre el contexto en el que l'Hospital decidió revelar en un libro de texto los secretos del análisis infinitesimal.

El cuarto capítulo presenta la estructura del célebre texto *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*, los conceptos básicos y los resultados más notables que contiene.

Para finalizar el relato histórico de este periodo de descubrimiento y primeros pasos en el desarrollo y exploración del cálculo, en el capítulo 5 se explica en qué consistió el fuerte y acalorado debate que se dio de 1700 a 1706 entre dos grupos de matemáticos, miembros de la *Académie des Sciences* de Paris, sobre la admisibilidad lógica del cálculo leibniciano. Fue central en este debate el texto del Marqués de l'Hospital no sólo porque quienes tomaron parte habían aprendido en él el nuevo algoritmo, sino porque las discusiones giraron en torno a la manera en que l'Hospital había dado a conocer la estructura de este nuevo conocimiento y las bases sobre las que se apoyaba.

[...] análisis es un método de tomar aquello que se busca como si fuera admitido y de pasar de ello a través de sus consecuencias a algo que se admite como un resultado de la síntesis; pues en análisis suponemos aquello que se busca como que ya está hecho e investigamos qué es aquello de lo que resulta, y nuevamente cuál es la causa antecedente de esto, y así hasta que, retomando nuestros pasos, alumbramos algo ya conocido o con el rango de primer principio; y a tal método llamamos análisis, como una solución hacia atrás [Pappus 1939, 597 *ss.*].

Capítulo 1

Análisis infinitesimal

§1.1 Introducción

Las técnicas griegas de descubrimiento de resultados matemáticos, desafortunadamente, se habían perdido para cuando los europeos del siglo XVI se preocuparon por empezar a investigarlas. La única obra disponible que contenía algunos indicios sobre ello era la *Collectio Mathematica* de Pappo (*fl.* 300). Durante el siglo XVII, en los esfuerzos por redescubrir tales métodos, los más destacados eruditos fueron Pierre de Fermat (1601-1665) y René Descartes (1596-1650).

Fermat tuvo como proyecto reconstruir la obra de Apolonio *Plane Loci* a partir de las anotaciones y lemas de Pappo. En Bordeaux, Fermat se había familiarizado con las nuevas ideas de simbolización algebraica y con el programa de François Viète (1540-1603) de descubrir y entender el *análisis* secreto de los matemáticos griegos, con los estudiantes de éste. Viète creó el llamado análisis especioso, que consiste en un cálculo sobre símbolos o especies que representaban magnitudes geométricas o aritméticas cualesquiera; intentó identificar el análisis griego con la nueva álgebra, la cual trató de mostrar con claridad y simplicidad.

El término *análisis* (ἀνάλυσις) significa "distinción y separación de las partes de un todo hasta llegar a conocer sus principios o elementos" [*Real Academia Española* 1992, 134]. *Analítico* proviene del griego *analytikos* que se deriva del verbo *analyein* y quiere decir "separar, descomponer, resolver en sus partes" [Reese 1991, 13]. Con mayor precisión, se dice que la estrategia de resolución de problemas que los griegos llamaron *análisis* se deriva de *árnàpalin lysin* que significa "solución hacia atrás" [Grabiner 1995, 85]. Así, esta estrategia consiste en diseccionar un problema en las partes que lo constituyen; se parte de la suposición de que el problema bajo estudio ya está resuelto, y se procede a determinar las condiciones que han conducido a la solución supuesta; se estudian las partes que hacen posible la hipótesis de que el problema está resuelto.

En su obra *In Artem Analyticem Isagoge* (1591), Viète comenta acerca de los métodos analíticos usados por los antiguos griegos para descubrir teoremas:

> Existe cierto camino para investigar la verdad en matemáticas que se dice fue Platón el primero en haberlo descubierto. Teón lo llamó análisis, el cual él definió como suponiendo que lo que se busca estuviera admitido [y trabajando] a través de las consecuencias [de la suposición] a lo que se admite como verdadero, en oposición a la síntesis, que es suponiendo lo que [ya] está admitido [y trabajando] a través de las consecuencias [de esa suposición] para llegar a eso que se busca y entenderlo.
>
> Aunque los antiguos propusieron sólo dos tipos de análisis, *zetética* y *porística*, a los que mejor se aplica la definición de Teón, he añadido un tercero que puede ser llamado rética o exegética. Es propiamente zetética por el que se establece una ecuación o proporción entre un término que se tiene que encontrar y los términos dados;[1] porística por el que se verifica la verdad de un teorema establecido por medio

1. Transformación de un problema en una ecuación que relaciona a la incógnita con los varios elementos conocidos.

> de una ecuación o proporción,[2] y exegética por el que se determina el valor del término desconocido en una ecuación o proporción dada.[3] Por lo tanto, todo el arte analítico, suponiendo esta triple función suya, puede ser llamado la ciencia del descubrimiento correcto en matemáticas [Viète 1983, 11-12].

§1.2 Análisis infinitesimal

En el siglo XVII, se le da por antonomasia el nombre de *análisis* al proceso de diseccionar un todo en sus partes, que son consideradas como infinitamente pequeñas e infinitas en cantidad, para luego sintetizar o reconstruir ese todo a partir de las partes. A estas partes constituyentes se les denominó, en distintos momentos de su evolución histórica, indivisibles, infinitésimos, diferencias, diferenciales, etc. En un problema de áreas, por ejemplo, un *indivisible* es una línea, algo sin área; mientras que un *infinitésimo* se concibe como una tira infinitamente exigua con cierta área, aunque infinitamente pequeña [Fauvel y Gray 1988, 375]. El uso de indivisibles e infinitésimos tiene sus raíces en las matemáticas griegas clásicas. Bonaventura Cavalieri (1598-1647) desarrolló con detalle el método de indivisibles, quien consideraba que un objeto geométrico estaba formado por objetos de una dimensión menor: las regiones planas por líneas y las figuras sólidas por superficies, por ejemplo. Johann Kepler (1571-1630) usó el método de infinitésimos, y consideraba que una figura estaba formada por figuras 'muy pequeñas' (infinitesimales) de la misma dimensión [Katz 1993, 436]. Entonces, los términos 'indivisible', 'infinitésimo', 'diferencia', 'diferencial' (estos dos últimos se explican más adelante) no deben tomarse como sinónimos. Así, este análisis recibió el calificativo de *infinitesimal*.

La rama de las matemáticas llamada *análisis infinitesimal* se formó principalmente a partir de dos vertientes de métodos de resolución de problemas, ahora conocidos como métodos integrales y la de los métodos diferenciales. Los llamados métodos integrales se usaron

2. Exploración de la verdad de un teorema propuesto, por medio de la manipulación simbólica apropiada.
3. Es el arte de transformar la ecuación encontrada por medio de la zetética para determinar un valor de la incógnita.

para calcular áreas, volúmenes, centros de gravedad y longitud de curvas, principalmente. Desde la antigüedad griega se habían resuelto este tipo de problemas enmarcados ahora en el cálculo integral.

Los métodos que propiciaron la evolución del concepto de derivada se usaban para resolver problemas de trazado de líneas rectas tangentes a curvas. Los antiguos griegos se basaban en la propiedad de que la tangente debe *tocar* a la curva en un único punto. Determinaron tangentes a las secciones cónicas (círculo, parábola, elipse e hipérbola) y a la espiral de Arquímedes [Struik 1969, 222].

Tres tipos de problemas que corresponden ahora al cálculo diferencial fueron atacados durante el siglo XVII:

1. Determinación de las tangentes a curvas;
2. Búsqueda de máximos y mínimos de una curva, y
3. Búsqueda de las condiciones de existencia de raíces múltiples de las ecuaciones algebraicas [Ríbnikov 1987, 182].

Esto corresponde a la etapa de uso de las cuatro que ha distinguido Grabiner [1983, 195] de la evolución histórica del actual concepto de derivada.[4]

Las aportaciones de Fermat y de Descartes, bajo el enfoque analítico, a las primeras generalizaciones en la resolución del problema del trazado de tangentes a curvas, enmarcado ahora en el cálculo diferencial, corresponden a dicha etapa.

§1.3 Método de la subtangente de Pierre de Fermat

Fermat desarrolló métodos generales para la determinación de máximos y mínimos. Su memoria *Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum* la preparó entre 1629 y 1636 y la envió a Marin Mersenne (1588-1648) en 1637.

A continuación transcribo íntegra esta memoria, a partir de la versión en inglés presentada por Struik:

4. Las etapas que ha señalado Grabiner son, en orden cronológico: 1) uso; 2) descubrimiento; 3) exploración y desarrollo, y 4) definición.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

nes: $be \sim 2ae + e^2$. Al dividir todos los términos entre e: $b \sim 2a + e$. Al eliminar e: $b = 2a$. Para resolver el problema debemos tomar por consiguiente la mitad de b.

Difícilmente podemos esperar un método más general.

SOBRE LAS TANGENTES DE CURVAS

Usemos el método precedente para encontrar la tangente en un punto dado de una curva.

Consideremos, por ejemplo, la parábola BDN (**Fig. 1.2**) con vértice D y diámetro DC; sea B un punto sobre ella en el cual se tiene que trazar la línea BE tangente a la parábola y que intersecta al diámetro en E.

Escogemos sobre el segmento BE un punto O en el cual trazamos la ordenada OI; también construimos la ordenada BC del punto B. Tenemos entonces:

$$\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2},$$

dado que el punto O es exterior a la parábola. Pero

$$\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2},$$

en vista de la semejanza de triángulos. Por lo tanto,

$$\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}.$$

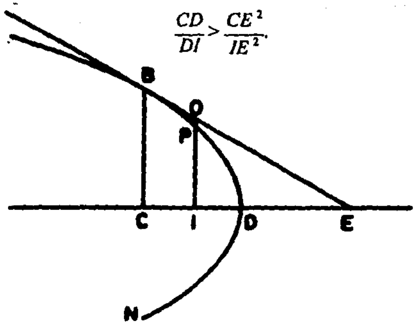


Fig. 1.2

Ahora, como el punto B está dado, consiguientemente la ordenada BC, y por consiguiente el punto C, y por lo tanto también CD. Sea $CD = d$ esta cantidad dada. Póngase $CE = a$ y $CI = e$; obtenemos

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}.$$

Al eliminar las fracciones: $da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e$.

Adecuaremos entonces, siguiendo el método precedente; al eliminar los términos comunes encontramos: $de^2 - 2dae \sim - a^2e$, o, lo cual es lo mismo, $de^2 + a^2e \sim 2dae$. Dividamos todos los términos entre e: $de + a^2 \sim 2da$. Al eliminar de, queda $a^2 = 2da$ y por consiguiente $a = 2d$.

Así, hemos probado que CE es el doble de CD, el cual es el resultado.

Este método nunca falla y se podría extender a un número de problemas hermosos; con su auxilio, hemos encontrado los centros de gravedad de figuras acotadas por líneas rectas o curvas, así como los de sólidos, y un número de otros resultados que podemos tratar en otra parte si tenemos tiempo para ello.

Previamente he discutido ampliamente con el señor de Roberval la cuadratura de áreas acotadas por curvas y líneas rectas así como la razón que los sólidos que generan tienen con los conos de la misma base y la misma altura [Struik 1969, 223-224].

Una pregunta obvia sobre este método es: ¿cómo se puede dividir entre e y después eliminar lo que queda multiplicado por e? Fermat no da explicación adicional sobre esto; no llamó a e 'infinitamente pequeño', no dijo que se 'desvanecía' y mucho menos habló de 'límites'. Todo lo que comentó sobre esto es el penúltimo párrafo de su escrito sobre las tangentes. Según él mismo:

Mientras meditaba sobe el método de la síncrisis y de la anástrofe de Viète y exploraba cuidadosamente su uso en el descubrimiento de la estructura de ecuaciones correlativas, me vino a la mente un nuevo método que se podía derivar de aquél para encontrar máximos y mínimos por medio del cual se pueden eliminar fácilmente algunas dudas que tienen que ver con los diorismos que tanta dificultad han causado a la geometría antigua y a la moderna [citado en Mahoney 1994, 148].

Así que las fuentes que estimularon a Fermat para la creación de su algoritmo fueron la teoría de ecuaciones de Viète y el antiguo problema de los *diorismos*.

Viète había mostrado que, en la ecuación $bx - x^2 = c$, que representa el problema de dividir un segmento b en dos partes de modo que su producto sea c, si sus raíces son x_1 y x_2,

$$bx_1 - x_1^2 = bx_2 - x_2^2 \text{ o } bx_1 - bx_2 = x_1^2 - x_2^2,$$

y por lo tanto $b = x_1 + x_2$. Esto es, la suma de las raíces da b. Y por Euclides se sabía que el máximo valor posible de c es $b^2/4$. Entonces, lo que Fermat pensaba, a partir de la situación geométrica, era que la ecuación siempre tenía dos soluciones, incluso para el valor máximo, cuando las dos tienen el mismo valor.[6] Inicialmente, en lugar de usar e, Fermat trabajó directamente con $x_1 - x_2$ y la modificación la hizo para cuando resultara muy complicado dividir un polinomio entre $x_1 - x_2$. No sintió él que estuviera dividiento entre cero, pues consideraba que aunque $x_1 - x_2$ fuera igual a cero, ambas raíces eran distinguibles.

§1.4 Método del círculo de René Descartes

Poco antes de que se conociera el trabajo de Fermat que se acaba de exponer, René Descartes había publicado el mismo año (1637) su obra *Discours de la Méthode* en la que incluía como una especie de apéndice *La Géométrie*, formada por tres libros. En el segundo libro, sobre la naturaleza de las líneas curvas, aparece el llamado 'método del círculo' o 'método de la subnormal' de Descartes para determinar la tangente a una línea curva, construyendo previamente la recta normal. A continuación transcribo las porciones en las que se explica este método, el cual es aplicable sólo a curvas cuya naturaleza esté expresada por un polinomio. Manifestó Descartes en este escrito su justo inmenso orgullo por el descubrimiento de este método. Según correspondencia de Descartes, confesó que el método de Fermat era más sencillo que el suyo en múltiples aplicaciones [citado en l'Hospital 1988, viii-ix].

> Finalmente, y en relación con todas las otras propiedades atribuibles a las líneas curvas, no dependen sino de los ángulos que estas curvas for-

6. Johann Kepler había escrito en su *Nova Stereometria Doliorum Vinariorum* (1615) que "cerca de un máximo, los decrementos en ambos lados son inicialmente imperceptibles" [citado en Katz 1993, 430].

men con otras líneas. Pero, cuando puedan trazarse líneas rectas que las corten formando ángulos rectos, en los puntos en que hay intersección formada por aquéllas con las que forman ángulos que se desean medir, o, lo que estimo como lo mismo, en que cortan sus contingentes, la dimensión de los ángulos no es más difícil de conocer que si se formasen entre o por dos líneas rectas. Por ello estimo haber expuesto cuanto se requiere en un estudio introductorio para realizar el análisis de las curvas, cuando haya desarrollado el procedimiento para trazar líneas rectas que formen ángulos rectos sobre cualesquiera de los puntos de aquellas que se elijan. *Me atrevo a afirmar que éste es el problema cuyo conocimiento es más útil y no sólo el más general que yo conozco, sino también el que más he deseado llegar a conocer* [énfasis añadido].

Procedimiento general para hallar líneas rectas que corten las curvas dadas o sus tangentes, formando ángulos rectos

Sea CE la línea curva y que sea preciso trazar por el punto C una línea recta que forme ángulos rectos. Supongo solucionado el problema y que tal línea es CP, la cual prolongo hasta el punto P en el cual alcanza la línea recta GA con la que supongo que se relacionan todos los puntos de la línea CE. De modo que siendo MA o $CB = y$, CM o $BA = x$, puedo establecer una ecuación que indica la relación entre x e y. Se establece que $PC = s$, $PA = v$, por lo que $PM = v - y$; pero en virtud de que el triángulo PMC es un triángulo rectángulo, tenemos que s^2, el cuadrado de la hipotenusa, es igual a $x^2 + v^2 - 2vy + y^2$, la suma de los cuadrados de los dos lados. Es decir, que:

$$x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}, \text{ o también que } y = v + \sqrt{s^2 - x^2}.$$

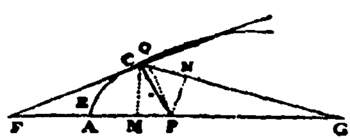


Fig. 1.3

Mediante esta ecuación puedo eliminar una de las dos cantidades indeterminadas, x o y, de la otra ecuación, de aquella que expresa la relación de los puntos de la línea curva CE con los de la recta GA [Descartes 1987, 315-317].

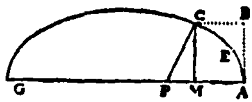


Fig. 1.4

Hallada tal ecuación no debe utilizarse para determinar x, y o z, que son dadas, puesto que el punto C ha sido dado, sino que debe utilizarse para hallar v o s, que determinan el punto exigido, P. A tal efecto, es preciso considerar que si este punto P cumple las condiciones exigidas, el círculo con centro en P y que pasa por C, tocará pero no cortará la curva CE; pero si el punto P se encuentra a mayor o menor distancia de A de lo que debe estar, este círculo cortará la curva no sólo en C, sino también y necesariamente en algún otro punto. Asimismo, es preciso considerar que si este círculo corta la línea curva CE, la ecuación por la que se halla el valor de x e y o cualquiera otra, suponiendo que conozcamos PA y PC, debe tener necesariamente dos raíces diferentes. Supóngase, por ejemplo, que el círculo corta la curva en los puntos C y E; trácese EQ paralela a CM; por otra parte vemos que x e y convienen por igual a EQ y a QA del mismo modo que a CM y MA, ya que PE es igual a PC, pues son dos radios. Si buscamos EQ y QA, suponiendo dadas PE y PA, tendremos la misma ecuación que si hubiésemos buscado CM y MA, suponiendo que PC y PA sean dados.

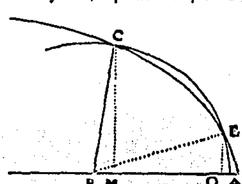


Fig. 1.5

> Se deduce de ello que el valor de x, de y o de cualquier otra cantidad supuesta debe ser doble, es decir, la ecuación tendrá dos raíces distintas entre sí; si deseamos conocer el valor de x, una de estas raíces será CM y la otra EQ; si se desea conocer y, una raíz será MA y la otra QA. Es verdad que si E no se encuentra en el mismo lado de la curva que C, entonces solamente una de ellas será la raíz verdadera y la otra deberá ser opuesta o menor que cero; asimismo, cuanto más próximos se encuentren estos dos puntos, C y E, menor será la diferencia entre estas dos raíces; cuando ambos puntos coincidan serán iguales. Este sería el caso en que el círculo trazado por C toca la curva CE sin llegar a cortarla [Descartes 1987, 319-320].

Para la mejor comprensión de este método, usando un sistema coordenado rectangular, determinemos la subnormal a la parábola $y^2 = kx$ en un punto $C(x_0, y_0)$ sobre ella:

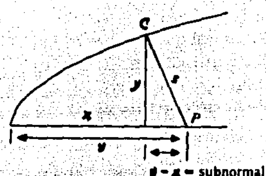


Fig. 1.6

La ecuación de la circunferencia con centro en $P(v, 0)$ y radio s es

$$(x - v)^2 + y^2 = s^2 \text{ o } x_0^2 - 2x_0 v + v^2 + kx_0 - s^2 = 0.$$

Rescribiéndola como ecuación de segundo grado en x_0,

$$x_0^2 + (k - 2v)x_0 + (v^2 - s^2) = 0,$$

la cual tendrá sus dos raíces iguales si

$$\Delta = (k - 2v)^2 - 4(v^2 - s^2) = 0$$

y serán

$$x_0 = \frac{2v - k}{2} \text{ o } v - x_0 = \frac{1}{2}k,$$

valor de la subnormal. Nótese que la subnormal a una parábola en cualquiera de sus puntos es constante: la mitad del parámetro.

Con el trabajo de Descartes finalmente fue posible identificar a las curvas geométricas con ecuaciones algebraicas. *La Géométrie* es el texto más antiguo que se puede leer sin dificultad para entender el empleo matemático de los signos tal como hoy se hace (excepto que en lugar de '=' usaba ' ' y en lugar de la segunda potencia, 'x^2', usaba 'xx').

§1.5 Blaise Pascal y los infinitesimales

El breve tratado de Blaise Pascal (1623-1662), *Traité des sinus du quart de cercle* (1659), porciones del cual se presentan enseguida, fue trascendental en la invención del cálculo de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Éste fue conducido a estudiar los escritos de Pascal por el holandés Christiaan Huygens (1629-1695). Particularmente, el diagrama de la **Fig. 1.7** atrajo la atención de Leibniz y fue fundamental en sus esclarecimientos (véase §2.4).

SOBRE LOS SENOS DE UN CUADRANTE DE CÍRCULO

> Sea ABC (**Fig. 1.7**) un cuadrante de un círculo cuyo radio AB se considere como eje y el radio perpendicular AC como base; sea D cualquier punto en el arco del cual se trace el seno DI sobre el radio AC, y sea DE la tangente sobre la cual se tomen donde se quiera los puntos E, a partir de los cuales se tracen las perpendiculares ER sobre el radio AC.
>
> Afirmo que el rectángulo formado por el seno DI y la tangente EE es igual al rectángulo formado por la porción de la base (comprendida entre las paralelas) y el radio AB [Pascal 1963, 155].[7]

Esta afirmación puede considerarse un lema cuya demostración es inmediata y brevemente la da Pascal:

> Pues el radio AD es al seno DI como EE es a RR, o a EK, lo cual es evidente debido a la semejanza de los triángulos rectángulos DIA y EKE, siendo el ángulo EEK o EDI igual al ángulo DAI.

7. Pascal, *Ouvres complètes*, édition du Seuil, 1963 [citado en Leibniz 1989, 17].

Proposición I

La suma de los senos de cualquier arco de un cuadrante es igual a la porción de la base entre los senos extremos, multiplicados por el radio [Struik 1969, 239].

En esta primera proposición Pascal considera que la 'suma de los senos' *es* la suma de los rectángulos infinitesimales uno de cuyos lados es cada seno *DI* y el otro el arco infinitesimal representado por la tangente *EE*. Pascal generaliza este resultado de manera inmediata y presenta otras tres proposiciones para obtener las sumas de potencias de los senos *DI*, esto es, DI^2, DI^3, etc., y afirma al final de la cuarta proposición: 'y así hasta infinito'.

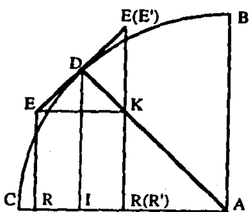


Fig. 1.7

Preparación para la demostración

Divídase cualquier arco *BP* en un número infinito de partes por los puntos *D* (**Fig. 1.8**) a partir de los cuales trazamos los senos *DO*, *DI*, etcétera. [...]; tomemos en el otro cuadrante del círculo el segmento *AQ*, igual a *AO* (el cual mide la distancia entre los senos extremos del arco, *BA* y *PO*); divídase *AQ* en un número infinito de partes iguales por los puntos *H*, en los que se trazarán las ordenadas *HL* [*Ibid.*, 240].

Demostración de la Proposición I

Afirmo que la suma de los senos *DI* (cada uno multiplicado, por supuesto, por uno de los pequeños arcos iguales *DD*) es igual al segmento *AO* multiplicado por el radio *AB*.

De hecho, dibujemos en todos los puntos *D* las tangentes *DE* (**Fig. 1.7**), cada una de las cuales intersecta a su vecina en los puntos *E*; si bajamos las perpendiculares ER es evidente que cada seno DI multiplicado por la tangente EE es igual a cada distancia RR multiplicada por el radio AB. Por lo tanto, EE es igual a cada distancia RR multiplicada por el radio AB. Por lo tanto, todos los cuadriláteros formados por los senos DI y sus tangentes EE (las cuales son todas iguales una a la otra) son iguales a todos los cuadriláteros formados por todas las porciones RR con el radio AB; es decir (dado que una de las tangentes EE multiplica a cada uno de los senos, y dado que el radio AB multiplica a cada una de las distancias), la suma de los senos DI, cada uno de ellos multiplicado por AB. Pero cada tangente EE es igual a cada uno de los arcos iguales DD. Por lo tanto la suma de los senos multilicada por uno de los pequeños arcos iguales es igual a la distancia AO (**Fig. 1.8**) multiplicada por el radio.

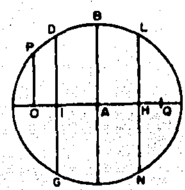


Fig. 1.8

Nota. No debe causar sorpresa cuando afirmo que todas las distancias RR son iguales a AO y análogamente que cada tangente EE es igual a cada uno de los pequeños arcos DD, dado que es bien sabido que, aunque esta igualdad no es verdadera cuando el número de los senos es finito, sin embargo la igualdad es verdadera cuando el número es infinito; porque entonces la suma de todas las tangentes iguales EE difiere del arco completo BD, o de la suma de todos los arcos iguales DD, en menos de cualquier cantidad dada: similarmente la suma de los RR de AO completa [*Ibid.*, 241].

El triángulo EKE (**Fig. 1.7**) fue llamado por Leibniz 'triángulo característico' y a partir de él vio la relación inversa entre el problema de cuadraturas y el de tangentes. Debido a que Pascal no se interesó en los métodos de trazado de tangentes, no descubrió tal relación (no encontró lo que no buscaba [*cf.* Lorenzo 1987, XXXVII]).

La gran mayoría de autores de libros de texto de historia de las matemáticas y, en particular, de historia del cálculo presentan y comentan tanto el método de la subtangente de Fermat como el del círculo de Descartes recurriendo a los conceptos y notación del cálculo actual. Decidí no resistir al deseo de ser anacrónico respecto al método precedente de Pascal.

La longitud s de un arco de circunferencia de radio r está dada por $s = r\varphi$, donde φ es el ángulo central medido en radianes que abarca a dicho arco (**Fig. 1.9**). Así, $ds = rd\varphi$. Como

$$sen\ \varphi = \frac{DI}{r} \rightarrow DI = r\ sen\ \varphi \text{ y } cos\ \varphi = \frac{AI}{r} \rightarrow AI = r\ cos\ \varphi,$$

al considerar $EE = DD = ds$ (**Figs. 1.7 y 1.8**), $EE = rd\varphi$. Por lo tanto,

$$DI \times EE = r\ sen\ \varphi \times rd\varphi = r^2\ sen\ \varphi\ d\varphi.$$

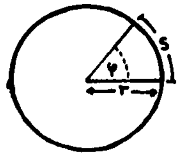


Fig. 1.9

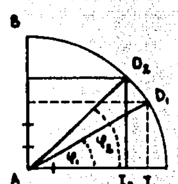


Fig. 1.10

A partir de la **Fig. 1.10**, la *Proposición I* anterior es equivalente a nuestra fórmula

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} DI \times EE = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\,sen\,\varphi \times r\,d\varphi = r^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} sen\,\varphi\,d\varphi =$$

$$r^2 (cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) = r\,(rcos\varphi_1 - rcos\varphi_2) =$$

$$r(AI_1 - AI_2) = rI_2I_1 = AB \times I_2I_1.$$

Es una perogrullada profundamente errónea, repetida por todos los libros copiados y por gente eminente cuando hacen discursos, que deberíamos cultivar el hábito de pensar en lo que estamos haciendo. Precisamente lo opuesto es el caso. La civilización avanza extendiendo el número de operaciones importantes que podemos llevar a cabo sin pensar en ellas. Las operaciones del pensamiento son como las embestidas de la caballería en una batalla: están estrictamente limitadas en número, requieren de caballos llenos de vigor, y solamente deben realizarse en momentos decisivos [Whitehead 1948, 41-42].

Capítulo 2

El cálculo de Leibniz

§2.1 Introducción

Gottfried Wilhelm Leibniz nació el 1° de julio de 1646 en Leipzig y murió el 14 de noviembre de 1716 en Hannover. En sus estudios universitarios dio énfasis a la filosofía, a la lógica y al derecho. A los 17 años se graduó en la Universidad de su pueblo natal (en 1663) y en febrero de 1664 obtuvo el grado de maestro en filosofía; recibió por unanimidad el grado de doctor en la Facultad de Derecho de la Universidad de Altdorf, en Nuremberg, el 22 de febrero de 1667. En marzo de 1672 salió de Mainz (donde trabajaba para el arzobispo-elector) hacia París. Permaneció ahí hasta 1676. Conoció al famoso científico holandés Christiaan Huygens, quien lo guió en sus estudios de las matemáticas modernas de la época. Le recomendó leer la *Arithmetica in-*

finitorum de John Wallis (1616-1703), la *Opus geometricum* de Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), y le obsequió una copia de su *Horologium Oscillatorium*; también estudió Leibniz la edición de Frans van Schooten (1615-1660) de *La Géométrie* de Descartes, los manuscritos de Pascal, y las obras de Honoratus Fabri (1607-1688), James Gregory (1638-1675) y René François de Sluse (1622-1685), entre otros.

Durante su estancia en París, a fines de octubre y principios de noviembre de 1675, escribió las principales características y la notación que había desarrollado de la invención de su cálculo.

Las ideas de mayor influencia en la creación del cálculo de Leibniz fueron: (1) su vehemente deseo por inventar un alfabeto de pensamiento humano (*alphabetum cogitationum humanorum*);(2) el estudio de las sucesiones formadas por diferencias de términos consecutivos de otra sucesión, y (3) el uso del 'triángulo característico', que utilizó Pascal en sus investigaciones sobre el círculo (§1.5), en las transformaciones de cuadraturas.

§2.2 La *Characteristica universalis*

Las ideas iniciales del proyecto de Leibniz de crear un álgebra de pensamiento, *lingua philosophica* o *Characteristica universalis*, se encuentran en su *Dissertatio de arte combinatoria* (1666). En ésta había bosquejado un cálculo de conceptos al que llamó *lógica inventiva* y discutió la posibilidad de transformar reglas de inferencia en reglas deductivas esquemáticas. La *Characteristica universalis* que buscó durante toda su vida sería una manera de representar simbólicamente los conceptos fundamentales y un método para combinarlos y crear pensamientos más complejos; permitiría a toda persona instruida manejar de manera estándar y mecánica todos los procesos de pensamiento humano racional para obtener verdades en cualquier campo. Se llegaría a conclusiones inequívocas economizando el uso de la mente y la imaginación por medio de la expresión simbólica de la argumentación. Con su creación de la simbología que hasta nuestros días seguimos utilizando en el cálculo diferencial e integral, logró parcialmente su obsesivo deseo. Esta idea fue central no sólo en sus aportaciones matemáticas, sino en todas las demás áreas del conocimiento a las que dedicó sus esfuerzos: lógica, política, filosofía, teología, geología, minería, etcétera.

§2.3 La combinatoria

Los resultados que Leibniz obtuvo en París en sus estudios de sucesiones numéricas fueron sus primeros éxitos matemáticos. En su primer encuentro con Huygens le comunicó su método general para determinar la suma de los términos de sucesiones numéricas.

Por medio de un silogismo demuestra el teorema de que

el todo cde *es mayor que la parte* de.

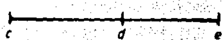


Fig. 2.1

La premisa mayor es una definición, la premisa menor una proposición de identidad y la conclusión, el teorema anterior:

Premisa mayor (definición): de dos cuerpos, es mayor aquel cuya parte es igual al todo del otro.

Premisa menor (proposición de identidad): la parte *de* del todo *cde* es igual al todo *de* (es decir, a sí mismo).

Conclusión: por tanto, el todo *cde* es mayor que la parte *de* [véase Aiton 1992, 72].

Así, a partir de que $A = A$ o $A - A = 0$, se tiene que

$$A - A + B - B + C - C + D - D + E - E = 0.$$

Si $A - B = L$, $B - C = M$, $C - D = N$, $D - E = O$, se tiene que

$$A - L - M - N - O - E = 0 \text{ y } L + M + N + O = A - E.$$

Y resulta que

la suma de las diferencias es igual a la diferencia del primer término menos el último.

Por ejemplo, para la sucesión finita de los cubos de los números naturales del 0 al 5,

$$0, \quad 1, \quad 8, \quad 27, \quad 64, \quad 125,$$

la sucesión de las diferencias de términos consecutivos es

$$0 - 1, \quad 1 - 8, \quad 8 - 27, \quad 27 - 64, \quad 64 - 125$$

o $\quad -1, \quad -7, \quad -19, \quad -37, \quad -61$

y así,

$$0 - (0 - 1) - (1 - 8) - (8 - 27) - (27 - 64) - (64 - 125) - 125 =$$

$$0 + 1 + 7 + 19 + 37 + 61 - 125 \Rightarrow$$

$$1 + 7 + 19 + 37 + 61 = 125 - 0 = 125.$$

El ejemplo que Leibniz citó con frecuencia fue el de la suma de números impares consecutivos, escrito cada uno de ellos como diferencia de cuadrados.

Cuando mostró estos resultados a Huygens, en el otoño de 1672, éste le planteó un problema que él mismo ya había resuelto: encontrar la suma de la sucesión de los recíprocos de los números triangulares. La posibilidad de sumar un número infinito de términos surge cuando el término general va disminuyendo a cero, que, para el problema que propuso Huygens, éste es el caso.

Así, se trataba de sumar la serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots$$

Los términos de la sucesión que se toma como inicial son

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \ldots$$

y las diferencias, $\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{12} \quad \ldots$.

Entonces, se tiene,

$$0 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \cdots$$

o $$0 = 1 - (1 - \tfrac{1}{2}) - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) - (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) - \ \ldots$$

de donde,

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots$$

y, por lo tanto, la suma requerida es

$$2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \ldots .$$

A partir de estos resultados formó el triángulo armónico, que es simétrico al triángulo aritmético de Pascal. En el siguiente diagrama se confrontan ambos arreglos numéricos; el triángulo a la izquierda es el aritmético de Pascal y el que está a la derecha, el armónico de Leibniz.

1	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{5}$
5 1	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{30}$
4 1	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{20}$
10 3 1	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{60}$
6 2 1	$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{30}$
10 3 1	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{60}$
4 1	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{20}$
5 1	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{30}$
1	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{6}$

Triángulo aritmético de Pascal **Triángulo armónico de Leibniz**

Las filas oblicuas exteriores del triángulo aritmético están formadas por 'unos'. En el triángulo armónico la primera fila, de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, se forma con los recíprocos de los términos de la segunda fila del aritmético, 1, 2, 3, ... , vista de derecha a izquierda y de abajo hacia arriba.

En el triángulo aritmético, cada término que se va escribiendo a la izquierda se obtiene sumando los dos términos inmediatos a su derecha, como se indica con las flechas; en el armónico, cada término se obtiene restando los dos términos inmediatos superiores, como se indica con las flechas.

Dado que en el triángulo armónico cada nueva fila oblicua se forma con las diferencias de los términos de la anterior, la suma de los elementos de cada fila hasta determinado término es igual a la diferencia del primero y último términos de la precedente. Por ejemplo,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}=\frac{1}{2}-\frac{1}{30}$$

(la suma de los de la tercera fila oblicua). Así, cualquier término es igual a la suma de *todos* los términos a su derecha de la siguiente fila. En el aritmético, cualquier término es igual a la diferencia de los dos términos debajo de él en la fila siguiente. Y sumando todos los términos de cualquier fila en el armónico, se obtiene, dado que el término general tiende a cero en la precedente:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\ldots=1$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\ldots=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}+\ldots=\frac{1}{3}$$

... ...

Al multiplicar la primera suma por 2, se obtiene la suma de los recíprocos de los números triangulares:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)/2}+\ldots=2$$

y multiplicando la segunda por 3, la de los recíprocos de los números piramidales:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots = \frac{3}{2}.$$

Obsérvese también que cada fila oblicua del triángulo armónico se puede formar dividiendo los términos de su primera fila entre los de la fila correspondiente del aritmético. Por ejemplo, los de la cuarta fila,

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{20}, \frac{1}{60}, \dots,$$

se pueden obtener dividiento

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

respectivamente entre 4, 10, 20, ... que son los de la cuarta fila del artimético.

§2.4 Método de transmutación

Los resultados obtenidos por Leibniz, en los que las sucesiones de diferencias le permiten encontrar sumas y estas dos operaciones aparecen como inversas una de la otra, adquirieron relevancia cuando pensó en la posibilidad de aplicarlos a la geometría, es decir, transferir estos resultados del ámbito discreto de las sucesiones a un contexto continuo.

El tratamiento geométrico de estas ideas de Leibniz estuvieron basadas en el *triangulum characteristicum*, como él lo llamó, y que en varias ocasiones afirmó haberlo encontrado cuando estudió el *Traité des sinus du quart de cercle* de Pascal (*v. gr.*, en una carta a Ehrenfried Walther, Graf von Tschirnhauss (1651-1708), Dic. 1679; véase Walker 1932, 17).

En el diagrama de la **Fig. 2.2** aparece el triángulo *EEK*, a partir del cual, como ya vimos (§1.5), estableció Pascal la suma de los productos de los senos por los pequeños elementos de circunferencia (esto es, el *momento* total del cuadrante de circunferencia con respecto al eje de abscisas)[1] considerando el segmento *EE* tangente a la circunferencia en el punto *E*. Leibniz utilizó en sus investigaciones

1. El *momento* de una partícula con respecto a un eje es igual al producto de su peso por su distancia perpendicular al eje.

el triángulo *EDM*, al que llamó triángulo característico. Tomaba el segmento *ED* como una cuerda o un lado recto infinitamente pequeño de los que forman la circunferencia.

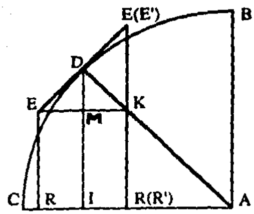


Fig. 2.2

Leibniz generalizó el uso de las propiedades del triángulo característico a todas las curvas (**Fig. 2.3**), al remplazar el radio del círculo por la normal *n* a la curva en el punto *D*. Sin embargo, esta generalización no era nueva: Huygens ya la había utilizado por ejemplo para calcular la superficie de un paraboloide de revolución [Baron 1987, 275; Aiton 1992, 81]. Pero Leibniz avanzó más. En lugar de tomar los elementos trapezoidales *ERRE* (**Fig. 2.2**), exploró el uso de elementos triangulares *OPP'* (**Fig. 2.4**).

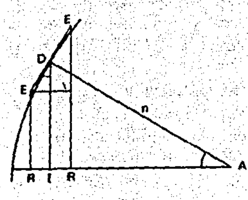


Fig. 2.3

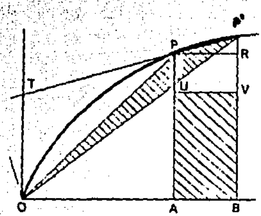


Fig. 2.4

Una aplicación importante del triángulo característico fue la creación de Leibniz del método de metamorfosis o de transmutación, o proceso de la cuadratriz que a continuación se describe.

Sea dada la curva $OPP'Q$ (**Fig. 2.5**) y sea PDP' el triángulo característico en un punto P de ella. La cuadratura de esta curva es igual a la suma de los elementos trapezoidales $APP'A'$; también es igual al área del triángulo OBQ

$$\left(\frac{1}{2} OB \times BQ\right)$$

más la suma de los elementos triangulares OPP'. Al considerar que PP' es un segmento de recta infinitamente pequeño de los que forman la curva $OPP'Q$, la línea recta tengente por el punto P será la prolongación de PP' y cortará al eje vertical en T. Trácese OS perpendicular a PT. Resulta que el triángulo OTS así construido es semejante al triángulo $PP'D$ (ambos son triángulos rectángulos y el ángulo $PP'D$ es igual al ángulo STO, pues $P'D$ es paralela a TO) y por lo tanto

$$\frac{OS}{TO} = \frac{PD}{PP'} \text{ o } OS \times PP' = TO \times PD.$$

Obsérvese que OS (altura) por PP' (base) es el doble del área del triángulo OPP'.

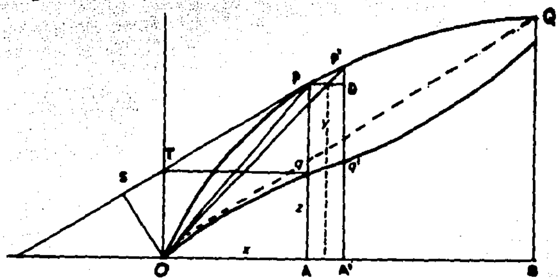


Fig. 2.5

Para cada punto P sobre $OPP'Q$ se determina un punto R al trazar la tangente PT y tomando $AR = OT$. De esta manera se construye otra curva, $ORR'C$. La cuadratura de esta nueva curva es igual a la suma de los elementos trapezoidales $ARR'A$, cada uno de los cuales tiene como área $RA \times AA' = TO \times PD$. Pero $OS \times PP' = TO \times PD$; esto es, el doble del área de cada triángulo infinitesimal OPP' es igual al área de su correspondiente 'rectángulo' infinitesimal $ARR'A$. Entonces, la cuadratura del sector $OPP'Q$ por encima de la línea recta OQ es igual a la mitad de la cuadratura de la curva $ORR'C$.

Por lo tanto,

$$\textit{cuadratura de } OPP'Q = \frac{1}{2}(\textit{cuadratura de } ORR'C) + \left(\frac{1}{2}OB \times BQ\right).$$

El rasgo más sobresaliente del método de transmutación es que relaciona el trazado de tangentes con la determinación de cuadraturas: para determinar la nueva curva $ORR'C$ cuya cuadratura debe ser más fácil obtener que la de la original $OPP'Q$, es necesario trazar las tangentes PT por cada punto P de ésta. Así mostró y utilizó Leibniz su conclusión de que la determinación de cuadraturas y el trazado de tangentes son 'operaciones' inversas una de la otra.

Pascal no llegó a este último resultado. Y es que, respecto a la actividad matemática, ocurrió lo siguiente, según Parmentier [1989, 18]:

> Pascal no vislumbró el alcance general de su método porque se preocupaba de un resultado determinado. Había prevalecido el espíritu geométrico sobre el espíritu de invención. [...] Leibniz debe su descubrimiento al hecho de que al recorrer los diversos horizontes matemáticos se preguntaba por los métodos.

Fue de esta manera como el triángulo característico permitió a Leibniz explorar sus resultados con sucesiones numéricas en un contexto geométrico. Sobre esta idea escribió a John Wallis (1616-1703) en 1697:

> La consideración de diferencias y sumas en sucesiones numéricas me había proporcionado el primer esclarecimiento [*primam lucem*] al dar-

me cuenta que las diferencias corresponden a tangentes y las sumas a cuadraturas [Bos 1974-75, 13].

Consideró en el estudio de las curvas una sucesión de ordenadas y_n equidistantes (**Fig. 2.6**), y si la distancia entre ellas se toma *infinitamente pequeña* (despreciable al compararla con cantidades finitas, pero diferente de cero), la suma de las ordenadas dará la cuadratura de la curva, y la diferencia entre dos ordenadas consecutivas dará el valor de la pendiente de la recta tangente correspondiente.

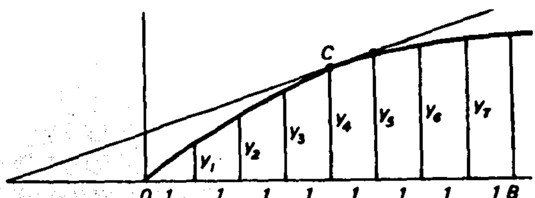


Fig. 2.6

Sobre el *primam lucem* de Leibniz también ha opinado Parmentier [1989, 17]:

> [...] este esclarecimiento repentino [lumière soudaine] [...] propiamente hablando no es el fruto de alguna investigación ni de algún esfuerzo, basta, con la simple inspección de un resultado ya establecido, ver algo nuevo, que en un sentido, salta a la vista [*sautait aux yeux*].

Este primer teorema importante de la geometría infinitesimal, el método de transmutación, Leibniz lo comunicó a Huygens en el verano de 1674 y la demostración detallada a otros en 1675 [Aiton 1992, 81].

§2.5 Notación del cálculo de Leibniz

Leibniz llegó a conjeturar que $d(xy) = dxdy$ y que

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{dx}{dy}.$$

En las investigaciones para la creación de su cálculo, propiamente dicho, el testimonio más detallado son sus manuscritos del 25 de octubre al 11 de noviembre de 1675; en éstos estableció la relación simbólica de los problemas directos e inversos de tangentes.[2]

En un diagrama análogo al de la **Fig. 2.7**, consideró una sucesión de ordenadas y equidistantes e infinitamente cercanas. Las diferencias entre ordenadas sucesivas las representó con l y consideró los momentos xl de estas diferencias con respecto al eje OD.

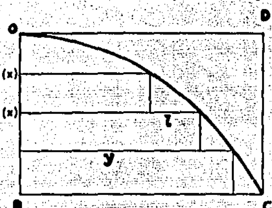


Fig. 2.7

La suma de los momentos xl da el área de la región OCD y la suma de las ordenadas y, la de OCB. Usó la abreviatura *omn.* de la palabra latina *omnia* (todos) para indicar 'una suma'; *ult.* x significa el *ultimus* (último) x, esto es, OB; una barra horizontal sobrepuesta equivale a nuestros paréntesis, y el símbolo para la igualdad era ⊓.

2. Los manuscritos matemáticos de Gottfried Wilhelm Leibniz de 1675 donde aparecen sus ideas acerca de lo que será el cálculo fueron editados por primera vez entre 1849 y 1864: G. W. Leibniz. 1849-1864. *Mathematische Schriften* (7 vols., ed. C. I. Gerhardt. Berlín y Halle = 1961-1962, Hildesheim) [Citado en Grattan-Guinness 1984].

Se tiene entonces que 'los momentos de las diferencias con respecto a una línea recta perpendicular al eje son iguales al complemento de la suma de los términos [y]'; con esta notación:

$$omn.\overline{xl} \sqcap ult.x\ \overline{omn\ l} - omn.y.$$

Como las ordenadas y son la sucesión de las sumas de las diferencias l, se tiene que $omn.y = omn.\ omn.l =$ área (OCB) y por lo tanto

$$omn.\overline{xl} \sqcap ult.x\ \overline{omn.l} - omn.\ \overline{omn.l},$$

'los momentos de los términos [l] son iguales al complemento de la suma de las sumas'.

Bajo argumentos geométricos había establecido el teorema

$$\frac{\overline{omn.l}^2}{2} = \overline{omn.\ \overline{omn.l}\ \frac{l}{a}}$$

y escribió: "será útil escribir $\int$ en lugar de *omn.*, de manera que $\int l = omn.l$, o la suma de las l. Así,

$$\frac{\overline{\int l}^2}{2} = \int\int 7\frac{l}{a} \text{ y } \int xl = x\int l - \int\int l \text{''}$$

[Baron 1992, 284; Bos 1984, 92-93; Burton 1988, 389]. En sus manuscritos del 29 de octubre dice:

> Dada l y su relación con x, hallar $\int l$. Esto se tiene que obtener del cálculo inverso, es decir, supóngase que $\int l = ya$. Sea
>
> $$l = \frac{ya}{d};$$
>
> entonces, así como $\int$ incrementará dimensiones, d las disminuirá. Pero $\int$ significa una suma, y d una diferencia. A partir de la y dada, siempre se puede encontrar
>
> $$\frac{y}{d} \text{ o } l,$$
>
> esto es, la diferencia de las y [Burton 1988, 389].

Para Leibniz tomar una diferencia era disminuir una dimensión y por eso el símbolo d lo usa como denominador (por analogía con el proceso de división).

Tres días después, el 1° de noviembre, remplazó a $\frac{y}{d}$ por dy, avanzando más en sus abstracciones al no preocuparse más por la preservación de la homogeneidad dimensional.

Respecto al símbolo $\int$, Leibniz vio por primera vez el término 'integral' en un artículo de Jacques Bernoulli (1654-1705) en 1690; lo había acuñado el hermano de éste, Jean (1667-1748): "el término se me ocurrió al considerar la diferencial como la parte infinitesimal de un todo o *integral*", explicó a Leibniz en 1695 [citado en Bos 1974-75, 22]. Leibniz había intentado persuadirlos de que usaran el término 'sumación'. Prevaleció el término 'integral' con la notación de Leibniz.

Pero no sólo los términos eran diferentes, también los conceptos: en términos de sumación, para Leibniz la fórmula

$$\int y dx = Q$$

significaba que la suma de los rectángulos ydx infinitamente pequeños es igual a Q; para los Bernoulli, la reciprocidad de los operadores d y $\int$ les sugirió introducir el símbolo $\int$ como el inverso de d. Para ellos la fórmula anterior quería decir que Q es una cantidad diferencial cuya diferencial es ydx.

Por otra parte, fue hasta el 21 de noviembre de 1675 que Leibniz determinó correctamente la regla para obtener la diferencia del producto de dos cantidades y en julio de 1677 enunció la regla del cociente (véase §4.2). En los *Elementa* de Leibniz publicados en el siglo XIX, escribió:

> $d(xy)$ es lo mismo que la diferencia entre dos xy adyacentes, de las cuales sea una xy y la otra $(x + dx)(y + dy)$. Entonces
> $$d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy \text{ o } xdy + ydx + dxdy,$$
> y esto será igual a $xdy + ydx$ si la cantidad $dxdy$ se omite, la cual es infinitamente pequeña en relación con las cantidades que quedan, dado que dx y dy se supone que son infinitamente pequeñas (es decir, si el término de la sucesión representa líneas que crecen o decrecen continuamente por mínimos) [citado en Bos 1974-75, 16].

Con todo esto, es digno de hacer notar lo siguiente respecto al método de transmutación de Leibniz (§2.4). Cuando él descubrió este importante teorema, aún no había forjado su notación y las reglas para manipularla. A continuación se reproduce el mismo diagrama de la **Fig. 2.5** con esta simbología (**Fig. 2.8**).

La ordenada z de la cuadratriz ORR' es igual a y - PR. Por la semejanza de triángulos en la construcción,

$$\frac{PR}{x}=\frac{dy}{dx} \Rightarrow PR=x\frac{dy}{dx}$$

y por lo tanto $z=y-x\frac{dy}{dx}$. Así,

$$\int ydx=\frac{1}{2}\int zdx+\frac{1}{2}xy;$$

al sustituir a z por su valor $y-x\frac{dy}{dx}$,

$$\int ydx=\frac{1}{2}\int (y-x\frac{dy}{dx})dx+\frac{1}{2}xy$$

$$=\frac{1}{2}\int ydx-\frac{1}{2}\int xdy+\frac{1}{2}xy.$$

Esto es, $\int ydx+\int xdy=xy$ o $\int ydx=xy-\int xdy$.

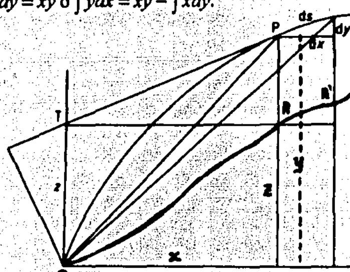


Fig. 2.8

¡El teorema geométrico del proceso de metamorfosis es nuestra actual técnica de integración por partes! Pero esto no es lo más importante que quiero señalar: a partir de la reciprocidad de los operadores d y $\int$, se tiene que

$$d(xy)=d(\int ydx+\int xdy) \text{ o}$$

$$d(xy)=ydx+xdy.$$

En el método de transmutación de Leibniz estaba implícita la regla para obtener la diferencia del producto de dos cantidades. ¿Por qué no la vio Leibniz? ¿Simplemente porque carecía del simbolismo adecuado? ¿O se le puede acusar de parecer haber tenido una venda en los ojos, como decía él mismo acerca de Pascal? (Véase: Lorenzo 1989,111).

§2.6 El "Nova Methodus"

A principios de 1682 se inició en Leipzig la publicación de la primera revista literaria y científica en Alemania, *Acta Eruditorum*. La fundó, con la ayuda de Leibniz, el profesor Otto Mencke (1644-1707) y su hijo Johann Burkhard (1674-1732) lo sucedió como editor de la misma. Se publicaba en latín y a partir de 1732 se llamó *Nova Acta Eruditorum*; fue descontinuada en 1782. El primer artículo de Leibniz en esta revista apareció en febrero de 1682 y continuó publicando constantemente. Firmaba sus colaboraciones con las iniciales latinas *G. G. L.*

En octubre de 1684, después de haber guardado en secreto su método de las diferencias durante casi nueve años, bajo el título "Nova methodus pro maximis et minimis"[3] publicó Leibniz en las *Acta Eruditorum* un artículo de seis páginas. Esta primera publicación donde se dan las reglas elementales del cálculo diferencial —sin demostración—, además de contener errores de imprenta, era oscuro, y solamente dos lectores lograron comprenderlo: Jean y Jacques Bernoulli. Éstos calificaron el contenido del artículo como "un enigma más que una explicación" [Boyer 1959, 207]. En 1686 publicó Leibniz, también en las *Acta Eruditorum*, otro artículo breve en el que presentó su cálculo integral [véase Leibniz 1987].

---

3. El título completo es: "Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irratinales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus". Algunas traducciones a otros idiomas (citadas en Leibniz 1989, 104) son: al francés (1884), al alemán (1908), al inglés (1715), al italiano (1927) y al ruso (1948). En 1987 apareció una traducción al español, "Un nuevo método para los máximos y los mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene ante las cantidades fraccionarias o irracionales, y es un singular género de cálculo para estos problemas" [Leibniz 1987, 3-15], aunque se sabe de otra publicada de 1978 [citada en Robles 1993, 386-387].

[...] l'Hospital poseía una personalidad atractiva, siendo, entre otras cosas, modesto y generoso, dos cualidades que no estaban extendidas entre los matemáticos de su época [Robinson 1973, 305].

Capítulo 3

El Marqués de l'Hospital

§3.1 Introducción

Guillaume-François-Antoine de l'Hospital,[1] *Marquis de Sainte-Meme, Comte d'Entremont, Seigneur d'Orques*, etc., nació en París en 1661 en el seno de una familia aristocrática. Sus padres fueron Anne-Alexandre de l'Hospital y Elizabeth Gobelin. Durante su juventud fue oficial del ejército; tuvo que abandonar la carrera militar debido a su vista defectuosa. Se casó con Marie-Charlotte de Romilley de la Chesnelaye, y tuvieron un hijo y tres hijas. Murió en París el 2 de febrero de 1704.

El nombre 'Marqués de l'Hospital' es conocido ampliamente en el medio matemático por una regla que lleva su nombre, la cual, de acuerdo a la organización formal rigurosa del análisis matemático actual, sirve para obtener el límite de un cociente de dos funciones

1. La familia acostumbraba escribir Lhospital (véase p. 37) y después, en francés moderno, l'Hôpital.

que toman simultáneamente el valor cero en por lo menos un valor de su dominio común.[2]

Robinson [1973, 304] afirma que está reportado que l'Hospital mostró talento matemático a muy temprana edad, siendo que a los quince años resolvió un problema sobre cicloides propuesto por Pascal. Publicó varios artículos con los cuales contribuyó a la evolución del cálculo infinitesimal cuando éste estaba en proceso de formación; en uno de ellos aparece la solución al problema de la braquistocrona propuesto por Jean Bernoulli en 1697, el cual también fue resuelto por Newton, Leibniz y Jacques Bernoulli, además del mismo Jean.

§3.2 L'Hospital y Jean Bernoulli

Los hermanos Bernoulli fueron los primeros en contribuir al desarrollo del cálculo creado por Leibniz, sosteniendo fructífera correspondencia con él. Muestra de su dominio de los conceptos y del manejo simbólico[3] de esta materia es que para 1690 empezaron a publicar en el *Acta Eruditorum* [véase §2.6] sus propios logros. Alrededor de 1700, Leibniz y los Bernoulli ya habían creado, casi en su totalidad, lo que se conoce actualmente como cálculo diferencial e integral elemental, a la vez que iniciaron el desarrollo de las ecuaciones diferenciales ordinarias y el cálculo de variaciones, nuevas ramas surgidas del análisis infinitesimal.

Jacques Bernoulli se convirtió en profesor de matemáticas en la Universidad de Basilea, Suiza (de donde eran originarios) en 1687 y Jean en la de Groningen, en los Países Bajos (The Netherlands) en 1695; a la muerte del hermano, Jean lo sustituyó en Basilea y permaneció ahí por el resto de su vida.

Jean Bernoulli llegó a París a finales del otoño de 1691 y tuvo oportunidad de visitar al sacerdote Nicolas Malebranche (1638-1715), de la Congregación de la Oratoria, y de conocer al grupo de intelectuales que pululaban a su alrededor y a quienes, virtuosamente, mostró su construcción de la catenaria. Aceptado en ese círculo de

---

2. Con nuestra notación actual: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$, *si* $f(a) = g(a) = 0$ y $g'(a) \neq 0$.

3. Cajori [1925, 418-429] presenta tablas de los símbolos usados en los manuscritos y artículos de Leibniz, incluyendo los de su cálculo infinitesimal.

eruditos, en la segunda ocasión en que se reunió con ellos conoció a quien ha pasado a la historia como el Marqués de l'Hospital.

Fig. 3.1 Guillaume-François-Antoine de l'Hospital

Fauvel y Gray ofrecen una versión en inglés de una carta enviada por Jean Bernoulli[4] en 1718 a Pierre-Rémond de Montmort (1678-1719) y en la cual relata lo siguiente:

4. J. Bernoulli 1718. *Letter to Montmort*. En O. Spiess (ed.). 1955. *Der Briefwechselvon Jean Bernoulli, I*. Birkhauser. Pp. 136-137. Versión en inglés de J. J. Gray [citado en Fauvel y Gray 1988, 613].

> A partir de la conversación que sostuve con el señor Marqués, supe inmediatamente que él era un buen geómetra, lo cual ya se sabía, pero que no tenía conocimiento alguno del cálculo diferencial, del cual apenas si conocía el nombre, y mucho menos había escuchado hablar del cálculo integral que apenas estaba siendo creado; lo poco que había de este cálculo en las *Acta* de Leipzig aún no había llegado a él debido a la guerra. [...] pero suficientemente pronto vio que yo no era ni un aventurero ni el pretensioso que él creía que yo quería aparentar.
>
> La conversación finalmente llegó al tema de la curva desenrrollada [evoluta] o círculo osculador, para el estudio del cual se sentía orgulloso de una regla totalmente particular obtenida del método de máximos y mínimos del señor Fermat. Para ponerlo a prueba, le propuse un ejemplo de una curva algebraica (ya que esta regla, supuestamente general, solamente funcionaba para curvas algebraicas y únicamente daba el radio en el máximo).
>
> El señor l'Hospital tomó papel y tinta y empezó a calcular. Después de haber consumido cerca de una hora en estar garrapateando en varias hojas de papel, encontró finalmente el valor correcto del radio en el máximo de la curva [Fauvel y Gray 1988, 441].

Jean procedió entonces a proponer una curva para la que podía determinar el radio de curvatura usando una fórmula que en pocos minutos conducía al valor buscado de cualquier curva en cualquier punto de ella; según palabras de Truesdell [1958, 60]: "Bernoulli dramáticamente mostró su arma secreta no publicada, la fórmula general para el radio de curvatura de una curva". El relato de Bernoulli continúa, haciendo referencia a tal método: "[...] lo sorprendió tan de pronto [a l'Hospital] que a partir de ese momento se llegó a encantar con el nuevo análisis de lo infinitamente pequeño y se emocionó con el deseo de aprenderlo de mí" [Fauvel y Gray 1988, 441].

Fue entonces que l'Hospital contrató a Bernoulli para que le explicara el nuevo cálculo. El compromiso incluía tener que entregarle por escrito una lección en cada una de las cuatro ocasiones que tenían que verse por semana, y que en general consistía en lo que Bernoulli hubiese escrito la noche previa. Dice Bernoulli en la misma carta: "[...] uno de mis amigos de Basilea, quien se hospedaba conmigo, tuvo la gentileza de copiar cada uno de los artículos que tenía que llevarle al señor Marqués de l'Hospital, de tal manera que los he conservado todos" [*Ibid.*].

Jean Bernoulli fue maestro de l'Hospital en París desde finales del año de 1691 hasta julio de 1692 y continuó instruyéndolo en la finca de éste en Orques, a cambio de un buen salario.

> No vacilé en dar al señor l'Hospital nuevas memorias escritas siempre por mi propia mano cuando encontraba material adecuado, y él mismo hizo arreglos para tener la oportunidad de plantearme todo tipo de preguntas [*Ibid.*].

Después de que Bernoulli abandonó París, para ser profesor en la Universidad de Groningen, tomó el compromiso de seguir instruyendo por carta a l'Hospital, a cambio de un salario mensual considerable. Seguiría enviando a l'Hospital material sobre cálculo, siempre y cuando éste cumpliera con el compromiso de no divulgar los nuevos descubrimientos matemáticos que le presentara. Muestra de la generosidad con que estaba dispuesto a pagar el Marqués de l'Hospital es una carta enviada el 17 de marzo de 1694 a Jean Bernoulli, parte de la cual dice [citada en Struik 1963, 258; y en Truesdell 1958, 61]:

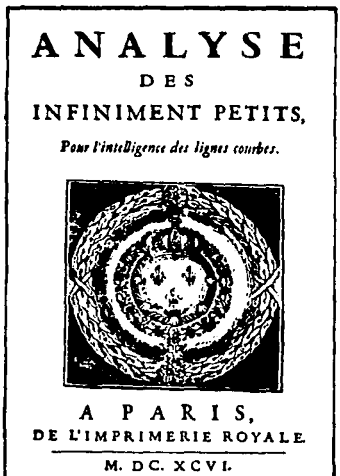
> Con placer le daré una pensión de trescientas libras, la cual empezará el primero de enero del presente año, y enviaré doscientas libras por la primera mitad del año debido a los artículos [journals] que usted ha enviado, y serán ciento cincuenta libras por la otra mitad del año, y así sucesivamente en el futuro. Prometo incrementar pronto esta pensión, dado que sé que es muy mesurada, y lo haré tan pronto y como mis asuntos sean un poco menos confusos. [...] No soy tan irrazonable como para requerir a cambio todo su tiempo, sino sólo le solicitaré que de vez en cuando me dedique algunas horas de su tiempo para trabajar en lo que le preguntaré y también que me comunique sus descubrimientos, pidiéndole a la vez que no muestre ninguno de ellos a otros. Le suplico incluso que no envíe aquí copias de los escritos que ha dejado conmigo ni al señor Varignon ni a otros; pues no me agradará que sean publicados. Envíeme su respuesta a todo esto y créame,
>
> *Monsieur tout à vous*
> le M. de Lhospital

En 1695 l'Hospital opinó acerca de Jean Bernoulli, escribiéndole a éste: "[t]engo plena certeza de que existe apenas un geómetra en el mundo que pueda ser comparado con usted'' [Truesdell 1958, 62].

§3.3 El primer texto de cálculo diferencial

Literalmente, puede decirse que el cálculo infinitesimal inventado por Leibniz, y a cuyo desarrollo contribuyeron prominentemente los hermanos Bernoulli, fue vendido al Marqués de l'Hospital por Jean Bernoulli, incluyendo los nuevos logros de éste en la materia.

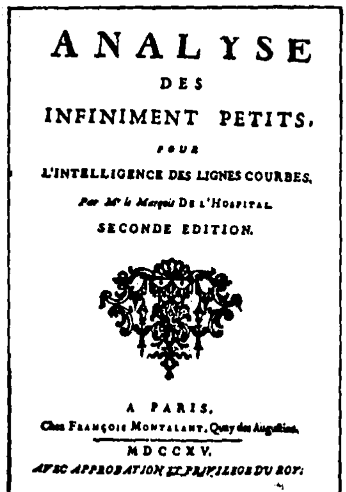
En 1742 Jean Bernoulli publicó la segunda parte de su *Curso sobre Cálculo Diferencial e Integral*; fue hasta 1922 que Schafheitlin encontró en la Biblioteca Pública de Basilea la primera parte de este



ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
Pour l'intelligence des lignes courbes.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DC. XCVI.

Fig. 3.2 Portada del *Analyse des infiniment petits* (1696) curso que había impartido a l'Hospital en París. A partir de esta evidencia, y de la existencia de cartas entre estos dos personajes, dadas a conocer al público general por primera vez en 1958 —en 1947 Spiess presentó también al público general una idea imparcial del contenido de tal correspondencia [Truesdell 1958, 60] y en 1955 publicó la correspondencia inicial de Bernoulli [Struik 1963, 258]—, se concluye que la versión del Marqués de l'Hospital del cálculo diferencial, el texto *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, está basada en las enseñanzas que recibió de Jean Bernoulli. Fue en 1696 cuando l'Hospital, al dominar ya el cálculo diferencial, anónimamente publicó


ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES,
Par M^r le Marquis DE L'HOSPITAL.
SECONDE EDITION.

A PARIS,
Chez FRANÇOIS MONTALANT, Quay des Augustins.
MDCCXV.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Fig. 3.3 Portada del *Analyse des infiniment petits* (2a. ed. 1715)

este texto[5] y, dado que había pagado bastante bien por el trabajo de Jean Bernoulli, dignamente dio el siguiente reconocimiento escueto:

> Por lo demás, reconozco estar en deuda con los trabajos luminarios de los señores Bernoulli, sobre todo con los del joven quien actualmente es profesor en Groningen. Me he servido sin cumplidos de sus descubrimientos y de los del señor Leibniz. Es por ello que consiento en que ellos reivindiquen todo lo que gusten; yo me conformo con lo que tengan a bien dejarme.[6]

En todo el texto no vuelve a mencionar 'al joven profesor de Groningen'.[7] La respuesta de Bernoulli a la carta del 17 de marzo de 1694 (véase p. 37 anterior) está perdida; por los documentos existentes se sabe que inmediatamente aceptó el compromiso, el cual finalizó por muy tarde al ser publicado el *Analyse des infiniment petits*. En 1691, cuando empezó a instruir a l'Hospital sobre el nuevo cálculo, Jean Bernoulli era un joven de 24 años de edad y sin empleo; en 1694 estaba recién casado y aún no tenía trabajo. Hasta el año siguiente obtuvo el puesto de Profesor en Groningen.

El suceso que a continuación se relata da una idea clara del grado del contrato entre Bernoulli y l'Hospital: en 1695, Bernoulli obedientemente revisó y tradujo al latín la solución de l'Hospital a un problema. Sin embargo, generalizó el problema dando su propio análisis y agregó una nota al escrito de l'Hospital que fue publicado en Leipzig. Cuando l'Hospital lo reprimió recordándole que tenía que enviarle sólo a él todos sus trabajos y no publicarlos, le contestó con la siguiente promesa: "sólo tiene que hacerme saber sus deseos categóricos —si ya no tengo que publicar nada en mi vida—, los

5. En la segunda edición [1715], sí aparece el nombre del autor: Mr. le Marquis de l'Hospital.

6. Au reste je reconnois devoir beaucoup aux lumières de *Mrs Bernoulli*, sur tout à celles du jeune presentement Proffesseur à Groningue. Je me suis servi sans façon de leurs découvertes & de celles de *M. Leibnis*. Cest-pourquoy je consens quils en revendiquent tout ce quil leur plaira, me contentant de ce quils voudront bien me laisser [l'Hospital 1988, XIV].

7. En el último párrafo de la Sección IX, cuando se publicó la segunda edición (véase *n.* 5 anterior; recuérdese que el Marqués de l'Hospital murió en 1704) se agregó lo siguiente: "& que la portion de courbe *DMF* satisfait au Problême proposé par M. *Bernoulli* dans le Tome second des Supplémens des Actes de Leipsic, page 291" [l'Hospital 1715, 163].

seguiré con precisión y ya nada de mi autoría será visto" [Truesdell 1958, 61].

El siguiente capítulo de este trabajo contiene lo esencial del texto *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas.* Además de éste y del trabajo póstumo de l'Hospital publicado en París en 1720, el *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la resolution des équations dans les problèmes tant déterminés qu'indéterminés*, publicó alrededor de veinticinco notas breves sobre problemas especiales.

FALTA PAGINA

No. 42 a la

[...] el nombre en las primeras páginas de un libro de texto casi nunca representa al único autor, sino que tal nombre representa una 'colectividad' de autores [Schubring 1992, 283].

Capítulo 4

El *Analyse des infiniment petits*

§4.1 Introducción

El primer libro de texto de cálculo diferencial fue publicado en 1696: el célebre *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* [*Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*] de l'Hospital.[1] Apareció doce años después de la creación de esta rama de las matemáticas (demasiado pronto para la época: apenas en 1684 se había publicado por primera vez el algoritmo del cálculo diferencial (véase §2.6)).

Probablemente el texto de l'Hospital adquirió su mayor celebridad por el resultado más importante que en él se publicó por primera vez, el cual conocemos como 'regla de l'Hospital' (§3.1 y 4.3.2). El texto era una introducción a esta nueva rama de las matemáticas, 'la geometría de los infinitamente pequeños', como la llamaban al-

1. Una versión en castellano del libro de texto completo de l'Hospital, preparada por el autor de esta tesis, será publicada próximamente por la UNAM (Facultad de Ciencias, colección *Mathema*).

gunos estudiosos, la cual "no era más que una especie de misterio y, por así decirlo, una ciencia cabalística hermetizada entre cinco o seis personas" [Fontenelle; citado en Macosu 1989, 225].

Desde luego que este texto jamás perderá importancia histórica, y siempre será trascendental pedagógicamente, dado que se elaboró en los momentos mismos en que se establecía el análisis infinitesimal. Por ejemplo, es digno de hacer notar que en 1988 Underwood Dudley, al reseñar uno de tantos textos de cálculo publicados en Estados Unidos con el título *Calculus with Analytic Geometry*, el de George F. Simmons (y como es la costumbre actual de los estadunidenses, de casi 1000 páginas), resalta varias virtudes de esta obra de l'Hospital contrastándola con otros textos de cálculo de los que se han publicado desde los 1850 hasta nuestros días [véase Dudley 1988].

El *Analyse des infiniment petits* fue publicado nuevamente en París en 1715, 1720 y 1781. En 1768 apareció una edición en Avignon. En 1730 Edmund Stone publicó una versión en inglés en Londres con el título *The method of fluxions both direct and inverse*, en cuyo prefacio escribió:

> [...] el *Calculus Differentialis*, publicado primero por el señor Leibnitz, en el año 1684, habiendo sido seguido desde entonces por casi todos los extranjeros, quienes representan el primer incremento, o diferencial (como lo llaman ellos) con la letra *d*, el segundo con *dd*, el tercero con *ddd*, etc., usando el término integral para las fluentes o cantidades que fluyen. Pero dado que este método en la práctica de lo mismo, no difiere del de las fluxiones, y un incrmento o diferencial se puede tomar como una fluxión, por respeto a Sir Isaac Newton, quien inventó lo mismo antes del año 1669, he alterado la notación de nuestro autor, y en lugar de d, dd, d^3, etc., he puesto su notación [la de Newton], *v. gr.* x, x, x, etc., o algunas otras de las últimas letras del alfabeto, así punteadas, y he llamado al incremento infinitamente pequeño o diferencial de una magnitud, la fluxión de ésta [citado en Fauvel y Gray 1988, 445].

En 1725, bajo el título *Eclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits*, se publicaron en París (póstumamente) las notas del señor Varignon sobre el texto de l'Hospital que, según la advertencia del editor al lector:

> Les he puesto el título de *Eclaircissemens*, porque me pareció el más natural y el más sencillo que se les pueda dar. Por lo tanto no son simples aclaraciones, ni sólo explicaciones de los lugares oscuros o difíciles del análisis que facilitan la comprensión de quienes se inician. Se encontrarán adiciones considerables, proposiciones nuevas, problemas añadidos a los del señor Marqués de l'Hôpital, reglas, construcciones, métodos diferentes encontrados por el señor Varignon [Varignon 1988, v-vi].

En 1988, se reimprimió en París, en facsímile, este escrito de Varignon junto con la primera edición del *Analyse* de l'Hospital, en un mismo volumen.

§4.2 Conceptos y resultados básicos

El texto *Analyse des infiniment petits* está compuesto por diez secciones que tratan los siguientes temas: la primera sección presenta los principios del 'cálculo de las diferencias'; en la segunda se aplica este cálculo para determinar las tangentes de cualqueir tipo de curvas; en la tercera se usa para resolver problemas de máximos y mínimos; en la cuarta para determinar los puntos de inflexión y de retorno y, en la quinta, las evolutas de las curvas. La sexta y la séptima secciones tratan sobre las cáusticas por reflexión y por refracción respectivamente; la octava sobre la determinación de los puntos de las líneas curvas que tocan una infinidad de líneas rectas o curvas de posición dada; en la novena se resuelven diversos problemas usando los resultados de las secciones anteriores y, finalmente, en la décima, se deduce el método de Descartes y Hudde.

Este primer texto de cálculo diferencial no presenta ejercicios o problemas para que el lector los resuelva: todos los ejemplos que contiene están resueltos. Sigue el estilo clásico de presentación de Euclides (y de Arquímedes) iniciando con dos definiciones y dos postulados. Sobre éstos, al final del 'Prefacio' anotó l'Hospital:

> [...] los dos requerimientos o suposiciones que he enunciado al comienzo de este tratado, y sobre los cuales, solos, se apoya, me parecen tan evidentes que no creo que pudieran dejar ninguna duda en la mente de los lectores atentos. Yo mismo los habría podido demostrar fácilmente a la manera de los antiguos, si no me hubiese propuesto ser bre-

ve sobre las cosas que ya son conocidas, y dedicarme principalmente a las que son novedosas [l'Hospital 1988, xv-xvi].

En lo que sigue de este capítulo, se incluyen las partes más importantes del cálculo leibniciano en la versión que publicó l'Hospital. Me he basado en la primera y segunda ediciones del *Analyse des infiniment petits* [l'Hospital 1696 y 1715, respectivamente].

4.2.1 El cálculo de las diferencias

Definición I

Se llaman cantidades *variables* aquellas que aumentan o disminuyen continuamente; y por lo contrario, cantidades *constantes* las que permanecen siendo las mismas mientras las otras cambian. De esta manera, en una parábola las ordenadas y las abscisas[2] son cantidades variables mientras que el parámetro es una cantidad constante.

Así, se estudian relaciones —entre cantidades *geométricas*— que expresan la naturaleza de una curva. Por 'continuamente' se entendía que las diversas cantidades geométricas incorporadas en la curva bajo estudio no tienen saltos en su variación (*non per saltum*; véase Varignon 1988, 1).

Definición II

La parte infinitamente pequeña en la que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente, es llamada la *diferencia*.[3] Sea AMB, por ejemplo, una línea curva cualquiera que tiene como eje o diámetro a la línea AC y como una de sus ordenadas a la recta PM (**Fig. 4.1**), y sea pm otra ordenada infinitamente cercana a la primera. Admitido eso, si se trazan MR paralela a AC y las cuerdas AM y Am, y luego se describe, con centro en A y radio [*intervalle*] AM, el pequeño arco de círculo

2. *Appliquée* y *coupé*, respectivamente, en el original. También se usaban *ordonée* y *flèche*. Las ordenadas y abscisas no eran distancias medidas sobre los ejes de un sistema coordenado a partir del origen; a cada segmento sobre el eje horizontal o diámetro (único que se consideraba) a partir del origen, en su punto final se le hacía corresponder o se le aplicaba otro segmento perpendicular, la ordenada (*applicatæ perpendiculares*, en latín).

3. Se ha traducido el término 'différence' como 'diferencia' (véase §5.1 más adelante).

> MS, Pp será la diferencia de AP; Rm la de PM; Sm la de AM, y Mm la del arco AM. Análogamente, el pequeño triángulo MAm que tiene como base al arco Mm será la diferencia del segmento AM, y el pequeño espacio $MPpm$ será la diferencia del espacio comprendido por las rectas AP y PM, y por el arco AM.

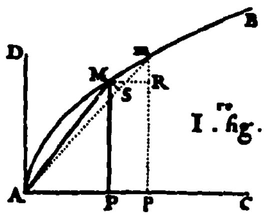


Fig. 4.1

Enseguida advierte que se hará uso de la letra d para denotar la diferencia: si AP se denota como x, su diferencia Pp será dx; la de $PM = y$, Rm, será dy; etcétera.

I. Requerimiento o suposición (postulado)

> 2. Se pide que se puedan tomar indiferentemente una por la otra a dos cantidades que no difieran entre sí más que por una cantidad infinitamente pequeña, o (lo cual es lo mismo) que una cantidad que no se incremente ni se haga disminuir más que por otra cantidad infinitamente menor que ella, pueda considerarse como que permanece siendo la misma. Se requiere, por ejemplo, que se pueda tomar a Ap por AP; pm por PM; el espacio Apm por el espacio APM; el pequeño espacio $MPpm$ por el pequeño rectángulo $MPpR$; el pequeño sector AMm por el pequeño triángulo AMS; el ángulo pAm por el ángulo PAM; etcétera.

Según la advertencia previa, al afirmarse en este postulado que $Ap = AP$, al pasar del contexto geométrico al algebraico, como $AP = x$, $Pp = dx$ y $Ap = AP + Pp$, se tiene que $x + dx = x$, y análogamente con las demás cantidades.

II. Requerimiento o suposición (postulado)

3. Se pide que una línea curva pueda ser considerada como el ensamblaje de una infinidad de líneas rectas, cada una infinitamente pequeña, o (lo cual es lo mismo) como una poligonal[4] de un número infinito de lados, cada uno infinitamente pequeño, los cuales determinan, por los ángulos que forman entre sí, la curvatura de la línea. Se requiere, por ejemplo, que la porción de curva Mm y el arco de círculo MS se puedan considerar como líneas rectas debido a su pequeñez infinita, de modo que el pequeño triángulo mSM pueda ser supuesto rectilíneo.[5]

Son estos los dos únicos postulados en los que l'Hospital basó todo el edificio del cálculo diferencial. Enseguida se presentan las reglas básicas del algoritmo de las diferencias.

Proposición I

Problema

4. *Tomar la diferencia de varias cantidades sumadas juntas o sustraídas unas de otras.*

Sea dada $a + x + y - z$, cuya diferencia se requiere tomar. Si se supone que x es aumentada en una porción infinitamente pequeña, es decir que se vuelve $x + dx$, y se volverá $y + dy$, y z, $z + dz$; la constante a (Art. 1),[6] permanecerá siendo la misma a;

4. En el original aparece *poligône*. No se ha traducido como 'polígono' porque este término se refiere a una superficie plana limitada por líneas rectas; en cambio, 'poligonal' quiere decir simplemente que tiene muchos ángulos, y se refiere a la figura misma (aquí, a curvas, la gran mayoría de ellas abiertas).

5. Sobre esta concepción de una curva como una poligonal, comentó en el Prefacio: "Las poligonales inscritas o circunscritas a las curvas, que por la multiplicación infinita de sus lados se confunden finalmente con ellas, han sido siempre tomadas como las curvas mismas. Pero hasta ahí se avanzó: fue a partir del descubrimiento del análisis que aquí se trata que se advirtió el alcance y la fecundidad de esta idea" [l'Hospital 1988, iv-v; *cf.*, Leibniz 1989, 111 (véase §5.1 más adelante)].

6. Enseguida de las dos definiciones y los dos postulados anteriores, presentó el siguiente **Corolario**:

> I. Es evidente que la diferencia de una cantidad constante es nula o cero, o (lo cual es lo mismo) que las cantidades constantes no tienen diferencia.

de modo que la cantidad propuesta $a + x + y - z$ se volverá $a + x + dx + y + dy - z - dz$, y su diferencia, que se encontrará al restarla de esta última, será $dx + dy - dz$. Y así ocurre con las demás; lo cual da esta regla:

Regla I

Para la adición o sustracción de cantidades

Se tomará la diferencia de cada término de la cantidad propuesta y, conservando los mismos signos, se compondrá otra cantidad que será la diferencia buscada.

Proposición II

Problema

5. *Tomar la diferencia de un producto formado por varias cantidades multiplicadas entre sí.*

1°. La diferencia de xy es $ydx + xdy$.

Pues y se vuelve $y + dy$ cuando x se vuelve $x + dx$ y, por lo tanto, xy se vuelve entonces $xy + ydx + xdy + dxdy$, que es el producto de $x + dx$ por $y + dy$, y su diferencia será $ydx + xdy + dxdy$, es decir, $ydx + xdy$ (Art. 2), dado que $dxdy$ es una cantidad infinitamente pequeña en relación con los otros términos ydx y xdy [...] [*Cf.*, §2.5, pp. 28 y 30 anteriores].

Argumenta la validez de la afirmación anterior al considerar que si las cantidades ydx y $dxdy$ se dividen entre dx, se obtienen como cocientes y y dy respectivamente, esto es, la cantidad finita y y su diferencia dy, infinitamente pequeña.

Es interesante hacer notar que aunque alude al postulado I (Art. 2), proporciona este argumento algebraico para justificar la eliminación del término $dxdy$. Así, realmente está evitando recurrir al postulado I en la deducción de las reglas para obtener diferencias (será hasta el Art. 22, de la segunda sección, donde vuelve a aludir a este postulado, usándolo geométricamente, pero no algebraicamente). Si se usa explícitamente el postulado I, la proposición II se puede demostrar de la siguiente manera:

$$d(xy) = ydx + xdy + dxdy = ydx + (x + dx)dy,$$

y como $x + dx = x$, por el postulado I (Art. 2), se tiene

$$d(xy) = ydx + xdy.$$

En el 2° punto obtiene la diferencia del producto de tres cantidades, xyz, considerando a xy como una sola cantidad y usando el resultado anterior (1°); en el 3°, obtiene la diferencia de $xyzu$, considerando a xyz como una sola cantidad y usando el 2° punto. Luego afirma: 'Y así ocurre con otros hasta el infinito, de donde se forma esta regla:'

Regla II

Para las cantidades multiplicadas

La diferencia del producto de varias cantidades multiplicadas entre sí es igual a la suma de los productos de la diferencia de cada una de estas cantidades por el producto de las otras.

Proposición III

Problema

6. *Tomar la diferencia de una fracción cualquiera.*

La diferencia de $\frac{x}{y}$ es

$$\frac{ydx - xdy}{y^2}.$$ [7]

Pues suponiendo $\frac{x}{y} = z$,

7. Al igual que Descartes en 1637 [véase §1.4, p. 14 anterior], l'Hospital en su texto también usa yy para la segunda potencia y para las siguientes sí usa supraíndices (y^3, y^4, etc.). La práctica de usar xx para la segunda potencia la prefirieron algunos escritores, parece ser que basándose en que no ocupaba más espacio que x^2.

se tendrá $x = yz$ y, como las dos cantidades variables x y yz deben siempre ser iguales entre sí, ya sea que aumenten o disminuyan, se sigue que su diferencia, es decir, sus incrementos o decrementos, serán también iguales entre sí y por lo tanto se tendrá (Art. 5) $dx = ydz + zdy$, y

$$dz = \frac{dx - zdy}{y}$$

o, al sustituir a z por su valor $\frac{x}{y}$,

$$\frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Lo que se necesitaba, y de donde se forma la siguiente regla:

Regla III

Para las cantidades divididas, o para las fracciones

La diferencia de una fracción cualquiera es igual al producto de la diferencia del numerador por el denominador, menos el producto de la diferencia del denominador por el numerador, el total dividido entre el cuadrado del denominador.

Haciendo uso también del postulado I, se puede demostrar esta regla de la siguiente manera, sin recurrir a la regla anterior:

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x + dx}{y + dy} - \frac{x}{y} = \frac{xy + ydx - xy - xdy}{y\,(y + dy)} = \frac{ydx - xdy}{y\,(y + dy)},$$

y como $y + dy = y$ (Art. 2),

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Proposición IV

Problema

7. *Tomar la diferencia de una potencia cualquiera, perfecta o imperfecta,*[8] *de una cantidad variable.*

La regla IV correspondiente a esta proposición la obtiene de la siguiente manera. Dada la progresión geométrica

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5,\ x^6,\ x^7,\ \ldots$$

y la progresión aritmética[9]

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \ldots$$

continúa la aritmética 'por debajo del cero': -1, -2, -3, ... Estos términos corresponden a los exponentes de la geométrica 'continuada por debajo del 1':

$$\frac{1}{x},\ \frac{1}{x^2},\ \frac{1}{x^3},\ \ldots$$

Mediante un proceso de interpolación agrega nuevos términos a ambas. Se pueden interpolar nuevos términos entre dos términos consecutivos de una progresión geométrica (aritmética) dada, de modo que con con éstos también estén en progresión geomética (aritmética). Para interpolar medios geométricos (aritméticos) se requiere determinar la razón (la diferencia) de la nueva progresión. Así, si entre los términos x y x^2 de una progresión geométrica se requiere interpolar otros dos, se tendrá:

---

8. 'Potencia perfecta' es la que tiene exponente entero y 'potencia imperfecta', la que tiene exponente racional no entero, es decir, de la forma

$$\frac{m}{n} \notin Z;\ m,\ n \in Z,\ y\ n \neq 0.$$

9. Una 'progresión geomética' es una sucesión de números cada uno de los cuales se determina multiplicando el anterior por un número constante, al que se denomina 'razón' de la progresión; una 'progresión aritmética' es una sucesión de números cada uno de los cuales se determina sumando al anterior un número constante, al que se denomina 'diferencia' (resta) de la progresión.

$$x,\ rx,\ r^2x,\ r^3x = x^2, \text{ de donde } r = \sqrt[3]{x}$$

y, por lo tanto, los nuevos términos serán $x^{4/3}$ y $x^{5/3}$. Si entre los términos 1 y 2 de una progresión aritmética se requiere interpolar otros dos, se tendrá: $1, 1 + d, 1 + 2d, 1 + 3d = 2$, de donde $d = \frac{1}{3}$ y por lo tanto los nuevos términos serán $\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{3}$. Así, por ejemplo, como

$$\frac{1}{2} \text{ corresponde a } x^{1/2},$$

afirma que

$$\sqrt{x} = x^{1/2},$$

y deduce, por las propiedades de ambas progresiones, las leyes de los exponentes (la aritmética está formada por los exponentes de la geométrica):

$$x^{a+b} = x^a x^b \text{ y } x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}$$

Luego explica que como $d(x^2) = 2xdx$, $d(x^3) = 3x^2dx$, $d(x^4) = 4x^3dx$, 'y como así sucede con las demás potencias hasta infinito', si m es un número entero positivo, la diferencia de x^m será $d(x^m) = mx^{m-1}dx$. Para $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$, usando el Art. 6, obtiene que

$$d(x^{-m}) = \frac{-m\,x^{m-1}dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}dx.$$

Para los exponentes fraccionarios:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n} = z,$$

'y al elevar cada miembro a la potencia n se tendrá $x^m = z^n$', de donde, al tomar las diferencias según se acaba de explicar en el primer caso, se encontrará

$$d(x^m) = mx^{m-1}dx = d(z^n) = nz^{n-1}dz;$$

al despejar dz,

$$dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}} = \frac{mx^{m-1}dx}{n(x^{m/n})^{n-1}},$$

sustituyendo a z por $x^{m/n}$. Así,

$$d(x^{m/n}) = \frac{m}{n} x^{m-1-m+\frac{m}{n}}\, dx = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}\, dx = \frac{m}{n}\, dx \sqrt[n]{x^{m-n}}.$$

Para $x^{-m/n}$, obtiene que

$$d(x^{-m/n}) = d\left(\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}\right) =$$

$$\frac{-\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}\, dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1-\frac{2m}{n}}\, dx = -\frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n}-1}\, dx.$$

Finalmente, enuncia la siguiente regla general:

Regla IV

Para las potencias perfectas o imperfectas

La diferencia de una potencia cualquiera, perfecta o imperfecta, de una cantidad variable es igual al producto del exponente de esta potencia por esta misma cantidad elevada a una potencia menor en una unidad, y multiplicada por su diferencia.

De este modo, si se supone que m representa cualquier número entero o quebrado, positivo o negativo, y x es una cantidad variable cualquiera, la diferencia de x^m siempre será $mx^{m-1}dx$.

Enseguida obtiene la diferencia de las siguientes cantidades:

$$(ay - x^2)^3;\ \sqrt{xy+y^2}\ \text{o}\ (xy + y^2)^{1/2};$$

$$\sqrt{a^4+axy^2}\ \text{o}\ (a^4 + axy^2)^{1/2};\ \sqrt[3]{a^4+axy^2}\ \text{o}\ (ax + x^2)^{1/3};$$

$$\sqrt{ax+x^2+\sqrt{a^4+axy^2}}\ \text{o}\ (ax+x^2+\sqrt{a^4+axy^2})^{1/2}$$

y, finalmente, la diferencia de

$$\frac{\sqrt[3]{ax+x^2}}{\sqrt{xy+y^2}},$$

usando la última regla y la de las fracciones,

$$\frac{\frac{a\,dx+2x\,dx}{3\sqrt[3]{(ax+x^2)^2}}\sqrt{xy+y^2}+\frac{(-y\,dx-x\,dy-2y\,dy)}{2\sqrt{xy+y^2}}\sqrt[3]{ax+x^2}}{xy+y^2}=$$

$$\frac{a\,dx+2x\,dx}{3\sqrt[3]{(ax+x^2)^2}\sqrt{xy+y^2}}+\frac{(-x\,dy-y\,dx-2y\,dy)\sqrt[3]{ax+x^2}}{2\sqrt{(xy+y^2)^3}}.$$

4.2.2 Tangentes a curvas, máximos y mínimos

4.2.2.1 Determinación de tangentes a líneas curvas

Bajo la concepción de una curva como una poligonal, la definición que se da de línea recta tangente a una curva en uno de sus puntos es la siguiente:

Definición

Si se prolonga uno de los pequeños lados *Mm* de la poligonal (**Fig. 4.2**) que compone a una línea curva (Art. 3), este pequeño lado, así prolongado, será llamado la *tangente* de la curva en el punto *M* o *m*.

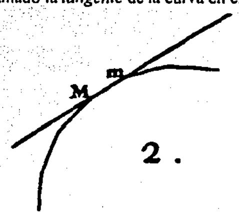


Fig. 4.2

Esto es, la concepción leibniciana (*cf.* §5.1 siguiente) de tangente es estática, y no dinámica como estamos acostumbrados a concebirla siguiendo el enfoque newtoniano, definiéndola como el límite de secantes que pasan por dos puntos M y m conforme m se acerca a M.

Proposición I

Problema

9. *Sea* AM *una línea curva* (**Figs. 4.3** y **4.4**) *tal que la relación de la abscisa* AP *con la ordenada* PM *esté expresada por una ecuación cualquiera; se requiere trazar la tangente* MT *por el punto* M *dado sobre esta curva.*

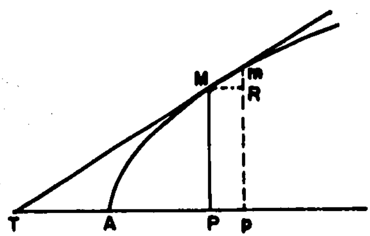


Fig. 4.3

Habiendo trazado la ordenada MP, y suponiendo que la recta MT que intersecta al diámetro en el punto T sea la tangente buscada, se concebirá otra ordenada mp infinitamente cercana a la primera, con una pequeña recta MR paralela a AP. Y al denominar a AP, x, y a PM, y, que están dadas (luego, $Pp = MR = dx$ y $Rm = dy$), los triángulos semejantes mRM y MPT darán

$$\frac{mR}{RM}=\frac{MP}{PT} \text{ o } \frac{dy}{dx}=\frac{y}{PT}.$$

Esto es,

$$PT = \frac{ydx}{dy}.$$

> Luego, por medio de la diferencia de la ecuación dada, se encontrará un valor de dx en términos que estarán afectados todos por dy, el cual al ser multiplicado por y y dividido entre dy dará un valor de la subtangente PT, en términos completamente conocidos y libres de diferencias, el cual servirá para trazar la tangente buscada MT.

El problema en sí no es el poder trazar la tangente. Se supone que la tangente MT ya está trazada y se procede a analizar qué elementos y de qué manera intervienen en la determinación de la tangente. Se hace uso del triángulo característico MRm concibiéndolo (dado que es infinitamente pequeño) semejante al formado por la ordenada PM, el segmento de recta de la tangente comprendido entre el punto de tangencia M y el de intersección T de la tangente con el diámetro AP, y la subtangente[10] PT. Así, el estudio de las características de una curva se hará a través del estudio de la variación de la subtangente (véase 4.2.2.2 siguiente).

Debe compararse este análisis con el procedimiento de Fermat visto en §1.3. Además (aunque ya se habrá notado), $\frac{dx}{dy}$ se está utilizando como el cociente de dos cantidades infinitesimales, las diferencias dx y dy; el concepto de derivada aún no se forjaba.

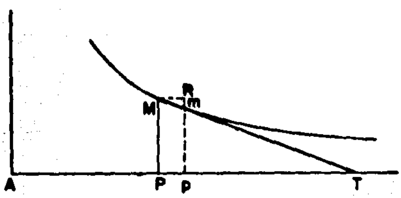


Fig. 4.4

10. La distancia PT, entre el pie P de la ordenada perpendicular PM correspondiente al punto de tangencia M y el punto T de intersección de la tangente MT con el diámetro AP, se llama 'subtangente'.

Algunas curvas para las que a continuación se determina el trazado de la tangente *MT* por el punto *M*, obteniendo el valor de la subtangente *PT*, son las expresadas por las siguientes relaciones:

$$ax = y^2;\ a^2 = xy;\ y^m = x;$$

$$\frac{x(a-x)}{y^2} = \frac{a}{b};\ \frac{x^3(a-x)^2}{y^3} = \frac{a}{b};$$

Y de manera general,

$$\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m(a-x)^n \text{ y } \frac{ay^{m+n}}{b} = x^m(a+x)^n.$$

4.2.2.2 Determinación de las ordenadas mayores y de las menores

Para resolver problemas de máximos y mínimos, que en la definición II de la sección II explica en qué consisten, l'Hospital no proporcionó ningún método o criterio para distinguir un máximo de un mínimo: las condiciones del problema hacen evidente la naturaleza del extremo de que se trate.

Definición I

Sea *MDM* una línea curva cuyas ordenadas *PM*, *ED* y *PM* sean paralelas entre sí (**Figs. 4.5, 4.6, 4.7** y **4.8**), y tal que al incrementarse continuamente la abscisa *AP*, la ordenada *PM* crezca también hasta cierto punto *E* después del cual disminuya; o al contrario, que disminuya hasta cierto punto *E* después del cual crezca. Supuesto eso, la línea *ED* será denominada *la mayor* o *la menor* ordenada.

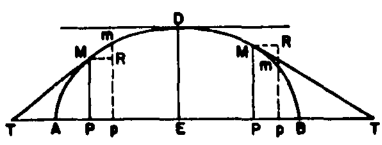


Fig. 4.5

Definición II

Se propone una cantidad PM la cual esté compuesta de una o de varias indeterminadas AP, de modo que al crecer AP continuamente, esta cantidad PM también crezca hasta cierto punto E, después del cual disminuye —o al contrario— y se requiere encontrar para AP un valor AE tal que la cantidad ED a la cual compone, sea mayor o menor que cualquier otra cantidad PM formada análogamente por AP. Eso se llama un problema *De máximos y mínimos* [*De maximis & minimis*].

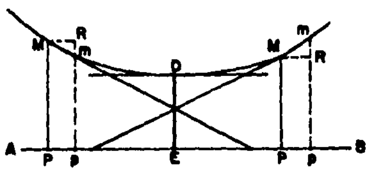


Fig. 4.6

Proposición general

46. *Dada la naturaleza de la línea curva* MDM, *encontrar para* AP *un valor* AE *tal que la ordenada* ED *sea la mayor o la menor de todas las* PM *análogas*.

Si al crecer AP, PM también crece, es evidente que su diferencia Rm será positiva con relación a la de AP; y que por lo contrario, cuando PM disminuya, al crecer siempre la abscisa AP, su diferencia será negativa. Luego, toda cantidad que crezca o disminuya continuamente no puede convertirse de positiva en negativa si no pasa por infinito o por cero; a saber, por cero cuando primero va disminuyendo, y por infinito cuando primero va incrementándose. De donde se sigue que la diferencia de una cantidad que expresa un *máximo* [*plus grand*] o un *mínimo* [*moindre*] debe ser igual a cero o a infinito. Luego, dada la naturaleza de la curva MDM, se encontrará un valor de Rm, el cual, al igualarse primero a cero y después a infinito, servirá para descubrir el valor buscado de AE en una o en la otra de estas suposiciones.

Observación

47. La tangente en D es paralela al eje AB (**Figs. 4.5** y **4.6**) cuando la diferencia Rm se vuelve nula en este punto; pero cuando se vuelve infinita (**Figs. 4.7** y **4.8**), la tangente se confunde con la ordenada ED. De donde se ve que la razón de mR a RM, que expresa la de la ordenada a la subtangente, es nula o infinita bajo el punto D.

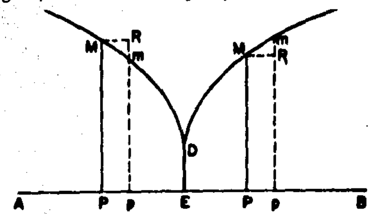


Fig. 4.7

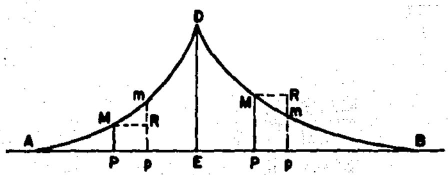


Fig. 4.8

Fácilmente se concibe que una cantidad, la cual disminuya continuamente, no puede cambiar de positiva a negativa sin pasar por cero; pero no se ve con la misma evidencia que cuando aumenta deba pasar por infinito. Es por ello que, para ayudar a la imaginación, concíbanse las tangentes en los puntos M, D y M (**Figs. 4.5** y **4.6**); es claro que en las curvas donde la tangente en D es paralela al eje AB, la subtangente PT aumenta continuamente a medida que los puntos M y P se acercan a los puntos D y E; y que al caer el punto M en D se vuelve infinita y, por último, que cuando AP sobrepasa a

AE, la subtangente *PT* se vuelve negativa (§10) de positiva que era, o al contrario.

Dos de los ejemplos que resuelve son los siguientes:

$$x^3 + y^3 = axy \text{ y } y - z = a^{1/3}(a - x)^{2/3}.$$

4.2.3 Diferencias de órdenes superiores: puntos de inflexión y de retorno

Es hasta la página 55, sección IV, donde define las diferencias segundas, terceras, etc. Antes (véase 4.2.1, Art. 5, p. 49 anterior), había comparado las cantidades *ydx* y *dxdy*, concluyendo por un argumento algebraico que la segunda es infinitamente pequeña con respecto a la primera. Las diferencias de órdenes superiores que ahora define a partir de la interpretación geométrica son de otra naturaleza.

Dado que en lo que sigue se hará uso de las diferencias segundas, terceras, etc., es necesario dar una idea de ellas antes de continuar.

Definición I

La porción infinitamente pequeña por la cual aumenta o disminuye continuamente la diferencia de una cantidad variable es llamada la *diferencia de la diferencia* de esta cantidad, o bien su *diferencia segunda*. De este modo, si se concibe una tercera ordenada *nq* infinitamente cercana a la segunda *mp* (**Fig. 4.9**) y si se trazan *mS* paralela a *AB* y *mH* paralela a *RS*, se llamará a *Hn* la *diferencia de la diferencia Rm*, o bien la *diferencia segunda* de *PM*.

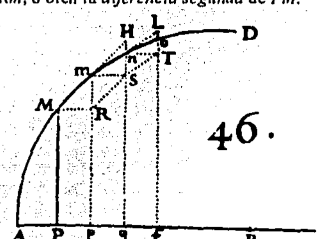


Fig. 4.9

Igualmente, si se concibe una cuarta ordenada *of* infinitamente cercana de la tercera *nq*, y si se trazan *nT* paralela a *AB* y *nL* paralela a *ST*, se llamará a la diferencia de las pequeñas rectas *Hn* y *Lo* la *diferencia de la segunda diferencia*, o bien la *diferencia tercera* de *PM*. Y así sucesivamente.

Advierte que se hará uso de la letra *d* para expresar el 'orden' o el 'género' de la diferencia de que se trate: si *PM* se denota como *y*, su diferencia *Rm* será *dy*; su diferencia segunda, *Hn*, será *ddy*; la diferencia tercera, *Lo - Hn*, será *dddy*; etc. En cambio, dy^2 representará a *dydy*, el cuadrado de *dy*; dy^3, el cubo de *dy*; ddy^2, el cuadrado de *ddy*; etcétera.

Corolario I

62. Si se llama *x* a cada una de las abscisas *AP*, *Ap*, *Aq* y *Af*, *y* a cada una de las ordenadas *PM*, *pm*, *qn* y *fo*; y *u* a cada una de las porciones curvas *AM*, *Am*, *An* y *Ao*, es claro que *dx* expresará las diferencias *Pp*, *pq* y *qf* de las abscisas; *dy* las diferencias *Rm*, *Sn* y *To* de las ordenadas; y *du* las diferencias *Mm*, *mn* y *no* de las porciones de la curva *AMD*. Ahora bien, con el fin de tomar, por ejemplo, la diferencia segunda *Hn* de la variable *PM*, es necesario concebir sobre el eje dos partes pequeñas *Pp* y *pq*, y sobre la curva otras dos *Mn* y *mn* para tener las dos diferencias *Rm* y *Sn*; y por lo tanto, si se supone que las pequeñas partes *Pp* y *pq* sean iguales entre sí, es claro que *dx* será constante con relación a *dy* y a *du*, puesto que cuando *Pp* se vuelve *pq*, permanece siendo la misma, mientras que *Rm*, que se vuelve *Sn*, y *Mm*, que se vuelve *mn*, varían. Se podría suponer que las pequeñas partes de la curva *Mm* y *mn* fueran iguales entre sí, y entonces *du* sería constante con relación a *dx* y a *dy*; y en fin, si se supusiera que *Rm* y *Sn* fueran iguales, *dy* sería constante con relación a *dx* y a *du* y su diferencia, $Hn = ddy$, sería nula.

Igualmente, para tomar la diferencia tercera de *PM*, o la diferencia de la diferencia segunda *Hn*, es necesario concebir sobre el eje tres pequeñas partes, *Pp*, *pq* y *qf*; sobre la curva otras tres, *Mm*, *mn* y *no*; y sobre las ordenadas también otras tres, *Rm*, *Sn* y *To*, y entonces se tendrá a *dx* o a *du* o a *dy* por constante, según se suponga que las pequeñas partes *Pp*, *pq* y *qf*, o *Mm*, *mn* y *no*, o *Rm*, *Sn* y *To*, sean iguales entre sí. Y ocurre lo mismo con las diferencias cuartas, quintas, etcétera.

Observación

63. Se debe observar bien (Fig. 4.9),

1°. Que hay diferentes órdenes de infinitamente pequeños: que *Rm*, por ejemplo, es infinitamente pequeño con relación a *PM*, e infinitamente grande con relación a *Hn*; lo mismo que el espacio *MPpm* es infinitamente pequeño con relación al espacio *APM*, e infinitamente grande con relación al triángulo *MRm*.

2°. Que la diferencia integra *Pf* es también infinitamente pequeña con relación a *Ap*, puesto que toda cantidad que es la suma de un número finito de cantidades infinitamente pequeñas, tales como *Pp*, *pq* y *qf*, con relación a otra *AP*, permanece siempre infinitamente pequeña con relación a esta misma cantidad: y que con el fin de que se vuelva del mismo orden, es necesario que el número de cantidades de orden inferior que la componen sea infinito.

Corolario II

64. De este modo, se pueden señalar las diferencias segundas en todas las suposiciones posibles.

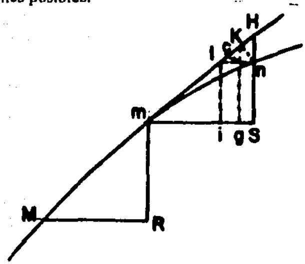


Fig. 4.10

1°. En las curvas donde las ordenadas *mR* y *nS* (Figs. 4.10 y 4.11) son paralelas entre sí, se prolongará la pequeña recta *Mm* hasta *H* donde intersecta a la ordenada *Sn*; y al haber descrito con centro en *m* y con radio *mn* el arco *nk*, se trazarán las pequeñas rectas *nl*, *li* y *kcg* paralelas a *mS* y a *Sn*. Supuesto eso, si se quiere que *dx* sea constante, es decir que *MR* sea igual a *mS*, es claro que el triángulo *mSH* es semejante e igual al triángulo *MRm*, y que de este modo *Hn* es *ddy*, es decir, la diferencia de *Rm* y *Sn*, y *Hk* es igual a *ddu*. Pero si se supone que *du* sea constante, es decir que *Mm* sea igual a *mn* o a *mk*, es evidente entonces que el triángulo *mgk* es semejante e igual al triángulo *MRm*, y que así $kc = ddy$, y $Sg = cn = ddx$. Por último, si se toma a *dy* por constante, es decir $mR = nS$, se sigue que el triángulo *mil* es igual y semejante al triángulo *MRm*, y que de este modo $iS = nl = ddx$ y $lk = ddu$.

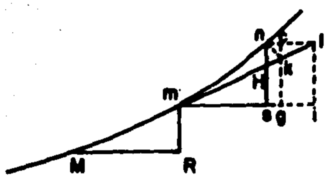


Fig. 4.11

Proposición I

Problema

65. *Determinar la diferencia de una cantidad compuesta de diferencias cualesquiera.*

Se tomará como constante a la diferencia que se quiera y, tratando a las otras como cantidades variables, se hará uso de las reglas prescritas en la Primera Sección [véase 4.2.1 anterior].

Dos de los ejemplos que resuelve son los siguientes:

La diferencia de $\frac{ydy}{dx}$, al tomar a dx como constante, será

$$\frac{dy^2 + yddy}{dx}, \text{ y } \frac{dxdy^2 - ydyddx}{dx^2},$$

al tomar a dy como constante.

La de $\frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$,

al tomar a dx como constante, será

$$dz\sqrt{dx^2+dy^2}+\frac{zdyddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}},$$

el total dividido entre dx, es decir,

$$\frac{dzdx^2+dzdy^2+zdyddy}{dx\sqrt{dx^2+dy^2}};$$

y al tomar a dy como constante, será

$$dzdx\sqrt{dx^2+dy^2}+\frac{zdx^2\,ddx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}+zddx\sqrt{dx^2+dy^2},$$

el total dividido entre dx^2, es decir,

$$\frac{dzdx^3+dzdxdy^2-zdy^2\,ddx}{dx^3\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Definición II

Cuando una línea curva AFK es en parte cóncava (**Figs. 4.12** y **4.13**) y en parte convexa sobre una línea recta AB [...], el punto F que separa a la parte cóncava de la convexa, y que por consiguiente es el fin de una y el comienzo de la otra, es llamado punto de *inflexión* cuando la curva, habiendo llegado a F continúa su camino sobre el mismo lado, y punto de *retorno*, cuando regresa al mismo lado de su origen.

Proposición II

Problema general

66. Estando dada la naturaleza de la línea curva AFK, determinar el punto de inflexión o de retorno F.

Supóngase en primer lugar que la línea curva AFK (**Figs. 4.12** y **4.13**) tenga por diámetro una línea recta AB, y que sus ordenadas PM, EF, etc., sean todas paralelas entre sí. Si se traza por el punto F la ordenada FE con la tangente FL, y por un punto cualquiera M de la parte AF una ordenada MP con una tangente MT, es claro que:

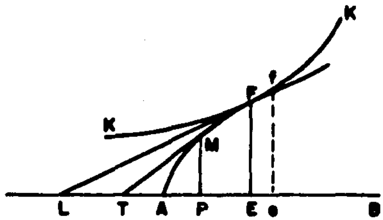


Fig. 4.12

1°. En las curvas que tengan un punto de inflexión, cuya abscisa AP crezca continuamente, la parte AT del diámetro, comprendida entre el origen de las x y la intersección con la tangente, crecerá también hasta que el punto P caiga en E, después del cual irá disminuyendo; de donde se ve que AT, siendo ordenada en P, debe volverse un *máximo* AL cuando el punto P caiga sobre el punto buscado E.

2°. En aquéllas que tengan un punto de retorno, cuya parte AT crezca continuamente, la abscisa crecerá también hasta que el punto T caiga en L, después del cual irá disminuyendo; de donde se ve que AP, siendo ordenada en T, debe volverse un *máximo* AE cuando T caiga en L.

Luego, si se denominan a AE, x, y a EF, y, se tendrá

$$AL = y\frac{dx}{dy} - x,$$

cuya diferencia, que es

$$\frac{dy^2dx - ydxddy}{dy^2} - dx$$

(al suponer a dx constante),

al ser dividida entre dx, diferencia de AE, debe ser nula o infinita (Art. 47); lo cual da

$$\frac{-yddy}{dy^2} = 0 \text{ o igual a infinito;}$$

de suerte que, al multiplicarla por dy^2, y dividiéndola entre $-y$, se llega a que $ddy = 0$ o a infinito; lo cual servirá en lo que sigue como fórmula general para encontrar el punto de inflexión o de retorno F. Pues estando dada la naturaleza de la curva AFK, se tendrá un valor de dy en términos de dx y, al tomar la diferencia de este valor, suponiendo a dx constante, se encontrará un valor de ddy en términos de dx^2, el cual, al ser igualado primero a cero y enseguida a infinito, servirá en una o en la otra de estas suposiciones para encontrar un valor para AE tal que la ordenada EF llegue a cortar a la curva AFK en el punto de inflexión o de retorno F.

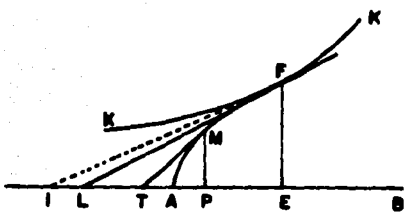


Fig. 4.13

El origen A de las x puede estar situado de tal manera que

$$AL = x - y\frac{dx}{dy}, \text{ en lugar de } y\frac{dx}{dy} - x,$$

y que AL o AE sea *un mínimo* en lugar de ser un *máximo*; pero como la consecuencia es siempre la misma, y eso no puede constituir dificultad alguna, no me detendré en ello.

También se puede encontrar lo mismo de esta otra manera. Es claro que al tomar a dx como constante (**Figs. 4.10** y **4.11**), y suponiendo que la ordenada y aumente, Sn será menor que SH o que Rm en la parte cóncava, y mayor en la convexa. De donde se ve que el valor de $Hn = ddy$ debe cambiar de positivo a negativo debajo del punto de inflexión o de retorno F, y por lo tanto (Art. 47) allí debe ser o nula o infinita.

Corolario

67. Cuando $ddy = 0$ (**Fig. 4.12**), es claro que la diferencia de AL debe ser nula con relación a la de AE, y, por lo tanto, que las dos tangentes infinitamente cercanas FL y fL deben caer una sobre la otra, no llegando a ser sino una sola línea recta fFL. Pero cuando ddy es igual a infinito (**Fig. 4.13**), la diferencia de AL debe ser infinitamente grande con relación a la de AE, o (lo cual es lo mismo) la diferencia de AE es infinitamente pequeña con relación a la de AL, y por consiguiente se pueden trazar por el mismo punto F dos tangentes, FL y Fl, las cuales forman entre sí un ángulo infinitamente pequeño, LFl.

§4.3 Problemas notables

Para finalizar este bosquejo, breve, del contenido del texto de l'Hospital, se presenta a continuación la resolución de cuatro problemas que, en la exposición misma, se verá, son sobresalientes.

4.3.1 La logarítmica

Cuando se publicó el *Analyse des infiniment petits* (1696), Leibniz y los Bernoulli habían iniciado ya el estudio de curvas trascendentes. El primer texto de cálculo diferencial se caracteriza por tratar (casi) exclusivamente con curvas algebraicas. Sin embargo, en el ejemplo II del problema planteado en la proposición XII de la sección II, brevemente presenta la curva logarítmica:

Proposición XII

Problema

37. *Sean* BN *y* FQ *dos líneas cualesquiera* (**Fig. 4.14**) *que tengan como ejes a las rectas* BC *y* ED *que se intersecten en ángulos rectos*

en el punto A, *y sea* LM *una línea curva tal que, habiendo sido trazadas a partir de uno cualquiera de sus puntos* M *las rectas* MGQ *y* MPN, *paralelas a* AB *y* AE, *la relación de los espacios* EGQF (*el punto* E *es un punto fijo dado sobre la recta* AE *y la línea* EF *es paralela a* AC) *y* APND, *y de las rectas* AP, PM, PN *y* GQ, *esté expresada por una ecuación cualquiera. Se trata de trazar la tangente* MT *a partir de un punto dado* M *sobre la curva* LM.

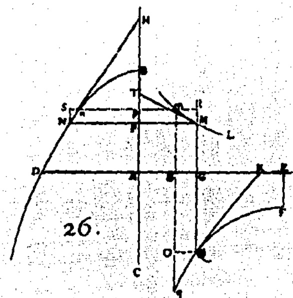


Fig. 4.14

Habiendo denominado a los elementos dados y variables AP o GM, x; PM o AG, y; PN, u; GQ, z; al espacio $EGQF$, s; al espacio $APND$, t, y las subtangentes dadas PH, a, y a GK, b, se tendrá

$$Pp = NS = MR = dx, \ Gg = Rm = OQ = -dy \text{ y}$$
$$Sn = -du = \frac{udx}{a},$$

por los triángulos semejantes HPN y NSn;

$$Oq = dz = -\frac{zdy}{b}, \ NPpn = dt = udx, \text{ y } QGgq = ds = -zdy;$$

donde debe observarse que los valores de Rm y Sn son negativos, porque al crecer $AP = x$, $PM = y$ y $PN = u$ disminuyen. Supuesto eso, se tomará la diferencia de la ecuación dada, en la cual se sustituirá a dt, ds, du y dz por sus valores udx, $-zdy$,

$$-\frac{udx}{a} \text{ y } -\frac{zdy}{b};$$

lo cual dará una nueva ecuación que expresará la razón buscada de dy a dx o de MP a PT.

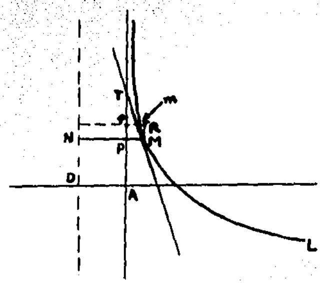


Fig. 4.15

Ejemplo II

39. Sea $s = t$; entonces $ds = dt$, es decir $-zdy = udx$; y por lo tanto

$$PT = \frac{ydx}{dy} = -\frac{yz}{u}.$$

Luego, como esta cantidad es negativa, se sigue que se debe tomar el punto T del lado opuesto al punto A, origen de las x. Si se supone que la línea FQ (**Fig. 4.15**)[11] sea una hipérbola que tenga por asíntotas a las rectas AC y AE, de modo que

$$GQ = z = \frac{c^2}{y},$$

11. Esta figura sólo se describe en el ejemplo: no está incluida en el texto de l'Hospital.

y que la línea *BND* sea una recta paralela a *AB*, de manera que $PN = u$ sea siempre igual a la recta dada *c*, es claro que la curva *LM* tiene como asíntota a la recta *AB*, y que su subtangente

$$PT = -\frac{yz}{u} = -c;$$

es decir que siempre permanece igual.

En este caso la curva *LM* es llamada *logarítmica.*

Anteriormente se vio que la parábola tiene subnormal constante (§1.4, p. 11 anterior); ahora se ha presentado aquí la curva que tiene subtangente constante.

4.3.2 Evolutas

Definición

Si se concibe que una línea curva cualquiera *BDF* (**Fig. 4.16**) cóncava hacia el mismo lado, esté envuelta o rodeada por un hilo *ABDF*, una de cuyas extremidades esté fija en *F* y la otra se tienda a lo largo de la tangente *BA*, y que se haga mover la extremidad *A* manteniéndola siempre tendida y al desenrrollar continuamente la curva *BDF*, es claro que la extremidad *A* de este hilo describirá en este movimiento una línea curva *AHK*.

Supuesto eso, la curva *BDF* será denominada la *evoluta* de la curva *AHK*.

Las partes rectas *AB*, *HD*, *KF* del hilo *ABDF* serán denominadas los *radios de la evoluta.*

Corolario I

75. Del hecho que la longitud del hilo *ABDF* siempre es la misma, se sigue que la parte de curva *BD* es igual a la diferencia de los radios *DH*, *BA* que parten de sus extremidades; análogamente la parte *DF* será igual a la diferencia de los radios *FK*, *DH*; y la curva completa *BDF* a la diferencia de los radios *FK*, *BA*. De donde se ve que si el radio *BA* de la curva fuera nulo, es decir que si la extremidad *A* del hilo cayera sobre el origen *B* de la curva *BDF*, entonces los radios de la evoluta *DH*, *FK* serían iguales a las partes BD, BDF de la curva *BDF*.

Corolario II

76. Si se considera a la curva BDF como una poligonal (**Fig. 4.17**) $BCDEF$ de una infinidad de lados, es claro que la extremidad A del hilo $ABCDEF$ describe el pequeño arco AG que tiene por centro al punto C, hasta que el radio CG no forma sino una línea recta con el pequeño lado CD vecino de CB; y análogamente describe el pequeño arco GH que tiene por centro al punto D, hasta que el radio DH no forma sino una recta con el pequeño lado DE; y así sucesivamente hasta que la curva $BCDEF$ esté totalmente desplegada. La curva AHK se puede considerar entonces como el ensamblaje de una infinidad de pequeños arcos de círculo AG, GH, HI, IK, etc. que tienen por centro a los puntos C, D, E, F, etcétera.

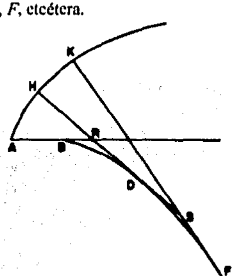


Fig. 4.16

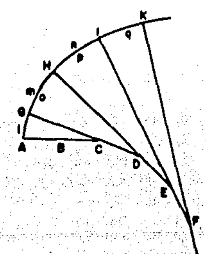


Fig. 4.17

Proposición I

Problema general

77. *Estando dada la naturaleza de la línea curva* AMD (**Fig. 4.18**) *con una de sus perpendiculares cualquiera* MC, *determinar la longitud del radio* MC *de su evoluta: es decir, el punto* C *de concurrencia de las perpendiculares infinitamente cercanas* MC, mC.

Supóngase en primer lugar que la línea curva *AMD* tenga por eje a la línea recta *AB* sobre la cual las ordenadas PM sean perpendiculares. Se imaginará otra ordenada *mp*, que será infinitamente cercana a *MP*, dado que el punto *m* se supone infinitamente cercano a *M*. Se trazará por el punto de concurrencia *C* una paralela *CE* al eje *AB*, la cual intersectará a las ordenadas *MP*, *mp* en los puntos *E*, *e*. Por último, trazando *MR* paralela a *AB*, se formarán los triángulos rectángulos semejantes *MRm*, *MEC*; pues siendo los ángulos *EMR*, *CMm* rectos, y el ángulo *CMR* común, el ángulo *EMC* será igual al ángulo *RMm*.

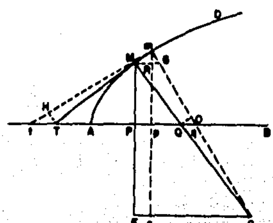


Fig. 4.18

Si entonces se denomina a los elementos dados *AP*, *x*; a *PM*, *y*; a la incógnita *ME*, *z*, se tendrá $Ee = Pp = MR = dx$, $Rm = dy = dz$,

$$Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}; \text{ y}$$

$$\frac{MR}{Mm} = \frac{ME}{MC} \text{ o } \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{z}{\dfrac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}}.$$

Luego, siendo el punto *C* el centro del pequeño arco *Mm*, su radio *CM* que se vuelve *Cm* mientras *EM* aumenta en su diferencia *Rm*, sigue siendo el mismo. Su diferencia será entonces nula: lo cual da (al suponer dx constante)

$$\frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0;$$

de donde se obtiene

$$ME = z = \frac{dzdx^2 + dzdy^2}{-dyddy} = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$$

al sustituir a dz por su valor dy.

Corolario I

78. Debido a que los triángulos rectángulos MRm y MEC son semejantes (**Fig. 4.18**), se tendrá [...]

$$MC = \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}.$$

Observación

79. Hay también varias otras maneras de encontrar los radios de la evoluta. Pondré aquí una parte, con el fin de dar diferentes propuestas a quienes no dominan este cálculo.

Primer caso: para las curvas cuyas ordenadas son perpendiculares al eje

Tercera manera. Trazando las tangentes infinitamente cercanas MT y mt, se tendrá

$$PT - AP = AT = \frac{ydx}{dy} - x,$$

cuya diferencia da

$$Tt = -\frac{ydxddy}{dy^2};$$

y describiendo con centro m el pequeño arco TH, se formará el triángulo rectángulo HTt semejante a RmM, pues los ángulos HtT y RMm o PTM son iguales, no difiriendo entre sí más que por el ángulo Tmt que es infinitamente pequeño; lo cual da

$$\frac{Mm}{mR}=\frac{Tt}{TH} \text{ o } \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}=\frac{-\frac{ydxddy}{dy^2}}{TH},$$

de donde

$$TH=\frac{-ydxddy}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Luego, los sectores TmH y MCm son semejantes, pues el ángulo $Tmt + MmC$ equivale a uno recto, y el ángulo $MmC + MCm$ equivalen también a uno recto debido a que el triángulo CMm se considera como rectángulo en M. Entonces,

$$\frac{TH}{Mm}=\frac{Tm}{MC} \text{ o } \frac{TH}{Mm}=\frac{TM}{MC} \text{ o }$$

$$\frac{\frac{-ydxddy}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\frac{\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}}{MC},$$

de donde

$$MC=\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}.$$

4.3.3 Regla de l'Hospital

Proposición I

Problema

163. *Sea* AMD *una línea curva* (AP = x, PM = y, AB = a) *tal que el valor de la ordenada* y *esté expresado por una fracción, en la cual el numerador y el denominador se vuelvan cada uno cero cuando* x = a;

es decir, cuando el punto P *caiga sobre el punto dado* B (**Fig. 4.19**). *Se pide cuál debe ser entonces el valor de la ordenada* BD.

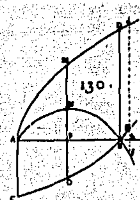


Fig. 4.19

Siendo ANB y COB dos líneas curvas conocidas que tienen a la línea AB como eje común, y tales que la ordenada PN exprese el numerador y la ordenada PO el denominador de la fracción general que convienen a todas las PM de modo que

$$PM=\frac{AB\times PN}{PO}.$$

Es claro que estas dos curvas se intersectarán en el punto B, dado que, por la suposición, PN y PO se vuelven cada una cero cuando el punto P cae en B. Planteado eso, si se concibe una ordenada bd infinitamente cercana de BD y que intersecta a las líneas curvas ANB y COB en los puntos f y g, se tendrá

$$bd=\frac{AB\times bf}{bg},$$

la cual no difiere de BD (Art. 2). Entonces el problema consiste en encontrar la razón entre bg y bf. Ahora bien, es claro que al volverse AB la abscisa AP, las ordenadas PN y PO se vuelven nulas y que al volverse Ab la abscisa AP, se vuelven bf y bg. De donde se sigue que estas ordenadas, las mismas bf y bg, hacen la diferencia de las ordenadas en B y b en relación a las curvas ANB y COB, y por lo tanto, si se toma la diferencia del numerador, y se divide entre la diferencia del denominador, después de haber hecho $x = a = Ab = AB$, se tendrá el valor buscado de la ordenada bd o BD. Lo cual se requería encontrar.

Los ejemplos que presenta l'Hospital para esta proposición son los siguientes:

$$1.\ \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}},\ \text{y}$$

$$2.\ \frac{a^2 - ax}{a - \sqrt{ax}},\ \text{ambos para } x = a.$$

Es la resolución de este problema de la proposición I de la sección IX lo que se considera más sobresaliente de todo el contenido del texto de l'Hospital. Se le conoce precisamente como 'regla de l'Hospital' (véase §3.1, p. 34 anterior, *n.* 2). Sin embargo, quien la descubrió fue Jean Bernoulli. De la correspondencia entre estos dos geómetras (véase §3.3, p. 39 anterior) publicada en 1958, la carta del 22 de julio de 1694 que envió Bernoulli a l'Hospital contiene este resultado y los dos ejemplos siguientes:

$$1.\ \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}},\ \text{y}$$

$$2.\ \frac{a\sqrt{ax} - x^2}{a - \sqrt{ax}},$$

ambos para $x = a$ [Struik 1963, 259].

4.3.4 *Folium* de Descartes

En el ejemplo I de la sección III se estudia la curva cuya naturaleza está expresada por la ecuación $x^3 + y^3 = axy$:

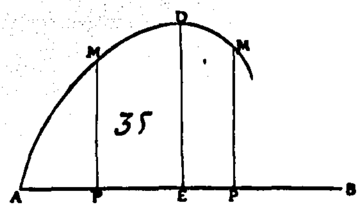
Ejemplo I

48. Supóngase que

$$x^3 + y^3 = axy\ (AP = x,\ PM = y \text{ y } AB = a)$$

expresa la naturaleza de la curva *MDM* (**Fig. 4.20**). Se tendrá, al tomar las diferencias,

$$3x^2dx + 3y^2dy = axdy + aydx,$$



Fi. 4.20

por lo tanto,

$$dy = \frac{aydx - 3x^2dx}{3y^2 - ax} = 0$$

cuando el punto *P* caiga sobre el punto buscado *E*. De donde se obtiene que

$$y = \frac{3x^2}{a}$$

y, al sustituir a *y* por este valor en la ecuación

$$x^3 + y^3 = axy,$$

se encuentra para *AE* un valor,

$$x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{2},$$

tal que la ordenada *ED* será la mayor de todas las *PM* análogas.

En la figura que aparece en el texto de l'Hospital sólo está dibujada parcialmente la curva bajo estudio. Un bosquejo más completo es el de la **Fig. 4.21**. Se conoce como *Folium de Descartes*. Si hacemos el trabajo que se ahorró l'Hospital, obtenemos los siguientes resultados al igualar

$$dy = \frac{aydx - 3x^2dx}{3y^2 - ax}$$

a infinito, o lo que es lo mismo, $3y^2 - ax = 0$, obtenemos

$$x = \frac{3y^2}{a}.$$

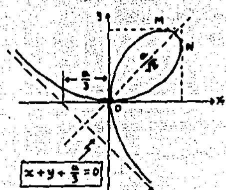


Fig. 4.21

Sustituyendo este valor en la ecuación dada,

$$\left(\frac{3y^2}{a}\right)^3 + y^3 = a\left(\frac{3y^2}{a}\right)y,$$

se obtiene

$$\frac{27y^6}{a^3} + y^3 = 3y^3 \text{ o } \frac{27y^6}{a^3} - 2y^3 \text{ o } y^3\left(\frac{27y^6}{a^3} - 2\right) = 0;$$

$$y = 0 \text{ y } x = 0, \text{ o } y = \sqrt[3]{\frac{2a^3}{27}} = \frac{\sqrt[3]{2}\,a}{3} \text{ y } x = \frac{\sqrt[3]{4}\,a}{3}.$$

Así, se tienen los puntos

$$M\left(\frac{\sqrt[3]{2}\,a}{3}, \frac{\sqrt[3]{4}\,a}{3}\right) \text{ y } N\left(\frac{\sqrt[3]{4}\,a}{3}, \frac{\sqrt[3]{2}\,a}{3}\right)$$

simétricos respecto a la línea recta $y = x$. Esto es, en M hay una línea recta tangente horizontal, y en N, ¡una línea recta tangente vertical! Además, no consideró el caso en que $x = 0$ y $y = 0$ que es cuando $dy = 0$ (también se obtiene $y = 0$ y $x = 0$ cuando dy es igual a infinito). A partir de la gráfica, es claro que en el punto $O(0, 0)$ hay dos líneas rectas tangentes: el eje horizontal y el eje vertical. ¿Cómo determinarlas analíticamente? Calculemos el valor de la subtangente PT en O, considerando como eje o diámetro sobre el que se trazan las ordenadas perpendiculares al eje horizontal. Así,

$$PT = y\frac{dx}{dy} = y\ (\frac{3y^2 - ax}{ay - 3x^2}) = \frac{3y^3 - axy}{ay - 3x^2}.$$

Evaluando directamente se indetermina: es de la forma 0/0. Por lo tanto, se puede aplicar la regla de l'Hospital (que como vimos (4.3.3), apaerece hasta la Sección IX), con lo cual se obtiene:

$$\frac{9y^2dy - axdy - aydx}{ady - 6xdx}$$

que evaluada en (0, 0) da $\dfrac{0}{-adx} = 0.$

Y por lo tanto la subtangente $PT = 0$ (lo cual significa que la línea recta tangente en (0, 0) es vertical). Análogamente, si se toma como diámetro o eje de la curva al eje vertical, se obtiene que la subtangente correspondiente

$$PT = x\frac{dy}{dx} = 0.$$

Hasta aquí se conluye el breve bosquejo del contenido del primer texto de cálculo diferencial. Nada de las secciones VI, VII, VIII y X se ha incluido; no son indispensables para los objetivos del presente trabajo. Únicamente agrego a continuación dos apéndices a este capítulo: en el apéndice A se presenta lo básico sobre cómo determinar las diferencias de curvas cuyas ordenadas se trazan a partir de un punto fijo, y no perpendiculares a un eje de abscisas; y en el apéndice B, sólo las definiciones de lo que son las cáusticas por reflexión y por refración.

§4.4 Apéndice A. Diferencias de las curvas cuyas ordenadas parten de un punto fijo

Después de definir las diferencias de órdenes superiores (4.2.3, pp. 61 y 62 anteriores), da la interpretación geométrica de estas diferencias, como parte final del corolario I (Art. 62) de la sección IV, para las curvas que se forman trazando sus ordenadas a partir de un punto fijo:

> Todo esto se debe también entender acerca de las curvas *AMD* (**Fig. 4.22**), cuyas ordenadas *BM*, *Bm* y *Bn* partan todas de un punto fijo *B*; pues para tener, por ejemplo, la segunda diferencia de *BM*, es necesario concebir otras dos ordenadas *Bm* y *Bn* que formen los ángulos *MBm* y *mBn*, infinitamente pequeños; y al haber descrito con centro en *B* los pequeños arcos de círculo *MR* y *mS*, la diferencia de las pequeñas rectas *Rm* y *Sn* será la diferencia segunda de *BM*; y se podrá tomar por constantes a los pequeños arcos *MR* y *mS*, o las pequeñas partes de la curva *Mm* y *mn*, o en fin, las pequeñas rectas *Rm* y *Sn*. Y lo mismo pasa para las diferencias terceras, cuartas, etc., de la ordenada *BM*.

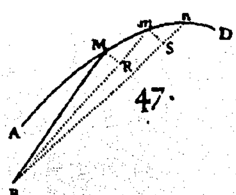


Fig. 4.22

Luego, en el 2° punto del corolario II (Art. 64) de la misma sección, explica:

> 2°. En las curvas cuyas ordenadas *BM*, *Bm* y *Bn* parten de un mismo punto *B* (**Figs. 4.23** y **4.24**), se describirán con centro en *B* los arcos *MR* y *ms*, que se considerarán como perqueñas rectas perpendiculares sobre *Bm* y *Bn* (Art. 3, Postulado II); y habiendo prolongado *Mm* en *E*, y descrito con centro en *m* y radio *mn* el pequeño arco *nkE*, se formará el ángulo *EmH* = *mBn*, y se trazarán las pequeñas rectas *nl*, *ll* y *kcg* pa-

ralelas a mS y a Sn. Supuesto eso, debido a que el triángulo BSm es rectángulo en S, el ángulo $BmS + mBn$ o $BmS + EmH$ equivale a un recto; y por lo tanto el ángulo BmE equivale a un recto más SmH; equivale también al recto $Mrm + RMm$ dado que es externo al triángulo RMm. Entonces el ángulo $SmH = RMm$.

De esto se sigue, 1°. Que si se quiere que dx sea constante, es decir que los pequeños arcos MR y mS sean iguales entre sí, el triángulo SmH será semejante e igual al triángulo RMm; y que así $Hn = ddy$, y $Hk = ddu$. 2°. Que si se toma a du como constante, el triángulo gmk será semejante e igual al triángulo RMm; y que así kc expresará a ddy, y Sg o cn, a ddx. Por último, 3°. Que si se toma a dy como constante, los triángulos iml y RMm serán iguales y semejantes; y que así iS o $ln = ddx$, y $lk = ddu$.

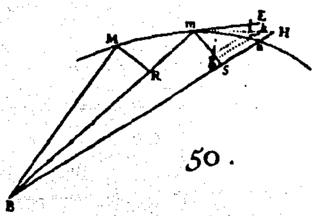


Fig. 4.23

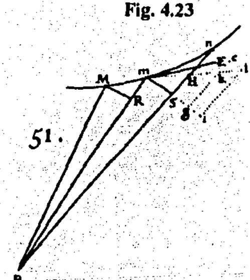


Fig. 4.24

§4.5 Apéndice B. Cáusticas por reflexión y por refracción

Definición

Si se concibe una infinidad de rayos *BA*, *BM*, *BD*, ... (**Figs. 4.25** y **4.26**) que partan de un punto luminoso *B*, reflejándose en la intersección de una línea curva *AMD*, de tal modo que los ángulos de reflexión sean iguales a los ángulos de incidencia, la línea *HFN*, que tocan los rayos reflejados o sus prolongaciones *AH*, *MF*, *DN*, ... es llamada *cáustica por reflexión.*

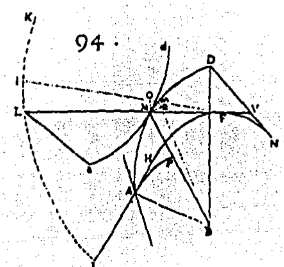


Fig. 4.25

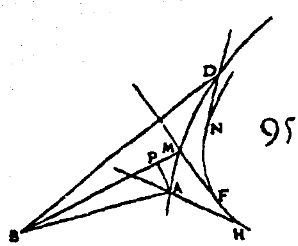


Fig. 4.26

Definición

Si se concibe que una infinidad de rayos BA, BM, BD, ... que parten de un mismo punto luminoso B (**Fig. 4.27**) se rompen al encontrar una línea curva AMD al acercarse o alejarse de sus perpendiculares MC, de modo que los senos CE de los ángulos de incidencia CME sean siempre a los senos de los ángulos de refracción CMG en la misma razón dada de m a n, la línea curva FHN que tocan todos los rayos que se rompen o sus prolongaciones AH, MF, DN, ... se llama *cáustica por refracción* (**Fig. 4.28**).

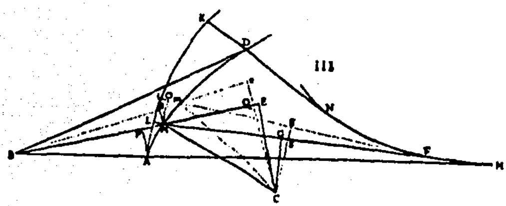


Fig. 4.27

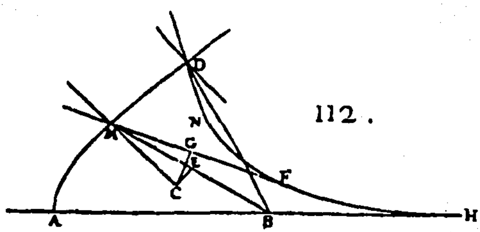


Fig. 4.28

> [...] *el sistema leibniciano no obstante su apariencia de puramente aproximativo, es tan superior al de los límites y al de las derivadas por la facilidad con que se presta á las aplicaciones* [...] [Díaz Covarrubias 1873, 66].

> *En el caso de los números racionales o reales, el conocimiento completo que poseemos respecto a ellos, hace demostrable la no existencia de infinitesimales.* [...] *Por lo tanto todo número real distinto de cero es una clase que contiene racionales, y todos los racionales son finitos; por consiguiente todo número real es finito. Consecuentemente, si fuera posible, en cualquier sentido, hablar de números infinitesimales, tendría que ser en algún sentido radicalmente nuevo* [Russell 1938, 335].

Capítulo 5

El análisis infinitesimal en la Academia de Ciencias de París de 1700 a 1706

§5.1 Introducción

En el capítulo 4 se explicó la estructura axiomática del texto de l'Hospital, la cual fue un intento por formalizar el concepto intuitivo de cantidades infinitesimales y las operaciones que regían su uso. En las primeras exposiciones públicas que hizo Leibniz de su cálculo evitó referirse a tales cantidades. En su 'Nova Methodus' (1684; véase §2.6 anterior) definió (véase **Fig. 5.1**): "Llamamos ahora *dx* a un segmento de recta escogido arbitrariamente, y *dv* [...], es decir diferencia de *v*, [...] un segmento que sea a *dx* como *v* [...] a *XB* [...]" [Leibniz 1989, 104-105].[1] Usa el sustantivo 'diferencia' y no 'diferencial'; el término *differentialis* lo usaba sólo como adjetivo. Además, el uso de estos términos refleja los orígenes de su nuevo cálculo (§2.3) [*cf.* Leibniz 1989, 105, *n.* 37]. Esta elección consciente de definir así la diferencia en la primera publicación del cálculo diferencial seguramente la hizo Leibniz para evitar tener que dar explicaciones sobre qué son las cantidades infinitesimales [*cf.* Bos 1974-75, 63].[2] Sin embargo, confróntese esta definición con lo que comentó más adelante:

> Con experiencia será fácil demostrar todo esto[3] a partir de esta única observación, la cual no ha recibido la importancia debida hasta ahora: se puede considerar a *dx*, *dy*, *dv*, *dw*, *dz* como proporcionales a las diferencias, crecimientos o decrecimientos elementales (respectivamente) de *x*, *y*, *v*, *w*, *z* [Leibniz 1989, 110].

> [...] encontrar la *tangente* consiste en trazar una recta que una dos puntos de la curva infinitamente cercanos, es decir, prolongar el lado de un polígono *infinitangular* que para mí, equivale a la curva.[4] Luego, siempre se puede representar esta distancia infinitamente pequeña por una

1. En la versión francesa de donde se toma esta cita están corregidos los errores de notación que aparecieron en 1684; no así en la versión castellana de 1987 [Leibniz 1987].
2. Isaac Newton (1642-1727) tampoco explicitó consideraciones infinitesimales en su *Principia* (1687), en el que aparece por primera vez públicamente su cálculo. En el cálculo que inventó, formuló sus métodos en términos algebraicos, recurrió a los infinitesimales para la interpretación geométrica y los abandonó a favor de la teoría de las fluxiones; ésta descansó finalmente en la doctrina de las razones (cocientes) últimas. Cada uno de estos enfoques perseguía distintos fines: en la teoría de las fluxiones subyacían los métodos heurísticos de su cálculo, tales métodos fueron justificados por la teoría de las razones últimas y la teoría de los infinitesimales abreviaría la demostración rigurosa [véase Kitcher 1973 para un estudio de las distintas facetas del cálculo de Newton].
3. Se refiere tanto a las reglas que da sin demostración de su cálculo, como a la obtención de máximos y mínimos, tangentes, etcétera.
4. *Cf.* §4.2, Postulado II.

diferencial conocida *dv*, o por una relación en la que aparezca, es decir, por una tangente conocida [Leibniz 1989, 111].

Muy pronto surgió un fuerte debate en la Academia de Ciencias de París sobre la validez de los métodos infinitesimales basados en estos conceptos, acerca de los cuales Leibniz no había hecho públicas sus opiniones. Los participantes en el debate se basaron en la versión del cálculo leibniciano que había publicado l'Hospital.

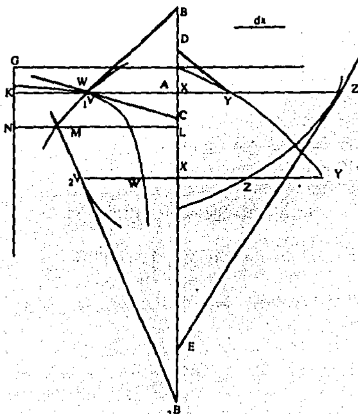


Fig. 5.1

§5.2 Debate en la Academia de Ciencias de París, 1700-1706

Se ha divulgado ampliamente la oposición (1734) del obispo George Berkeley (1685-1753) al cálculo de Newton; menos conocida es la oposición previa (1694) de Bernard Nieuwentijdt (1654-1718) al de Leibniz —y también al de Newton—. En cambio, la controversia intensamente acalorada que prevaleció de 1700 a 1706 en la *Académie des Sciences* de Paris, sobre la admisibilidad lógica del nuevo cálculo, es casi desconocida. Prácticamente ningún texto de historia de las matemáticas se refiere a ella, y muy poco se dice en los que hay sobre historia del cálculo, si acaso la mencionan.[5]

Aunque Jean Bernoulli fue maestro particular de l'Hospital, también inició a otros en el estudio de la nueva rama de las matemáticas. Dentro del círculo de eruditos alrededor de Nicolas Malebranche, quienes estudiaron las nuevas técnicas infinitesimales fueron Pierre Varignon, Pierre-Rémond de Montmort y Charles Reyneau (1656-1728), entre otros; bajo la guía de l'Hospital y Varignon también destacaron Carré, Joseph Saurin (1659-1737) y Guisnée, entre otros.

Sin embargo, surgió un grupo de académicos que se opusieron al nuevo cálculo: Michel Rolle (1652-1719), Philippe de la Hire (1640-1718) y Galloys (1632-1707), entre los más destacados. Éstos se oponían a que el cálculo leibniciano, que conocían según la versión de l'Hospital, recibiera estatus riguroso como una materia más dentro de las matemáticas. Rolle fue el líder de este grupo y, por parte de los infinitesimalistas, Varignon tomó el liderazgo en la defensa del nuevo cálculo contra los ataques anti-infinitesimalistas.

5.2.1 Primera etapa del debate, 1700-1701

El debate inició en julio de 1700; su primera etapa no se hizo pública e incluso se prohibió a los miembros de la *Académie des Sciences* divulgarlo. Duró hasta fines de 1701. Los ataques de Rolle se resumen en los siguientes tres puntos: (1) el cálculo no es riguroso; (2) conduce a errores, y (3) no ha producido ninguna verdad nueva. Sus objeciones principales fueron:

1. El cálculo diferencial postula una jerarquía de órdenes de infinitos arbitrariamente grandes y pequeños (véase 4.2.3, Art. 63, p. 63 anterior);

---

5. En menos de siete renglones se informa de esta disputa en un libro de Boyer [1959, 241] y en un estudio amplio y detallado sobre el cálculo leibniciano se hace referencia a ella en una nota a pie de página [Bos 1974-75, 55, *n.* 89].

2. Una cantidad más (+) o menos (-) su diferencia se hace igual a la cantidad misma, lo cual es lo mismo que decir que la parte es igual al todo (véase 4.2.1, Art. 2, p. 47 anterior), y
3. A veces las diferencias se usan como cantidades que no son ceros y a veces como ceros absolutos.

En cuanto a la primera objeción, Rolle reclamó que no se había dado alguna demostración de la existencia de los diferentes órdenes o géneros de los infinitos (véase p. 46 anterior), y planteó lo siguiente: al obtener la diferencia de $y^2 = ax$, se tiene $2ydy = adx$. Ahora, suponiendo que $(x + dx, y + dy)$ pertenezca a la parábola, se tendrá

$$(y + dy)^2 = a(x + dx) \text{ o } ax + adx = y^2 + 2ydy + dy^2.$$

Luego, considerando el sistema

$$y^2 = ax$$
$$2ydy = adx$$
$$ax + adx = y^2 + 2ydy + dy^2,$$

sustituyendo el valor adx de la segunda ecuación en la tercera,

$$ax + 2ydy = y^2 + 2ydy + dy^2 \text{ o } ax = y^2 + dy^2,$$

y, sustituyendo el valor de ax de la primera ecuación en esta última, $y^2 = y^2 + dy^2$, y por lo tanto $dy^2 = 0$ o $dy = 0$. Así, a partir de la segunda, $2ydy = adx$, como $dy = 0$, también $dx = 0$.

De esto concluyó Rolle que los infinitesimales son ceros absolutos. Nótese que consideraba que las reglas algebraicas para cantidades finitas se podían aplicar de la misma manera en la manipulación de cantidades infinitesimales. Si así fuera, a partir de que $x + dx = x$ (Postulado I, p. 47 anterior), se tendría $dx = 0$ de inmediato.

L'Hospital, en su texto, no previno explícitamente a los lectores de que precisamente el Postulado I está ampliando la concepción de igualdad y que por lo tanto no son las mismas leyes algebraicas que rigen la manipulación de las cantidades finitas las que se debían aplicar a las relaciones que involucran cantidades infinitesimales. Jacques Bernoulli sí había advertido que en este caso no se siguieran leyes tales como 'si de iguales se restan iguales, los resultados son iguales'; pero esta advertencia no fue aceptada.

En una publicación de 1703, escribió Rolle:

> En primer lugar, se ve que todos estos infinitos de primer género tales como dx o dy, no teniendo algún alcance real, todos los infinitos de los otros géneros serán también ceros absolutos en el cálculo. Todos estos siguientes infinitos de infinitos, que hacen el sistema, serán 'nadas' que se supone están infinitamente comprendidas en otras 'nadas'.[6]

Así, en la primera objeción —y también en la segunda— se negaba la existencia de cantidades que no satisficieran el axioma arquimediano[7] y no se aceptaba la negación de la noción común 5 de *Los Elementos* de Euclides (*fl.* 300 *a. C.*).[8] En la tercera objeción no se aceptaba la manipulación de los infinitesimales aparentemente 'de manera arbitraria'.

Hasta 1734, los británicos daban por hecho que el cálculo inventado por Newton era el mismo que el de Leibniz y llamaban 'fluxiones' a las 'diferencias' de Leibniz, usando la notación de Newton (véase, *v. gr.*, p. 44 anterior, donde se cita a Edmund Stone).[9] Algo parecido ocurrió con Varignon: daba por hecho que ambos cálculos eran equivalentes pero, además, que el de Newton sí era riguroso. Y así, para responder a las tres objeciones anteriores de Rolle, se apoyó en Newton. Por ejemplo, citó el Escolio al Lema XI del Libro I de *Principia Mathematica*, parte del cual dice:

> [...] si en lo sucesivo considerase las cantidades como formadas por partículas constantes o usara pequeñas curvas como rectas, no debe entenderse que me refiero a indivisibles, sino a divisibles evanescentes, ni a las sumas y razones de partes determinadas, sino siempre a los límites de sumas y razones; [Newton 1982, 267].

---

6. Rolle, M. 1703. "Du nouveau système de l'infini". *Histoire et Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, p. 324 [citado en Mancosu 1989, 231].
7. Arquímedes (*ca.* 287-212 *a. C.*), en el prefacio a la *Cuadratura de la parábola* (carta a Dositeo) [contenido en Fauvel y Gray 1988, 153], supuso el siguiente lema: "[...] el exceso por el que la mayor de [dos] áreas desiguales excede a la menor puede, al ser añadido a sí mismo, hacerse que exceda a cualquier área finita dada" (*cf.* Art. 63, p. 63 anterior).
8. "El todo es mayor que la parte".
9. Para detalles sobre los británicos que escribieron acerca del cálculo y no comprendieron los conceptos de Newton durante esta época, véase Cajori 1917.

Todos los infinitesimalistas franceses creían en la existencia de cantidades infinitamente pequeñas. Varignon trató de probarlo. Interpretó la dx leibniciana como un proceso, esto es, dx es el instante en que x se hace cero. De esta manera, durante las manipulaciones algebraicas, las diferencias se consideraban al borde de ser cero, lo cual ocurría sólo al final. Era ésta la respuesta a la tercera objeción de Rolle. Sin embargo, según se vió en el capítulo 4, dx se tomaba como una constante numérica.

En cuanto a que el cálculo conducía a errores y no había producido alguna verdad nueva, los ejemplos de Rolle fueron desafortunados. He aquí uno de ellos: había determinado que para la curva

$$a^{1/2}\,(y - b) = (x^2 - 2ax + a^2 - b^2)^{2/3}$$

con el cálculo diferencial sólo se obtenía un máximo en $x = a$ al tomar $dy = 0$ y por otro método había encontrado dos mínimos, en $x = a \pm b$. No había aplicado correctamente el algoritmo: con $dx = 0$ (o dy = infinito) se obtienen en $x = a \pm b$ dos puntos donde la línea recta tangente es vertical (véase Art. 47, p. 60 anterior).

5.2.2 Las opiniones de Leibniz

Según Javier de Lorenzo [1985, 119], en 1695 Leibniz había dado los siguientes cuatro argumentos, sobre el cálculo, a la crítica del holandés Nieuwentijdt de que los infinitésimos difieren de cero, se opera con ellos, pueden dar una suma diferente de cero, y a veces desvanecerse:

1. Es un método de invención más que de demostración;
2. No difiere del de Arquímedes más que en la manera de hablar;
3. El error que se comete al tomar el cálculo de diferencias o de indivisibles es menor que cualquier número dado, y
4. Se pueden tomar en el mismo sentido con el que los algebristas manejan los imaginarios.

El 29 de agosto de 1701, había escrito Leibniz:

> no se tiene necesidad de tomar aquí el infinito en sentido estricto, sino sólo como cuando se dice en óptica que los rayos del Sol vienen de un punto infinitamente alejado y se estiman de esta manera paralelos. Y cuando hay varios grados de infinito, o infinitamente pequeño, es

> como cuando el globo de la Tierra se estima como un punto respecto a la distancia de las fijas [estrellas], y una bola que manipulamos es también un punto en comparación con el semidiámetro del globo de la Tierra. De modo que la distancia de las fijas es un infinitamente infinito o infinito del infinito con relación al diámetro de la bola. Porque en lugar del infinito o del infinitamente pequeño, se toman cantidades tan grandes y tan pequeñas como se requiera para que el error sea menor que el error dado, de manera que uno difiere del estilo de Arquímedes sólo en las expresiones que son más directas en nuestro método y más conformes al arte de inventar [citado en Robinson 1973, 261-262].

Varignon había pedido a Leibniz el 28 de noviembre de 1701:

> Los enemigos de vuestro cálculo siguen triunfando, y la difunden [la opinión citada antes] como una declaración clara y precisa de vuestro punto de vista sobre esta materia. Le suplico entonces, señor, tenga a bien enviarnos lo más pronto posible tal declaración categórica y precisa de su opinión [citado en Mancosu 1989, 236].

La respuesta de Leibniz fue escrita el 2 de febrero de 1702 y se resume su contenido en los siguientes tres puntos [Mancosu 1989, 236]:

1. No hay necesidad de basar el análisis matemático en suposiciones metafísicas;
2. Sin embargo, podemos admitir a las cantidades infinitesimales, si no como reales, como entes ficticios bien fundados, como se hace en álgebra con las raíces cuadradas de números negativos, y
3. Se podrían organizar las demostraciones de modo que el error siempre sea menor que cualquier error asignado.

Y en junio de 1702 escribió Leibniz:

> De los nuestros, creo que el señor Fontenelle, quien posee una mente despierta y audaz, se quiso burlar cuando dijo que quería hacer unos elementos metafísicos de nuestro cálculo. Para decir la verdad, yo mismo no estoy muy convencido de que se requiera cosiderar a nuestros infinitos e infinitamente pequeños de otra manera que como cosas ideales y como ficciones bien fundadas. Creo que no hay creatura que no esté formada por una infinidad de creaturas; sin embargo, no creo que haya ni pueda haber infinitamente pequeñas, y esto creo poder demostrarlo [citado en Robinson 1973, 262-263].

Así, para Leibniz el problema era asegurar el uso confiable de las cantidades infinitesimales, y no su existencia. En septiembre de 1716, poco antes de morir, escribió lo siguiente:

> En cuanto al cálculo de los infinitesimales [...] [c]uando [nuestros otros amigos] se disputaban en Francia con el Abad Gallois, el Padre Gouge, y otros, les manifesté que yo no creía que hubiera magnitudes verdaderamente infinitas ni verdaderamente infinitesimales: que sólo eran ficciones, pero ficciones útiles para abreviar y hablar universalmente [...]. Pero como el señor Marqués de l'Hospital creía que por ello yo traicionaba la causa, me rogaron que no dijera nada, aparte de lo que había dicho en un lugar de las *Actas* de Leipzig; con placer accedí a su ruego [citada en Robinson 1973, 263].

5.2.3 Segunda etapa del debate: triunfo de los infinitesimalistas

Finalmente se decidió hacer público el debate, y el 3 de abril de 1702 apareció un artículo de Rolle en el *Journal de Sçavans*. Reclamó que los métodos del análisis infinitesimal eran insuficientes para determinar las tangentes a una curva cuando hay más de una tangente en alguno de sus puntos. Propuso como claro reto a los infinitesimalistas la curva

$$y = 2 + \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x}$$

que al eliminar los radicales se convierte en

$$y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 48xy + 4x^2 - 64x + 16y^2 = 0.$$

Quien se encargó de dar respuesta fue Saurin, y se tuvo éxito al aplicar la regla de l'Hospital. Y era precisamente que el cálculo infinitesimal se estaba aceptando como un método riguroso por el éxito en la obtención de resultados correctos, que Rolle cuestionaba con sus ejemplos desafortunados, llegándose a calificarlo de ignorante.

Según las opiniones citadas de Leibniz (véase 5.2.2), particularmente la que dio en 1716, tenía plena certeza de la imposibilidad de demostrar la existencia de cantidades infinitesimales. Rolle no sólo cuestionaba los fundamentos del nuevo cálculo sino también los resultados. Sus cuestionamientos impulsaron el avance de las investigaciones en el análisis infinitesimal.

El debate tomó otros rumbos, de índole político y de control del poder dentro de la Academia. Por ejemplo, siendo uno de los editores

Gouye, el artículo aludido de Rolle fue publicado íntegro, mientras que la respuesta de Saurin fue recortada para su publicación. Durante 1703 y 1704 continuaron los cuestionamientos de Rolle. El secretario perpetuo de la Academia, Fontenelle, al leer el elogio a l'Hospital el 2 de abril de 1704, tomó partido abiertamente a favor de los infinitesimalistas y trató de callar a la oposición alabando el texto de l'Hospital por la aceptación tan amplia de que gozaba. Sin embargo, soslayó las críticas sobre los fundamentos del nuevo algoritmo.

He aquí dos párrafos del elogio de Fontenelle a l'Hospital:

> El señor l'Hospital decidió comunicar sin reserva los secretos ocultos de la nueva geometría, y lo hizo en el famosos libro *Analyse des infiniment petits*, que publicó en 1696. En él, fueron revelados todos los secretos del infinito geométrico, y del infinito del infinito; en una palabra, de todos estos diferentes órdenes de infinitos, que se levantan los unos encima de los otros, y forman el edificio más asombroso y más audaz que la mente humana jamás se haya atrevido a imaginar [citado en Mancosu 1989, 240].

> Por lo que esta obra ha sido recibida con un aplauso universal: pues el aplauso es universal cuando muy fácilmente se pueden contar en toda Europa los sufragios que faltan, y siempre deben faltar algunos en las cosas nuevas y originales, sobre todo cuando requieren ser bien entendidas. Quienes señalan los acontecimientos de la historia de las ciencias, saben con qué avidez ha sido acogida la obra *Analyse des infiniment petits* por todos los geómetras nacientes, a quienes el método antiguo y el nuevo les son indiferentes, y que no tienen otro interés que el de ser instruidos. Como el propósito del autor había sido principalmente formar matemáticos, y sembrar en las mentes las simientes de la geometría superior, tuvo el placer de verlas fructificar todos los días, y los problemas antes reservados a quienes habían envejecido en las espinas de las matemáticas, llegaron a ser los primeros intentos de los jóvenes. Aparentemente la revolución será también mayor, y se encontrará con el tiempo tantos discípulos como ha habido matemáticos [citado en Mancosu 1989, 241].

Prácticamente, a fines de 1705, era Rolle un opositor solitario y aislado del resto de los matemáticos dentro de la *Académie des Sciences* de París, aunque el único que le contestaba era Saurin. La Academia tuvo que tomar una decisión sobre este debate y hacerla pública. Se dio a conocer en enero de 1706. A fines de 1705 se había formado una comisión para ello, que incluyó al Abad Bignon, la Hire, Galloys, Fontenelle y Cassini. Se hizo la paz: Rolle se convirtió (obviamente por cuestiones de estabilidad como miembro de la Academia, ya que no se logró mostrar la solidez matemática de los métodos infinitesimales), siguiendo las recomendaciones de esta comisión. Otro de los iniciadores de la oposición, Galloys, murió en 1707 y ésta desapareció.

FALTA PAGINA

No. 96 a la ___

Reflexiones finales

La historia de las matemáticas posee una atracción inherente como parte de nuestra cultura. En esta tesis he presentado algunas reflexiones en torno a los inicios de la evolución de nuestro actual concepto de derivada. He sido impulsado a incursionar en este tema motivado por intereses pedagógicos. Si bien no se tiene una teoría sobre las relaciones existentes entre la historia y la pedagogía de las matemáticas, en diversas partes del mundo hay profesores, matemáticos, historiadores, entre otros profesionales, interesados en esta línea de investigación: exploran las similitudes entre el proceso histórico y el de aprendizaje. Se dice que la historia puede ayudar al maestro a entender las dificultades intrínsecas de determinados conceptos y a motivar a sus estudiantes mostrándoles cómo surgió una idea matemática. Realmente no hay un común acuerdo sobre la utilidad del uso de la historia de las matemáticas en la enseñanza de éstas; sin embargo, la tendencia es construir una teoría o un marco teórico para relacionarlas.

Una de las diversas dificultades, tanto para el profesor como para los alumnos, subyacentes al proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo, radica en el conflicto entre la organización de este saber como conocimiento científico bajo los actuales estándares de rigor lógico alcanzado y la evolución que han experimentado sus conceptos. El desarrollo histórico de los conceptos del cálculo no está ampliamente difundido entre los profesores. La estructura de los textos que existen en el mercado se basa en los requerimientos actuales de rigor lógico y generalmente son las únicas fuentes a las que tienen acceso los profesores para la preparación de los cursos que imparten.

Prácticamente todos los autores de libros de texto de cálculo señalan a Newton y a Leibniz como los inventores del cálculo diferencial e integral. Sin embargo, posiblemente incluso varios de los autores mismos no comprendan el alcance de esta afirmación (señalan como único punto importante el descubrimiento del ahora llamado 'teorema fundamental del cálculo'), y los lectores pueden obtener la impresión de que el cálculo expuesto en tales textos es el que inventaron esos dos grandes científicos.

Se ha explicado en este trabajo que se señala a Leibniz como uno de los inventores del cálculo porque: (1) abarcó todos los métodos particulares para cuadraturas y trazado de tangentes de sus antecesores, al generalizarlos y unificarlos, en sólo dos conceptos que ahora conocemos como 'integral' y 'derivada'; (2) desarrolló una notación adecuada para estos dos conceptos y las reglas para manipularla, creando así un algoritmo que permite de manera mecánica llegar a resultados, y (3) reconoció la relación inversa entre los procesos de integración y derivación.

Además, los textos de cálculo actuales en ningún momento hacen notar que esta rama de las matemáticas ha evolucionado siguiendo distintos enfoques (como sí lo discutió, por ejemplo, Francisco Díaz Covarrubias [1873, cap. V]): aparte del leibniciano y del newtoniano, sobresale el trabajo desarrollado por Joseph Louis Lagrange (1736-1813) durante la segunda mitad del siglo XVIII, quien trató de convertir al cálculo en parte del análisis algebraico motivado precisamente por los problemas de fundamentación. Aún peor es que los autores de libros de texto de cálculo hoy en día, sin darse cuenta, mezclan estas tres tradiciones en cuanto a notación, conceptos, términos, etc., y los desarrollos posteriores. Lo hacen porque carecen de una información sólida sobre la historia del cálculo.

Esta tesis se centró en la línea de investigación iniciada por Leibniz y sólo en los primeros pasos de la exploración y el desarrollo del cálculo diferencial. Se ha discutido la manera en que se descubrieron varios resultados importantes —como las reglas básicas de derivación— que en la enseñanza actual sólo se demuestran. Los profesores de cálculo que lean esta tesis podrán conocer una parte de la faceta histórica de su objeto de enseñanza; recuperarán la riqueza geométrica y heurística de la primera elaboración del análisis infinitesimal, lo cual, en el campo de la enseñanza, ha sido soslayado a favor de los fundamentos y el rigor matemáticos.

En el texto *Analyse des infiniment petits* se dieron a conocer por primera vez muchos de los descubrimientos hechos con el recién creado análisis infinitesimal y a partir de él continuaron las investigaciones de esta rama de las matemáticas. Las discusiones de índole metafísico no impidieron encontrar nuevos resultados.

Por lo anterior, a pesar de que se han editado en el mundo gran cantidad de libros de cálculo desde el siglo XVIII hasta nuestros días, el texto de l'Hospital, a pocos días del tercer centenario de su primera edición, sigue teniendo vigencia pedagógica y debe difundirse su contenido principalmente entre quienes están involucrados en la enseñanza del cálculo.

FALTA PAGINA

No. 100 a la ___

Bibliografía

AITON, E. J. 1992. *Leibniz. Una Biografía.* (Col. AU No. 726. Versión española de Cristina Corredor Lanas.) Madrid: Alianza Editorial.

BARON, Margaret E. 1987. *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Nueva York: Dover.

BOS, H. J. M. 1974-75. "Differentials, Higher Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus". *Arch. Hist. Exact Sc.* **14**:1-90.

____________. 1984. "Newton, Leibniz y la tradición leibniziana". [Contenido en Grattan-Guinness 1984, pp. 69-124.]

BOYER, Carl B. 1959. *The History of the Calculus and its Conceptual Development* (*The Concepts of the Calculus*). Nueva York: Dover.

BURTON, David M. 1988. *The History of Mathematics: An Introduction.* Iowa: WCB.

CAJORI, F. 1917. "Discussion of Fluxions: from Berkeley to Woodhouse". *The American Mathematical Monthly* **24** (4) 145-154.

____________. 1925. "Leibniz, the Master-builder of Mathematical notations". *Isis* **7**: 412-429.

CAMBRAY Núñez, Rodrigo. 1991. "Leibniz, G. W. *Nova Methodus* y *De Geometria Recondita*". *Mathesis* 7 (1) 117-121. (Reseña de Lorenzo 1987.)

DESCARTES, René. 1987. *Discurso del método, dióptrica, meteoros y geometría.* (Prólogo, trad. y notas de Guillermo Quintás Alonso.) Madrid: Alfaguara.

DÍAZ COVARRUBIAS, Francisco. 1873. *Elementos de Análisis Trascendente ó Cálculo Infinitesimal* ... México: F. R. Castañeda y L. G. Rodríguez Impresores.

DUDLEY, Underwood. 1988. (Reseña de: *Calculus with Analytic Geometry*, de George F. Simmons. McGraw-Hill Book Company. Nueva York. 1985. xiii + 950 pp.) *American Mathematical Monthly* **95**: 888-892.

FAUVEL, J. y GRAY, J. 1988. *The History of Mathematics: A Reader*. Londres: McMillan y The Open University.

GONZÁLEZ Urbaneja, Pedro Miguel. 1992. *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII. Una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal*. (Col. AU No. 716.) Madrid: Alianza Editorial.

GRABINER, J. V. 1983. "The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass". *Mathematics Magazine* **56** (4) 195-206.

_____________. 1995. "Descartes and Problem-Solving". *Mathematics Magazine* **68** (2) 83-97.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor (ed.). 1984. *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Madrid: Alianza Editorial. (Col. Alianza Universidad No. 387. Trad. de Mariano Martínez Pérez.) [Ivor Grattan-Guinness (ed.). *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910. An Introductory History*. Londres: Duckworth, 1980]

HANKINS, Thomas L. 1988. *Ciencia e ilustración*. México: Siglo XXI.

KATZ, Victor J. 1993. *A History of Mathematics. An Introduction*. Nueva York: HarperCollins College Publishers.

KITCHER, Philip. 1973. "Fluxions, Limits, and Infinite Littlenesse. A Study of Newton's Presentation of the Calculus". *Isis* **64**: 33-49.

LEIBNIZ, G. W. 1987. *Análisis infinitesimal*. (Estudio preliminar de Javier de Lorenzo y traducción de Teresa Martín Santos.) Madrid: Tecnos. [Contiene la versión en castellano de dos artículos de Leibniz: "Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus". *Acta Erudirorum*, octubre, 1684; y "De Geometria recondita et Analysi Indivisibilium atque infinitorum". *Acta Erudirorum*, junio, 1686.]

LEIBNIZ, G. W. 1989. *La naissance du calcul différentiel. 26 articles des «Acta Eruditorum».* (Int. tr. y notas de Marc Parmentier; prefacio de Michel Serres.) París: Librairie Philosophique J. Vrin.

l'HOSPITAL, Marquis de. 1988. Réimpresion de l'*Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes* du Marquis de l'HOSPITAL -1696- [suivi des *Eclaircissements sur l'analyse des infiniments petits* par M. VARIGNON -1725-]. París: ACL.

____________. 1696. [Véase l'Hospital 1988.]

____________. 1715. [2a. ed. de l'Hospital 1696.]

LORENZO, Javier de. 1985. "Pascal y los indivisibles". *Theoria* (Segunda Época) **1**: 87-120.

____________. 1987. [Estudio preliminar de Leibniz 1987.]

____________. 1989. *Introducción al estilo matemático.* Madrid: Tecnos.

MAHONEY, Michael S. 1990. "Infinitesimals and transcendent relations: The mathematics of motion in the late seventeenth century". [Contenido en David C. Lindberg y Robert Westman. *Reappraisals of the Scientific Revolution.* Cambridge: Cambridge University Press. Pp. 461-491.]

____________. 1994. *The Mathematical Career of Pierre de Fermat, 1601-1665* (2a. ed.). Princeton, Nueva Jersey: Princeton University Press.

MANCOSU, Paolo. 1989. "The Metaphysics of the Calculus: A Foundational Debate in the Paris Academy of Sciences, 1700-1706". *Historia Mathematica* **16**: 224-248.

NEWTON, Isaac. 1982. *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* [Int. y notas de A. Escohotado; tr. de A. Escohotado y M. Sáenz de Heredia]. Madrid: Editora Nacional.

PAPPUS. 1939. *Mathematical Collection*, VII. (Tr. I. Thomas. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, II. Heinemann.)

PARMENTIER, Marc. 1989. "L'Optimisme mathématique". (Introducción a Leibniz 1989, 11-52.)

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA. 1992. *Diccionario de la Lengua Española*, t. I. Madrid: Espasa Calpe.

REESE, William L. 1991. *Dictionary of Philosophy and Religion. Eastern and Western Thought.* Nueva Jersey: Humanities Press.

RÍBNIKOV, K. 1987. *Historia de las matemáticas*. Moscú: Mir.

ROBINSON, A. 1973. "L'Hospital (L'Hôpital), Guillaume-François-Antoine de (Marquis de Sainte-Mesme, Comte d'Entremont)", en: Charles C. Gillispie (ed.). *Dictionary of Scientific Biography*. Nueva York: Charles Scribners Sons, 1970-1980. Vol. 8, pp. 304-305.

____________. 1974. *Non-standard Analysis* (ed. rev.). Amsterdan y Londres: North-Holland Pub. Co.

ROBLES, José A. 1993. *Las ideas matemáticas de George Berkeley, Obispo de Cloyne*. México: UNAM.

RUSSELL, Bertrand. 1938 (2a. ed.). *The Principles of Mathematics*. Nueva York y Londres: W. W. Norton & Co.

SCHUBRING, Gert. 1992. "Sobre la metodología de análisis de libros de texto históricos: Lacroix como autor de libros de texto". *Mathesis* **8**: 273-298. [Versión en castellano de Rodrigo Cambray Núñez.]

SMITH, David Eugene. 1958. *History of Mathematics*, Vol. I (General Survey of the History of Elementary Mathematics). Nueva York: Dover.

____________. 1959. *A Source Book in Mathematics*. Nueva York: Dover.

STRUIK, D. J. 1963. "The origin of L'Hôpital's rule". *The Mathematics Teacher* **56**: 257-260.

____________ (ed.). 1969. *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

TRUESDELL, C. 1958. "The New Bernoulli Edition". *Isis*, pp. 54-62.

VIÈTE, François. 1983. *The Analytic Art*. Kent, Ohio: The Kent State University Press. (Tr. T. Richard Witmer.)

WALKER, Evelyn. 1932. *A Study of the 'Traité des Indivisibles' of Gilles Persone de Roberval*. Nueva York: Teachers College, Columbia University.

WHITEHEAD, Alfred North. 1948. *An Introduction to Mathematics*. Londres, Oxford y Nueva York: Oxford University Press.