00384

2

2EJ

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ESPACIOS DE HARDY DE TEMPERATURAS CONJUGADAS

FALLA DE ORIGEN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS
(M A T E M A T I C A S)

P R E S E N T A :

MARTHA DOLORES GUZMAN PARTIDA

DIRECTOR DE TESIS: DR. SALVADOR PEREZ ESTEVA

MEXICO, D. F. 1995

Deseo manifestar mi agradecimiento a las siguientes personas:
Al Dr. Salvador Pérez Esteva, director de esta tesis, por su orientación y asesoría para el desarrollo y conclusión de este trabajo.
Al Dr. Fernando Brambila Paz, por haberme permitido el acceso a su equipo de cómputo.
A Eduardo Frías, por su asesoría en el uso de Scientific Word.

Finalmente, hago constar mi reconocimiento a la Facultad de Ciencias, al Instituto de Matemáticas y a DGAPA por el apoyo que me brindaron para la realización de este trabajo.

A toda mi familia, especialmente a mi sobrina Ana Patricia.

A Rogelio.

Introducción

La teoría clásica de espacios de Hardy en el disco unitario, desarrollada durante la primera mitad de este siglo, podría ser considerada como una parte especial, aunque fundamental, de la teoría de funciones de variable compleja y en estrecha relación con el análisis de Fourier. Está basada en factorizaciones de funciones analíticas debidas a F. Riesz y Smirnov, de las cuales, no hay análogos satisfactorios para funciones armónicas en $\mathbf{R}^n$. Sin embargo, la teoría tiene una continuación natural por métodos de variable real. Para ser más precisos, fueron la mayorización armónica, así como las técnicas de variable real que se centran alrededor de la teoría de Calderón-Zygmund, las herramientas básicas que permitieron el desarrollo de la teoría a $\mathbf{R}^n$ y que la liberaron de su dependencia de los métodos complejos.

Stein y Weiss [19] introducen la noción de sistema conjugado de funciones armónicas como una generalización natural del concepto de función holomorfa. Ellos definen $H^p\left(\mathbf{R}^{n+1}_+\right)$ para $p > \frac{n-1}{n}$ como un espacio cuyos elementos son sistemas conjugados de funciones armónicas y extienden a este contexto la teoría básica de F. Riesz sobre comportamiento frontera.

Es el teorema de Burkholder, Gundy y Silverstein [4] que en la situación clásica de una función analítica $F = u + iv$ establece la equivalencia entre la propiedad $F \in H^p$, $0 < p < \infty$ y la propiedad de que la función maximal no tangencial de u pertenezca a L^p, quien proporciona la manera de definir $H^p(\mathbf{R}^{n+1}_+)$ directamente como un espacio de funciones armónicas sin apelar a alguna noción de conjugación. Este teorema planteó en su época la siguiente interrogante: ¿Cuál es el papel del núcleo de Poisson?

Fueron Fefferman y Stein [8] quienes dieron respuesta a esta pregunta mostrando la equivalencia de las siguientes propiedades para una distribución temperada f :

1. $f = \lim_{t \to 0^+} u(\cdot, t)$, $u \in H^p$.

2. $\sup_{t>0} |f * \varphi_t(x)| \in L^p$ donde $\varphi \in S$, $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t)$ y $\int \varphi = 1$.

3. $\sup_{|x-y|<t} |f * \varphi_t(y)| \in L^p$ para φ como antes.

Este teorema mostró claramente que el núcleo de Poisson no jugaba ningún rol significativo y que podía ser reemplazado por cualquier identidad aproximada razonable.

Para desarrollar este trabajo de tesis se ha retomado, básicamente, la idea sobre la independencia de la identidad aproximada usada para definir los espacios de Hardy armónicos, cuando son vistos como cierta clase de distribuciones frontera. La pregunta que se planteó inicialmente fue: ¿Será posible obtener los espacios de Hardy armónicos, vistos como distribuciones frontera, a partir de una condición de pertenencia uniforme a L^p, pero considerando funciones de temperatura, de las cuales sabemos que el núcleo de Gauss-Weierstrass constituye una solución fundamental? Más aún, ¿Será posible definir espacios de parejas "conjugadas" de funciones de temperatura que satisfagan una condición de pertenencia uniforme a L^p y que vistos como distribuciones frontera coincidan con las distribuciones frontera de los espacios $\mathbf{H}^p$ de funciones holomorfas? En ambos casos, la respuesta fue afirmativa.

En el caso holomorfo, las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

pueden ser consideradas como una "descomposición" de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Además, el par de soluciones de las ecuaciones de Cauchy-Riemann está relacionado por medio de la transformada de Hilbert para una clase amplia de funciones.

En nuestro caso, el planteamiento es ¿Qué noción de conjugación introducir, o más precisamente, qué noción de "holomorfía" habrá que utilizar para que el par de ecuaciones diferenciales que describan esta noción puedan ser consideradas como una "descomposición" de la ecuación de calor

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \text{ ?}$$

En este contexto, surge también la siguiente pregunta ¿Es también la transformada de Hilbert quien establece para cada tiempo fijo la relación entre una y otra componente?

La respuesta a la primera cuestión nos remite al concepto de derivada fraccionaria de Weyl [15]. Dada la forma específica de la ecuación de calor, se necesita introducir un operador de derivación fraccionaria, en este caso, de orden $\frac{1}{2}$ respecto a t. La forma que adquieren las ecuaciones bajo esta nueva noción de "holomorfía" es la que proponen Kochneff y Sagher en [13]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -i\frac{\partial^{1/2}}{\partial t}v \\ i\frac{\partial^{1/2}}{\partial t}u &= \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned}$$

Además, una pareja (u, v) que verifique estas ecuaciones tendrá la propiedad de que cada componente es de temperatura, esto es, satisface la ecuación de calor [13]. Con respecto a la segunda cuestión, la respuesta es afirmativa, tal y como ocurre en el caso holomorfo. El espíritu de este trabajo lo constituye, precisamente, el conjunto de todas las ideas anteriores.

La tesis consta de dos capítulos y está organizada del modo siguiente:

En el Capítulo 1 se introducen de la manera usual los espacios de Hardy $H^p(\mathbf{R}^2_+)$ de funciones escalares de temperatura definidas en el semiplano superior. Se examina cuidadosamente el crecimiento de dichas funciones lo cual permite, posteriormente, dar sentido a la noción de "holomorfía" utilizada para definir nuestros espacios de Hardy $\mathbf{H}^p(\mathbf{R}^2_+)$ de parejas conjugadas de temperatura en $\mathbf{R}^2_+$. Se demuestra que la transformada de Hilbert, como en el caso holomorfo, es el operador integral singular que permite establecer para cada tiempo fijo la relación entre ambas componentes. Esta misma herramienta nos permite obtener el resultado principal del capítulo, a saber, que las distribuciones frontera de los espacios de Hardy de parejas conjugadas de temperatura, coinciden con las distribuciones frontera de los espacios de Hardy de funciones holomorfas. Se concluye este capítulo estableciendo una caracterización atómica de los espacios de distribuciones $Re\mathbf{H}^p$ para $0 < p \leq 1$. Sobre este punto es preciso aclarar que sólo hacemos una recapitulación en nuestro contexto de la caracterización atómica para el caso armónico (ver [6]).

En el Capítulo 2 trabajamos la misma noción de conjugación que en el capítulo anterior, considerando espacios de Hardy $\mathbf{H}^p(Q_\infty, \mathbf{X})$ de parejas conjugadas de funciones de temperatura definidas en $Q_\infty = (0,1) \times (0, \infty)$ y con valores en un espacio de Banach $\mathbf{X}$. Primero analizamos el caso escalar y en este contexto damos una caracterización de ciertos espacios de Hardy con condiciones de frontera bastante agradables, a saber, los espacios $\mathbf{H}^1_o(Q_\infty, \mathbf{C})$. Posteriormente, abordamos una situación más general: el caso de funciones con valores vectoriales. Nuevamente se pone de manifiesto la relación entre el caso holomorfo y nuestro caso: la equivalencia entre la existencia de límites en la frontera *c.t.p.* para funciones

holomorfas en los espacios de Hardy usuales $\mathbf{H}^p_{\mathbf{X}}(D)$, $1 \leq p < \infty$, propiedad conocida como (ARNP) (una formulación equivalente de esta propiedad se establece en [11]: un espacio de Banach complejo tiene (ARNP) si toda medida analítica $\mu \in M_{\mathbf{X}}(S^1)$, esto es, $\widehat{\mu}(n) = 0$ para cada $n < 0$, es representable) y la existencia de límites en la frontera *c.t.p.* para funciones conjugadas de temperatura en $\mathbf{H}^1_o(Q_\infty, \mathbf{X})$, propiedad que hemos denominado (AHRNP). La equivalencia de estas propiedades es el resultado principal de este capítulo.

Contenido

Capítulo 1

Espacios de Hardy de funciones de temperatura en $\mathbb{R}^2_+$

En este capítulo estudiamos espacios de Hardy de funciones de temperatura definidas en el semiplano superior. En la primera sección hacemos un estudio específico del caso escalar, analizando básicamente que tipo de crecimiento tienen nuestras funciones en dichos espacios de Hardy. También, se abordan algunos resultados que son de interés pues establecen un paralelismo con el caso armónico. En la segunda sección definimos el concepto de parejas conjugadas de funciones de temperatura introduciendo cierta noción de holomorfía, la cual adquiere sentido en virtud de las estimaciones hechas para el caso escalar. Aquí se demuestra que las distribuciones frontera de nuestros espacios de Hardy de parejas de temperatura coinciden con las distribuciones frontera de los espacios de Hardy de funciones holomorfas [9, cap. III].

1.1 Espacios de Hardy de funciones escalares de temperatura

Como es usual, utilizaremos la siguiente notación:

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x,t) : t > 0\},$$

$$H(\mathbb{R}^2_+) = \left\{ u \in C^2(\mathbb{R}^2_+) : \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \right\},$$

$$H^p(\mathbb{R}^2_+) = \left\{ u \in H(\mathbb{R}^2_+) : \|u\|_{H^p} < \infty \right\}, \quad 0 < p \leq \infty$$

donde

$$\|u\|_{H^p} = \sup_{t>0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \text{ si } 0 < p < \infty$$

y

$$\|u\|_{H^\infty} = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^2_+} |u(x,t)|.$$

Cuando no haya lugar a confusión, denotaremos los conjuntos anteriores por H y H^p, respectivamente. A los elementos de H les llamaremos funciones de temperatura.

Empezaremos dando una caracterización debida a Rosenbloom y Widder [17, def. 8.1] de ciertos subconjuntos de H que gozan de la propiedad de Huygens.

Definición 1.1.1 *Se dice que $u(x,t) \in H^*$ en una banda $a < t < b$, si satisface la ecuación de calor $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ y además tiene la propiedad de Huygens en dicha banda, esto es,*

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y, t-t')u(y,t')dy$$

para todo par t, t' tal que $a < t' < t < b$, donde $K(x,t)$ es el núcleo de calor

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Rosenbloom y Widder [17, teo. 10.2] también demuestran la siguiente proposición:

Proposición 1.1.2 *$u(x,t) \in H^*$ en $a < t < b$ si y sólo si satisface la ecuación de calor en dicha banda y además*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)| \, K(x, b' - t)dx$$

es uniformemente acotada en $a' < t < b'$, para cada par a', b' tal que $a < a' < b' < b$.

Estamos en condiciones de probar la siguiente:

Proposición 1.1.3 *Si $1 < p \leq \infty$ entonces $H^p \subset H^*$ en la banda $0 < t < \infty$.*

Demostración. Sean a', b' tales que $0 < a' < b' < \infty$ y sean $a' < t < b'$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|\, K(x, b'-t)dx &\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} K(x, b'-t)^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq M \left[\int_{-\infty}^{\infty} K(x, b'-t)^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq M q^{-\frac{1}{2q}}
\end{aligned}$$

donde

$$M = \sup_{t>0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

El caso $p = \infty$ es mucho más sencillo y lo omitimos □

Hirschman y Widder [12, cap. VIII] demuestran el siguiente resultado:

Proposición 1.1.4 *Para cada* $1 \leq p \leq \infty$

(a) *Las condiciones:*

1. $u(x,t) \in H$ *en la banda* $-\infty < x < \infty$, $0 < t < c < \infty$.

2. $\sup_{0<t<c} \|u(\cdot,t)\|_p \leq M < \infty$, $1 < p \leq \infty$.

son necesarias y suficientes para que

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)\varphi(y)dy$$

donde $-\infty < x < \infty$, $0 < t < c$ *y* $\varphi \in L^p(\mathbf{R})$ *satisface* $\|\varphi\|_p \leq M$.

(b) *Las condiciones:*

1. $u(x,t) \in H$ *en la banda* $-\infty < x < \infty$, $0 < t < c < \infty$.

2. $\sup_{0<t<c} \|u(\cdot,t)\|_1 \leq M < \infty$.

son necesarias y suficientes para que

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y,t)d\alpha(y)$$

donde $-\infty<x<\infty,\ 0<t<c$ *y*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|d\alpha(y)|\leq M.$$

Puesto que toda medida de variación finita en $\mathbf{R}$ está determinada por una función de variación acotada en $\mathbf{R}$ y recíprocamente, toda función de variación acotada en $\mathbf{R}$ determina una medida de variación finita, podemos substituir la función α que aparece en la representación de u en (1.1.4) (b) por una medida μ_α de variación finita en $\mathbf{R}$.

Con base en el resultado anterior damos una caracterización de $H^p(\mathbf{R}^2_+)$ para $1\leq p\leq\infty$. Posteriormente, abordaremos el caso $0<p<1$.

Teorema 1.1.5 $u\in H^p(\mathbf{R}^2_+)$, $1<p\leq\infty$, *si y sólo si*

$$u(x,t)=K(\cdot,t)*\varphi(x)$$

donde $\varphi\in L^p(\mathbf{R})$ *y* $-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty$.

Demostración. Supongamos que $u\in H^p$, $1<p<\infty$. Entonces $u\in H^*$ en la banda $0<t<\infty$ y así

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y,t-t')u(y,t')dy$$

para toda pareja t,t' tal que $0<t'<t<\infty$ y $x\in\mathbf{R}$.

Tomemos cualquier c tal que $t'<c\leq t$.

Puesto que tenemos la representación

$$u(x,s)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y,s)\varphi(y)dy$$

para cierta $\varphi\in L^p(\mathbf{R})$ en la banda $-\infty<x<\infty$, $0<s<c$, podemos escribir

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y,t-t')K(\cdot,t')*\varphi(y)dy\\&=K(\cdot,t-t')*K(\cdot,t')*\varphi(x)\\&=K(\cdot,t)*\varphi(x)\end{aligned}$$

y esta representación es válida en la banda $-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$.

Supongamos ahora que es válida la representación para u. Es claro que $u \in H$ y además

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)\,|\varphi(y)|\,dy \\ &\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)\,|\varphi(y)|^p\,dy\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)dy\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)\,|\varphi(y)|^p\,dy\right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, para cada $t > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|^p\,dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)\,|\varphi(y)|^p\,dydx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)dx \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(y)|^p\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(y)|^p\,dy \end{aligned}$$

y de aquí concluimos que $u \in H^p$.

El caso $p = \infty$ es muy sencillo y lo omitimos □

El examen del caso $p = 1$ será un poco distinto.

Teorema 1.1.6 *$u \in H^1(\mathbf{R}^2_+)$ si y sólo si*

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)d\mu(y)$$

donde μ pertenece al espacio $M(\mathbf{R})$ de medidas de variación acotada en $\mathbf{R}$.

Demostración. Supongamos que $u \in H^1$. Sea $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos tal que $t_n \uparrow \infty$. Para cada $n \in \mathbf{N}$ tendremos una función α_n de variación acotada en $\mathbf{R}$ tal que

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)d\alpha_n(y)$$

y esta representación es válida en la banda $-\infty < x < \infty$, $0 < t < t_n$.

Sea μ_n la medida en $M(\mathbf{R})$ asociada a α_n. Por el teorema 1.1.4 (b) para cada $n \in \mathbf{N}$ tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |d\alpha_n(y)| \leq M_n \leq \sup_{0<t<\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|\, dx = M < \infty,$$

donde

$$\sup_{0<t<t_n} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|\, dx \leq M_n < \infty.$$

Así, la sucesión de medidas $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ se encuentra dentro de una bola cerrada en el espacio $M(\mathbf{R}) = C_0(\mathbf{R})^*$ y por el teorema de Banach-Alaoglu tal bola es débil* compacta. Siendo $C_0(\mathbf{R})$ separable, entonces dicha bola es metrizable en la topología débil*. Luego, podemos encontrar una subsucesión de $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ (que por simplicidad denotaremos del mismo modo) y una medida $\mu \in M(\mathbf{R})$ tal que $\mu_n \to \mu$ en la topología débil* de $M(\mathbf{R})$, esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) d\mu_n(y) \to \int_{-\infty}^{\infty} g(y) d\mu(y)$$

para cada $g \in C_0(\mathbf{R})$. En particular, para cualquier $t > 0$ y para $-\infty < x < \infty$ tendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t) d\mu_n(y) \to \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t) d\mu(y).$$

Así, dado $t > 0$ elegimos $n_o \in \mathbf{N}$ tal que $0 < t < t_n$ para toda $n \geq n_o$ y por tanto

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t) d\mu(y),$$

representación válida en la banda $-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$.

Recíprocamente, es claro que $u \in H$ y como en el teorema anterior, puede verificarse fácilmente que para cada $t > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|\, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} d\,|\mu|\,(y) < \infty \; \Box$$

Como consecuencia de este resultado obtenemos el siguiente:

Corolario 1.1.7 $H^1(\mathbf{R}_+^2) \subset H^*$.

Demostración. En [17, teo. 8.1, pg. 241] se prueba que si

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)d\alpha(y)$$

y la integral converge absolutamente para $0 < t < c \leq \infty$, entonces $u(x,t) \in H^*$ en esa franja. Así, si $u \in H^1$ entonces $u \in H^*$ □

(Más adelante, daremos otra prueba de esta afirmación).

Ahora, obtendremos algunos resultados relativos a $H^p(\mathbb{R}^2_+)$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Si escribimos $K_t(x) \equiv K(x,t)$, puede verificarse fácilmente que $(K_t)_{t>0}$ es una identidad aproximada, lo cual será utilizado en el siguiente:

Teorema 1.1.8 *Para $f \in \bigcup_{p=1}^{\infty} L^p(\mathbb{R})$, sea*

$$u(x,t) = K_t * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)f(y)dy$$

donde $0 < t < \infty$, $-\infty < x < \infty$. Entonces

1. *Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ para algún $1 \leq p < \infty$, se tiene que $u(\cdot,t) \to f$ en L^p cuando $t \to 0$.*
2. *Si f es continua y acotada entonces $u(\cdot,t) \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ cuando $t \to 0$.*
3. *Si f es uniformemente continua y acotada entonces $u(\cdot,t) \to f$ uniformemente en $\mathbb{R}$ cuando $t \to 0$.*
4. *Si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ entonces $u(\cdot,t) \to f$ en la topología débil* de L^∞ cuando $t \to 0$.*
5. *Si $\mu \in M(\mathbb{R})$ y $u(x,t) = K_t * \mu(x)$ entonces $u(\cdot,t) \to \mu$ en la topología débil* de $M(\mathbb{R})$ cuando $t \to 0$.*

Demostración. Es exactamente igual a la del caso armónico [9, teo. 4.1, cap. II], pues solo depende del hecho de que $(K_t)_{t>0}$ es una identidad aproximada □

Corolario 1.1.9 *Si f es continua y acotada, entonces la función*

$$u(x,t) = \begin{cases} K_t * f(x) & si \quad t > 0, \\ f(x) & si \quad t = 0, \end{cases}$$

es continua en $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ y de temperatura en $\mathbb{R}^2_+$.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la parte 2 del teorema 1.1.8 □

Proposición 1.1.10 *Para* $f \in \bigcup_{p=1}^{\infty} L^p(\mathbf{R})$ *y* $u(x,t) = K_t * f(x)$ *se verifica*

$$\|u(\cdot,t)\|_p \leq \|f\|_p \quad \textit{para} \quad 0 < t < \infty.$$

Demostración. Para $1 \leq p \leq \infty$ se verifica la siguiente desigualdad:

$$\|K_t * f\|_p \leq \|f\|_p \, \|K_t\|_1 = \|f\|_p \quad \square$$

Ahora obtendremos la siguiente representación para cierta clase de funciones de temperatura.

Teorema 1.1.11 *Sea* $u(x,t)$ *una función continua en* $\overline{\mathbf{R}^2_+}$, *de temperatura en* $\mathbf{R}^2_+$ *y acotada. Entonces se tiene que*

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)u(y,0)dy$$

donde $-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$.

Demostración. Por la proposición 1.1.3, $u \in H^*$ en $\mathbf{R}^2_+$ y así

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t-t')u(y,t')dy$$

para cada pareja t, t' con $0 < t' < t < \infty$. Bastará demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t-t')u(y,t')dy \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)u(y,0)dy \text{ si } t' \to 0.$$

Pero

$$|K(x-y,t-t')u(y,t')| \leq \left[\sup_{(y,t)\in\mathbf{R}^2_+} |u(y,t)|\right] K(x-y,t-t'),$$

$$K(x-y,t-t')u(y,t') \longrightarrow K(x-y,t)u(y,0) \quad \text{y}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)dy = 1$$

por lo que la conclusión se sigue fácilmente del teorema de convergencia dominada de Lebesgue □

Ahora, procederemos a investigar condiciones de crecimiento para $u(x,t)$ y $D_t u(x,t) \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$ cuando $u \in H^p(\mathbb{R}^2_+)$, $0 < p \leq \infty$, con el fin de considerar las derivadas fraccionarias $D_t^{1/2} u(x,t)$ que serán usadas y definidas en la siguiente sección.

Iniciaremos nuestra tarea analizando primero el caso $1 < p < \infty$.

Sea $u \in H^p$. Entonces tenemos la representación

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t) f(y)\,dy \quad \text{donde } f \in L^p.$$

Así

$$D_t u(x, s+t) = \int_{-\infty}^{\infty} D_t K(x-y, s+t) f(y)\,dy$$

y como

$$|D_t K(x-y, s+t)| \leq C \min\left\{ \frac{1}{|x-y|^3} \;,\; \frac{1}{(s+t)^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad [13, \text{ lema } 3]$$

entonces

$$|D_t u(x, s+t)| \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \min\left\{ \frac{1}{|x-y|^3} \;,\; \frac{1}{(s+t)^{\frac{3}{2}}} \right\} |f(y)|\,dy.$$

Ahora descomponemos la integral del lado derecho en las siguientes integrales

$$I_1 = \int_{\{y : |x-y|^3 < (s+t)^{\frac{3}{2}}\}} \min\left\{ \frac{1}{|x-y|^3} \;,\; \frac{1}{(s+t)^{\frac{3}{2}}} \right\} |f(y)|\,dy$$

$$I_2 = \int_{\{y : |x-y|^3 > (s+t)^{\frac{3}{2}}\}} \min\left\{ \frac{1}{|x-y|^3} \;,\; \frac{1}{(s+t)^{\frac{3}{2}}} \right\} |f(y)|\,dy,$$

por consiguiente

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &\leq \int_{\{y : |x-y|^3 < (s+t)^{\frac{3}{2}}\}} \frac{|f(y)|}{(s+t)^{\frac{3}{2}}}\,dy + \int_{\{y : |x-y|^3 > (s+t)^{\frac{3}{2}}\}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^3}\,dy \\
&= \frac{1}{(s+t)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\, \chi_{\{y : |x-y|^3 < (s+t)^{\frac{3}{2}}\}}(y)\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \frac{\chi_{\{y : |x-y|^3 > (s+t)^{\frac{3}{2}}\}}(y)}{|x-y|^3}\,dy \\
&\leq \frac{1}{(s+t)^{\frac{3}{2}}} \|f\|_p \left\| \chi_{\{y : |x-y|^3 < (s+t)^{\frac{3}{2}}\}}(y) \right\|_q + \|f\|_p \left\| \frac{\chi_{\{y : |x-y|^3 > (s+t)^{\frac{3}{2}}\}}(y)}{|x-y|^3} \right\|_q
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(s+t)^{\frac{1}{2}}}\|f\|_p 2^{\frac{1}{q}}(s+t)^{\frac{1}{2q}} + \|f\|_p \left[\int\limits_{|y-x|>(s+t)^{\frac{1}{2}}} \frac{dy}{|y-x|^{3q}}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= 2^{\frac{1}{q}}\|f\|_p \frac{1}{(s+t)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}}} + \|f\|_p \left[\int\limits_{|u|>(s+t)^{\frac{1}{2}}} \frac{du}{|u|^{3q}}\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

y así obtenemos

$$
I_1 + I_2 \leq \left[1 + \frac{1}{(3q-1)^{\frac{1}{q}}}\right] 2^{\frac{1}{q}} \|f\|_p \frac{1}{(s+t)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2q}}}
$$

por lo que

$$
|D_t u(x, s+t)| \leq C \frac{\|f\|_p}{(s+t)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2q}}}
$$

donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ (denotaremos con C a diferentes constantes).

Por lo tanto

$$
|D_t u(x,t)| \leq C \frac{\|f\|_p}{t^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2q}}} = C \frac{\|f\|_p}{t^{1+\frac{1}{2p}}} \tag{1.1}
$$

Puede verificarse que la desigualdad (1.1) también es válida para funciones $u \in H^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ (usamos la desigualdad de Hölder para $p = \infty$, $q = 1$).

Examinemos el crecimiento de $u \in H^p$, $1 < p < \infty$.

Se tiene la representación

$$
u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t) f(y) dy
$$

donde $f \in L^p$.

Por consiguiente

$$
\begin{aligned}
|u(x,t)| &\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)dy\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)\,|f(y)|^p\, dy\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)\,|f(y)|^p\, dy\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2p}}} \|f\|_p,
\end{aligned}
$$

ya que

$$
|K(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}.
$$

Por tanto

$$|u(x,t)| \leq \frac{C\|f\|_p}{t^{\frac{1}{2p}}} \tag{1.2}$$

Como una consecuencia de la desigualdad (1.2) tenemos:

Si $u \in H^p(\mathbb{R}^2_+)$ para algún $1 < p \leq \infty$ entonces $u(x,t)$ es acotada en cada sub-semiplano propio $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2_+ : t \geq t_o > 0\}$.

Ahora, examinaremos el comportamiento de $u \in H^p(\mathbb{R}^2_+)$ para $0 < p \leq 1$. Para ello, necesitamos demostrar el siguiente lema, que es una adaptación del caso armónico para círculos (cf [9, cap. 2, lema 4.6]). Antes de establecer el lema, introducimos los siguientes conceptos que aparecerán en la prueba de este resultado.

Para $0 \leq T < \infty$, sean

$$Q_T = (0,1) \times (0,T),$$
$$\Gamma_T = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

donde

$$\Gamma_1 = \{0\} \times [0,T),\ \Gamma_2 = \{1\} \times [0,T),\ \Gamma_3 = (0,1) \times \{0\}$$

y λ la medida de Lebesgue lineal en Γ_T; Γ_T se denomina frontera parabólica de Q_T.

Para $t > 0$ sean

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} K(x+2n,t) \\ \varphi(x,t) &= -2\tfrac{\partial \theta}{\partial x}(x,t) \end{aligned}$$

y para $t \leq 0$ sean $K = \theta = \varphi = 0$. Consideremos los núcleos K_i en Γ_i, $i = 1,2,3$ dados por

$$\begin{aligned} K_1(x,t;0,\tau) &= \varphi(x,t-\tau), & 0 \leq \tau < t \\ K_2(x,t;1,\tau) &= \varphi(1-x,t-\tau), & 0 \leq \tau < t \\ K_3(x,t;\xi,0) &= \theta(x-\xi,t) - \theta(x+\xi,t), & 0 < \xi < 1. \end{aligned}$$

Definimos el núcleo de calor $K(x,t;\xi,\tau)$ en $Q_T \times \Gamma_T$ como la unión de K_1, K_2 y K_3.

En [20, pg. 130] se prueba que si u es una función de temperatura en Q_T y continua en $\overline{Q_T}$, entonces se tiene la siguiente representación para u en $(0,1) \times (0,T)$

$$u(x,t) = \int_{\Gamma_T} K(x,t;\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\lambda(\xi,\tau).$$

Las coordenadas parabólicas en Q_T se definen del modo siguiente (ver [2, pg. 832]):

Consideremos la familia de parábolas $\{P_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ dadas por la ecuación

$$\theta = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{T - t}}, \quad t < T.$$

Para $\theta \in \mathbb{R}$, $(1, \theta)$ son las coordenadas parabólicas del único punto de intersección de Γ_T y P_θ; $(1, \infty)$ y $(1, -\infty)$ son las coordenadas de $(0, T)$ y $(1, T)$, respectivamente. Definimos la función $T_r(x,t) = (x_r, t_r)$ donde

$$\begin{aligned} x_r &= rx + \tfrac{1-r}{2} \\ t_r &= r^2 t + (1 - r^2)T. \end{aligned}$$

T_r deja invariante a P_θ, además $Q_T = \{T_r(1,\theta) : \theta \in \mathbb{R},\ 0 < r < 1\}$. Daremos coordenadas parabólicas (ρ, θ) a $T_\rho(1, \theta)$.

Lema 1.1.12 *Sea u una función de temperatura en un rectángulo (con lados paralelos a los ejes coordenados) $R \subset \mathbb{R}^2_+$ y continua en $\overline{R}$. Si (x_o, t_o) es el centro de la frontera superior de R, entonces para cualquier $0 < p \leq 1$ se verifica la siguiente desigualdad*

$$|u(x_o, t_o)|^p \leq C_p \frac{1}{|R|} \iint_R |u(x,t)|^p \, dx dt$$

donde $|R|$ es el área del rectángulo R y C_p es una constante que sólo depende de p.

Demostración. No hay pérdida de generalidad en suponer que

$$R = Q_T \ \text{ y que } \iint_{Q_T} |u(x,t)|^p \, dx dt = |Q_T| .$$

Esto se debe a lo siguiente:

Supongamos que R es el rectángulo

$$R = (a, b) \times (c, d).$$

Consideremos la transformación biyectiva $\Psi : Q_T \longrightarrow R$ definida así

$$\Psi(\xi, \tau) = \left((b - a)\xi + a, \frac{(d - c)}{T}\tau + c \right).$$

Si u es de temperatura en R entonces $u \circ \Psi$ es de temperatura en Q_T siempre que $(d - c)/T = (b - a)^2$ (ver [20, pg. 12]), esto es, siempre que $T = (d - c)/(b - a)^2$. Por consiguiente, si probamos el teorema para funciones de temperatura definidas en Q_T, entonces para el caso en el que u esté definida en R aplicamos el teorema de cambio de variable y obtenemos

$$\begin{aligned}\left|u\left(\Psi\left(\tfrac{1}{2},T\right)\right)\right|^p &\leq C_p\frac{1}{|Q_T|}\iint\limits_{Q_T}|u(\Psi(\xi,\tau))|^p\,d\xi d\tau\\ &= C_p\frac{1}{|Q_T|}\iint\limits_{Q_T}|u(\Psi(\xi,\tau))|^p\,\frac{|J\Psi|}{|J\Psi|}d\xi d\tau\\ &= C_p\frac{1}{|R|}\iint\limits_{R}|u(x,t)|^p\,dxdt,\end{aligned}$$

esto es,

$$|u(x_o,t_o)|^p \leq C_p\frac{1}{|R|}\iint\limits_{R}|u(x,t)|^p\,dxdt.$$

Demos coordenadas parabólicas a Q_T. Observamos que si u es de temperatura en Q_T (y por consiguiente, en cualquier subrectángulo de Q_T) entonces $u\circ T_r$ es de temperatura en Q_T para $0 < r < 1$, puesto que

$$T_r(x,t) = \left(r\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}, r^2(t-T)+T\right),$$

esto es, T_r es la composición de una traslación, seguida de una transformación afín del tipo

$$(\xi,\tau)\longmapsto\left(r\xi, r^2\tau\right),$$

seguida de otra traslación, y sabemos que estas transformaciones compuestas con una función de temperatura siguen siendo de temperatura ([20, pg. 12]).

Con el fin de facilitar la lectura, dividiremos la demostración en 5 pasos.

Paso 1. Definimos para $r > 0$

$$m_p(r) = \left[\frac{1}{\lambda(\Gamma_T)}\int\limits_{\Gamma_T}|u(T_r(1,\theta))|^p\,d\lambda(\theta)\right]^{\frac{1}{p}}$$

donde λ es la medida de Lebesgue lineal sobre Γ_T, y

$$m_\infty(r) = \sup\left\{|u(T_r(1,\theta))| : \theta\in\mathbb{R}\right\}.$$

Podemos suponer que $m_\infty(r) \geq 1$ para todo $r\in(0,1)$, ya que si existiera algún $r_o\in(0,1)$ tal que $m_\infty(r_o) < 1$ tendríamos por el Principio del Máximo para funciones de temperatura en un rectángulo [20, pg. 20]

$$\left|u\left(\tfrac{1}{2},T\right)\right| \leq m_\infty(r_o) < 1$$

y así

$$\left|u(\tfrac{1}{2},T)\right|^p \leq \frac{1}{|Q_T|}\iint_{Q_T} |u(x,t)|^p\,dxdt.$$

En este paso, probaremos la siguiente desigualdad:

$$m_1(r) \leq m_\infty(r)^{1-p} m_p(r)^p \tag{1.3}$$

Basta observar que

$$\begin{aligned} m_1(r) &= \frac{1}{\lambda(\Gamma_T)}\int_{\Gamma_T} |u(T_r(1,\theta))|\,d\lambda(\theta) \\ &= \frac{1}{\lambda(\Gamma_T)}\int_{\Gamma_T} |u(T_r(1,\theta))|^p\,|u(T_r(1,\theta))|^{1-p}\,d\lambda(\theta) \\ &\leq m_\infty(r)^{1-p} m_p(r)^p, \end{aligned}$$

esto es,

$$m_1(r) \leq m_\infty(r)^{1-p} m_p(r)^p.$$

Paso 2. Demostraremos que para $0 < s < r < 1$ y para $(x,t) \in Q_T^{(s)} = \left[\frac{1-s}{2},\frac{1+s}{2}\right] \times [(1-s^2)T,T]$ se verifica

$$|u(x,t)| \leq M\,(1-\tfrac{s}{r})^{-2}\int_{\Gamma_T} |u(T_r(1,\varphi))|\,d\lambda(\varphi) \tag{1.4}$$

donde M es una constante positiva.

Sabemos que para $(x,t) \in (0,1)\times(0,T)$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{\Gamma_T} K(x,t;\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\lambda(\xi,\tau) \\ &= \int_{\Gamma_T} K(x,t;1,\varphi)u(1,\varphi)d\lambda(\varphi). \end{aligned}$$

Ahora nos fijamos en $\Gamma_T^{(r)}$, la frontera parabólica del rectángulo $Q_T^{(r)} = \left[\frac{1-r}{2},\frac{1+r}{2}\right]\times [(1-r^2)T,T]$. Así, se tiene que $T_r(\Gamma_T) = \Gamma_T^{(r)}$.

Sea

$$\tilde{u}(x,t) = u(T_r(x,t)),\quad (x,t) \in [0,1]\times[0,T)$$

entonces $\tilde{u}(1,\varphi) = u(T_r(1,\varphi))$. Si $(x,t) \in (0,1)\times(0,T)$ tendremos que $\tilde{u}$ admite la representación

$$u(T_r(x,t)) = \tilde{u}(x,t) = \int_{\Gamma_T} K(x,t;1,\varphi)u(T_r(1,\varphi)d\lambda(\varphi).$$

Como $T_r(x,t) = (x_r, t_r)$, entonces para $(x,t) \in Q_T^{(r)}$ tendremos

$$u(x,t) = \int_{\Gamma_T} K(T_r^{-1}(x,t); 1, \varphi) u(T_r(1,\varphi)) d\lambda(\varphi),$$

y ya que $T_r \circ T_s = T_{rs}$, si $(x,t) \in Q_T^{(s)}$ con $0 < s < r$

$$u(x,t) = \int_{\Gamma_T} K(T_{\frac{s}{r}}(T_s^{-1}(x,t)); 1, \varphi) u(T_r(1,\varphi)) d\lambda(\varphi).$$

Puesto que $T_s^{-1}(x,t) \in Q_T$ cuando $(x,t) \in Q_T^{(s)}$, basta examinar el comportamiento de $K(T_{\frac{s}{r}}(x,t))$ cuando $(x,t) \in Q_T$, $0 < s < r$.

Sobre Γ_1 tenemos para $0 \leq \tau < t$

$$K_1(x_{\frac{s}{r}}, t_{\frac{s}{r}}; 0, \tau) = \varphi(x_{\frac{s}{r}}, t_{\frac{s}{r}} - \tau).$$

En Γ_2 tenemos para $0 \leq \tau < t$

$$K_2(x_{\frac{s}{r}}, t_{\frac{s}{r}}; 1, \tau) = \varphi(1 - x_{\frac{s}{r}}, t_{\frac{s}{r}} - \tau).$$

y sobre Γ_3 tenemos para $0 < \xi < 1$

$$K_3(x_{\frac{s}{r}}, t_{\frac{s}{r}}; \xi, 0) = \theta(x_{\frac{s}{r}} - \xi, t_{\frac{s}{r}}) - \theta(x_{\frac{s}{r}} + \xi, t_{\frac{s}{r}}).$$

Primero haremos una estimación de K_3. Puesto que

$$\theta(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t} \cos n\pi x$$

tenemos que

$$\theta(x-y,t) - \theta(x+y,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t} sen(n\pi x) sen(n\pi y).$$

Por tanto, para $0 < \rho < 1$

$$\begin{aligned}
\left|K_3(\rho x + (1-\rho)\tfrac{1}{2}, \rho^2 t + (1-\rho^2)T; \xi, 0)\right| &\leq 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2[\rho^2 t + (1-\rho^2)T]} \\
&\leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{[\rho^2 t + (1-\rho^2)T]n^2\pi^2} \\
&= \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{1}{\rho^2 t + (1-\rho^2)T}\right] \\
&\leq \tfrac{1}{3T}(1-\rho^2)^{-1} \\
&\leq \tfrac{1}{3T}(1-\rho)^{-2},
\end{aligned}$$

esto es,

$$\left|K_3(x_{\frac{1}{\rho}}, t_{\frac{1}{\rho}}; \xi, 0)\right| \leq \frac{1}{3T}\left(1-\tfrac{\epsilon}{\rho}\right)^{-2}.$$

Para estimar K_1, observamos primero que

$$\varphi(x,t) = -2\frac{\partial K}{\partial x}(x,t) + \sum_{n\neq 0} -2\frac{\partial K}{\partial x}(x+2n,t).$$

Nos interesa estimar $\varphi(\rho x + (1-\rho)\frac{1}{2}, \rho^2 t + (1-\rho^2)T - \tau)$ donde $0 < x < 1$, $0 < t < T$, $0 \leq \tau < T$, $0 < \rho < 1$. Puesto que

$$-2\frac{\partial K}{\partial x}(x,t) = \begin{cases} \frac{x}{t}K(x,t) & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

tendremos que el primer sumando de φ está mayorado por

$$\begin{aligned} &\begin{cases} C\dfrac{\rho x + \frac{1-\rho}{2}}{(\rho^2 t + (1-\rho^2)T - \tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\left(\rho x + \frac{1-\rho}{2}\right)^2}{4[\rho^2 t + (1-\rho^2)T - \tau]}} & \text{si} \quad \tau < \rho^2 t + (1-\rho^2)T \\ 0 & \text{si} \quad \tau \geq \rho^2 t + (1-\rho^2)T \end{cases} \\ \leq \;& C\frac{\rho x + \frac{1-\rho}{2}}{\left(\rho x + \frac{1-\rho}{2}\right)^3} \\ \leq \;& C\frac{1}{(1-\rho)^2} \end{aligned}$$

(la primera desigualdad se debe a que $\frac{1}{t^\beta}e^{-\frac{x^2}{4t}} \leq C\frac{1}{|x|^{2\beta}}$, $t > 0$, $\beta > 0$, $x \in \mathbb{R}$).

Si llamamos $U(x,t)$ al segundo sumando de φ, vemos que U es no singular y además está acotada por una constante C, por lo que

$$U(x,t) \leq C \leq C(1-\rho)^{-2}.$$

Así

$$\left|K_1(x_{\frac{1}{\rho}}, t_{\frac{1}{\rho}}; 0, \tau)\right| \leq C\left(1-\tfrac{\epsilon}{\rho}\right)^{-2}.$$

Por último, haremos la estimación de K_2. Como antes, nos interesa estimar

$$\begin{aligned} \varphi(1-(\rho x + (1-\rho)\tfrac{1}{2}), \rho^2 t + (1-\rho^2)T - \tau) \;=\; & -2\tfrac{\partial K}{\partial x}(1-(\rho x + (1-\rho)\tfrac{1}{2}), \rho^2 t + (1-\rho^2)T - \tau\} \\ & + U(1-(\rho x + (1-\rho)\tfrac{1}{2}), \rho^2 t + (1-\rho^2)T - \tau. \end{aligned}$$

Como en el caso de K_1, podemos concluir que el segundo sumando está acotado, así que solo basta examinar el primer sumando.

Igual que antes, mostramos que

$$\left|-2\frac{\partial K}{\partial x}(1-(\rho x+(1-\rho)\tfrac{1}{2}),\rho^2 t+(1-\rho^2)T-\tau)\right| \leq \frac{C}{(1-(\rho x+\frac{1-\rho}{2}))^2} \leq \frac{C}{(1-\rho)^2}$$

(debido a que $1-(\rho x+\frac{1-\rho}{2}) > 1-\frac{1+\rho}{2} = \frac{1-\rho}{2}$).

Por consiguiente, tendremos que

$$\left|K_2(x_{\frac{s}{r}},t_{\frac{s}{r}};1,\tau)\right| \leq C\,(1-\tfrac{s}{r})^{-2}.$$

De todas las estimaciones anteriores para K_1, K_2 y K_3 podemos concluir que para cualquier $(x,t)\in Q_T^{(s)}$ con $0<s<r$ se verifica

$$|u(x,t)| \leq M\,(1-\tfrac{s}{r})^{-2}\int_{\Gamma_T}|u(T_r(1,\varphi))|\,d\lambda(\varphi)$$

donde M es una constante positiva.

Paso 3. Probaremos que para $a>1$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\log m_\infty(r^a)\frac{dr}{r} \leq C_a+(1-p)\int_{\frac{1}{2}}^{1}\log m_\infty(r)\frac{dr}{r}+p\int_{\frac{1}{2}}^{1}\log m_p(r)\frac{dr}{r} \tag{1.5}$$

donde C_a es una constante que sólo depende de a.

La desigualdad (1.4) del paso 2 implica que

$$m_\infty(s) \leq M\,(1-\tfrac{s}{r})^{-2}\,m_1(r) \tag{1.6}$$

Eligiendo $s=r^a$ con $a>1$ obtenemos de (1.3) del paso 1 y de (1.6)

$$m_\infty(r^a) \leq M\left(1-r^{a-1}\right)^{-2}m_1(r) \leq M\left(1-r^{a-1}\right)^{-2}m_\infty(r)^{1-p}m_p(r)^p.$$

Tomando logaritmos, multiplicando por $\frac{1}{r}$ y después integrando con respecto de r sobre $(\frac{1}{2},1)$ obtenemos:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\log m_\infty(r^a)\frac{dr}{r} \leq C_a+(1-p)\int_{\frac{1}{2}}^{1}\log m_\infty(r)\frac{dr}{r}+p\int_{\frac{1}{2}}^{1}\log m_p(r)\frac{dr}{r}$$

donde C_a es la siguiente constante real:

$$C_a=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\log M\frac{dr}{r}+2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\log(1-r^{a-1})^{-1}\frac{dr}{r}\in\mathbf{R}$$

ya que para $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{1} \log\left(\frac{1}{1-r^{\alpha}}\right)\frac{dr}{r} &= -\tfrac{1}{\alpha}\int_{\frac{1}{2^{\alpha}}}^{1} \log(1-u)\frac{du}{u} \\
&= -\tfrac{1}{\alpha}\int_{0}^{1-\frac{1}{2^{\alpha}}} \frac{\log x}{1-x}dx \\
&= C\int_{0}^{\beta} \frac{\log x}{1-x}dx,
\end{aligned}$$

$\beta = 1 - \frac{1}{2^{\alpha}}$, y por consiguiente

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left|\log\left(\frac{1}{1-r^{\alpha}}\right)\right|\frac{dr}{r} \leq \frac{C}{1-\beta}\int_{0}^{\beta} |\log x|\, dx < \infty.$$

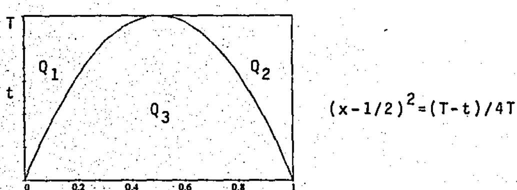
Paso 4. Aquí mostraremos que existe una constante $C = C(p)$ tal que

$$p\int_{\frac{1}{2}}^{1} \log m_p(r)\frac{dr}{r} \leq C \tag{1.7}$$

En efecto, dado que

$$1 = \frac{1}{|Q_T|}\iint_{Q_T} |u(x,t)|^p\, dxdt = \frac{1}{|Q_T|}\sum_{i=1}^{3}\iint_{Q_i} |u(x,t)|^p\, dxdt,$$

donde Q_1, Q_2, Q_3 son las regiones que se indican en el siguiente dibujo:



consideramos la transformación

$$\begin{gathered}
T : [0,1]\times[0,T] \longrightarrow Q_1 \\
T(r,\theta) = \left(\tfrac{1-r}{2}, r^2\theta + (1-r^2)T\right).
\end{gathered}$$

Su jacobiano es

$$\frac{\partial(x,t)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 2r(\theta - T) & r^2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}r^2.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
\iint_{Q_1} |u(x,t)|^p\, dxdt &= \int_0^1\int_0^T |u(T(r,\theta))|^p \left|\frac{\partial(x,t)}{\partial(r,\theta)}\right| d\theta dr \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^1\int_0^T r^2\,|u(T(r,\theta))|^p\, d\theta dr \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^1\int_{\Gamma_1} r^2\,|u(T_r(1,\theta))|^p\, d\lambda(\theta)dr.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Ahora consideramos la transformación

$$\begin{gathered} S : [0,1]\times[0,T] \longrightarrow Q_2 \\ S(r,\theta) = \left(\tfrac{1+r}{2}, r^2\theta + (1-r^2)T\right) \end{gathered}$$

y como antes

$$\iint_{Q_2} |u(x,t)|^p\, dxdt = \frac{1}{2}\int_0^1\int_{\Gamma_2} r^2\,|u(T_r(1,\theta))|^p\, d\lambda(\theta)dr. \tag{1.9}$$

Por último, consideramos la transformación

$$\begin{gathered} W : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow Q_3 \\ W(\theta,r) = \left(r\theta + \tfrac{1-r}{2}, (1-r^2)T\right) \end{gathered}$$

y así

$$\begin{aligned}
\iint_{Q_3} |u(x,t)|^p\, dxdt &= 2T\int_0^1\int_0^1 r^2\,|u(W(\theta,r))|^p\, d\theta dr \\
&= 2T\int_0^1\int_{\Gamma_3} r^2\,|u(T_r(1,\theta))|^p\, d\lambda(\theta)dr.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Por consiguiente, de (1.8), (1.9) y (1.10) se sigue que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^1 r^2 m_p(r)^p dr \\
&= \int_0^1 \left\{\frac{1}{\lambda(\Gamma_T)}\int_{\Gamma_T} |u(T_r(1,\theta))|^p\, d\lambda(\theta)\right\} r^2 dr
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\int_0^1\int_{\Gamma_T} r^2\,|u(T_r(1,\theta))|^p\,d\lambda(\theta)dr\\
&\leq C\frac{1}{|Q_T|}\iint_{Q_T}|u(x,t)|^p\,dxdt\\
&= C,
\end{aligned}
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
p\int_{\frac{1}{2}}^{1}\log m_p(r)\frac{dr}{r} &\leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} m_p(r)^p\frac{dr}{r}\\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} r^2 m_p(r)^p\frac{dr}{r^3}\\
&\leq 8\int_0^1 r^2 m_p(r)^p dr\\
&\leq C.
\end{aligned}
$$

Paso 5. Ahora hacemos el cambio de variable $u = r^a$ en la integral del lado izquierdo de la desigualdad (1.5) del paso 3 y usando la desigualdad (1.7) que mostramos en el paso 4, obtenemos:

$$\frac{1}{a}\int_{\frac{1}{2^a}}^{1}\log m_\infty(r)\frac{dr}{r} \leq C(a,p) + (1-p)\int_{\frac{1}{2}}^{1}\log m_\infty(r)\frac{dr}{r}$$

donde $C(a,p)$ es una constante que depende de a y de p. Puesto que $a > 1$ y $m_\infty(r) \geq 1$ se sigue que

$$\frac{1}{a}\int_{\frac{1}{2^a}}^{1}\log m_\infty(r)\frac{dr}{r} \leq C_a + (1-p)\int_{\frac{1}{2^a}}^{1}\log m_\infty(r)\frac{dr}{r}.$$

Si escogemos $a > 1$ suficientemente cerca de 1 de tal modo que $\frac{1}{a} > 1-p$, obtenemos

$$\int_{\frac{1}{2^a}}^{1}\log m_\infty(r)\frac{dr}{r} < C_p$$

donde C_p es una constante que sólo depende de p. Por consiguiente, existe $r_o \in \left[\frac{1}{2^a}, 1\right]$ tal que $m_\infty(r_o) \leq \exp\left[\frac{C_p}{1-\frac{1}{2^a}}\right] \equiv M_p$, una constante que sólo depende de p, esto es,

$$m_\infty(r_o) \leq M_p$$

y el Principio del Máximo nos asegura que

$$\left|u(\tfrac{1}{2},T)\right| \leq M_p = M_p \left[\frac{1}{|Q_T|} \iint\limits_{Q_T} |u(x,t)|^p \, dxdt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

La argumentación anterior también es válida cuando $p = 1$ □

Del lema anterior se desprende el siguiente:

Teorema 1.1.13 *Sea u una función de temperatura en $\mathbb{R}^2_+$ que está uniformemente en $L^p(\mathbb{R})$ para algún $0 < p \leq 1$, esto es,*

$$\sup_{t>0} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|^p \, dx = M^p < \infty.$$

Entonces existe una constante C que depende solamente de p tal que

$$|u(x,t)| \leq CMt^{-\frac{1}{p}} \quad \text{para toda } (x,t) \in \mathbb{R}^2_+.$$

En particular, $u(x,t)$ es acotada en cada subsemiplano propio $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2_+ : t \geq t_o > 0\}$. De hecho, se verifica la siguiente propiedad más fuerte: $u(x,t) \to 0$ si $(x,t) \to \infty$ en cada subsemiplano propio.

Demostración. Sea $(x_o,t_o) \in \mathbb{R}^2_+$ y R_o el rectángulo $R_o = (x_o - \frac{t_o}{2}, x_o + \frac{t_o}{2}) \times (\frac{t_o}{2}, t_o)$. Por el lema 1.1.12 tenemos que

$$\begin{aligned}
|u(x_o,t_o)|^p &\leq C_p \frac{1}{|R_o|} \iint\limits_{R_o} |u(x,t)|^p \, dxdt \\
&\leq C_p \frac{2}{t_o^2} \int_{\frac{t_o}{2}}^{t_o} \int_{|x-x_o|<\frac{t_o}{2}} |u(x,t)|^p \, dxdt \\
&\leq C_p \frac{M^p}{t_o}.
\end{aligned}$$

Con ésto queda demostrada la primera parte del teorema. Para demostrar la última parte, fijemos $t_o > 0$. Dado el crecimiento de u, para $\varepsilon > 0$ existe $t_1 > t_o$ tal que

$$|u(x,t)| \leq \varepsilon \quad \text{para toda } t \geq t_1.$$

Nos falta mostrar que para $t_o \leq t \leq t_1$ se verifica la desigualdad anterior, siempre que $|x|$ sea suficientemente grande. Procediendo como en la primera parte de la demostración vemos que para $|x| > t_1$ y para $t_o \leq t \leq t_1$

$$\begin{aligned} |u(x,t)|^p &\leq C_p \frac{2}{t^2} \int_{\frac{t}{2}}^{t} \int_{|y-x|<\frac{t}{2}} |u(y,s)|^p \, dyds \\ &\leq C_p \frac{2}{t^2} \int_{\frac{t_o}{2}}^{t_1} \int_{|y|>|x|-\frac{t_1}{2}} |u(y,s)|^p \, dyds \end{aligned}$$

y esta integral tiende a 0 si $|x| \to \infty$ □

Como consecuencia del teorema anterior obtenemos el siguiente:

Corolario 1.1.14 *Si* $0 < p \leq 1$ *entonces* $H^p(\mathbb{R}^2_+) \subset H^*$.

Demostración. Sea $u \in H^p$. Por el teorema 1.1.13 se tiene que para cualquier par a, b tal que $0 < a < b < \infty$ y para todo $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)| \, K(x, b-t) dx &\leq CMt^{-\frac{1}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, b-t) dx \\ &\leq CMa^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Se sigue de la proposición 1.1.2 que $u \in H^*$ □

Con los resultados anteriores podemos analizar el crecimiento de la función

$$D_t u(x,t) \ \text{ para } \ u \in H^p, \ \ 0 < p \leq 1.$$

Sea $t > 0$. Por el teorema 1.1.13 se tiene que

$$|u(x,t)| \leq C \, \|u\|_{H^p} t^{-\frac{1}{p}}$$

donde $x \in \mathbf{R}$ y C es una constante.

Tomemos $t_o > 0$ fija, tal que $\frac{t}{2} < t_o < t$.

Por el corolario 1.1.14 tenemos

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y, t-t_o) u(y, t_o) dy$$

y por consiguiente

$$
\begin{aligned}
|D_t u(x,t)| &\leq C\,\|u\|_{H^p}\, t_o^{-\frac{1}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} \min\left\{\tfrac{1}{|x-y|^3}, \tfrac{1}{(t-t_o)^{\frac{3}{2}}}\right\} dy \\
&= C\,\|u\|_{H^p}\, t_o^{-\frac{1}{p}} \left[\int_{|y-x|^3>(t-t_o)^{\frac{3}{2}}} \frac{dy}{|y-x|^3} + \int_{|y-x|^3<(t-t_o)^{\frac{3}{2}}} \frac{dy}{(t-t_o)^{\frac{3}{2}}} \right] \\
&= C \tfrac{\|u\|_{H^p} t_o^{-\frac{1}{p}}}{(t-t_o)} \\
&\leq C \tfrac{\|u\|_{H^p}}{(t-t_o)^{1+\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}
$$

Ahora, si hacemos que $t_o \to \frac{t}{2}$ obtenemos

$$
|D_t u(x,t)| \leq C \frac{\|u\|_{H^p}}{t^{1+\frac{1}{p}}} \tag{1.11}
$$

Hasta aquí, hemos completado el análisis sobre el crecimiento de u y $D_t u$, para $u \in H^p(\mathbb{R}^2_+)$, $0 < p < \infty$, cuestión que retomaremos en la próxima sección.

Si $u \in H^p(\mathbb{R}^2_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, los teoremas 1.1.5, 1.1.6 y 1.1.8 implican que las funciones $u_t(x) \equiv u(x,t)$ convergen a una función $f \in L^p(\mathbb{R})$ en la norma de L^p cuando $t \to 0$, en el caso $1 < p < \infty$; en los casos $p = \infty$ y $p = 1$, u_t converge a una función $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ en la topología débil* de $L^\infty(\mathbb{R})$ y a una medida $\mu \in M(\mathbb{R})$ en la topología débil* de $M(\mathbb{R})$, respectivamente.

Por consiguiente si $u \in H^p(\mathbb{R}^2_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, la familia $(u_t)_{t>0}$ converge si $t \to 0$ en el sentido de distribuciones temperadas. Ahora bien, si $u \in H^p(\mathbb{R}^2_+)$, $0 < p < 1$, entonces por el teorema 1.1.13 vemos que cada u_t es una función acotada y por tanto, una distribución temperada. De hecho, la familia $(u_t)_{t>0}$ converge cuando $t \to 0$ en el sentido de distribuciones temperadas, lo cual se prueba en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.15 *Sea $u \in H^p(\mathbb{R}^2_+)$, donde $0 < p \leq \infty$. Entonces existe $\lim_{t\to 0} u_t \equiv f$ en el sentido de distribuciones temperadas.*

Demostración. Ya probamos el teorema en el caso $1 \leq p \leq \infty$. Supongamos que $0 < p < 1$.

Para $(x,t) \in \mathbb{R}^2_+$ y $\delta > 0$ definamos

$$
u_\delta(x,t) \equiv u(x, t+\delta).
$$

Cada u_δ es de temperatura en $\mathbb{R}^2_+$ y además sabemos que

$$|u(x,t)| \leq CMt^{-\frac{1}{p}}$$

donde C es una constante y M es como en el teorema 1.1.13. Así, para cada $\delta > 0$, el teorema 1.1.11 nos asegura la siguiente representación:

$$u_\delta(x,t) = K(\cdot,t) * u_\delta(x).$$

Ahora, si $\eta > \delta > 0$ tenemos que

$$u_\eta(x) = u_\delta(x, \eta - \delta) = K(\cdot, \eta - \delta) * u_\delta(x)$$

Si tomamos transformadas de Fourier obtenemos

$$\widehat{u_\eta}(\xi) = \widehat{K}(\xi, \eta - \delta)\widehat{u_\delta}(\xi)$$

y como

$$\widehat{K}(\xi,t) = e^{-4\pi^2 t\xi^2}$$

tendremos que

$$\widehat{u_\eta}(\xi)e^{4\pi^2\eta\xi^2} = \widehat{u_\delta}(\xi)e^{4\pi^2\delta\xi^2} \quad \eta > \delta > 0$$

Lo anterior nos permite definir la función

$$\Psi(\xi) \equiv \widehat{u_\delta}(\xi)e^{4\pi^2\xi^2\delta} \quad \xi \in \mathbb{R},\ \delta > 0.$$

Ahora, puesto que para cualquier $t > 0$

$$\Psi(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t} = \widehat{u}_t(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(y)e^{-2\pi i\xi\cdot y}dy$$

obtenemos la estimación

$$\begin{aligned} \left|\Psi(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}\right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(y,t)|\,dy \\ &\leq CMt^{-(\frac{1}{p}-1)} \\ &\leq Ct^{-N} \end{aligned}$$

donde $N = \frac{1}{p} - 1 > 0$.

Así,

$$\begin{aligned} |\Psi(\xi)| &\leq C \inf_{t>0} \left[t^{-N} e^{4\pi^2 \xi^2 t} \right] \\ &= C_N |\xi|^{2N}. \end{aligned}$$

De lo anterior, se sigue que Ψ es una función lentamente creciente y por tanto, una distribución temperada. Por otra parte, si denotamos por $\mathcal{S}$ el espacio de funciones de prueba definidas en $\mathbf{R}$, sabemos que la transformada de Fourier establece un isomorfismo del espacio vectorial topológico $\mathcal{S}'$ formado por las distribuciones temperadas, sobre si mismo; por consiguiente, existe una única $f \in \mathcal{S}'$ tal que $\Psi = \widehat{f}$.

Veamos ahora que $u_t \to f$ en $\mathcal{S}'$ si $t \to 0$, esto es, debemos mostrar que

$$\forall \Phi \in \mathcal{S} \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\Phi(x)dx \longrightarrow \langle f, \Phi \rangle \text{ si } t \to 0.$$

Denotemos por $F(f) \equiv \widehat{f}$. Usando la transformada de Fourier vemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\Phi(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi,t)\widehat{F^{-1}}\Phi(\xi)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}F^{-1}\Phi(\xi)d\xi \end{aligned}$$

y el último miembro de la igualdad tiende a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi)F^{-1}\Phi(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)F^{-1}\Phi(\xi)d\xi = \langle f, \Phi \rangle \quad \text{si } t \to 0 \;\square$$

Como una consecuencia del teorema anterior podemos establecer la siguiente:

Proposición 1.1.16 *Sea $u \in H^p$, $0 < p < \infty$ y $f = \lim_{s\to 0} u(\cdot, s)$ en $\mathcal{S}'$. Entonces para cada $t > 0$*

$$u(\cdot, t) = K_t * f.$$

Así, la distribución f determina a u de manera única.

Demostración. Para cada $\delta > 0$ tenemos la representación

$$u(x, t+\delta) = K(\cdot, t) * u_\delta(x)$$

Si dejamos fija a t y tomamos límite cuando $\delta \to 0$ en S' obtenemos

$$u(\cdot,t) = K(\cdot,t) * f \ \square$$

Finalmente, abordaremos algunos aspectos relacionados con la convergencia puntual de las convoluciones $(K_t * f)_{t>0}$ para $f \in L^p(\mathbf{R})$, $1 \le p \le \infty$.

En [9, teo. 4.13, cap. II] se demuestra que para $\Psi \ge 0$, radial, decreciente en $|x|$ e integrable en $\mathbf{R}$ se verifica:

$$\Psi^*(f)(x) \le C\,\|\Psi\|_1\, Mf(x), \quad f \in \bigcup_{1\le p\le\infty} L^p(\mathbf{R}), \quad x \in \mathbf{R},$$

con C una constante,

$$\Psi^*(f)(x) = \sup_{t>0} |\Psi_t * f(x)|\,, \quad \Psi_t(x) = t^{-1}\Psi(t^{-1}x)$$

y $Mf(x)$ es la función maximal de f en x, esto es,

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\,dy$$

donde Q es un intervalo que contiene a x y $|Q|$ es la longitud de Q.

Tomando

$$\Psi(x) = K(x, \tfrac{1}{2}), \quad x \in \mathbf{R}$$

y considerando la identidad aproximada

$$K_t(x) = K(x,t), \quad t > 0$$

podemos establecer la siguiente:

Proposición 1.1.17 *Existe una constante C tal que para cualquier $f \in L^p$, $1 \le p \le \infty$,*

$$K^*(f)(x) \le C\,Mf(x).$$

Con esta proposición, establecemos el siguiente teorema.

Teorema 1.1.18 *Si $f \in L^p(\mathbf{R})$ para alguna $1 \le p \le \infty$, entonces*

$$K_t * f(x) \longrightarrow f(x) \quad \text{si } t \to 0$$

para casi toda $x \in \mathbf{R}$.

Demostración. K^* es un operador acotado de L^p en L^p para $1 < p < \infty$ y de tipo débil $(1,1)$. El resto de la prueba es exactamente igual que en el caso armónico [9, teo. 4.12, cap. II] □

Proposición 1.1.19 *Sea $u \in H^p$, $1 < p \leq \infty$. Entonces*

$$\|u\|_{H^p} = \|f\|_p$$

donde

$$u(x,t) = K_t * f(x), \quad f \in L^p(\mathbf{R}).$$

Por tanto, la función $u \mapsto f$ es un isomorfismo isométrico.

Demostración. Por el teorema 1.1.18, se tiene que para casi toda $x \in \mathbf{R}$

$$u(x,t) \longrightarrow f(x) \ \text{ si } t \to 0$$

y aplicando el lema de Fatou obtenemos

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &\leq \liminf_{t\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|^p\, dx \\ &\leq \|u\|_{H^p}^p \,. \end{aligned}$$

La proposición 1.1.10 nos garantiza la desigualdad opuesta □

El siguiente lema nos será de utilidad, posteriormente.

Lema 1.1.20 *Sea $f \in S'$ y Ψ la función definida en $\mathbf{R}^2_+$ del modo siguiente*

$$\Psi(x,t) = K_t * f(x).$$

Entonces, Ψ es de temperatura en $\mathbf{R}^2_+$. Si además, para $0 < p < \infty$ se verifica que $\sup\limits_{t>0} |K_t * f| \in L^p$ entonces $\Psi \in H^p$.

Demostración. La primera parte se deduce de lo siguiente:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right) K_t * f = 0.$$

La segunda parte del lema es obvia □

1.2 Espacios de Hardy de parejas conjugadas de funciones de temperatura

Iniciamos esta sección introduciendo algunos de los conceptos que requeriremos para definir nuestros espacios de parejas conjugadas..

Para una función f suficientemente regular, la integral fraccionaria de Weyl de orden $\alpha > 0$ se define del modo siguiente:

$$D^{-\alpha} f(t) = \frac{e^{i\pi\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty f(u)(u-t)^{\alpha-1} du$$

y la derivada fraccionaria de orden $\alpha > 0$ se define como

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{e^{i\pi\tilde{\alpha}}}{\Gamma(\tilde{\alpha})} \int_t^\infty f^{(n)}(u)(u-t)^{\tilde{\alpha}-1} du$$

donde $\alpha = n - \tilde{\alpha}$, n es un entero positivo y $0 < \tilde{\alpha} \leq 1$.

Esta versión de la derivada fraccionaria de Weyl fue propuesta por M. Riesz en [15]. Ahí se muestra que para funciones f suficientemente regulares se verifican las propiedades

$$D^{\alpha} D^{\beta} f = D^{\alpha+\beta} f \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} D^{-1} f = f.$$

Estamos en condiciones de formular la siguiente definición, introducida originalmente por Kochneff y Sagher en [13].

Definición 1.2.1 *Sean $u(x,t)$, $v(x,t)$ funciones reales definidas en $\mathbf{R}^2_+$ y de clase C^1. Diremos que la pareja $u + iv \in \mathbf{AH}$ si y solo si se verifican las siguientes condiciones:*

1. *Las derivadas fraccionarias $D_t^{1/2}u$, $D_t^{1/2}v$ existen en todo $\mathbf{R}^2_+$.*

2. *Se satisface el par de ecuaciones*

$$\begin{aligned} D_x u(x,t) &= -iD_t^{1/2} v(x,t) \\ iD_t^{1/2} u(x,t) &= D_x v(x,t). \end{aligned}$$

En [13] se muestran los siguientes resultados:

Proposición 1.2.2 *Si $u + iv \in \mathbf{AH}$ entonces $u, v \in H(\mathbf{R}^2_+)$.*

Proposición 1.2.3 *Si $K(x,t)$ es el núcleo de calor en $\mathbf{R}^2_+$ entonces $K+i\mathcal{H}K \in \mathbf{AH}$ donde $\mathcal{H}K$ es la transformada de Hilbert de $K(x,t)$ con respecto a la primera variable.*

Recordamos que para $f \in L^p(\mathbf{R})$, $1 \leq p < \infty$, la transformada de Hilbert de f está definida así:

$$\mathcal{H}f(x) = v.p.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{x-s}ds.$$

Proposición 1.2.4 *Si $g \in L^p(\mathbf{R})$, $1 \leq p < \infty$, entonces $g * K + i\mathcal{H}(g * K) \in \mathbf{AH}$.*

Ahora, introducimos nuestros espacios de parejas.

Definición 1.2.5 *Para cada $0 < p < \infty$ definimos el siguiente conjunto*

$$\mathbf{H}^p(\mathbf{R}^2_+) = \left\{ F = u + iv \in \mathbf{AH} : \sup_{t>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

Frecuentemente denotaremos a este conjunto simplemente por $\mathbf{H}^p$.

Cuando $u \in H^p(\mathbf{R}^2_+)$, $1 < p < \infty$, la estimación (1.1) de la sección anterior implica que

$$\begin{aligned}
\left|D_t^{1/2}u(x,t)\right| &\leq C\int_0^{\infty} |D_t u(x,s+t)|\, s^{-\frac{1}{2}} ds \\
&\leq C\,\|f\|_p \int_0^{\infty} \frac{s^{-\frac{1}{2}}}{(s+t)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2q}}} ds \\
&= \frac{C\|f\|_p}{t^{2-\frac{1}{2q}}} \int_0^{\infty} \frac{s^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}}{(1+\frac{s}{t})^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2q}}} ds \\
&= \frac{C\|f\|_p}{t^{1-\frac{1}{2q}}} \int_0^{\infty} \frac{r^{-\frac{1}{2}}}{(1+r)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2q}}} dr \\
&= \frac{C\|f\|_p}{t^{1-\frac{1}{2q}}} B(\tfrac{1}{2}, 1-\tfrac{1}{2q})
\end{aligned}$$

donde B es la función beta y $u(x,t) = K_t * f(x)$, $f \in L^p$. Por tanto

$$\left|D_t^{1/2}u(x,t)\right| \leq \frac{C\,\|f\|_p}{t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}} \tag{1.12}$$

Si $u \in H^p(\mathbf{R}^2_+)$, $0 < p \leq 1$, la estimación (1.11) obtenida en la sección anterior implica que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} |D_t u(x,s+t)|\, s^{-\frac{1}{2}} ds &\leq C\,\|u\|_{H^p} \int_0^{\infty} (s+t)^{-1-\frac{1}{p}} s^{-\frac{1}{2}} ds \\
&= C\frac{\|u\|_{H^p}}{t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}} B\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{p}\right),
\end{aligned}$$

esto es,

$$\left|D_t^{1/2}u(x,t)\right| \leq C\frac{\|u\|_{H^p}}{t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}} \tag{1.13}$$

Como consecuencia de las estimaciones (1.12) y (1.13) vemos que *Para cualquier $u \in H^p(\mathbf{R}^2_+), 0 < p < \infty$, tiene sentido considerar las derivadas fraccionarias $D_t^{1/2}u(x,t)$. Además si u, $v \in H^p(\mathbf{R}^2_+)$ y satisfacen (2) de la definición* 1.2.1, *entonces* $u + iv \in \mathbf{H}^p(\mathbf{R}^2_+)$.

Si $F = u + iv \in \mathbf{H}^p(\mathbf{R}^2_+)$ definimos para $0 < p < \infty$

$$\|F\|_{\mathbf{H}^p} = \sup_{t>0}\left[\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Puede mostrarse fácilmente que si $1 \leq p < \infty$ entonces la función

$$F \mapsto \|F\|_{\mathbf{H}^p}$$

es una norma en $\mathbf{H}^p$ y si $0 < p < 1$, $\|\|^p_{\mathbf{H}^p}$ es una p-norma.

Usaremos la transformada de Hilbert para dar una descripción de $\mathbf{H}^p$. Debemos hacer énfasis en el hecho de que siempre estaremos considerando la transformada de Hilbert con respecto a la variable espacial.

Teorema 1.2.6 *Si* $1 < p < \infty$ *entonces*

$$\mathbf{H}^p(\mathbf{R}^2_+) = \left\{u + i\mathcal{H}u : u \in H^p(\mathbf{R}^2_+)\right\}.$$

Demostración. Si $u + i\mathcal{H}u$ está en el conjunto del lado derecho, entonces por el teorema 1.1.5 y la proposición 1.2.4, $u + i\mathcal{H}u \in \mathbf{AH}$. Además como $\mathcal{H}$ es un operador acotado de L^p en L^p para $1 < p < \infty$, entonces existe una constante C tal que para cada $t > 0$ se tiene

$$\|\mathcal{H}u(\cdot,t)\|_p \leq C\,\|u(\cdot,t)\|_p$$

y de aquí es claro que $u + i\mathcal{H}u \in \mathbf{H}^p$.

Recíprocamente, sea $F = u + iv \in \mathbf{H}^p$. Entonces, $u, v \in H^p$ y satisfacen (2) de la definición 1.2.1. Debemos mostrar que

$$v(x,t) = \mathcal{H}u(x,t)$$

donde

$$u(x,t) = K(\cdot,t) * f(x), \text{ para alguna } f \in L^p.$$

En efecto, por la proposición 1.2.3 y en virtud de que $\mathcal{H}(K(\cdot,t)) * f(x) = \mathcal{H}(K(\cdot,t) * f)(x)$ tenemos

$$\begin{aligned}
D_x v(x,t) &= i\left(\frac{i}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty D_t u(x,s+t)s^{-\frac{1}{2}}ds\right)\\
&= i\left(\frac{i}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty D_tK(x-y,s+t)f(y)dy\right)s^{-\frac{1}{2}}ds\right)\\
&= i\left(\frac{i}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^\infty\left(\int_0^\infty D_tK(x-y,s+t)s^{-\frac{1}{2}}ds\right)f(y)dy\right)\\
&= i\int_{-\infty}^\infty D_t^{1/2}K(x-y,t)f(y)dy\\
&= \int_{-\infty}^\infty D_x\mathcal{H}K(x-y,t)f(y)dy\\
&= D_x\int_{-\infty}^\infty \mathcal{H}K(x-y,t)f(y)dy\\
&= D_x(\mathcal{H}(K(\cdot,t)*f))(x).
\end{aligned}$$

El intercambio en el orden de integración que aparece en la tercera igualdad está justificado por lo siguiente:

$$\int_0^\infty \left|D_tK(x-y,s+t)s^{-\frac{1}{2}}\right|ds \le C\int_0^\infty \min\left\{\frac{1}{|x-y|^3},\frac{1}{(s+t)^{\frac{3}{2}}}\right\}s^{-\frac{1}{2}}ds$$

pero

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \min\left\{\frac{1}{|x-y|^3},\frac{1}{(s+t)^{\frac{3}{2}}}\right\}s^{-\frac{1}{2}}ds &\le \left[\frac{1}{|x-y|^3}\int_0^{(x-y)^2} s^{-\frac{1}{2}}ds + \int_{(x-y)^2}^\infty \frac{s^{-\frac{1}{2}}}{(s+t)^{\frac{3}{2}}}ds\right]\\
&\le \left[\frac{2}{(x-y)^2} + \frac{1}{|x-y|}\int_{(x-y)^2}^\infty \frac{ds}{(s+t)^{\frac{3}{2}}}\right]\\
&\le \frac{4}{(x-y)^2}
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \min\left\{\frac{1}{|x-y|^3},\frac{1}{(s+t)^{\frac{3}{2}}}\right\}s^{-\frac{1}{2}}ds &\le \int_0^\infty \frac{s^{-\frac{1}{2}}}{(s+t)^{\frac{3}{2}}}ds\\
&= B(\tfrac{1}{2},1)\tfrac{1}{t}
\end{aligned}$$

por lo que

$$\int_0^\infty \left| D_t K(x-y, s+t) s^{-\frac{1}{2}} \right| ds \le C \min\left\{ \frac{1}{(x-y)^2}, \frac{1}{t} \right\}$$

y así

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \min\left\{\tfrac{1}{(x-y)^2}, \tfrac{1}{t}\right\} |f(y)|\, dy &= \int_{(y-x)^2<t} \frac{|f(y)|}{t} dy + \int_{(y-x)^2>t} \frac{|f(y)|}{(x-y)^2} dy \\
&\le \tfrac{1}{t} \|f\|_p \left\| \chi_{\left\{y:|y-x|<t^{\frac{1}{2}}\right\}}(y) \right\|_q + \|f\|_p \left\| \frac{\chi_{\left\{y:|y-x|>t^{\frac{1}{2}}\right\}}(y)}{(y-x)^2} \right\|_q \\
&= \frac{2^{\frac{1}{q}} \|f\|_p}{t^{1-\frac{1}{2q}}} \left[1 + \frac{1}{(2q-1)^{\frac{1}{q}}} \right] \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Asimismo, la derivación respecto a x bajo la integral en la sexta igualdad, está justificada por el hecho de que $f \in L^p$ y

$$|D_x \mathcal{H} K(x,t)| \le C \min\left\{ \frac{1}{x^2}, \frac{1}{t} \right\} \quad [13, \text{lema } 3].$$

Por lo tanto

$$v(x,t) = \mathcal{H}u(x,t) + C(t)$$

donde $C(t)$ sólo depende de t, y como $v \in H^p$ entonces $C(t) \equiv 0$ para toda $t > 0$, esto es

$$v(x,t) = \mathcal{H}u(x,t) \ \square$$

Ahora examinaremos el problema de la completez de $\mathbf{H}^p$ con la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^p}$ si $1 \le p < \infty$ y con la p-norma $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^p}^p$ si $0 < p < 1$. Para ello, necesitamos de los siguientes resultados.

Proposición 1.2.7 *Para $0 < p < \infty$ se verifican las siguientes relaciones:*

1. *Existen constantes positivas C_1, C_2 tales que para cualquier $1 < p < \infty$ y cualquier $F = u + iv \in \mathbf{H}^p$*

$$C_2 \left[\|u\|_{H^p} + \|v\|_{H^p} \right] \le \|F\|_{\mathbf{H}^p} \le C_1 \left[\|u\|_{H^p} + \|v\|_{H^p} \right].$$

2. *Existen constantes positivas D_1, D_2 tales que para cualquier $0 < p \le 1$ y cualquier $F = u + iv \in \mathbf{H}^p$*

$$D_2 \left[\|u\|_{H^p}^p + \|v\|_{H^p}^p \right] \le \|F\|_{\mathbf{H}^p}^p \le D_1 \left[\|u\|_{H^p}^p + \|v\|_{H^p}^p \right].$$

Demostración. Para la prueba de (1) simplemente aplicamos la desigualdad de Minkowski y obtenemos

$$\|F\|_{\mathbf{H}^p} \leq \|u\|_{H^p} + \|v\|_{H^p},$$

pero también es inmediato que

$$\|u\|_{H^p} + \|v\|_{H^p} \leq 2\,\|F\|_{\mathbf{H}^p}.$$

Para probar (2) observamos primero que

$$|u(x,t) + iv(x,t)|^p \leq |u(x,t)|^p + |v(x,t)|^p$$

y así

$$\|F\|^p_{\mathbf{H}^p} \leq \|u\|^p_{H^p} + \|v\|^p_{H^p}.$$

También es claro que

$$\|u\|^p_{H^p} + \|v\|^p_{H^p} \leq 2\,\|F\|^p_{\mathbf{H}^p} \ \square$$

Proposición 1.2.8 *Para cada $F \in \mathbf{H}^p$, $0 < p < \infty$, existe una constante $C = C(p)$ tal que para cualquier $(x,t) \in \mathbf{R}^2_+$*

$$|F(x,t)| \leq C\,\|F\|_{\mathbf{H}^p}\, t^{-\frac{1}{\alpha p}}$$

donde

$$\alpha = \begin{cases} 2 & si \quad 1 < p < \infty, \\ 1 & si \quad 0 < p \leq 1. \end{cases}$$

Demostración. Sea $F = u + iv \in \mathbf{H}^p$, $1 < p < \infty$. Entonces, por la desigualdad (1.2) se tiene que

$$\begin{aligned} |F(x,t)| &\leq |u(x,t)| + |v(x,t)| \\ &\leq C\left[\|f\|_p + \|g\|_p\right] t^{-\frac{1}{2p}} \end{aligned}$$

donde $u(\cdot,t) = K_t * f$, $v(\cdot,t) = K_t * g$, $f, g \in L^p(\mathbf{R})$ y C es una constante.

Así, en virtud de las proposiciones 1.1.19 y 1.2.7 (1) se tiene que

$$\begin{aligned} |F(x,t)| &\leq Ct^{-\frac{1}{2p}} \left[\|u\|_{H^p} + \|v\|_{H^p}\right] \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{2p}} \|F\|_{\mathbf{H}^p}. \end{aligned}$$

Ahora supongamos que $0 < p \leq 1$. Por el teorema 1.1.13 y la proposición 1.2.7 (2) tenemos

$$|F(x,t)| \leq Ct^{-\frac{1}{p}}\,\|F\|_{\mathbf{H}^p} \ \square$$

Corolario 1.2.9 *Si* $0 < p \leq 1$ *entonces*

$$\mathbf{H}^p\left(\mathbf{R}^2_+\right) \subset \left\{u + i\mathcal{H}u : u \in H^p\left(\mathbf{R}^2_+\right)\right\}.$$

Demostración. Sea $F = u + iv \in \mathbf{H}^p$. Para cada $t_o > 0$ fijo, se tiene que

$$u_{t_o}(x,t) \equiv u(x, t + t_o) = K_t * u(x, t_o),$$

$$v_{t_o}(x,t) \equiv v(x, t + t_o) = K_t * v(x, t_o).$$

En virtud de la proposición 1.2.8 tenemos que

$$u(\cdot, t_o),\ v(\cdot, t_o) \in L^p \cap L^\infty \subset L^q,\ \forall q > 1,$$

y por el teorema 1.2.6 concluimos que

$$v(\cdot, t_o) = \mathcal{H}u(\cdot, t_o) \ \square$$

Ahora, estamos en condiciones de mostrar la completez de $\mathbf{H}^p$.

Teorema 1.2.10 $\mathbf{H}^p$ *es completo para todo* $0 < p < \infty$.

Demostración. Sea $(F_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $\mathbf{H}^p$, $F_n = u_n + iv_n$. Por la proposición anterior tenemos que

$$|(u_n - u_m)(x,t)| \leq |(F_n - F_m)(x,t)| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha p}} \|F_n - F_m\|_{\mathbf{H}^p}$$

donde

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < p \leq 1, \\ 2 & \text{si} \quad 1 < p < \infty. \end{cases}$$

Por consiguiente, $(u_n)_{n=1}^\infty, (v_n)_{n=1}^\infty$ convergen uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbf{R}^2_+$ y así las funciones

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t)$$

$$v(x,t) = \lim_{n\to\infty} v_n(x,t)$$

resultan ser continuas en $\mathbf{R}^2_+$.

Si logramos probar que u y v son de clase C^1 en $\mathbb{R}^2_+$ y satisfacen (2) de la definición 1.2.1, habremos terminado, pues escribiendo $F = u + iv$ y tomando $\varepsilon > 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x+it) - F(x+it)|^p\, dx &\leq \liminf_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x+it) - F_m(x+it)|^p\, dx \\ &\leq \liminf_{m\to\infty} \|F_n - F_m\|^p_{\mathbf{H}^p} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

siempre que n sea suficientemente grande, por lo que $F_n \longrightarrow F$ en $\mathbf{H}^p$.

Probemos ahora nuestra afirmación.

De las estimaciones (1.1) y (1.11) se tiene:

$$|D_t(u_n - u_m)(x,t)| \leq \begin{cases} C\,\|u_n - u_m\|_{H^p}\, t^{-\frac{1}{2p}-1} & \text{si} \quad 1 < p < \infty, \\ C\,\|u_n - u_m\|_{H^p}\, t^{-\frac{1}{p}-1} & \text{si} \quad 0 < p \leq 1. \end{cases} \tag{1.14}$$

Así, $(D_t u_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2_+$ y por consiguiente para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2_+$,

$$\lim_{n\to\infty} D_t u_n(x,t) = D_t u(x,t),$$

luego, $D_t u$ es continua.

Ahora, sea $(x,t) \in \mathbb{R}^2_+$, sea K un compacto de $\mathbb{R}^2_+$ tal que $(x,t) \in K$ y sea Q un rectángulo cerrado contenido en $\mathbb{R}^2_+$ tal que $K \subset Q^o$. Como u_n es de temperatura en Q se tiene la representación

$$u_n(x,t) = \int_{\Gamma_Q} \widetilde{K}(x,t;\zeta)u_n(\zeta)d\lambda(\zeta) \tag{1.15}$$

donde $\widetilde{K}(x,t;\zeta)$ es algún núcleo apropiado, Γ_Q es la frontera parabólica de Q y $d\lambda(\zeta)$ es la medida de Lebesgue lineal en Γ_Q.

Si tomamos límite cuando $n \to \infty$ en la expresión (1.15) obtenemos

$$u(x,t) = \int_{\Gamma_Q} \widetilde{K}(x,t;\zeta)u(\zeta)d\lambda(\zeta) \tag{1.16}$$

Además, de (1.15) se tiene que

$$\begin{aligned} D_x u_n(x,t) &= \int_{\Gamma_Q} D_x\widetilde{K}(x,t;\zeta)u_n(\zeta)d\lambda(\zeta) \\ &\longrightarrow \int_{\Gamma_Q} D_x\widetilde{K}(x,t;\zeta)u(\zeta)d\lambda(\zeta) \end{aligned}$$

esto es,

$$D_x u_n(x,t) \longrightarrow D_x u(x,t) \text{ si } n \to \infty.$$

Puesto que $(D_{xx}u_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en compactos, se sigue que

$$D_{xx}u_n \longrightarrow D_{xx}u \text{ si } n \to \infty,$$

en particular, $D_{xx}u$ es continua.

De lo anterior, se concluye que u es de temperatura en cualquier rectángulo cerrado de $\mathbb{R}^2_+$, por tanto, es de temperatura en $\mathbb{R}^2_+$; análogamente, v es de temperatura en $\mathbb{R}^2_+$. Resta ver que u, v satisfacen (2) de la definición 1.2.1. Se sabe que para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2_+$ y para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} D_x u_n(x,t) &= -iD_t^{1/2} v_n(x,t) \\ iD_t^{1/2} u_n(x,t) &= D_x v_n(x,t) \end{aligned}$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} D_x u(x,t) &= -i \lim_{n\to\infty} D_t^{1/2} v_n(x,t) \\ D_x v(x,t) &= i \lim_{n\to\infty} D_t^{1/2} u_n(x,t). \end{aligned}$$

Tenemos que mostrar que

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} D_t^{1/2} u_n(x,t) = D_t^{1/2} u(x,t) \\ &\lim_{n\to\infty} D_t^{1/2} v_n(x,t) = D_t^{1/2} v(x,t). \end{aligned}$$

Será suficiente probar la primera igualdad. Usando las estimaciones (1.14) obtenemos para toda n

$$\left| D_t u_n(x, s+t) s^{-\frac{1}{2}} \right| \le \begin{cases} C'(s+t)^{-\frac{1}{2p}-1} s^{-\frac{1}{2}} & \text{si} \quad 1 < p < \infty, \\ C'(s+t)^{-\frac{1}{p}-1} s^{-\frac{1}{2}} & \text{si} \quad 0 < p \le 1. \end{cases}$$

donde $C' = C \sup\{\|u_n\|_{H^p} : n \in \mathbb{N}\}$ es una constante independiente de n. Pero

$$\int_0^\infty (s+t)^{-\frac{1}{2p}-1}\, s^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{1}{t^{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}}} B\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2p}\right)$$

y

$$\int_0^\infty (s+t)^{-\frac{1}{p}-1}\, s^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{1}{t^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}} B\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{p}\right).$$

Se sigue del teorema de convergencia dominada de Lebesgue que para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2_+$

$$\int_0^\infty D_t u_n(x, s+t) s^{-\frac{1}{2}} ds \longrightarrow \int_0^\infty D_t u(x, s+t) s^{-\frac{1}{2}} ds$$

que era lo que deseábamos mostrar □

Ahora, procederemos a caracterizar nuestros espacios $\mathbf{H}^p(\mathbf{R}^2_+)$.

Necesitamos introducir los siguientes espacios, de los cuales se han hecho ya estudios exhaustivos. Unicamente se mencionarán los resultados más importantes sobre ellos. Para más detalles, puede verse [9, cap. III] y [8].

Denotaremos por

$$\mathbf{H}^p_{arm}(\mathbf{R}^2_+) = \left\{ F = u + iv : F \text{ es holomorfa en } \mathbf{R}^2_+ \text{ y } \sup_{t>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p \, dx < \infty \right\}$$

con la p-norma

$$\|F\|^p_{\mathbf{H}^p_{arm}} = \sup_{t>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p \, dx \quad \text{si} \quad 0 < p < 1$$

y la norma

$$\|F\|_{\mathbf{H}^p_{arm}} = \left[\sup_{t>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{si} \quad 1 \leq p < \infty.$$

También, denotaremos por

$$H^p_{arm}(\mathbf{R}^2_+) = \left\{ u : \mathbf{R}^2_+ \to \mathbf{R} \mid u \text{ es armónica en } \mathbf{R}^2_+ \text{ y } \|u\|_{H^p_{arm}} < \infty \right\}$$

donde $\|u\|_{H^p_{arm}}$ es definido de modo análogo.

Para $1 < p < \infty$, en [9, cap. III, pg. 235] se establece el siguiente homeomorfismo:

$$\left(\mathbf{H}^p_{arm}, \|\cdot\|_{\mathbf{H}^p_{arm}}\right) \cong \left(\{f + i\mathcal{H}f : f \in ReL^p\}, \|f\|_p + \|\mathcal{H}f\|_p\right).$$

En virtud de los teoremas 1.2.6, 1.1.5 y 1.1.8 y debido a la continuidad de

$$\mathcal{H} : L^p \longrightarrow L^p \quad \text{para } 1 < p < \infty$$

se sigue que

$$(\mathbf{H}^p, \|\cdot\|_{\mathbf{H}^p}) \cong \left(\mathbf{H}^p_{arm}, \|\cdot\|_{\mathbf{H}^p_{arm}}\right) \quad \text{si} \quad 1 < p < \infty.$$

Así, ya tenemos caracterizados a nuestros espacios $(\mathbf{H}^p, \|\cdot\|_{\mathbf{H}^p})$ cuando $1 < p < \infty$.

Ahora, nos restringimos al caso $0 < p \leq 1$.

El teorema 1.1.15 nos permite introducir la siguiente noción:

Denotamos por $Re\mathbf{H}^p$ al espacio formado por las distribuciones frontera $ReF(x)$ correspondientes a las funciones $F \in \mathbf{H}^p$ con la p-norma

$$ReF(x) \longmapsto \|F\|^p_{\mathbf{H}^p}.$$

En el caso holomorfo, de acuerdo a [9, cap. III, pg. 236], denotamos por $Re\mathbf{H}^p_{arm}$ al espacio de distribuciones frontera $ReF(x)$ correspondientes a las funciones $F \in \mathbf{H}^p_{arm}$, con la p-norma

$$ReF(x) \longmapsto \|F\|^p_{\mathbf{H}^p_{arm}}.$$

En virtud del corolario 1.2.9, para determinar la naturaleza de nuestros espacios $\mathbf{H}^p$, bastará conocer la naturaleza de nuestros espacios $Re\mathbf{H}^p$, tal y como ocurre en el caso holomorfo.

Por otra parte, de acuerdo a [9, cap. III], si una función $F \in \mathbf{H}^p_{arm}(\mathbf{R}^2_+)$, digamos que $F = u + iv$ entonces para cada $t_o > 0$ fijo tenemos

$$v(\cdot, t_o) = \mathcal{H}u(\cdot, t_o),$$

y recíprocamente, si para cada $t_o > 0$ fijo consideramos la función

$$F(x, t_o) = u(\cdot, t_o)(x) + i\mathcal{H}u(\cdot, t_o)(x)$$

donde $u \in H^p_{arm}$, entonces $F \in \mathbf{H}^p_{arm}$. De hecho,

$$\mathcal{H} : Re\mathbf{H}^p_{arm} \longrightarrow Re\mathbf{H}^p_{arm}$$

es un operador acotado.

Lo anterior, significa que el espacio $\mathbf{H}^p_{arm}(\mathbf{R}^2_+)$ realmente queda determinado por la primera componente de cada elemento de $F \in \mathbf{H}^p_{arm}(\mathbf{R}^2_+)$ tal y como ocurre con los espacios $\mathbf{H}^p(\mathbf{R}^2_+)$.

Abusando un poco de la notación, podemos pensar que

$$\mathbf{H}^p_{arm} \subset H^p_{arm}$$

siendo esta inclusión propia, en virtud de las observaciones anteriores.

Los siguientes resultados sobre los espacios H^p_{arm} (ver [8], [18]) serán cruciales en nuestro análisis. De hecho, el siguiente teorema probado por Fefferman y Stein [8, teo. 11, pg. 183] es el resultado más importante que caracteriza a los espacios H^p_{arm} :

Teorema 1.2.11 *Dada $f \in S'$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *Para $\varphi \in S$ tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1,$$

se verifica

$$u^+(x) = \sup_{t>0} |\varphi_t * f(x)| \in L^p$$

donde $\varphi_t(x) = t^{-1}\varphi(x/t)$.

(ii) *Para φ como en (i)*

$$u^*(x) = \sup_{|y-x|<t} |\varphi_t * f(y)| \in L^p.$$

(iii) *La distribución f surge como*

$$f = \lim_{t\to 0^+} u(\cdot, t) \quad \text{en } S'$$

donde $u \in H^p_{arm}$.

De hecho,

$$\|u\|^p_{H^p_{arm}} \sim \|u^+\|^p_p \sim \|u^*\|^p_p,$$

donde el símbolo $\sim$ entre dos expresiones significa que el miembro izquierdo es menor o igual que una constante (independiente de u) veces el miembro derecho y viceversa.

Otro teorema importante en el estudio de los espacios H^p_{arm} lo constituye el siguiente resultado [18, prop. 3, pg. 123]:

Teorema 1.2.12 *Si f es una distribución restringida en infinito, entonces $f \in H^p_{arm}$ si y solo si se verifica la siguiente condición:*

$$\sup_{t>0} \left\{ \|f * \varphi_t\|^p_p + \|\mathcal{H}f * \varphi_t\|^p_p \right\} \leq C$$

donde $\varphi \in S$, $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$ y C es una constante independiente de f.

Sobre este teorema, es necesario aclarar dos conceptos: el de distribución restringida en infinito y el de su transformada de Hilbert. Vayamos a ello.

Se dice que una distribución f está restringida en infinito, si para todo $r < \infty$ suficientemente grande se verifica la condición

$$f * \varphi \in L^r(\mathbb{R}) \ \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

En particular, si f es una distribución que además es una función en L^q con $q > 1$, automáticamente obtenemos una distribución f restringida en infinito ya que siempre podemos elegir $s > 1$ de tal modo que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{s} - 1$$

y como $\varphi \in L^s$, en virtud de la desigualdad de Young tendremos que

$$\|f * \varphi\|_r \leq \|f\|_q \, \|\varphi\|_s < \infty.$$

Cuando $f \in H^p_{arm}$ y $\varphi \in \mathcal{S}$, la función $f * \varphi \in L^r$ para $r \geq p$, esto es, toda $f \in H^p_{arm}$ es una distribución restringida en infinito [18, pg. 100].

Nos resta aclarar como se define la transformada de Hilbert de la distribución $f \in H^p_{arm}$ (ver [18, pg. 123]).

Denotemos por k al núcleo de distribución de $\mathcal{H}$. Puesto que la convolución de dos distribuciones, en general, no está bien definida, deben explotarse las propiedades de f y de k. Para ello, se fija $\varphi \in C_c^\infty$ tal que $\varphi(x) = 0$ cuando $|x| \geq 1$ y $\varphi(x) = 1$ para $|x| \leq 1/2$.

Escribimos

$$\begin{aligned} k_o &= k\varphi \\ k_\infty &= k(1 - \varphi) \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos

$$k = k_o + k_\infty.$$

Puesto que k_o tiene soporte compacto, $f * k_o$ es una distribución bien definida. Por otra parte, k_∞ es una función acotada que es $O\left(|x|^{-1}\right)$ si $|x| \to \infty$ y así, podemos definir

$$(f * k_\infty, \psi) = \left\langle f * \tilde{\psi}, \widetilde{k_\infty} \right\rangle$$

donde $\psi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(x) &= \psi(-x) \\ \widetilde{k_\infty}(x) &= k_\infty(-x), \end{aligned}$$

definición que se justifica en virtud de que $f * \tilde{\psi} \in L^r$, $\widetilde{k_\infty} \in L^{r'}$, $1/r + 1/r' = 1$, $r \geq p$.

Ahora, retornamos al análisis de nuestros espacios $\mathbf{H}^p$, $0 < p \leq 1$.

Primeramente, mostraremos que

$$Re\mathbf{H}^p \subset Re\mathbf{H}^p_{arm}.$$

En efecto, si $f \in Re\mathbf{H}^p$ entonces existe $u + iv \in \mathbf{H}^p$ tal que

$$f = \lim_{t \to 0} u(\cdot, t) \quad \text{en } \mathcal{S}'.$$

Para cada $t_o > 0$ fijo, se tiene en virtud del corolario 1.2.9 que

$$v(x, t_o) = \mathcal{H}u(x, t_o),$$

así

$$\begin{aligned} u_{t_o}(x, t) &= K_t * u(x, t_o) \\ v_{t_o}(x, t) &= K_t * \mathcal{H}u(x, t_o), \end{aligned}$$

y además

$$\sup_{t>0} \left\{ \|K_t * u(\cdot, t_o)\|_p^p + \|K_t * \mathcal{H}u(\cdot, t_o)\|_p^p \right\} < \infty$$

y siendo $u(\cdot, t_o)$ una función en L^q, $q > 1$ y por tanto, una distribución restringida en infinito, se sigue del teorema 1.2.12 que

$$u(\cdot, t_o) \in H^p_{arm}.$$

También, por el teorema 1.2.11 se tiene que

$$\|K^*_\nabla(u(\cdot, t_o))\|_p^p \sim \|u(\cdot, t_o)\|^p_{H^p_{arm}} \tag{1.17}$$

donde

$$K^*_\nabla(u(\cdot, t_o))(x) = \sup_{|y-x|<t} |K_t * u(\cdot, t_o)(y)|.$$

Por otra parte, si definimos la función

$$F_{t_o}(x, t) = P_t * u(x, t_o) + i\mathcal{H}(P_t * u(x, t_o))$$

obtenemos una función en $\mathbf{H}^p_{arm}$ (pues $\mathcal{H} : H^p_{arm} \to H^p_{arm}$ es un operador acotado [18, teo. 4, pg. 115]) que satisface

$$F_{t_o}(x, t) \longrightarrow u(x, t_o) + i\mathcal{H}u(x, t_o) \equiv u(x, t_o) + iv(x, t_o)$$

cuando $t \to 0^+$ para casi toda $x \in \mathbb{R}$, por lo que [9, cap. III, cor. 1.2]

$$\|F_{t_o}\|^p_{\mathbf{H}^p_{arm}} \sim \|u(\cdot,t_o)+iv(\cdot,t_o)\|^p_p.$$

Por consiguiente

$$\|u(\cdot,t_o)\|^p_{H^p_{arm}} \leq \|F_{t_o}\|^p_{\mathbf{H}^p_{arm}} \leq C\,\|u(\cdot,t_o)+iv(\cdot,t_o)\|^p_p \leq C\,\|f\|_{Re\mathbf{H}^p} \tag{1.18}$$

Ahora bien, combinando (1.17) y (1.18) se obtiene

$$\|K^*_\nabla(u(\cdot,t_o))\|^p_p \leq C\,\|u(\cdot,t_o)\|^p_{H^p_{arm}} \leq C\,\|f\|_{Re\mathbf{H}^p},$$

y como

$$K^*_\nabla(f) = \lim_{t_o\downarrow 0} K^*_\nabla(u(\cdot,t_o)) \ \ c.t.p.$$

aplicando el lema de Fatou obtenemos

$$\|K^*_\nabla(f)\|^p_p \leq C\,\|f\|_{Re\mathbf{H}^p},$$

esto es,

$$\|f\|_{Re\mathbf{H}^p_{arm}} \leq C\,\|f\|_{Re\mathbf{H}^p}$$

con lo cual hemos mostrado que

$$f \in Re\mathbf{H}^p_{arm}.$$

Ahora veamos que

$$Re\mathbf{H}^p_{arm} \subset Re\mathbf{H}^p.$$

Sea $f \in Re\mathbf{H}^p_{arm}$, entonces existe $u+iv \in \mathbf{H}^p_{arm}$ tal que

$$f = \lim_{t\to 0} u(\cdot,t) \ \text{ en } \mathcal{S}',$$

de hecho,

$$f = \lim_{t\to 0} u(\cdot,t) \ \text{ en } Re\mathbf{H}^p_{arm}.$$

Así,

$$f \in H^p_{arm} \ \text{ y } \ u(\cdot,t) \to f \ \text{ en } H^p_{arm}.$$

Del teorema 1.2.12 se tiene que

$$\sup_{t>0}\left\{\|f * K_t\|^p_p + \|\mathcal{H}f * K_t\|^p_p\right\} \leq C < \infty$$

por consiguiente, la función

$$w_1(x,t) \equiv K_t * f(x)$$

es una función de temperatura en $\mathbf{R}^2_+$ con la propiedad de que

$$\sup_{t>0} \int_{-\infty}^{\infty} |w_1(x,t)|^p \, dx \leq C < \infty$$

esto es, $w_1 \in H^p$. Ahora bien, para cada $t > 0$ y para cada $t_o > 0$

$$w_1(x, t + t_o) = K_t * w_1(x, t_o)$$

y

$$w_1(\cdot, t_o) \in L^p \cap L^\infty \subset L^q, \ \ \forall q > 1$$

entonces,

$$\mathcal{H}w_1(\cdot, t_o) \in L^q$$

por lo que la función

$$w_2(x, t + t_o) \equiv K_t * \mathcal{H}w_1(x, t_o)$$

es de temperatura en $\mathbf{R}^2_+$, y además por la proposición 1.2.4, la pareja

$$(w_1(x, t + t_o), w_2(x, t + t_o)) \in \mathbf{AH}.$$

Puesto que

$$\begin{aligned} w_2(x, t + t_o) &= K_t * \mathcal{H}w_1(x, t_o) &&= K_t * \mathcal{H}(K_{t_o} * f)(x) \\ &= K_t * K_{t_o} * \mathcal{H}f(x) &&= K_{t+t_o} * \mathcal{H}f(x) \end{aligned}$$

se sigue que $w_2 \in H^p$.

Así, $(w_1, w_2) \in \mathbf{H}^p$. Por el teorema 1.1.15 sabemos que $w_1(\cdot, t)$ converge a una distribución en $Re\mathbf{H}^p$, pero por otro lado

$$w_1(\cdot, t) \longrightarrow f \ \text{ en } S' \ \text{ si } \ t \to 0$$

con lo cual podemos concluir que

$$f \in Re\mathbf{H}^p.$$

Como consecuencia de lo anterior y del corolario 1.2.9 hemos mostrado que

$$\mathbf{H}^p = \mathbf{H}^p_{arm}, \ \ 0 < p \leq 1.$$

En el siguiente teorema, mostramos que como espacios p-normados completos, son equivalentes.

Teorema 1.2.13 $\mathbf{H}^p$ *y* $\mathbf{H}^p_{arm}$, $0 < p \leq 1$, *son espacios p-normados completos topológicamente equivalentes.*

Demostración. En los párrafos anteriores, vimos que la transformación

$$\begin{array}{rcccl} T & : & \mathbf{H}^p & \longrightarrow & \mathbf{H}^p_{arm} \\ F & = & u + iv & \longmapsto & f = \lim\limits_{t \to 0} u(.,t) \ \text{ en } S' \end{array}$$

es biyectiva. Además, es acotada puesto que

$$\begin{aligned} \|TF\|^p_{\mathbf{H}^p_{arm}} &= \|f\|^p_{Re\mathbf{H}^p_{arm}} \\ &\leq C\,\|f\|_{Re\mathbf{H}^p} \\ &= C\,\|F\|^p_{\mathbf{H}^p} \end{aligned}$$

y siendo $\mathbf{H}^p$ y $\mathbf{H}^p_{arm}$ espacios p-normados completos, se sigue del teorema de la transformación abierta que T es un homeomorfismo □

También, podemos obtener el siguiente

Teorema 1.2.14 *Para* $0 < p \leq 1$, $F = u + iv \in \mathbf{H}^p$ *y* $f = \lim\limits_{t \to 0} u(\cdot,t)$ *en* S' *se verifica*

$$\mathcal{H}f = \lim_{t \to 0} v(\cdot,t) \ \text{ en } S'.$$

Demostración. Para cada $t > 0$

$$u(\cdot,t) \in H^p \cong H^p_{arm}$$

y además

$$\mathcal{H} : H^p_{arm} \longrightarrow H^p_{arm}$$

es acotado. Pero hemos visto antes que

$$v(\cdot,t) = \mathcal{H}u(\cdot,t)$$

y así

$$v(\cdot,t) \longrightarrow \mathcal{H}f \ \text{ en } H^p_{arm}$$

si $t \to 0$ □

Concluiremos esta sección dando una caracterización de $Re\mathbf{H}^p$, $0 < p \leq 1$, usando átomos. Esto será una consecuencia inmediata de los resultados que se tienen para el caso armónico (para un estudio detallado de éstos, puede consultarse [9, cap. III, sec. 3] y [6]).

Introducimos de manera breve los conceptos que necesitamos.

Sea $0 < p \leq 1$.

Definición 1.2.15 *Diremos que una función $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con soporte contenido en un intervalo I es un (p,∞)-átomo si satisface las siguientes condiciones:*

(i) *Si $|I|$ denota la longitud del intervalo I entonces*

$$\|a\|_\infty \leq |I|^{-\frac{1}{p}}.$$

(ii) *Para todo entero $k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{1}{p}\right] - 1$, donde $\left[\frac{1}{p}\right]$ denota la parte entera de $\frac{1}{p}$, los momentos de orden k de a son cero, es decir,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x)x^k dx = 0.$$

En [9, cap. III, teo. 3.4] se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1.2.16 *Si a es un (p,∞)-átomo entonces $a \in Re\mathbf{H}^p_{arm}$ y $\|a\|_{Re\mathbf{H}^p_{arm}} \leq C$, donde C es una constante que sólo depende de p y no del átomo particular a.*

De hecho, se tiene el siguiente resultado [9, cap. III, teo. 3.8 y teo. 3.9]:

Teorema 1.2.17 *Sea $f \in Re\mathbf{H}^p_{arm}$. Entonces existe una sucesión de (p,∞)-átomos $(a_j)_{j=1}^\infty$ y una sucesión de números reales $(\lambda_j)_{j=1}^\infty$ tales que*

$$\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^p \leq C\,\|f\|_{Re\mathbf{H}^p_{arm}}$$

y

$$f = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j a_j \quad \text{en } Re\mathbf{H}^p_{arm} \text{ (por tanto, en } S').$$

Recíprocamente, si f es una distribución temperada tal que

$$f = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j a_j \quad \text{en } S'$$

donde la serie

$$\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^p < \infty$$

y a_j es un (p,∞)-átomo para toda j, entonces $f \in Re\mathbf{H}^p_{arm}$ y

$$\|f\|_{Re\mathbf{H}^p_{arm}} \leq C \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^p.$$

Ahora, podemos proceder del modo siguiente:

Sabemos que si $f \in Re\mathbf{H}^p_{arm}$ entonces existe $u \in H^p$ tal que

$$u(\cdot,t) \longrightarrow f \text{ en } S' \text{ si } t \to 0^+.$$

De hecho, para cada $t > 0$

$$u(\cdot,t) = K_t * f.$$

Puesto que $f \in Re\mathbf{H}^p_{arm}$, el teorema 1.2.17 nos garantiza la descomposición

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \text{ en } S'$$

donde $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de (p,∞)-átomos y $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \le C \, \|f\|_{Re\mathbf{H}^p_{arm}} \le C \, \|f\|_{Re\mathbf{H}^p}.$$

Por tanto, para cada $t > 0$

$$u(\cdot,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j u_j(\cdot,t) \text{ en } S'$$

donde

$$u_j(\cdot,t) = K_t * a_j \quad \text{para toda } j.$$

Recíprocamente, una descomposición con tales características induce una distribución $f \in Re\mathbf{H}^p$.

Resumimos lo anterior en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.18 *Sea $f \in S'$. Entonces $f \in Re\mathbf{H}^p$, $0 < p \le 1$, si y solo si existe $u \in H^p$ tal que $u(\cdot,t) \to f$ en S' y para cada $t > 0$*

$$u(\cdot,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j u_j(\cdot,t) \text{ en } S',$$

donde

$$u_j(\cdot,t) = K_t * a_j \quad \text{para toda } j,$$

$(a_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de (p,∞)-átomos y $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \le C \, \|f\|_{Re\mathbf{H}^p}.$$

Capítulo 2

Espacios de Hardy de funciones de temperatura en Q_∞

En este capítulo, estudiamos espacios de Hardy de parejas conjugadas (u, v) de funciones de temperatura definidas en $(0,1)\times(0,\infty)$ y con valores en un espacio de Banach complejo $\mathbf{X}$. Primero abordamos el caso escalar, lo cual nos permite generalizar al caso vectorial, prácticamente sin ninguna modificación, siempre que supongamos que $\mathbf{X}$ tiene la propiedad (ARNP) (ver [3]). Definimos una nueva propiedad, que llamamos (AHRNP), la cual resulta ser equivalente a la propiedad (ARNP). Este es, precisamente, el resultado más importante de este capítulo.

2.1 La propiedad (AHRNP)

Damos inicio a esta sección, introduciendo la siguiente notación:

$\mathbf{X}$ denotará un espacio de Banach real o complejo.

Si I es un intervalo compacto de $\mathbf{R}$, $M_{\mathbf{X}}(I)$ denotará el espacio de medidas σ-aditivas de variación acotada en I y con valores en $\mathbf{X}$.

$L^p_{\mathbf{X}}(I)$, $1 \le p < \infty$, será el espacio de funciones f $(mod[\lambda])$ definidas en I y con valores en $\mathbf{X}$ tales que

$$\|f\|_p = \left[\int_I \|f\|^p_{\mathbf{X}}\, d\lambda\right]^{\frac{1}{p}} < \infty$$

donde λ es la medida de Lebesgue en I.

$L^\infty_{\mathbf{X}}(I)$ será el espacio de funciones f $(mod[\lambda])$ tales que

$$\|f\|_\infty = \sup es \|f\|_{\mathbf{X}} < \infty.$$

En algunas ocasiones, a fin de enfatizar que una función real f definida en I, pertenece a L^p, escribiremos $f \in L^p_{\mathbb{R}}(I)$.

Si Ω es cualquier región del plano, $H(\Omega, \mathbf{X})$ será el espacio de todas las funciones definidas en Ω con valores en $\mathbf{X}$ que satisfacen la ecuación de calor en la topología de la norma de $\mathbf{X}$. Resultan ser equivalentes:

(a) $u \in H(\Omega, \mathbf{X})$.

(b) $\langle x^*, u(\cdot)\rangle \in H(Q_T, \mathbf{C})$ $\forall x^* \in \mathbf{X}^*$, donde $Q_T = (0,1) \times (0,T)$, $0 < T \leq \infty$.

Para $1 \leq p < \infty$, definimos los siguientes conjuntos:

$$H^p(Q_\infty, \mathbf{X}) = \left\{ u \in H(Q_\infty, \mathbf{X}) : \sup_{0<t<\infty} \int_0^1 \|u(x,t)\|^p_{\mathbf{X}}\, dx < \infty \right\},$$

$$H^\infty(Q_\infty, \mathbf{X}) = \{u \in H(Q_\infty, \mathbf{X}) : \text{ u es acotada}\} \quad \text{y}$$

$$H^1_o(Q_\infty, \mathbf{X}) = \left\{ u \in H^1(Q_\infty, \mathbf{X}) : \lim_{q \to (0,t)} u(q) = \lim_{q \to (1,t)} u(q) = 0 \ \ \forall t > 0 \right\}.$$

Ahora, definiremos espacios de Hardy de parejas de funciones de temperatura con valores en un espacio de Banach. Antes de ésto, necesitamos hacer algunas precisiones.

Sea E un espacio de Banach real y $\mathbf{X}$ su complejificación, esto es,

$$\mathbf{X} = E + iE.$$

Definición 2.1.1 *Sean $u, v : Q_\infty \longrightarrow E$, $u, v \in C^2(Q_\infty, E)$ en sentido fuerte (i.e., u y v están definidas en Q_∞, toman valores en E y tienen segundas derivadas parciales continuas respecto a la topología de la norma en E). Diremos que $u + iv \in \mathbf{AH}(Q_\infty, \mathbf{X})$ si se verifican las siguientes condiciones:*

(a) $D^{1/2}_t u$, $D^{1/2}_t v$ *existen en* Q_∞.

(b) *Se satisface el par de ecuaciones*

$$\begin{aligned} D_x u(x,t) &= -iD_t^{1/2} v(x,t) \\ iD_t^{1/2} u(x,t) &= D_x v(x,t). \end{aligned}$$

Como lo hemos dicho antes, las derivadas D_x, D_t se consideran respecto a la topología de la norma en E y las derivadas fraccionarias $D_t^{1/2}$ están definidas así:

$$D_t^{1/2} u(x,t) = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty D_t u(x, s+t) s^{-\frac{1}{2}} ds,$$

donde la integral del lado derecho, es una integral de Bochner respecto a la medida $s^{-1/2}ds$ en $(0,\infty)$.

El siguiente resultado será utilizado frecuentemente.

Proposición 2.1.2 *Si* $u, v \in C^2(Q_\infty, E)$ *en sentido fuerte y existen* $D_t^{1/2}u$, $D_t^{1/2}v$, *entonces:*

$$u + iv \in \mathbf{AH}(Q_\infty, \mathbf{X}) \Longleftrightarrow \langle u(\cdot), e^* \rangle + i \langle v(\cdot), e^* \rangle \in \mathbf{AH}(Q_\infty, \mathbf{C}) \ \ \forall e^* \in E^*.$$

Demostración. Supongamos que $u + iv \in \mathbf{AH}(Q_\infty, \mathbf{X})$. Entonces

$$\begin{aligned} -iD_t^{1/2} \langle v(\cdot), e^* \rangle (x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty D_t v \left((\cdot), e^* \right) (x, s+t) s^{-\frac{1}{2}} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \langle D_t v(\cdot), e^* \rangle (x, s+t) s^{-\frac{1}{2}} ds \\ &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty D_t v(x, s+t) s^{-\frac{1}{2}} ds, e^* \right\rangle \\ &= \left\langle -iD_t^{1/2} v(x,t), e^* \right\rangle \\ &= \langle D_x u(x,t), e^* \rangle \\ &= D_x \langle u(\cdot), e^* \rangle (x,t) \end{aligned}$$

y de modo análogo se prueba la otra ecuación.

Para la recíproca, basta observar que las hipótesis $u, v \in C^2(Q_\infty, E)$ fuertemente y

$$-iD_t^{1/2} \langle v(\cdot), e^* \rangle (x,t) = D_x \langle u(\cdot), e^* \rangle (x,t) \ \ \forall e^* \in E^*$$

implican

$$-iD_t^{1/2} v(x,t) = D_x u(x,t).$$

Análogamente se obtiene la otra ecuación □

Es conveniente observar que las derivadas fraccionarias de funciones con valores en E gozan de la propiedad

$$D^{\alpha}D^{\beta}u = D^{\alpha+\beta}u.$$

Esto se debe a que para todo $e^* \in E^*$

$$D^{\alpha}(D^{\beta}\langle u, e^*\rangle)(\cdot) = D^{\alpha+\beta}\langle u, e^*\rangle(\cdot),$$

y puesto que e^* es continuo, el miembro izquierdo es $\left\langle D^{\alpha}D^{\beta}u(\cdot), e^*\right\rangle$ mientras que el miembro derecho es $\left\langle D^{\alpha+\beta}u(\cdot), e^*\right\rangle$.

Proposición 2.1.3 *Si* $u + iv \in \mathbf{AH}(Q_\infty, \mathbf{X})$ *entonces* $u, v \in H(Q_\infty, E)$.

Demostración. Para cualquier $e^* \in E^*$

$$\begin{aligned}
\langle D_t u(\cdot), e^*\rangle(x,t) &= D_t\langle u(\cdot), e^*\rangle(x,t) \\
&= D_t^{1/2}D_t^{1/2}\langle u(\cdot), e^*\rangle(x,t) \\
&= -iD_t^{1/2}D_x\langle v(\cdot), e^*\rangle(x,t) \\
&= -iD_xD_t^{1/2}\langle v(\cdot), e^*\rangle(x,t) \\
&= D_x^2\langle u(\cdot), e^*\rangle(x,t),
\end{aligned}$$

esto es,

$$D_t u(x,t) = D_x^2 u(x,t).$$

De manera similar se procede con v □

Estamos ya en condiciones de introducir nuestros espacios de Hardy de parejas conjugadas.

Definición 2.1.4 *Para* $1 \le p < \infty$ *definimos*

$$\mathbf{H}^p(Q_\infty, \mathbf{X}) = \left\{ F = u + iv \in \mathbf{AH}(Q_\infty, \mathbf{X}) : \sup_{0<t<\infty} \int_0^1 \|F(x,t)\|_{\mathbf{X}}^p \, dx < \infty \right\},$$

$$\mathbf{H}^\infty(Q_\infty, \mathbf{X}) = \{F = u + iv \in \mathbf{AH}(Q_\infty, \mathbf{X}) : F \text{ es } \|\|_{\mathbf{X}}\text{-acotada}\} \quad y$$

$$\mathbf{H}_o^1(Q_\infty, \mathbf{X}) = \left\{ F = u + iv \in \mathbf{H}^1(Q_\infty, \mathbf{X}) : \lim_{q\to(0,t)} u(q) = \lim_{q\to(1,t)} u(q) = 0 \;\; \forall t > 0 \right\}.$$

Una consecuencia inmediata de la proposición 2.1.3 es que si $F = u + iv \in \mathbf{H}^p(Q_\infty, \mathbf{X})$ entonces $u, v \in H^p(Q_\infty, E)$. De hecho:

Proposición 2.1.5 *Para* $1 \leq p \leq \infty$ *se verifica*

$$\mathbf{H}^p(Q_\infty, \mathbf{X}) \subset H^p(Q_\infty, \mathbf{X}).$$

Demostración. Si $F = u + iv \in \mathbf{H}^p(Q_\infty, \mathbf{X})$ entonces $u, v \in H^p(Q_\infty, E)$ y por tanto, $u + iv \in H^p(Q_\infty, \mathbf{X})$ □

Para concluir esta sección, definiremos una nueva propiedad analítica de Radon-Nikodym que relacionaremos más adelante con la antigua propiedad analítica de Radon-Nikodym.

Definición 2.1.6 *Sea* $\mathbf{X} = E + iE$ *como antes. Diremos que* $\mathbf{X}$ *tiene la propiedad* **(AHRNP)** *lo cual denotaremos por* $\mathbf{X} \in$ **AHRNP** *si y solo si toda* $F \in \mathbf{H}^1_o(Q_\infty, \mathbf{X})$ *tiene límites laterales c.t.p.*

Recordamos que [3, def. 1.1] un espacio de Banach complejo $\mathbf{X}$ tiene la propiedad analítica de Radon-Nikodym, lo cual denotaremos como la propiedad **(ARNP)** o bien, $\mathbf{X} \in$ **ARNP**, si toda medida μ en $M_{\mathbf{X}}(S^1)$ con $\widehat{\mu}(n) = 0$ para toda $n < 0$ es representable por una función $f \in L^1_{\mathbf{X}}(S^1)$, esto es, para todo $A \in B(S^1)$, la familia de borelianos de S^1, se verifica

$$\mu(A) = \int_A f(t) d\lambda(t),$$

donde $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$.

2.2 El caso escalar

En esta sección, nos restringiremos al análisis del espacio $\mathbf{H}^1_o(Q_\infty, \mathbf{C})$. Usando argumentos prácticamente idénticos (siempre que tengamos hipótesis adecuadas), retornaremos a la situación general en la tercera sección.

Sea $u \in H^1_o(Q_\infty, \mathbf{R})$. De acuerdo a [5], podemos extender para cada $t > 0$ fijo $u_t \equiv u(\cdot, t)$ como función impar a $[-1, 0]$ y después a todo $\mathbf{R}$ como función 2-periódica, obteniendo la siguiente representación en Q_∞ :

$$u_t(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) e^{-n^2\pi^2 s} sen(n\pi x) \tag{2.1}$$

donde

$$a_n(t) = 2\int_0^1 u(\xi,t)sen(n\pi\xi)d\xi.$$

Ahora, recordamos la noción de serie conjugada [21], la cual será muy importante en nuestro análisis.

Definición 2.2.1 *Sea φ una función continua definida en $\mathbb{R}$ de período 2, digamos*

$$\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\pi x}.$$

Su función conjugada $\widetilde{\varphi}$ está definida del modo siguiente:

$$\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-i)sgn(n)c_n e^{in\pi x}.$$

En realidad, φ puede pensarse como una función continua definida en $S^1 = [-1,1]/\{-1,1\}$ y $\sim$ como un operador actuando en $C(S^1)$.

Si denotamos por $U_t \equiv U(\cdot,t)$ la extensión de u_t a $[-1,1]$ tenemos la representación

$$U_t(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)e^{-n^2\pi^2 s}sen(n\pi x), \quad x\in[-1,1], \quad s>0 \tag{2.2}$$

por lo que

$$U_t(x,s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\pi x}, \quad x\in[-1,1], \quad s>0 \tag{2.3}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2i}sgn(n)a_{|n|}(t)e^{-n^2\pi^2 s}, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Por consiguiente

$$\widetilde{U}_t(x,s) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)e^{-n^2\pi^2 s}\cos(n\pi x), \quad x\in[-1,1], \quad 0<s<\infty \tag{2.4}$$

Denotando por $\widetilde{u}_t(x,s) \equiv \widetilde{U}_{t|_{[0,1]}}(x,s)$ obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.2.2 *Para cada $t>0$*

$$u_t + i\widetilde{u}_t \in \mathbf{AH}(Q_\infty, \mathbf{C}).$$

Demostración. Tenemos que probar

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial x} u_t(x,s) &= -i\tfrac{\partial^{1/2}}{\partial s}\widetilde{u}_t(x,s),\\
i\tfrac{\partial^{1/2}}{\partial s} u_t(x,s) &= \tfrac{\partial}{\partial x}\widetilde{u}_t(x,s).
\end{aligned}
$$

Veamos:

$$
\begin{aligned}
-i\tfrac{\partial^{1/2}}{\partial s}\widetilde{u}_t(x,s) &= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\widetilde{u}_t(x,s+r)r^{-\frac{1}{2}}dr\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left[-\sum_{n=1}^\infty a_n(t)e^{-n^2\pi^2(s+r)}\cos(n\pi x)\right]r^{-\frac{1}{2}}dr\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left[\sum_{n=1}^\infty \left(n^2\pi^2\right)a_n(t)e^{-n^2\pi^2(s+r)}\cos(n\pi x)\right]r^{-\frac{1}{2}}dr\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^\infty \left(n^2\pi^2\right)a_n(t)e^{-n^2\pi^2 s}\cos(n\pi x)\left[\int_0^\infty e^{-n^2\pi^2 r}r^{-\frac{1}{2}}dr\right]\\
&= \sum_{n=1}^\infty (n\pi)\,a_n(t)e^{-n^2\pi^2 s}\cos(n\pi x)\\
&= \tfrac{\partial}{\partial x}u_t(x,s).
\end{aligned}
$$

El intercambio que se hizo de la suma con la integral en la cuarta igualdad se debe a que la serie

$$\sum_{n=1}^\infty n^2\pi^2 a_n(t)e^{-n^2\pi^2(s+r)}\cos(n\pi x)r^{-\frac{1}{2}}$$

satisface la siguiente estimación:

$$
\begin{aligned}
\left|n^2\pi^2 a_n(t)e^{-n^2\pi^2(s+r)}\cos(n\pi x)r^{-\frac{1}{2}}\right| &\le Cn^2e^{-n^2\pi^2 r}r^{-\frac{1}{2}}\\
&\le C\tfrac{n^2r^{-\frac{1}{2}}}{n^4r^2}\\
&= C\tfrac{1}{n^2}r^{-\frac{5}{2}},
\end{aligned}
$$

y también

$$
\begin{aligned}
\left|n^2\pi^2 a_n(t)e^{-n^2\pi^2(s+r)}\cos(n\pi x)r^{-\frac{1}{2}}\right| &\le Cn^2e^{-n^2\pi^2 s}r^{-\frac{1}{2}}\\
&\le C\tfrac{n^2r^{-\frac{1}{2}}}{n^4s^2}\\
&\le C\tfrac{1}{n^2}r^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

(C depende de s y t), por lo que

$$
\left|\sum_{n=1}^\infty n^2\pi^2 a_n(t)e^{-n^2\pi^2(s+r)}\cos(n\pi x)r^{-\frac{1}{2}}\right| \le \begin{cases} C\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}r^{-\frac{1}{2}}, \\ C\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}r^{-\frac{5}{2}}, \end{cases}
$$

y así

$$\int_0^\infty \left|\sum_{n=1}^\infty n^2\pi^2 a_n(t) e^{-n^2\pi^2(s+r)} \cos(n\pi x) r^{-\frac{1}{2}}\right| dr \le C\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\right] r^{-\frac{1}{2}}dr + C\int_1^\infty \left[\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\right] r^{-\frac{3}{2}}dr < \infty.$$

De manera análoga se prueba la otra parte □

Ahora abordaremos el problema de caracterizar los elementos de $\mathbf{H}^1_o(Q_\infty, \mathbf{C})$.

Sea $F = u + iv \in \mathbf{H}^1_o(Q_\infty, \mathbf{C})$, así $u + iv \in \mathbf{AH}(Q_\infty, \mathbf{C})$, $u \in H^1_o(Q_\infty, \mathbf{R})$, $v \in H^1(Q_\infty, \mathbf{R})$. Sabemos que [5, pg. 44] para cada $t > 0$ fijo

$$u_t(x,s) = u(x, t+s) = \int_0^1 [\theta(x-\xi, s) - \theta(x+\xi, s)]\, u(\xi, t) d\xi,$$

esto es,

$$u_t(x,s) = \int_0^1 K_3(x,s;\xi) u(\xi,t) d\xi, \ \ (x,s) \in Q_\infty \tag{2.5}$$

donde

$$K_3(x,s;\xi) = \theta(x-\xi, s) - \theta(x+\xi, s).$$

Sea $(t_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión tal que $t_n \downarrow 0$. La sucesión $(u(\cdot, t_n))_{n=1}^\infty$ es una sucesión acotada en $L^1_{\mathbf{R}}([0,1]) \hookrightarrow M_{\mathbf{R}}([0,1]) = C([0,1])^*$ y por el teorema de Banach-Alaoglu, posee una subsucesión (que por simplicidad denotaremos del mismo modo) que converge en la topología débil* a una medida $\mu \in M_{\mathbf{R}}([0,1])$. Siendo $K_3(x,s;\cdot)$ una función continua en $[0,1]$, se sigue que

$$u(x,s) = \lim_{n\to\infty} u_{t_n}(x,s) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 K_3(x,s;\xi) u(\xi, t_n) d\xi,$$

esto es,

$$u(x,s) = \int_0^1 K_3(x,s;\xi) d\mu(\xi), \ \ (x,s) \in Q_\infty \tag{2.6}$$

donde $\mu \in M_{\mathbf{R}}([0,1])$, o equivalentemente, dado que

$$K_3(x,s;\xi) = 2\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi^2 s} sen(n\pi x) sen(n\pi\xi),$$

$$u(x,s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-n^2\pi^2 s}sen(n\pi x) \tag{2.7}$$

donde

$$a_n=2\int_0^1 sen(n\pi\xi)d\mu(\xi),\quad n\geq 1.$$

Por otra parte, puesto que

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial v}{\partial x}(0,t) &= i\tfrac{\partial^{1/2}}{\partial t}u(0,t)\\
&= -\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}u(0,s+t)s^{-\frac{1}{2}}ds\\
&= 0\\
&= -\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}u(1,s+t)s^{-\frac{1}{2}}ds\\
&= i\tfrac{\partial^{1/2}}{\partial t}u(1,t)\\
&= \tfrac{\partial v}{\partial x}(1,t)
\end{aligned}$$

se sigue que [5, pg. 63] para cada $t>0$ fijo

$$v_t(x,s)=v(x,t+s)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(t)e^{-n^2\pi^2 s}\cos(n\pi x),\quad (x,s)\in Q_\infty \tag{2.8}$$

donde

$$b_n(t)=2\int_0^1\cos(n\pi\xi)v(\xi,t)d\xi,$$

esto es,

$$v_t(x,s)=\int_0^1\overline{K}_3(x,s;\xi)v(\xi,t)d\xi+\frac{b_o(t)}{2} \tag{2.9}$$

con

$$\overline{K}_3(x,t;\xi)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi^2 t}\cos(n\pi x)\cos(n\pi\xi)=\theta(x+\xi,t)+\theta(x-\xi,t).$$

Debido a que $v\in H^1(Q_\infty,\mathbb{R})$, si $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que decrece a 0, entonces la sucesión $(v(.,t_n))_{n=1}^{\infty}$ se encuentra en una bola en $M_{\mathbb{R}}([0,1])=C([0,1])^*$ y argumentando igual que antes, existe una medida $\nu\in M_{\mathbb{R}}([0,1])$ tal que

$$v(x,s)=\int_0^1\overline{K}_3(x,s;\xi)d\nu(\xi)+\frac{b_o}{2},\quad (x,s)\in Q_\infty, \tag{2.10}$$

es decir,

$$v(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 s}\cos(n\pi x), \quad (x,s)\in Q_\infty \tag{2.11}$$

con

$$b_n = 2\int_0^1 \cos(n\pi\xi)d\nu(\xi), \quad n\geq 0.$$

Sea μ_1 la extensión impar de μ a $[-1,1]$, esto es,

$$\mu_1(A)=\mu(A\cap[0,1])-\mu(-A\cap[0,1]) \quad \text{para } A\in B([-1,1]).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu_1}(n) &= \int_{-1}^{1} e^{-in\pi\xi}d\mu_1(\xi)\\
&= \int_0^1 e^{-in\pi\xi}d\mu(\xi)-\int_0^1 e^{in\pi\xi}d\mu(\xi)\\
&= (-2i)\int_0^1 sen(n\pi\xi)d\mu(\xi)\\
&= -ia_n,
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\widehat{\mu_1}(n)=0 \ \ \forall n\leq 0.$$

Se sigue del teorema de los hermanos Riesz [9, teo. 3.10, cap. I] que existe $f_1\in L^1_{\mathbb{R}}([-1,1])$ tal que

$$d\mu_1(\xi)=f_1(\xi)d\xi,$$

además, f_1 es una función impar.

Si llamamos $f=f_{1|_{[0,1]}}$ tenemos que

$$d\mu(\xi)=f(\xi)d\xi \ \text{ con } \ f\in L^1_{\mathbb{R}}([0,1]) \tag{2.12}$$

Si ahora consideramos la extensión par de ν a $[-1,1]$, esto es,

$$\nu_1(A)=\nu(A\cap[0,1])+\nu(-A\cap[0,1]) \quad \text{para } A\in B([-1,1])$$

tendremos que

$$\begin{aligned}
\widehat{\nu_1}(n) &= \int_{-1}^{1} e^{-in\pi\xi}d\nu_1(\xi)\\
&= \int_0^1 e^{-in\pi\xi}d\nu_1(\xi)+\int_0^1 e^{in\pi\xi}d\nu_1(\xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2\int_0^1 \cos(n\pi\xi)d\nu(\xi) \\ &= b_n, \end{aligned}$$

esto es,

$$\widehat{\nu_1}(n) = 0 \ \ \forall n < 0$$

y así existe $g_1 \in L^1_{\mathbb{R}}([-1,1])$ tal que

$$d\nu_1(\xi) = g_1(\xi)d\xi, \ \ g_1 \text{ una función par.}$$

Si llamamos $g = g_1|_{[0,1]}$ tenemos que

$$d\nu(\xi) = g(\xi)d\xi \ \text{ con } g \in L^1_{\mathbb{R}}([0,1]) \tag{2.13}$$

Así, podemos escribir (2.6) y (2.10) del modo siguiente:

$$u(x,t) = \int_0^1 K_3(x,t;\xi)f(\xi)d\xi, \ \ f \in L^1_{\mathbb{R}}([0,1]) \tag{2.14}$$

y

$$v(x,t) = \int_0^1 \overline{K}_3(x,t;\xi)g(\xi)d\xi + \frac{b_o}{2}, \ \ g \in L^1_{\mathbb{R}}([0,1]) \tag{2.15}$$

Usaremos la información $u+iv \in \mathbf{AH}(Q_\infty, \mathbf{C})$ para determinar la forma de $v(x,t)$. De (2.14) se tiene que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t} sen(n\pi x)$$

con

$$a_n = 2\int_0^1 sen(n\pi\xi)f(\xi)d\xi.$$

Pero

$$\begin{aligned} D_x v(x,t) &= iD_t^{1/2}u(x,t) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty D_t u(x,s+t)s^{-1/2}ds \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}(-n^2\pi^2)\, a_n e^{-n^2\pi^2 t} sen(n\pi x)\int_0^\infty e^{-n^2\pi^2 s}s^{-\frac{1}{2}}ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)\, a_n e^{-n^2\pi^2 t} sen(n\pi x), \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$v(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t}\cos(n\pi x) + C(t).$$

Por consiguiente

$$v(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + C(t)$$

donde $\sim$ se toma respecto a la variable espacial y $C(t)$ es una función de t.

Por otra parte, como

$$D_t^{1/2} v(x,t) = iD_x u(x,t) = i\sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)\, a_n e^{-n^2\pi^2 t}\cos(n\pi x),$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
D_t v(x,t) &= i\sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)\, a_n \cos(n\pi x)\, D_t^{1/2} e^{-n^2\pi^2 t} \\
&= i\sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)\, a_n \cos(n\pi x)\, \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left(-n^2\pi^2\right) e^{-n^2\pi^2(t+s)} s^{-\frac{1}{2}} ds \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (n^2\pi^2)\, a_n e^{-n^2\pi^2 t}\cos(n\pi x) \\
&= D_t \widetilde{u}(x,t).
\end{aligned}$$

Así

$$v(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + D(x),$$

donde $D(x)$ es una función de x.

De lo anterior se sigue que $D(x) = C(t) \equiv C$, una constante, y por tanto

$$v(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + C \tag{2.16}$$

Ahora, probaremos que $u(\cdot,t) \longrightarrow f$ si $t \to 0^+$ *c.t.p.* sobre $[0,1]$ y en L^1, y también que $v(\cdot,t) \longrightarrow g$ si $t \to 0^+$ *c.t.p.* sobre $[0,1]$ y en L^1.

Sabemos que

$$u(x,t) = \int_0^1 K_3(x,t;\xi) f(\xi) d\xi,$$

donde $f \in L^1_{\mathbb{R}}([0,1])$.

De acuerdo a [10, teo. XII]

$$u(x,t) \longrightarrow f(x) \ \text{ si } \ t \to 0^+,$$

para casi toda $x \in [0,1]$.

Ahora, observamos que $K_3(x,t;\xi) > 0$ [20, pg. 92] y siendo K_3 continuo, debe integrar positivo.

De hecho

$$\begin{aligned} 0 &< \int_0^1 K_3(x,t;\xi)d\xi \\ &= \int_0^1 \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} K(x-\xi+2n,t) - K(x+\xi+2n,t) \right\} d\xi \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_0^1 K(x-\xi+2n,t)d\xi - \int_0^1 K(x+\xi+2n,t)d\xi \right] \end{aligned}$$

y notando que $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} x+2n-1 &< x-\xi+2n < x+2n \quad \text{y} \\ x+2n &< x+\xi+2n < x+2n+1, \end{aligned}$$

vemos que tal suma no puede exceder el valor

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi,t)d\xi = 1,$$

así

$$0 < \int_0^1 K_3(x,t;\xi)d\xi \leq 1.$$

Como $K_3(x,t;\xi) = K_3(\xi,t;x)$ entonces

$$0 < \int_0^1 K_3(x,t;\xi)dx = \int_0^1 K_3(x,t;\xi)d\xi \leq 1.$$

Por consiguiente, para cada $t > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u(x,t)|\, dx &\leq \int_0^1 \int_0^1 K_3(x,t;\xi)\, |f(\xi)|\, d\xi dx \\ &= \|f\|_1 \int_0^1 K_3(x,t;\xi)dx \\ &\leq \|f\|_1, \end{aligned}$$

es decir,

$$\|u(\cdot,t)\|_1 \leq \|f\|_1 \quad \forall t > 0,$$

y ésto implica que

$$\lim_{t\to 0^+} \sup \|u(\cdot,t)\|_1 \leq \|f\|_1 .$$

Pero sabemos que $u(\cdot,t) \longrightarrow f$ cuando $t \to 0^+$ *c.t.p.*, y aplicando el lema de Fatou obtenemos

$$\|f\|_1 \leq \lim_{t\to 0^+} \inf \|u(\cdot,t)\|_1 .$$

Por lo tanto

$$\lim_{t\to 0^+} \|u(\cdot,t)\|_1 = \|f\|_1 ,$$

así que

$$u(\cdot,t) \longrightarrow f \;\text{ en }\; L^1.$$

También, se tiene que para cierta $g_1 \in L^1_{\mathbb{R}}([-1,1])$, g_1 par, $g_{1|_{[0,1]}} = g$,

$$\begin{aligned}
v(x,t) - \tfrac{b_o}{2} &= \int_0^1 \overline{K}_3(x,t;\xi)g(\xi)d\xi \\
&= \int_0^1 \{\theta(x+\xi,t) + \theta(x-\xi,t)\}\, g(\xi)d\xi \\
&= \int_0^1 \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} K(x+\xi+2n,t) + K(x-\xi+2n,t) \right\} g(\xi)d\xi \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^1 K(x-\xi+2n,t)g_1(\xi)d\xi + \int_{-1}^0 K(x-\xi+2n,t)g_1(-\xi)d\xi \right\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^1 K(x-\xi+2n,t)g_1(\xi)d\xi + \int_{-1}^0 K(x-\xi+2n,t)g_1(\xi)d\xi \right\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-1}^1 K(x-\xi+2n,t)g_1(\xi)d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)g_1(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

y al igual que en [10, pg. 394] se tendrá que

$$v(x,t) \longrightarrow g_1(x) + \frac{b_o}{2} \;\text{ para casi toda } x \in [-1,1]. \tag{2.17}$$

Así,

$$v(\cdot,t) \longrightarrow g + \frac{b_o}{2} \;\; c.t.p. \text{ sobre } [0,1].$$

Análogamente, $\overline{K}_3(x,t;\xi) = \theta(x+\xi,t) + \theta(x-\xi,t) > 0$ y siendo continuo, integra positivo.

Más aún:

$$\begin{aligned}
0 &< \int_0^1 K_3(x,t;\xi)d\xi \\
&= \int_0^1 \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} K(x+\xi+2n,t) + K(x-\xi+2n,t) \right\} d\xi \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_0^1 K(x+\xi+2n,t)d\xi + \int_0^1 K(x-\xi+2n,t)d\xi \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi,t)d\xi \\
&= 1
\end{aligned}$$

pues $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
x+2n \quad &< \quad x+\xi+2n \quad < \quad x+2n+1 \\
x+2n-1 \quad &< \quad x-\xi+2n \quad < \quad x+2n.
\end{aligned}$$

También, como $\overline{K}_3(x,t;\xi) = \overline{K}_3(\xi,t;x)$, se sigue que

$$\int_0^1 \overline{K}_3(x,t;\xi)d\xi = \int_0^1 \overline{K}_3(x,t;\xi)dx = 1.$$

Por tanto, para cada $t > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |v(x,t)|dx \quad &\leq \quad \left[\int_0^1 \overline{K}_3(x,t;\xi)dx \right] \|g\|_1 + \frac{b_o}{2} \\
&= \quad \|g\|_1 + \frac{b_o}{2},
\end{aligned}$$

así

$$\lim_{t\to 0+} \sup \|v(\cdot,t)\|_1 \leq \|g\|_1 + \frac{b_o}{2}.$$

Como $v(\cdot,t) \longrightarrow g + b_o/2$ *c.t.p.* en $[0,1]$, el lema de Fatou implica

$$\lim_{t\to 0+} \|v(\cdot,t)\|_1 = \|g\|_1 + \frac{b_o}{2}.$$

Por otra parte, si denotamos por T el operador definido para $\varphi \in L^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ por

$$T\varphi(x) = v.p. \int_0^1 \left[\cot \pi \left(\frac{x+\xi}{2} \right) - \cot \pi \left(\frac{x-\xi}{2} \right) \right] \varphi(\xi) d\xi$$

tenemos que, para cada $t > 0$ fijo

$$\begin{aligned}
Tu(\cdot,t)(x) &= v.p.\int_0^1 \left[\cot\pi\left(\frac{x+\xi}{2}\right) - \cot\pi\left(\frac{x-\xi}{2}\right)\right] u(\xi,t)d\xi \\
&= v.p.\int_0^1 \left[\cot\pi\left(\frac{x+\xi}{2}\right) - \cot\pi\left(\frac{x-\xi}{2}\right)\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t} sen(n\pi\xi)\right] d\xi \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t}\left\{ v.p.\int_0^1 \left[\cot\pi\left(\frac{x+\xi}{2}\right) - \cot\pi\left(\frac{x-\xi}{2}\right)\right] sen(n\pi\xi)d\xi \right\} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t}\cos(n\pi x) \\
&= \tilde{u}(\cdot,t)(x)
\end{aligned}$$

(ver [1, pg. 252]). Por consiguiente

$$Tu(\cdot,t)(x) = \tilde{u}(\cdot,t)(x) \;\; c.t.p. \text{ sobre } [0,1] \tag{2.18}$$

La expresión (2.18) nos permite usar el hecho de que $\sim$ es un operador de tipo débil $(1,1)$ [9, teo. 5.9, cap. I]. Con ésto, determinaremos que forma tiene g.

Sea $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que decrece a 0. Puesto que $u(\cdot,t_n) \longrightarrow f$ si $n \to \infty$ en L^1 entonces

$$v(\cdot,t_n) = \tilde{u}(\cdot,t_n) + C \longrightarrow \tilde{f} + C \;\; \text{si} \;\; n \longrightarrow \infty$$

en L^1_w, el espacio L^1 débil, ya que $\sim$ es de tipo débil $(1,1)$. Por consiguiente, existe una subsucesión (que por simplicidad denotaremos del mismo modo) tal que

$$v(\cdot,t_n) \longrightarrow \tilde{f} + C \;\; \text{si} \;\; n \to \infty \;\; c.t.p. \text{ en } [0,1].$$

Pero también sabemos que $v(\cdot,t_n) \longrightarrow g + b_o/2$ $c.t.p.$ en $[0,1]$, por lo tanto

$$g = \tilde{f} + C - \frac{b_o}{2} \tag{2.19}$$

donde C es una constante real.

Hemos obtenido entonces las siguientes representaciones para u y para v :

$$u(x,t) = \int_0^1 K_3(x,t;\xi)f(\xi)d\xi \tag{2.20}$$

$$v(x,t) = \int_0^1 \overline{K}_3(x,t;\xi)\tilde{f}(\xi)d\xi + C \tag{2.21}$$

donde $f_1 \in L^1_{\mathbb{R}}([-1,1])$, $f = f_{1|_{[0,1]}}$, f_1 es impar tal que $\widetilde{f_1} \in L^1_{\mathbb{R}}([-1,1])$ y C es una constante real.

Todo lo anterior puede resumirse en el siguiente teorema:

Teorema 2.2.3 *$F = u + iv \in \mathbf{H}^1_o(Q_\infty, \mathbf{C})$ si y solo si*

$$F(x,t) = \int_0^1 K_3(x,t;\xi)f(\xi)d\xi + i\int_0^1 \overline{K}_3(x,t;\xi)\widetilde{f}(\xi)d\xi + iC$$

donde C es una constante real, f_1 es una función impar en $L^1_{\mathbb{R}}([-1,1])$ tal que $\widetilde{f_1} \in L^1_{\mathbb{R}}([-1,1])$ y $f_{1|_{[0,1]}} = f$.

Demostración. Una implicación ya se hizo. Supongamos ahora que F tiene una expresión como la dada, entonces

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t} sen(n\pi x), \quad \text{con} \quad a_n = 2\int_0^1 sen(n\pi\xi)f(\xi)d\xi$$

y

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t}\cos(n\pi x) + b_o, \quad \text{con} \quad b_n = 2\int_0^1 \cos(n\pi\xi)\widetilde{f}(\xi)d\xi$$

donde b_o es una constante real. Puesto que $\forall n \in \mathbf{N}$ (ver [21, teo. 8.7, pg. 158])

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 \cos(n\pi\xi)\widetilde{f}(\xi)d\xi \\ &= -2\int_0^1 \widetilde{\cos(n\pi\xi)}f(\xi)d\xi \\ &= -2\int_0^1 sen(n\pi\xi)f(\xi)d\xi \\ &= -a_n, \end{aligned}$$

tendremos que

$$v(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t}\cos(n\pi x) + b_o.$$

Como en la proposición 2.2.2, se demuestra fácilmente que $F \in \mathbf{AH}(Q_\infty, \mathbf{C})$. Además, para cada $t > 0$

$$\int_0^1 |F(x,t)|\,dx \le C\left[\|f\|_1 + \left\|\widetilde{f}\right\|_1\right] < \infty$$

y $u(x,t)$ satisface $u(0,t) = u(1,t) = 0$ para toda $t > 0$, esto es, $F \in \mathbf{H}^1_o(Q_\infty, \mathbf{C})$ □

Corolario 2.2.4 *Si $u+iv \in \mathbf{H}^1_o(Q_\infty, \mathbf{C})$ entonces v satisface las condiciones de Neumann*

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(1,t) = 0.$$

Corolario 2.2.5 *$F \in \mathbf{H}^1_o(Q_\infty, \mathbf{C})$ si y solo si*

$$F(x,t) = -i\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t + in\pi x} + iC$$

donde C es una constante real y $-ia_n$, $n \in \mathbf{Z}$ son los coeficientes de Fourier de una función impar $f_1 \in L^1_{\mathbf{R}}([-1,1])$ tal que $\widehat{f_1} \in L^1_{\mathbf{R}}([-1,1])$.

Demostración. Por el teorema anterior, $F \in \mathbf{H}^1_o(Q_\infty, \mathbf{C})$ si y solo si existe una función impar $f_1 \in L^1_{\mathbf{R}}([-1,1])$ con $\widehat{f_1} \in L^1_{\mathbf{R}}([-1,1])$ tal que

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t} sen(n\pi x) - i\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t}\cos(n\pi x) + iC$$

donde

$$a_n = 2\int_0^1 sen(n\pi\xi) f(\xi) d\xi, \quad n \in \mathbf{N}, \text{ y } \quad f = f_1|_{[0,1]}.$$

Claramente

$$\begin{aligned}
\widehat{f_1}(n) &= \int_{-1}^{1} e^{-in\pi\xi} f_1(\xi) d\xi \\
&= \int_0^1 e^{-in\pi\xi} f(\xi) d\xi + \int_{-1}^{0} e^{-in\pi\xi} (-f(-\xi)) d\xi \\
&= \int_0^1 e^{-in\pi\xi} f(\xi) d\xi - \int_0^1 e^{in\pi\xi} f(\xi) d\xi \\
&= -2i\int_0^1 sen(n\pi\xi) f(\xi) d\xi \\
&= -ia_n,
\end{aligned}$$

y también es claro que

$$F(x,t) = -i\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t + in\pi x} + iC \ \square$$

2.3 El caso vectorial

En esta sección, retornamos a la situación general.

Sea E un espacio de Banach real y sea $\mathbf{X}$ su complejificación, esto es, $\mathbf{X} = E + iE$. Nuestro objetivo es demostrar la equivalencia de las propiedades (ARNP) y (AHRNP).

Primero mostraremos que ARNP $\subset$ AHRNP. Para la prueba de esta contención requerimos el siguiente lema:

Lema 2.3.1 *Sea Y un espacio de Banach real tal que $E \subset Y$. Si $\mu \in M_Y(S^1)$ y tiene la propiedad de que $\forall n \in \mathbf{Z}$*

$$\int_{S^1} sen\,(n\pi\xi)\,d\mu(\xi),\ \int_{S^1} \cos(n\pi\xi)\,d\mu(\xi) \in E$$

entonces $\mu \in M_E(S^1)$.

Demostración. (Cf [11, pg. 90]) Sea P la familia de todos los polinomios trigonométricos de la forma

$$\sum_k a_k sen(k\pi\xi) + \sum_l b_l \cos(l\pi\xi).$$

La hipótesis implica que para todo $p \in P$

$$\int_{S^1} p(\xi)d\mu(\xi) \in E$$

y puesto que P es denso en $L^1_{\mathbb{R}}(S^1, |\mu|)$, el espacio de funciones $|\mu|$-integrables en S^1 con valores en $\mathbb{R}$, entonces

$$\int_{S^1} f(\xi)d\mu(\xi) \in E$$

para toda $f \in L^1_{\mathbb{R}}(S^1, |\mu|)$.

En particular, si $A \in \mathcal{B}(S^1)$ tendremos que para $f = \chi_A$

$$\mu(A) = \int_{S^1} \chi_A(\xi)d\mu(\xi) \in E\ \square$$

Ahora, retornemos a nuestro problema.

Supongamos que $\mathbf{X} \in$ ARNP.

Así, sea $F = u + iv \in \mathbf{H}^1_0(Q_\infty, \mathbf{X})$. Entonces, para todo $e^* \in E^*$ se verifica

$$\langle u(\cdot), e^* \rangle + i \langle v(\cdot), e^* \rangle \in \mathbf{AH}(Q_\infty, \mathbf{C})$$

y de hecho,

$$\langle u(\cdot), e^* \rangle + i \langle v(\cdot), e^* \rangle \in \mathbf{H}^1_0(Q_\infty, \mathbf{C})$$

ya que para todo $t > 0$ y para todo $e^* \in E^*$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\langle u(x,t), e^* \rangle| \, dx &\leq \int_0^1 \|e^*\| \, \|u(x,t)\|_E \, dx \\ &= \|e^*\| \int_0^1 \|u(x,t)\|_E \, dx \end{aligned}$$

y análogamente

$$\int_0^1 |\langle v(x,t), e^* \rangle| \, dx \leq \|e^*\| \int_0^1 \|v(x,t)\|_E \, dx.$$

Además, para todo $t > 0$ y para todo $e^* \in E^*$

$$\lim_{q \to (0,t)} \langle u(q), e^* \rangle = \left\langle \lim_{q \to (0,t)} u(q), e^* \right\rangle = 0 = \lim_{q \to (1,t)} \langle u(q), e^* \rangle .$$

Por el caso escalar, sabemos que para cada $t > 0$ fijo y para todo $e^* \in E^*$

$$\begin{aligned} \langle u_t(x,s), e^* \rangle &= \int_0^1 K_3(x,s;\xi) \, \langle u(\xi,t), e^* \rangle \, d\xi \\ &= \int_0^1 \langle K_3(x,s;\xi) u(\xi,t), e^* \rangle \, d\xi \\ &= \left\langle \int_0^1 K_3(x,s;\xi) u(\xi,t) d\xi, e^* \right\rangle , \end{aligned}$$

así

$$u_t(x,s) = \int_0^1 K_3(x,s;\xi) u(\xi,t) d\xi.$$

Si $(t_n)_{n=1}^\infty$ decrece a 0, la sucesión $(u(\cdot,t_n))_{n=1}^\infty$ es una sucesión acotada en $L^1_E([0,1]) \subset L^1_{E^{**}}([0,1]) \subset M_{E^{**}}([0,1]) = C([0,1], E^*)^*$ y por el teorema de Banach-Alaoglu posee una subsucesión (que denotamos del mismo modo) que converge en la topología débil* a un elemento $\mu \in M_{E^{**}}([0,1])$. Por la continuidad del núcleo K_3 tendremos la representación

$$u(x,t) = \int_0^1 K_3(x,s;\xi)d\mu(\xi) \text{ con } \mu \in M_{E^{**}}([0,1]) \tag{2.22}$$

Análogamente, para cada $t > 0$ y cada $e^* \in E^*$

$$\langle v_t(x,s), e^*\rangle = \int_0^1 \overline{K}_3(x,s;\xi)\,\langle v(\xi,t), e^*\rangle\, d\xi + \int_0^1 \langle v(\xi,t), e^*\rangle\, d\xi$$

y argumentando igual que antes, existe una medida $\nu \in M_{E^{**}}([0,1])$ tal que

$$v(x,t) = \int_0^1 \overline{K}_3(x,t;\xi)d\nu(\xi) + \int_0^1 d\nu(\xi) \tag{2.23}$$

Demostraremos que μ y ν toman sus valores en E. De acuerdo a la representación (2.22) tenemos

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t} sen(n\pi x) \in E$$

donde

$$a_n = 2\int_0^1 sen(n\pi\xi)d\mu(\xi).$$

Por consiguiente, $a_n \in E$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Denotemos por μ_1 la medida impar definida en $\mathcal{B}([-1,1])$ por

$$\mu_1(A) = \mu(A \cap [0,1]) - \mu(-A \cap [0,1]).$$

Esta medida satisface

$$\int_{-1}^1 \cos(n\pi\xi)\, d\mu_1(\xi) = 0 \in E,$$

$$\int_{-1}^1 sen(n\pi\xi)\, d\mu_1(\xi) = 2\int_0^1 sen(n\pi\xi)\, d\mu(\xi) \in E$$

para todo $n \in \mathbf{Z}$ y por el lema 2.3.1 concluimos que $\mu_1 \in M_E([-1,1])$, luego, $\mu \in M_E([0,1])$.

Además, como $\widehat{\mu_1}(n) = -ia_n = 0\ \forall n \le 0$ y E tiene la propiedad **(ARNP)**, existe $f_1 \in L^1_E([-1,1])$, f_1 impar, tal que

$$d\mu_1(\xi) = f_1(\xi)d\xi.$$

Por tanto, si $f = f_1|_{[0,1]}$ entonces $f \in L^1_E([-1,1])$ y $d\mu(\xi) = f(\xi)d\xi$ por lo que

$$u(x,t) = \int_0^1 K_3(x,t;\xi)f(\xi)d\xi, \quad f \in L^1_E([0,1]) \tag{2.24}$$

Ahora, consideramos la expresión (2.23) y obtenemos

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t}\cos(n\pi x) \in E$$

con

$$b_n = 2\int_0^1 \cos(n\pi\xi)d\nu(\xi), \quad n \in \mathbf{N}, \quad \frac{b_o}{2} = \int_0^1 d\nu(\xi).$$

De aquí, se sigue que $b_n \in E$. Sea ν_1 la medida par definida en $\mathcal{B}([-1,1])$ por

$$\nu_1(A) = \nu(A \cap [0,1]) + \nu(-A \cap [0,1]).$$

Puesto que $\forall n \in \mathbf{Z}$

$$\int_{-1}^1 \cos(n\pi\xi)\,d\nu_1(\xi) = 2\int_0^1 \cos(n\pi\xi)d\nu(\xi) \in E,$$

$$\int_{-1}^1 sen(n\pi\xi)d\nu_1(\xi) = 0 \in E,$$

se sigue del lema 2.3.1 que $\nu_1 \in M_E([-1,1])$ y por tanto $\nu \in M_E([0,1])$. Como también $\widehat{\nu_1}(n) = b_n = 0 \ \forall n < 0$, existe $g_1 \in L^1_E([-1,1])$, g_1 par, tal que

$$d\nu_1(\xi) = g_1(\xi)d\xi.$$

Si $g = g_1|_{[0,1]}$ entonces $g \in L^1_E([0,1])$ y $d\nu(\xi) = g(\xi)d\xi$. Por tanto

$$v(x,t) = \int_0^1 \overline{K}_3(x,t;\xi)g(\xi)d\xi + \frac{b_o}{2}, \quad g \in L^1_E([0,1]) \tag{2.25}$$

Hemos obtenido la representación para $F = u + iv \in \mathbf{H}^1_o(Q_\infty, \mathbf{X})$ del modo siguiente:

$$F(x,t) = \int_0^1 K_3(x,t;\xi)f(\xi)d\xi + i\int_0^1 \overline{K}_3(x,t;\xi)g(\xi)d\xi + i\frac{b_o}{2} \tag{2.26}$$

donde $f, g \in L^1_E([0,1])$ y $b_o/2 \in E$.

Mostremos que F tiene límites laterales *c.t.p.* (Véase [14, teo. 2.2])

Debido a la representación (2.24), al igual que en [14] puede probarse que u tiene límites laterales *c.t.p.* De hecho,

$$\lim_{q\to(0,t)} u(q) = \lim_{q\to(1,t)} u(q) = 0$$

y

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x) \ \text{ c.t.p. en } [0,1] \tag{2.27}$$

Por otra parte, debido a la representación (2.25) y dado que $\theta(\cdot,t)$ es continua para cada $t>0$, se sigue que existen

$$\lim_{x\to 0^+} v(x,t) \ \text{ y } \ \lim_{x\to 1^-} v(x,t).$$

Falta ver que existe

$$\lim_{t\to 0^+} v(x,t) \ \text{ c.t.p.},$$

pero observando que $g \in L^1_E([0,1])$ con $g = g_1|_{[0,1]}$, $g_1 \in L^1_E([-1,1])$, g_1 par, podemos proceder como en el caso escalar (ver el argumento de la página 61) y obtener

$$\lim_{t\to 0^+} v(x,t) = g(x) \ \text{ c.t.p. en } [0,1] \tag{2.28}$$

Por lo tanto, toda $F \in \mathbf{H}^1_o(Q_\infty, \mathbf{X})$ tiene límites laterales *c.t.p.*, así

$$\mathbf{X} \in \mathbf{AHRNP}.$$

Ahora, demostremos que AHRNP $\subset$ ARNP.

En este caso, también requerimos del siguiente lema técnico.

Lema 2.3.2 *Sea $\mu \in M_{\mathbf{X}}(S^1)$ tal que $\widehat{\mu}(n) = 0$ para toda $n<0$, $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ donde μ_1, $\mu_2 \in M_E(S^1)$. Si μ_{k1}, μ_{k2} son las partes impar y par de μ_k, respectivamente, para $k = 1,2$, esto es,*

$$\mu_{k1}(A) = \frac{1}{2}[\mu_k(A) - \mu_k(-A)]$$

y

$$\mu_{k2}(A) = \frac{1}{2}[\mu_k(A) + \mu_k(-A)],$$

entonces

$$-\widehat{\mu_{21}}(n) = i\widehat{\mu_{12}}(n)$$

y

$$-\widehat{\mu_{11}}(n) = i\widehat{\mu_{22}}(n)$$

para toda $n \in \mathbf{N}$.

Demostración. Nuestra hipótesis sobre μ implica que para toda $n<0$

$$\widehat{\mu_1}(n) = -i\widehat{\mu_2}(n) \tag{2.29}$$

Así, en virtud de (2.29) tendremos

$$\begin{aligned}\widehat{\mu_{21}}(n) &= \tfrac{1}{2}\left[\widehat{\mu_2}(n) - \widehat{\mu_2}(-n)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\widehat{\mu_2}(n) - i\widehat{\mu_1}(-n)\right],\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\widehat{-\mu_{21}}(n) &= \widehat{\mu_{21}}(-n) \\ &= \overline{\widehat{\mu_{21}}(n)} \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\overline{\widehat{\mu_2}(n)} + i\overline{\widehat{\mu_1}(-n)}\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\widehat{\mu_2}(-n) + i\widehat{\mu_1}(n)\right] \\ &= i\tfrac{1}{2}\left[\widehat{\mu_1}(n) + \widehat{\mu_1}(-n)\right] \\ &= i\widehat{\mu_{12}}(n).\end{aligned}$$

De manera totalmente análoga, se demuestra la otra igualdad □

Supongamos ahora que $\mathbf{X} \in \mathbf{AHRNP}$.

Sea $\mu \in M_{\mathbf{X}}(S^1)$ tal que $\widehat{\mu}(n) = 0$ para toda $n < 0$, digamos que $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, $\mu_1, \mu_2 \in M_E(S^1)$. Más aún,

$$\mu = (\mu_{11} + i\mu_{22}) + i(\mu_{21} - i\mu_{12}),$$

donde μ_{k1}, μ_{k2}, $k = 1,2$, son las partes impar y par de μ_k, respectivamente.

Definamos las siguientes funciones en Q_∞

$$F(x,t) = \int_0^1 K_3(x,t;\xi)d\mu_{11|\mathcal{B}([0,1])}(\xi) - i\int_0^1 \overline{K}_3(x,t;\xi)d\mu_{22|\mathcal{B}([0,1])}(\xi),$$

$$G(x,t) = \int_0^1 K_3(x,t;\xi)d\mu_{21|\mathcal{B}([0,1])}(\xi) - i\int_0^1 \overline{K}_3(x,t;\xi)d\mu_{12|\mathcal{B}([0,1])}(\xi).$$

Probaremos que $F, G \in \mathbf{H}^1_o(Q_\infty, \mathbf{X})$. Para ello, observemos que

$$\begin{aligned}F(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\int_0^1 sen\,(n\pi\xi)\,d\mu_{11|\mathcal{B}([0,1])}(\xi)\right)e^{-n^2\pi^2 t} sen\,(n\pi x) \\ &\quad -i\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\int_0^1 \cos\,(n\pi\xi)\,d\mu_{22|\mathcal{B}([0,1])}(\xi)\right)e^{-n^2\pi^2 t}\cos\,(n\pi x)\end{aligned}$$

y en virtud de que μ_{11} es impar y μ_{22} es par en $B([-1,1])$ tendremos que

$$\begin{aligned} F(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} i\widehat{\mu_{11}}(n)e^{-n^2\pi^2 t} sen(n\pi x) - i\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{\mu_{22}}(n)e^{-n^2\pi^2 t}\cos(n\pi x) \\ &\equiv u(x,t) + iv(x,t), \end{aligned}$$

donde

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} i\widehat{\mu_{11}}(n)e^{-n^2\pi^2 t} sen(n\pi x) \in E,$$
$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\widehat{\mu_{22}}(n)e^{-n^2\pi^2 t} sen(n\pi x) \in E.$$

Será suficiente demostrar que

(i) $\forall e^* \in E^*$ $\langle u(\cdot), e^*\rangle + i\langle v(\cdot), e^*\rangle \in \mathbf{AH}(Q_\infty, \mathbf{C})$,

(ii) $\sup_{t>0} \int_0^1 \|F(x,t)\|_{\mathbf{X}}\, dx < \infty$ y

(iii) $\lim_{q\to(0,t)} u(q) = \lim_{q\to(1,t)} u(q) = 0\ \forall t > 0.$

En efecto, en virtud del lema 2.3.2 tenemos que

$$\widehat{\mu_{22}}(n) = i\widehat{\mu_{11}}(n) \ \ \forall n \in \mathbf{N}$$

y por consiguiente, para cada $e^* \in E^*$ y para todo $(x,t) \in Q_\infty$

$$\langle v(\cdot), e^*\rangle (x,t) = \widetilde{\langle u(\cdot), e^*\rangle}(x,t),$$

y de la proposición (2.2.2) concluimos (i).

Para probar (ii) basta observar que para toda $t > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\| \int_0^1 K_3(x,t;\xi) d\mu_{11|B([0,1])}(\xi) \right\|_E dx &\le \int_0^1\int_0^1 K_3(x,t;\xi) d\,|\mu_{11}|_{|B([0,1])}(\xi)\, dx \\ &= \left[\int_0^1 K_3(x,t;\xi)dx\right] |\mu_{11}|_{|B([0,1])}([0,1]) \\ &\le |\mu_{11}|_{|B([0,1])}([0,1]) \\ &< \infty, \end{aligned}$$

y análogamente

$$\sup_{t>0} \int_0^1 \left\| \int_0^1 \overline{K}_3(x,t;\xi) d\mu_{22|B([0,1])}(\xi)\right\|_E dx < \infty.$$

La parte (iii) puede verse fácilmente a partir de la expresión para $u(x,t)$.

De manera totalmente análoga, se muestra que

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} i\widehat{\mu_{21}}(n)e^{-n^2\pi^2 t} sen\,(n\pi x) - i\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{\mu_{12}}(n)e^{-n^2\pi^2 t}\cos(n\pi x) \\ &\equiv u_1(x,t) + iv_1(x,t) \end{aligned}$$

pertenece a $\mathbf{H}_0^1(Q_\infty, \mathbf{X})$.

Puesto que $\mathbf{X} \in$ **AHRNP**, entonces existen funciones

$$f,\ g,\ f_1,\ g_1 : [0,1] \longrightarrow E$$

tales que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} u(x,t) &\equiv f(x), \\ \lim_{t\to 0^+} v(x,t) &\equiv g(x), \\ \lim_{t\to 0^+} u_1(x,t) &\equiv f_1(x), \\ \lim_{t\to 0^+} v_1(x,t) &\equiv g_1(x) \end{aligned}$$

c.t.p. sobre $[0,1]$.

Primero, demostraremos que $\mu_{11|\mathcal{B}([0,1])}$ es representable por f, para lo cual habrá que mostrar que

$$f \in L_E^1([0,1]) \text{ y}$$
$$\mu_{11|\mathcal{B}([0,1])}(A) = \int_A f(x)dx.$$

En efecto, como $u \in H^1(Q_\infty, E)$, entonces para toda $t > 0$

$$\|u(\cdot,t)\|_{L_E^1([0,1])} \le \|u\|_{H^1(Q_\infty,E)} < \infty$$

y puesto que

$$u(\cdot,t) \longrightarrow f \text{ si } t \to 0^+ \ c.t.p. \text{ en } [0,1],$$

se sigue del teorema de convergencia dominada para integrales de Bochner (ver [7, teo. 3, pg. 45]) que

$$f \in L_E^1([0,1]).$$

Ahora, sea $t_n \downarrow 0$ y consideremos la sucesión de medidas $(u(x,t_n)dx)_{n=1}^{\infty}$. Entonces

$$u(x,t_n)dx \longrightarrow \mu_{11} \text{ si } n \to \infty$$

en la topología débil* de $M_{E^{**}}([0,1])$, ya que para cualquier $\varphi \in C([0,1], E^*)$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u(x,t_n)\varphi(x)dx &= \int_0^1 \left[\int_0^1 K_3(x,t_n;\xi)\,d\mu_{11|B([0,1])}(\xi)\right]\varphi(x)dx \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 K_3(\xi,t_n;x)\varphi(x)dx\right] d\mu_{11|B([0,1])}(\xi) \\
&\longrightarrow \int_0^1 \varphi(\xi)\,d\mu_{11|B([0,1])}(\xi) \quad \text{si} \quad n \to \infty
\end{aligned}$$

debido a que

$$\int_0^1 K_3(\xi,t_n;x)\varphi(x)dx \longrightarrow \varphi(\xi) \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

c.t.p. en $[0,1]$ (ver argumento de la página 70).

Además, como $f \in L^1_E([0,1])$ y $u(x,t_n) \longrightarrow f(x)$ *c.t.p.*, se sigue que

$$\int_0^1 \varphi(x)\, f(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)\,d\mu_{11|B([0,1])}(x).$$

Siendo $C([0,1], E^*)$ denso en $L^1_{E^*}([0,1])$, tendremos que para toda $\varphi \in L^1_{E^*}([0,1])$

$$\int_0^1 \varphi(x)\, f(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)\,d\mu_{11|B([0,1])}(x).$$

Así, para $\varphi = \chi_A$ con $A \in B([0,1])$ concluimos que

$$\int_A f(x)dx = \mu_{11|B([0,1])}(A).$$

Como μ_{11} es una medida impar en $B([-1,1])$ entonces μ_{11} queda representanda por la extensión impar de f a $[-1,1]$.

De manera análoga, se prueba que μ_{22} está representada por la extensión par de $-g$, μ_{21} está representada por la extensión impar de f_1 y μ_{12} por la extensión par de $-g_1$.

Por tanto, μ está representada por una función en $L^1_{\mathbf{X}}(S^1)$ y así concluimos finalmente que

$$\mathbf{X} \in \mathbf{ARNP}.$$

Resumimos lo anterior en el siguiente teorema:

Teorema 2.3.3 *Sea E un espacio de Banach real y $\mathbf{X} = E+iE$ su complejificación. Entonces .*

$$\mathbf{X} \in \mathbf{ARNP} \textit{ si y solo si } \mathbf{X} \in \mathbf{AHRNP}.$$

Con este teorema se pone de manifiesto la relación entre el caso holomorfo y nuestro caso: la equivalencia entre la existencia de límites en la frontera *c.t.p.* para funciones holomorfas en los espacios de Hardy $\mathbf{H}^p_{\mathbf{X}}(D)$, $1 \leq p \leq \infty$ (propiedad equivalente a $(\mathbf{ARNP})$, ver [11] y [3]) y la existencia de límites en la frontera *c.t.p.* para funciones conjugadas de temperatura en nuestros espacios de Hardy $\mathbf{H}^1_o(Q_\infty, \mathbf{X})$.

Bibliografía

[1] Bateman Manuscript Project, California Institute of Technology, *Tables of Integral Transforms,* Vol. 2, Mc Graw-Hill (1954).

[2] H.S. Bear, *Hardy spaces of heat functions,* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 301, No. 2 (1987), 831-844.

[3] O. Blasco, *Boundary values of functions in vector-valued Hardy Spaces and geometry on Banach spaces,* Journal of Functional Analysis 78 (1988), 346-364.

[4] D. L. Burkholder, R. F. Gundy, M. L. Silverstein, *A maximal function characterization of the class H^p*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 157 (1971), 137-153.

[5] J. R. Cannon, *The One-dimensional Heat Equation,* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 23, Addison-Wesley (1984).

[6] R. Coifman, *A real variable characterization of H^p*, Studia Math. 51 (1974), 269-274.

[7] J. Diestel, J.J. Uhl, *Vector Measures,* Mathematical Surveys 15, AMS, Providence (1977).

[8] C. Fefferman, E. M. Stein, *H^p spaces of several variables,* Acta Mathematica 129 (1972), 137-193.

[9] J. García-Cuerva, J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics,* Notas de Matemática No. 116, North Holland, Amsterdam (1985).

[10] P. Hartman, A. Wintner, *On the solutions of the equation of heat conduction,* American J. Math LXXII (1950), 367-395.

[11] W. Hensgen, *Some remarks on boundary values of vector-valued harmonic and analytic functions*, Arch. Math, Vol. 57 (1991), 88-96.

[12] I. I. Hirschman, D. V. Widder, *The Convolution Transform*, Princeton University Press (1955).

[13] E. Kochneff, Y. Sagher, *Conjugate Temperatures*, Journal of Approximation Theory, Vol. 70, No. 1 (1992), 39-49.

[14] S. Pérez-Esteva, *Hardy spaces of vector-valued heat functions*, Houston Journal of Mathematics, Vol. 19, No.1 (1993), 127-134.

[15] M. Riesz, *L'integrale de Riemann-Liouville et le problem de Cauchy*, Acta Mathematica 81 (1949), 1-223.

[16] J. Rivera Noriega, *Sobre los valores en la frontera de funciones armónicas y analíticas vectoriales*, Tesis para obtener el título de matemático, Facultad de Ciencias, UNAM (1994).

[17] P. C. Rosenbloom, D. V. Widder, *Expansions in terms of heat polynomials and associated functions*, Transactions of the American Mathematical Society 92 (1959), 220-266.

[18] E. M. Stein, *Harmonic Analysis. Real-variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press (1993).

[19] E. M. Stein, G. Weiss, *On the theory of harmonic functions of several variables. I. The theory of H^p spaces*, Acta Mathematica 103 (1960), 25-62.

[20] D. V. Widder, *The Heat Equation*, Academic Press, New York (1975).

[21] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Vol. I, Cambridge University Press (1959).