UNIVERSIDAD PANAMERICANA

ESCUELA DE INGENIERIA
CON ESTUDIOS INCORPORADOS A LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FALLA DE ORIGEN

USO DEL METODO DE OPTIMIZACION INTERTEMPORAL DEL PRINCIPIO DE MAXIMO DE PONTRYAGIN PARA LA DETERMINACION DE POLITICAS DE INVERSION Y CONTRATACION DE PERSONAL.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA
AREA: INGENIERIA INDUSTRIAL
P R E S E N T A

SERGIO VALLEJOS ORTIZ

DIRECTOR: ING. CLAUDIO PITA RUIZ VELASCO

MEXICO, D. F. 1995

a mis padres

a Marina
a mis hermanos
a mis abuelas y tíos
a mis amigos

a mis profesores

INDICE

Introducción 8

1. La planeación estratégica y el uso de herramientas de decisión dinámica. 13

1.1. Necesidad de una política empresarial, como respuesta operativa a sus objetivos. 13

1.2. Análisis de la empresa e identificación del comportamiento de variables clave. 15

1.2.1. Análisis estructural del entorno competitivo. 18

1.2.1.1. Amenaza de ingreso de nuevos competidores. 18

1.2.1.2. Intensidad de la competencia. 22

1.2.1.3. Presión de productos sustitutos 23

1.2.1.4. Poder negociador de los compradores. 25

1.2.1.5. Poder negociador de los proveedores. 25

1.2.2. Análisis interno de la empresa. 26

1.2.3. Estratégicas Competitivas y su relación con las políticas de inversión y de contratación de personal. 27

1.2.3.1. Liderazgo general en costos. 28

1.2.3.2. Diferenciación de productos. 29

1.2.3.3. Alta segmentación. 30

1.2.3.4. Posicionamiento a la mitad. 37

2. La optimización intertemporal. 33

2.1. Diversos métodos de optimización. 34

2.1.1. Las condiciones de primer orden. El criterio de la segunda derivada 34

2.1.2. El método Simplex de programación lineal 35

2.1.3. El método de los multiplicadores de Lagrange. Las condiciones de Kuhn- Tucker. 37

2.1.4. La programación dinámica. 38

2.2. El Principio del máximo de Pontryagin. 40

2.2.1. La ecuación de estado. 40

2.2.2. La optimización intertemporal. El problema de Pontryagin. 42

2.2.3. Procedimiento variacional para la solución del problema del máximo de Pontryagin. 43

2.2.4. Consideraciones adicionales. 49

3. Aplicación del principio del máximo de Pontryagin, en la determinación de una política de inversión y contratación óptima. 51

3.1. Las políticas de inversión y de contratación de personal. La función de producción. 51

3.2. El valor presente. 57

3.3. La política de reinversión y contratación de personal sin posibilidad de endeudamiento. 62

3.3.1 La función objetivo. El planteamiento del problema. 62

3.3.2. Las condiciones de primer orden. 65

3.3.3. Solución e interpretación económica. 69

3.4. La política de inversión con posibilidad de endeudamiento. 74

3.4.1. Las condiciones de primer orden. 76

3.4.2. Solución e interpretación económica. 78

3.5. Las políticas de inversión y contratación de personal óptimas. 86

3.5.1. Condiciones óptimas para cada recurso como meta. 88

3.5.2. Pensar en rendimientos marginales. 92

3.5.3 Diferentes políticas para diferentes condiciones iniciales. 101

3.5.4. El efecto del endeudamiento. 104

3.5.5. Una forma fácil de aplicar las plíticas concluídas. 106

4. **Virtudes y limitaciones de la optimización intertemporal. Conclusiones.** 111

4.1. **Recapitulación final.** 111

4.2. **La Realidad es más compleja que cualquier modelo.** 112

* **Bibliografía.** 114

Introducción.

Los empresarios toman decisiones casi permanentemente. Tienen que dar soluciones y respuestas al desarrollo de todas las áreas de la empresa. Es claro que es necesario tener objetivos claros y precisos para poder orientar la toma de decisiones y la planeación empresarial correctamente y de esta forma planear toda una política empresarial y una estrategia competitiva óptima.

En algunos casos esta labor es relativamente sencilla , pero en muchos otros requiere de análisis y estudios complejos. La empresa en este sentido debe ser asumida como un todo integral. Aunque tiene numerosas áreas, éstas se encuentran relacionadas entre sí por diversas interacciones que es necesario precisar . Todas estas áreas deben en este sentido estar armonizadas de tal forma que logren el objetivo de la empresa que en el mundo real (salvo algunas exepciones) es la generacion de utilidades y rendimientos máximos tomando en consideración, ciertas restricciones técnicas o de mercado, pudiendo medir este objetivo de diferentes formas , siendo los más usados, los ingresos o utilidades brutas, la Tasa Interna de Retorno, el valor presente, o el valor de la empresa.

Por otra parte el contexto en que se encuentra la empresa puede ser bastante complejo y seguramente algunas simplificaciones en este sentido pueden traer graves consecuencias a largo plazo por lo que la necesidad de un análisis profundo que entienda las relaciones dinámicas y cambiantes del mercado, del entorno socioeconómico, de los portafolios de inversión, de la evolución de la empresa etc. se hace en muchos casos indispensable.

Así mismo es claro que no existen modelos de desarrollo comunes para todas la empresas; Estas difieren en muchos ambitos, por lo que la política empresarial que determine cada una es prácticamente exclusiva y tendrá que contemplar los cambios en las variables empresariales que la realidad dinámica exige e incluso cambiar de política empresarial cuando las expectativas y los supuestos se transforman inesperadamente y convierten las anteriores políticas y planeaciones obsoletas.

Una vez que se ha desarrollado una estrategia competitiva integral que responda a los objetivos de la empresa, es necesario darles operatividad por lo que tendrán que desarrollarse objetivos o metas particulares para cada una de la áreas de la empresa a fin de que los diferentes recursos de esta se encuentren óptimamente aplicados.

Es evidente advertir también el grado de dificultad de esta tarea en muchos casos. Los recursos son limitados y no todos tienen la misma imporancia; unos son imprescindibles; otros en cambio sobran. Además la empresa tiene capàcidad de generarlos por lo que no se pueden considerar como constantes, y en muchas circunstancias es indispensable asumirlos de esta forma.

Como se puede observar la palabra "óptimo" se ha repetido constantemente y es que en la gestión de empresas, es este es un concepto fudamental. Existen puntos óptimos en todas las áreas y variables de la empresa que maximizan las utilidades o el rendimiento de una empresa.

De esta forma, se puede decir que desde el punto de vista de la Ingeniería podríamos afirmar que el objeto de la dirección empresarial es tomar las mejores decisiones que optimicen el fin de la empresa con la información y restricciones existentes.

Ante esta complejidad y variabilidad se han desarrollado desde hace tiempo diferentes criterios y estilos de dirección que han dado respuesta ha diferentes circunstancias, muchos de ellos válidos pero otros, en cambio simples modas que simplifican de manera inadecuada la realidad y obtienen soluciones absolutas y generales que podrán tener aplicación en otros contextos, pero que en un caso concreto convendría aplicarse únicamente en forma parcial o en su caso ser desechados en su totalidad.

Es evidente que la labor empresarial se ha hecho en muchos casos en forma eficiente usando la experiencia o la intuición únicamente, aunque me parece peligroso, en un entorno tan crecientemente complejo como he mencionado, no fundamentarlas en un estudio profundo y serio capaz de arrojar resultados cuantitativos y óptimos en la gestión de la empresa. No se trata de sustituir la experiencia y la intuición en la toma de decisiones por argumentaciones frías y técnicas, sino de utilizar herramientas capaces de dar elementos para que éstas sean mejores.

Así mismo es frecuente en la literatura y textos sobre el tema, el uso de conceptos como "justo a tiempo", "calidad total", "modernización tecnológica" , "el cliente es primero" etc.

Siguiendo los conceptos mencionados anteriomente se trata de un probema de óptimos: en una empresa bien determinada en un contexto dado y con ciertas expectativas, existen niveles óptimos de posesionamiento estratégico, de inventarios, de lotes de producción, de calidad, de modernización, de servicio al cliente etc., y que éstos en su mayoria no son constantes en el tiempo sino son de caráter dinámico.

A este tipo de problemas la presente tesis busca dar una herramienta. El objeto de este estudio es conocer el método de optimización intertemporal del "Máximo de Pontryagin" para la resolución de problemas de ingenieria industrial de tipo dinámico donde los métodos computacionales son limitados para tal efecto. En ese sentido los problemas de planeación estratégica para la determinación de políticas empresariales constituyen un área en la que al ser analizados y resueltos por este método matemático, pueden arrojar conclusiones intersantes para la toma de decisiones ya que por su naturaleza temporal así como por su carácter integrador de muchas áreas de la empresa hacen que este método, así como algunas variantes que se indicarán del mismo, particularmente útil y poderoso planeación y la gestión de empresas, como se verá más adelante.

El objeto de este trabajo es por lo tanto, poder tener una base matemática y dinámica en el tiempo para realizar decisiones en la empresa, por lo que el desarrollo de la tesis empieza haciendo un análisis introductorio de algunos aspectos de la empresa y el mercado orientados a la identificación y establecimiento de políticas empresariales óptimas enumerando algunas estrategias competitivas de carácter genérico e identificando las variables competitivas más significativas para ser usadas para su posterior modelación.

Posteriormente se realizará una explicación del método del Máximo de Pontryagin como herramienta matemática en la determinación de una política general de inversión y contratación de personal óptima con y sin posibilid de endeudamiento, estableciendo criterios y una metodología sencilla para poder ser puestas en práctica en una empresa concreta.

1. La planeación estratégica y el uso de herramientas de decisión dinámica.

A continuación se plantearán algunas técnicas de análisis de la empresa, sector industrial y mercado así como estrategias competitivas genéricas para el establecimento de una política empresarial. También se manifestará la necesidad de tener información y elementos cuantitativos para que la planeación de la misma sea lo más acertada posible.

1.1. Necesidad de una política empresarial como respuesta operativa a sus objetivos.

Se puede afirmar que toda empresa que compite tiene su forma particular de hacer las cosas e interactuar con el mercado según su propia cultura empresarial, y ubicación en el mercado, lo que determina políticas empresariales para alcanzar determinadas metas y establecer, de esta forma, estrategias competitivas propias, por lo que el problema que se plantea es si éstas responden en forma eficiente a los objetivos globales de la empresa.

Muchas de la veces éstas se realizan en forma implícita, tomando en cuenta la experiencia, orientación profesional y motivaciones de los empresarios, resolviendo, muchas veces exitosamente, los problemas que se presentan, los cuales suelen ser sencillos y evidentes.

Otras veces se usan métodos explícitos de planeación estratégica para la determinación de una estrategia competitiva que podríamos definir como el desarrollo de un criterio acerca de cómo va a competir la empresa, cuáles deberán ser sus objetivos particulares y qué políticas serán nencesarias para alcanzar dichos objetivos.

En mi opinión la necesidad de desarrollar una planeación estratégica explícita y con objetivos cuantitativos es más necesaria cuanto más se satisfagan los siguientes aspectos:

- estrechos rangos de maniobra en el mercado.
- márgenes de ganancia pequeños.
- la respuesta del mercado es altamente sensible a las diversas acciones de la empresa.
- el grado de complejidad del comportamiemto del mercado sea grande.
- el número de agentes y fuerzas participantes en el mismo es considerable.

Si bien es cierto que podrán existir muchos más criterios, me parece importante el que los directivos reflexionen sobre su importancia desde el contexto actual de su empresa, tomando en consideración que cualquier proceso de planeación estratégica *explícita* así como su implementación, tienen necesariamente un costo, ya que puede hacerse necesaria la creación de departamentos adicionales, la contratación de personal administrativo y la sofisticación de los procesos administrativos que harán más burocrático el trabajo empresarial que si éste se realizara en forma *implícita* por lo que los directivos tendrán que discernir sobre su utilidad real.

1.2. Análisis de la empresa e identificación del comportamiento de variables clave.

Un aspecto que es indispensable para una correcta planeación estratégica así como para el óptimo desarrollo de políticas empresariales, es el tener información precisa acerca del funcionamiento de la empresa y de su entorno, la identificación de las variables clave saber con la mayor exactitud la relación entre ellas; respondiendo además a las preguntas, ¿cuáles de estas relaciones están cambiando? ; ¿a qué velocidad? ; ¿de qúe depende su cambio?.

Para la respuesta a estas preguntas y otras más relacionadas con el tema, existe varias técnicas y herramientas que convendrá señalar y que deberán acercar a una visión integral y completa de la empresa y de su entorno.

Un primer paso en este sentido seria el deteminar las diferentes áreas funcionales de la empresa estén o no determinadas en forma explícita en el organigrama. En este caso lo que cuenta es el que existan en la práctica como unidades de decisión a aspectos concretos de la empresa, aún en el caso que varias de estas funciones sean hechas por una misma persona o departamento.

En la mayoría de la empresas éstas son:

- producción.
- comercialización.
- ventas
- distribución.
- recursos humanos.
- compras.
- investigación y desarrollo .
- finanzas y control.

En este sentido la estrategia competitiva se puede definir más formalmente como la combinación de los fines de todas las área así como de los medios para alcanzarlas (políticas empresariales).

En el análisis de la empresa es importante el ver a ésta con relaciones muy estrechas con el entorno que suponemos competitivo y que es determinante en el establecimiento de prácticamente cualquier tipo de política empresarial, evitando ver a la empresa como una unidad independiente y aislada del mercado y el entorno cada vez más competitivo, por lo que paralelamente es necesario entender el contexto en el cual se está desarrollando la estrategia competitiva, que en forma genérica involucra 4 factores que pueden determinar de cierta forma los alcances de la empresa, que según M.E. Porter son:

1- Fuerzas y debilidades de la empresa, en relación con los competidores.

2- Valores personales de los ejecutivos clave.

3 - Oportunidades y riesgos del sector industrial.

4- Expectativas sociales y económicas

Como se ve, los primeros 2 puntos determinan situaciones internas de la empresa que delimitan de alguna manera los límites internos de la misma y los 2 últimos puntos. determinan los factores externos de la misma que establecen las reglas del juego de la empresa que el entorno le establece, por lo que la empresa deberá establecer políticas empresariales en ambos niveles .

El siguiente paso es el de determinar los objetivos de cada área. Realizar una prueba de consistencia analizando si éstos son mutuamente alcanzables o si se interfieren unos a otros. Si van orientados a alcanzar el objetivo general de la empresa o si algún área busca objetivos que vistos en forma integral no nos acercan al objetivo general.

De esta forma a continuación analizaremos diversas técnicas genéricas de análisis empresarial para de esta forma, conocer el comportamiento de las variables externas e internas clave, para después mencionar algunas políticas y estrategias competitivas generales.

1.2.1. Análisis estructural del entorno competitivo.

La forma en que compite una empresa varia mucho dependiendo el sector industrial en el que se envuelva, entendido éste, como el grupo de empresas que genera productos similares y que por tal razón es de esperar tengan también un similar comportamiento de las variables empresariales, pudiendo también existir diferencias significativas entre empresas del mismo sector por varias razones que se irán mencionando posteriomente .

A continuación se analizarán las principales fuerzas competitivas que en general se manejan en los libros sobre el tema, tratando de hacer énfasis en el contexto real de la empresa en México.

1.2.1.1. Amenaza de ingreso de nuevos competidores.

Este es un punto derminante en el establecimieto de políticas empresariales. Como se verá, éstas serán más altas en la medida que los rendimientos del sector industrial, sean altas , en relación con los llamados rendimientos competitivos del mercado lo que incentivará la entrada de nuevos competidores .

En general existen diversas circunstancias que hacen que estas barreras sean más o menos significativas las cuales podrán ser analizas como *barreras de entrada* , que serán aquéllas que dificulten el establecimiento de nuevas empresas en el sector industrial.

Las *economías de escala* que hacen que los costos promedios se reduzcan en la medida que aumenta la inversión en la planta, impiden que un rango amplio de empresas más pequeñas no estén en condiciones de competir , por lo que restringe la entrada a sólo empresas con una gran inversón inicial.

Existen en la práctica ciertos sectores industriales, en los que sucede el fenómeno de las economías de escala, como son el de productos con alto grado de tecnología, así como el del papel entre otros.

La *diferenciación de productos* consiste en que aunque en realidad el producto manejado en el sector industrial pueda ser muy parecido, los consumidores le aprecian ciertas cualidades intagibles que para efectos de mercado lo hacen especial, permitiendo a las empresas operar con cierto grado monopolístico, ya que los consumidores son fieles a su marca lo cual es bastante común en nuestra consumista sociedad.

El *acceso a canales de distribución* , dificulta también la entrada de nuevas empresas al tener que hacer gastos adicionales para desarrollar sus propios canales o para persuadir a los dueños de los ya existentes lo que involucra además un tiempo de introducción que puede ser derminante en la rentabilidad de la empresa, ya que retrasa el tiempo de recuperación de la inversión.

En general las barreras de entrada encarecen de alguna manera el inicio de un competidor, afectando algunas más directamente el costo de producción como las economías de escala así como otras que se plantean a continuación :

La *tecnología de producto patentado,* disminuye los costos permitiendo a la empresa que la posea, tener un periodo de goce exclusivo dependiendo con ley del lugar, lo cual en México puede ser fácilmente violada, especialmente en aquellos productos relativamete fácil de ser imitados generando una importantísima competencia de productos "piratas", que seguramente en otros países es menos importante, y que debe ser tomada seriamente en cuenta.

El *acceso favorable a la materias primas* y *cercanía a los centros de consumo* pueden hacer la diferencia en la competencia ya que son características naturales que algunas empresas del sector pueden tener.

La *experiencia* indudablemete es capaz de reducir costos de operacióm, ya que en general los procesos tienen una curva de experiencia más o menos grande, haciendo en algunos casos a las empresas nuevas demasiado costosas, por lo que frecuentemente recurren a contratación de personal con experiencia o "pirateando " personal de otras empresas, que de cualquier forma también requiere un costo.

Una barrera de entrada que parece especialmente importante es la que tiene que ver con las *acciones gubernamentales*, que pueden ser apegadas a la ley como restricciones legales, subsidios etc. o incluso violatorias a la misma, las que tienen en México mucha importancia desgraciadamente.

Generalmente en México la inmensa cantidad de reglamentación industrial en todos sentidos, así como la excesiva discrecionalidad en hacerla cumplir por parte de las autoridades y la forma arbitraria en que es establecida, hace que el empresario medio esté a merced de un ejército de inspectores, quienes, dado lo casi imposible de estar completamente en regla, extorsionan a los empresarios con cantidades que pueden llegar a ser muy considerables.

Así mismo es muy común que las compras hechas por el gobierno estén previamente asignadas por relaciones personales entre los funcionarios y algunos empresarios, por lo que aunque pudiera existir un concurso, éste no opera realmente, lo que constituye un factor determinante, en aquellos sectores industriales donde el principal cliente es el gobierno, como es es el caso de la Industria de la Construcción.

Para concluir esta sección se dirá que el efecto general de las barreras de entrada es el de añadir un costo extra a los posibles nuevos competidores, que se suman a los ya existentes, por lo que desincentiva su entrada al mercado.

1.2.1.2. Intensidad de la competencia.

Aunque el grado de competencia es ciertamente difícil de medir , es evidente que no es igual en cada sector industrial, en cada lugar y en cada momento, siendo además probablemente el factor externo más importante en la determinación de políticas empresariales.

Aunque podemos inferir que la competencia en general es cada vez mayor en nuestro país, (la existencia del TLC ha influido considerablemente en ello), existen lugares generalmente chicos, donde ésta es sensiblemente menor, ya que el volumen de mercado en esos lugares puede no ser atractivo para las grandes empresas competitivas y donde además los hábitos de consumo no aceptan cambios, siendo los consumidores fieles a determinados productos vendidos y producidos por determinados vendederes y productores , acreditados de la región.

También es importante mencionar que muchas veces existen en esos lugares una estrecha relación natural entre los consumidores y productores, ya sea por razones de amistad o parentezco, dado lo pequeño del lugar, lo que provoca que la competencia entre los productores pueda ser casi nula.

En general el análisis del grado de competencia, es necesario ampliarlo del estrecho rango de análisis de sector industrial, que únicamente debe ser tomado como base, para poder pasar a un análisis mucho más particular dado la gran cantidad de factores "extraestructurales" que operan para determinar la "intensidad de la competencia".

De cualquier forma podremos decir que el nivel de competencia depende directamnete del número de competidores así como de la homogeneidad de los mismos, ya que en la medida que las diferencias entre las empresas sea mayor, las más eficientes tendrán menor competencia relativa que si éstas fueran igualmente eficientes.

Es importante mencionar que la rivalidad entre las empresas es cambiante ya sea por factores mismos del mercado, cuando el producto llega a su madurez, por la introducción de nuevas variantes en el producto, o por acciones de los mismos empresarios tendientes a coludirse con lo los competidores para formar carteles u oligopolios, por lo que esta última opción podrá ser una estrategia competitiva interesante que convendría analizar.

1.2.1.3. Presión de productos sutitutos.

Generalmente el efecto económico de los productos sustitutos, es de bajar el precio de los productos, lo que incluso podría llevar a algunos productos a ser inviables , en la medida en que los sustitutos tengan cualidades superiores apreciadas por los consumidores y menores costos.

Este fenómeno es bastante frecuente en la historia empresarial de la civilización occidental capitalista, y en cierta forma es una medida de su "progreso", por lo que es sumamente importante para el empresario, el ritmo de sustitución de sus productos, ya que esto determinará las políticas de inversión en tecnología para la producciòn de nuevos productos, la política de segmentación en búsqueda de nichos de mercado entre otras.

1.2.1.4. Poder negociador de los compradores.

Existen varios factores que determinan el que un grupo de compradores (finales o no), tenga un alto poder negociador por lo que únicamente se mencionarán las que se consideran más importantes .

- el número de compradores está altamente concentrado, en relación a las ventas del proveedor

- los productos vendidos son demasiado estándares o poco diferenciados, enfrentando bajos costos para cambiar de proveedor.

-los compradores fácilmente pueden integrarse hacia atrás.

- el comprador tiene buena información de la demanda del producto.

En general el efecto de un alto poder negociador hace que los precios tiendan a bajar, disminuyendo el mercado en casos en que los compradores decidan integrarse hacia atrás.

1.2.1.5. Poder negociador de los proveedores.

En general este caso es análogo al anterior con la diferencia de que ahora la empresa es cliente, por lo que tendrá poder negociador sobre los proveedores en los casos que se mencionaron ya que un alto poder negociador de los clientes, involucra un bajo poder negociador de los productores y viceversa.

De esta forma los mismos casos analizados en el inciso c. son válidos en este caso también, por lo que el empresario tiene el doble trabajo de analizar ambos poderes negociadores, que en la práctica pueden ser sumamente diferentes .

1.2.2. Análisis interno de la empresa.

El hecho de haber analizado primero el entorno de la empresa, no fue casual ya que de alguna manera la organización interna de la empresa debe estar determinada por las necesidades que el entorno imponga, siendo de hecho estas las determinantes de las políticas empresariles.

Es importante conocer la empresa como un todo, integrando sus áreas en aspectos materiales cuantitativos y aspectos intangibles más cualitativos, antes de poder hacer una elección óptima de políticas, al confrontar la empresa con el entorno y de estrategia competitiva, al hacerlo con sus objetivos.

En muchos caso es posible, simplificar este análisis pensando que los diferentes recursos productivos con los que cuenta la empresa (en sentido amplio) sujetos a ser cuantificables, producen cierto nivel de riqueza también cuantificable según las reglas del juego que el entorno competitivo impone y en función de ciertas características y aptitudes cualitativas que hacen que un mismo recurso sea redituable de manera diferente en diferentes empresas por ejemplo.

Las aptitudes que influyen en el mayor rendimiento de los recursos, que se consideran más importantes son:

- motivación del personal en general.
- sensibilidad de lo directivos para darse cuenta de los cambios del entorno.
- capacidad de la empresa para responder rápidamente.
- habilidad para adaptarse al cambio.
- capacidad de los empresarios para resistir y sacrificar ganancias.
- valores de los ejecutivos clave.

Todas estas aptitudes establecen relaciones con los recursos que pueden ser difíciles de obtener, y que deben ser usadas de la mejor forma en establecer estrategias competitivas, que acerquen en lo mejor posible a la empresa a cumplir sus objetivos.

1.2.3. Estrategias competitivas genéricas y su relación con las políticas de inversión y de personal.

Con la información del entorno competitivo y de la empresa obtenida en los 2 puntos anteriores, es posible ya pensar en determinar una estrategia competitiva óptima, determinando también para ello diversas políticas empresariales. De esta forma, el objeto de la presente sección es introducirse en la discución acerca de las políticas empresariales más convenientes y la conveniencia de ser modeladas para su optimización.

Es importante mencionar que la política competitiva de una empresa es la combinación de todas la políticas empresariales orientadas a cumplir ciertos fines que como se mencionó es el de maximizar las utilidades en casi todos los casos, constituyendo en conjunto la Estrategia Competitiva, pudiendo decir entonces que existe una estrategia competitiva y un conjunto único también de políticas empresariales adecuados para cada empresa. De ahí que las estrategias genéricas que se mencionarán deberán ser estudiadas para encontrar la propia óptima, las cuales son :

A. liderazgo general en costos

B. diferenciación de productos.

C. alta segmentación.

1.2.3.1. Liderazgo general en costos.

El objeto de esta estrategia es el de tener un nivel general de costos menor que el de la competencia para de esta forma tener mayores márgenes de utilidad, poder ser más resistentes a altibajos del mercado tanto de productos como de materias primas y a la fuerte competencia .

Para establecer esta estrategia es importante tener entre otras cosas una elevada participación en el mercado, generalmente una fuerte inversión de capital inicial, para contar con maquinaria de la mayor tecnología y eficiencia y poder manejar un volumen de producción considerable con el objeto de poder manejar economías de escala, entonces se puede inferir que esta estrategia es más adecuada en épocas económicas expansivas, en mercado que fácilmente pueden consumir altos niveles de producción, a precios relativamete bajos.

1.2.3.2. Diferenciación de productos.

A diferencia de la estrategia de liderazgo en costos, esta estrategia coloca el nivel de costos en segundo término, ya que la idea es establecer un mercado particular, hasta cierto punto monopolístico sobre un muy particular producto diferenciado.

De esta forma la empresa está en condición de manejar un precio mayor que será pagado sin disminuir el volumenn de ventas en la medida en que los consumidores sean menos sensibles al precio (demanda inelástica), ya que como se vió anteriomente en el análisis del entorno competitivo, los consumidores podrán apreciar características "únicas" inherentes al producto, lo que por otra parte reducirá la participación de la industria en el mercado del sector industrial.

El uso de esta estrategia competitiva, requiere por lo general, un alto gasto en publicidad, así como el uso de maquinaria especializada, (que por otra parte generará barreras de salida altas), sin tener que buscar las economías de escala, así como personal capacitado generalmente con un costo mayor que el promedio del mercado.

1.2.3.3. Alta segmentación.

Consiste en enfocarse sobre un grupo de clientes en particular , determinado por regiones , nivel socieconómico, edad , sexo, raza etcétera, a fin de satisfacer más exactamente las preferencias del consumidor , perdiendo por consiguinete mercado en el resto de los grupos de consumidores.

El objeto de esta estregia, es el de aumentar su rendimiento por arriba del promedio de las empresas del mismo sector, sin implicar necesariamente un liderazgo en costos.

Este tipo de estrategia es muy amplia y resulta difícil establecer criterios comunes acerca del capital y los empleados, ya que en ocasiones requerirá alta inversión (aunque seguramente menor que en liderazgo en costos) y especialización de personal.

1.2.3.4. Posicionamiento a la mitad .

En este momento nos encontramos con el problema de determinar qué grado de estrategia competitiva será más adecuada . En algunos casos éstas estrategias son excluyentes y en otros casos no, aunque se puede pensar que las 3 anteriores no pueden ser aplicadas al mismo tiempo en forma radical.

Para resolver este problema en forma óptima, será necesario saber entre otras cosas, el grado en que los consumidores están dispuestos a pagar por un bien diferenciado así como el costo que tendría para la empresa el hacerlo así. En muchos casos este costo requiere ser pagado en un determinado periodo de tiempo en el que los consumidores aprenden las cualidades especiales del producto, por lo que los empresarios tendrán que tomar en cuenta una tasa de descuento para poder decidir sobre su conveniencia, convirtiendo de esta forma el problema en dinámico.

Otro elemento importante de ser conocido es el saber cómo se pierde o ganan diferentes sectores de mercado, en la medida que las empresas posicionadas a la mitad, se desplazan hacia alguna de las estrategias genérica, pudiendo pensar que en la mayoría de los casos estos cambios de mercado son más que proporcionales en la medida que la empresa se acerca a una estrategia competitiva genérica determinada.

Es evidente que cada estrategia competitiva general, involucra muy diferentes políticas empresariales para cada una de las áreas de la misma, ya que los costos de operación, requerimiento de recursos en general, tiempo de maduración del producto, gastos y tipo de publicidad , etcétera, son diferentes, planteando incluso en algunos casos la necesidad de ir transformando ésta estrategia en el tiempo ya sea por efecto de una planeación deliberada, o por cambios en el entorno empresarial, para de esta forma tener resultados óptimos.

Es en este contexto, una vez que ha sido adecuadamente modelado, donde la optimización intertemporal puede ser de utilidad y podrá arrojar respuestas interesantes.

2. La optimización intertemporal.

El objeto de este capítulo es el de notar la utilidad de un método de optimización dinámico para la determinación de politicas empresariales, una vez que se hayan determinado claramente y en forma cuantitativa los objetivos de la empresa y de las áreas que la constituyen para de esta forma poder tener una estrategia competitiva óptima.

En consecuencia, en este capítulo analizaré el uso del método de maximización del Principio del Máximo de Pontryagin estableciendo sus cárácteristeicas, formas y restricciones de uso, haciendo resaltar sus principales cualidades y su novedad en comparación con otros métodos de optimización, para la resolución de problemas de Ingeniería Industrial, por lo que antes de su estudio, me referiré brevemente a otros métodos de maximización más comunes.

2.1. Diversos métodos de optimización.

2.1.1. Las condiciones de primer orden. El criterio de la segunda derivada.

Este método usado para maximizar funciones no lineales, parte de principios básicos de cáculo diferenccial y puede ser considerado como un principio básico para otros métodos más sofisticados de optimización.

El principio básico, es el que una función f (X), (donde X es un vector de un tamaño fijo de variables de la forma (x1, x2... xn)), tiene un "punto crítico" donde :

$$f'(X) = \frac{d\,f(X)}{d\,X} = 0$$

es decir, donde la pendiente de la función con cada variable es igual a cero.

Para poder determinar si este punto crítico Xo, es un máximo, un mínimo o un "punto silla", diferenciamos f '(X) estableciendo de esta forma, la siguiente matriz A.

$$
\begin{vmatrix}
\delta^2 f(X)/\delta x1\,\delta x1 & \delta^2 f(X)/\delta x1\,\delta x2 & \dots & \delta^2 f(X)/\delta x1\,\delta xn \\
\delta^2 f(X)/\delta x2\,\delta x1 & \delta^2 f(X)/\delta x2\,\delta x2 & \dots & \delta^2 f(X)/\delta x2\,\delta xn \\
 & . & \dots & \\
 & . & \dots & \\
\delta^2 f(X)/\delta xn\,\delta x1 & \delta^2 f(X)/\delta xn\,\delta x2 & \dots & \delta^2 f(X)/\delta xn\,\delta xn
\end{vmatrix}
$$

Si A es positiva definida se tendrá que Xo es un punto mínimo. Si es negativa definida Xo es un punto máximo.

Este método es muy útil para encontrar puntos (estáticos) máximos o mínimos para funciones no restringidas, de ahí su principal limitación, ya que en la realidad los problemas tienen restricciones de diversos tipos que generalmente son derminantes en la solución de un problema.

2.1.2. El Método Simplex de programación lineal.

Este es un método muy útil y sencillo de usar para la solución de problemas de maximización estáticos, dado lo relativamete fácil de programar por computadora, además de la existencia de paquetes específicos como el *LINDO*.

El planteamiento general del problema es de maximizar una función lineal $Z = f(X)$ llamada Función Objetivo, en base a número dererminado de restricciones también lineales de la siguiente forma :

$$g(X) =< A$$

Para los casos de minimización, se deberá tener en mente que minimizar Z es equivalente a maximizar -Z con lo cual podemos aplicar también el Simplex para problemas de minimización usuando este artificio también para los métodos que se verán posteriormente

El método determina los puntos esquina para de esa forma determinar las solucuiones factibles y de ahí evaluar la solución que maximice Z, estableciendo además las restricciones que efectivamente operan para poder determinar el "precio sombra" de cada restricción , es decir lo que podría aumentarse Z, si se ampliara la restricción en una unidad.

La principal limitación de este método es que tanto la función objetivo Z, como las restricciones deben ser lineales restringiendo la gama de problemas estáticos que pueden ser resueltos por el mismo, pues es común tener problemas donde del entorno involucra restricciones con variables no lineales, aunque esto no evita que sea en la práctica uno de los métodos de optimización usados más importantes de la Investigación de Operaciones.

2.1.3. El Método de los multiplicadores de Lagrange. Las condiciones de Kuhn - Tucker.

Este método de optimización estático acaba con las restricciones del Simplex, ya que incorpora la posibilidad de que tanto la función objetivo como las restricciones sean no lineales.

El problema ganeral es el de maximizar una función objetivo $Z = f(X)$, bajo un número n de restricciones:

$$gi(X) >= Ai$$

análogamente que en el Método Simplex.

Ahora se define el Lagrangiano L del sistema de la siguiente forma:

$$L = Z + \lambda 1 (g1 - A1) + \ldots + \lambda n (gn - An)$$

Donde $\lambda 1 \ldots \lambda n$, son los multiplicadores de Lagrange, que son los precios sombras del problema:

$$\delta L / \delta gi = \lambda i \text{, para toda i.}$$

Teniendo las siguintes condiciones de maximización para cada i, que se suman a las restricciones establecidas anteriormente :

$$\delta L / \delta xi = < 0 \qquad \text{----- (I}$$

$$(\delta L / \delta xi)\ xi = 0 \qquad \text{----- (II}$$

Las condiciones II son llamadas las condiciones de Kuhn - Tucker, que tienen como filosofía, que los puntos maximizadores de Z, o están en un punto que cumpla las Condiciones de Primer Orden o están en el límite dado por una reestricción .

La mayor limitación de este método de optimización estático es que la solución para encontrar todo el vector de variables óptimo **X*** puede ser una labor difícil especialmete cuando existen muchas restricciones y muchas variables ya que además existe también dificultad para resolver el sistema por computadora en comparación con el Simplex que tiene una metodología de solución mucho más estandarizada.

2.1.4. La Programación Dinámica.

La progamación dinámica más que ser un método matemático es una estrategia o enfoque para atacar ciertos problemas en los que es posible establecer ciertas etapas en las que pueden asociarse un número determinado de estados en cada una.

El criterio de solución es el de ir estableciendo asociaciones óptimas para cada estado empezando por la última etapa hasta llegar a la primera para que de esa forma se tenga una estrategia óptima con el conjunto de estados óptimos para cada etapa.

Quizá la aportación más importante de la Progamación Dinámica es el hecho que introduce el tiempo de alguna manera a diferencia de los métodos mencionados anteriomente, por lo que posibilita la maximización de problemas que tengan ciertas etapas manejando de cierta forma ,un concepto de tiempo discreto, lo cual es una novedad hasta ahora, siendo llamada programación dinámica determinística, cuando el estado de la etapa siguiente está completamente determinada por el estado de la etapa anterior, y probabilistica, cuando el estado de la etapa siguiente , no queda completamente determinado por el estado de la etapa anterior.

Una limitación importante de la Programación Dinámica, es que sólo puede ser usado en la maximización de aquellos tipos de problemas que puedan ser vistos como encontrar una ruta óptima, en ciertas etapas definidas y con un número determinado y fijo de estados, evitando soluciones intermedias o involucrando diferentes números de etapas, que en un problema concreto pudieran ser viables también.

2.2. El principio del máximo de Pontryagin.

Este principio fue desarrollado en 1962 por el matemático soviético L.S. Pontryagin, quien junto con V.G. Boltyanskii y R.V. Gamkrelidze y E. F. Mishchenko, lo inventó publicándolo en el libro "La teoria matemática del procedimiento óptimo " (traducido al inglés por K.N. Trirogoff), por el cual ganaron el Premio Lenin de Ciencia y Tecnología", el mismo año.

Para poder desarrollar y comprender mejor este método es necesario explicar algunos conceptos previamente.

2.2.1. La ecuación de estado.

Supongamos un vector de variables **Y(t),** al que llamaremos *vector de estado del sistema* , el cual evoluciona en el tiempo determinando una *trayectoria de estado* . Supondré ahora que esta evolución puede regularse a través de una *variable de control* **U** , el cual también es un vector de dimensión m, (no necesariamente igual a la dimensión de **Y**) que constituye las variables sobre las que se tiene control y sobre las que se maximizará como veremos más adelante.

Genéricamente se usarán letras en negrillas para designar vectores, por lo que las ecuaciones vectoriales que se desarrollarán son en realidad sistemas de ecuaciones.

Para la resolución del tipo de problema que se abordará, la ecuación de trayectoria, no se conoce directamente, sino que se encuentra planteada por medio de un vector de ecuaciones diferenciales de primer orden en t, a la que llamaré *ecuación de estado*, que tendrá la siguiente forma:

$$d\mathbf{Y}/dt = f(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t) \qquad \text{---- (1}$$

complementada por las condiciones iniciales $\mathbf{Y}(to) = \mathbf{Yo}$.

Dada esta condición, la ecuación de estado puede resolverse de manera única, (ya que la ecuación es de primer orden), dando como resultado, la correspondinete trayectoria de estado $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t)$.

2.2.2. La optimización Intertemporal: El problema del máximo de Pontryagin.

Se cosiderara ahora. una cantidad J. que incluye la integral de trayectoria (una integral difinida con respecto a t , se encuentra defînda en función de diferentes variables yi funciones del tiempo) de forma general:

$$J = \int_{to}^{T} F(Y, U, t)\, dt$$

por lo que como se aprecia, J puede ser considerada de alguna forma como un flujo total, y en donde F es una función dada de la trayectira de estado Y = Y (t), la cual es a su vez generada por el vector de control U(t) via la ecuación de estado , y T el tiempo final dado , en el cual termina la trayectoria de estado.

Ya que se considera que U(t) se encuentra dado , tenemos que con esta información es posible resolver el sistema de ecuaciones diferenciales pudiendo conocer la trayectoria de estado Y. y el flujo total J.

Como se puede ver, el valor de J depende entoces de los diferentes valores que se den en el tiempo del vector U, por lo que la pregunta que aparece a continuación para el maximizador, es qué vector de control U , hace que J tome su valor óptimo, por ejemplo su valor máximo, lo cual constituye el llamado problema del Máximo de Pontryagin que tiene por tanto, la forma siguiente:

$$\operatorname*{Max}_{u} J = \int_{to}^{T} F(Y, U, t)\, dt$$

sujeto a:

$$dY/dt = f(Y, U, t),$$

$$\text{con} \quad Y(to) = Yo$$

2.2.3. Procedimiento variacional para la resolución del problema del máximo de Pontryagin.

Dado el problema de maximización descrito anteriormente, se puede temporamlmente acudir a una peculiar forma de multiplicadores de Lagrange, introduciendo el Lagrangiano ℓ definido como:

$$\ell = \int_{to}^{T} (F - \lambda(dY/dt - f))\, dt \qquad \text{----- (2}$$

Siendo $\lambda = \lambda(t)$, el vector de multiplicadores de Lagrange de la misma dimensión que Y. Nótese también que la restricción que es dinámica operando a cada instante es integrada también .

Si desarrollamos la expresión de $\mathcal{L}$ de la ecuacion (2. para facilitar su aplicación, podemos sutituir la expresión de J obteniendo y desarrollando la expresión :

$$\mathcal{L} = \int_{to}^{T} (F + \lambda\, f \ )dt \ - \int_{to}^{T} (\lambda \ \delta Y / \delta t)\, dt \qquad \text{---- (3}$$

definiendo:

$$\mathcal{H} = F + \lambda\, f \qquad \text{---- (4}$$

de modo que es posible (4 en (3 y defiendo dY / dt $= Y_t$, usando genéricamente para simplificar la notación el subíndice t para designar la derivada de t.

$$\mathcal{L} = \int_{to}^{T} \mathcal{H} \ dt - \int_{to}^{T} \lambda\, Y_t \ dt \qquad \text{---(5}$$

La segunda integral en el miembro derecho de (5 , puede integrarse por partes, haciendo notar que $d(\lambda\, Y) / dt = \lambda\, Y_t + \lambda_t\, Y$ de manera que:

$$\lambda\, Y_t = d(\lambda\, Y) / dt - \lambda_t\, Y$$

por consiguiente sustituyendo en (5 :

$$L = \int_{to}^{T} H \, dt - \int_{to}^{T} (\delta (\lambda Y) - \lambda Y) \, dt$$

$$L = \int_{to}^{T} (H + \lambda_t Y) \, dt - \lambda_T Y_T + \lambda_o Y_o \qquad \text{---- (6}$$

Siendo $\lambda_T = \lambda(T)$ y $\lambda_o = \lambda(0)$, los valores iniciales y finales de λ, teniendo Y, únicamente valor inicial quedando su valor final determinado por su trayectoria.

En este momento es necesario analizar el comportamiento de L. para poder determinar las condiciones de maximización. Para ello haremos una variación funcional al vector de control U, la variable principal de tal forma que a su valor se le sume una diferencial:

$$U(t) \rightarrow U(t) + \delta U(t)$$

y en consecuencia análogamente con Y :

$$Y(t) \rightarrow Y(t) + \delta Y(t)$$

Aunque se debe tener en mente que $\delta Y(t)$ depende de $\delta U(t)$ por la ecuación de estado, no es necesario conocer explícitamente dicha relación ya que el objeto de acudir a los multiplicadores de Lagrange, es el de evitar trabajar con dicha ecuación explícitamente.

En caso de $\lambda(t)$, la variación $\delta u(t)$ no lo afecta, ya que es una variable independiente.

Estas variaciones hacen que cambie J y $\mathcal{L}$, que es la variable de interés en este momento. Como sabemos que el punto inicial de Y, Y_0, no cambia, su diferencial es cero, aunque Y_T si lo hace por lo que (6 queda de la siguiente forma, diferenciando en ambos lados de la misma:

$$\delta \mathcal{L} = \int_{to}^{T} (\delta \mathcal{H} + \lambda_t \ \delta Y)\, dt - \lambda_T \ \delta Y_T \qquad \text{-----} (7$$

Asi como $\mathcal{H} = f(Y, U, t, \lambda)$ tenemos que :

$$\delta \mathcal{H} = (\delta \mathcal{H} / \delta Y)\ dY + (\delta \mathcal{H} / \delta U)\, dU \qquad \text{-----} (8$$

Por lo que sustituyendo (8 en (7 tenemos que estableciendo las condiciones de primer orden donde :

$$\delta L = 0$$

tenemos:

$$\int_{to}^{T} ((\delta H / \delta Y - \lambda_t)\, \delta Y - (\delta H / \delta U)\, \delta U))\, dt - \lambda_T\ \delta Y_T = 0 \qquad \text{-----}(9$$

Donde se debe hacer notar que las variaciones funcionales $dU(t)$, $dY(t)$ y dY_T, no arbitrarias, ya aunqe la única variación independiente es $d\ U(t)$, de la cual dependen las demás, por lo que es posible por facilidad imponer la condición:

$$\lambda_t = -\delta H / \delta Y \qquad \text{-----}(10$$

complementándola con la condición inicial:

$$\lambda(T) = 0 \qquad \text{-----}(11$$

La llamada Condición de Transversalidad que generalmente requerirá de condiciones iniciales y finales de Y, puede ser difícil de satisfacer.

Teniendo de esta forma que la variación d L se reduce a :

$$\delta L = \int_{to}^{T} ((\delta H / \delta U)\, \delta U)\, dt \quad = 0 \qquad \text{---- (12}$$

y ya que d U(t) es arbitraria la ecuación anterior sólo podrá cumplirse si :

$$\delta H / \delta U = 0 \qquad \text{---- (13}$$

Para cuando las soluciones de U, sean interiores, es decir se encuentren dentro de la región factible de valores en el problema, lo que reduce la maximización del problema, a la maximización de H. lo cual es puede ser especialmente útil ver el problema desde esta perspectiva en muchos casos .

Y finalmente la ecuación de restricción:

$$Y_t = \delta H / \delta \lambda \qquad \text{---- (14}$$

Siendo λ , el precio sombra similarmente que en el método de los multiplicadores de Lagrange, de manera que :

$$\lambda = \delta J / \delta Y \qquad \text{----- (15}$$

2.2.4. Consideraciones adicionales.

Las condiciones establecidas anteriormente pueden ser consideradas como principios de maximización general, ya que este método no tiene en realidad una solución estandarizada general, ya que es relativamente nuevo. De ahí que la solción de un problema real deberá tomar en cuenta los principios mencionados anteriormente, tratando de entender su significado en el problema, siendo necesario en lagunos casos añadir condiciones adicionales o simplemente reinterpretar las anteriores.

Cuando los problemas de optimización no tienen un horizonte finito (T→ ∝), la condición de transversalidad, determinada por la ecuacion (11 , es una cuestión que actualmente no tiene consenso entre los matemáticos, siendo una condición difícil de mantener en este caso y a menudo es sustituida por :

$$\lim_{t \to \infty} H = 0 \qquad \text{----- (16}$$

Otra consideración importante es el establecimiento de condiciones límite para las ecuación de estado y/o las variables de control, ya que cuando H es lineal con respecto a ellas la condición (13 , no se cumple, teniendo en este caso *soluciones límite óptimas*, (donde la variable toma el valor máximo o mínimo factible).

Para incorporar restricciones al problema que no puedan ser establecidas en forma de la ecuación de estado, (la cual es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer grado) , se han desarrollado métodos que son capaces de incorporar restricciones del tipo:

$$f1\,(Y,U,t) = C1$$

ó

$$f2\,(Y,U,t) =< C2$$

donde C1 y C2 son constantes cualquiera.

Los cuales más bien son criterios que siguen la lógica, de las condiciones de Kuhn -Tucker mencionadas antes, por lo que generalmente cuando éstas (f1 y f2) son simples, es más fácil en la practica , resolver normalmente, teniendo en cuenta las restricciones que se tengan eliminando de la solución los rangos de las variables que violan la restricción, como se hará en los problemas modelo que se resolverán posteriomente.

3. Aplicación del Principio del Máximo de Pontryagin en la determinación de una política de reinversión y contratación de personal óptimas.

3.1. Las políticas de inversión y contratación de personal. La función de producción.

En toda empresa, es posible agrupar los recursos productivos de la misma en 2 grandes bloques : recursos materiales y recursos humanos.

Se entenderá por recursos materiales, todos los bienes (tangibles o no), necesarios para llevar a cabo la actividad productiva: máquinas, herramientas, el espacio físico, las instalaciones y edificios (tamaño de planta), así como los requerimentos de publicidad y propaganda. En general, todos los recursos materiales al servicio de la empresa, sin importar si son propios o son ajenos, se designarán como el factor *capital* (K).

Por otra parte, todas las personas que laboran en cualquier área de la empresa constituyen los recursos humanos y se desiganarán como el factor *trabajo* (L y no t para no confundir con el tiempo).

Desde este punto de vista, todas la políticas empresariales de la empresa tienen que ver en forma general con alguno de estos factores, por lo que el establecimiento de óptimas políticas de reinversión y de contratación de personal pueden servir de base para el establecimiento de políticas más particulares para el conjunto de áreas de la empresa.

Para tal efecto es necesario el conocer la *función de producción* de la empresa que es la combinación de los factores capital (K) y trabajo (L) que producen diferentes niveles de producción (Q), es decir, conocer $Q = f(K, L)$. En el caso que desarrollo posteriormente, entenderemos por Q como la producción fabricada y vendida en el mercado en una unidad de tiempo determinada.

Así mismo es importante decir que para los casos que se analizarán, tanto L como K son funciones del tiempo por lo que Q cambiará en el tiempo. Más explícitamente tendremos:

$$Q = f(K(t), L(t))$$

suponiendo además por simplicidad, que la función de produción no depende directamente del tiempo, $(Q = f(K(t), L(t), t))$ sino sólamente vía capital y trabajadores por lo que se evitarán los caso en los que de alguna manera la "constitución" de la función de producción cambie en el tiempo en la medida que las relaciones de los factores lo hagan.

Como se mencionará posteriormente, esto implica que Q depende de los valores de K y de L al tiempo t sin existir por lo tanto "tiempos de maduración" de los recursos, es decir que en la medida en que pasa el tiempo la rentabilidad de una misma unidad de recurso puede ir cambiando en el tiempo, lo cual ocurre con frecuencia en la realidad cuando, por ejemplo, la inversión de una planta K, no hace que la empresa empiece a vender sus productos en el mercado Q, sino hasta que ha pasado cierto tiempo en el que el producto es promovido en el mercado y ha sido aceptado por los clientes estableciendo que los recurso materiales de la empresa han llegado a su maduerez ya que están generalndo recursos a plena capacidad y en forma estable. En el caso de los recursos humanos análogamente, existe un tiempo considerable de aprendizaje de los trabajadores para llegar a un punto en el que son más productivos.

Intuitivamente se podrá inferir que este fenómeno es más marcado en las empresas que empiezan o en los proyectos de inversión nuevos, ya que como es lógico tienen que aprender a operar eficazmente y tendrán que ganar una reputación en el mercado, para poder competir con aquellas empresas, ya establecidas, que únicamente cambian sus niveles de recursos, y en las que la respuesta del mercado a dicha variación es más rápida.

Por otra parte, muchas veces construir la función de producción, no es un trabajo fácil; generalmente es necesario recurrir a análisis técnicos de producción y de ventas, así como procesar información histórica y estadística de la propia empresa y de empresas similares del mismo sector industrial, para de esa forma determinar el comportamiento de las principales variables empresariales y poder determinar la función .

Es importante mencionar que en muchos casos no es necesario conocer la función de producción completa, sino únicamente la porción que nos interesa que generalmente es el final de la misma ya que como veremos más adelante, con esa información podrá ser suficiente para deteminar políticas de inversión y de contratación de personal óptimas.

Así mismo en otras ocasiones únicamente puede ser necesario conocer la función de producción de determinada área dentro de la empresa, área a la que se llamará *sistema*, que puede ser analizado en forma global independientemente del resto de la empresa, aunque con relaciones con ella bien identificadas. El sistema puede ser una división física de la empresa o bien la totalidad de la misma en un lapso determinado de tiempo así como una porción del tamaño de la misma como mencionamos anteriormente .

Dado que los casos que analizaremos tendrán como objeto el establecimiento de políticas generales de inversión y contratación de personal se trabajará con una función de producción implícita, por lo que bastará con conocer los signos de las siguientes derivadas:

$$\frac{d\,Q\,(K, L)}{dK}$$

$$\frac{d\,Q\,(K, L)}{dL}$$

$$\frac{d^2\,Q\,(K, L)}{dK^2}$$

$$\frac{d^2\,Q\,(K,L)}{dL^2}$$

Las 2 primeras expresiones determinan los rendimientos marginales de capital y trabajo respectivamente que en términos generales son siempre positivas (ver figuras 1 y 3). Esto significa que entre más capital y trabajadores, se empleen en una empresa, su producción vendida será mayor.

En cambio, las últimas 2 derivadas pueden ser positivas, iguales a cero o negativas. Esto determinaría si la empresa en cuestión tiene rendimientos crecientes, constantes, o decrecientes a escala respectivamente tanto de capital como de trabajo.

Este dato es particularmente importante para una empresa maximizadora de beneficios, ya que nos expresa que los rendimientos marginales pueden cambiar y de hecho cambian en casi todas las empresas lo que nos lleva a la conclusión que no todas las unidades de capital o trabajo, reditúan lo mismo a la empresa sino que el rendimiento marginal varía generalmente en función del nivel de capital y trabajo en que se encuentre, lo que es determinante para la determinacón de una política de crecimiento de capital y personal óptima, se verá posteriormente.

Para los problemas que se resolverán posteriomente, se considerarán rendimientos decrecientes a escala, los cuales son los más comunes en la realidad, lo que significa que si mantenemos el resto de los recursos constantes, el rendimiento marginal, tanto del trabajo, como del capital van disminuyendo en la medida en que se incrementan, como muestra la figura 2 y 4 .

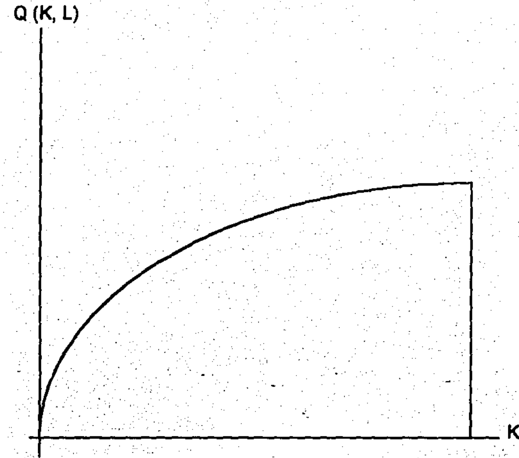

Fig. 1

El comportamiento del capital

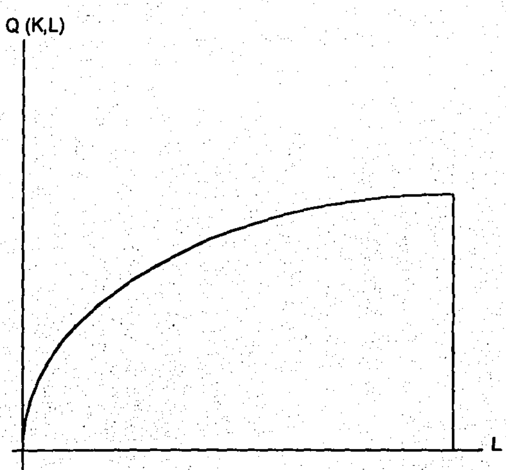

Fig. 2

El comportamineto del trabajo.

La pregunta que es interante responder en este sentido, es qué nivel de capital y trabajo convendrá tener para cada momento y poder determinar las políticas de inversión y contratación de personal óptimas cuando el contexto de la empresa está cambiando, especialmente el salario y la tasa de interés.

3.2. El valor presente.

Como se mencionó anteriormente, el objetivo de la empresa capitalista es la generación de utilidadades máximas. Existen variantes de este objetivo: se dice que es generar utilidades en el presente y futuro; también existen diferentes formas de medir esto: las utilidades brutas, el rendimiento de capital, el flujo de caja, etcétera.

Para el problema que será resuelto , se usará el concepto de *valor presente* con una tasa de descuento ρ sujeto a ciertas restricciones de comportamiento.

El valor presente es una medida de los flujos de dinero (entradas y salidas) que se tendrán en el futuro, y se "traen" al presente a una tasa de descuento ρ por medio de la cual es posible comparar y sumar cantidades que se obtienen en diferentes puntos en el tiempo, ya que como es lógico, no es lo mismo un peso en este momento que dentro de un año por ejemplo.

De esta forma se tiene una medida que permite evaluar la conveniencia de sacrificar utilidades en el presente para ganarlas en el futuro, por lo que se puede afirmar que el objetivo de todas la políticas empresariales de una de empresa determinada, es el **maximizar conjuntamente su valor presente**, y digo conjuntamente, porque como se mencionó las políticas empresariales deben ser establecidas asumiendo integralmente a la empresa, evitando de esta forma, establecer objetivos y políticas particulares aisladas.

Para ello, supondremos un valor de ρ como la Tasa de Retorno Mínima Aceptada (TREMA) que es rendimiento mínimo de dinero que el empresario tiene o que podrá tener en otra inversión, (que podrá ser el banco) por lo que en términos generales ρ será equivalente a la tasa de interés bancaria aunque también podrá ser determinada por el inversionista arbitrariamente.

De esta manera es posible valuar para un inversionista determinado la eqivalencia entre un peso ahora y peso en obtenido en un periodo de tiempo determinado:

$$\$1 \text{ en un periodo} = (1+\rho)(\$1 \text{ ahora})$$

donde ρ es la tasa de rendimiento en el periodo del inversionista

Asi definiremos que el valor presente (VP) de un peso en un periodo de tiempo es:

$$VP = \frac{1}{(1+\rho)}$$

Asi mismo, generalizando, si se quisiera calcular el Valor Presente de una cantidad G al cabo de n periodos de tiempo se tendria la siguiente expresión:

$$VP = \frac{G}{(1+\rho)^{n}}$$

Como las variables que usaré en el modelo son funciones continuas en el tiempo convendrá tener una "tasa de descuento instantánea", es decir la tasa que es función del tiempo y que iguala a la tasa de periodo cuando se subdivida el mismo, infinito número de veces.

Por ejemplo si suponemos ahora que ρ es la tasa de interés de descuento anual, y queremos encontrar la equivalente semestral s :

tenemos:

$$(1+s)(1+s) = (1+\rho)$$

donde fácilmente podemos despejar s .

Si ahora hacemos un número de subdivisiones g , de un solo periodo, se tiene:

$$n = t\, g$$

donde t es tiempo medido en este caso en número de años.

De esta forma se tiene la siguiente aproximación:

$$(1+\rho/g)^{tg} \approx (1+\rho)$$

$$= (1+\rho/g)^{(g/\rho)(t\rho)}$$

Si se hace que g tienda a infinito

tenemos que:

$$(1+\rho/g)^{tg} = e^{t\rho}$$

Por lo que :

$$VP = G\,e^{-t\rho}$$

De esta forma tenemos una expresión contínua en el tiempo que permite calcular el Valor Presente de G en cualquier punto de tiempo, lo cual será de gran utilidad para el problema que resolveré posteriormente.

Es importante que la unidades de tiempo que se usen para t sean compatibles con la tasa ρ, para que el resultado que obtengamos sea correcto.

3.3. La política de reinversión y contratación de personal, sin posibilidad de endeudamiento

3.3.1. La función objetivo. Planteamiento del problema.

El problema que resolveré a continuación es el de determinar políticas generales de inversión y de contratación de personal en una empresa maximizadora de benenficios, suponiendo en la primera que solamente se pueden invertir los recursos generados por la empresa, por lo que la *función objetivo* del mismo será la siguiente:

$$\max_{g,L} VP = \int_0^{\infty} g\,(Q - wL)\,e^{-\rho t}\,dt$$

sujeto a las siguiente restricción dinámica :

$$dK/dt = (1-g)(Q - wL)$$

donde: $Q = Q(K, L)$ - la función de producción

$g = g(t)$ - la proporción de las utilidades que son extraidas

$L = L(t)$ - factor trabajo

$K = K(t)$ - factor capital

$w = w(t)$ - salario real

Como vemos la *función objetivo* está expresada como una integral, así como la restricción es una derivada con respecto del tiempo (*ecuación de estado*) por lo que el planteamiento es congruente con el método del Máximo de Pontryagin pudiendo ser resuelto por el mismo.

La función objetivo como vemos maximiza las "utilidades extraidas" de la empresa que dependen de las utilidades de la empresa que a su vez se encuentran determinadas en este caso por los ingresos (ventas netas), menos los egresos, (salario por número de trabajadores) multilplicadas por la proporción de extracción de ganancias g, reinvirtiendo el resto de las ganancias (la proporción 1- g) , como lo indica la única ecuación de estado.

Aunque es posible plantear que los ingresos o egresos dependan de otras variables más específicas, o los flujos de dinero sean planteados en otra forma, lo importante es que esta función objetivo, es en términos generales la función objetivo que toda empresa maximazadora de beneficios debe optimizar, por lo que esta expresión es especialmente útil para el palnteamiento de problemas de política empresarial.

De esta forma se tiene que L y g son las *variables de control* respectivamente, que como su nombre indica son en las que el empresario determina, K es la *variable de estado* en la que su cambio depende de las anteriores, determinando todas ellas el resto de las variables de la empresa.

Aunque no se ha puesto restricciones formales a los valores de g y K, se pondrá en este caso especial atención únicamente en los valores de g entre 0 y 1 por ser esta una proporción, y de K mayores de 0.

Es importante mencionar que se supone que la empresa produce un solo tipo de bien estándar, lo que no impide que en realidad se produzcan más ya que es posible obtener equivalencias del resto de los bienes producidos al bien estándar, comerciándolo además a un precio fijo estandarizado en 1. De esta forma, el salario real w, se encuentra referido al precio de la siguiente forma:

$$w = \frac{W}{P}$$

donde W y P son el salario y precio nominales respectivamente, por lo que w expresa las unidades del bien Q que se pueden comprar con el salario W al precio de venta P, el cual como se ve, es un dato suficiente para resolver este problema.

Así mismo, conviene hacer notar que las unidades de la función de producción Q(K,L), son (unidades de producto / unidad de tiempo) por lo que al ser multiplicados por g y por el exponente se conservan las unidades, que al ser integradas nos dan un escalar que es el Valor Presente de todos los ingresos y egresos de la empresa desde el momento $t = o$, hasta $t = \infty$, para el problema que resolverá, ya que se piensa en políticas de largo plazo suponiendo una empresa que estará mucho tiempo en el mercado, aunque eso no implica que sea posible poner un límite superior a la integral, siendo entonces necesario tener condiciones finales para las variables.

También es necesario tener cuidado que todas las variables y parámetros del problema, estén expresadas en la misma unidad de tiempo, teniendo de esta forma que las *variable flujo*, Q esté en unidades de producto / tiempo , y que las *variables acervo*, K, L esten en unidades de capital y de trabajo respectivamente .

3.3.2. Las Condiciones de Primer Orden.

Se plantea el Hamiltoniano H del problema:

$$H = g(Q - wL)e^{-\rho t} + \lambda(1 - g)(Q - wL)$$

Para evitar el exponencial, es conveniente definir

$$Hc = He^{\rho t}$$

$$m = \lambda e^{\rho t}$$

Donde ahora m es el valor del precio sombra en cada momento t , y no su valor presente como es λ por lo que Hc queda expresado de la siguiente forma ya sin el exponencial explícito:

$$Hc = g(Q - wL) + m(1 - g)(Q - wL)$$

factorizando $(Q - wL)$

$$Hc = (Q - wL)(g - mg + m)$$

Ahora es posible plantear las condiciones de primer orden, suponiendo soluciones interiores:

$d\,Hc/dg = 0$

$$(Q - wL) - m(Q - wL) = 0$$

$$(Q - wL)(1 - m) = 0 \qquad \text{----- (I}$$

$d\,Hc/dL = 0$

$$(g - mg + m)(Q_L - w) = 0 \qquad \text{----- (II}$$

donde $Q_L = dQ/dL$

$dK/dt = \delta Hc/\delta m$

$$\dot{K}_t = (1 - g)(Q - wL) \qquad \text{----- (III}$$

donde $\dot{K}_t = dK/dt$

que es la ecuación de estado .

$$d\lambda/dt = -\delta H/\delta K$$

pero como

$$\lambda_t = m_t e^{-\rho t} - \rho m e^{-\rho t}$$

donde $\lambda_t = d\lambda/dt$ y $m_t = dm/dt$

Usando la definición de Hc se tiene :

$$-\delta H/\delta K = -\delta Hc/\delta Hc\, e^{-\rho t}$$

obteniendo de así una expresión para m_t :

$$m_t = -\delta Hc/\delta K + \rho m$$

$$m_t = -Q_k(g - mg + m) + \rho m \qquad \text{------ (IV}$$

Las 4 ecuaciones que se han planteado anteriormente, son condiciones que tendrán que cumplirse en todo momento para asegurar que estamos maximizando. Las primeras 2 ecuaciones operan siempre que la solución a tomar de g y L respectivamente son soluciones interiores de Hc y del problema. por lo que es necesario analizar que sean soluciones maximizadoras para luego definir condiciones generales para poder determinar el valor de las variables.

derivando la ecuación I con respento g:

$$\partial^2 Hc / \partial g^2 = 0$$

De donde se supone que el valor maximizador de g es un valor límite, dependiendo el valor de la ecuación I, o bien un "punto silla", donde g sería un punto interior.

Derivando la ecuación II respecto a L:

$$\partial^2 Hc / \partial L^2 = (g - m g + m) Q_{LL} \qquad \text{------} \quad V$$

donde $Q_{LL} = \partial^2 Q / \partial L^2$

que se había supuesto es menor que cero (redimientos decrecientes), de lo contrario el punto óptimo seria cuando $L = \infty$.

De esta forma vemos que la ecuación V es menor que cero cuando $g - mg - m > 0$, lo cual como veré posteriormente siempre se cumplirá por lo que se asegura que la ecuación II, es efectivamente una condición de maxinización.

3.3.3. Solución e interpretación económica.

Tanto la ecuación I como la ecuación II son una multiplicación de 2 factores que dan cero, por lo que necesariamente alguno de los 2 factores de cada ecuación debe ser cero, por lo que es necesario analizar cada caso.

Como $(Q - wL = 0)$, es un supuesto difícil de asumir permanentemente ya que eso equivaldría a decir que una condición óptima es que la empresa genere utilidades iguales a cero en todo momento, de ahí que se suponga que para que la ecuación I se cumpla:

$$1 - m = 0$$

$$m = 1$$

de donde se concluye que es una condición necesaria para que la ecuación I sea verdadera, es decir para que g sea una solución interior. En caso que g sea una solución límite es decir que la proporción de ganacias extraídas tienda a $\propto$ o bien a $-\propto$ suponiendo por el momento que depende de los valores inicial de K y L lo que se analizará posteriormente y se profundizará en ello en el caso en que existe la posibilidad de endeudarse.

Ahora sólo queda analizar las 2 opciones que la ecuación II plantea, la cual se sabe se cumple necesariamente ya que L no es lineal con respecto Hc, por lo que L es una solución interior siempre.

<u>caso 1</u> $(1 - m) = 0$; $(g - mg + m) = 0$;

Entonces :

$$m = 1$$

para todo momento, por lo que :

$$m_t = 0$$

por lo que :

$$g - g + 1 = 0$$

$$1 = 0$$

lo cual es falso, lo que significa que este caso no es posible; Por lo que si se tiene una solución interior de g, siempre que $Q - w L <> 0$, $Q_L = w$. Y si $Q_L <> w$, $Q - w L = 0$.

De esta forma solo queda analizar el caso donde $Q_L - w = 0$.

<u>caso 2</u> $m = 1$; $Q_L - w = 0$;

$$Q_L = w \qquad \text{--------} \quad \text{(V}$$

y como $m = 1$, se tiene que

$$m_t = 0$$

por lo que :

$$- Q_K (g - mg - m) + \rho m = 0$$

$$Q_K = \rho \qquad \text{-------} \quad \text{(VI}$$

De esta forma se tienen 2 condiciones de optimalidad para cuando g es una solución interior, que significa que el nivel óptimo de capital y trabajo que una empresa debe tener es donde su rendimiento marginal sea igual a su costo en el mercado ρ y w respectivamente. Como se supone que w está cambiando, y como Q_K depende tanto de K como de L, entonces los 2 factores cambiarán en el tiempo.

En este sentido es importante mencionar que L es una variable de control, por lo suponemos que puede cambiar abruptamente, es decir como función del tiempo puede tener una discontinuidad, a diferencia del K en el que su cambio en el tiempo está determinado por la ecuación III, por lo que sólo cambia en función de g y no puede tener discontinuidades, por lo que es importante el valor inicial de K el cual en caso de ser tal que las condiciones de optimalidad no se cumplan, deteminará el límite de g .

Con esta información ya es posible determinar el valor de todas las variables para cualquier función de producción ya que esta más las condiciones de optimalidad expresadas por las ecuaciones V y VI dan 3 ecuaciones para determinar 3 variables: K, L y g.

Cuando g es una solución límite, se tiene que la ecuación I no es cierta, por lo que $\partial Hc/\partial g <> 0$.

De esta forma, se observa que si se supone que la empresa tiene siempre ganacias positivas, es decir $Q - wL > 0$, la pendiente de la ecuación I depende del valor de m:

<u>Cuando m > 1,</u> $\partial Hc/\partial g < 0$, por lo que el valor de g que maximiza Hc y el problema es su limite inferior .

Como se vió anteriormente, m es el "precio sombra" de la restricción de capital, por lo que en este caso se está en un punto donde un cambio positivo de esta, genera un cambio positivo mayor en la ganancias en el mismo momento, por lo que la empresa se encuentra en un punto donde es altamente productiva conviniendo invertir en ella todo lo que sea posible, más que las propias ganacias. En este caso sería de utilidad ver la posibilidad de endeudarse, que se analizará en el siguiente inciso, ya que se supone un empresario maximizador de beneficios, y por tanto no tiene recursos líquidos (por definición, todos sus recursos deberán estar invertidos en empresas con rendimiento marginal mayor o igual a ρ), de lo que se concluye que el límite inferior de g es 0.

Cuando $m < 1$, $\partial Hc / \partial g > 0$, por lo que el valor de g que maximiza Hc, es su límite superior.

En este momento la empresa es poco eficiente ya que una unidad adicional de capital genera menos de una unidad de ganacias por lo que conviente desinvertir, es decir, extraer más utilidades que las ganancias que genera la empresa, hasta llegar a su punto más eficiente, donde $m = 1$.

A diferencia que el caso anterior donde convienen invertir más que las ganacias, en este caso es posible desinvertir una proporción indeterminada de las ganacias por lo que el límite superior de g depende de cada empresa.

Ahora si $Q - wL < 0$, los valores maximizadores de g son inversos:

Si $m > 1$, la solución óptima de g es el límite superior, por lo que convendría desinvertir para llegar a un punto donde Q_K sea mayor y se tengan ganacias positivas y por tanto donde se tendría una discontinuidad en g , lo cuál podrá no ocurrir por lo que se llegaría a un punto límite donde $K = 0$, es decir la empresa no es viable en ningún punto.

Si $m \leq 1$, la solución óptima de g es el límite inferior el cual en nuestro problema general nunca sucederá ya que se supone rendimientos decrecientes de capital, y capital positivo por lo que esta solución carece de sentido económico.

3.4. La política de inversión con posibildad de endeudamiento.

En este caso se analizará el caso de una empresa en la que su crecimiento puede ser financiado con recursos propios con un costo de oportunidad con tasa ρ y con recursos prestados a una tasa r.

Ya que la política de personal óptima, quedó plenamente resuelta en el caso anterior, en este momento para simplificar el problema, solo se analizará el factor capital por lo que ahora la función de Producción, será función del capital únicamente ($Q = Q(K)$), suponiendo rendimientos decrecientes de escala al igual que el caso anterior y quedando todos los demás factores referidos al mismo, por lo que Q (K) será diferente a simplemente eliminar L del caso anterior donde existia explicitante el factor trabajo.

De esta forma la función objetivo es:

$$\max_{d,G} \; VP = \int_0^{\infty} G \; C^{-\rho t} \; dt$$

sujeto a :

$$\delta K/\delta t = Q(K) - r\,D - G + d$$

$$\delta D/\delta t = d$$

Donde K, D, d, G, son funciones del tiempo siendo las 2 primeras variables de estado con valores iniciales dados y con cambios en el tiempo continuas (variables predeterminadas), teniendo además 2 restricciones dinámicas (ecuaciones de estado) en vez de una, ya que se ha incorporado un acervo más: D.

Ahora las variables de control son G y d, las cuales pueden cambiar discontuamete en el tiempo, ajustándose inmediatamete (variables no predeterminadas).

G, son las ganacias extraidas de la empresa y no el porcentaje de los recursos generados por la empresa extraidos, como en el caso anterior.

d, es la cantidad que se pide prestada cuando es mayor que cero, o que se abona a la deuda cuando es negativa.

D, es el monto total de la deuda que genera intereses a una tasa r. Para el problema que se resolverá, únicamente interesarán los valores de D mayores a cero. Asi mismo se deberá añadir una condición más de transversalidad :

$$\lim_{t \to \infty} D = 0$$

Como se puede apreciar la función objetivo es esencialmente la misma que en el caso anterior ya que además de englobar todos los recurso de la empresa en K como se mencionó anteriormente, incorpora la posibilidad de tener deuda que genera intereses que tendrán que ser amortizados por los recursos generados por la empresa sacrificando ganancias, por recursos prestados o por ambos como los expresa la primer ecuación de estado.

3.4.1. Las condiciones de primer orden

Análogamente con el caso anterior se plantea el hamiltoniano Hc simplificando el exponencial.

$$Hc = G + m1\ (Q - rD - G + d\ ) + m2\ (d\ )$$

Se plantean las condiciones de primer orden del hamiltoniano, usando la misma notación que en el caso anterior.

$\delta Hc / \delta d = 0$

$$m1 + m2 = 0 \qquad \text{------}\ (A$$

$\delta Hc / \delta G = 0$

$$1 - m1 = 0 \qquad \text{-------}\ (B$$

$\delta K / \delta t = \delta Hc / \delta\, m1$

$$K_t = Q - rD - G + d \qquad \text{------}\ (C$$

$\delta D / \delta t = \delta\, Hc / \delta\, m2$

$$D_t = d \qquad \text{-----}\ (D$$

$\delta m1 / \delta t = -\delta Hc / \delta K + \rho\, m1$

$$m1_t = -\, m1\, Q_K + \rho\, m1 \qquad \text{-----}\ (E$$

$\delta m2 / \delta t = -\, \delta Hc / \delta D + \rho\, m2$

$$m2_t = m1\, r + \rho\, m2 \qquad \text{----- (F}$$

3.4.2. Solución e interpretación económica.

Como se ve las ecuaciones (A y (B son condiciones para cuando d y G son soluciones interiores respectivamente, por lo que a continuación se resolverá el sistema en forma general para cada uno de los casos en los que efectivamente sean soluciones interiores y para cuando sean soluciones límite.

Caso 1. d y g son soluciones interiores.

En este caso todas las ecuaciones se cumplen:

De (A:

$$m1 = -m2 \qquad \text{----- (A'}$$

De (B :

$$m1 = 1 \qquad \text{-----(B'}$$

$$m2 = -1$$

Como $m1_t = m2_t = 0$, se tiene:

$$\rho = r \qquad \text{----- (G}$$

Lo cual es una condición que no tiene que ser cierta ya que ambos valores son fijados arbitrariamente suponiendo además en este caso que $r > \rho$, por lo que se descarta la posibilidad de que este caso sea cierto.

caso 2 G solución interior, d solución límite.

En este caso la ecuación (A no se cumple, pero la primera parte (m1 + m2) determina, la pendiente del hamiltoniano con respecto a d .

De (B :

$$m1 = 1 \qquad \text{----- (B'}$$

De (E como $m1_t = 0$:

$$Q_K = \rho \qquad \text{----- (H}$$

y ya que ρ es constante y Q es únicamente función de K :

$$K_t = 0 \qquad \text{----- (I}$$

De la ecuación (F :

$$\delta\, m2 \,/\, (r + \rho\, m2) = \delta\, t \qquad \text{----- (J}$$

la cual es una ecuación diferencial de variables separables:

$$\int 1/(r+\rho\, m2)\ \delta m2 = \int \delta t$$

integrando

$$1/\rho \ \ln(r+\rho\, m2) = t + c$$

tomando la exponencial en ambos miembros de la ecuación :

$$r + \rho\, m2 = c\ e^{\rho t}$$

$$m2 = c\ e^{\rho t} - r/\rho \qquad \text{----- (J'}$$

por lo que a $t = 0$, y dado que $r > \rho$ se tiene que:

$$\delta Hc/\ \delta d < 0$$

por lo que d es solución límite inferior , lo que significa que todas las ganancias deberán ser usadas para abonar D en caso que sea mayor a cero.

En caso que $D = 0$ se tendría que el límite inferior de d es cero ya que de no ser así significaría que se invierte en D que tiene mayor rendimiento que la empresa pero para nuestro problema no tiene sentido que D sea menor a cero por lo que en este caso se tendría que:

$$G = Q \qquad \text{---- (K}$$

Concluyendo este caso, una vez que la empresa se encuentra en el punto donde $Q_K = \rho$, no conviene invertir en la empresa ya que la siguiente unidad de capital invertida en en la empresa tiene menos rendimiento que ρ , la tasa mínima, por lo que los recursos generados, deberán usarse en pagar deuda si existe (que como se analizará más adelante este caso no será lógico) y si no en extraerlos integramente como gananacias, cumpliendo la ecuación (K.

caso 3 d solución interior, G solución límite.

En este caso, la ecuación (B no se cumple, determinando la primera parte (1 - m1), la pendiente de Hc sobre G, por lo que G será una solución limite superior cuando m1 < 1 y será una solución límite inferior cuando m1 > 1.

Así mismo de la ecuación (A :

$$m1 = -m2 \qquad \text{---- (A'}$$

por lo que derivando ambas partes respecto al tiempo, se tiene:

$$m1_t = -m2_t \qquad \text{---- (L}$$

sustituyendo (E y (F en (L :

$$- m1\ Q_K + \rho m1 = - m1\ r - \rho\ m2$$

sustituyendo m2 por - m1 y simplificando:

$$Q_K = r \qquad \text{---- (M}$$

La cual es una condición de maximización, que al igual que el caso anterior implica que el capital K no varía. Por tal razón se tiene:

$$G = Q - rD + d \qquad \text{---- (N}$$

Como se mencionó anteriormente la solución limite de G será superior cuando la rentabilidad marginal del caipital de la empresa sea menos redituable que el mínimo rendimiento aceptado por el empresario, es decir :

$$Q_K < \rho$$

$$m1 < 1$$

que significa que todos los recursos generados por la empresa Q, deberán ser extraídos además de extraer recursos prestados d.

Ya que se está partiendo del supuesto que $r > \rho$, y dado que $Q_K = r$, se tiene que este caso no tiene sentido económico para el problema que se está resolviendo por lo que para nuestros fines, siempre que $Q_K = r$, se debe tener $m > 1$, por lo que $Q_K > \rho$.

En este caso, se tendrá una solución límite inferior de G por lo que remitiéndose a la ecuación (N , se observa que si se supone un límite inferior de G igual a cero, es decir el empresario no tiene recursos extras para ser dispuestos por la empresa, entonces :

$$d = Q - r D \qquad \text{---- (Ñ}$$

De esta forma, todos los recursos generados por la empresa después de pagar intereses deberán ser usuados para abonar deuda.

La intuición económica de este resultado se puede incluso apreciar en el siguiente esquema estático:

aunque la empresa sigue siendo atractiva a la inversón por lo argumentado anteriomente, en este punto no conviene invertir en ella ya que como se tienen adeudos $(D > 0)$ y como se suponen rendimientos decrecientres de capital, la siguiente unidad invertida en la empresa, es menos redituable que r, la tasa que genera la deuda D , por lo que intuitivamente es más redituable "invertir" en disminuir D que hacerlo en la empresa con rentabildad marginal menor , cumpliéndose de esta forma la ecuación (Ñ.

Una vez que se haya pagado toda la deuda, $(D = 0)$, y ya que

$$D >= 0$$

en todo momento, los recursos generados, Q, deberán ser invertidos en la empresa ya que como se verá posteriormente la opción restante de extraerlos como ganancias no es conveniente.

<u>caso 4</u> G solución limite, d solución límite.

En este caso, tanto la ecuación (A como la (B, no se cumplen, determinando la primera parte el signo de la la pendinete de $\delta Hc/\delta d$ y $\delta Hc/\delta G$ respectivamente, por lo que análogamente a los casos anteriores se analizará los casos que se presentan ahora .

a) G y d soluciones límite superior; esto implicaría que por d de (A :

$$m1 + m2 > 0$$

$$m1 > - m2$$

lo cual implica que $Q\kappa > r$.

y por G de (B:

$$m1 < 1$$

lo que implica que $Q_K < \rho$ lo cual significa que $\rho > r$ lo que como se determinó anteriormente este caso carece de sentido.

b) G es solución límite superior, d es solución limite inferior;

Esto significa que $m1 < 1$, como se mencionó anteriormente y entonces la empresa se se encuentra en un punto donde parte de su capital invertido es menos redituable que el mínimo aceptado por el empresario ρ, por lo que conviene desinvertir ($K_t < 0$) utilizando estos recursos adicionales a pagar deuda si existe (d solución inferior) o para extraerse en forma de ganancia G en caso de que $D = 0$.

c) G es solución límite inferior, d es solución límite superior.

Ahora, $m1 > 1$, la empresa tiene rendimiento marginal mayor a ρ por lo se debe incrementar el capital de la empresa ($K_t > 0$). Asi mismo se supone que:

$$m1 > -m2$$

ya que es solución límite superior por lo que tenemos que :

$$Q_K > r$$

lo que significa que es conveniente incrementar el capital con recursos propios $(G = Q\text{-}rD)$ así como con recursos prestados d, hasta el punto donde $m2 = 1$ $(Q_K = r)$ ubicándonos en el caso 3 ya estudiado, donde d es una solución interior y $K_t = 0$.

d) G es solución límite inferior , d es solución límite inferior.

En este caso, $m1 > 1$ por lo que conviene invertir en la empresa pero como $m1 < -m2$ se sabe que es conveniente incrementar el capital sacrificando ganancias pero sin hacer uso de recursos prestados por lo que $d = 0$ en caso que $D = 0$, ó $d < 0$ en caso que $D > 0$, ya que estos son prestados a una tasa mayor que el rendimiento marginal de la empresa.

Como se ve el caso 4 es el único en el que es posible modificar el acervo de capital K de la empresa, dependiendo su signo de cambio en el tiempo, así como la forma de financiamiento del mismo, de las condiciones iniciales de capital K y deuda D y de los valores dados de la tasas de préstamo r y la tasa mínima de rendimiento de la inversión ρ.

3.5. Las políticas de inversión y contratación óptimas.

Me parece que los resultados obtenidos anteriormente, son una sólida base para establecer políticas de inversión y de contratación óptimas de carácter general, así como también pueden arrojar criterios igualmente válidos para el establecimiento de políticas empresariales más concretas dado el carácter integrador de la función de producción.

Como se ha visto, la información que es necesario tener es : la función de producción, nivel inicial de trabajadores, nivel de capital invertido en la empresa, y monto del endeudamiento inicial, para poder ubicar de esta forma, la situación de la empresa en relación con las variables exógenas para ella que en los casos que analizamos, son el salario, y las tasas de interés activa y pasiva del mercado

Quizá la información más dificil de obtener con exactitud es la función de producción, la cual es fundamental para el poder determinar los rendimientos marginales de los recursos. Como se mencionó anteriomente (ver 3.1.), en algunos casos no es necesario la función de toda la empresa, ya que en ocasiones concretas,sólo nos podría interesar una parte de ella (sistema) ya sea física, o de un nivel de recursos para adelante por ejemplo.

Pero ahora, además se está en condiciones de entender que tampoco es necesario en ciertos casos, el tener una función de producción implícita matemáticamente no obstante que el desarrollo matemático, se realizó en forma funcional y sugeriria el manejo de expresiones matemáticas concretas para poder ser aplicado .

Esto es porque los resultados obtenidos, podrán fácilmente ser usados únicamente como criterios para la planeación de políticas de crecimiento, dejando el nivel de comprensión empírica sobre el comportamiento integral de las variables de la empresa, a los propios empresarios o expertos en la misma, lo cual parece es la parte más dificil dado su carácter intuitivo y subjetivo, que en muchos casos es sólo producto de la experiencia, pudiendo ser una tarea demasiado complicada el expresarlo matemáticamente, corriendo el riesgo adicional de hacer simplificaciones peligrosas, o de llegar a expresiones limitadas incapaces de determinar la complejidad de las relaciones entre las variables empresariales.

Esto no siginífica, que no sea siempre útil el uso de información estadística, ni que no se tenga que utilizar a cierto nivel, datos concretos acerca de las variables empresariales, si no que mi intención es únicamente dejar claro que existe un conocimiento empírico y cualitativo fundamental sobre la función de producción, aunque ésta no pueda ser determinada explicitamente, y que en ese nivel de pensamiento, las conclusiones obtenidas puedes ser igualmente útiles.

3.5.1. Condiciones óptimas para cada recurso productivo, como metas.

La solución del sistema, arrojó condiciones de optimalidad para cada recurso que en el caso que se analizó se simplificaron en recursos humanos **L**, y recursos materiales **K**, de tal forma que :

$$Q_L = w(t) \qquad \text{---- (a}$$

y

$$Q_K = \rho \qquad \text{---- (b}$$

lo cual genéricamente significa que el nivel óptimo de cada uno, es en el cual su rendimiento marginal, es decir el rendimiento de la siguiente unidad "invertida", es igual a su costo en el mercado, lo cual es intuitivamente correcto ya que si tenemos un recurso que tiene rendimientos marginal superior a su costo, significa que es redituable aumentarlo, y en caso que se encuentre en un punto de rendimiento marginal menor a su costo, lo más acertado sería disminuir el acervo de dicho recurso, hasta un nivel en el que se cumplan las condiciones dadas.

Con esta argumentación obtenida en la sección 3.3 , es posible hacer conclusiones más particulares para cualquier recurso de la empresa, englobadas en L o K, por lo que tendremos en forma general igual número de condiciones de equilibrio como recursos empresariales estemos analizando en una empresa.

Es importante advertir que el hecho que exista una condición de equilbrio maximizadora por cada recurso, no significa que cada uno de ellos pueda optimizarse en forma independiente.

Ya que cada condición involucra todas la demás variables o recursos, por el carácter integrador que como se estableció, deberá tener la función de producción, cada condición de equilibrio depende de todos los recursos, por lo que se tendrán un número de variables igual al número de ecuaciones con lo que se podrán determinar los niveles óptimos para cada uno de los recursos.

De esta manera se tendrá que en el problema que se resolvió:

$$Q_K = f(K(t), L(t))$$

$$Q_L = f(K(t), L(t))$$

Una primera impresión de los resultados obtenidos, podría ser el que pase desapercibido su carácter dinámico, ya que las condiciones de optimalidad son de alguna manera estáticas.

Lo cierto es que los resultados de optimalidad obtenidos son en general compatibles con la "intuición estática", pudiéndose incluso determinar por métodos de optimización estáticos mucho más simples pero incapaces de determinar la forma óptima para llegar a ellos cuando incluso las condiciones económicas del entorno estén cambiando

De ahí la utilidad del Método del Máximo de Pontryagin ya que permite resolver problemas, donde *las condiciones óptimas, son equilibrios* a los que se tendrá que llegar para maximizar beneficios, determinando además la forma óptima en el tiempo para llegar a ellos, siendo esto último, la más importante aportación de este método, ya que en general las empresas no se encuentran en equilibrio óptimo estático en cada uno de sus recursos.

Aunque es cierto que algunos de ellos se pueden ajustar instantáneamente, o muy rápido, existen otros que necesitan irse acumulando por un proceso de velocidad limitada por una serie de restricciones dinámicas que generalmente dependen de otros recursos, por lo que en muchos casos el aumento del acervo de un recurso involucra un cambio en otro(s) , haciendo el problema más difícil de entender intuitivamente e imposible de resolver en un esquema estático.

En el primer problema que se estudió, se manejaron el trabajo L y el capital K como 2 únicos recursos, suponiendo el trabajo como variable de control, la cual se ajusta inmediatamente (variable no predeterminada) y el capital que se modifica en función de la cantidad invertida que a su vez depende del acervo del resto de los recurso, incluido el propio capital, así como de g la proporción de ganancias extraídas.

El supuesto que L se ajusta inmediatamente, puede ser incluso difícil de cumplir en la realidad, si pensamos que en muchas ocasiones es difícil despedir personal lo que además involucra el gasto de indemnización. También en general la contratación de personal tarda tiempo principalmente en un esquema de poco desempleo, implicando además tiempo y costo de capacitación.

No obstante esto, pueden existir diversas formas de disminuir la cantidad real de trabajadores asalariados en un sistema empresarial ya sea mediante la disminución de turnos y/o jornadas de trabajo, anticipando vacaciones o bien trasladando trabajadores a otras áreas, paros técnicos etc.

propios generados por la misma empresa, por lo que es en este caso son especialmente interesantes los criterios obtenidos.

3.5.2. Pensar en rendimientos marginales.

En general la teoría de Evaluación de Proyectos Industriales, obtiene sus conclusiones en base al rendimiento medio considerando de cierta forma que los recursos de la empresa son igualmente productivos para cualquier nivel de acervo.

El procedimiento general del mismo tiene como objeto el averiguar la rentabildad de determinado proyecto económico que en forma genérica seria:

$$Rm = \frac{Q}{K}$$

Donde Rm es la rentabilidad media.

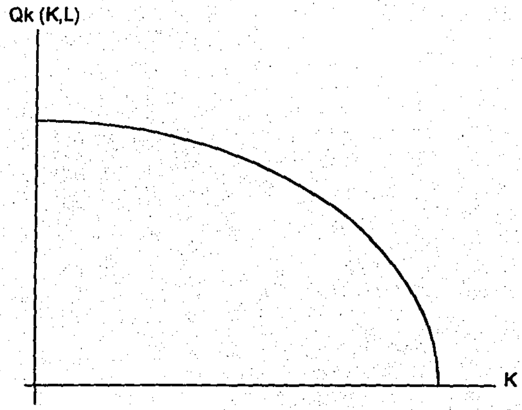

Fig. 3

Los rendimientos marginales de capital

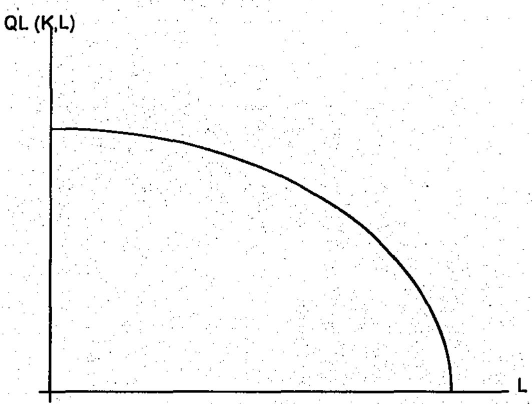

Fig. 4

Los rendimientos marginales del trabajo

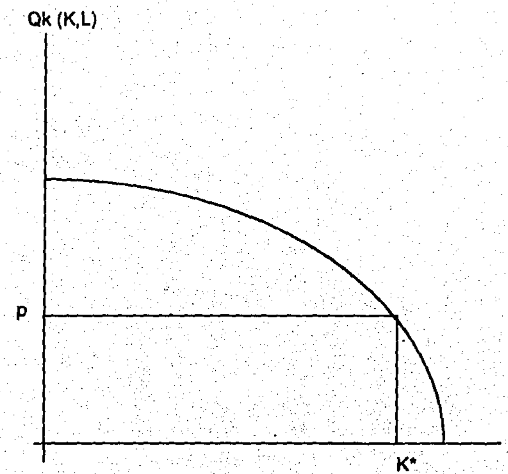

Fig. 5

La condición de optimalidad de K.

Para ello se hace un estudio de mercado, donde se determina la cantidad de productos vendida a un precio dado así como información interesante acerca del mismo. Posteriormente se realiza un estudio técnico donde se determinan los recursos necesarios para operar en el mercado.

Una vez que se obtiene información sobre las ventas y sobre el monto de la inversión a distintos puntos de tiempo se puede determinar finalmente la rentabilidad de la empresa calculando el valor presente por ejemplo con una tasa mínima de retorno, el cual si es mayor que cero significará que el proyecto de inversión es redituable llevarlo a cabo.

Así mismo la rentabilidad Rm es mayor que la tasa de interés a que se presta en el mercado, conviene financiar el proyecto con recursos prestados

En este sentido el trabajo desarrollado en esta tesis puede ser de utilidad, ya que establece la idea de que el rendimiento de los recursos no es constante como se aprecia en las figuras 2 y 4 . Generalmente los recursos tienen rendimientos decrecientes a escala como se argumentó anteriormente por lo que las primeras unidades de recurso invertidas, son más redituables, lo cual es un dato fundamental para el establecimiento de políticas óptimas de cambio de recursos .

De esta forma es posible pensar que el hecho que un determinado proyecto de inversión, sea rentable, no implica que a otros niveles de inversión podría serlo más y análogamente, que el que sea poco rentable no significa que no lo pueda ser en otros niveles de recursos.

En consecuencia *el primer paso para la planeación de una política de inversión y contratación de personal, es el determinar los niveles ópimos de L y K* resolviendo las 2 ecuaciones determinadas por las condiciones de equilibrio maximizadoras, dadas por (a y (b.

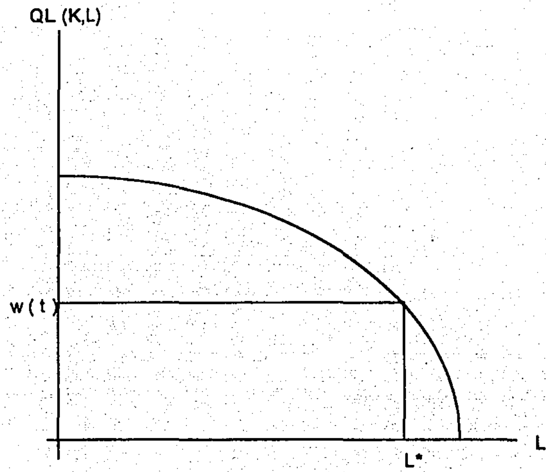

Fig. 6

La condición de optimaldad para L.

Estos puntos de equilibrio que se consideran como meta, no son estáticos, varían en el tiempo ya que se supone que w está cambiando, por lo que la cantidad tanto de L, como de K varían también en el equilibrio, lo cual queda determinado en el desarrollo de la sección C al poder llegar a expresiones concretas de $K= f(t)$ y $L= f(t)$.

Intuitivamente se puede pensar que si $w(t)$ cae, ($dw/dt < 0$) suponiendo que ρ constante, la relación L^*/K^* debe aumentar en el equilibrio, ya que el costo de L es menor por lo que conviene producir usando más intensivamente el factor trabajo.

Análogamente si $w(t)$ aumenta en relación a ρ, la relación de eqilibrio L^*/K^* deberá ahora disminuir , conviniendo en consecuencia producir más intensivamente en capital que en trabajo .

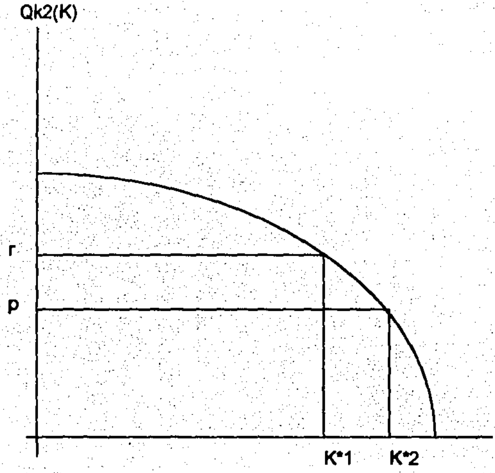

Fig. 7

Las condiciones de optimalidad para K

con posibildad de endeudamiento.

Si pensamos el contexto actual de la empresa en México: salarios reales bajos y cayendo y tasas de interés altas y constantes, los resultados obtenidos dicen que es más adecuado elaborar productos manufacturados con alto contenido de mano de obra siendo el nivel de inversión material en planta óptimo, sensiblemente menor que en periodos de tasas de interés bajas.

Así mismo es importante tomar en cuenta los cambios que podrá tener la función de producción que aunque como mencioné anteriormente, no son tomados en cuenta directamente en el presente modelo, pueden ser determinantes en la solución, ya que como se dijo en el capítulo III sección B, para efectos de esta tesis, Q es la producción que además de ser producida es vendida, por lo que es posible que la curva Q(K(t), L(T)) se halla desplazado de su lugar original, además de simplemete "moverse" sobre ella.

En épocas de crisis económica como la presente, las productividades marginales de capital generalmente disminuyen en la mayor parte de los sectores industriales, ya que existe una contracción de la demanda debida a una disminución del ingreso real, del aumento de precios y por si fuera poco del desafortunado aumento del IVA. por lo que la curva de productividad marginal del capital (fig. 2) se contrae.

No obstante lo anterior, es posible que en cierto tipo de industrias de productos generamente de bajo precio, la relación marginal del capital aumente en épocas de crisis, al ser más demandados sus productos y la facilidad de ubicarlos en el mercado aumente también, aunque en términos generales se puede pensar que este caso es lo menos usual.

Sin embargo aunque " la constitución " de la función de producción cambie, las condiciones (a y (b siguen siendo válidas lo que no evita que involucren diferentes niveles óptimos de recurso K y L en cada momento por las causas mencionadas, por que se dirá, que mientras los cambios de las condiciones de equilibrio se deban a cambios del entorno ($w(t)$ y ρ) estos estarán determinados en el modelo y cuando éstos se deban a cambios de la función de producción el modelo deberá ser corrido otra vez con el nuevo supuesto, sabiendo de antemano que las condiciones son las mismas, por lo que es necesario estar pendientes a este tipo de cambios para la planeación de políticas adecuadas.

3.5.3. Diferentes políticas para diferentes condiciones iniciales.

Tomando como referencia las figuras 5 y 6 , en el momento de realizar la planeación, la empresa podrá estar en los casos en que $Ko > K^*$, ó $Ko < K^*$ y que $Lo > L^*$ ó $Lo < L^*$ donde como se ve K^* y L^* son los niveles de equilbrio que cumplen las ecuaciones (a y (b, que son considerados como meta, dode Ko y Lo son los niveles iniciales de capital y trabajadores respectivamente .

El problema a continuación será determinar la forma óptima para disminuir el nivel de K y L en caso que su valor inicial sea mayor que su óptimo o en aumentarlo en el caso de que sus valores iniciales sean menores, lo cual se podrá pensar es el caso más común.

Como se mencionó, en el caso del factor trabajo L, el problema es menos complejo ya que es relativamente fácil ajustar este recurso a diferentes niveles deseados en forma rápida y con costos relativamente bajos.

En el caso de los recursos materiales K, el problema es más complejo ya que el proceso de ajuste es necesariamente paulatino, especialmente cuando el cambio es positivo (incremento), ya que este debe ser financiado por recursos que se generan en la misma empresa a una cierta velocidad, cuando en caso de que deba disminuir estos deberán ser vendidos extrayéndolos como ganancias lo cual generalamente es más rápido y evidente.

El criterio óptimo para determinar una política de inversión, es que *los cambios en los acervos de capital deberán realizarse en la forma más rápida posible* , el cual es un resultado dinámico difícil de ver en un esquema estático.

En el caso del capital en caso que $Ko < K^*$, convendría incrementrarlo a costa de sacrificar todas las ganacias generadas (g es solución límite inferior), siendo lo óptimo *no empezar a extrer ganancias de la empresa hasta que ella esté en su nivel de inversión de equilibrio.*

Esto significa que ya que estamos maximizando el Valor Presente de una empresa, los flujos de dinero que extraeremos en el futuro, una vez que hayamos llegado al punto de equilibrio compensarán (a una tasa de descuento), "la privación " de recursos en el presente.

Esta conclusión, podrá ser dificil de apreciar intuitivamente, especialmente cuando la tasa de descuento ρ es relativamente alta, ya que el empresario podrá pensar que las ganancias que deba sacrificar durante cierto tiempo, dificilmente podrán compensar los altos rendimientos que puede obtener inmediatamente a la tasa ρ.

Aunque la demostración formal, de que incluso en este caso es conveniente no extraer ganancias , puede ser compleja (ver sección 3.3.3), se podrá en este momento simplemente decir que en caso de que ρ sea alta, K^* es baja (ver fig. 5), por lo que la distancia $K^* - Ko$ es relativmente pequeña lo que significa que en este caso el tiempo de "sacrificio" es tambien pequeño lo cual es compatible con la intuición estática.

En cambio si ρ es pequeña, la distancia $K^*- Ko$ es mayor, así como el tiempo de sacrificio en el que el empresario está inviertiendo.

Además en ambos casos se tiene que dado los rendimientos decrecientes a escala, todas las unidades de capital individualmente vistas, que se han invertido anteriormente, son más redituables que ρ, por lo que el rendimiento medio es mayor también, incluso en cantidades de inversión cercanas a K^*, lo que es compatible con el resultado de que el sacrificio de utilidades es conveniente porque éstas serán usadas para invertir en unidades de capital que son más productivas que el rendimiento mínimo aceptable para el empresario

3.5.4. El efecto del endeudamiento.

Ahora se tienen 2 tasas de interés: la tasa de interés pasiva r y la TREMA ρ, por lo que se tienen ahora 2 condiciones de equilibrio, (en las cuales K no varía) para el capital.

Aunque en términos generales $r > \rho$, si se piensa por ejemplo que ρ está cercana a la tasa de rendimiento bancaria, en caso que no fuera así, lo que se tendría es que la empresa estaría siempre en el nivel de capital más rentable conviniendo financiar el crecimiento con deuda completamente en caso que $K_o < K_2^*$, ya que el punto K_1^* donde $Q_K = r$ se encuentra fuera de las posibilidades de inversión, pagando la deuda lo más rápido posible antes de pensar en extraer ganacias como se analizará con mayor detalle posteriomente.

Analizado el caso más común en que $r > \rho$, se sigue considerando que $Q_K = \rho$ correspondiente para un nivel de inversión K_2^* (ver figura 7), es el equilibrio meta de la empresa, con la variante que la distancia $K_2^* - K_o$ podrá ser cubierta ahora por deuda en caso que esta distancia sea positiva.

En este caso, la política de inversión ópima dependerá también de las condiciones iniciales, por lo que ubicándonos en la figura 7, se tiene que si $K_o < K_1^*$, los rendimentos marginales del capital de la empresa son mayores que la tasa a la se presta r por lo que conviene financiar este crecimiento con deuda.

Una vez estando en K_1^*, se llega a un equilibrio donde $Q_K = r$, y donde antes de pensar en invertir más en la empresa o en extraer ganancias, es necesario pagar el total de la deuda, ya que como se mencionó antes, en caso de invertir, las siguientes unidades de capital invertidas, serán menos rentables que r por lo que lo mejor es disminuir la deuda, y en caso de extraerlas, la deuda estaría generando intereses a una tasa mayor que la de disfrute del dinero ρ además de que la empresa tiene también, rendimientos marginales mayores a ρ por lo que esta opción es desechada por completo .

Esto significa que la política de pago de deuda óptima , *es el tener montos y plazos de pago, que coincidan con los recursos generados por la empresa* (d solución límite inferior), pagando de esta forma, la deuda lo más pronto posible.

Una vez pagada la deuda, abandonando el supuesto de equilibrio anterior y se empieza a elevar el monto de la inversión usando igualmete todos los recursos que se generen en la empresa (G solución límite inferior) para tal efecto, hasta llegar la la meta de capital K_2^* donde $Q_k = \rho$ y todos los recursos generados sean extraídos como ganancia G ya que como se analizó anteriomente, no es conveniente invertir.

En caso que el nivel de inversión inicial Ko, se encuentre entre los puntos K_1^* y K_2^* , la empresa está en el caso en el que su rendimiento marginal es mayor que el mínimo aceptable por el empresario ρ, pero menor que la tasa pasiva r , por lo que no es conveniente financiar el crecimiento con deuda, aún en el caso en el que el rendimiento global medio sí lo sea, ubicándonos de esta forma en el caso estudiado anteriormente donde no existía posibilidad de endeudamiento pero conviene crecer.

Igualmente, si Ko es mayor que K_2^*, lo más conveniente es disminuir la inversión, vendiendo parte de la empresa hasta ubicarse en el punto de equilibrio a niveles de inversión K_2^* donde $Q_K = \rho$.

3.5.5. Una forma fácil de aplicar las políticas concluidas .

La forma de hacer operativas las conclusiones teóricas hechas anteriormente deben en la práctica tomar en cuenta todos los elementos que operan en el mundo real y que no han sido supuestos en la resolución matemática.

Aunque como se puede apreciar, la solución exacta del problema requiere de un trabajo matemático muchas veces complicado, la aplicacaión de las políticas de inversión y contratación de personal desarrolladas, puede ser relativamente sencilla en muchos casos donde la actividad directiva empírica es suficiente dado lo simple y general de las condiciones óptimas de equilibrio concluidas.

De alguna manera las política de inversón y de contratación de personal, se pueden definir a través de ver a la empresa como un proyecto de inversión, en el que se analiza su viabilidad a cada momento tomándose también, acciones concretas permanentemente.

Desde esa perspectiva, supongamos que se evalúa la viabilidad de un proyecto de inversión. El empresario debe pensar en varias opciones acerca del tamaño de inversión en cada recurso del proyecto.

Lo importante es conocer el rendimiento de las diferencias del tamaño para tener una idea sobre los rendimientos marginales, por lo que se empieza por el análisis del capital K, en forma simple podrá ser calculado mediante la siguiente expresión:'

$$Ri_n = \frac{Q_n - Q_{n-1}}{K_n - K_{n-1}} \quad \text{----} \; (\alpha$$

Donde Ri_n es el Rendimiento del enésimo incremento de capital, Q_n y Q_{n-1} los recursos generados a los 2 tamaños de inversión de capital K_n y K_{n-1} respectivamente, por lo que esta expresión será una mejor aproximación al rendimiento marginal en la medida que los incrementos sean más pequeños

Es decir el empresario podrá empezar analizando el caso de menor inversión comparando la rentabilidad del primer incremento Ri_2 del mismo, con su Tasa de Retorno Mínima Aceptada definida como ρ y con la tasa pasiva de préstamo r.

En caso que la rentabilidad Ri_2 del proyecto a ese nivel sea mayor que ρ, se concluirá que el proyecto a ese nivel de inversión es conveniente y si además es mayor que r, convendrá además ser financiado con recursos prestados.

De esta forma, podemos pasar ahora al siguiente nivel de inversión tratando que este incremento $K_3 - K_2$ sea lo más pequeño posible, analizando la rentabilidad de este incremento de capital Ri_3, comparándolo de nuevo con r, y así sucesivamente hasta llegar a un punto donde este rendimiento sea los más cercano a r a fin de encontrar con mayor exactitud el valor que correspondería a K_1* de la figura 7.

Para ello, convendría ir haciendo los incrementos lo más pequeño posible, haciendo una interpolación final si es necesario, para encontrar una mejor aproximación a K_1* usando los 2 niveles de inversión, n y n-1, en los que $Ri_{n-1} > r > Ri_n$.

Una vez determinado este punto, se debe seguir un procedimiento análogo hasta llegar al punto donde la rentabilidad del último periodo analizado sea igual a ρ, lo que determinaría el valor máximo de inversión rentable del proyecto (la meta K_2* de la figura 7) al que se deberá llegar con recursos generados por la propia empresa después de haber liquidado la deuda D.

Es importante mencionar que aunque es deseable que el empresario tenga información acerca de los rendimientos de pequeños incrementos de inversión, tan pequeños como sea posible a fin de tener la mayor precisión, esto no significa que el proyecto tenga que desarrollarse a esa velocidad y con esos incrementos para llegar a resultados óptimos, ya que estos incrementos son hechos teóricamente para ser analizados únicamente .

En caso que desde el primer incremento analizado se tenga que su rendimiento sea menor que ρ, se tendrá que la empresa o el proyencto de inversión tiene por lo menos un nivel menos redituable que el mínimo aceptable por lo que seguramente convendria desinvertir haciendo el mismo procedimiento que el anterior pero ahora con decrementos de capital hasta llegar al punto donde el Rendimiento del decremento sea igual a - ρ.

En el caso del factor trabajo L , el número de trabajadores óptimo podrá ser determinado empiricamente en forma análoga al de inversión:

Ahora el incremento más pequeño de recurso L es un trabajador, por lo que podemos usar la expresión (α, teniendo el denominador del segundo término en este caso un valor de 1, siendo Q_n y Q_{n-1} las producciones de los niveles de trabajadores L_n y L_{n-1} respectivamente.

Se deberá contratar un siguiente trabajador en una empresa, si el hacerlo incrementa Q más que lo que el salario que se paga (w) , por lo que se deberá tener información lo más precisa posible acerca de las diferentes producciones Q para los diferentes número de trabajadores (igual que se hizo con el capital) , para de esta forma tener una idea del rendimiento marginal del mismo y poder llegar al nivel donde el rendimento del último trabajador sea lo más cercano a w lo que significaria que ese es el nivel de trabajadores óptimo L*, lo cual como se vió, no significa que sea precisamente el último trabajador el que sea menos productivo si no que la productividad marginal "conjunta" de los trabajadores va disminuyendo en la medida que se incrementa L.

Así mismo, como ya se vió con el capital, si el rendimento del primer incremento R_{i1} es menor que w, se tendrá que existen demasiados trabajadores por lo que el número total de trabajadores deberá disminuir, haciendo igualmente el mismo análisis pero con decrementos de L hasta llegar al nivel donde la rentabilidad del último es igual a - w.

Es importante advertir el hecho que el análisis de los incrementos de K y L deberá hacerse suponiendo que el otro recurso es constante , por lo que podría ser más sencillo empezar con K que es el factor al que es más fácil referir L, para después hacerlo con los L, los trabajadores, aunque también sea posible en algunos casos hacer el análisis mediante incrementos combinados de los 2 factores, simultáneamente.

4. Virtudes y limitaciones de la optimización intertemporal. Conclusiones.

4.1. Recapitulación final.

En el primer capítulo, se introdujo al análisis del entorno competitivo y de la empresa, con lo que queda claro la complejidad del mismo, dado el gran número de variables en diferentes circunstancias.

La idea fundamental de este trabajo, es el mostrar que ese entorno y esas circunstancias son objeto de ser modeladas en un esquema matemático, para poder encontrar las políticas adecuadas que lleven a la empresa a cumplir su objetivo, estableciendo de esta forma, una estrategia competitiva completa, que de alguna manera oscilará entre alguna de las estrategias genéricas mencionadas en el mismo .

De esta forma se desarrolló en la tercera parte un modelo para determinar políticas de inversión y contratación de personal óptimas de caracter general, donde se obtuvieron en base a ciertos supuestos relativamente sencillos, políticas claras mencionado algunos criterios metodológicos, para poder ser establecidos mediante medidas más particulares en una empresa cualquiera

En general se puede pensar que el método de optimización intertemporal del Máximo de Pontryagin, sirve fundamentalmente para indicar las mejores formas para llegar a ciertos puntos óptimos de equilibrio que cambian en la medida que las condiciones del entorno cambian también

4.2. La realidad es más compleja que cualquier modelo.

En el mundo real existe un gran número de circunstancias que hacen que el trabajo de la planeación estratégica sea poco exacta y que además halla una serie de fenómenos dificiles de prever que son muy dificiles de modelar matemáticamente.

Lo importante es tener presente los supuestos que se hacen en el modelo para poder determinar sus limitaciones, por lo que no se puede decir que el método pueda ser erróneo sino que al usarse no se toman en cuenta, de ahi que se tomen medidas equivocadas.

El problema resuelto en el capítulo 3, en ese sentido, tiene simplificaciones que pueden ser graves, quizá la más relevante, es el que no hace referencia a los factores cualitativos de la empresa, ya que supone que una unidad de capital invertida es igualmente redituable independientemente de la forma y el lugar en que se invirtió y análogamente para el personal de la empresa, lo cual deberá tomar en cuenta el empresario que haga uso del método siendo necesario en muchos casos , el hacer más particular los recursos analizados

(K y L) o suponer un rendimiento por unidad esperado, haciendo más complejo el análisis y suponiendo quizá mayores comportamientos, pero que permiten hacer politicas empresariales mucho más particulares.

Así mismo como se ha estado insistiendo, es dificil poder encontrar una función de producción Q, capaz de reflejar las condiciones complejas del entorno competitivo, por lo que en la práctica para hacer operativas las políticas concluidas, sería prudente tener diferentes funciones para diferentes escenarios posibles, teniendo de antemano políticas claras que se establecieron en la resolución general del caso.

Existen otro tipo de factores del entorno que de alguna manera dificulta el establecimieto de políticas de invesión y de contratación de personal además de hacer la gestión de la empresa más riesgosa.

Si pensamos que en el modelo desarrollado el salario w, y las tasas de interés r y ρ, son además de Q las variables que el entorno determina en el modelo que se resolvió podemos pensar en el caso de México lo imprevisibles que pueden ser, de ahí que la planeación de acciones concretas se dificulta considerablente, lo que en mi opinión lejos de ser una prueba que los estudios teóricos no son útiles, lo son de que es importante tener modelos teóricos cuantitativos para saber cómo es que estos cambios imprevisibles afectan las variables y los puntos óptimos de la empresa y poder tener elementos teóricos para decidir los cambios pertinentes.

BIBLIOGRAFIA.

ANDREWS, R, Keneth, El concepto de la estrategia en la empresa, EUNSA, México, 1981

CHIANG, Alpha C. , Fundamental Methods of Mathematical Economics , McGraw-Hill, New York, 1984 ,3a. edición .

FERNANDEZ, Oscar, Optimización Intertemporal: El principio del Máximo de Pontryagyn, CEE - COLMEX, México, 1994.

HILLIER , Frederick., LIEBERMAN, Gerald J. , Introducción a la investigación de operaciones, McGraw- Hill, México, 1982, 3a. edición.

MARTINEZ, Fabián, Planeación Estratégica Creativa, Editorial Pac, México, 1991.

PITA, Claudio, Ecuaciones Diferenciales, una introducción con aplicaciones, Limusa , México , 1989, 1a. edición.

PORTER, M, Estrategia competitiva , CECSA, México, 1992, 16a. edición.

REIMANN, Bernard C, Managing for value : A Guide for Valuebased Strategic Management., The panning Forum, EUA, 1987.