00365 6
2 eje

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

DIMENSION DE LOS NIVELES DE WHITNEY DE UNA GRAFICA FINITA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE:

MAESTRIA EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A:

MAT. ROBERTO TORRES HERNANDEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ALEJANDRO ILLANES MEJIA

MEXICO, D. F.

1994

DEDICO EL PRESENTE TRABAJO

A MI ESPOSA GEORGINA Y A MI HIJO JORGE ALBERTO

CON TODO MI AMOR.

AGRADEZCO A TODAS LAS PERSONAS QUE DE UNA U OTRA MANERA ME APOYARON Y ANIMARON EN LA ELABORACION DE ESTE TRABAJO.

AGRADEZCO TAMBIEN A LOS PROFESORES QUE ME FORMARON DURANTE MIS ESTUDIOS DE MAESTRIA EN EL INSTITUTO DE MATEMATICAS DE LA UNAM, MUY ESPECIALMENTE AL DR. LEONARDO SALMERON CASTRO.

POR ULTIMO (MAS NO AL ULTIMO) AGRADEZCO INFINITAMENTE AL DR. ALEJANDRO ILLANES MEJIA SU PACIENCIA, SABIDURIA Y BUEN HUMOR EN LA DIRECCION DE ESTA TESIS. SIN DUDA ALGUNA, DE EL APRENDI MUCHO MAS QUE HIPERESPACIOS. ¡GRACIAS, ALEJANDRO!

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

Los hiperespacios de un continuo (espacios formados por ciertos subconjuntos especiales de un Continuo) han llamado la atención de los topólogos desde hace mucho tiempo.

La primera vez que fué usada e intodujcida la métrica que ahora se les dá a estos hiperespacios fué en 1906 cuando Pompiu estudió ciertos subconjuntos del plano complejo. Desde entonces al estudio de los hiperespacios han estado ligados nombres de topólogos tan famosos como Hausdorff, Borsuk, Kuratowski, Krazinkiewickz y Kelley por mencionar sólo algunos de los más antiguos.

En 1967, R. Duda llamó la atención hacia el hecho de que no se tenía ni siquiera una buena descripción para los hiperespacios de los continuos más simples: Las gráficas finitas. En ese año publicó en Fundamenta Mathematicae un estudio extremadamente detallado consiguiendo algunos resultados notables.

Desde fines de la década de los setentas, el estudio de los hiperespacios derivó a poner mucha atención en los niveles de Whitney. En particular, los autores H. Kato, A. Illanes e I. Puga han estudiado diversos aspectos de los niveles de Whitey de las gráficas finitas. (Ver [4], [5], [6], [7], [8], [9] y [10])

En su trabajo [1], Duda muestra que los aspectos relativos a la dimensión de los hiperespacios de las gráficas finitas dependen exclusivamente del orden de sus vértices. Algo similar ocurre con los niveles de Whitney de estos hiperespacios. Sin embargo las relaciones no son tan directas y se tiene que ser más cuidadoso.

Este trabajo está dedicado a estudiar las dimensiones de los niveles de Whitney de las gráficas finitas.

Los resultados originales se presentan en los capítulos III y IV.

En el capítulo III obtenemos un algoritmo explícito para calcular este tipo de dimensiones y en el capítulo IV aprovechamos este algoritmo para probar los resultados acerca de la dimensión que habíamos intuido cuando explorábamos estos niveles de Whitney.

En el capítulo I además de introducir los conceptos que se usarán a lo largo de esta tesis, completamos y detallamos algunos resultados de R. Duda.

El capítulo II está dedicado a un resultado técnico, muy útil para los capítulos siguientes.

CAPITULO I

RESULTADOS PRELIMINARES

DEFINICIONES : Un *Continuo* X es un espacio métrico compacto, conexo y con más de un punto.

Dado un continuo X, definimos el conjunto siguiente al que llamaremos *hiperespacio* de X y que se manejará en este trabajo:

$C(X)=\{A\subseteq X : A\neq\emptyset,\ A \text{ cerrado y conexo}\}$

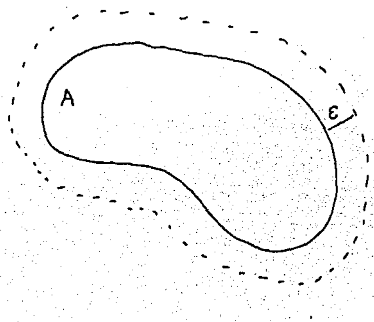
A los elementos de C(X) les llamaremos *subcontinuos*.

A C(X) se le puede equipar con una métrica para que resulte ser también un continuo. Esto se hace como sigue :

Si d es la métrica de X, $\varepsilon>0$ y $A\in C(X)$, se define

$N(\varepsilon,A)=\{x\in X : \text{Existe } a\in A \text{ tal que } d(x,a)<\varepsilon\}$.

A este conjunto le llamaremos *nube de radio* ε *centrada en A*, y tiene la siguiente interpretación geométrica :



La *métrica de Hausdorff* para $C(X)$ se define como

$H(A,B) = \text{Inf}\{\varepsilon>0 : A\subseteq N(\varepsilon,B) \text{ y } B\subseteq N(\varepsilon,A)\}$ donde A y B son elementos de $C(X)$.

Es fácil probar que H es una métrica para $C(X)$. En este trabajo usaremos los siguientes dos hechos que no son tan fáciles de probar pero que pueden ser encontrados en [12] (Teoremas 0.8 y 1.12) :

a) $C(X)$ es compacto con la métrica H.

b) $C(X)$ es conexo por trayectorias con la métrica H.

CUATRO EJEMPLOS FUNDAMENTALES

EJEMPLO 1 : Sea X un arco. Sin perder generalidad podemos pensar que $X = [0,1]$. Los elementos de $C(X)$ son subconjuntos no vacíos, cerrados y conexos de X, es decir, subintervalos de $[0,1]$. Así

$C(X) = \{[a,b] : 0\le a\le b\le 1\}$.

Cada elemento $[a,b]\in C(X)$ queda totalmente determinado por su punto medio y su longitud. Utilizando esta idea podemos dar una interpretación geométrica de $C(X)$ como sigue:

Consideremos la función $g:C(X)\longrightarrow\mathbb{R}^2$ dada por

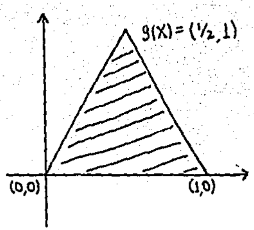
$g([a,b]) = ((a+b)/2, b-a)$

Es claro que g está bien definida y es inyectiva y continua. Como $C(X)$ es compacto, es homeomorfo a su imagen; luego, si llamamos T a la imagen de g tenemos que $(x,y)\in T$ si y sólo si existen a y b con $0\le a\le b\le 1$ y $x = (a+b)/2$ e $y = b-a$. Es decir, $2x=a+b$ y además $y = b-a$.

Resolviendo para a y b, tenemos $a = (2x-y)/2$ y $b = (2x+y)/2$. Luego $0 \le (2x-y)/2 \le (2x+y)/2 \le 1$, o $0 \le 2x-y \le 2x+y \le 2$. Esto es lo mismo que $y \le 2x$, $y \ge 0$ y además $2x \le 2-y$.

Luego $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le 2x,\ y \ge 0 \text{ y } 2x \le 2-y\}$.

De aquí es fácil ver que T es el triángulo con vértices (0,0), (1,0) y (1/2,1).



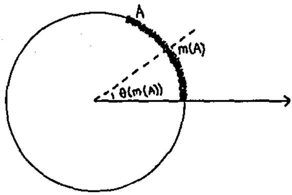
Notemos que los subcontinuos que contienen a un extremo de X, digamos al 0, están representados en el dibujo por los puntos de la forma $g([0,b]) = (b/2,b)$ que se encuentran sobre la recta $y=2x$. Como $0 \le b \le 1$, estos subcontinuos forman el lado del triángulo que une el punto (0,0) con el punto (1/2,1).

<u>EJEMPLO</u> <u>II</u> : Sea X una curva cerrada simple. Sin perder generalidad podemos pensar que $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$.

Cada elemento $A \in C(X)$, $A \ne X$, es un subarco de X que está totalmente determinado por su punto medio $m(A)$ y su longitud $\delta(A)$.

Si D es el disco acotado por X descrito en coordenadas polares y $\theta(m(A))$ es el ángulo formado por el eje polar y el segmento de recta que une al polo con el punto $m(A)$, podemos definir una función $h:C(X)\longrightarrow D$, dada por:

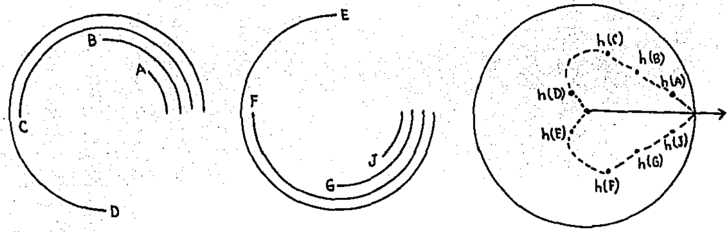
$h(A) = (\theta(m(A)), 1-\delta(A)/2\pi)$ si $A\neq X$ y $h(X) = (0,0)$.



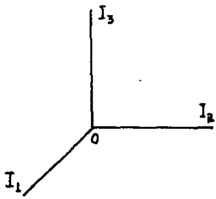
Es relativamente fácil probar que h es un homeomorfismo. De aquí que la representación geométrica de C(X) es D.

En el ejemplo IV utilizaremos la representación de los subcontinuos que contienen a un punto de la circunferencia, digamos , al punto (1,0). Para investigar esta representación, tomaremos los "casos extremos" de subcontinuos que contienen al punto. Estos subcontinuos pueden ser los considerados en los dos dibujos del lado izquierdo de la página siguiente pensando en que A, B, C, D, E, F, G y J son partes de la circunferencia y su representación en el disco D se ve en el dibujo del lado derecho.

Luego, la representación geométrica de los subcontinuos que contienen al punto (1,0) es la región acotada por la curva en forma de corazón.



EJEMPLO III : Sea X el espacio que consta de tres segmentos I_1, I_2, I_3 de longitud 1 pegados en un punto O. A este espacio le llamaremos *triodo*.



Si tomamos $A \in C(X)$, A solo tiene dos opciones :

CASO 1 :$O \in A$ y CASO 2 :$O \notin A$.

CASO 1 : Si $O \in A$, consideremos $\mathfrak{A} = \{A \in C(X) : O \in A\}$.

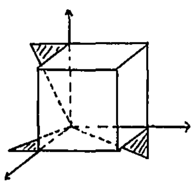
Podemos definir $g:\mathfrak{A} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ como $g(A) = (a,b,c,)$ donde a, b y c son las longitudes de $A \cap I_1$, $A \cap I_2$ y $A \cap I_3$, respectivamente.

Notemos que estas intersecciones son no vacías. Nuevamente es fácil ver que g está bien definida, es continua y es inyectiva y como $0 \leq a, b, c \leq 1$, si $I = [0,1]$, tenemos que $g(\mathfrak{A})$ es homeomorfo a $I \times I \times I$, el cubo sólido de dimensión tres.

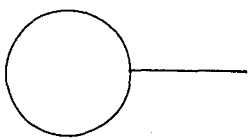
A este cubo, falta añadirle los elementos de $C(X)$ del CASO 2, es decir, los elementos de $C(X)$ contenidos en I_1, I_2 e I_3, esto es, falta añadirle $C(I_1)$, $C(I_2)$ y $C(I_3)$ que ya sabemos que cada uno de estos espacios es un triángulo.

Para ver cómo tenemos que pegar estos tres triángulos, tenemos que ver qué hay de común, por ejemplo, entre $\mathfrak{A}$ y $C(I_1)$. Si $A \in \mathfrak{A}$ y $A \in C(I_1)$, A es un subintervalo de I_1 que contiene a 0, por lo que A está representado en $I \times I \times I$ por $(a, 0, 0)$ y en $C(I_1)$ está representado por un punto en uno de los lados del triángulo. (Ver Ejemplo I).

Así, hay que unir uno de los lados del triángulo $C(I_1)$ con la arista de $I \times I \times I$ sobre el eje z. Si $C(I_2)$ y $C(I_3)$ se pegan de la misma manera, $C(X)$ queda representado por:



<u>EJEMPLO IV</u>: Sea X el siguiente continuo, conocido como *paleta*

$X =$ 

Para dar una representación geométrica de $C(X)$, notemos que podemos pensar en X como "combinación" de los ejemplos I y II, es decir, una circunferencia de radio 1 unida a un segmento de longitud 1:

$X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2 = 1\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 1\leq x\leq 2,\ y = 0\}$

Si $P = (1,0)$ y $A\in C(X)$, A tiene dos opciones:

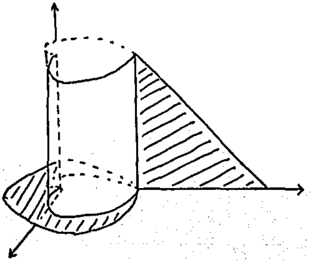
CASO 1: $P\in A$ y CASO 2: $P\notin A$.

CASO 1: Si llamamos L al segmento de X y z a la longitud de $A \cap L$ y definimos $\mathfrak{C} = \{A\in C(X): P\in A\}$, podemos ver que la función definida por $g:\mathfrak{C}\longrightarrow\mathbb{R}^3$, dada por:

$g(A) = (\theta(m(A)),\ 1-\delta(A)/2\pi,\ z)$ con la notación del Ejemplo II, está bien definida, es continua, es inyectiva y como $0\leq z\leq 1$, $g(\mathfrak{C})$ es un cilindro con base en forma de corazón y altura 1.

A este cilindro hay que añadirle los elementos de $C(X)$ del CASO 2., pero estos elementos están contenidos en el círculo ó en el segmento y por los Ejemplos I y II sabemos que éstos quedan representados dentro del círculo en la primera opción y en un triángulo en la segunda.

Luego, la representación de $C(X)$ es el cilindro junto con el círculo de su base y un triángulo pegados de la siguiente manera:



MAS DEFINICIONES Y CONVENCIONES

A partir de este momento, los continuos a los que nos referiremos (y para los que reservaremos la letra X) serán *Gráficas Finitas Conexas,* es decir, conjuntos finitos de puntos llamados *vértices* y conjuntos de segmentos que los unen llamados *aristas* o *segmentos,* donde para cualquier par de vértices existe un *arco* (espacio homeomorfo a un intervalo) formado por aristas que unen ese par de vértices.

Una *subgráfica* de X siempre significará una gráfica CONEXA contenida en X, y generalmente las denotaremos por las letras R, S y T.

El *orden (grado o valencia*) de un vértice v es el número de aristas que inciden en él y lo denotaremos por gr(v).

En nuestro caso, obviamente se tiene que para cualquier vértice v , $gr(v) \geq 1$.

Un vértice v es *terminal* si $gr(v) = 1$, y es de *ramificación* si $gr(v) \geq 3$.

Una subgráfica es *interna* si no contiene vértices terminales.

Una subgráfica es *acíclica* si no contiene algún *ciclo* (espacio homeomorfo a una circunferencia) . Si un ciclo está formado por un solo segmento , le llamaremos *rizo* .

Además , pensaremos que X tiene las dos propiedades siguientes:

α) Toda arista de X mide una unidad de longitud .

β) Todo vértice de X es terminal o es de ramificación.

Respecto a este par de propiedades , podemos decir que pedirlas a una gráfica no afecta las características topológicas esenciales de ésta.

Observemos que, con estas restricciones, algunos "segmentos" de la gráfica son rizos y que la única gráfica que NO se puede representar de esta manera es la circunferencia. Por esta razón, la circunferrencia siempre tendrá un trato especial en este trabajo.

Reservaremos tambien la letra I para el intervalo unitario y usaremos la notación $B_{\varepsilon}(A) = \{D\in C(X): H(A,D)<\varepsilon\}$

$$B_{\varepsilon}(a) = \{x\in X: d(a,x)<\varepsilon\} \text{ para } \varepsilon>0.$$

Otra definición importante es la siguiente :

<u>DEFINICION</u> : Si $A \in C(X)$, la *bola cerrada con centro en A y radio r en el espacio* C(X) es el conjunto

$$Q(r,A) = \{x\in X: d(x,A)\le r\}$$

En particular nos interesará este conjunto cuando A sea una subgráfica de X y r = 1. Aquí escribiremos A=S por lo dicho en la página anterior acerca de las letras para denotar subgráficas.

Notemos que en este caso, el conjunto Q(1,S) será la subgráfica de X que consiste de S y de todas las aristas de X que intersectan a A.

Tan importante es esta idea en el presente trabajo que enseguida haremos unos comentarios acerca de su notación.

Denotaremos con I_i a los segmentos de $Q(1,S)$ que intersectan a S en exactamente uno de sus puntos extremos y con J_j a los segmentos de $Q(1,S)$ que intersectan a S en exactamente sus dos puntos extremos, (o en su único extremo cuando se trata de un rizo). Luego, si pensamos que k es el número de todos los segmentos I_i's y l es el número de todos los segmentos J_j's tenemos

$$Q(1,S) = S \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} I_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l} J_j \right)$$

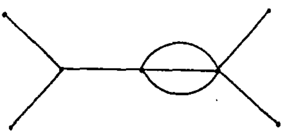
De igual manera, si $A \in C(X)$ y $S \subseteq A \subseteq Q(1,S)$, entonces tenemos un subcontinuo al que podemos representar de la siguiente manera :

$$A = S \cup \left[\bigcup_{i=1}^{k} (I_i \cap A) \right] \cup \left[\bigcup_{j=1}^{l} (J_j \cap A) \right]$$

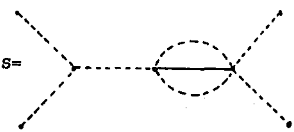
donde $I_i \cap A$ es el pedazo del segmento I_i que también pertenecė a A y $J_j \cap A$ es la unión de a lo más dos pedazos de la arista J_j que también son parte de A.

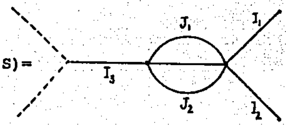
Para aclarar estas ideas, pensemos en el siguiente ejemplo :

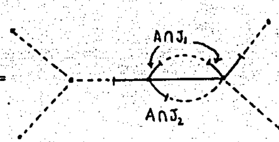
X=



S=



$Q(1,S)=$ 

$A=$ 

Implícitamente con estas ideas, tendríamos que si T es una subgráfica con $S\subseteq T\subseteq Q(1,S)$, podríamos escribirla como :

$$T = S \cup (\cup \text{ Algunos } I_i) \cup (\cup \text{ Algunos } J_j)$$

ya que para cualquier i y para cualquier j, tenemos que $T\cap I_i$ es I_i o vacía y también $T\cap J_j$ es J_j o vacía.

Además, por la propiedad α) que le hemos pedido a la métrica de X, podemos pensar a cada segmento I_i y J_j como una copia del intervalo unitario $I = [0,1]$. Por lo tanto, si $A\in C(X)$ satisface que $S\subseteq A\subseteq Q(1,S)$, entonces podemos concebir $A\cap I_i=[0,a_i]$, donde a_i es la longitud del pedazo $A\cap I_i$.

Así mismo, $A\cap J_j = [0,b_j] \cup [1-c_j,1]$, donde b_j y c_j son las longitudes de los pedazos de $A \cap J_j$.

Luego, otra posible manera de escribir A es

$$A = S \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} [0,a_i]\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l} ([0,b_j] \cup [1-c_j,1])\right)$$

Apoyándonos en estas ideas tenemos la siguiente :

DEFINICION : Dos subgráficas S y T de X con $S\subsetneq T$ forman un *par* en cualquiera de los dos casos siguientes :

1) $S=\emptyset$ y T es una arista de X .

2) S es interna y T es la unión de S con algunas aristas de X que intersecten a S, es decir, si S es interna y $S\subsetneq T\subseteq Q(1,S)$.

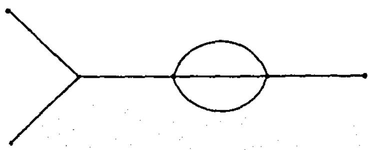
En particular, S y Q(1,S) forman un par si S es interna. Los pares de la forma S, Q(1,S) cuando S es interna y acíclica y las descritas en 1), juegan un papel importante en el estudio de los hiperespacios de las gráficas finitas. Por esta razón reciben el nombre especial de *pares finos*.

Crucial en este trabajo es la siguiente definicón.

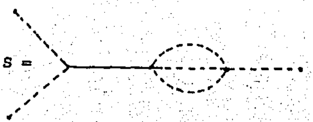
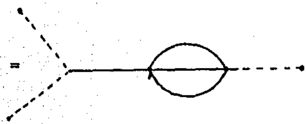
DEFINICION : Si $S\subsetneq T$ forman un par, el conjunto $\mathfrak{M}_{S\subsetneq T}$ se define como

$$\mathfrak{M}_{S\subsetneq T} = \{A\in C(X): S\subseteq A\subseteq T \text{ y } A\cap N(1,S) \text{ es conexo}\}$$

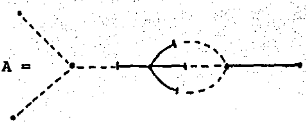
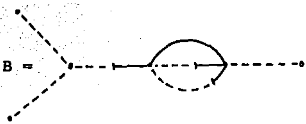
Para ilustrar la idea de esta definición consideremos el siguiente ejemplo:

X = 

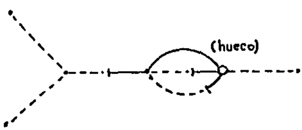
Sean

$S =$  $T =$ 

Aquí , notemos que $S \leq T$ forman un par . Además , sean

$A =$  $B =$ 

De la definición se sigue que $A \in \mathfrak{M}_{S \leq T}$, pero $B \notin \mathfrak{M}_{S \leq T}$ ya que aunque $S \leq B \leq T$ se tiene que $B \cap N(1,S)$ no es conexo :

$B \cap N(S,1) =$ 

Para simplificar, a partir de este momento , utilizaremos la siguiente notación

$$\mathfrak{M}_{S \leq Q(1,S)} = \mathfrak{M}_S.$$

Los siguientes tres resultados serán usados a lo largo de este trabajo: el primer lema asegura que cada elemento de $C(X)$ pertenece a un conjunto $\mathfrak{M}_S$, lo que nos dice que estos conjuntos cubren a $C(X)$.

LEMA 1.1: Si $A\in C(X)$ entonces existe un par fino $S\subseteq Q(1,S)$ tal que $A\in\mathfrak{M}_S$.

PRUEBA: Sea V el conjunto de todos los vértices contenidos en A que NO sean vértices terminales de X.

Si $V=\emptyset$, entonces A está contenido en un intervalo I de X y en este caso $A\in\mathfrak{M}_{\emptyset\subseteq I}$.

Si $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, como A es conexo existe una trayectoria L entre, digamos, v_1 y v_2 y totalmente contenida en A; si además $V\subseteq L$, tomamos $S = L$.

Si V no está contenido en L, digamos $v_3\notin L$, existe una trayectoria N que une a v_1 con v_3 en A. Ahora, la subgráfica $L\cup N$ es interna pero puede no ser acíclica; para evitar eso, pensemos en la trayectoria N de la siguiente manera :

$$N = \bigcup_{i=1}^{n} J_i ,$$

donde J_i denota un segmento de X , con v_3 en J_1 y v_1 en J_n .

Pensamos que los J_i están ordenados de tal manera que los puntos extremos a_i y b_i de J_i son tales que a_i es también el punto extremo b_{i-1} de J_{i-1} y b_i es también el punto extremo a_{i+1} de J_{i+1}.

Ahora, sea j el mínimo índice tal que $J_j \cap L \neq \emptyset$. Si llamamos

$N^* = \bigcup_{i=1}^{j} J_i$ y llamamos $S^* = L \cup N^*$ tendremos que :

La subgráfica S^* contiene, al menos, a los vértices v_1, v_2 y v_3 y además es acíclica e interna por construcción .

Siguiendo con este proceso, llegaremos a una subgráfica S interna y acíclica con $V \subseteq S$.

Para terminar la prueba del Lema, basta probar que $A \in \mathfrak{M}_S$ para la subgráfica S construida por el proceso anterior .

Claramente $S \subseteq A$. Tambien $A \subseteq Q(1,S)$ pues si $x \in A-S$, como A es conexo, existe un arco contenido en A que conecta a x con v_1. Si caminamos por ese arco desde x a v_1, el primer vértice de X diferente de x que encontramos tiene que ser un $v_i \in V \subseteq S$. Luego tenemos que $d(x,v_i) \leq 1$ y así $A \subseteq Q(1,S)$.

Para demostrar que $A \cap N(1,S)$ es conexo, será suficiente demostrar que cualquier elemento x de esta intersección puede conectarse por una trayectoria con la subgráfica S dentro de la intersección .

Luego, si $x \in A \cap N(1,S)$, sea J el segmento de $Q(1,S)$ tal que $x \in J$. Uno de los extremos de J debe ser vértice de S y por lo tanto debe pertenecer a A. Así x y este extremo de J se unen por una trayectoria (en realidad, por un pedazo de J) en A, pues A es conexo, y también en $N(1,S)$ por la misma razón. De donde tenemos lo que queríamos probar .

Este lema (y su prueba) es importante porque nos permite definir el siguiente concepto:

<u>DEFINICION</u> : Si $A \in C(X)$, a una subgráfica S construida como en la prueba del lema, le llamaremos *subgráfica mmaximal fina* de A.

Sus principales características son que contiene a todos los vértices internos de A, que es interna y que es acíclica .

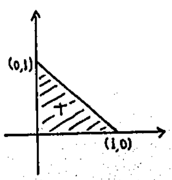
En el teorema siguiente, se da una caracterización topológica de los conjuntos $\mathfrak{M}_{S \subseteq T}$ donde $S \subseteq T$ forman un par.

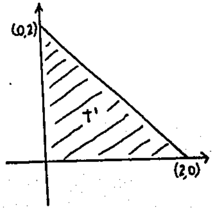
También proporciona una manera concreta de calcular su dimensión . Pero antes un lema geométrico .

<u>LEMA 1.2</u>: Sea $T = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a, b \leq 1 \text{ y } a+b \leq 1\}$. Si en este triángulo identificamos la hipotenusa a un punto, el espacio resultante es homeomorfo a $I^2 = [0,1] \times [0,1]$.

<u>PRUEBA</u>: Sea $f : T \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(a,b) = (2a,2b)$. Si llamamos $T' = f(T)$ tenemos claramente que T y T' son homeomorfos.

Geométricamente, hemos transformado el primer triángulo en el segundo .



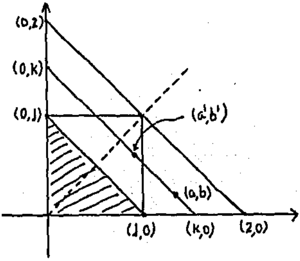


Identificar la hipotenusa de T a un punto , es lo mismo que identificar la hipotenusa de T′ a un punto (digamos al punto (1,1)) y esto se logra de la siguiente manera:

Sea $g: T' \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(2a,2b) = \begin{cases} (2a,2b) & \text{si } a+b \leq \frac{1}{2} \\ \left(2b+\dfrac{a-b}{a+b},\ 2a+\dfrac{b-a}{a+b}\right) & \text{si } a+b \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

La función g transforma T′ en I^2 utilizando las proporciones que se obtienen de considerar el siguiente dibujo , donde estamos denotando a g(2a,2b) como (a′,b′).



El triágulo sombreado permanece igual bajo g , y la región restante de T′ se " aplasta " al cuadrado utilizando las proporciones siguientes :

$$\frac{{}^{k}/_{2} - 2b}{2b - 0} = \frac{{}^{k}/_{2} - b'}{b' - (k-1)} \qquad \text{y} \qquad \frac{k - 2a}{2a - {}^{k}/_{2}} = \frac{1 - a'}{a' - {}^{k}/_{2}}$$

Despejando a′ y b′ de estas igualdades, se llega a la definición de g en la parte superior del triángulo. Notemos que la hipotenusa se transforma en el punto (1,1).

Ahora se observa claramente de la manera de definir g, que la imagen de T′ bajo g es I^2, que g es continua y que es sobre pero no inyectiva. De cualquier forma, podemos pensar que g es "casi" un homeomorfismo del triángulo en el cuadrado salvo en su hipotenusa, que es en los puntos donde se tiene que $a+b = 1$. Un simple cálculo muestra también que para los puntos (a,b) donde $a+b = \frac{1}{2}$ ambas partes de la definición de g coinciden.

Si $\Phi = g \circ f$, tenemos que $\Phi: T \longrightarrow I^2$ Φ es continua y que Φ es también "casi" un homeomorfismo, salvo en los puntos que $a+b = \frac{1}{2}$.

Aunque Φ no es un homeomorfismo, jugará un papel destacado en la prueba del próximo teorema , donde se usará para definir otra función que sí resultará ser homeomorfismo.

<u>TEOREMA</u> <u>1.1</u>: Sea $S \subseteq T$ un par en X.

i) Si $S=\emptyset$, entonces $\mathfrak{M}_{S\subseteq T}$ es una bola topológica de dimensión dos.

ii) Si $S\neq\emptyset$, entonces $\mathfrak{M}_{S\subseteq T}$ es una bola topológica de dimensión $k+2l$, donde k es el número de aristas de T que intersectan a S en solo uno de sus extremos, y l es el número de aristas de T que intersectan a S en sus dos extremos.

<u>PRUEBA</u>.

i) Es evidente, pues si $S=\emptyset$, entonces $\mathfrak{M}_{S\subseteq T} = C(T)$ donde T es un segmento de X, y por el ejemplo I, C(T) es una bola topológica de dimensión dos .

ii) Para este inciso , definiremos una función F de $\mathfrak{M}_{S\subseteq T}$ en el cubo I^{k+2l} y que resultará ser un homeomorfismo .

Para esto, sea $A\in\mathfrak{M}_{S\subseteq T}$. Como $S\subseteq T$ es un par, entonces se tiene que $T \subseteq Q\ (1,S)$; luego T puede expresarse como

$$T = S \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} I_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l} J_j \right)$$

Si $A\in\mathfrak{M}_{S\subseteq T}$, entonces A es un conjunto de la forma

$$A = S \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} [0,a_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l} ([0,b_j] \cup [1-c_j,1]) \right)$$

Sea entonces $F:\mathfrak{M}_{S\subseteq T} \longrightarrow I^{k+2l}$ definida por

$F(A) = (a_1, \dots ,a_k,\Phi(b_1,c_1), \dots ,\Phi(b_l,c_l))$.

Demostraremos que F es inyectiva, sobre, continua y además que el conjunto $\mathfrak{M}_{S\subseteq T}$ es cerrado, de donde F resultará ser un homeomorfismo y el teorema quedará probado .

F es inyectiva.

Sean A y B en el conjunto $\mathfrak{M}_{S\subseteq T}$ con $F(A) = F(B)$ donde

$F(A) = (a_1, \dots ,a_k, \Phi(b_1,c_1), \dots , \Phi(b_l,c_l))$

$F(B) = (a_1', \dots ,a_k', \Phi(b_1',c_1'), \dots , \Phi(b_l',c_l'))$

Igualando las coordenandas correspondientes, tenemos que: $a_i = a_i'$ y que $\Phi(b_j,c_j) = \Phi(b_j',c_j')$. Pero como Φ es una función inyectiva, excepto si $b_j+c_j = 1$, entonces ocurre que $b_j = b_j'$ y que $c_j = c_j'$ o bien que, por ejemplo, $b_j+c_j = 1$. En este caso, como $\Phi(b_j,c_j) = \Phi(b_j',c_j')$, se debe tener que $b_j'+c_j' = 1$. En este caso, todo el segmento J_j pertenece tanto a A como a B.

De aquí que A = B.

F es suprayectiva.

Sea $A^* = (a_1, \ \ldots \ ,a_k,b_1^*,c_1^*, \ \ldots \ ,b_l^*,c_l^*)\in I^{k+2l}$. Construiremos un elemento $A\in\mathfrak{M}_{S\subsetneq T}$ tal que $F(A) = A^*$. Para hacer esto, a S le añadiremos pedazos en los I_i y J_j de acuerdo con las siguientes indicaciones:

Para las primeras k coordenadas, añadiremos a S el segmento $[0,a_i]$ del intervalo I_i y lo denotaremos por $I_i\cap A$.

Para las siguientes coordenadas, tomemos grupos de dos en dos Si $b_j^*+c_j^* = 2$ añadimos a S el segmento J_j completo y lo escribimos como $J = A\cap J_j$. Si $b_j^*+c_j^*<2$ ambas entradas no pueden ser 1 al mismo tiempo por lo que la imagen inversa de (b_j^*,c_j^*) bajo Φ existe y es igual a, digamos, (b_j,c_j). Añadimos a S los dos subarcos de J_j que se denotan por $[0,b_j]$ y $[1-c_j,1]$ y a este pedazo lo denotamos por $A \cap J_j$.

Finalmente definamos

$$A = S \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} (A\cap I_i)\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l} (A\cap J_j)\right)$$

Claramente, A es un elemento de $\mathfrak{M}_{S\varsubsetneq T}$ por la forma en que se construyó, y por esa misma razón, tenemos que $F(A) = A^*$, con lo que se prueba que la función es sobre.

F es continua.

Sea $\varepsilon>0$. Como Φ es uniformemente continua, sea 2δ un número positivo que cumpla la definición de continuidad uniforme para Φ y además que $2\delta<{}^{\varepsilon}/_{2}$.

Para ver que F es continua mostraremos que

Si $H(A,B)<\delta$ entonces $\|F(A)-F(B)\|<(k+1)\varepsilon$

Y para ver esto último, basta ver que si $H(A,B)<\delta$ donde

$$A = S \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} [0,a_i]\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l} ([0,b_j] \cup [1-c_j,1])\right) \text{ y}$$

$$B = S \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} [0,a_i']\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l} ([0,b_j'] \cup [1-c_j',1])\right)$$

entonces $|a_i- a_i'|<\varepsilon$ para todo $i = 1,2, \ldots ,k$ y

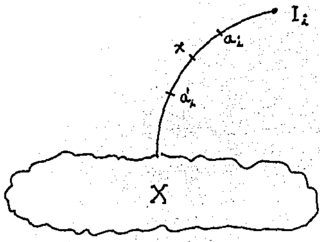
$\|\Phi(b_j,c_j)-\Phi(b_j',c_j')\|<\varepsilon$ para toda $j = 1, \ldots ,l$

Para probar que $|a_i-a_i'|<\varepsilon$, supongamos, por ejemplo, $a_i' \le a_i$.

Afirmamos que $a_i-a_i'\le2\delta$, ya que si sucediera $a_i-a_i'>2\delta$ (la abertura de I entre a_i y a_i' es mayor que 2δ), entonces se tendría que $a_i'+2\delta<a_i$.

Sea $x = \dfrac{a_i + a_i'}{2}$.

Gráficamente tenemos que



Luego, $0 \le a'_i < x-\delta < x < x+\delta < a_i \le 1$

Estas desigualdades implican que $x \in [0,a_i] \subseteq A$ y además que $[x-\delta, x+\delta] \subseteq I_i - B$, luego $B_\delta(x) \cap B = \emptyset$, lo que contradice el hecho de que $H(A,B) < \delta$.

Por lo tanto $a_i - a'_i \le 2\delta$ y de aquí $|a_i - a'_i| < \varepsilon$.

Para probar que $\|\Phi(b_j,c_j) - \Phi(b'-c')\| < \varepsilon$ será suficiente ver que $|b_j - b'_j| < \delta$ y que $|c_j - c'_j| < \delta$.

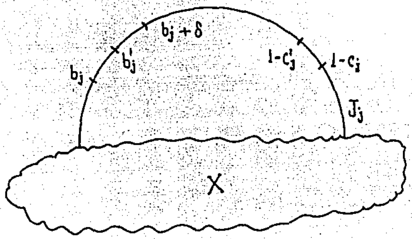
Para esto, analizaremos tres casos :

i) Si $1-c_j-b_j > 2\delta$, (La abertura entre b_j y $1-c_j$ es mayor que 2), entonces el intervalo abierto $(b_j, b_j+2\delta)$ no intersecta a A.

Esto prueba que $B_\delta(b_j+\delta) \cap A = \emptyset$ y como $H(A,B) < \delta$, concluímos que $b_j+\delta \notin B$.

Ahora, si sucediera que $b_j+\delta\leq b'_j$ entonces $b_j+\delta$ estaría en el intervalo $[0,b']$ que está contenido en B, lo que es absurdo, luego se tiene que $b_j+\delta>b'_j$ o $b'_j-b_j<\delta$.

Graficamente :



Igualmente $1-c_j-\delta\notin B$ lo que implica que $1-c_j-\delta$ es menor que $1-c'_j$.

Si sucediera que $b'_j<b_j-\delta$ entonces tendríamos la cadena $b'_j<b_j-\delta<(1-c_j)-2\delta-\delta<1-c'-2\delta$ de donde obtenemos que $1-c'_j-b'_j>2\delta$.

Aplicando los mismos argumentos a b'_j y a $1-c'_j$, nos queda que $b_j<b'_j+\delta$ de donde $b_j-\delta<b'_j$ lo que nos da una contradicción .

Luego $b'_j>b_j-\delta$ y junto con la desigualdad $b'_j-b_j<\delta$ nos queda lo que queríamos: $|b_j-b'_j|<\delta$.

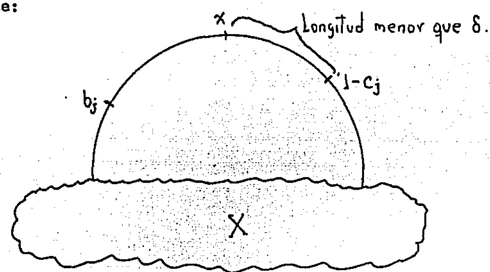
De manera similar se llega a que $|c_j - c'_j| < \delta$.

ii) Si $1-c'_j-b'_j>2\delta$, tenemos un caso parecido a i).

iii) Si $1-c'_j-b'_j\le 2\delta$ y $1-b_j-c_j\le 2\delta$, (Las aberturas entre b_j y $1-c_j$ y entre b'_j y $1-c'_j$ son menores que 2δ), se tiene que

$1-2\delta\le b'_j+c'_j\le 1$. Ahora sea $x = \dfrac{b'_j+1-c_j}{2}$.

Gráficamente:



Luego $|c'_j-(1-x)|<\delta$ y $|b'_j-x|<\delta$. Entonces por la continuidad uniforme de Φ tenemos que

$\|\Phi(b'_j,c'_j)-\Phi(x,1-x)\|<{}^{\varepsilon}/_2$ y como tenemos que $\Phi(x,1-x) = (1,1)$ se llega a

$\|\Phi(b'_j,c'_j)-(1,1)\|<{}^{\varepsilon}/_2$.

Similarmente

$\|\Phi(b_j,c_j)-(1,1)\|<{}^{\varepsilon}/_2$.

Utilizando la desigualdad del triángulo , finalmente tenemos que

$\|\Phi(b_j,c_j)-\Phi(b'_j,c'_j)\|<\varepsilon$.

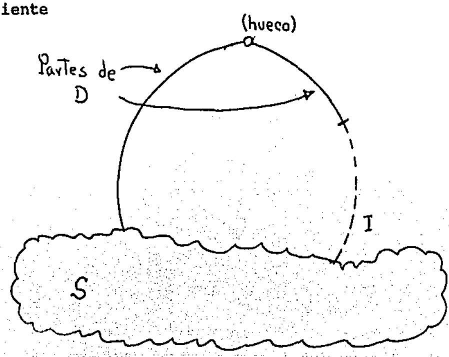
El conjunto $\mathfrak{M}_{S \subseteq T}$ es cerrado.

Para ver esto, recordemos que la propiedad de "contener" y la de "estar contenido" son propiedades " cerradas ", esto es:

Si B es un elemento fijo de C(X), entonces los conjuntos: $\mathcal{G} = \{A \in C(X) : A \subseteq B\}$ y $\mathcal{J} = \{A \in C(X) : B \subseteq A\}$ son cerrados en C(X).

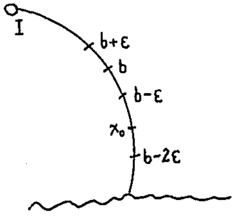
Por lo anterior , el conjunto de elementos $A \in C(X)$ tales que $S \subseteq A \subseteq Q(1,S)$ es cerrado en C(X). Resta ver que el conjunto de elementos $A \in C(X)$ tales que $A \cap N(1,S)$ es conexo es un conjunto cerrado en C(X), y para ello mostraremos que su complemento es abierto, es decir, que si $D \in C(X)$ y $D \cap N(1,S)$ es disconexo, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $E \in B_{\varepsilon}(D)$ se tiene que $E \cap N(1,S)$ es disconexo .

Sea entonces $D \in C(X)$ tal que $D \cap N(1,S)$ es disconexo, entonces como D es conexo, forzosamente se tendría una situación como en el dibujo siguiente



En el segmento $I = [0,1]$ identificamos los puntos b y d donde "termina" D. Debe de suceder que $b<1$ y $d<b$.

Sea $3\varepsilon = \min\{1-b, b-d\}$ y sea $E \in B_{\varepsilon}(D)$. Entonces $d<d+\varepsilon\leq b-2\varepsilon<b-\varepsilon<b<b+\varepsilon<1$ y E contiene puntos del intervalo $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$



Elegimos un x_0 tal que $b-2\varepsilon<x_0<b-\varepsilon$. Entonces $x_0 \notin N(\varepsilon,D)$ lo cual implica que $x_0 \notin E$. De aquí que $E\cap(x_0,1)$ es un subconjunto no vacío, propio, abierto y cerrado de $E\cap N(1,D)$. Por lo tanto $E\cap N(1,D)$ es disconexo.

Esto prueba que F es una biyección continua de $\mathfrak{M}_{S\subseteq T}$ en I^{k+2l} y ya que $\mathfrak{M}_{S\subseteq T}$ es compacto. De manera que F es un homeomorfismo.

CAPITULO II
LA HERRAMIENTA PRINCIPAL
(NIVELES DE WHITNEY Y DIMENSION)

Los mapeos de Whitney son una manera de "medir" el "tamaño" de los elementos de C(X), y además de ser una herramienta poderosa para estudiar la estructura de C(X), jugarán también un papel fundamental en el presente trabajo.

DEFINICION. Un *mapeo de Whitney* es una función continua con valores reales con dominio C(X), $\mu: C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

i) $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$.

ii) Si $A \subseteq B$ y $A \neq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Un *nivel de Whitney* para C(X) es un conjunto de la forma : $\mu^{-1}(t) = \{A \in C(X): \mu(A) = t\}$ donde μ es un mapeo de Whitney y $t \in [0, \mu(X)]$.

De alguna manera, podemos pensar que los niveles de Whitney agrupan a todos los elementos de C(X) con "medida" t.

Además, si S es una subgráfica de X, μ un mapeo de Whitney y $t\in[0,\mu(X)]$ entonces al conjunto $\mathfrak{M}_S \cap \mu^{-1}(t)$, lo denotaremos en lo sucesivo por $\mathfrak{M}_S(t)$. De acuerdo con la definición, $\mathfrak{M}_S(t)$ contendrá a los elementos $A\in C(X)$ con $S\subseteq A\subseteq Q(1,S)$, $A\cap N(1,S)$ conexo y $\mu(A) = t$.

La herramienta que más usaremos en este trabajo, es el resultado que dice los conjunto $\mathfrak{M}_S(t)$ tienen dimensión $\mathfrak{M}_S-1$, es decir, nos proporciona una manera concreta de calcular la dimensión de $\mathfrak{M}_S(t)$, ya que por el Teorema 1.1 tenemos una manera concreta de calcular la dimensión de $\mathfrak{M}_S$.

Una aclaración importante que tenemos que hacer aquí es la siguiente:

H. Kato afirma en [6] que el conjunto $\mathfrak{M}_S(t)$ es homeomorfo al cubo sólido de dimensión dim $\mathfrak{M}_S-1$. Afirma además que este hecho puede ser probado con ideas similares a las que usa R. Duda en su artículo [1]. Nosotros no hemos podido encontrar un homeomorfismo explícito entre $\mathfrak{M}_S(t)$ y el cubo sólido de dimensión dim $\mathfrak{M}_S-1$ a pesar de que tenemos una prueba completa del resultado respectivo de R. Duda (Teorema 1.1).

Quisimos que este trabajo fuera autocontenido y completo. Por esta razón, hemos completado los detalles del resultado de R. Duda en el Teorema 1.1. Si H. Kato nos hubiera ofrecido una prueba en su artículo o nosotros hubieramos podido probar su afirmación (la cual se resistió a varios esfuerzos serios que hicimos), el contenido de este artículo sería diferente.

Ya que nosotros estamos interesados principalmente en cuestiones de dimensión, finalmente lo que hacemos en este capítulo es probar que dim $\mathfrak{M}_s(t)$ = dim $\mathfrak{M}_s-1$.

La notación de lo siguiente hace referencia a lo descrito en el capítulo anterior .

Lo que dice el siguiente lema es que si $\Phi((c,d))$ está en el segmento que une a $\Phi((a,b))$ con $(1,1)$, entonces las preimágenes correspondientes bajo Φ, (a,b) y (c,d) cumplen con las desigualdades dadas, es decir, que el "orden" entre $\Phi((a,b))$ y $\Phi((c,d))$ se conserva entre los puntos (a,b) y (c,d).

<u>LEMA 2.1</u>: Sean (a,b) y (c,d) en T y $0\le t\le 1$, tales que $a+b<1$, $c+d<1$, y $\Phi((c,d)) = t\Phi((a,b))+(1-t)(1,1)$, entonces $a\le c$ y $b\le d$.

<u>PRUEBA</u>: Primero supondremos que $a+b\le {}^1/_2$ y que $c+d\le {}^1/_2$. Recordando la definición de Φ, tenemos que:
$\Phi((a,b)) = (2a,2b)$ si $a+b\le {}^1/_2$ y en este caso si suponemos que $\Phi(a,b) = (2a,2b)$ y $\Phi(c,d) = (2c,2d)$.
Como $\Phi(c,d) = t\Phi(a,b) + (1-t)(1,1)$ entonces se tiene que :
$(2c,2d) = t(2a,2b) + (1-t)(1,1)$, lo que implica que :
$2c = t2a + 1-t$ o que $2c-1 = (2a-1)t\ge 2a-1$ ya que se tiene que $2a-1\le 0$, por lo que $a\le c$.

Igualmente se prueba que $b\le d$.

Ahora, supongamos que $^1/_2 \le a+b$ y $^1/_2 \le c+d$.

Hacemos $Q = \Phi(c,d) = (c',d')$ y $P = \Phi(a,b) = (a',b')$.

De acuerdo con la definición de Φ,

$$\Phi(a,b) = \left(2b+\frac{a-b}{a+b},\ 2a+\frac{b-a}{a+b}\right) = (a',b') \text{ si } a+b \ge {}^1/_2 .$$

Despejando, obtenemos

$$a = \frac{(a'+b')(1-b')}{2(2-a'-b')} \text{ y } b = \frac{(a'+b')(1-a')}{2(2-a'-b')}$$

Similarmente

$$c = \frac{(c'+d')(1-d')}{2(2-c'-d')} \text{ y } d = \frac{(c'+d')(1-c')}{2(2-c'-d')}$$

Observemos que la única manera de que $c'+d' = 2$ es que $c' = d' = 1$ y esto implica que $c+d = 1$ lo cual es contrario a nuestra suposición. Así que estas expresiones para a, b, c y d están bien definidas.

Como $\Phi(c,d) = tP + (1,1) = (ta'+(1-t),\ tb'+(1-t))$, entonces $c' = ta'+(1-t)$ y $d' = tb'+(1-t)$.

De modo que

$$c = \frac{[ta'+(1-t)+tb'+(1-t)](1-(tb'+(1-t)))}{2[2-(ta'+(1-t))-(tb'+(1-t))]} \quad \text{y}$$

$$d = \frac{[ta'+(1-t)+tb'+(1-t)](1-(tb'+(1-t)))}{2[2-(ta'+(1-t))-(tb'+(1-t))]}$$

Luego, para demostrar que $a \leq c$, lo que tenemos que probar es que

$$\frac{(a'+b')(1-b')}{2(2-a'-b')} \leq \frac{[ta'+(1-t)+tb'+(1-t)](\ 1-(tb'+(1-t)))}{2\ [2-(ta'+(1-t)-(tb'+(1-t))]}$$

Pero, mediante simplificaciones, el lado derecho de la desigualdad anterior se convierte en $\frac{[t(a'+b')+2(1-t)](1-b')}{2[2-a'-b']}$

Luego , lo que hay que demostrar es que

$$\frac{(a'+b')(1-b)}{2(2-a'-b')} \leq \frac{[t(a'+b')+2(1-t)](1-b'))}{2(2-a'-b')}$$

Equivalentemente , hay que probar que

$a'+b' \leq t(a'+b')+2(1-t)$ o que

$a'+b' \leq [ta'+(1-t)]+[tb'+(1-t)]$

Pero como $0 \leq t \leq 1$, entonces $t-1 \geq 0$ y como $a' \leq 1$, tenemos que $a'(1-t) \leq 1-t$, de donde $a' \leq ta'+(1-t)$.

Por las mismas razones, $b' \leq tb'+(1-t)$, y por lo tanto, la desigualdad se cumple.

Análogamente, se demuestra que $b \leq d$.

Ahora veremos que el caso $^1/_2 < a+b$ y $^1/_2 \leq c+d$ no es posible. Supongamos, por el contrario, que se satisfacen estas desigualdades.

Sea $(a',b') = \Phi(a,b) = \left(2b+\frac{a-b}{a+b},\ 2a+\frac{b-a}{a+b}\right)$

Entonces, $a'+b' = 2a+2b>1$. Así que el punto $\Phi(c,d)$ es una combinación convexa de puntos en el semiplano $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x+y>1\}$ y como $\Phi(c,d) = (2c,2d)$, tenemos que $2c+2d>1$. Esta contradicción prueba nuestra afirmación.

Finalmente, analizaremos el caso $a+b\le{}^1/_2$ y ${}^1/_2<c+d$. Podemos suponer que $a\ne0$ o $b\ne0$, así que $a+b>0$.

En este caso, hacemos $t' = \dfrac{1}{2(1-a-b)}$, de donde $0<t\le1$. También hacemos $(e,g) = \left(\dfrac{2t'a+(1-t')}{2}, \dfrac{2t'b+(1-t')}{2}\right)$

Notemos que $e+g = {}^1/_2$ y que $\Phi(e,g) = t'\Phi(a,b)+(1-t')(1,1)$. Por lo que probamos en el primer caso, $a\le e$ y $g\le b$.

Sea $(c',d') = \Phi(c,d) = t(2a,2b)+(1-t)(1,1)$. Es fácil ver que $c'+d' = 2(c+d)>1$, así que $t(2a+2b-2)+2>1$. De manera que $2t(1-a-b)<1$ y $t<t'$. De aquí que $\Phi(c,d)$ está en el segmento que une a $\Phi(e,g)$ con $(1,1)$. Por el segundo caso, $e\le c$ y $g\le d$. Por lo tanto $a\le c$ y $b\le d$.

Esto concluye la prueba del lema.

El siguiente lema , es un lema técnico y se utiliza en la prueba del lema 2.3.

LEMA 2.2: Sean Z y Y continuos y $f:Z\longrightarrow Y$. Si para toda sucesión $(z_n)_n$ de Z que converge a z con $z\in Z$, existe una subsucesión $(z_{n_k})_k$ tal que $(f(z_{n_k}))_k$ converge a $f(z)$, entonces f es continua.

PRUEBA. Supongamos que f NO es continua en el punto $a\in Z$ Luego, existe $\varepsilon>0$ tal que para cada $\delta>0$ existe un $z\in X$ tal que $d_Y(f(x),f(a))\geq\varepsilon$ pero $d_Z(z,a)<\delta$ (aquí estamos denotando a la métrica en Z y en Y como d_Z y d_Y respectivamente).

Luego, para $\delta = 1, {}^1/_2, {}^1/_3, \ldots, {}^1/_n, \ldots$ existen $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$ elementos de Z tales que

$d_Y(f(z_n), f(a))\geq\varepsilon$ pero $d_Z(z,a)<{}^1/_n$.

Por construcción, tenemos que $(z_n)_n$ es una sucesión que converge a a y por hipótesis existe una subsucesión de ella $(x_{n_k})_k$ tal que $f(x_{n_k})$ converge a $f(a)$, pero esto es imposible, dado que $d_Y(f(x_n), f(a))\geq\varepsilon$ para toda n.

Esto termina la prueba del lema .

LEMA 2.3: Sea I un segmento de X (que pensaremos como el intervalo $[0,1]$), sean a^*, $a\in I$ tales que $0<a^*<a<1$ y μ un mapeo de Whitney con $0<t<\mu(X)$.

Sea además H una función continua, $H:Z\longrightarrow C(X)$ donde Z es un continuo tal que para todo $x\in Z$ existe un único $a(x)$ con $a^*\leq a(x)\leq a$ tal que $H(x)\cup[0,a(x)] \in C(X)$ y $\mu(H(x)\cup[0,a(x)]) = t$, entonces la función $\Psi:Z\longrightarrow C(X)$ dada por $\Psi(x) = H(x)\cup[0,a(x)]$ es una función continua.

PRUEBA : Sea $(x_n)_n$ una sucesión en Z convergente a $x \in Z$. Para cada x_n existe un único $a(x_n) \in [a^*, a]$ tal que

$\mu(H(x_n) \cup [0, a(x_n)]) = t$

Luego, la sucesión $(x_n)_n$ genera una sucesión $a(x_n)$ en el intervalo $[a^*, a]$ que, por ser cerrado, contiene entonces una subsucesión convergente $a(x_{n_k})_k$ a un punto $B \in [a^*, a]$.

Demostraremos que la sucesión $(\Psi(x_{n_k}))_k$ converge a $\Psi(x)$ y por el lema anterior se tendrá que Ψ es continua .

Notemos que :

H es continua, por lo que $(H(x_{n_k}))_k$ converge a $H(x)$ y por lo dicho anteriormente $a(x_{n_k})_k$ converge a B , y como tenemos que $\Psi(x_{n_k}) = H(x_{n_k}) \cup [0, a(x_{n_k})]$, entonces $\Psi(x_{n_k})_k$ converge a H $H(x) \cup [0, B]$.

Además, $\mu(\Psi(x_{n_k})) = t$ para todo k, y como μ es continua tenemos que $\mu(H(x) \cup [0, B]) = t$.

Pero por hipotesis, para cada x existe una única $a(x)$ tal que $\mu(H(x) \cup [0, a(x)]) = t$, luego, $a(x) = B$, de donde se tiene que $(\Psi(x_{n_k}))_k$ converge a $\Psi(x)$.

Con estos tres lemas se llega al siguiente teorema que es la herramienta principal de este trabajo.

Proporciona una manera de calcular la dimensión de los elementos de $\mathfrak{M}_s(t)$ en términos de la dimensión de $\mathfrak{M}_s$.

TEOREMA 2.1: Sea μ un mapeo de Whitney y S una subgráfica de X. Si t es tal que $\mu(S)<t<\mu(Q(1,S))$, entonces la dimensión de $\mathfrak{M}_S(t)$ en todos sus elementos es igual a dim $\mathfrak{M}_S$-1.

PRUEBA. Sea dim $\mathfrak{M}_S = n = k+21$. Demostraremos que dim $\mathfrak{M}_S(t) = n-1$ probando las desigualdades dim $\mathfrak{M}_S(t)\leq n-1$ y dim $\mathfrak{M}_S(t)\geq n-1$.

PASO 1. dim $\mathfrak{M}_S(t)\leq n-1$.

Para probar esta desigualdad, lo que haremos será encajar el conjunto $\mathfrak{M}_S(t)$ en un cubo de dimensión n-1, esto es, daremos una función inyectiva de $\mathfrak{M}_S(t)$ en I^{n-1}.

Para definirla, sea $F:\mathfrak{M}_S \longrightarrow I^n$ la función definida en la prueba del Teorema 1.1, y sea $M = F(\mathfrak{M}_S(t))$.

Luego, $M\subseteq I^n$ y además, $\mathbf{1}\notin M$ (Aquí, las negritas significarán vectores en I^n de tal manera que $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ya que si $\mathbf{1}\in M$, entonces existiría un elemento $A\in\mathfrak{M}_S(t)$ tal que $F(A) = \mathbf{1}$, pero $F(Q(1,S)) = \mathbf{1}$ entonces $A = Q(1,S)$ y ya que $\mu(A) = t$, entonces $\mu(Q(1,S)) = t$ lo que contradice nuestra suposición.

Ahora, definamos $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Por comodidad, escribiremos $f(\mathbf{x}) = \sum x_i$.

Observemos que como $1\notin M$, entonces $f(x)<n$ para todo $x\in M$.

Sea $k_0 = \text{Max}\{f(x): x\in M\}$. Este valor existe porque M es compacto y f evidentemente es continua. Notemos que $k_0<n$.

Elijamos $k\in\mathbb{R}$ tal que $k_0<k<n$ y definamos

$T = \{ x\in I^n: f(x) = \sum x_i = k\} \subseteq I^n$.

Definamos una función $g:M\longrightarrow T$ dada por

$g(x) = tx+(1-t)1$ donde $t = \dfrac{k-n}{\sum x_i - n}$

Entonces $t(\sum x_i)+(1-t)n = k$. De modo que $g(x)\in T$.

Como $k<n$ y $\sum x_i<n$, entonces $k-n<0$ y $\sum x_i-n<0$ de donde $0<t$. También $\sum x_i<k$, y por lo tanto, $\sum x_i-n<k-n$ de donde $t<1$. Luego $0<t<1$.

Lo que haremos ahora, será demostrar que

i) La función g es inyectiva y que

ii) $\dim T \leq n-1$.

i) Supongamos que $g(x) = g(y)$ donde con la notación del Teorema 1.1. Entonces tenemos que

$x = (a_1, \ldots, a_k, \Phi(b_1,1-c_1), \ldots,\Phi(b_l,1-c_l))$

$y = (d_1, \ldots, d_k, \Phi(e_1,1-f_1), \ldots,\Phi(e_l,1-f_l))$

Como $g(x) = g(y)$, se tiene que

$tx+(1-t)1 = t'y+(1-t')1$. Sin perder generalidad podemos suponer que $t<t'$. Entonces se obtiene que

$y = \dfrac{t}{t'}x+\left(1-\dfrac{t}{t'}\right)1$. Si $s=\dfrac{t}{t'}$, entonces $0<s<1$ y finalmente

$y = sx+(1-s)1$.

Comparando las coordenadas en esta última igualdad, tenemos $a_i = sd_i$ y $\Phi(e_j,1-f_j) = s\Phi(b_j,1-c_j)+(1-s)(1,1)$. De aquí que $a_i \le d_i$.

Si $e_j+1-f_j<1$ y $b_j+1-c_j<1$, el lema 2.1 implica que $b_j \le e_j$ y $1-c_j \le 1-f_j$ o $f_j \le c_j$. De modo que $[0,b_j]\cup[c_j,1] \subseteq [0,e_j]\cup[f_j,1]$.
En el caso en que $e_j+1-f_j = 1$, tenemos que $e_j = f_j$ y $\Phi(e_j,1-f_j) = (1,1)$. Entonces $(1,1) = \Phi(b_j,1-c_j)$ y $b_j+1-c_j = 1$. Por lo tanto $[0,b_j]\cup[c_j,1] = [0,1] = [0,e_j]\cup[f_j,1]$.
Similarmente, en el caso de que $b_j+1-c_j = 1$, se tiene que $[0,b_j]\cup[c_j,1] = [0,1] = [0,e_j]\cup[f_j,1]$. Por tanto, en todo caso, $[0,b_j]\cup[c_j,1] \subseteq [0,e_j]\cup[f_j,1]$.

Ahora, si A, B son elementos de $\mathfrak{M}_s(t)$ tales que $F(A) = x$ y $F(B) = y$, por las desigualdades anteriores, claramente tenemos que $A \subseteq B$ ya que

$A = S \cup [0,a_1]\cup\ldots\cup[0,a_k]\cup[0,b_1]\cup[c_1,1]\cup\ldots\cup[0,b_l]\cup[c_l,1]$

$B = S \cup [0,d_1]\cup\ldots\cup[0,d_k]\cup[0,e_1]\cup[f_1,1]\cup\ldots\cup[0,e_l]\cup[f_l,1]$

Como además, $\mu(A) = \mu(B) = t$, entonces $A = B$ y $x = y$ con lo que se prueba el primer inciso. Para terminar la prueba del primer paso , resta ver que $\dim T \le n-1$.

ii) Para mostrar que $\dim T \le n-1$, consideremos la función $h:T \longrightarrow I^{n-1}$ dada por $h(x) = (x_2,x_3, \ldots,x_n)$.

Es claro que h es inyectiva (pues $\sum x_i = k$) y continua, de donde $\dim T \le n-1$.

Finalmente, la función $h \circ g \circ F$ es inyectiva y va de $\mathfrak{M}_S(t)$ en I^{n-1}. Así el primer paso queda probado.

PASO 2: dim $\mathfrak{M}_S(t) \geq n-1$.

Para ver esta desigualdad, sean $A \in \mathfrak{M}_S(t)$ y $\varepsilon > 0$. Lo que haremos será probar que si $N = \mathfrak{M}_S(t) \cap B_\varepsilon(A)$, entonces N tiene dimensión mayor o igual a $n-1$, demostrando que N contiene una copia de I^{n-1}, es decir, daremos una función inyectiva y continua $\Psi : I^{n-1} \longrightarrow N$.

Lo que haremos será demostrar que muy cerca del elemento A, hay por lo menos n-1 maneras de "moverse" dentro del nivel de Whitney.

Sea $C \in N$ dado por

$$C = S \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} [0,a_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l} ([0,b_j] \cup [1-c_j]) \right)$$

Ya que por hipótesis $C \neq Q(1,S)$, entonces tenemos que para algún i o algún j, $a_i < 1$ o $b_j < 1-c_j$.

Supongamos, por ejemplo, que $a_1 < 1$. Podemos suponer que $a_1 > 0$, pues si $a_1 = 0$, podemos "alargar" un poco el segmento "recortando" un poco alguno de los otros segmentos (que existen pues $C \neq S$) para obtener un nuevo $A \in N$ para el cual $0 < a_1 < 1$. (Si $k = 0$ podemos repetir el argumento utilizando uno de los segmentos J_j).

Ahora, usando a C, definiremos un subcontinuo B con las siguientes características

i) $B \in N$ (B está cerca de A)

ii) Si $B = S \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} [0,u_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l} ([0,v_j] \cup [1-w_j]) \right)$

entonces $0 \leq u_i < 1$ y $v_j < 1-w_j$ para toda i y toda j.

Para definir a este B, utilizaremos al propio C.
Sea $1 < i \leq k$. Si $a_i < 1$, elegimos $u_i = a_i$.
Si $a_i = 1$, elegimos u_i "un poco menor" que 1.

Para $1 \leq j \leq l$, si $b_j < 1-c_j$, elegimos $v_j = b_j$ y $1-w_j = 1-c_j$.
Si $b_j = 1-c_j$, lo que tenemos es un segmento completo que intersecta a S en sus dos puntos terminales, y en este caso elegimos v_j "un poco menor" que $^1/_2$ y $1-w_j$ "un poco mayor" que $^1/_2$.
Aquí, lo que estamos haciendo es "abrir" el segmento a partir de la mitad de él.

Hasta ahora hemos achicado a C un poco. Ya que $0 < a_1 < 1$, podemos agrandar un poco el intervalo $[0,a_1]$, escogiendo un $u_1 < 1$ un poco mayor que a_1 de manera que $\mu(B) = t$.
Notemos que el encogimiento que hacemos de C en los primeros pasos debe ser suficientemente pequeño para que tengamos oportunidad de obtener el tamaño de t agrandando solo un poco a $[0,a_1]$. Otra restricción que tenemos que poner es que los movimientos sean tan pequeños de tal manera que el B resultante siga estando en $B_\varepsilon(A)$.

Ahora, como $H(A,B)<\varepsilon$, existe λ tal que $B_\lambda(B)\subseteq B_\varepsilon(A)$. Escogemos $\delta>0$ tal que

a) $\delta<\lambda$

b) $u_i+\delta<1$ y $v_j+\delta<1-w_j-\delta$ para todo i y toda j.

c) $\mu(S\cup[0,u_1-\lambda/2]\cup(\bigcup_{i=1}^{k}[0,u+\delta])) \cup (\bigcup_{j=1}^{l}([0,v_j+\delta]\cup[1-w_j-\delta,1])))<t.$

Esta δ existe por continuidad, pues si $\delta=0$ el conjunto resultante estaría contenido propiamente en B y tendría "medida" menor que t .

Finalmente definamos $\Psi:Z\longrightarrow N$ de la manera siguiente : Si $x = (x_2, \ldots, x_k, y_1, z_1, \ldots, y_l, z_l)\in Z$ entonces

$$\Psi(x) = S \cup [0,u_1(x)](\bigcup_{i=2}^{k} [0,u_i+x_i]) \cup (\bigcup_{j=1}^{l} ([0,v_j+y]\cup[1-w_j-z_j]))$$

donde $u_1-\lambda/2\leq u_1(x)\leq u_1$, en donde el valor $u_1(x)$ se elige de tal forma que $\mu(\Psi(x)) = t$.

Observemos que lo que hacemos es agregar un poco a todos los "segmentos sueltos" de B excepto al primero al que le reducimos lo que se necesite para obtener un elemento de tamaño t (en $\mu^{-1}(t)$).

Esto ultimo es posible pues, si le añadimos lo que indica Ψ a todos los segmentos excepto al primero, tenemos dos situaciones extremas para el primero

La primera es poner $[0,u_1-{}^{\lambda}/2]$ al primero, en este caso, por la condición c), la medida de lo que obtenemos es menor que t y, la segunda es poner $[0,u_1]$ al primero, en este caso, el conjunto que obtenemos contiene a B y entonces tiene medida mayor o igual que t. Todo esto justifica que exista un $u_1(x)$ para el que la medida sea exactamente t.

Es claro ahora que para terminar la prueba del teorema basta probar que Ψ es continua e inyectiva .

Pero esto es fácil, pues la inyectividad se sigue de la manera como está definida la función.

Por otro lado, la continuidad de Ψ se sigue claramente del Lema 2.3. Esto termina la demostración del teorema, haciendo $Z = [0,\delta]^{n-1}$.

CAPITULO III
COMO CALCULAR DIMENSIONES

Como lo apunta R. Duda, gracias al Teorema 1.1, tenemos una manera muy directa de calcular la dimensión de C(X) en cualquiera de sus elementos: Dado que $C(X) = \bigcup \{\mathfrak{M}_S : S \text{ es una subgráfica de } X\}$ por el lema 1.1 tenemos entonces:

$$\dim_{C(X)} A = \text{Máx } \{\dim \mathfrak{M} : A \in \mathfrak{M}_S\}$$

Por esta misma razón, para cualquier mapeo de Whitney μ y para $\mu(A) = t$, haciendo $\mathfrak{H} = \mu^{-1}(t)$, tenemos que

$$\dim_{\mathfrak{H}} A = \text{Máx } \{\dim \mathfrak{M}_S(t) : A \in \mathfrak{M}_S(t)\} \qquad (1)$$

Notemos que estamos definiendo la dimensión del mismo subcontinuo A en dos contextos distintos, es decir, en el nivel de Whitney y en el hiperespacio, y también notemos que el Teorema 2.1 nos dice que $\dim \mathfrak{M}_S(t) = (\dim \mathfrak{M}_S)-1$, siempre y cuando $\mu(S)<t<\mu(Q(1,S))$. En el caso de que $A = X$, $\mathfrak{H} = \{X\}$ y $\dim_{\mathfrak{H}} A = 0$.

Este caso no tiene ningún interés por lo que a partir de ahora supondremos que $A \neq X$.

Nuestro objetivo de aquí al final este capítulo será depurar la fórmula (1) para tener un algoritmo preciso para calcular $\dim_{\mathcal{G}} A$.

Antes que nada notemos que en el caso que $A \in \mathfrak{M}_S(t)$ y $A = S$, tenemos que $\mathfrak{M}_S(t) = \{A\}$ pues cualquier elemento de $\mathfrak{M}_S(t)$ debe de contener a $S = A$ y tener medida t. En este caso $\dim \mathfrak{M}_S(t) = 0$ y no aporta nada cuando se considera el máximo de las dimensiones.

Un razonamiento similar se aplica para el caso en que $A = Q(1,S)$. Esto nos conduce a

$$\dim_{\mathcal{G}} A = \text{Máx}\ \{\dim \mathfrak{M}_S(t) : A \in \mathfrak{M}_S(t),\ A \neq S \text{ y } A \neq Q(1,S)\}$$

Continuaremos probando algunos lemas auxiliares

<u>LEMA 3.1</u>: Si S y T son subgráficas tales que S contiene todos los vértices de T y $S \subseteq T$, entonces $\dim \mathfrak{M}_S \geq \dim \mathfrak{M}_T$.

<u>PRUEBA</u>: Primero observamos que $Q(1,S) = Q(1,T)$ ya que S y T tienen los mismos vértices.

Luego , si pensamos que existen r segmentos de T que no son segmentos de S ($r \geq 0$) y la expresión para $Q(1,S)$ es

$Q(1,T) = T \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} I_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l} J_j\right)$ entonces $T = S \cup \left(\bigcup_{h=1}^{r} L_h\right)$ y

donde además, estos segmentos L_h tienen que intersectar a S en sus dos puntos terminales (pues los vértices de T son los mismos que los vértices de S), luego

$$Q\ (1,S) = Q(1,T) = S \cup \left(\bigcup_{h=1}^{r} L_j \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} I_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l} J_j \right)$$

Luego, calculando las dimensiones (Teorema 1.1), tenemos:
$\dim \mathcal{M}_S = k+2(l+r) = k+2l+2r$ y
$\dim \mathcal{M}_T = k+2l$ y como $r \geq 0$ tenemos la desigualdad que queremos.

LEMA 3.2: Si $A \in \mathcal{M}_T(t)$, entonces existe una gráfica acíclica S tal que $A \in \mathcal{M}_S(t)$, $S \subseteq T$ y S tiene a todos los vértices de T.

PRUEBA: Si V es el conjunto de todos los vértices de T, un argumento parecido al de la prueba del lema 1.1 nos asegura la existencia de una subgráfica acíclica S con $S \subseteq T$ y S contiene a todos los vértices de T.

Resta probar que $A \in \mathcal{M}_S(t)$. Como $A \in \mathcal{M}_T(t)$ tenemos que $T \subseteq A \subseteq Q(1,T)$ de donde $S \subseteq A$ pues $S \subseteq T$.

Además notemos que $Q(1,S) = Q(1,T)$ y $N(1,S) = N(1,T)$ ya que tanto S como T tienen los mismos vértices. Así $A \subseteq Q(1,S) = Q(1,T)$ y $A \cap N(1,S) = A \cap N(1,T)$ es conexo.

Esto termina la prueba del lema.

LEMA 3.3: Sea $A \in \mathcal{M}_T(t)$, entonces existe una subgráfica interna S tal que $A \in \mathcal{M}_S(t)$, $S \subseteq T$ y $\dim \mathcal{M}_S \geq \dim \mathcal{M}_T$.

PRUEBA: Si T es interna no hay nada que probar.

Si T no es interna, consideremos a V como el conjunto de todos los vértices internos de T. Por un argumento parecido al de la prueba del lema 1.1, existe S tal que S es interna (contiene únicamente a los vértices de V) y $S \subseteq T$.

Notemos que aunque a S le faltan los vértices terminales de T, tenemos $Q(1,S) = Q(1,T)$ y $N(1,S) = N(1,T)$, de donde $A \in \mathfrak{M}_S(t)$.

Ahora, como $S \subseteq T$ podemos escribir $T = S \cup \left(\bigcup_{i=0}^{r} I_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{s} J_j \right)$ donde r y s NO son ambos cero (pues $S \neq T$ ya que T NO es interna).

Además, sea

$$Q(1,S) = S \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} I_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l} J_j \right)$$

Como $Q(1,S) = Q(1,T)$, llegamos a:

$$Q(1,T) = T \cup \left(\bigcup_{i=r+1}^{k} I_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=s+1}^{l} J_j \right)$$

Luego, al calcular las dimensiones (Teorema 1.1) tenemos que

$\dim \mathfrak{M}_S = k+2l$ y

$\dim \mathfrak{M}_T = (k-r)+2(l-s) = k+2l-(r+2s)$,

como $r+2s>0$, el lema está probado.

La combinación de los lemas 3.1 y 3.2 nos dice que para calcular la dimensión de un subcontinuo en su nivel de Whitney basta considerar subgráficas S tales que sean acíclicas, y el lema 3.3 nos dice que basta considerar subgráficas internas.

Con esto, llegamos finalmente a la <u>FORMULA PRINCIPAL</u>.

FORMULA PRINCIPAL : Si $A \in C(X)$, entonces

$$\dim_{\mathcal{H}} A = \text{Máx} \{\dim \mathfrak{M}_S - 1 : A \in \mathfrak{M}_S(t),\ A \neq S,\ A \neq Q(1,S),\ S \text{ interna y acíclica}\}$$

Esta fórmula nos da un algoritmo concreto y para calcular $\dim_{\mathcal{H}} A$. Las subgráficas S que satisfacen las condiciones de la fórmula son un número finito y para cada una de ellas, $\dim \mathfrak{M}_S$ se puede calcular de acuerdo al Teorema 1.1.

Un hecho que hay que resaltar es que este algorítmo no depende del mapeo de Whitney que se este utilizando.

Finalmente, señalamos que un problema muy interesante es el de determinar si este algoritmo funciona para cualquier continuo X (no necesariamente una gráfica finita), desde luego con los ajustes necesarios en la fórmula principal.

CAPITULO IV
COMPORTAMIENTO DE LA DIMENSION EN LOS NIVELES DE WHITNEY

En este capitulo final, utilizaremos la fórmula del capítulo anterior para probar seis resultados concernientes a los niveles de Whitney y su dimensión.

Recalcamos que utilizaremos la notación $\mathfrak{X} = \mu^{-1}(t)$ a lo largo de este caapítulo.

DEFINICIONES. Un nivel de Whitney $\mu^{-1}(t)$ se dice *chico* si $0<t<\min\ \{\mu(S)\text{: S es segmento de X}\}$.

Un nivel de Whitney $\mu^{-1}(t)$ se dice *grande* si $1>t>\text{Máx}\ \{\mu(S)\text{: S es subgráfica propia y NO vacía}\}$

Como consecuencia de [4], se tiene que todos los niveles chicos (moviendo inclusive el mapeo de Whitney) son homeomorfos y lo mismo ocurre con los niveles grandes

TEOREMA 4.1: Sea $\mu^{-1}(t)$ un nivel de Whitney chico de una gráfica finita conexa X, entonces

$$\dim \mu^{-1}(t) = \text{Máx}\ \{gr(v)-1\text{: v es vértice de X}\}$$

PRUEBA. Ya que dim $\mu^{-1}(t)$ = Máx $\{\dim_{\mathfrak{H}} A\colon A\in\mathfrak{H}\}$, haremos la demostración en dos pasos.

PASO 1. Se probará que si $A\in\mathfrak{H}$, entonces
$\dim_{\mathfrak{H}} A \leq$ Máx $\{gr(v)-1\colon v$ es vértice de $X\}$

Para ver esto, como $\mathfrak{H}$ es un nivel chico, A sólo puede contener a un vértice interior, pues si tuviera a dos, forzosamente tendría que tener un segmento.

Luego, por la fórmula principal, para calcular la dimensión de A en su nivel basta considerar las subgráficas $S = \emptyset$ y $S = \{v\}$ donde v es un vértice interno de X.

Notemos que en el segundo caso, dim $\mathfrak{M}_S-1 = gr(v)-1$ (Ver Teorema 1.1). Además, si $S = \emptyset$, dim $\mathfrak{M}_S-1 = 2-1 = 1$. Luego; $\dim_{\mathfrak{H}} A$ = Máx $\{1, gr(v)-1\colon v$ es vértice interno de $X\}$, de aquí, se sigue la desigualdad:
$\dim_{\mathfrak{H}} A \leq$ Máx $\{gr(v)-1\colon v$ es vértice de $X\}$.

PASO 2. Aquí se demostrará que si v es un vértice de X entonces existe $A\in\mathfrak{H}$ tal que $\dim_{\mathfrak{H}} A \geq gr(v)-1$.

Sea entonces $\{v\}\in C(X)$. Como C(X) es conexo por trayectorias, existe un subcontinuo A tal que $\{v\}\subseteq A\subseteq N(1,\{v\})$ y con $A\in\mathfrak{H}$ (es claro que $A \neq \{v\}$ y $A \neq Q(1,\{v\})$.

Luego, si $S = \{v\}$ entonces $\dim \mathfrak{M}_s - 1 = gr(v)-1$ y como por la fórmula principal tenemos que

$\dim_{\mathfrak{H}} A = \text{Máx}\{\dim \mathfrak{M}_s - 1\colon A \in \mathfrak{M}_s(t),\ S * A,\ A * Q(1,S),\ S$ interna y acíclica$\}$

claramente se tiene que $\dim_{\mathfrak{H}} A \geq gr(v)-1$.

De los dos pasos , se sigue claramente el Teorema .

Antes de enunciar el Teorema 4.2 necesitaremos el siguiente concepto.

<u>DEFINICION</u>. Una gráfica finita conexa X se llama araña si y sólo si tiene uno y sólo un vértice interno .

<u>TEOREMA 4.2</u>. X es una araña si y sólo si todos los niveles de Whitney tienen la misma dimensión.

<u>PRUEBA</u>. ($\Rightarrow$) Sea X una araña y w su vértice interno. Si S es una subgráfica interna y acíclica de X, tenemos dos posibilidades:

i) $S = \emptyset$, en cuyo caso $\dim \mathfrak{M}_s = 2$.

ii) $S = \{w\}$, en cuyo caso $\dim \mathfrak{M}_s = gr(w)$.

Como $gr(w) \geq 3$, en cualquier caso tenemos que $\dim \mathfrak{M}_s \leq gr(w)$ y de donde $\dim \mathfrak{M}_s - 1 \leq gr(w)-1$

Por la manera de calcular dimensiones en la fórmula principal tenemos que $\dim \mathfrak{H} \leq gr(w)-1$.

Para probar la otra desigualdad elegimos, para cualquier nivel $\mathfrak{H}$, un subcontinuo A tal que $w \in A$.

Supongamos que la araña es de la forma

$$X = \left(\bigcup_{i=0}^{k} I_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{l} J_j\right)$$

donde los I_i's son segmentos con un extremo distinto de w y los J_j's son rizos con vértice w, entonces

$A \cap I_i \neq \{w\}$ y $A \cap J_j \neq \{w\}$.

Luego, $A \in \mathfrak{M}_{(w)}(t)$ y $A \neq \{w\}$ y $A \neq Q(1,\{w\}) = X$, de donde $\{w\}$ es de las subgráficas que intervienen en la fórmula de $\dim_{\mathfrak{H}} A$, así que $\dim \mathfrak{H} \geq \dim_{\mathfrak{H}} A \geq gr(w)-1$.

Por tanto cualquier nivel tiene dimensión igual a $gr(w)-1$.

($\Leftarrow$) Procederemos por contradicción. Sea v el vértice de X tal que $gr(v) = \text{máx}\{gr(u)\colon u \text{ es vértice de } X\}$. Sabemos por el Teorema 4.1 que la dimensión de cualquier nivel chico y por nuestra hipótesis, de cualquier nivel es igual a $gr(v)-1$.

Como estamos suponiendo que X no es una araña, existe otro vértice interno q de X, Trazando un arco de q a v, el último vértice w antes de llegar a v es un vértice interno diferente de v.

Sea S un segmento que una a w con v. Notemos que $S \neq X$. Elegimos $A \in C(X)$ tal que $S \subseteq A \subseteq N(1,S)$, $A \neq S$ y sea $t = \mu(A)$. Entonces

$\dim_{\mathfrak{A}} A \geq \dim \mathfrak{M}_S - 1$. Del Teorema 1.2 se sigue fácilmente que $\dim \mathfrak{M}_S(t) = (gr(v)-1)+(gr(w)-1) \geq gr(v)-1+2$. Así que $\dim \mathfrak{A} \geq gr(v)$ lo que es una contradicción.

Esto termina la prueba del Teorema.

Antes de enunciar el siguiente resultado, probaremos una serie de lemas.

Notemos que el siguiente lema puede interpretarse diciendo que si a una subgráfica S (interna y acíclica) se le añaden segmentos hasta llegar a otra interna y acíclica T, entonces la dimensión es mayor, es decir, se "gana" dimensión.

<u>LEMA 4.1</u>. Si T es una subgráfica interna y acíclica y S es una subgráfica tal que $S \subseteq T \neq S$, entonces

$$\dim \mathfrak{M}_S < \dim \mathfrak{M}_T$$

<u>PRUEBA</u>. Basta demostrar este hecho para $T = S \cup L$ donde L es un segmento de X con extremos v y w que intersecta a S en sólo uno de sus extremos, digamos en v.

Ponemos

$$Q(1,T) = T \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} I_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l} J_j \right)$$

Supongamos que w está en los primeros k' segmentos I's y en los primeros l' segmentos J's de los cuales los l'' primeros son rizos en w. Luego

$$Q(1,S) = S \cup [(\bigcup_{i=k'+1}^{k} I_i) \cup (\bigcup_{j=l''+1}^{l'} J_j)] \cup [\bigcup_{j=l'+1}^{l} J_j]$$

donde los segmentos del primer corchete intersectan a S en solo uno de sus extremos y los segmentos del segundo corchete intersectan a S en sus dos extremos, luego por el Teorema 1.1

$$\dim \mathfrak{M}_S = 1+k-k'+l'-l''+2(l-l')$$
$$= k+2l + (1-k'-l'-l'')$$

mientras que

$$\dim \mathfrak{M}_T = k+2l$$

Para terminar la prueba del lema, probaremos que $1-k'-l'-l''\leq -1$ o equivalentemente $k'+l'+l'' \geq 2$.

Sea K un segmento con un extremo en w y K $\neq$ L (éste existe pues w es vértice interno).
Observamos que K no está contenido en T, pues si lo estuviera, entonces también estaría contenido en S lo que implicaría que w es elemento de S, lo que no sucede.

Si K es un rizo , entonces $l' \geq l'' \geq 1$, así que $l'+l''\geq 1$, de donde $k'+l'+l'' \geq 2$.

Si K NO es un rizo, entonces existe un segmento K' distinto de K y L tal que w es uno de sus extremos (pues $gr(w) \geq 3$).

Si K' es un rizo, caemos en el caso anterior.

Si K' no es un rizo, entonces K y K' no son rizos, pero intersectan a T en w. Luego

i) Si K y K' intersectan a T sólo en w, entonces $k' \geq 2$.

ii) Si alguno de los segmento K y K' intersecta a T en otro punto diferente de w y el otro no , entonces $k' \geq 1$ y $l' \geq 1$.

iii) Finalmente, si K y K' intersectan a T en dos puntos distintos de w, entonces $l' \geq 2$.

De cualquier manera, se tiene que $k'+l'+l'' \geq 2$.

Una consecuencia más o menos inmediata de este lema es el hecho siguiente:

Si T es una subgráfica interna y acíclica entonces $\dim_{C(X)} T = \dim \mathfrak{M}_T$.

<u>LEMA</u> <u>4.2</u>. Sea T una subgráfica interna y acíclica y sea $S \subsetneq T$ una subgráfica tal que $T-S$ consta de un segmento L.
Entonces $T \subseteq Q(1,S) \neq T$.

<u>PRUEBA</u>. Supongamos que $T = S \cup L = Q(1,S)$. Afirmamos que existen dos vértices terminales u y v de S que son internos de X ya que la única gráfica que tiene un solo vértice terminal v es la gráfica $S = \{v\}$ y $T = Q(1,S)$ debería de contener al menos tres segmentos pues el grado de v es mayor o igual a tres.

Luego, como u y v son internos existen segmentos M y N que tienen como extremos a u y a v respectivamente, de donde M y N NO están contenidos en S.

Si $M = N$, tenemos que u y v son adyacentes, como S es conexa existe una trayectoria $R \subseteq S$ que une a u con v.
Luego, $R \cup M$ es un ciclo contenido en $T = Q(1,S)$, lo que va en contra de la suposición de que T es acíclica.

Si $M \neq N$, al menos uno de ellos, digamos M, es distinto de L y $M \subseteq Q(1,S)$ y M no está contenido en T.

Por tanto $T \subseteq Q(1,S) \neq T$.

<u>LEMA 4.3</u>. Si A es una subgráfica interna y acíclica, entonces
$\dim_{\mathfrak{G}} A$ = Máx $\{\dim \mathfrak{M}_S - 1$: S es una subgráfica de A y A-S es un segmento que tiene un vértice terminal en A$\}$.

<u>PRUEBA</u>. Por la fórmula principal tenemos que
$\dim_{\mathfrak{G}} A = \text{máx}\, \{\dim \mathfrak{M}_S - 1\colon A \in \mathfrak{M}_S(t),\ A \neq S,\ A \neq Q(1,S),$ S es interna y acíclica$\}$

Luego lo que hay que probar es la igualdad entre los máximos de la fórmula principal y el que dice el lema .

El máximo del renglón de arriba es menor o igual al del renglón de abajo, pues las subgráficas S que se utilizan en el renglón de arriba se utilizan tambien en el de abajo (Lema 4.2).

Para probar la otra desigualdad, basta observar que si S es una subgráfica de las del renglón de abajo, se le pueden añadir segmentos hasta llegar a una subgráfica de las del renglón de arriba, y por el lema 4.1, se gana dimensión, con lo que se termina la prueba del lema .

LEMA 4.4. Si A es una subgráfica interna y acíclica, entonces $\dim_{\mathfrak{A}} A = \dim \mathfrak{M}_A - \min\{gr(v)-2\colon v \text{ es vértice terminal de } A\}-1$.

PRUEBA. Sea S una subgráfica de A tal que A-S consta de un segmento L que tiene un punto terminal v de A con $v \notin S$.

Probaremos primero que $\dim \mathfrak{M}_S = \dim \mathfrak{M}_A-(gr(v)-2)$

Para esto, sea

$$Q(1,A) = A \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k_1} I_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=k_1+1}^{k} I_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l_1} J_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=l_1+1}^{l_2} J_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=l_2+1}^{l} J_j\right).$$

donde los primeros k_1 segmentos I's tienen a v como uno de sus extremos, los primeros l_1 segmentos J's tienen a v tambien como uno de sus extremos y no son rizos y los siguientes l_2-l_1 segmentos J's son rizos con vértice en v, luego tenemos que

$gr(v) = k_1+l_1+2(l_2-l_1)+1$ donde este último 1 se añade por el segmento L.

Notemos que $\dim \mathcal{M}_A = k+2l$.

Además, como $S \cup L = A$ y $v \notin S$, tenemos que

$$Q(1,S) = S \cup L \cup \Big(\bigcup_{i=k_1+1}^{k} I_i \Big) \cup \Big(\bigcup_{j=0}^{l_1} J_j \Big) \cup \Big(\bigcup_{j=l_2+1}^{l} J_j \Big)$$

de donde

$$\dim \mathcal{M}_S = k-k_1+l_1+2(l-l_2)+1.$$

Luego, recapitulando, tenemos que

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}_A-(gr(v)-2) &= k+2l-(k_1+l_1+2(l_2-l_1)+1-2) \\ &= k-k_1+l_1+2(l-l_2)+1 \\ &= \dim \mathcal{M}_S \end{aligned}$$

Ahora, por el lema anterior,

$$\dim_{\mathcal{G}} A = \text{Máx } \{\dim \mathcal{M}_S-1\text{: } S \text{ es una subgráfica de } A \text{ y } A-S \text{ es un segmento que tiene un vértice terminal de } A\}$$

Por lo que hemos probado, tenemos que

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{G}} A &= \text{Máx } \{\dim(\mathcal{M}_A-(gr(v)-2)-1\text{: } v \text{ es vértice terminal de } A\} \\ &= \dim \mathcal{M}_A + \text{Máx } \{-(gr(v)-2)\text{: } v \text{ es vértice terminal de } A\}-1 \\ &= \dim \mathcal{M}_A - \min \{gr(v)-2\text{: } v \text{ es vértice terminal de } A\}-1 \end{aligned}$$

Esto termina la prueba del lema.

<u>LEMA</u> <u>4.5</u>. Si $A = Q(1,S)$ para alguna subgráfica S acíclica, entonces existe una subgráfica acíclica T tal que $A \in \mathcal{M}_T(t)$, $T \subseteq A$, $A \subseteq Q(1,T) \neq A$ y $\dim \mathcal{M}_T \geq \dim \mathcal{M}_S$.

PRUEBA. Sea L un segmento de X tal que al menos uno de sus extremos, llamémosle v, pertenece a A pero L no es segmento de A.

Es claro que $v \notin S$ pues de lo contrario L estaría contenido en Q(1,S) que es igual a A. Escribamos

$$A = S \cup \left(\bigcup_{i=0}^{k} I_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{l} J_j \right)$$

Ya que v es un vértice de A que no pertenece a S, tenemos que v pertenece a algún I_i, digamos a I_1.

Definamos entonces $T = S \cup I_1$. Claramente T es una subgráfica conexa y acíclica. Además, $T \subseteq A \subseteq Q(1,T)$ y la ultima contención es propia, pues $L \subseteq Q(1,T)$ y L no está contenido en A.

Por el teorema 1.1, tenemos que $\dim \mathfrak{M}_S = k+2l$, y para calcular la de T tenemos que

$$Q(1,T) = S \cup I_1 \cup \left(\bigcup_{i=2}^{k} I_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{l} J_j \right) \cup L \cup \{L_v\text{'s}\}.$$

Donde los L_v's representan segmentos que tienen como extremo a v, no están contenidos en A y son diferentes de L, (podría no haber ningún L_v).

Usando nuevamente el teorema 1.1 , tenemos que

$\dim \mathfrak{M}_T = (k-1)+2l+r+$(lo que aportan los L_v's), donde r es lo que aporta L que puede ser 1 o 2 dependiendo de si L es segmento o es un rizo.

En cualquier caso $\dim \mathfrak{M}_T \geq \dim \mathfrak{M}_S$.

Para terminar esta demostración, sólo nos falta probar que $A \in \mathfrak{M}_T$ y para esto, sólo falta ver que $A \cap N(1,T)$ es conexo.

Sabemos que $A \cap N(1,S)$ es conexo y que v está en la cerradura de $A \cap N(1,S)$, de manera que $(A \cap N(1,S)) \cup \{v\}$ es conexo.

Veremos que $A \cap N(1,T) = (A \cap N(1,S)) \cup \{v\}$.

Claramente, el segundo conjunto está contenido en el primero. Para probar la otra contención, sea $p \in A \cap N(1,T)$. Si p es un vértice como $p \in N(1,T)$, p tiene que ser vértice de T y entonces $p \in S \cup \{v\}$. Si p no es vértice, como $p \in A$ y $A = Q(1,S)$, entonces $p \in N(1,S)$ y este ultimo conjunto está contenido en $(A \cap N(1,S)) \cup \{v\}$.

Esto prueba la igualdad de los conjuntos.

Por tanto $A \cap N(1,T)$ es conexo.

Esto acaba la prueba del lema .

Con estos lemas estamos listos para el siguiente resultado.

En una primera impresión podría parecer que $\dim_{C(X)} A - 1 = \dim_{\mathfrak{H}} A$ para todo $A \in C(X)$ y entonces la dimensión de A en su nivel de Whitney estaría plenamente determinada por su dimensión en C(X).

Sin embargo, esta igualdad no siempre es cierta. El siguiente resultado caracteriza completamente a los pocos elementos de C(X) donde no se vale.

TEOREMA 4.3. Sea $A \in C(X)$. entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) A es una subgráfica interna y acíclica.

b) $\dim_{\mathfrak{G}} A \neq \dim_{C(X)} A-1$.

c) $\dim_{\mathfrak{G}} A < \dim_{C(X)} A-1$.

PRUEBA. Es claro que $\dim_{\mathfrak{G}} A \leq \dim_{C(X)} A-1$, pues las subgráficas que se utilizan en la fórmula principal para calcular la dimensión de la izquierda, se utilizan en particular para la dimensión de la derecha.

De esta desigualdad tenemos que b) y c) son equivalentes por lo que basta con que probemos las equivalencias entre a) y c).

a) $\Rightarrow$ c). Si A es una subgráfica interna y acíclica, por el lema anterior y por la consecuencia del lema 4.1 tenemos que:

$\dim_{\mathfrak{G}} A = \dim_{C(X)} A - \min \{gr(v)-2\colon v \text{ es vértice terminal de } A\} - 1$.

Luego basta probar que

$\min \{gr(v)-2\colon v \text{ es vértice terminal de } A\} \geq 1$, pero esto es claro, ya que como A es interna y $v \in A$, entonces v es vértice interno de X de donde $gr(v) \geq 3$ y $gr(v)-2 \geq 1$, de donde se sigue inmediatamente la desigualdad .

c) $\Rightarrow$ a). Supongamos que A no es una subgráfica, luego, si $A \in \mathfrak{M}_S$ podemos decir que entonces $A \in \mathfrak{M}_S(t)$ y $A \neq S$, $A \neq Q(1,S)$, de donde

$\dim_{C(X)} A = \text{Máx } \{\dim \mathfrak{M}_S : A \in \mathfrak{M}_S\}$

$\dim_{C(X)} A\text{-}1 = \text{Máx } \{\dim \mathfrak{M}_S\text{-}1 : A \in \mathfrak{M}_S\}$ y

$$\begin{aligned}\dim_{C(X)} A\text{-}1 &= \text{Máx } \{\dim \mathfrak{M}_S\text{-}1 : A \in \mathfrak{M}_S(t),\ A \neq S \text{ y } A \neq Q(1,S)\} \\ &= \dim_{\mathfrak{X}} A.\end{aligned}$$

Esto es una contradicción. Por lo tanto A debe ser una subgráfica.

Si A NO fuera interna, tendría un vértice terminal v de X al cual podemos pensar contenido en un segmento I_1.
En este caso probaremos que $\dim_{\mathfrak{X}} A = \dim_{C(X)} A\text{-}1$, de donde se seguirá que A debe ser interna .

Para probar que $\dim_{\mathfrak{X}} A \geq \dim_{C(X)} A\text{-}1$, es suficiente probar que para cada S tal que $A \in \mathfrak{M}_S$, existe una subgráfica T con $A \in \mathfrak{M}_T$, donde $A \neq T$, $A \neq Q(1,T)$ y además se tiene que $\dim \mathfrak{M}_T \geq \dim \mathfrak{M}_S$.

Sea entonces S tal que $A \in \mathfrak{M}_S$. Si $A \neq S$ y $A \neq Q(1,S)$, NO hay nada que hacer.

Si $A = S$, entonces sea T la subgráfica que resulta de S al quitarle el segmento I_1. Luego, $S = T \cup I_1$. Además

$$Q(1,T) = T \cup I_1 \cup \left(\bigcup_{i=2}^{k} I_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{l} J_j \right)$$

$$Q(1,S) = S \cup \left(\bigcup_{i=2}^{k} I_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l} J_j \right)$$

De aquí, se sigue inmediatamente que $\dim \mathfrak{M}_T \geq \dim \mathfrak{M}_S$.

Además, es claro que $A \neq T$ y $A \neq Q(1,T)$, ya que si $A = Q(1,T) = Q(1,S)$ entonces $S = Q(1,S)$ lo que implicaría que $S = X$ y desde hace mucho descartamos la posibilidad de que $A = X$.

También tenemos que $A \in \mathfrak{M}_T$ pues $S \subseteq A$ y $A \subseteq Q(1,T)$ y como $A \cap N(1,T)$ es igual a $A \cap N(1.S)$, entonces $A \cap N(1,T)$ es conexo.

Si $A = Q(1,S)$, elegimos un punto w en la frontera de A. Notemos que w debe ser un vértice interno de X y $w \notin S$.

Sea L un segmento que tiene a W como uno de sus extremos y el otro de sus extremos en S. Definamos $T = S \cup L$.

Primero observamos que $A \neq Q(1,T)$, pues existen segmentos que llegan a w y no están contenidos en S. Podemos suponer también que $A \neq T$, pues si $A = T$ aplicamos el argumento anterior.

Además, observemos que $N(1,S) \subseteq A \cap N(1,T) \subseteq A \subseteq Q(1,S)$. Como $Q(1,S)$ es la cerradura de $N(1,S)$ y ambos son conjuntos conexos entonces $A \cap N(1,T)$ es conexo, de donde es claro que $A \in \mathfrak{M}_T$.

Para terminar esta parte del teorema basta checar que $\dim \mathfrak{M}_S \leq \dim \mathfrak{M}_T$.

Para ello, sea $Q(1,S) = S \cup L \cup \left(\bigcup_{i=2}^{k} I_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{l} J_j \right)$ y

$$Q(1,T) = T \cup \left(\bigcup I_i \right) \cup \left(\bigcup J_j \right) \cup \{\text{Segmentos que llegan a } w \text{ distintos de } L\}$$

Este ultimo conjunto debe de contener por lo menos a dos segmentos no contenidos en A, pues w es vértice interno. Luego, si pensamos que este conjunto contribuye a la dimensión con $s\geq 2$, tenemos que

$\dim \mathfrak{M}_S = k+2l$ y $\dim \mathfrak{M}_T = (k-1)+2l+s$ de aquí se obtiene lo que se quiere.

Luego, A tiene que ser interna.

Si A no fuera acíclica, existiría un segmento $L\subseteq A$ tal que $A-L$ es una subgráfica conexa. Aquí, igualmente probaremos que $\dim_{\mathfrak{H}} A = \dim_{C(X)} A-1$ y para ello será suficiente probar que para cada S tal que $A\in\mathfrak{M}_S$ existe una subgráfica T con $A\in\mathfrak{M}_T$, $A \neq T$, $A \neq Q(1,T)$ y $\dim \mathfrak{M}_S\leq\dim\mathfrak{M}_T$.

Sea entonces S tal que $A\in\mathfrak{M}_S$. Si $A \neq S$ y $A \neq Q(1,S)$ no tenemos nada que probar.

Si $A = S$, definamos $T = S-L$. Notemos que $T\subseteq S$ y T contiene a todos los vértices de S, luego por el Lema 3.1 tenemos que $\dim \mathfrak{M}_S\leq\dim \mathfrak{M}_T$.

Notemos que como S y T tienen los mismos vértices, entonces se tiene $N(1,S) = N(1,T)$ y $Q(1,S) = Q(1,T)$. De aquí, es claro que $A\in\mathfrak{M}_T$.

Claramente $A \neq T$. También $A \neq Q(1,T)$ pues si $A = Q(1,T)$, se tendría $A = S = Q(1,S) = Q(1,T)$ y esto implicaría que $A = X$, pero este es un caso ya descartado.

Si $A = Q(1,S)$, el argumento es similar al dado para demostrar que A es interna.

Esto implica que A debe ser acíclica, y el teorema queda probado.

Antes de nuestro siguiente resultado, probaremos un lema.

<u>LEMA 4.6</u>. Sea S una subgráfica interna y acíclica y r un número positivo tal que $\mu(S)<r<\mu(Q(1,S))$, entonces $\mathfrak{M}_s(r) \neq \emptyset$.

<u>PRUEBA</u>. Notemos que $\mathfrak{M}_s$ es conexo, luego como μ es continua, se tiene que $\mu(\mathfrak{M}_s)$ es conexo en $\mathbb{R}$.

Si además $\mu(S)<r<\mu(Q(1,S))$, entonces por el Teorema del valor intermedio existe $B\in\mathfrak{M}_s$ tal que $\mu(B) = r$. Esto termina la prueba del lema.

Despues de este lema llega el cuarto resultado.

<u>TEOREMA 4.4</u>: Si $t<r<\mu(X)$, entonces $\dim \mu^{-1}(t) \leq \dim \mu^{-1}(r)$.

<u>PRUEBA</u> : Sean $\mathfrak{A} = \mu^{-1}(t)$ y $\mathfrak{B} = \mu^{-1}(r)$. De la fórmula principal se sigue que $\dim \mathfrak{A}$ es finita, así que existe $A\in\mathfrak{A}$ tal que
$\dim \mathfrak{A} = \dim_{\mathfrak{A}} A$. Sea S una subgráfica interna y acíclica de X tal que $\dim_{\mathfrak{A}} A = \dim \mathfrak{M}_s - 1$ y $A\in\mathfrak{M}_s(t)$.

Analizaremos dos casos :

CASO i) Si $r<\mu(Q(1,S))$, entonces por el lema 4.6 existe $B\in\mathfrak{M}_S(r)$, de donde:

$$\dim \mathcal{B} \geq \dim_{\mathcal{B}} B \geq \dim \mathfrak{M}_S - 1 = \dim_{\mathcal{H}} A = \dim \mathcal{H}.$$

CASO ii) Sea $r \geq \mu(Q(1,S))$. En este caso, consideremos una subgráfica maximal fina T para X tal que $S\subseteq T$ y donde además T se consigue de S añadiendo a S segmentos L_1, L_2, ..., L_{n-1} hasta obtener T, es decir, estamos formando subgráficas S_1, S_2, ..., $T = S_n$ con $S_1 = S\cup L_1$, $S_2 = S_1\cup L_2$, ..., $T = S_n = S_{n-1}\cup L_{n-1}$, y donde cada S_i es interna y acíclica.

Por el lema 4.1, tenemos que:

$$\dim \mathfrak{M}_T > \dim \mathfrak{M}_{S_{n-1}} > \ldots > \dim \mathfrak{M}_{S_2} > \dim \mathfrak{M}_{S_1}$$

Sea $S_0 = S$ y sea $j = \text{Máx}\left\{i\in\{0, 1, \ldots, n\}: r\geq\mu(Q(1,S_i))\right\}$

Notemos que $\mu(Q(1,T)) = \mu(X)>r$ así que $j<n$. Entonces $\mu(Q(1,S_j)) \leq r < \mu(Q(1,S_{j+1}))$.

Por el lema 4.2, S_{j+1} está contenido propiamente en $Q(1,S_j)$, así que $\mu(S_{j+1}) < r < \mu(Q(1,S_{j+1}))$ y entonces el argumento se sigue como en el caso i).

Esto termina la prueba del teorema .

Nuestro siguiente resultado es :

TEOREMA 4.5: Las únicas gráficas finitas conexas X que tienen al disco como nivel de Whitney son el triodo y la paleta.

PRUEBA: Sea t tal que $\mu^{-1}(t)$ es el disco. Como el disco tiene dimensión dos, por el teorema anterior los niveles chicos deberán tener dimensión dos ó uno .

Pero si los niveles chicos tienen dimensión uno, por el Teorema 4.1, no hay vértices internos, luego X sería el intervalo o la circunferencia, pero los niveles chicos en estos casos no son discos (Ver [12] Teoremas 14.6 y 14.7).

Luego , esto implica que los niveles chicos tienen dimensión dos y por el mismo teorema 4.1, el grado de todos los vértices internos es tres .

Llamemos L_1, L_2, ..., L_n a todas las aristas sin puntos terminales de X, es decir, a aquellas aristas que unen vértices internos .

Aquí, afirmamos que $\mu(L_1) = \ldots = \mu(L_n) = t$.

Para probar esta afirmación procederemos por contradicción. Si para alguna i, $\mu(L_i)<t$, elegimos s con $\mu(L_i)<s<t$ y s "muy cercano" a $\mu(L_i)$ de tal manera que exista $A\in\mu^{-1}(s)$ y $L_i\subseteq A\subseteq N(1,L_i)$.

Si llamamos p a un vértice de L_i tendremos que $\dim \{p\}-1 < \dim L_i-1$ pues por el Lema 4.1, añadir segmentos a subgráficas acíclicas se gana en dimensión.

Luego, como $A\in\mathfrak{M}_{L_i}(s)$ tenemos que

$\dim \mu^{-1}(s) \geq \dim_{\mu^{-1}(s)} A \geq \dim \mathfrak{M}_{L_i} - 1 > \dim \mathfrak{M}_{(p)} - 1 \geq 2.$

Esta última desigualdad se dá, porque p es vértice interno. Luego $2 < \dim \mu^{-1}(s)$ y como $s<t$ por el Teorema 4.4 tenemos que: $\dim \mu^{-1}(s) \leq \dim \mu^{-1}(t)$ de donde $2<\dim \mu^{-1}(t)$, lo cual es una contradicción.

Si para alguna i, $\mu^{-1}(t)>t$, elegimos $A\subseteq L_i$ y A no contiene a ningún extremo de L_i. Como $A\in\mu^{-1}(t)$, se debe tener que $\dim_{\mu^{-1}(t)} A$ es igual a 2, pero la única subgráfica S tal que $A\in\mathfrak{M}_S$ es $S = \emptyset$, de donde $\dim_{\mu^{-1}(t)} A = \dim \mathfrak{M}_{\emptyset} - 1 = 1$, lo cual es una contradicción.

Ahora, si $\mathfrak{A} = \mu^{-1}(t)$, sea $\mathcal{B} = \mathfrak{A} - \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$. Definamos los conjuntos $B_i = \{A\in\mathcal{B}\colon v_i\in A\}$, donde v_i denota un vértice interno de X .

Demostraremos que estos conjunto B_i's, son no vacíos, cerrados y disjuntos dos a dos, de donde resultará que el conjunto $\mathcal{B}$ es no conexo y de donde tendremos una contradicción con el hecho de que si al disco se le quita un número finito de puntos, el conjunto resultante es conexo.

Con esto , se demuestra que no pueden existir tales aristas L's, de donde no puede haber más de un vértice interno y por lo tanto las únicas gráficas posibles son el triodo y la paleta.

Los conjuntos B_i's son cerrados, pues la propiedad de pertenencia es cerrada.

Los conjuntos B_i's son no vacíos, pues $C(X)$ es conexo por trayectorias y basta conectar por una trayectoria al subcontinuo $\{v_i\}$ con X para obtener un subcontinuo A con $\mu(A) = t$ y $v_i \epsilon A$.

Finalmente los conjuntos B_i's son disjuntos dos a dos pues si para algún subcontinuo A se tiene que $A \epsilon B_i \cap B_j$, entonces tanto v_i como v_j pertenecen a A, de donde A contiene propiamente por lo menos a un segmento L_i y como $\mu(L_i) = t$ entonces $\mu(A)>t$, lo que no sucede.

Esto termina la prueba del Teorema.

Despues de este resultado, surge de manera natural la siguiente pregunta:

¿Un poliedro fijo solo puede ser nivel de Whitney de un número finito de gráficas?

Observemos que nuestro Teorema 4.5 responde afirmativamente a la pregunta en el caso en que el poliedro es el disco.

Aquí conviene recordar que lo que R. Duda probó en [1] y [2] fué que si se tiene una dimensión fija k, solo hay un número finito de gráficas cuyo hiperespacio tiene dimensión k.

El resultado análogo en niveles de Whitney no es cierto, y para convencerse de esto basta considerar gráficas con vértices de orden 3.

Ahora llega nuestro último resultado, pero antes una definición.

<u>DEFINICION</u>: Un vértice de X es *de corte* si $X-\{v\}$ es disconexo.

<u>LEMA 4.7</u>: Si S es una subgráfica maximal fina de X, entonces
$\dim \mathfrak{M}_S = t+2(r-t-(i-1))$ donde
t = Número de vértices terminales de X
r = Número de segmentos de X
i = Número de vértices internos de X.

Notemos que este lema implica que $\dim \mathfrak{M}_S$ es la misma para cualquier subgráfica maximal fina de X.

<u>PRUEBA</u>: Pongamos $X = Q(1,S) = S \cup (\bigcup_{i=0}^{k} I_i) \cup (\bigcup_{j=0}^{l} J_j)$

Los segmentos I's intersectan a S en uno solo de sus extremos y por lo tanto, el otro extremo es un vértice terminal de X, de donde k = t.

Además, l es el número de segmentos que intersectan a S en sus dos puntos terminales y que son los segmentos de X distintos de los I's y distintos de los segmentos de S.

Ahora, como S es interna y acíclica y contiene a todos los vértices internos entonces contiene i-1 segmentos.

Finalmente, como el número de segmentos I's es igual a t se tiene lo que se quería probar.

<u>TEOREMA 4.6</u>. Sea $\mathfrak{H}$ un nivel de Whitney grande, entonces todos los vértices internos de X son de corte si y sólo si la dimensión de $\mathfrak{H}$ es homogénea.

<u>PRUEBA</u>. ($\Rightarrow$) Sea $A \in \mathfrak{H}$. Afirmamos que A contiene a todos los vértices internos de X, pues si v es vértice interno y $v \notin A$ como v es de corte tendríamos que $X-\{v\}$ es disconexo, digamos $X-\{v\} = H \cup K$ donde H y K son abiertos, y disjuntos.

Supongamos que $A \subseteq H$. Como A es cerrado podemos decir que $A \subseteq H \neq A$.

Notemos también que si $T = H \cup \{v\}$, entonces T es una subgráfica de X, propia (falta la parte de K) y no vacía de donde se tiene $\mu(A)<\mu(T)$ lo que contradice el hecho de que A está en un nivel grande.

Luego, sea S una subgráfica interna y acíclica tal que $\dim_{\mathfrak{H}} A = \dim \mathfrak{M}_S - 1$. Es inmediato que S contiene a todos los vértices internos de X, de donde S deberá ser una subgráfica maximal fina para X y por el Lema 4.7 tenemos que:
$\dim_{\mathfrak{H}} A = t+2(r-t(i-1))$ y esta dimensión no depende de A.

Luego, $\dim_{\mathfrak{H}} A$ es la misma para cualquier $A \in \mathfrak{H}$.

($\Leftarrow$) En esta implicación procederemos por contradicción. Supongamos que v es un vértice interno que no es de corte.

Sea además $A \in \mathfrak{A}$ tal que $A \in \mathfrak{M}_S(t)$ y S sea una subgráfica maximal fina para X. Por el Lema 4.7 tenemos que

$$\dim_{\mathfrak{A}} A \geq \dim \mathfrak{M}_S - 1 = 2r-t-2i-1.$$

Ahora, sea $\mathfrak{B} = \{B \in \mathfrak{A} : v \notin B\}$. Es claro que $\mathfrak{B}$ es un conjunto abierto, ya que su complemento tendría la propiedad de pertenencia que es cerrada.

Sea $B \in \mathfrak{B}$ y sea S' tal que $\dim_{\mathfrak{A}} B = \dim \mathfrak{M}_{S'} - 1$ donde S' es una subgráfica interna, acílcica y $v \notin S'$.

A partir de S' es claro que podemos construir una subgráfica S_0 interna, acíclica y que contiene a todos los vértices internos de X excepto a v. (Notemos que S_0 es una especie de subgráfica maximal fina para $X-\{v\}$).

Aplicando el Teorema 1.1, tenemos que

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{M}_{S_0} &= t+gr(v) + 2(r-(t+gr(v))-(i-2)) \\ &= 2r-t-2i-gr(v)+4. \end{aligned}$$

Como $gr(v) \geq 3$ y $\dim \mathfrak{M}_S = 2r-t-2i+2$ tenemos $\dim \mathfrak{M}_{S_0} < \dim \mathfrak{M}_S$.

Además, por el Lema 4.1, $\dim \mathfrak{M}_{S_0} < \dim \mathfrak{M}_{S'}$.

Con todo esto, tenemos que existen A y B en $\mathfrak{A}$ tales que $\dim_{\mathfrak{A}} B < \dim_{\mathfrak{A}} A$, lo cual es una contradicción a nuestra suposición.

Esto termina la prueba del Teorema.

Para terminar este trabajo, planteamos una conjetura interesante.

En [5], se demostró que los niveles de Whitney grandes son cubos (de cualquier dimensión) si y solo si X es un árbol frutal, donde un arbol frutal es una gráfica cuyos únicos ciclos son rizos.

Nosotros conjeturamos lo siguiente:

Una gráfica X tiene un nivel que es cubo si solo si X es un árbol frutal.

B I B L I O G R A F I A

[1] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph I,* Fundamenta Mathematicae 62 (1968), 265-286.

[2] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph II* Fundamenta Mathematicae 63 (1968), 225-255.

[3] R. Duda, *Correction to the paper "On the hyperspace of subcontinua of a finite graph I",* Fundamenta Mathematicae 69 (1970), 207-211.

[4] A. Illanes, *Whitney blocks in the hyperespace of a finite graph,* Preprint.

[5] A. Illanes e I. Puga, *Determining finite graphs by their large Whitney levels,* Preprint.

[6] H. Kato, *Whitney continua of curves,* Transactions of the American Mathematical Society Vol. 300, Number 1, (1987) 367-381.

[7] H. Kato, *Whitney continua of graphs admit all homotopy types of compact connected ANRs,* Fundamenta Mathematicae 129 (1988), 161-166.

[8] H. Kato, *A note on fundamental dimensions of Whitney continua of graphs*, J. Math. Soc. Japan 41 (1989), 243-250.

[9] H. Kato, *Various types of Whitney maps on n-dimensional compact connected polyhedra* $(n \geq 2)$, Topology and its Applications 28 (1988), 17-21.

[10] H. Kato, *Shape equivalences of Whitney continua of curves*, Can. J. Math. Vol. XL, No 1, (1988), 217-227.

[11] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1942) pp. 22-36.

[12] S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces of sets*, Marcel Deker (1978), New York and Basel.