

00384 29<sup>1</sup>



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



**"GEOMETRIA DE LAS VARIEDADES ABELIANAS  
ASOCIADAS A CURVAS ESPECIALES"**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE  
DOCTORA EN CIENCIAS (MATEMATICAS)**

**P R E S E N T A  
LAURA HIDALGO SOLIS**

1993

**DIRECTOR DE TESIS: DR. SEVN RECLLAS PISHMISH**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Indice

Introducción.	1.
1. Versión analítica de la construcción trigonal.	
1.1 Una relación entre las funciones theta de segundo orden de la curva $X$ y las diferenciales abelianas de $Z_c$ via la construcción trigonal.	5
1.2 Una relación entre la homología de $Z_c$ y la pareja $(X, L)$ .	15
1.3 Una relación entre las matrices de Riemann de $X$ y $Z_c$ .	45
2. Interpretación Geométrica.	
2.1 Introducción.	60
2.2 Preliminares.	61
2.3 La superficie cuádrica.	66
2.4 Las series lineales especiales sobre $Z_c$ .	72
2.5 La superficie de Del Pezzo y la superficie de Cayley asociadas con $Z_c$ y $Y_c$ .	75
3. Apendice A. Funciones Theta .	85
4. Apendice B. Variedades de Prym.	89
5. Apendice C. Diferenciales de C.	91
Bibliografía.	92

## Glosario de Notaciones

$A^{(n)}$	El $n$ -ésimo producto simétrico de $A$ .
$\dim A$	La dimensión de un espacio topológico $A$ .
$\text{codim}_B A$	La codimensión de un subesquema $A$ en $B$ .
$\mathcal{O}_A$	El haz de funciones regulares sobre una variedad.
$\text{Proj}$	$\text{Proj}$ de un anillo graduado.
$A \times_S B$	El producto fibrado de esquemas.
$\text{Pic} A$	El grupo de Picard de $A$ .
$\text{Pic}^0 A$	El grupo de clases de equivalencia de divisores de grado 0.
$\text{Pic}^n A$	El espacio homogéneo de clases de equivalencia de divisores de grado $n$ .
$JA$	La variedad jacobiana de la curva $A$ .
$\omega_A$	El haz canónico.
$\pi_1$	El grupo fundamental.
$\mathcal{G}_d^r$	El esquema de los haces lineales de grado $d$ y dimensión $r$ .
$T_p A$	El espacio tangente a $A$ en el punto $p$ .
$ D $	El conjunto de divisores efectivos linealmente equivalentes a $D$ .
$H_g$	El semiplano de Siegel.
$\mathcal{G}_d^r A$	La subvariedad de $\text{Pic} A$ que parametriza las series lineales de grado $d$ y dimensión $r$ .
$g_d^r$	Una serie lineal de grado $d$ y dimensión $r$ .
$K_A$	Un divisor canónico.
$\phi_L$	El morfismo determinado por el haz lineal $L$ .
$B_f$	El subconjunto de $\mathbf{P}_1$ dado como la imagen de los puntos de ramificación de $f: X \rightarrow \mathbf{P}_1$ .

Si  $V$  es un espacio vectorial ( $E$  un haz vectorial)  $\mathbf{P}V$  (respectivamente  $\mathbf{P}E$ ) es el espacio de subespacios de dimensión 1 de  $V$  (respectivamente de fibras de  $E$ ), así  $\mathbf{P}V = \text{Proj} SV^*$ .

Por una curva entenderemos una curva completa, irreducible, no singular sobre  $\mathbf{C}$ , y a menos que se especifique lo contrario, no hiperelíptica.

# INTRODUCCION

En el artículo *Jacobians of curves with  $g_4$ 's are the Prym's of trigonals curves* [Rec.1] se demuestra el siguiente resultado:

Si  $X$  es una curva no hiperelíptica de género 3 y  $L = \mathcal{O}(K_X + c)$  es un haz lineal de grado 4 y dimensión 1 genérico, entonces a la pareja  $(X, L)$  se le asocia un cubrimiento doble  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$  (donde  $Y_c$  es una curva de género 4) que, en condiciones genéricas, es de curvas lisas y no ramificado, este cubriente tiene la propiedad de que la variedad Jacobiana de la curva  $X$  es isomorfa de manera natural a la variedad de Prym del cubriente  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$ , además todas las variedades de Prym de curvas trigonales son de esta forma. Esta construcción se conoce con el nombre de la construcción trigonal.<sup>1</sup>

El objetivo principal de este trabajo es encontrar relaciones entre la matriz de Riemann de la curva  $Y_c$  y la pareja dada por matriz de Riemann de la curva  $X$  junto con el haz  $L = \mathcal{O}(K_X + c)$  vía la construcción trigonal, a lo cual dedicamos la primera parte del trabajo, donde a partir de la construcción de  $Z_c$  como intersección de "dos trasladados" del divisor theta de la variedad jacobiana  $JX$  de la curva  $X$  se muestra que existe una relación natural entre el espacio de diferenciales abelianas de la curva  $Z_c$  y el espacio de las funciones theta de segundo orden de  $JX$ , concretamente tenemos las Proposiciones 3 y 5, las cuales podemos resumir en la siguiente:

**Proposición.** *Dada  $X$  una curva no hiperelíptica de género 3,  $L = \mathcal{O}(K_X + c) \in \text{Pic}^4 X$  un haz lineal completo de grado 4 tal que  $c$  es un punto genérico de  $JX$ , entonces  $Z_c = \Theta_{c/2} \cdot \Theta_{-c/2}$  es una curva lisa e irreducible de género 7 tal que:*

(i)  $\omega_{Z_c} = \mathcal{O}_{JX}(2\Theta) \otimes \mathcal{O}_{Z_c}$ .

(ii) *Existe un epimorfismo natural entre el espacio  $H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$  de funciones theta de segundo orden de  $JX$  y el espacio de diferenciales holomorfas  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$  de la curva  $Z_c$  el cual está dado por restricción. Siendo el núcleo el subespacio  $\langle \theta(z + c/2)\theta(z - c/2) \rangle$ .*

(iii) *La curva  $Z_c$  admite una involución  $\iota : Z_c \rightarrow Z_c$  libre de puntos fijos.*

---

<sup>1</sup>En [Rec.2] se demuestra (pag. 63) que el conjunto de los haces lineales  $L = \mathcal{O}(K_X + c)$  tales que  $Y_c$  es una curva de género 4 (completa, irreducible, no singular y no hiperelíptica) definida sobre  $\mathbf{C}$  corresponde al conjunto  $U = JX - (J_2X \cup (X - X) \cup \{2P + 2Q - K_X \mid P, Q \in X\})$

Si consideramos la curva cociente  $Y_c = Z_c / \langle \iota \rangle$  tenemos que la aplicación  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$  es un cubriente doble no ramificado, aplicando la fórmula de Riemann-Hurwitz  $g(Z_c) = 2g(Y_c) - 1$ , luego entonces la curva  $Y_c$  es de género 4.

Como  $Z_c$  es una curva simétrica en  $(JX, \Theta)$  con clase de homología  $\Theta, \Theta$ , como consecuencia de la propiedad universal de las variedades de Prym, tenemos: [Ma.]

(a) La variedad de Prym del cubriente doble  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$  la cual denotamos  $\text{Prym}(Z_c \rightarrow Y_c)$  es isomorfa a la variedad jacobiana  $(JX, \Theta)$  de la curva  $X$  como variedades abelianas principalmente polarizadas.

(b)  $j : Z_c \hookrightarrow JX$  es la aplicación de Abel-Prym.

Posteriormente se da una descripción de la homología de la curva  $Z_c$  en términos de la homología de la curva  $X$  y la elección del punto  $c \in JX$ , para lo cual se utiliza la representación  $f : X \rightarrow \mathbf{P}_1$  dada por el haz lineal  $L$ , concretamente bajo las hipótesis anteriores se demuestra:

**Teorema. 7.**

Existe una base  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\alpha}_7, \tilde{\beta}_7$  canónica de homología para  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})$  tal que los ciclos  $\tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\alpha}_{2g+1}, \tilde{\beta}_{2g+1}$  corresponden al producto fibrado de trayectorias de  $X$ , mientras que el ciclo  $\beta_1$  asociado al cubriente doble  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$  está determinado por el morfismo  $f : X \xrightarrow{A^1} \mathbf{P}_1$  asociado al haz  $L$  y el ciclo  $\tilde{\alpha}_1$  es un ciclo complementario.

Posteriormente, en el Teorema 20 generalizamos este resultado para género arbitrario.

Basados en los resultados antes mencionados obtenemos que la matriz de Riemann de la curva  $Z_c$  puede expresarse en términos unicamente de la matriz de Riemann de  $X$  y la representación de  $f$  asociada a  $L = \mathcal{O}(K_X + c)$ , es decir:

**Teorema. 15.**

Si  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  es la base de  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})$  dada por la proposición anterior entonces, existen  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_7 \in H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$  tales que la restricción de estas secciones a la curva  $Z_c$  son una base de diferenciales holomorfas normalizada con respecto a la  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ - base de  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})$  tal que

$$\int_{\tilde{\beta}_i} \vartheta_j|_{Z_c} = \tilde{\tau}_{ij},$$

representa la matriz de Riemann de la curva  $Z_c$ .

Se sabe además [Fa.Ra.] que la matriz de Riemann de la curva  $Z_c$  puede describirse en términos de la matriz de Riemann de la curva  $Y_c$  y de la matriz de Riemann de  $\text{Prym}(Z_c \rightarrow Y_c)$ , como consecuencia del teorema anterior tenemos que la matriz de Riemann de la curva  $Y_c$  puede escribirse en términos únicamente de la matriz de Riemann de  $X$  y la representación de  $f$  asociada a  $L = \mathcal{O}(K_X + c)$ .

Para concluir está parte notamos que la construcción de las bases de homología vía la construcción trigonal nos determina un punto del espacio de Torelli  $\mathcal{T}_4$  y como el morfismo que asocia a cada punto de  $\mathcal{T}_4$  su matriz de Riemann analítico tenemos el siguiente resultado:<sup>2</sup>

**Teoremas 17, 18.** *La matriz de Riemann de la curva  $Y_c$  (respectivamente  $Z_c$ ) depende analíticamente de la elección de la curva  $X$  y el haz lineal  $L$ .*

En la segunda parte se da una descripción de la geometría de las curvas  $Z_c$  y  $Y_c$  a partir de la información proporcionada por la pareja  $(X, c)$ .

En particular como  $Z_c = \Theta_{c/2} \cdot \Theta_{-c/2}$  estudiamos la geometría de  $Z_c$  a partir de la geometría de  $(X, c)$ , para lo cual usamos por un lado la descripción de las curvas canónicas de  $Z_c$  y  $Y_c$  como intersección de superficies una de ellas asociada de manera intrínseca al cubriente  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$  y por otro, el hecho (Proposición. 5) de que existe un isomorfismo natural ente el espacio de diferenciales holomorfas globales  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$  y el complemento ortogonal (bajo la métrica hermitiana inducida por la polarización principal) de la función theta de segundo orden  $\theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \in H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$ .

Como  $Y_c$  es una curva no hiperelíptica de género 4, entonces su modelo canónico  $Y_{\text{can}}$  es una curva de grado 6 en  $\text{Proj}SH^0(Y_c, \omega_{Y_c})^*$ , la cual está contenida en una única superficie cuádrica irreducible  $\mathcal{Q}_{Y_c}$ , y esta curva es intersección completa de  $\mathcal{Q}_{Y_c}$  con una superficie cúbica irreducible  $\mathcal{C}$ , esto es,

$$Y_{\text{can}} = \mathcal{Q}_{Y_c} \cdot \mathcal{C}.$$

Por otra parte, en [DC.Rec.] se demuestra que dado  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$  un cubriente doble no ramificado de una curva de género 4 entonces  $Z_c$  posee exactamente dos haces lineales de grado 6 y dimensión 2,  $g_6^2$ , y  $g_6^{2'}$ , auto-residuales con respecto a la serie canónica, tales que  $\omega_{Z_c}^2 = g_6^2$ . Además  $Z_c$  admite un único modelo plano  $\hat{C}$  el cual es una sextica con tres puntos dobles no alineados. La curva  $Z_c$  en su espacio canónico  $\text{Proj}SH^0(Z_c, \omega_{Z_c})^*$

<sup>2</sup>Donde las matrices de Riemann se refieren a las bases descritas en el Teorema 7.

es intersección completa de una superficie de Del Pezzo  $\mathcal{S}$  y una cuádrica  $\tilde{\mathcal{Q}}$ , esto es  $Z_{can} = \mathcal{S} \cdot \tilde{\mathcal{Q}}$ .

La superficie de Del Pezzo  $\mathcal{S}$  se proyecta 2 a 1 en  $ProjSH^0(Y_c, \omega_{Y_c})^*$  desde  $ProjSH^0(Y_c, \omega_{Y_c} \otimes \eta)^*$  sobre la superficie cúbica de Cayley  $\mathcal{C}$  asociada al punto de orden dos  $\eta \in JX$ , mientras que la superficie cuádrica  $\tilde{\mathcal{Q}}$  es el cono con vértice  $ProjSH^0(Y_c, \omega_{Y_c} \otimes \eta)^*$  y base  $\mathcal{Q}_{Y_c}$  donde  $\mathcal{Q}_{Y_c} \subset ProjSH^0(Y_c, \omega_{Y_c})^*$  es la única superficie cuádrica que contiene a  $Y_{can}$ .

En esta parte damos una descripción de la superficie cuádrica  $\tilde{\mathcal{Q}}$  en términos de funciones theta de segundo orden de la curva  $X$  (Sección 2.2), así como la descripción de los haces  $g_6^2$  de  $Z_c$  en términos de las inclusiones  $j_{\pm c/2} : Z_c \hookrightarrow \mathcal{O}_{\pm c/2}$  y de la aplicación de Gauss, como consecuencia de esto podemos describir la superficie de Del Pezzo  $\mathcal{S}$  y la superficie de Cayley  $\mathcal{C}$  en términos de la representación plana de la curva  $X$  y del haz  $\mathcal{O}(K_X + c)$  dado (Lema 28 y Proposición 29).

Finalmente vemos como los tres puntos dobles de la representación plana  $\tilde{\mathcal{C}}$  de la curva  $Z_c$  vía el morfismo determinado por el  $g_6^2$  corresponden a una configuración especial en el espacio canónico de la curva  $X$  de los puntos del cuadrángulo fundamental determinado por el haz  $L = \mathcal{O}(K_X + c)$  y de sus líneas diagonales. Utilizando lo anterior podemos enunciar la siguiente:

**Proposición.31.**

*Para cada  $P_{ij} + Q_{ij} \in W_2(Y_c) \cap (W_2(Y_c) + \eta)$  tenemos un morfismo*

$$\alpha_{i,j} : H^0(Y_c, \omega_{Y_c}(\eta - (P_{ij} + Q_{ij}))) \longrightarrow H^0(Y_c, \omega_{Y_c})$$

dado por

$$\alpha_{i,j}(w) = w \otimes t_{ij}$$

y estos morfismos son tales que:

(i)  $\Sigma \text{Im}(\alpha_{i,j}) = H^0(Y_c, \omega_{Y_c})$ .

(ii) En particular tenemos seis subespacios de  $H^0(Y_c, \omega_{Y_c}(\eta))$  de dimensión 2 cuyas imágenes bajo los morfismos  $\alpha_{i,j}$  inducen seis subespacios de  $H^0(Y_c, \omega_{Y_c})$  de dimensión dos que generan  $H^0(Y_c, \omega_{Y_c})$ .



# 1 VERSION ANALITICA DE LA CONSTRUCCION TRIGONAL

## 1.1 Una relación entre las funciones theta de segundo orden de la curva $X$ y las diferenciales abelianas de $Z_c$ via la construcción trigonal.

Sea  $X$  una curva no hiperelíptica de género 3 y consideremos el isomorfismo canónico

$$\begin{aligned} \text{Pic}^4 X &\longrightarrow \text{Pic}^0 X = JX \\ \xi &\longmapsto \omega_X^{-1} \otimes \xi \end{aligned}$$

el cual tiene por inversa

$$\begin{aligned} \text{Pic}^0 X &\longrightarrow \text{Pic}^4(X) \\ c &\longmapsto c \otimes \omega_X = \mathcal{O}_X(K + c). \end{aligned}$$

Esta aplicación da una correspondencia uno a uno entre los puntos  $c \in \text{Pic}^0 X \setminus \{0\}$  y los haces lineales  $L_c \in \text{Pic}^4(X)$  con  $L_c \neq \omega_X$ . En [Rec.2] pag. 63 se demuestra que existe un abierto de Zariski  $\mathcal{U} \subseteq \text{Pic}^4 X$  tal que para cada  $L_c \in \mathcal{U}$  a la pareja  $(X, L_c)$  se le asocia un cubriente doble no ramificado de curvas lisas  $\pi : Z_c \longrightarrow Y_c$ , donde  $Y_c$  es una curva general de género 4.

Sea  $L = \mathcal{O}_{JX}(\Theta)$  un haz correspondiente al divisor  $\Theta$  asociado a la polarización principal de  $JX = \text{Pic}^0 X$  el cual supondremos simétrico y denotemos por  $t_c : \text{Pic}^0 X \longrightarrow \text{Pic}^0 X$  la traslación por  $c$ , esto es,  $t_c(x) = x + c$ .

Como el divisor  $\Theta \subset \text{Pic}^0 X$  es irreducible, entonces  $t_c^*(\Theta) = \Theta_c$  es irreducible.

Para cada  $c \in \text{Pic}^0 X$  fijo, consideremos la subvariedad  $Z'_c$  de  $\Theta$  fija por la acción

$$\begin{aligned} \text{Pic}^0 X \times \text{Pic}^0 X &\longrightarrow \text{Pic}^0 X \\ (a, \zeta) &\longmapsto a + \zeta \end{aligned}$$

esto es

$$Z'_c = \Theta \cap \Theta_c.$$

Observamos que  $Z'_c$  es de dimensión 1 y conexa. Esto se puede ver de la siguiente manera:

Consideramos el morfismo

$$\varphi_L : JX \longrightarrow \text{Proj}SH^0(JX, L^3)^*$$

el teorema de Lefschetz para funciones theta (ver [G.H.] pag. 317) nos dice que  $\varphi_L$  es un encaje cerrado de  $JX$  en  $\text{Proj}SH^0(JX, L^3)^*$ .

Luego entonces, si  $H$  denota un hiperplano general en  $\text{Proj}SH^0(JX, L^3)^*$  se tiene que  $H \cap JX$  es irreducible.

Tomemos ahora un hiperplano  $H_0$  en  $\text{Proj}SH^0(JX, L^3)^*$  tal que  $H_0 \cap JX = 3\Theta$  como  $\Theta_c \subset JX$  entonces  $H_0 \cap \Theta_c = (H_0 \cap JX) \cap \Theta_c = 3\Theta \cap \Theta_c$ , y como consecuencia del principio de conexidad de Zariski tenemos que  $3\Theta \cap \Theta_c$  es conexo, de donde  $Z'_c = \Theta \cap \Theta_c$  es conexo.

Como los ciclos  $Z'_c = \Theta \cap \Theta_c$  forman una familia algebraica parametrizada por los puntos  $c$  de la jacobiana de  $X$  resulta que  $Z'_c = \Theta \cap \Theta_c$  es no singular para los puntos genéricos  $c \in JX$  siendo por tanto  $Z'_c = \Theta \cap \Theta_c$  irreducible.

Además la dimensión de la intersección del divisor theta con su trasladado por el punto  $c$  es uno, esto es,  $\dim Z'_c = 1$ , (ver [ACGH]) y como el divisor  $\Theta$  no coincide con sus trasladados, es decir, como  $\Theta$  y  $\Theta_c$  son subvariedades de codimensión 1 de  $JX$  y  $Z'_c = \Theta \cap \Theta_c$ . Entonces, para  $c \in JX$  un punto genérico,  $1 = \dim Z'_c = \dim \Theta \cap \Theta_c$  de donde

$$2 = \text{codim}_{T_p JX} T_p Z'_c = \text{codim}_{T_p JX} T_p \Theta + \text{codim}_{T_p JX} T_p \Theta_c$$

obtenemos así que  $\Theta$  y  $\Theta_c$  se intersectan transversalmente, (ver [Sh.] pag. 82) y escribiremos  $\Theta \cdot \Theta_c$  en vez de  $\Theta \cap \Theta_c$  esto es,  $\Theta \cdot \Theta_c = Z'_c$  como esquemata.

Por otra parte, como  $\omega_{JX}$  es trivial,  $\Theta_X$  está canónicamente encajado en  $JX$ , y como  $Z'_c$  es algebraicamente equivalente a un divisor canónico de  $\Theta_X$  usando la fórmula de adjunción tenemos que :

$$\omega_{Z'_c} = (\omega_\Theta + Z'_c)|_{Z'_c}$$

de donde

$$\omega_{Z'_c} \cong Z'_c \cdot (Z'_c + Z'_c),$$

utilizando la fórmula de Poincaré esto implica que

$$\begin{aligned} \text{deg } \omega_{Z'_c} &= \text{deg}\{Z'_c \cdot (Z'_c + Z'_c)\} \\ &= 2\Theta \cdot \Theta \cdot \Theta \\ &= 2\Theta^3 \\ &= 12. \end{aligned}$$

Por tanto  $12 = \text{deg } \omega_{Z'_c} = 2g(Z'_c) - 2$ , lo cual implica que la curva  $Z'_c$  es de género 7.

Denotemos por  $Z_c$  la traslación de la curva  $Z'_c$  por el punto  $-c/2$ , esto es

$$\begin{aligned} Z_c &= t_{-c/2}^*(Z'_c) \\ &= t_{-c/2}^*(\Theta \cdot \Theta_c) \\ &= \Theta_{c/2} \cdot \Theta_{-c/2}. \end{aligned}$$

Entonces  $Z_c$  es una curva de género 7 isomorfa a  $Z'_c$  y a partir de ahora (a menos de que se especifique lo contrario) trabajaremos con la curva  $Z_c$  en vez de  $Z'_c$ , con esto no se pierde generalidad y se facilitan los cálculos posteriores.

Procederemos a dar en este caso la fórmula de adjunción a nivel de haces.

Como  $\Theta_\delta \subset JX$  es un divisor (de Cartier) en la variedad abeliana  $JX$  y como  $\omega_{JX} = \mathcal{O}_{JX}$  es el haz trivial, por la fórmula de adjunción tenemos que

$$\begin{aligned} \omega_{\Theta_\delta} &= \omega_{JX} \otimes \mathcal{O}_{JX}(\Theta_\delta) \otimes \mathcal{O}_{\Theta_\delta} \\ &= \mathcal{O}_{JX}(\Theta_\delta) \otimes \mathcal{O}_{\Theta_\delta} \\ &= \mathcal{O}_{\Theta_\delta}(\Theta_\delta) \end{aligned}$$

para cada  $\delta \in JX$ .

Por otra parte, como  $\Theta$  es una variedad de dimensión 2 y como  $X$  es una curva no hiperelíptica, su lugar singular es el vacío, [Rie.] luego entonces podemos considerar a  $\Theta_{c/2}$  como una superficie y a  $Z_c$  como una curva en la superficie  $\Theta_{c/2}$ . En esta parte estamos interesados en conocer como es el haz asociado a  $Z_c$  como divisor en  $\Theta_{c/2}$ , el cual denotamos por  $\mathcal{O}_{\Theta_{c/2}}(Z_c)$ .

Denotemos por  $\theta(\zeta)$  la función theta que define el divisor  $\Theta$ .

Como el divisor de Cartier  $Z_c$  en la superficie  $\Theta_{c/2}$  está representado por la pareja  $\{(U_{c/2,\alpha}, f_\alpha)\}$  con  $f_\alpha = \theta_{-c/2} \cdot U_{c/2,\alpha}$  donde  $U_{c/2,\alpha}$  es una cubierta abierta para  $\Theta_{c/2}$ , así pues podemos identificar  $\mathcal{O}_{\Theta_{c/2}}(Z_c)$  de manera natural con el haz  $\mathcal{O}_{JX}(\Theta_{-c/2}) \otimes \mathcal{O}_{\Theta_{c/2}} \otimes \mathcal{O}_{Z_c}$ .

Luego entonces, si consideramos a  $Z_c \subset \Theta_{c/2}$  como una subvariedad no singular de codimensión 1, como consecuencia de la fórmula de adjunción y del teorema del cuadrado tenemos que:

Lema.1.

$$\omega_{Z_c} \cong \mathcal{O}_{JX}(2\Theta) \otimes \mathcal{O}_{Z_c}. \quad (1)$$

Demostación:

$$\begin{aligned} \omega_{Z_c} &= \omega_{\Theta, \rho} \otimes \mathcal{O}_{\Theta, \rho}(Z_c) \otimes \mathcal{O}_{Z_c} \\ &\cong (\mathcal{O}_{JX}(\Theta_{c/2}) \otimes \mathcal{O}_{\Theta, \rho}) \otimes (\mathcal{O}_{JX}(\Theta_{-c/2}) \otimes \mathcal{O}_{\Theta, \rho}) \otimes \mathcal{O}_{Z_c} \\ &\cong \mathcal{O}_{JX}(\Theta_{c/2}) \otimes \mathcal{O}_{JX}(\Theta_{-c/2}) \otimes \mathcal{O}_{\Theta, \rho} \otimes \mathcal{O}_{Z_c} \\ &\cong \mathcal{O}_{JX}(\Theta_{c/2-c/2}) \otimes \mathcal{O}_{JX} \otimes \mathcal{O}_{\Theta, \rho} \otimes \mathcal{O}_{Z_c} \\ &\cong \mathcal{O}_{JX}(\Theta) \otimes \mathcal{O}_{JX}(\Theta) \otimes \mathcal{O}_{\Theta, \rho} \otimes \mathcal{O}_{Z_c} \\ &\cong \mathcal{O}_{JX}(2\Theta) \otimes \mathcal{O}_{\Theta, \rho} \otimes \mathcal{O}_{Z_c} \\ &\cong \mathcal{O}_{JX}(2\Theta) \otimes \mathcal{O}_{Z_c}. \end{aligned}$$

□

Como  $Z_c$  es un subconjunto cerrado de  $\Theta_{c/2}$  y  $\omega_{Z_c}$  es un haz de grupos abelianos sobre  $Z_c$ , si denotamos por  $j: Z_c \rightarrow \Theta_{c/2}$  el morfismo inclusión entonces

$$H^0(Z_c, \omega_{Z_c}) = H^0(\Theta_{c/2}, j^* \omega_{Z_c})$$

donde  $j^* \omega_{Z_c}$  es la extensión de  $\omega_{Z_c}$  por cero fuera de  $Z_c$ .

Anteriormente en (1) hemos visto que  $\omega_{Z_c} = \mathcal{O}_{JX}(2\Theta) \otimes \mathcal{O}_{Z_c}$ , esto es

$$\begin{aligned} H^0(Z_c, \omega_{Z_c}) &= H^0(\Theta_{c/2}, j^*(\omega_{Z_c})) \\ &= H^0(\Theta_{c/2}, j^*(\mathcal{O}_{JX}(2\Theta) \otimes \mathcal{O}_{Z_c})) \\ &= H^0(\Theta_{c/2}, j^*(\rho^*(\mathcal{O}_{JX}(2\Theta)))) \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\rho^*$  denota la restricción a  $Z_c$  de las secciones sobre  $JX$ .

En este caso como  $h^0(\Theta_{c/2}, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta) \otimes \mathcal{O}_{\Theta_{-c/2}}) = h^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta)) - 1 = 2g(X) - 1 = 7$  y  $h^0(Z_c, \omega_{Z_c}) = g(Z_c) = 7$  lo cual significa que la inclusión  $Z_c \subset \Theta_{c/2} \hookrightarrow JX$  induce vía restricción un epimorfismo natural del espacio de funciones theta de segundo orden  $H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$  sobre la variedad jacobiana  $JX$  de la curva  $X$ , en el espacio de diferenciales holomorfas  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$  de la curva  $Z_c$ .

$$\rho: H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta)) \rightarrow H^0(Z_c, \omega_{Z_c}).$$

En particular como  $Z_c = \Theta_{c/2} \cdot \Theta_{-c/2} \subset \Theta_{c/2} \cup \Theta_{-c/2}$  tenemos que  $\theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \in H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$  es idénticamente nula sobre  $Z_c$ . De donde la aplicación  $\rho$  tiene como núcleo el espacio generado por la sección  $\theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2)$  lo cual nos permite identificar las diferenciales abelianas de la curva  $Z_c$  con el espacio de funciones theta de segundo orden de  $JX$  módulo el espacio generado por la sección  $\theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2)$ , esto es

$$H^0(Z_c, \omega_{Z_c}) \simeq H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta)) / \langle \theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \rangle.$$

Por otra parte, como consecuencia del teorema de Wirtinger, (ver [M.1] pag. 335,) si en el espacio  $H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$  consideramos la métrica hermitiana inducida por la polarización principal de  $(JX, \Theta)$  obtenemos así un isomorfismo natural entre el complemento ortogonal de la sección  $\langle \theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \rangle$  (el cual denotaremos  $\langle \theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \rangle^\perp$ ) y el espacio de funciones theta de segundo orden de  $JX$  módulo el espacio generado por la sección  $\langle \theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \rangle$ , esto es

$$H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta)) / \langle \theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \rangle \simeq \langle \theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \rangle^\perp$$

y como consecuencia de (2) tenemos un isomorfismo natural:

$$H^0(Z_c, \omega_{Z_c}) \simeq \langle \theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \rangle^\perp.$$

### Observación.2.

Como consecuencia del teorema de Appel-Humbert la métrica inducida por la polarización principal de la variedad jacobiana  $(JX, \Theta)$  en el espacio de funciones theta de segundo orden  $H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$  coincide con la métrica dada por el producto interior no degenerado  $B$  que nos permite identificar  $[2\Theta]$  con  $Proj H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$  ver [M.1], [M.3].

Si denotamos por

$$\xi : JX \times JX \longrightarrow JX \times JX$$

la aplicación

$$(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$$

tenemos el isomorfismo [M.2]

$$\xi^*(p_1^* \mathcal{O}_{JX}(\Theta) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{JX}(\Theta)) \simeq p_1^* \mathcal{O}_{JX}(2\Theta) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{JX}(2\Theta).$$

Si  $\{s_j\}$  es una base del espacio de funciones theta de segundo orden, podemos escribir

$$\xi(p_1^* \theta \otimes p_2^* \theta) = \sum_{j,k} c_{jk} p_1^* s_j \otimes p_2^* s_k$$

para algunos  $c_{jk} \in \mathbb{C}$ ; esto es, por la fórmula de Weierstrass

$$\theta(u+v)\theta(u-v) = \sum c_{jk} s_j(u) s_k(v)$$

para toda  $u, v \in JX$ .

En particular, se demuestra en [M.1] que la matriz  $c_{jk}$  define una forma  $B$  la cual proporciona un isomorfismo entre la serie lineal  $|2\Theta|$  y el espacio de funciones theta de segundo orden  $ProjSH^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$ .

Resumimos lo anterior en la siguiente:

### Proposición.3.

Dada  $X$  una curva no hiperelíptica de género 3,  $L \in Pic^4 X$  un haz lineal completo de grado 4 tal que si  $c = L \otimes \omega_X^{-1}$  es un punto del abierto denso  $\mathcal{U}$  de  $Pic^0 X$  mencionado anteriormente, entonces  $Z_c = \Theta_{c/2} \cdot \Theta_{-c/2}$  es una curva lisa e irreducible de género 7 tal que:

(i)  $\omega_{Z_c} = \mathcal{O}_{JX}(2\Theta) \otimes \mathcal{O}_{Z_c}$ .

(ii) Existe un isomorfismo natural entre el espacio de diferenciales holomorfas  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$  de la curva  $Z_c$  y el complemento ortogonal  $\langle \theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \rangle^\perp$  de la función theta de segundo orden  $\theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \in H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$ , esto es:

$$H^0(Z_c, \omega_{Z_c}) \simeq \langle \theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \rangle^\perp,$$

donde el complemento ortogonal que estamos tomando es el inducido por  $B$ . □

Notese que si consideramos la involución  $-1_{JX}$  sobre la variedad Jacobiana de  $X$ , esta define una aplicación en la curva  $Z_c$ :

$$\begin{array}{ccc} Z_c & \xrightarrow{-1_{JX}|_{Z_c}} & Z_c \\ j \downarrow & & \downarrow j \\ JX & \xrightarrow{-1_{JX}} & JX \end{array}$$

Si  $\xi$  es un punto de  $Z_c$ , existen  $\xi_1, \xi_2 \in \Theta$  tales que  $\xi = \xi_1 + c/2 = \xi_2 - c/2$ , por tanto  $-\xi = -\xi_1 - c/2 = -\xi_2 + c/2$ , y como  $\Theta$  es un divisor simétrico en  $JX$ , esto es  $\Theta = -\Theta$  se sigue que  $-\xi_1, -\xi_2 \in \Theta$ , luego entonces  $-\xi = -\xi_1 - c/2 \in \Theta_{-c/2}$  y  $-\xi = -\xi_2 + c/2 \in \Theta_{c/2}$  por lo cual  $-\xi \in \Theta_{c/2} \cup \Theta_{-c/2} = Z_c$ .

Esto es, tenemos una involución  $\iota : Z_c \rightarrow Z_c$  la cual está dada como la restricción de la involución  $-1_{JX}$  a la curva  $Z_c$ . Además si  $\xi \in Z_c$ , entonces  $\iota(\xi) = \xi$  si y solo si  $\xi = -\xi$ , esto es,  $2\xi = 0$ , pero como  $c \in \mathcal{U}$  esto no es posible. Luego entonces la involución  $\iota$  es una involución libre de puntos fijos sobre  $Z_c$  para toda  $c \in \mathcal{U}$ .

De manera análoga al teorema de Matsusaka [M], el cual caracteriza a las variedades jacobianas  $(JC, \Theta)$  como variedades abelianas principalmente polarizadas (v.a.p.p.) de dimensión  $g$  con clase de homología

$$\frac{1}{(g-1)!} [\Theta]^{(g-1)}.$$

El siguiente resultado es básico en la teoría de las variedades de Prym.

**Propiedad universal de las variedades de Prym. 4.**

(Criterio de Masiewicki) [Ma.]

Sea  $(\mathbf{P}, \Theta)$  una variedad abeliana principalmente polarizada de dimensión  $g$  y  $\tilde{C}$  una curva en  $\mathbf{P}$ , simétrica, con clase de homología  $\frac{2}{(g-1)!} [\Theta]^{(g-1)}$ .

Sea  $C = \tilde{C} / \langle \iota \rangle$  el cociente de  $\tilde{C}$  por la involución de  $\mathbf{P}$  dada como multiplicación por  $-1$ . Entonces :

(i)  $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$  es admisible. [Be.1]

(ii)  $\text{Prym}(\tilde{C}, \pi) \simeq (\mathbf{P}, \Theta)$  como variedades abelianas principalmente polarizadas.

(iii)  $\tilde{C} \hookrightarrow \mathbf{P}$  es la aplicación de Abel-Prym.

En otras palabras  $H^0(C, \omega_C \otimes \eta)^*$  puede identificarse con el espacio tangente a  $\text{Prym}(\tilde{C}, \pi)$  en el origen, y la imagen Prym canónica de  $p \in C$  es la dirección tangente proyectivizada a  $\phi(\tilde{C})$  en el punto  $\pi^{-1}(p)$ , donde  $\phi : \tilde{C} \rightarrow \text{Prym}(\tilde{C}, \pi)$  es la aplicación de "Abel-Prym", la cual está dada como  $\phi(p) = u(p) - u(\iota p)$  donde  $u : \tilde{C} \rightarrow J\tilde{C}$  denota la aplicación de Abel. (Ver [Do.S.] pags. 39,40).

Como consecuencia de la propiedad universal para variedades de Prym tenemos la siguiente:

**Proposición.5.**

Para  $c \in JX$  general, la curva  $Z_c$  construida anteriormente admite una involución  $\iota : Z_c \rightarrow Z_c$  libre de puntos fijos. Si consideramos la curva cociente  $Y_c = Z_c / \langle \iota \rangle$  tenemos que la aplicación  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$  es un cubriente doble no ramificado, aplicando la fórmula de Riemann-Hurwitz  $g(Z_c) = 2g(Y_c) - 1$  luego entonces la curva  $Y_c$  es de género 4.

Como  $Z_c$  es una curva simétrica en  $(JX, \Theta)$  con clase de homología  $\Theta, \Theta$ , como consecuencia de la propiedad universal de las variedades de Prym, tenemos:

(a)  $\text{Prym}(Z_c, \pi) \simeq (JX, \Theta)$  como variedades abelianas principalmente polarizadas.

(b)  $j : Z_c \hookrightarrow JX$  es la aplicación de Abel-Prym.

**Demostación:**

Como  $Z_c = \Theta_{c/2} \cdot \Theta_{-c/2}$  y  $Z_c$  es una curva simétrica sobre  $JX$  con clase de homología  $\Theta, \Theta$  y la involución  $\iota$  de  $Z_c$  esta dada por  $-1_{JX|Z_c} = \iota$  por el criterio de Masiewicki,  $\text{Prym}(Z_c, \pi) \simeq JX$  como v.a.p.p.  $\square$

En este punto es interesante dar en otra forma este isomorfismo.

Como hemos visto la inclusión  $j : Z_c \hookrightarrow JX$  es la aplicación de Abel-Prym, aplicando el functor  $\text{Pic}^0$  obtenemos el morfismo

$$\text{Pic}^0 Z_c \xleftarrow{j^*} \text{Pic}^0(JX)$$

y como consecuencia del teorema del hiperplano de Lefschetz tenemos que esta aplicación es inyectiva, ver [G. H.].

Pero  $\text{Pic}^0(JX) = \widehat{JX}$  es la variedad dual de  $JX$ , la polarización principal  $\Theta$  determina un isomorfismo  $\lambda_\Theta : JX \rightarrow \widehat{JX}$  dado como  $\lambda(x) = t_x \Theta - \Theta$ .

Componiendo  $\lambda_\Theta$  con la aplicación  $j^*$  obtenemos un morfismo

$$\text{Pic}^0 X \xleftarrow{j^* \circ \lambda_\Theta} \text{Pic}^0 Z_c.$$

Como para cada curva  $C$ , se tiene que  $\text{Pic}^0 C = H^1(C, \mathcal{O}_C) / H^1(C, \mathbf{Z})$  obtenemos así una aplicación del tangente al origen en  $\text{Pic}^0 X$ , al tangente al origen en  $\text{Pic}^0 Z_c$

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(Z_c, \mathcal{O}_{Z_c}) \quad (3)$$

que también induce una aplicación

$$H^1(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H^1(Z_c, \mathbf{Z}). \quad (4)$$



Por otra parte, la involución  $\iota$  de la curva  $Z_c$  induce una involución  $\iota$  sobre los grupos  $H_1(Z_c, \mathbb{Z})$ ,  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$  y  $J(Z_c)$ . Denotaremos los subespacios  $\iota$ -invariante e  $\iota$ -antiinvariante con los supraíndices  $+$  y  $-$  respectivamente. De donde

$$\begin{aligned} H^0(Z_c, \omega_{Z_c}) &= H^0(Z_c, \omega_{Z_c})^+ \oplus H^0(Z_c, \omega_{Z_c})^- \\ H_1(Z_c, \mathbb{Z}) &= H_1(Z_c, \mathbb{Z})^+ \oplus H_1(Z_c, \mathbb{Z})^- \end{aligned}$$

Como  $H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{j^*} H^1(Z_c, \mathcal{O}_{Z_c})$  corresponde a la aplicación Prym  $j$ , entonces la imagen del morfismo  $j^*$  es el espacio anti-invariante de secciones holomorfas de la curva  $Z_c$

$$\text{Im } j^* = H^0(Z_c, \omega_{Z_c})^-$$

y por lo anterior el toro complejo via la aplicación Abel-Prym, que induce lo anterior

$$\begin{aligned} \text{Prym}(Z_c, \pi) &\simeq (H^0(Z_c, \omega_{Z_c})^-) / H_1(Z_c, \mathbb{Z})^- \\ &\simeq H^1(X, \mathcal{O}_X) / H^1(X, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

es isomorfo a la variedad jacobiana de la curva  $X$ , como variedades abelianas principalmente polarizadas.

Otra observación que podemos hacer es que como el espacio  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$  de diferenciales abelianas sobre la curva  $Z_c$  es isomorfo de manera natural con el espacio  $H^0(\Theta_{c/2}, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta) \otimes \mathcal{O}_{Z_c})$  de funciones theta sobre la variedad jacobiana de la curva  $X$  restringidas a la curva  $Z_c$ , entonces la descomposición de  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$  en parte invariante y anti-invariante induce una descomposición en el espacio de funciones theta de segundo orden de  $X$ , esto es,

$$\begin{aligned} H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta)) &= \langle \theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \rangle \\ &\oplus \langle \theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \rangle^\perp \end{aligned}$$

via la métrica  $B$  dada en el teorema de Wirtinger

$$\begin{aligned} H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta)) &= \langle \theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \rangle \\ &\oplus \langle \theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \rangle^\perp \\ &\oplus \langle \theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \rangle^\perp \end{aligned}$$

via la descomposición inducida por la aplicación de Abel-Prym.

Así

$$H^0(Z_c, \omega_{Z_c}) \simeq (\langle \theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \rangle^\perp)^+ \oplus (\langle \theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \rangle^\perp)^-.$$

Resumiendo tenemos la siguiente:

**Proposición.6.**

Existe una base  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_7$ , de  $H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$  tal que:

- (i)  $\sigma_0 = \theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2)$ .
- (ii)  $\sigma_1|_{Z_c}, \dots, \sigma_4|_{Z_c}$ , es base del espacio invariante  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})^+ \simeq H^0(Y_c, \omega_{Y_c})$ .
- (iii)  $\sigma_5|_{Z_c}, \dots, \sigma_7|_{Z_c}$ , es base del espacio anti-invariante  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})^- \simeq H^0(X, \omega_X)$ .
- (iv)  $\text{Im}j^* = H^0(Z_c, \omega_{Z_c})^-$ .

□

## 1.2 Una relación entre la homología de la curva $Z_c$ y la pareja $(X, L)$

A continuación estamos interesados en describir como es la base de homología asociada a la curva  $Z_c$  en términos de la base de homología de la curva  $X$  y del punto  $c \in JX$  genérico, para lo cual usaremos la representación  $f: X \rightarrow P_1$  determinada por el haz lineal  $L$ .

El resultado principal de esta sección es mostrar que podemos construir una base de homología de la curva  $Z_c$  como la clase de homología de ciertos productos fibrados de trayectorias en  $X$  los cuales están determinados por la aplicación  $f$ .

Dado  $L \in \text{Pic}^d X$  el haz correspondiente al punto genérico  $c \in JX$ , esto es,  $L = \omega_X \otimes c$  es en particular libre de puntos base, consideremos el morfismo<sup>1</sup>

$$f: X \rightarrow \text{Proj} S(H^0(X, L)^*) = P_1$$

$$p \mapsto (s_0(p); s_1(p))$$

donde  $s_0, s_1$  es una base de  $H^0(X, L)$  y supondremos que es simple.

Al tomar el producto fibrado  $X \times_f X$  sobre  $P_1$ , se demuestra en [Rec.2], [Pla] lo siguiente:

(i) El producto fibrado  $X \times_f X$  consta de dos componentes irreducibles, las cuales denotaremos por  $\hat{X}$  y  $\Delta_X$  respectivamente. Es posible ver además que estas componentes son curvas de géneros 19 y 3 donde  $\Delta_X = \{(z, z) | z \in X\}$  es isomorfo a la curva  $X$  y  $\hat{X}$  es un cubriente ramificado 3 a 1 de la curva  $X$ .

(ii) Dichas componentes se cortan transversalmente en un número finito de puntos, a saber, los puntos de la forma  $(p_i, p_i) \in \hat{X} \cap \Delta_X$ , donde  $p_i \in X$ ,  $i = 1, 2, \dots, 12$  son los puntos de ramificación de  $f$ .

(iii) La curva  $\hat{X}$  tiene de manera natural la involución  $T(x, y) = (y, x)$ , la cual tiene como puntos fijos los puntos de la forma  $(p_i, p_i) \in \hat{X} \cap \Delta_X$ , donde  $p_i \in X$ ,  $i = 1, 2, \dots, 12$  son los puntos de ramificación de  $f$ .

Luego entonces,  $\pi_T: \hat{X} \rightarrow \hat{X}/\langle T \rangle$  es un cubriente doble ramificado, y tal que  $\hat{X}/\langle T \rangle$ , es isomorfo a la curva  $Z_c$ , esta curva tiene la involución  $\iota_T(p_1 + p_2) = p_3 + p_4$  donde  $f^{-1}(f(p)) = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ , la cual corresponde con la involución  $\iota$  definida sobre la curva  $Z_c$  según el diagrama;

<sup>1</sup> $L = \mathcal{O}(K + c)$  tiene punto base si y sólo si  $|K + c| = |K + p - q|$  con  $p, q \in X$ ,  $p \neq q$ , esto es, si y sólo si  $c \in (X - X) - \{0\}$  el cual es un punto no genérico.



$$\hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_g, \hat{\omega}_{g+1}, \dots, \hat{\omega}_{g+n-1}, \hat{\omega}'_1, \dots, \hat{\omega}'_g$$

entonces para  $1 \leq k \leq g$  y  $g+1 \leq l \leq g+n-1$ ,

$$\hat{\omega}_k(x) = -\hat{\omega}'_k(T(x)) \text{ y } \hat{\omega}_l(x) = -\hat{\omega}_l(T(x)) \quad (8)$$

para todo punto  $x \in \hat{C}$ .

Así la base dual sobre  $\hat{C}$  está dada por

$$\tilde{\omega}_k = \hat{\omega}_k - \hat{\omega}'_k \text{ para } 1 \leq k \leq g$$

mientras que

$$\tilde{v}_k = \hat{\omega}_k + \hat{\omega}'_k \text{ para } 1 \leq k \leq g$$

y

$$\tilde{v}_k = \hat{\omega}_k \text{ para } g+1 \leq k \leq g+n-1$$

son las  $g+n-1$  diferenciales de Prym normalizadas linealmente independientes sobre  $\hat{C}$ . Así la matriz de Riemann de  $\hat{C}$  tiene la forma

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} \frac{\pi_{11} + \tau_{11}}{2} & \pi_{kj} & \frac{\pi_{1l} - \tau_{1l}}{2} \\ \pi_{ij} & 2\pi_{ij} & \frac{\pi_{kj}}{2} \\ \frac{\pi_{1l} - \tau_{1l}}{2} & \pi_{ij} & \frac{\pi_{1l} + \tau_{1l}}{2} \end{pmatrix} \text{ para } \begin{matrix} 1 \leq k, l \leq g, \\ g+1 \leq i, j \leq g+n-1 \end{matrix}$$

donde  $\tau$  es la matriz de Riemann de  $C$  y

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_{kl} & \pi_{kj} \\ \pi_{ij} & \pi_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \beta_i v_k & \frac{1}{2} \int \beta_j v_k \\ \int \beta_i v_i & \frac{1}{2} \int \beta_j v_i \end{pmatrix} \text{ para } \begin{matrix} 1 \leq k, l \leq g, \\ g+1 \leq i, j \leq g+n-1 \end{matrix}$$

es una matriz simétrica  $(g+n-1) \times (g+n-1)$  de parte imaginaria positiva definida, es decir,  $\pi$  es una matriz de Riemann.

A continuación usaremos la existencia de bases que satisfacen las condiciones (6), (7) para mostrar el siguiente:

**Teorema.7.**

Existe una base  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{19}, \tilde{\beta}_{19}$  de la homología entera de  $\tilde{X}$  que satisface las condiciones de Fay, (6), (7) y tal que:

(i) Los ciclos  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\alpha}_7, \tilde{\beta}_7$ , descienden a una base  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\alpha}_7, \tilde{\beta}_7$ , de la homología entera de  $Z_c$ .

(ii) Los ciclos  $\tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\alpha}_7, \tilde{\beta}_7$ , son clase de homología del producto fibrado de lazos de  $X$ .

(iii) El ciclo  $\tilde{\beta}_1$ , asociado al cubriente doble  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$  esta determinado por el morfismo  $f : X \rightarrow P_1$  asociado a la pareja  $(X, L)$ , mientras que el ciclo  $\tilde{\alpha}_1$  es un ciclo complementario.

**Demostación:**

Consideraremos el morfismo  $f : X \rightarrow P_1$  asociado a la pareja  $(X, L)$  y supongamos que dicho cubriente es simple.

Como  $p_i \in X$  son los puntos donde se ramifica  $f$ , si denotamos por  $b_i \in P_1$  la imagen de  $p_i$  bajo  $f$ , esto es,  $f(p_i) = b_i$  y como  $f$  es simple, entonces  $f^{-1}(b_i)$  consta de 3 puntos distintos, los cuales denotaremos  $p_i, p_i^2, p_i^3$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, 12$ .

Denotemos por  $B_i \subset P_1$  el lugar de ramificación de  $f$ , esto es, el conjunto de los puntos  $f(p_i) = b_i \in P_1$  tales que  $p_i$  es punto de ramificación de  $f$ .

Luego entonces los puntos de ramificación de la proyección en el primer factor  $pr_1 : \tilde{X} \rightarrow X$  son los puntos de  $\tilde{X}$  de la forma  $(p_i^k, p_i)$  con  $k = 3, 4$ ,  $i = 1, 2, \dots, 12$ . Esto es, el divisor de ramificación  $R_{pr_1} = \sum_{i,k} (p_i^k, p_i)$  mientras que los puntos rama de la proyección en el segundo factor  $pr_2 : \tilde{X} \rightarrow X$  son los puntos de  $\tilde{X}$  de la forma  $(p_i, p_i^k)$  con  $k = 3, 4$ ,  $i = 1, 2, \dots, 12$ . Esto es  $R_{pr_2} = \sum_{i,k} (p_i, p_i^k)$

A continuación veremos que existe una base  $Z_c$  que satisface la condición (i) dada en el Teorema 7, y posteriormente veremos como obtener esta base a partir de la información proporcionada por la pareja  $(X, c)$  que satisface las condiciones (ii) y (iii) del Teorema 7.

Como  $\pi_T : \tilde{X} \rightarrow Z_c$  es un cubriente doble ramificado de  $Z_c$  el cual se ramifica en los puntos de la forma  $\tilde{p}_i = (p_i, p_i)$  donde  $p_i$  es punto de ramificación de  $f : X \rightarrow P_1$  para  $i = 1, \dots, 12$ , de acuerdo con las relaciones (6), y (7) antes mencionadas, existe una base canónica de homología

$$\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\alpha}_7, \tilde{\beta}_7, \tilde{\alpha}_8, \tilde{\beta}_8, \dots, \tilde{\alpha}_{12}, \tilde{\beta}_{12}, \tilde{\alpha}_{13}, \tilde{\beta}_{13}, \dots, \tilde{\alpha}_{19}, \tilde{\beta}_{19} \quad (9)$$

tal que  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\alpha}_7, \tilde{\beta}_7$  desciende a una base canónica de homología de

$H_1(Z_c, \mathbf{Z})$  y

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{12+k} + T(\tilde{\alpha}_k) &= \tilde{\beta}_{12+k} + T(\tilde{\beta}_k) = 0, & 1 \leq k \leq 7 \\ \tilde{\alpha}_l + T(\tilde{\alpha}_l) &= \tilde{\beta}_l + T(\tilde{\beta}_l) = 0, & 8 \leq l \leq 12\end{aligned}\quad (10)$$

donde las igualdades son módulo homología.

En particular como  $H_1(\tilde{X}, \mathbf{Z})$  es un grupo libre en los generadores  $\tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j$ , con  $j = 1, \dots, 19$ , tenemos que

$$\begin{aligned}H_1(\tilde{X}, \mathbf{Z}) &\simeq \langle \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\alpha}_7, \tilde{\beta}_7 \rangle \oplus \langle \tilde{\alpha}_8, \tilde{\beta}_8, \dots, \tilde{\alpha}_{12}, \tilde{\beta}_{12} \rangle \\ &\oplus \langle \tilde{\alpha}_{13}, \tilde{\beta}_{13}, \dots, \tilde{\alpha}_{19}, \tilde{\beta}_{19} \rangle \\ &\simeq \langle \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\alpha}_7, \tilde{\beta}_7 \rangle \oplus \langle \tilde{\alpha}_8, \tilde{\beta}_8, \dots, \tilde{\alpha}_{12}, \tilde{\beta}_{12} \rangle \\ &\oplus \langle -T(\tilde{\alpha}_1), -T(\tilde{\beta}_1), \dots, -T(\tilde{\alpha}_7), -T(\tilde{\beta}_7) \rangle \\ &\simeq H_1(Z_c, \mathbf{Z}) \oplus \langle \tilde{\alpha}_8, \tilde{\beta}_8, \dots, \tilde{\alpha}_{12}, \tilde{\beta}_{12} \rangle \\ &\oplus H_1(Z_c, \mathbf{Z}).\end{aligned}\quad (11)$$

Por otra parte, como  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$  es el cubriente doble no ramificado de  $Y_c$  inducido por  $f : X \rightarrow \mathbf{P}_1$  con involución  $\iota : Z_c \rightarrow Z_c$ , entonces podemos escoger bases normalizadas  $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\alpha}_7, \hat{\beta}_7$  y  $\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\alpha}_4, \bar{\beta}_4$  para  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})$  y  $H_1(Y_c, \mathbf{Z})$  respectivamente tales que:

$$\begin{aligned}\pi_*(\hat{\alpha}_1) &= \bar{\alpha}_1 & \pi_*(\hat{\beta}_1) &= 2\bar{\beta}_1 \\ \pi^*(\bar{\alpha}_i) &= \hat{\alpha}_i + \hat{\alpha}_{3+i} & \pi^*(\bar{\beta}_i) &= \hat{\beta}_i + \hat{\beta}_{3+i} \quad \text{para } i = 2, 3, 4. \\ \iota^*(\hat{\alpha}_i) &= \hat{\alpha}_{3+i} & \iota^*(\hat{\beta}_i) &= \hat{\beta}_{3+i}\end{aligned}\quad (12)$$

para más detalles ver [ACGH].

Y como

$$H_1(Z_c, \mathbf{Z}) \simeq \langle \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\alpha}_7, \tilde{\beta}_7 \rangle \simeq \langle \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\alpha}_7, \hat{\beta}_7 \rangle$$

en particular podemos escoger los ciclos  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\alpha}_7, \tilde{\beta}_7$ , dados en (9) que satisfagan las condiciones dadas en la ecuación (12) y como  $H_1(\hat{X}, \mathbf{Z})$  queda descrito por la relación (11), entonces podemos escoger una base canónica de homología

$$\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\alpha}_7, \tilde{\beta}_7, \tilde{\alpha}_8, \tilde{\beta}_8, \dots, \tilde{\alpha}_{12}, \tilde{\beta}_{12}, \tilde{\alpha}_{13}, \tilde{\beta}_{13}, \dots, \tilde{\alpha}_{19}, \tilde{\beta}_{19}.$$

para  $H_1(\hat{X}, \mathbf{Z})$  la cual satisface simultaneamente las condiciones requeridas en las ecuaciones (10), y (12),

De ahora en adelante y a menos que se especifique lo contrario, suponemos que las bases de  $H_1(\hat{X}, \mathbf{Z})$ ,  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})$  y  $H_1(Y_c, \mathbf{Z})$  con que trabajemos satisfacen simultaneamente las condiciones (10) y (12). Además denotaremos por  $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i$  para  $i = 1, \dots, 7$  los ciclos en  $H_1(\hat{X}, \mathbf{Z})$  que descienden a una base de la homología entera que satisface las condiciones (10), y (12), y por  $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i$  para  $i = 1, \dots, 7$  su proyección en  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})$ .

Como el diagrama dado en (5) es un diagrama conmutativo de curvas y como  $\hat{X}$  es arco conexo, el homomorfismo  $\chi : \pi_1(\hat{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow H_1(\hat{X}, \mathbf{Z})$  que asocia a cada lazo  $\gamma \in \pi_1(\hat{X}, \tilde{x}_0)$  su clase de homología es sobre, por tanto todo ciclo en  $H_1(\hat{X}, \mathbf{Z})$  puede representarse por medio de un lazo en  $\hat{X}$ . (Por abuso de lenguaje usaremos la misma notación para la curva que para su clase de homología).

Si nuevamente denotamos por  $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i : [0, 1] \rightarrow \hat{X}$  trayectorias que representen a los ciclos,  $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i$ , (los cuales podemos suponer que no pasen por los puntos de ramificación de  $\hat{f}$ ), como los ciclos  $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$  descienden a una base  $\{\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i\}_{i=1, \dots, 7}$  de  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})$  la cual satisface la relación (12) y por la conmutatividad del diagrama (5) se tiene que podemos escoger representantes de los  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ -ciclos  $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i : [0, 1] \rightarrow \hat{X}$  tales que

$$\begin{aligned} \iota(\pi_{T_*}(\tilde{\alpha}_i)) &= \pi_{T_*}(\tilde{\alpha}_{3+i}) = \hat{\alpha}_{3+i} \\ \iota(\pi_{T_*}(\tilde{\beta}_i)) &= \pi_{T_*}(\tilde{\beta}_{3+i}) = \hat{\beta}_{3+i} \end{aligned} \quad \text{para } i = 2, 3, 4$$

como funciones.



De donde por la conmutatividad del diagrama (5) podemos escoger los representantes  $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i : [0, 1] \rightarrow \hat{X}$  tales que

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\tilde{\alpha}_i)(t) &= \tilde{f}(\tilde{\alpha}_{3+i})(t) \\ \tilde{f}(\tilde{\beta}_i)(t) &= \tilde{f}(\tilde{\beta}_{3+i})(t)\end{aligned}$$

y por la conmutatividad del lado izquierdo de (5) tenemos

$$\begin{aligned}f \cdot pr_j(\tilde{\alpha}_i)(t) &= f \cdot pr_j(\tilde{\alpha}_{3+i})(t) \\ f \cdot pr_j(\tilde{\beta}_i)(t) &= f \cdot pr_j(\tilde{\beta}_{3+i})(t)\end{aligned} \quad \text{para } j = 1, 2, i = 2, 3, 4. \quad (13)$$

Como la involución  $\iota : Z_c \rightarrow Z_c$  corresponde a  $\iota(p_1 + p_2) = p_3 + p_4$ , (ver [Rec.2] y [Pla]) donde  $f^{-1}(f(p_1)) = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  luego entonces las funciones  $pr_j(\tilde{\alpha}_i)$  y  $pr_j(\tilde{\alpha}_{3+i})$  son distintas.

Y como  $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i : [0, 1] \rightarrow \hat{X}$  y  $\hat{X} \subset X \times_f X$  no corta la diagonal entonces  $pr_j(\tilde{\alpha}_i) \neq pr_k(\tilde{\alpha}_i)$ , como funciones, donde  $\{j, k\} = \{1, 2\}$ . Pero como consecuencia de las relaciones dadas en la ecuación (13) y del hecho de que  $f$  es un cubriente 4 a 1 obtenemos

$$\begin{aligned}f^{-1}(f \cdot pr_1(\tilde{\alpha}_i)(t)) &= pr_1(\tilde{\alpha}_i)(t) \cup pr_2(\tilde{\alpha}_i)(t) \\ &\cup pr_1(\tilde{\alpha}_{3+i})(t) \cup pr_2(\tilde{\alpha}_{3+i})(t) \\ f^{-1}(f \cdot pr_1(\tilde{\beta}_i)(t)) &= pr_1(\tilde{\beta}_i)(t) \cup pr_2(\tilde{\beta}_i)(t) \\ &\cup pr_1(\tilde{\beta}_{3+i})(t) \cup pr_2(\tilde{\beta}_{3+i})(t)\end{aligned}$$

para  $i = 2, 3, 4$ .

Denotemos por  $\alpha_{i-1}^j, \beta_{i-1}^j : [0, 1] \rightarrow X$  las trayectorias  $pr_j(\tilde{\alpha}_i)$ ,  $pr_j(\tilde{\beta}_i)$  y por  $\alpha_{i-1}^{j+2}, \beta_{i-1}^{j+2} : [0, 1] \rightarrow X$  las trayectorias  $pr_j(\tilde{\alpha}_{3+i})$ ,  $pr_j(\tilde{\beta}_{3+i})$  para  $i = 2, 3, 4$ ,  $j = 1, 2$  (respectivamente).

Entonces

$$\begin{aligned}f^{-1}(f \cdot pr_1(\tilde{\alpha}_i)(t)) &= \alpha_{i-1}^1(t) \cup \alpha_{i-1}^2(t) \cup \alpha_{i-1}^3(t) \cup \alpha_{i-1}^4(t), \\ f^{-1}(f \cdot pr_1(\tilde{\beta}_i)(t)) &= \beta_{i-1}^1(t) \cup \beta_{i-1}^2(t) \cup \beta_{i-1}^3(t) \cup \beta_{i-1}^4(t),\end{aligned}$$

y como consecuencia de la propiedad universal del producto fibrado tenemos que  $\tilde{\alpha}_i(t) = (\alpha_{i-1}^1(t), \alpha_{i-1}^2(t)) =: (\alpha_{i-1}^1 \times_f \alpha_{i-1}^2)(t)$  y  $\tilde{\beta}_i(t) = (\beta_{i-1}^1(t), \beta_{i-1}^2(t)) =: (\beta_{i-1}^1 \times_f \beta_{i-1}^2)(t)$ .

En particular como

$$H_1(Z_c, \mathbf{Z}) \simeq \langle \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1 \rangle \oplus \langle \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\alpha}_7, \hat{\beta}_7 \rangle$$

y como todo ciclo en  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})$  es una combinación de los elementos  $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i$  tenemos que todo ciclo  $\tilde{\gamma}$  en  $\langle \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\alpha}_7, \hat{\beta}_7 \rangle$  tiene asociado un conjunto

$$\Gamma = \left\{ \gamma^1, \dots, \gamma^4 \mid \begin{array}{l} \gamma^i : [0, 1] \rightarrow X \text{ es una trayectoria en } X \\ \text{tal que } f^{-1}(f(\gamma^i(t))) = \cup_{j=1}^4 \gamma^j(t) \end{array} \right\}$$

y  $\tilde{\gamma}$  es la clase de homología de la proyección en  $Z_c$  de un producto de trayectorias en  $X$ , esto es,  $\tilde{\gamma}$  es de la forma  $\pi_{T_c}(\gamma^1 \times_f \gamma^2)$ , y  $\iota(\tilde{\gamma}) = \pi_{T_c}(\gamma^3 \times_f \gamma^4)$ . En este caso diremos que el conjunto  $\Gamma = \{\gamma^1, \dots, \gamma^4\}$  es un *conjunto saturado* asociado al ciclo  $\tilde{\gamma}$ . lo cual demuestra la condición (ii) del Teorema 1.

Finalmente, como  $\pi_*(\hat{\beta}_1) = 2\tilde{\beta}_1$  y el morfismo  $\iota : Z_c \rightarrow Z_c$  es no ramificado, entonces  $\tilde{\beta}_1$  es  $\iota$ -invariante, esto es  $\iota(\tilde{\beta}_1) = \tilde{\beta}_1$  como ciclos.

Por otra parte, como  $\pi_{T_c}(\hat{\beta}_1) = \tilde{\beta}_1$ , y como  $\chi : \pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0) \rightarrow H_1(\hat{X}, \mathbf{Z})$  es sobre, podemos escoger una trayectoria la cual denotaremos nuevamente por  $\tilde{\beta}_1 : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\chi(\tilde{\beta}_1) = \tilde{\beta}_1$ , de donde  $\pi_{T_c}(\tilde{\beta}_1) : [0, 1] \rightarrow Z_c$  es un representante del ciclo  $\tilde{\beta}_1$ .

Tomemos trayectorias  $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}'_1 : [0, 1] \rightarrow \hat{X}$  tales que

- (i)  $\tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}'_1$ ,
- (ii)  $\iota_* \pi_{T_c} \hat{\beta}_1 = \pi_{T_c} \hat{\beta}'_1$ ,
- (iii)  $\pi_* \pi_{T_c} \hat{\beta}_1 = \tilde{\beta}_1$ .

A nivel de trayectorias representantes, " $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}'_1$ " significa sumar trayectorias.

Podemos suponer además que  $\tilde{\beta}_1$  esta dada como

$$\tilde{\beta}_1(t) = \begin{cases} \hat{\beta}_1(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \hat{\beta}'_1(2t) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Como  $\tilde{\beta}_{14} + T(\tilde{\beta}_1) = 0$  entonces  $\tilde{\beta}_{14} + T(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}'_1) = 0$  y podemos escoger trayectorias  $\hat{\beta}_1^3, \hat{\beta}_1^4$  de  $-\tilde{\beta}_{14}$  tales que

- (i)  $\hat{\beta}_1^3 + \hat{\beta}_1^4 = -\tilde{\beta}_{14}$ ,

$$(ii) \tilde{f}(\hat{\beta}_1^3) = \tilde{f}(\hat{\beta}_1^4),$$

$$(iii) T(\hat{\beta}_1) = \hat{\beta}_1^3 \text{ y } T(\hat{\beta}_1') = \hat{\beta}_1^4,$$

en particular existen trayectorias en  $X$

$$\hat{b}_k : [0, 1] \longrightarrow X \quad k = 1, \dots, 4,$$

tales que

$$(i) f^{-1}(f(\hat{b}_1)) = \cup_{k=1}^4 \hat{b}_k,$$

$$(ii) \hat{\beta}_1 = \hat{b}_1 \times_f \hat{b}_2 \text{ y } \hat{\beta}_2 = \hat{b}_3 \times_f \hat{b}_4,$$

Esto es, el ciclo  $\hat{\beta}_1$  que determina el cubiente  $\pi : Z_c \longrightarrow Y_c$  depende solamente de la curva  $X$  y la información dada por el morfismo  $f : X \longrightarrow \mathbf{P}_1$ , por otro lado (12) como  $\tilde{\alpha}_1$  es un ciclo complementario, entonces por la conmutatividad del diagrama (5) tenemos que  $\iota(\tilde{\alpha}_1)$  es tal que

$$\tilde{f}(\iota(\tilde{\alpha}_1)) = \tilde{f}(\tilde{\alpha}_1).$$

Como  $\tilde{\alpha}_1$  desciende a  $\tilde{\alpha}_1$ , si denotamos por  $\iota(\tilde{\alpha}_1)$  el ciclo en  $\tilde{X}$  que desciende a  $\tilde{\alpha}_1$ , entonces podemos escoger representantes de estos ciclos  $\tilde{\alpha}_1, \iota(\tilde{\alpha}_1) : [0, 1] \longrightarrow \tilde{X}$  tales que

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1(t) &\neq \iota(\tilde{\alpha}_1)(t), \\ \tilde{f}(\iota(\tilde{\alpha}_1))(t) &= \tilde{f}(\tilde{\alpha}_1)(t), \end{aligned}$$

de donde, podemos encontrar trayectorias en  $X$

$$a_k : [0, 1] \longrightarrow X, \quad \text{para } k = 1, \dots, 4,$$

tales que

$$(i) f^{-1}(f(a_1)) = \cup_{k=1}^4 a_k,$$

$$(ii) \tilde{\alpha}_1 = a_1 \times_f a_2 \text{ y } \iota(\tilde{\alpha}_1) = a_3 \times_f a_4.$$

Esto es el ciclo  $\tilde{\alpha}_1$  tiene al conjunto  $\Gamma_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  como conjunto saturado asociado, con lo cual concluimos la demostración del Teorema 7.  $\square$

Anteriormente hemos visto que hay una base de la homología entera de  $Z_c$  cuyos elementos son clase de homología del producto fibrado de trayectorias en  $X \pmod{T}$ , donde estas trayectorias pertenecen al conjunto saturado asociado.<sup>3</sup> Por otra parte, nos interesa construir una base de la homología

<sup>3</sup>Como todo ciclo en  $Z_c$  puede expresarse como una combinación lineal entera de los elementos de esta base, tenemos que todo ciclo en  $Z_c$  puede expresarse en esta forma.

entera de  $Z_c$  a partir de una base de  $H_1(X, \mathbf{Z})$  y de su representación como cubriente 4 a 1 de  $\mathbf{P}_1$  inducida por el haz lineal  $L = \mathcal{O}_X(K + c)$ , para esto veremos que podemos encontrar una base de  $H_1(X, \mathbf{Z})$  "adaptada" a la representación de  $X$  como cubriente 4 a 1 de  $\mathbf{P}_1$ , de manera que a cada elemento de esta base le corresponde un elemento de  $H_1(Y_c, \mathbf{Z})$ , y como consecuencia del Teorema 1, tenemos que a cada elemento de la base de  $H_1(X, \mathbf{Z})$  le corresponde un conjunto saturado, con lo cual construiremos un conjunto independiente de trayectorias en  $\hat{X}$  cuya clase de homología descende a un conjunto independiente de ciclos en  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})$ , los cuales nos ayudaran a formar una base de este espacio.

En [B.E. pag. 96 ] Teorema (4.1) se tiene el siguiente resultado:

**Teorema.8.**

*Sea  $M^2$  una variedad conexa de dimensión 2,  $\varphi : M^2 \rightarrow S^2$  un cubriente simple ramificado de grado al menos 3,  $f : M^2 \rightarrow M^2$  un homeomorfismo. Entonces existen homeomorfismos  $h : M^2 \rightarrow M^2$  y  $\bar{h} : S^2 \rightarrow S^2$  tal que  $h$  es isotópico a  $f$  y el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} M^2 & \xrightarrow{h} & M^2 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ S^2 & \xrightarrow{\bar{h}} & S^2 \end{array}$$

En cuya demostración se construye una base de  $H_1(M^2, \mathbf{Z})$  utilizando levantamientos de ciertas "aplicaciones de torcimiento" de  $S^1$  a  $M^2$  correspondientes al sistema de Hurwitz que determina la aplicación  $\varphi$

Así, como consecuencia de la demostración de este resultado obtenemos la existencia de una base de la homología entera de  $X$  "adaptada" a la representación, obteniéndose en particular el siguiente resultado:

**Corolario.9.**

*Sea  $M$  una variedad real bidimensional, orientable, compacta, conexa de género  $g$ , y denotemos por  $S^2$  la esfera. Si  $f : M \rightarrow S^2$  es un cubriente simple de grado  $n$ ,  $n \geq 3$ , que preserva orientación y si  $\rho_f : \pi_1(S^2 \setminus B_f) \rightarrow S_n$  es su representación asociada, entonces podemos encontrar un conjunto  $a_i, b_i, c_j$  ( $1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq g - 1$ ) de curvas estándar, como muestra la siguiente figura:*

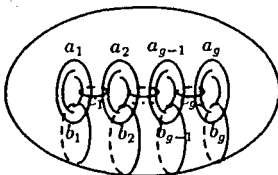


Fig. 1

tales que  $\{a_i, b_i\}$  es una base de la homología entera de  $M$  "adaptada" a la representación  $\rho_f$ .

La idea de la demostración del Teorema 8 es la siguiente:

Si  $M_0$  es una copia de  $M_2$  y  $f_2 : M_0 \rightarrow S^2$  es el cubriente ramificado de grado 2 dado como la transformación de órbita de la involución  $T$  que rota  $M_0$  por un ángulo de  $180^\circ$  con respecto al eje horizontal en la (Fig. 1).

El sistema de Hurwitz de  $f_2$  asigna a cada uno de los  $2g + 2$  puntos de ramificación la trasposición  $(12) \in S_2$  y la fórmula de Riemann-Hurwitz nos garantiza que la imagen de  $f_2$  es  $S^2$ .

Salvo isotopía, las curvas  $a_i, c_i$  (así como  $b_1$  y  $b_g$ ) pueden realizarse como curvas cerradas simples  $T$ - invariantes tales que  $f_2(a_i) = \bar{a}_i$ ,  $f_2(c_i) = \bar{c}_i$  son arcos en  $S^2$ . En una vecindad tubular de cada una de estas curvas simples,  $f_2$  es equivalente al cubriente ramificado de grado 2 dado como la aplicación de órbitas de la involución  $T : A \rightarrow A$ ,  $T(r, t) = (-r, -t)$  y el arco es la imagen de  $0 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ .

Así el levantamiento de estas curvas puede verse como un levantamiento apropiado de un disco torcido en el arco correspondiente. (Lo cual es imposible para  $b_2, \dots, b_g$ ).

Si  $(n-2)S^2$  denota la unión disjunta de  $(n-2)$  copias de  $S^2$  y extendemos  $f_2$  al cubriente ramificado de grado  $n$

$$f'_2 : M_0 \cup (n-2)S^2 \rightarrow S^2$$

que transforma cada  $S^2$  en la identidad.

Si  $f''_2 : S^2 \rightarrow S^2$  es un cubriente ramificado simple de grado  $n$ , sin pérdida de generalidad su sistema de Hurwitz está dado como  $(12), (12), (13), (13), \dots, (1n), (1n)$  en el lugar de ramificación, entonces

$$f_n : (M_0 \cup (n-2)S^2) \#_f S^2 \rightarrow S^2 \#_f S^2$$

se obtiene de  $f'_n$  y  $f''_n$  como la suma conexa fibrada sobre un (12) punto en cada imagen  $S^2$ :

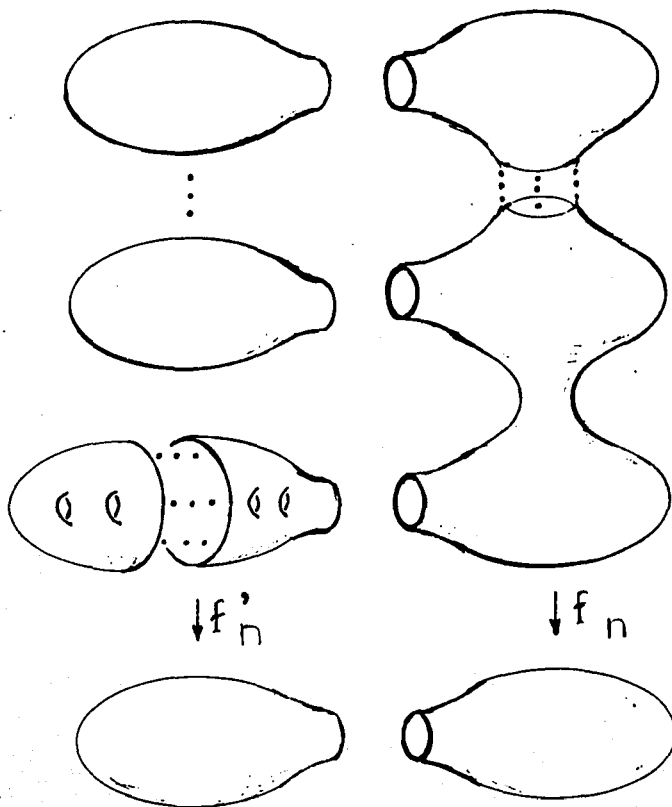


Fig. 2

Como  $((M_0 \cup (n-2)S^2) \#_f S^2) \simeq M$ , podemos tomar  $f_n$  como modelo para  $f$ .

Ahora  $f_n^{-1}(\bar{a}_i)$  consta de una curva cerrada simple  $a_i$  en  $M_0$  cerca de la cual  $f_n = f_2$  y de  $(n-2)$  arcos simples los cuales son transformados homeomórficamente por  $f_n$ . Así el disco torcido  $t(\bar{a}_i)$  se levanta a la composición de  $t(a_i)$  y  $(n-2)$  discos torcidos. Como discos torcidos son isotópicos a la identidad, el levantamiento de  $t(\bar{a}_i)$  es isotópico a  $t(a_i)$ . De manera análoga el levantamiento de  $t(\bar{c}_i)$  es isotópico a  $t(c_i)$  módulo homeomorfismos.

Solo falta encontrar algunos arcos  $\bar{b}_i$  en  $S^2$  tales que el levantamiento del disco torcido  $t(\bar{b}_i)$  sea isotópico a  $t(b_i)$ . Para esto consideremos el sistema de Hurwitz de  $f_n$  descrito en la figura 1 con los arcos deseados  $\bar{b}_i$ ; (así como los arcos  $\bar{b}_i$  y  $\bar{c}_i$ ) indicados.

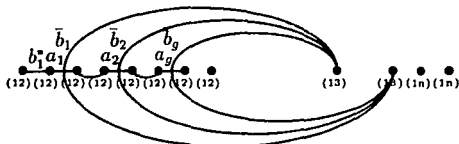


Fig. 3

Consideremos  $\bar{b}_i$ . Sobre  $\bar{b}_i$  en  $\mathcal{M}$  hay  $n$  arcos  $d_{i1}, \dots, d_{in}$  con interiores disjuntos donde  $d_{i1}$  y  $d_{i3}$  tienen los mismos puntos externos y los otros son disjuntos por pares. Sea  $\bar{b}'_i$  el lazo  $d_{i1} \cup d_{i3}$ . Como antes el disco torcido  $t(\bar{b}'_i)$  en  $S^2$  se levanta a la composición de  $t(\bar{b}'_i)$  y el disco torcido  $t(d_{ij})$ ,  $j \neq 1, 3$ , el cual es isotópico a  $t(\bar{b}'_i)$ . Luego entonces bastará ver que cada  $\bar{b}'_i$  es isotópico a la curva estándar cerrada simple  $b_i$  de la figura Fig. 2.

Como  $\bar{b}'_i$  intersecciona  $a_i$  transversalmente exactamente en un punto en "la hoja 1" y olvida las otras  $a_j$ 's para  $j \neq i$ ; y  $\bar{b}'_i$  olvida todas las  $c_j$ 's. Para ver esto es suficiente ver que si los lazos  $\bar{b}'_i$  y  $\bar{b}'_j$  se interseccionan en dos puntos, entonces pueden separarse por isotopía.

Si cortamos  $M$  a lo largo de  $b_1, a_1, \dots, a_g, c_1, \dots, c_{g-1}$ , obtenemos una superficie  $\hat{M}$  la cual es homeomorfa a un disco  $D$ , los lazos  $\bar{b}'_1 \bar{b}'_2, \dots, \bar{b}'_g$  determinan arcos simples los cuales se interseccionan un arco a otro en dos puntos en el interior de  $\hat{M}$ . Como  $\hat{M}$  es homeomorfo a un disco esto significa que los números de intersección  $\bar{b}'_i \cdot \bar{b}'_j$  son cero y los arcos correspondientes en  $\hat{M}$

pueden separarse. Así las  $b_i'$ 's son isotópicas a las  $b_i$ 's.

**Definición.10.**

Dado  $f : C \rightarrow \mathbf{P}_1$  un cubriente  $n$  a 1 simple, llamaremos base de la homología entera de  $C$  adaptada a la representación, a la base de homología determinada por el sistema de Hurwitz asociado, construida como en la demostración del Teorema 8.

A continuación nos interesa describir de manera explícita como construir los ciclos de  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})$  a partir de la información proporcionada por la pareja  $(X, c)$  para lo cual seguiremos los siguientes pasos:

(i) Usaremos las representaciones de las curvas dadas en el diagrama (5), para mostrar que, si consideramos una base canónica de la homología entera de  $X$  adaptada al morfismo  $f : X \rightarrow \mathbf{P}_1$  determinado por el haz  $L = \mathcal{O}_X(K + c)$ , cada elemento de esta base tiene asociado un ciclo en  $Y_c$ .

(ii) Como consecuencia del Teorema 7, cada ciclo de la base adaptada a  $f$  tiene asociado un conjunto saturado  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_4\}$  en  $X$ .

(iii) Finalmente veremos que tomando ciertos productos fibrados de trayectorias de un conjunto saturado en  $X$ , su clase de homología en  $\hat{X}$  constituye un conjunto linealmente independiente de ciclos en  $H_1(\hat{X}, \mathbf{Z})$  el cual desciende a una base canónica de la homología entera de  $Z_c$ .

Por el teorema de extensión de Riemann [Rie.] dar un morfismo  $f : C \xrightarrow{n:1} \mathbf{P}_1$  donde  $C$  es una superficie de Riemann compacta, conexa, es equivalente a considerar el cubriente topológico  $f : C/f^{-1}(B_f) \rightarrow \mathbf{P}_1 \setminus B_f$  lo cual a su vez equivale a dar una representación  $\rho_f : \pi_1(\mathbf{P}_1 \setminus B_f) \rightarrow S_n$ , del grupo fundamental de  $\mathbf{P}_1 \setminus B_f$ , la esfera de Riemann de  $\mathbf{P}_1$  menos el lugar de ramificación de  $f$ , el cual denotamos  $\pi_1(\mathbf{P}_1 \setminus B_f)$  en el grupo  $S_n$  de permutaciones de orden  $n$ . ( $B_f \subset \mathbf{P}_1$  denota el conjunto de los puntos  $f(p)$  tales que  $p \in C$  es un punto de ramificación de  $f$ .)

Como el cubriente  $f : X \xrightarrow{4:1} \mathbf{P}_1$  es simple y  $X$  es una curva de género 3, entonces  $\pi_1(\mathbf{P}_1 \setminus B_f)$  es un grupo libre en 12 generadores tal que, si  $\sigma_1, \dots, \sigma_{12}$  son generadores, entonces  $\sigma_1 \cdots \sigma_{12} = 1$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad [Ful.] que  $\rho_f$  está dado como sigue:



$$\begin{aligned}
 \rho_f : \pi_1(\mathbf{P}_1 \setminus B_f) &\longrightarrow S_4 \\
 \sigma_1, \dots, \sigma_8 &\mapsto (12) \\
 \sigma_9, \sigma_{10} &\mapsto (23) \\
 \sigma_{11}, \sigma_{12} &\mapsto (34).
 \end{aligned}$$

Como el cubriente  $f$  es simple siguiendo la notación de la demostración del Teorema 8, a esta representación le asociamos la siguiente figura:

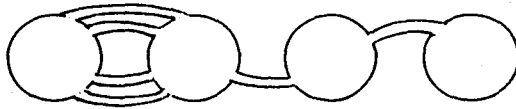


Fig. 4

Donde recordamos que ponemos un tubo via el sistema de “cortar y pegar” siempre que se tenga dos veces la misma transposición, por ejemplo,  $\sigma_9, \sigma_{10} \mapsto (23)$ .

A partir de esto y el hecho de que  $X \times_f X = \hat{X} \cup \Delta_X$  podemos obtener la representación del morfismo  $\tilde{f} : \hat{X} \rightarrow \mathbf{P}_1$  como sigue:

Denotemos por  $S_{12}$  el grupo de permutaciones en los elementos  $\{(i, j) | i \neq j, 1 \leq i, j \leq 4\}$  y por  $S_4$  el grupo de permutaciones en los elementos  $\{(i, i) | 1 \leq i \leq 4\}$ . Si

$$G: S_4 \longrightarrow S_{12}$$

es el homomorfismo dado por

$$G(\gamma)((i, j)) = (\gamma^i, \gamma^j).$$

Luego entonces  $X \times_f X$  se representa con el morfismo

$$\rho'_f: \pi_1(\mathbf{P}_1 \setminus B_f) \longrightarrow S_{12} \times S_4$$

dado como

$$\begin{aligned} \gamma_1, \dots, \gamma_8 &\mapsto [((1, 2)(2, 1))((1, 3)(2, 3))((1, 4)(2, 4))((3, 1)(3, 2))((4, 1)(4, 2)), (12)] \\ \gamma_9, \gamma_{10} &\mapsto [((1, 2)(1, 3))((2, 1)(3, 1))((2, 3)(3, 2))((2, 4)(3, 4))((4, 2)(4, 3)), (23)] \\ \gamma_{11}, \gamma_{12} &\mapsto [((1, 3)(1, 4))((3, 1)(4, 1))((2, 4)(2, 3))((3, 2)(4, 2))((3, 4)(4, 3)), (34)] \end{aligned}$$

el cual representamos mediante el siguiente diagrama:

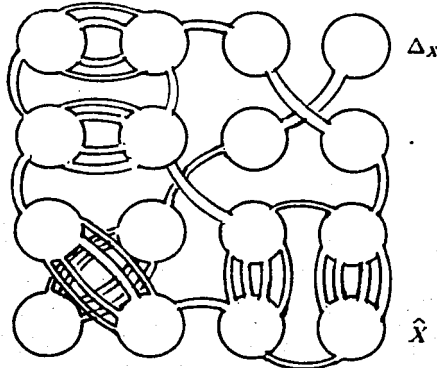


Fig. 5

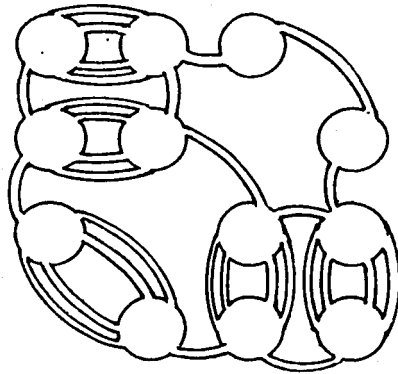
Así para obtener la representación del morfismo  $\tilde{f} : \tilde{X} \xrightarrow{12:1} \mathbf{P}_1$  consideremos ahora la proyección de está representación en el primer factor, esto es:

$$\rho_{\tilde{f}} : \pi_1(\mathbf{P}_1 \setminus B_f) \longrightarrow S_{12}$$

dada por

$$\begin{aligned} \gamma_1, \dots, \gamma_8 &\mapsto ((1, 2)(2, 1))((1, 3)(2, 3))((1, 4)(2, 4))((3, 1)(3, 2))((4, 1)(4, 2)) \\ \gamma_9, \gamma_{10} &\mapsto ((1, 2)(1, 3))((2, 1)(3, 1))((2, 3)(3, 2))((2, 4)(3, 4))((4, 2)(4, 3)) \\ \gamma_{11}, \gamma_{12} &\mapsto ((1, 3)(1, 4))((3, 1)(4, 1))((2, 4)(2, 3))((3, 2)(4, 2))((3, 4)(4, 3)) \end{aligned}$$

al cual se le asocia el diagrama:



(14)

Fig. 6

Como  $Z_c = \hat{X} / \langle T \rangle$ , entonces la curva  $Z_c$  está dada por la representación

$$\rho_{\tilde{f}}: \pi_1(\mathbf{P}_1 \setminus B_f) \rightarrow S_6$$

$$\begin{aligned} \gamma_1, \dots, \gamma_8 &\mapsto \left( \begin{array}{cc} (1, 3)(2, 3) & (1, 4)(2, 4) \end{array} \right) \\ \gamma_9, \gamma_{10} &\mapsto \left( \begin{array}{cc} (1, 2)(1, 3) & (2, 4)(3, 4) \end{array} \right) \\ \gamma_{11}, \gamma_{12} &\mapsto \left( \begin{array}{cc} (1, 3)(1, 4) & (2, 3)(2, 4) \end{array} \right) \end{aligned}$$

cuyo diagrama asociado es:

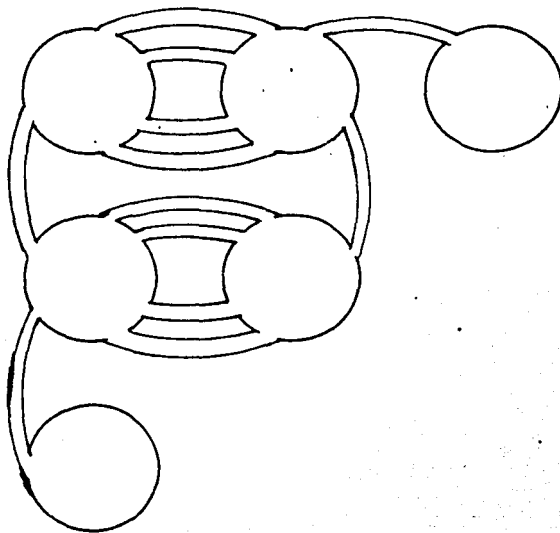


Fig. 7

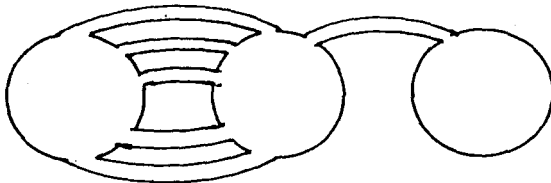
Donde  $S_6$  denota el grupo de permutaciones en los elementos  $\{((i, j), (j, i)) \mid i \neq j, 1 \leq i, j \leq 4\}$ , para facilitar la notación de esta representación, escribimos  $\overline{(i, j)}$  en vez de  $((i, j), (j, i))$ .

Finalmente, como  $Y_c = Z_c / \langle \iota \rangle$ , esta curva como cubriente 3 a 1 de  $\mathbf{P}_1$  queda determinado por la representación

$$\rho_f : \pi_1(\mathbf{P}_1 \setminus B_f) \longrightarrow S_3$$

$$\begin{aligned} \gamma_1, \dots, \gamma_{10} &\mapsto \left( \overline{(1, 3)(2, 4)}, \overline{(1, 4)(2, 3)} \right) \\ \gamma_{11}, \gamma_{12} &\mapsto \left( \overline{(1, 4)(2, 3)}, \overline{(1, 2)(3, 4)} \right) \end{aligned}$$

y lo representamos con el diagrama:



*Fig. 8*

Donde  $S_3$  denota el grupo de permutaciones en los elementos  $\{\overline{(i, j)(k, l)} \mid i < j, k < l, \text{ y } \{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}\}$ .

Luego entonces podemos describir las representaciones de las curvas dadas en (5) mediante el siguiente diagrama:

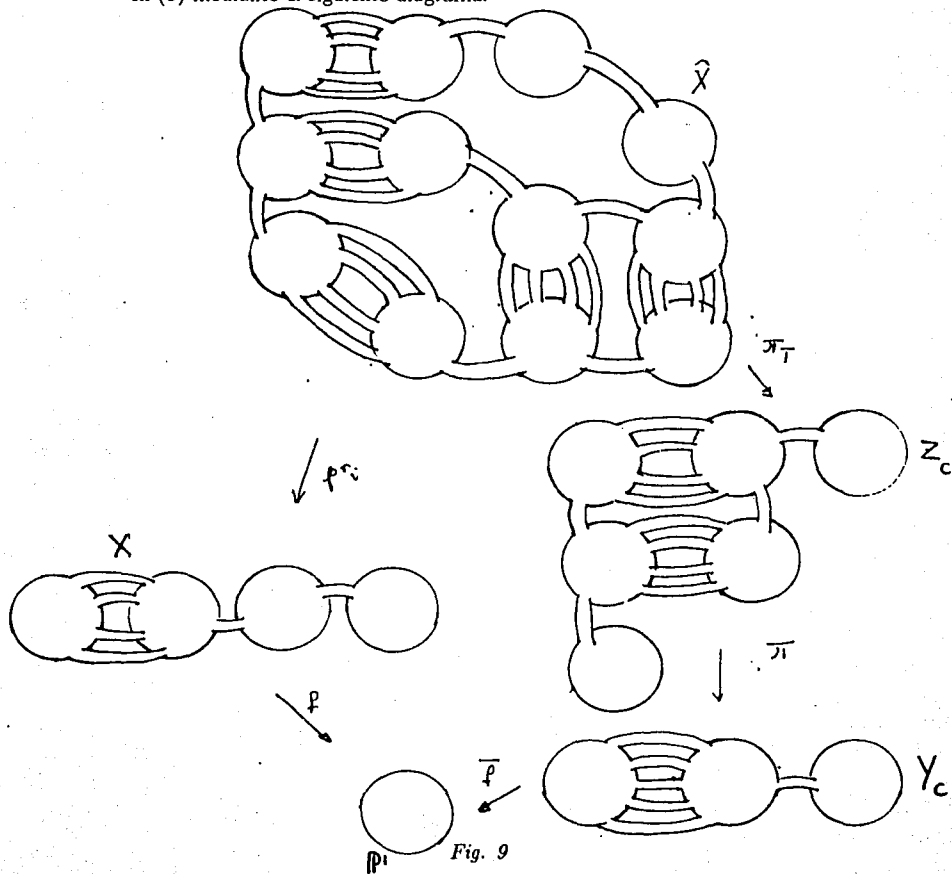


Fig. 9

Con la misma notación que antes:

**Corolario.11.**

Como los cubrientes  $f$  y  $\bar{f}$  son simples, a todo ciclo  $\gamma \in H_1(X, \mathbf{Z})$  le corresponde un ciclo  $\bar{\gamma} \in H_1(Y_c, \mathbf{Z})$  (y por tanto un ciclo  $\tilde{\gamma} \in H_1(Z_c, \mathbf{Z})$ ). Y como consecuencia del Teorema 7 tenemos que todo ciclo  $\gamma$  en  $X$  tiene un conjunto saturado asociado  $\Gamma$ .

**Demostación:**

Consideremos  $a_i$ ,  $b_i$  y  $c_i$  las curvas estándar en  $X$  asociadas a la representación  $\rho_f$  como muestran las figuras 10.1 y 10.2 de acuerdo con lo visto en el Corolario 9:

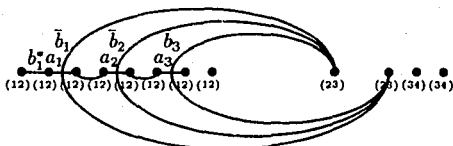


Fig. 10.1

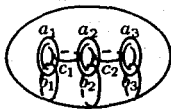


Fig. 10.2

Y sean  $\alpha_i, \beta_i$  los ciclos de la homología entera en  $H_1(X, \mathbf{Z})$  asociados a las trayectorias  $a_i$  y  $b_i$ . Como (5) es un diagrama conmutativo, tenemos en particular que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 S_4 & \xrightarrow{G} & S_{12} \\
 \rho_f \nearrow & \rho_{\tilde{f}} \nearrow & \pi \searrow \\
 \pi_1(\mathbf{P}_1 \setminus B_f) & \xrightarrow{\rho_{\tilde{f}}} & S_6 \\
 \rho_f \searrow & & \pi \searrow \\
 & & S_3
 \end{array} \tag{15}$$

Si consideramos las representaciones  $\rho_f$  y  $\rho_{\tilde{f}}$  podemos ver que las trayectorias  $a_i, b_i$  corresponden por la conmutatividad de (15) a las trayectorias  $\bar{a}_{i+1}, \bar{b}_{i+1}$ , para  $i = 1, 2, 3$ , como muestran las figuras 11.1 y 11.2:

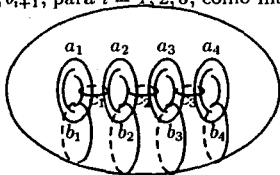


Fig. 11.1

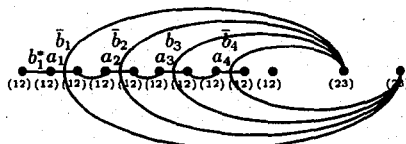


Fig. 11.2



Luego entonces si  $\tilde{\alpha}_{i+1}, \tilde{\beta}_{i+1}$  denotan los ciclos asociados, entonces como consecuencia de (12) y del Teorema 7 tenemos que cada ciclo  $\alpha_i, \beta_i$  de  $H_1(X, \mathbf{Z})$  tiene asociado un conjunto saturado  $\Gamma_i$  y  $\Gamma'_i$  respectivamente.  $\square$

Para describir como se construyen los ciclos de  $Z_c$  a partir de una base de homología de  $X$  y la representación de  $f$  utilizaremos los siguientes lemas.

**Lema. 12.**

Sea  $\Gamma = \{\gamma^1, \dots, \gamma^4\}$  un conjunto saturado en  $X$ , asociado a un ciclo  $\tilde{\gamma}$  en  $\langle \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_7, \dots, \tilde{\alpha}_7, \tilde{\beta}_7 \rangle$  y supongamos que  $\gamma_1$  es homólogo a  $\gamma_2$ . En  $H_1(\hat{X}, \mathbf{Z})$  consideremos los ciclos que representan la clase de homología de las curvas

$$\gamma^k \times_f \gamma^l : [0, 1] \longrightarrow \hat{X}$$

para  $k \neq l$  denotemos

$$\tilde{\gamma}^{k,l} = \gamma^k \times_f \gamma^l$$

entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^{1,k} &\simeq \tilde{\gamma}^{2,k} & k = 3, 4 \\ \tilde{\gamma}^{k,1} &\simeq \tilde{\gamma}^{k,2} & k = 3, 4 \\ T(\tilde{\gamma}^{k,l}) &\simeq \tilde{\gamma}^{l,k} & k, l = 1, 3, 4. \end{aligned} \tag{16}$$

**Demostación:**

Como

$$\tilde{\gamma}^{k,l} = \gamma^k \times_f \gamma^l$$

entonces

$$\begin{aligned} T(\tilde{\gamma}^{k,l})(t) &= T(\gamma^k \times_f \gamma^l)(t) \\ &= T((\gamma^k(t), \gamma^l(t))) \\ &= (\gamma^l(t), \gamma^k(t)) \\ &= (\gamma^l \times_f \gamma^k)(t). \end{aligned}$$

A continuación veremos que  $\tilde{\gamma}^{1,k} \simeq \tilde{\gamma}^{2,k}$   $k = 3, 4$ .

Como  $\gamma^1 \simeq \gamma^2$  entonces existe una 2-cadena en  $X$ ,  $c_{12}$  tal que  $\gamma^1 - \gamma^2 = \partial c_{12}$  y como  $\gamma^k$  es homólogo a cero y  $f(\gamma^1) = f(\gamma^k)$  para  $k = 2, 3, 4$ . Entonces existe una 2-cadena en  $X$ ,  $c_k$  tal que  $\gamma^k = \partial c_k$  y podemos escoger  $c_k$  tal que  $f(c_k) = f(c_{12})$ , luego entonces  $\tilde{\gamma}^{1,k} + \tilde{\gamma}^{2,k} = \partial(c_{12} \times_f c_k)$ .  $\square$

**Lema.13.**

Si  $\gamma \in H_1(\hat{X}, \mathbf{Z})$  es un ciclo tal que  $\gamma + T(\gamma)$  es homólogo a cero entonces  $pr_1(\gamma) + pr_2(\gamma)$  es homólogo a cero, en  $X$ . (Donde  $pr_i$  denota la proyección en el  $i$ -ésimo factor.)

**Demostación:**

Como  $\gamma + T(\gamma)$  es homólogo a cero entonces  $pr_1(\gamma + T(\gamma))$  es homólogo a cero, de donde  $pr_1(\gamma) + pr_1(T(\gamma))$  es homólogo a cero.

Y como  $T(x, y) = (y, x)$  entonces  $pr_2 = pr_1 \circ T$ , por tanto  $pr_1(T(\gamma))$  es homólogo a  $pr_2(\gamma)$ , lo cual implica  $pr_1(\gamma) + pr_2(\gamma)$  es homólogo a cero en  $X$ .  $\square$

Finalmente, construiremos la base de homología explícitamente que usaremos, echando mano de todo lo anterior, sea  $x_0 \in X \setminus \cup_{i,k} p_i^k$  un punto base del grupo fundamental  $\pi_1(X)$ , el cual está generado por 6 curvas cerradas simples  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_3, \beta_3$  sujetos a la relación  $\prod_{j=1}^3 \alpha_j \beta_j \alpha_j^{-1} \beta_j^{-1} = 1$ . Entonces  $H_1(X, \mathbf{Z})$  es un grupo libre en los generadores  $\alpha_j, \beta_j$ , donde  $\alpha_j$  y  $\beta_j$  denotan las clases de homología de  $\alpha_j$  y  $\beta_j$ , podemos suponer además que estas curvas no contengan a los puntos  $p_i^k$  y son las asociadas a la representación  $\rho_f$  antes mencionada:

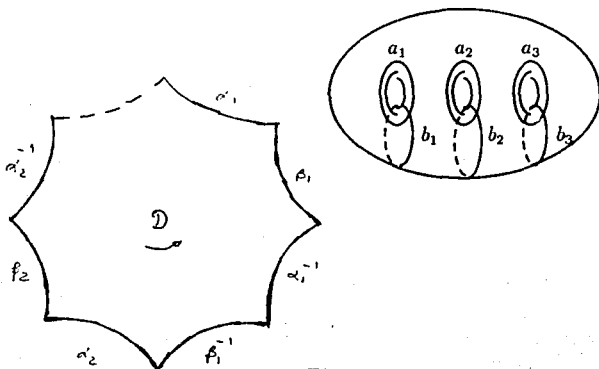


Fig. 12

Entonces  $\mathcal{D} = X \setminus (\cup_{i=1}^3 (\alpha_i \cup \beta_i))$  es una región simplemente conexa, la cual contiene en su interior a los puntos  $p_1, \dots, p_{12}, p_1^3, \dots, p_{12}^3, p_1^4, \dots, p_{12}^4$  y consideremos  $\hat{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup_{i,k} p_i^k$  para  $i = 1, \dots, 12, k = 1, 3, 4$  donde  $p_i^1 = p_i$ .

Luego entonces, si  $\alpha_1^1$  es el 1-ciclo determinado por los puntos de ramificación  $p_1, p_2$ , esto es  $\alpha_1^1$  es la clase de homología en  $X$  de una curva cerrada simple en  $\hat{\mathcal{D}}$  la cual es frontera de un disco que contiene en su interior a los puntos  $p_1, p_2$  pero no contiene a ningún otro punto  $p_i^k$ .

Si  $\Gamma_1 = \{\alpha_1^k \mid k = 1, \dots, 4\}$  es el conjunto saturado asociado a  $\alpha_1^1$  y como  $f(\alpha_1^1) = f(\alpha_1^k)$  para  $k = 2, 3, 4$  entonces podemos suponer que  $\alpha_1^k$  es una curva determinada por  $p_1^k, p_2^k$  para  $k = 3, 4$ .

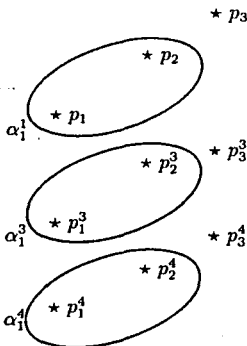


Fig. 13

Esto es, hemos construido curvas  $\alpha_1^k$  tales que;

- (i)  $f(\alpha_1^k) = a_i \in H_1(\mathbf{P}_1 \setminus B_f, \mathbf{Z})$ ,  
 (ii) Si denotamos nuevamente por  $\alpha_1^k$  la clase de homología de  $\alpha_1^k$  tenemos que  $\{\alpha_1^k\}_{k=1,2,3,4}$  es un conjunto de ciclos no homólogos entre sí, ni homólogos a cero en  $H_1(X \setminus f^{-1}(B_f), \mathbf{Z})$ . Además de la ecuación (7) y los (Lemas 12 y 13) podemos reordenar estos ciclos de manera que  $\alpha_1^1$  es homólogo a  $\alpha_1^2$  en  $H_1(X, \mathbf{Z})$ , mientras que  $\alpha_1^3, \alpha_1^4$  son homólogos a cero en  $H_1(X, \mathbf{Z})$ .

Consideremos entonces el producto fibrado  $\alpha_1^k \times_f \alpha_1$  el cual es un representante de un 1-ciclo en  $H_1(\tilde{X}, \mathbf{Z})$  no homólogo a cero, ya que  $pr_2(\alpha_1^k \times_f \alpha_1) = \alpha_1$  no es homólogo a cero.

De manera análoga, hacemos una construcción para  $i = 2, 3$ , esto es podemos encontrar  $\alpha_i^k \in H_1(X \setminus f^{-1}(B_f), \mathbf{Z})$  para  $i = 2, 3$  y  $k = 1, \dots, 4$  tales que;

- (i)  $f(\alpha_i^k) = a_i \in H_1(\mathbf{P}_1 \setminus B_f, \mathbf{Z})$ ,  
 (ii)  $\{\alpha_i^k\}_{k=1,2,3,4}$  es un conjunto de ciclos cada uno no homólogo a cero ni homólogos entre sí en  $H_1(X \setminus f^{-1}(B_f), \mathbf{Z})$ . Y podemos suponer (reordenando si es necesario) que  $\alpha_i^1$  es homólogo a  $\alpha_i^2$  en  $H_1(X, \mathbf{Z})$ , mientras que  $\alpha_i^3, \alpha_i^4$  son homólogos a cero en  $H_1(X, \mathbf{Z})$ .

En  $\tilde{D}$  consideremos una curva  $\alpha_2^2$  tal que contenga en su interior tanto a los puntos  $p_3, p_4$  como a la región limitada por la curva  $\alpha_1^2$  como muestra la siguiente figura, y sean  $\alpha_2^k$  con  $k = 3, 4$  curvas que contienen en su interior a los puntos  $p_3^k, p_4^k$  para  $k = 3, 4$ . Entonces módulo homología podemos escogerlos en forma tal que cumplan las condiciones (i) y (ii) mencionadas en el párrafo anterior.

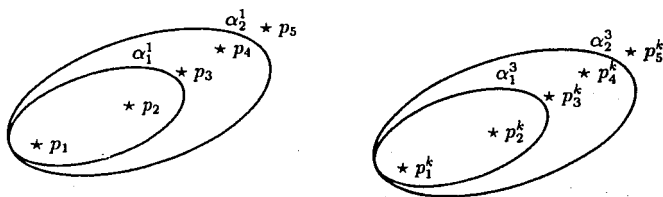


Fig. 14

Y procedemos de manera similar para construir  $\alpha_3^k$ .

Denotemos nuevamente por  $\alpha_i^k : [0, 1] \rightarrow X$  representantes de los ciclos  $\alpha_i^k \in H_1(X \setminus f^{-1}(B_f), \mathbf{Z})$   $k = 1, \dots, 4$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Y como consecuencia del lema 2 tenemos que  $\{\tilde{\alpha}_i^{1,k}, -\tilde{\alpha}_i^{k,1}, \tilde{\alpha}_i^{1,2}\}_{i=1,2,3, k=3,4}$  son 15 ciclos no homólogos a cero ni homólogos entre sí en  $\hat{X}$  que satisfacen las condiciones de Fay (7).

Por la construcción de Fay, y (16), los ciclos

$$\begin{aligned} T(\tilde{\alpha}_i^{1,3}) &\simeq \tilde{\alpha}_i^{3,1} & i = 1, 2, 3 \\ T(\tilde{\alpha}_i^{1,4}) &\simeq \tilde{\alpha}_i^{4,1} & i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

descienden a un conjunto de ciclos no homólogos a cero ni homólogos entre sí de la curva  $Z_c$ .

Así hemos visto que podemos construir  $A$ -ciclos de  $\hat{X}$  que desciendan a ciclos en  $Z_c$  los cuales son la clase de homología del producto fibrado de curvas en  $X$ , determinados por los  $A$ -ciclos en  $X$  y el morfismo  $f : X \rightarrow \mathbf{P}_1$ .

De manera análoga podemos encontrar  $\beta_i^k \in H_1(X \setminus f^{-1}(B_f), \mathbf{Z})$  para  $i = 1, 2, 3$  y  $k = 1, \dots, 4$  tales que;

(i)  $f(\beta_i^k) = b_i \in H_1(\mathbf{P}_1 \setminus B_f, \mathbf{Z})$ ,

(ii)  $\{\beta_i^k\}_{k=1,2,3,4}$  es un conjunto de ciclos no homólogos a cero ni homólogos entre sí de  $H_1(X \setminus f^{-1}(B_f), \mathbf{Z})$ . Y supongamos que  $\beta_i^1$  es homólogo a  $\beta_i^2$  en  $H_1(X, \mathbf{Z})$ , mientras que  $\beta_i^3, \beta_i^4$  son homólogos a cero.

Por ejemplo, podemos construir  $\beta_1^3$  como sigue: en  $\hat{D}$  consideremos una curva simple  $\beta_1^3$  asociada a los puntos  $p_1, \dots, p_4$  como lo muestra la siguiente figura:

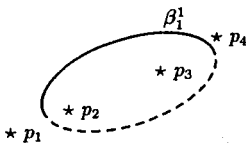


Fig. 15

tomemos ahora una curva  $\beta_i^k$  asociada a los puntos  $p_1^k, p_2^k, p_3^k, p_4^k$  para  $k = 3, 4$ , podemos escoger estas curvas (modulo homología) en forma tal que  $f(\beta_i^k) = f(\beta_i)$ , para  $k = 2, 3, 4$ .

Denotemos nuevamente por  $\beta_i^k : [0, 1] \rightarrow X$  representantes de los ciclos  $\beta_i^k \in H_1(X \setminus f^{-1}(B_f), \mathbf{Z})$   $k = 1, \dots, 4$ ,  $i = 1, 2, 3$ , como consecuencia del Lema 1 tenemos;

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_i^{1,k} &\simeq \tilde{\beta}_i^{2,k} & k = 3, 4 \quad i = 1, 2, 3 \\ \tilde{\beta}_i^{k,1} &\simeq \tilde{\beta}_i^{k,2} & k = 3, 4 \quad i = 1, 2, 3 \\ T(\tilde{\beta}_i^{k,l}) &\simeq \tilde{\beta}_i^{l,k} & k, l = 1, 3, 4 \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (17)$$

Luego  $\{\tilde{\beta}_i^{1,k}, -\tilde{\beta}_i^{k,1}, \tilde{\beta}_i^{1,2}\}_{i=1,2,3, k=3,4}$  son 15 ciclos no homólogos a cero ni homólogos entre si en  $H_1(\tilde{X}, \mathbf{Z})$ , y como consecuencia de la fórmula de proyección [H pag. 231] tenemos que  $\tilde{\alpha}_i^{jk} \cdot \tilde{\beta}_l^{m,n} = \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn}$ , esto es, son ciclos complementarios a los  $\tilde{\alpha}$  ciclos dados en (16).

Por la construcción de Fay, (7) los ciclos

$$\begin{aligned} T(\tilde{\beta}_i^{1,3}) &\simeq \tilde{\beta}_i^{3,1} & i = 1, 2, 3 \\ T(\tilde{\beta}_i^{1,4}) &\simeq \tilde{\beta}_i^{4,1} & i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

descienden a un conjunto de ciclos de homología de la curva  $Z_c$  no homólogos entre si.

En particular, de (16) y (17) podemos considerar en  $H_1(\tilde{X}, \mathbf{Z})$  los ciclos dados como la clase de homología de las trayectorias;

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_2 &= \alpha_3^3 \times_f \alpha_1 & \tilde{\beta}_2 &= \beta_3^3 \times_f \beta_1 \\ \tilde{\alpha}_3 &= \alpha_4^4 \times_f \alpha_1^2 & \tilde{\beta}_3 &= \beta_4^4 \times_f \beta_1^2 \\ \tilde{\alpha}_4 &= \alpha_3^2 \times_f \alpha_2 & \tilde{\beta}_4 &= \beta_3^2 \times_f \beta_2 \\ \tilde{\alpha}_5 &= \alpha_2^4 \times_f \alpha_2^2 & \tilde{\beta}_5 &= \beta_2^4 \times_f \beta_2^2 \\ \tilde{\alpha}_6 &= \alpha_3^3 \times_f \alpha_3 & \tilde{\beta}_6 &= \beta_3^3 \times_f \beta_3 \\ \tilde{\alpha}_7 &= \alpha_3^4 \times_f \alpha_3^2 & \tilde{\beta}_7 &= \beta_3^4 \times_f \beta_3^2, \end{aligned} \quad (18)$$

que descienden a un conjunto de generadores de  $\langle \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\alpha}_7, \tilde{\beta}_7 \rangle$  en  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})$ .

A continuación procederemos a construir el ciclo faltante  $\tilde{\alpha}_1$ .

En  $\hat{\mathcal{D}}$  consideremos curvas cerradas simples  $a_{9,10}^1$  y  $a_{9,10}^k$  que solo contengan en su interior a los puntos  $p_9, p_{10}$ , respectivamente  $p_9^k, p_{10}^k$ ,  $k = 2, 3, 4$  podemos suponer sin pérdida de generalidad que en  $H_1(X \setminus f^{-1}(B_f) \cup \{p_9, p_{10}\}, \mathbf{Z})$  se cumple que  $a_{9,10}^1 \simeq a_{9,10}^k$  mientras que  $a_{9,10}^1 \not\simeq a_{9,10}^3$  en  $H_1(X \setminus f^{-1}(B_f), \mathbf{Z})$  y  $a_{9,10}^2 \not\simeq a_{9,10}^4$  en  $H_1(X \setminus f^{-1}(B_f), \mathbf{Z})$ .

Luego entonces  $a_{9,10}^1 \times_f a_{9,10}^k$  es una curva cerrada simple la cual representa un ciclo  $\alpha_{9,10}^{1,k}$  en  $H_1(\hat{X}, \mathbf{Z})$  para  $k = 2, 4$  no homólogo a cero, pues  $\pi_T(\alpha_{9,10}^{1,k}) \simeq \tilde{\alpha}_1$  no es homólogo a cero en  $Z_c$ , y como  $\text{pr}_T \alpha_{9,10}^{1,k} \simeq 0$  en  $X$  tenemos que este ciclo no es equivalente a ninguno de los ciclos construidos anteriormente. De donde la clase de homología de la curva  $\tilde{\alpha}_1 = a_{9,10}^1 \times_f a_{9,10}^k$  junto con el  $B$ -ciclo  $\tilde{\beta}_1$  complementario, construido anteriormente completan el conjunto dado en (18) para obtener un conjunto de ciclos en  $\hat{X}$  que desciende a una base de homología de la curva  $Z_c$ ;

$$\begin{array}{ll}
 \tilde{\alpha}_1 = a_{9,10}^1 \times_f a_{9,10}^4 & \tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1 + \iota(\hat{\beta}_1) \\
 \tilde{\alpha}_2 = \alpha_1^3 \times_f \alpha_1 & \tilde{\beta}_2 = \beta_1^3 \times_f \beta_1 \\
 \tilde{\alpha}_3 = \alpha_2^3 \times_f \alpha_2 & \tilde{\beta}_3 = \beta_2^3 \times_f \beta_2 \\
 \tilde{\alpha}_4 = \alpha_3^3 \times_f \alpha_3 & \tilde{\beta}_4 = \beta_3^3 \times_f \beta_3 \\
 \tilde{\alpha}_5 = \alpha_1^4 \times_f \alpha_1 & \tilde{\beta}_5 = \beta_1^4 \times_f \beta_1 \\
 \tilde{\alpha}_6 = \alpha_2^4 \times_f \alpha_2 & \tilde{\beta}_6 = \beta_2^4 \times_f \beta_2 \\
 \tilde{\alpha}_7 = \alpha_3^4 \times_f \alpha_3 & \tilde{\beta}_7 = \beta_3^4 \times_f \beta_3.
 \end{array} \tag{19}$$

Por construcción y utilizando la fórmula de proyección podemos ver que este conjunto representa una base canónica de homología de  $Z_c$ .

**Teorema.14.**

Si  $X$  es una curva no-hiperelíptica de género  $g$  la cual tiene un  $g_4^1$  libre de divisores de la forma  $2P + 2Q$  o  $4Q$ . Si  $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$  es el cubriente doble asociado vía la construcción trigonal entonces existe una base  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{2g+1}, \tilde{\beta}_{2g+1}$  de homología para  $H_1(\tilde{C}, \mathbf{Z})$  tal que los ciclos  $\tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\alpha}_{2g+1}, \tilde{\beta}_{2g+1}$  corresponden al producto fibrado de ciclos de  $X$ , mientras que el ciclo  $\tilde{\beta}_1$  asociado al cubriente doble  $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$  está determinado por el morfismo  $f : X \xrightarrow{4:1} \mathbf{P}_1$  asociado al  $g_4^1$ , y el ciclo  $\tilde{\alpha}_1$ , es un ciclo complementario.

**Demostación:**

La demostración es completamente análoga a la hecha anteriormente para  $g = 3$ . □



### 1.3 Una relación entre las matrices de Riemann de $X$ y $Z_c$

A continuación usaremos las descripciones de  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$  y de  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})$  en términos de la información proporcionada por la pareja  $(X, c)$  para ver que es posible describir la matriz de Riemann de la curva  $Z_c$  en términos de la matriz de Riemann de la curva  $X$  y de la información proporcionada por la pareja  $(X, c)$ . Aún más, veremos que la matriz de Riemann de la curva  $Z_c$  depende localmente de manera analítica de la matriz de Riemann de la curva  $X$  y de la representación  $f : X \rightarrow \mathbf{P}_1$  determinada por el haz lineal  $L = \mathcal{O}(K_X + c)$ .

Como mencionamos anteriormente, usando el principio de dualidad de Poincaré-Serre se sabe que  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$  es dual de Poincaré de  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})$  y así la descomposición del espacio de diferenciales holomorfas  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$  en partes  $\iota$ -invariante  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})^+$  e  $\iota$ -anti-invariante  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})^-$  induce una descomposición de  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})$  en parte  $\iota$ -invariante  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})^+$  e  $\iota$ -anti-invariante  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})^-$ , esto es,

$$H_1(Z_c, \mathbf{Z}) = H_1(Z_c, \mathbf{Z})^+ \oplus H_1(Z_c, \mathbf{Z})^- .$$

En particular, como el morfismo  $j^*$  es inyectivo (Prop. 2 (3)) obtenemos inclusiones naturales entre

$$H^0(X, \omega_X) \xrightarrow{j^*} H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$$

y

$$H_1(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{j^*} H_1(Z_c, \mathbf{Z})$$

respectivamente, y como (2) tenemos un epimorfismo natural entre el espacio de funciones theta de segundo orden sobre la variedad jacobiana  $JX$  de la curva  $X$  en el espacio de las diferenciales abelianas de la curva  $Z_c$  cuyo núcleo es el subespacio generado por la sección  $\theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2)$  entonces podemos escoger  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_7 \in H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$  tales que  $\rho(\vartheta_i) \in H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , son una base de diferenciales abelianas de  $Z_c$  normalizada con respecto a la base de homología que se describe en la ecuación

(17). Esto es

$$\int_{\tilde{\alpha}_i} \vartheta_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 7.$$

De donde tenemos que la matriz de Riemann de la curva  $Z_c$  esta dada como

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \int_{\tilde{\alpha}_i} \vartheta_j \\ \tau_{ij} &= \int_{\tilde{\beta}_i} \vartheta_j \quad i, j = 1, \dots, 7, \end{aligned}$$

donde  $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i$  estan dadas por (19) son la proyección a  $Z_c$  del producto fibrado de trayectorias en  $X$  para  $i = 2, \dots, 7$ .

Como  $\iota : Z_c \rightarrow Z_c$  es una involución libre de puntos fijos, la cual intercambia las hojas de  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$  [Fa.Ra.] y cuya base canónica de homología (19) satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \iota(\tilde{\alpha}_1) &\simeq \tilde{\alpha}_1 & \iota(\tilde{\beta}_1) &\simeq \tilde{\beta}_1 \\ \iota(\tilde{\alpha}_i) &\simeq \tilde{\alpha}_{3+i} & \iota(\tilde{\beta}_i) &\simeq \tilde{\beta}_{3+i} \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Luego entonces, podemos notar que los ciclos

$$\begin{aligned} A_1 &= \tilde{\alpha}_1 & B_1 &= \tilde{\beta}_1 \\ A_i &= \tilde{\alpha}_i + \tilde{\alpha}_{i+3} & i &= 2, 3, 4 \\ B_i &= \tilde{\beta}_i + \tilde{\beta}_{i+3} & i &= 2, 3, 4, \end{aligned}$$

son  $\iota$ -invariantes, esto es, forman un conjunto de generadores de  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})^+$  mientras que

$$\begin{aligned} A_{4+i} &= \tilde{\alpha}_i - \tilde{\alpha}_{i+3} & i &= 1, 2, 3 \\ B_{4+i} &= \tilde{\beta}_i - \tilde{\beta}_{i+3} & i &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

son  $\iota$ -anti-invariantes, esto es generan  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})^-$ , y por lo mencionado en el parrafo anterior están en correspondencia uno a uno con  $H_1(X, \mathbf{Z})$  via dualidad de Poincaré-Serre y el morfismo  $j^*$  dual.

Luego entonces [Fa.Ra.], si  $\{\tilde{\vartheta}_i\}$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , representa una base de  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$  tal que  $\{\tilde{\vartheta}_i\}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , es base de  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})^+$  y  $\{\tilde{\vartheta}_i\}$ ,  $i = 5, \dots, 7$ , es base de  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})^-$ , y si  $\alpha_i, \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , es una base de

homología tal que  $\int_{\alpha_j} \tilde{\vartheta}_i = \delta_{ij}$  para  $1 \leq i, j \leq 4$ , como  $\iota$  actúa en  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})$  y en  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$  entonces

$$\int_{\alpha_{3+j}} \tilde{\vartheta}_i = \int_{\iota(\alpha_j)} \iota(\tilde{\vartheta}_i) = \delta_{ij} \quad i, j = 2, 3, 4$$

$$\int_{\beta_{3+j}} \tilde{\vartheta}_i = \int_{\iota(\beta_j)} \iota(\tilde{\vartheta}_i) \quad i, j = 2, 3, 4$$

y  $\int_{\alpha_{j+1}} \tilde{\vartheta}_{4+i} = \delta_{ij}$  para  $1 \leq i, j \leq 3$ .

Podemos encontrar una matriz de Riemann de  $Z_c$  de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{0} & \bar{0} & 2\varrho_{11} & \bar{\varrho}_1 & \bar{\varrho}_1 \\ \bar{0}^t & I & I & 2\bar{\varrho}_2^t & \varrho & \varrho \\ \bar{0}^t & I & -I & \bar{0}^t & \varpi & -\varpi \end{pmatrix} \quad (20)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\varrho}_1 &= (f_{\beta_1} \tilde{\vartheta}_1, f_{\beta_2} \tilde{\vartheta}_1, f_{\beta_3} \tilde{\vartheta}_1, ), & j &= 2, 3, 4 \\ \bar{\varrho}_2 &= (f_{\beta_1} \tilde{\vartheta}_1, f_{\beta_1} \tilde{\vartheta}_2, f_{\beta_1} \tilde{\vartheta}_3, ), & j &= 2, 3, 4 \\ \varrho &= (f_{\beta_i} \tilde{\vartheta}_j), & i, j &= 2, 3, 4 \\ \varpi &= (f_{\beta_i} \tilde{\vartheta}_j), & i, j &= 5, 6, 7 \\ I &= (\delta_{ij}), \text{ es la matriz identidad} \end{aligned}$$

y  $\bar{0}$  denota la matriz cero de orden  $1 \times 3$ , donde

$$\begin{pmatrix} 2\varrho_{11} & \bar{\varrho}_1 \\ 2\bar{\varrho}_2^t & \varrho \end{pmatrix}$$

corresponde a la matriz de Riemann de la curva  $Y_c$ , y  $(\varpi)$  corresponde a la matriz de Riemann de la variedad de Prym [Fa.Ra.].

En nuestro caso veremos que la matriz de Riemann de  $Y_c$  (o la de  $Z_c$ ) se puede expresar en términos de la información en  $(X, c)$ .

Partiremos del hecho de que existe una correspondencia birracional entre el espacio de moduli de curvas tetragonales de género 3 el cual denotaremos  $\mathcal{K}_3$ , que podemos identificar con la variedad de variedades de Kummer, y el espacio de moduli de cubrientes dobles no ramificados de curvas de género 4.

Concretamente la construcción trigonal nos dice que, dada  $X$  una curva no hiperelíptica de género 3 y  $c \in JX$  un punto genérico, a la pareja  $(X, c)$

se le asocia el cubriente doble no ramificado  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$ , donde  $Y_c$  es una curva de género 4.

Esto es, si  $\mathcal{K}_3 = \{(X, c) | X \in \mathcal{M}_3, c \in KX\}$  denota el espacio de moduli de las parejas  $(X, c)$  tales que  $X$  es una curva de género 3 y  $c \in KX$  un punto en la variedad de Kummer, y  $\mathcal{R}_4$  denota el espacio de moduli de cubrientes dobles de curvas de género 4, esto es, tenemos una aplicación birracional, denominada la aplicación de Roth [Rec.2]

$$\mathcal{R} : \mathcal{K}_3 \rightarrow \mathcal{R}_4, \quad (21)$$

la cual conmuta la aplicación de Prym

$$\text{Prym} : \mathcal{R}_4 \rightarrow \mathcal{A}_3.$$

O sea que se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_3 & \longrightarrow & \mathcal{R}_4 \\ \downarrow & \swarrow & \\ \mathcal{A}_3 \simeq \mathcal{M}_3 & & \end{array}$$

donde las fibras genéricas de la aplicación vertical son la variedad de Kummer  $JX/\pm 1 = KX$ .

El resultado principal de esta tesis es mostrar que podemos escribir la matriz de Riemann de la curva  $Z_c$  en términos únicamente de la matriz de Riemann de la curva  $X$  y de la información dada por la representación de  $f : X \rightarrow \mathbf{P}_1$  como cubriente 4 : 1 de la esfera de Riemann  $\mathbf{P}_1$  y que dicha construcción depende localmente de manera analítica de la matriz de Riemann de  $X$  y de la elección del punto  $c \in KX$ .

Como vimos en la sección anterior, las clases de homología en  $Z_c$  de las trayectorias descritas (19) representan una base canónica de la homología entera de la curva  $Z_c$  y como consecuencia de las proposiciones 1 y 3 §1.1 existe una base  $\vartheta_0, \dots, \vartheta_7 \in H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$  tal que:

- (i)  $\vartheta_0 = \theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2)$ .
- (ii) La restricción de las secciones  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_7$  a la curva  $Z_c$  es una base de  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$  normalizada con respecto a la base de  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})$  dada anteriormente.

Como consecuencia de lo anterior tenemos el siguiente:

**Teorema.15.**

Si  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  es la base de  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})$  dada como la clase de homología en  $Z_c$  de las trayectorias descritas en la ecuación (19), entonces existen  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_7 \in H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$  tales que la restricción de estas secciones a la curva  $Z_c$  son una base normalizada de diferenciales holomorfas. Esto es, si  $\tilde{\omega}_i = \vartheta_i|_{Z_c}$  entonces  $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_7$  es una base de  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$  normalizada con respecto a la  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ - base de  $H_1(Z_c, \mathbf{Z})$  tal que

$$\int_{\tilde{\beta}_i} \tilde{\omega}_j = \tilde{\tau}_{ij},$$

representa la matriz de Riemann de la curva  $Z_c$ . □

Hemos construido para cada  $\pm c \in JX - J_2X$  una curva  $Z_c = \Theta_{c/2} \cdot \Theta_{-c/2}$  junto con una involución  $\iota_c : Z_c \rightarrow Z_c$ , se sabe que existe un abierto  $\mathcal{U}' \subset JX$  tal que para cada  $c \in \mathcal{U}'$ ,  $\{Z_c, \iota_c\}$  es admisible en el sentido de Beauville [Rec.2].

Más aún existe un abierto  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$  tal que para cada  $c \in \mathcal{U}$   $Z_c$  es lisa y  $\iota_c$  es libre de puntos fijos, más aún, esto se puede hacer globalmente, es decir, existe un abierto  $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}_3$  y una familia de cubrientes 2 a 1 (no ramificados de curvas lisas)

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ & | \searrow & \\ P & | & Y \\ & | \swarrow & \\ & \mathcal{U} & \end{array}$$

tal que para cada  $c \in \mathcal{U}$  esta construcción coincide con

$$Z_c = \Theta_{c/2} \cdot \Theta_{-c/2} \rightarrow Y_c.$$

Y como  $\mathcal{R}_4$  es el espacio de moduli de cubrientes dobles de curvas de género 4 tenemos un morfismo

$$\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}_4 \tag{22}$$

el cual es birracional [Rec. 3].

En la siguiente parte requeriremos de algunas definiciones y resultados sobre espacios de Hurwitz [Ful.] [Rec. 4].

Dado  $\mathbf{P}_1$ , denotemos por  $\Sigma^s$  la variedad compleja que consta de los conjuntos ordenados de  $s$  puntos distintos de  $\mathbf{P}_1$ . Y denotemos por  $\mathcal{H}(n, s)$  el

conjunto de clases de isomorfismos de cubrientes ramificados  $n$  a  $1$  de  $\mathbf{P}_1$  con  $s$  puntos de ramificación. Existe una topología en  $\mathcal{H}(n, s)$  tal que la función  $\delta : \mathcal{H}(n, s) \rightarrow \Sigma^s$  la cual asocia a cada cubriente ramificado su lugar de ramificación es un cubriente analítico, y denotemos por  $\mathcal{H}^{n,s}$  el subconjunto de  $\mathcal{H}(n, s)$  correspondiente a los cubrientes simples.

Dado  $A = \{a_1, \dots, a_s\} \in \Sigma^s$ , sean  $\sigma_1, \dots, \sigma_s$  trayectorias cerradas "alrededor" de  $a_1, \dots, a_s$  respectivamente donde  $\sigma_1, \dots, \sigma_s$  son generadores de  $\pi_1(\mathbf{P}_1 - A, x)$  tales que  $\sigma_1 \cdots \sigma_s = 1$  (para una definición precisa ver [Ful.]).

Sea  $Hom(\pi_1(\mathbf{P}_1 - A, x), S_n)$  el conjunto de clases de equivalencia  $\bar{f}$  de homomorfismos  $f : \pi_1(\mathbf{P}_1 - A, x) \rightarrow S_n$  cuya imagen es un subgrupo transitivo de  $S_n$  y  $Hom^i(\pi_1(\mathbf{P}_1 - A, x), S_n)$  el subconjunto que corresponde a todos aquellos homomorfismos  $f$  tales que  $f(\sigma_i)$  es una trasposición,  $i = 1, \dots, s$ . Las fibras  $\mathcal{H}(n, A) = \delta^{-1}(A)$  están en correspondencia uno a uno con  $Hom(\pi_1(\mathbf{P}_1 - A, x), S_n)$ , mientras que  $\mathcal{H}^{n,A}$  corresponde a  $Hom^i(\pi_1(\mathbf{P}_1 - A, x), S_n)$ .

Denotemos por  $\bar{f}$  la clase de  $f : X \rightarrow \mathbf{P}_1$  o equivalentemente la clase correspondiente del homomorfismo  $f : \pi_1(\mathbf{P}_1 - A, x) \rightarrow S_n$ , donde  $A = \delta(f)$ . Se sabe que  $\mathcal{H}^{n,s} \neq \emptyset$  si  $s \geq 2$ . La aplicación  $\delta$  es un cubriente topológico si a  $\mathcal{H}(n, s)$  se le da la topología asociada a la siguiente base: Sea  $N(U_1, \dots, U_s)$  el subconjunto de  $\Sigma^s$  que consta de los conjuntos de  $s$  puntos ordenados  $(b_1, \dots, b_s)$  tales que  $b_i \in U_i$  y donde los  $U_i$  son discos disjuntos en  $\mathbf{P}_1$  centrados en  $b_i$ . Así para cada  $A, A' \in N(U_1, \dots, U_s)$ , como  $\mathbf{P}_1 - U$  es un retracto por deformación de  $\mathbf{P}_1 - A$  y  $\mathbf{P}_1 - A'$  donde  $U = \cup U_i$ , tenemos isomorfismos

$$\phi_{A,A'} : \pi_1(\mathbf{P}_1 - A, x) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathbf{P}_1 - U, x) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathbf{P}_1 - A', x)$$

y tales isomorfismos no dependen de  $U_1, \dots, U_s$ .

Luego entonces, si  $\bar{f} \in \mathcal{H}(n, s)$  es tal que  $\delta(\bar{f}) \in N(U_1, \dots, U_s)$ , la vecindad  $N(U_1, \dots, U_s)$  que contiene a  $\bar{f}$  puede identificarse con

$$N(U_1, \dots, U_s) = \{\bar{f} \circ \phi_{A,A'} \in Hom(\pi_1(\mathbf{P}_1 - A, x), S_n) \mid A' \in N(U_1, \dots, U_s)\}$$

y se tienen los siguientes resultados:

**Teorema.16.**[Rec. 4].

(i) La representación fiel de  $b : S_4 \rightarrow S_{12}$  induce una  $\Sigma^{12}$ - aplicación  $B : \mathcal{H}^{4,12} \rightarrow \mathcal{H}(6, 12)$  dada como  $B(f) = \overline{b \circ f}$  la cual es analítica e inyectiva.

(ii) La aplicación  $\kappa : S_4 \rightarrow S_4/\kappa_4 \simeq S_3$ , donde  $\kappa_4$  es el grupo de Klein induce una  $\Sigma^{12}$ -aplicación  $K : \mathcal{H}^{4,12} \rightarrow \mathcal{H}^{3,12}$  dada como  $K(\overline{f}) = (\overline{\kappa} \circ \overline{f})$ , la cual es analítica sobre y de grado 255.

(iii)  $\Phi = K \circ B^{-1} : B(\mathcal{H}^{4,12}) \rightarrow \mathcal{H}^{3,12}$  es un cubriente analítico de grado 255: Además, dado  $g_c : Y \rightarrow \mathbf{P}_1$  tal que  $\overline{g} \in \mathcal{H}^{3,12}$ ,  $\Phi^{-1}(\overline{g})$  puede identificarse de manera natural con el conjunto de cubrientes dobles no ramificados de  $Y$ .

(iv) Como los espacios de Hurwitz determinan una familia de curvas, existen morfismos naturales  $P_{n,12} : \mathcal{H}^{n,12} \rightarrow \mathcal{M}_g$  con  $12 = 2(n + g - 1)$  y en particular se tiene

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{4,12} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{3,12} \\ P_{4,12} \downarrow & & \downarrow P_{3,12} \\ \mathcal{M}_3 & & \mathcal{M}_4 \end{array}$$

lo cual da una relación entre curvas de género 4 con un  $g_3^1$  y curvas de género 3 con un  $g_4^1$ . Y está construcción es equivalente a la construcción trigonal.  $\square$

Otra manera de construir la aplicación (21) es la siguiente:

Dado  $c \in \mathcal{U}$ , esto es  $c \in JX$ , para  $X$  una curva de género 3, escogemos una base  $\{s_0, s_1\} \in H^0(X, \mathcal{O}(K_X + c))$  y consideremos el morfismo  $f : X \rightarrow \mathbf{P}_1$  de grado 4 dado por  $f(x) = [s_0(x); s_1(x)]$ . Restringiendo un poco  $\mathcal{U}$  podemos suponer que  $f$  es simple, recordamos que un cubriente ramificado de orden  $n$ ,  $f : C \rightarrow \mathbf{P}_1$  de una curva proyectiva, no singular sobre la línea proyectiva  $\mathbf{P}_1$  es simple si hay al menos  $n - 1$  puntos de  $C$  sobre cada punto de  $\mathbf{P}_1$ .

Esto nos determina un punto  $f_{(c, X, s_0, s_1)} \in \mathcal{H}^{4,12}$ ; por otra parte [Do.] se demuestra lo siguiente:

Dada una torre

$$\tilde{C} \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} \mathbf{P}_1$$

donde  $f$  tiene grado  $n$  y  $\pi$  es un cubriente doble no ramificado, entonces se obtiene un cubriente ramificado  $2^n$  a 1 de  $\mathbf{P}_1$  que denotamos  $f_*\tilde{C} \rightarrow \mathbf{P}_1$  el cual queda descrito como

$$f_*\tilde{C} = \{D \in \tilde{C}^{(3)} \mid Nm(D) = f^{-1}(k), \text{ para algún } k \in \mathbf{P}_1\},$$

el cual consta de dos copias de una curva tetragonal  $g : X \rightarrow \mathbf{P}_1$  ( $Nm$  denota la aplicación de Norma). Como  $f$  y  $g$  tienen el mismo lugar de ramificación como consecuencia de la fórmula de Riemann-Hurwitz  $g(X) = g(C) - 1$  y se tiene una biyección

$$T : \left\{ \begin{array}{l} \text{Curvas triangulares } C \\ \text{de género } g \text{ con un} \\ \text{cubriente doble } \tilde{C} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Curvas tetragonales } X \\ \text{de género } g - 1 \end{array} \right\}$$

la cual se conoce como la aplicación de Recillas.

La descomposición de  $f_*\tilde{C}$  también puede explicarse desde el punto de vista de la teoría de grupos. Sea  $WC_n$  el grupo de permutaciones con signo en  $n$  letras, esto es, el subgrupo de  $S_{2n}$  que centraliza una involución libre de puntos fijos de  $2n$  letras. Sea  $WD_n$  el subgrupo de índice dos que consiste de las permutaciones con signo pares, esto es, permutaciones de  $n$  letras seguidas de un número par de signos. (Estos son los grupos de Weyl de los diagramas de Dynkin  $C_n, D_n$ ). Sobre un espacio arbitrario  $X$  se tienen las siguientes equivalencias:

$$\{ \text{Cubrientes } Y \xrightarrow{n:1} X \} \leftrightarrow \{ \text{Representación } \pi_1(X) \rightarrow S_n \},$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Cubrientes } n : 1 & Y \rightarrow X \\ \text{con un cubriente doble} & \tilde{Y} \rightarrow Y \end{array} \right\} \leftrightarrow \{ \text{Representación } \pi_1(X) \rightarrow WC_n \},$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Cubrientes } n : 1 & Y \rightarrow X \\ \text{con un cubriente doble} & \tilde{Y} \rightarrow Y \\ \text{orientado} & \end{array} \right\} \leftrightarrow \{ \text{Representación } \pi_1(X) \rightarrow WD_n \}.$$

Así pues, la construcción básica de  $f_*\tilde{C}$  corresponde a la representación estándar

$$\rho : WC_n \hookrightarrow S_{2n}.$$

La existencia de la involución  $\iota$  de  $f_*\tilde{C}$  corresponde a factorizar  $\rho$  a través de  $WC_{2n-1} \subset S_{2n}$ . La restricción  $\bar{\rho}$  de  $\rho$  a  $WD_n$  se factoriza a través de  $S_{2n-1} \times S_{2n-1}$  explicando la descomposición cuando  $\tilde{C}$  es orientable.

En el caso en que  $n = 3$ ,  $\bar{\rho}$  induce un isomorfismo  $WD_3 \simeq S_4$ , y la construcción dada por la aplicación de Recillas  $T$  corresponde a la composición de una representación con este isomorfismo.



Y como consecuencia de lo anterior se tiene un diagrama de morfismos analíticos y variedades proyectivas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{4,12} & \xrightarrow{\cong} & \text{Im}B \subset \mathcal{H}(6,12) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{H}^{3,12} \end{array}$$

y si a cada cubierta se le asocia una serie lineal, se tiene un diagrama de morfismos analíticos y un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & & \text{Im}B \subset \mathcal{H}(6,12) & \\ & & \text{iso} & \nearrow & \\ \mathcal{H}^{4,12} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{H}^{3,12} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{R}_4 \\ \alpha \downarrow & \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} & \searrow & \nearrow \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{M}_4 & \end{array}$$

Como la aplicación de Roth es birracional, entonces  $\alpha$  es un morfismo (quizá haciendo  $\mathcal{U}$  más pequeño), observando que al pasar al cociente  $\mathcal{H}^{4,12}/PGL(1) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{U}$  es un morfismo finito de grado 2, ya que factoriza por la variedad jacobiana correspondiente. Entonces, dado  $c \in \mathcal{U}$ , esto es  $\pm c \in JX - \{0\}$ , con  $X$  genérica y  $c \in JX$  general, podemos considerar la construcción de las bases de homología antes descritas.

Sea  $f \in \mathcal{H}^{4,12}$  tal que su clase  $\bar{f} \in \mathcal{H}^{4,12}/PGL(1)$  representa a  $c$  ó  $-c$ . Como el morfismo  $\alpha$  es en particular analítico y de grado dos, podemos escoger una vecindad en la topología usual de  $\mathcal{H}^{4,12}$ , es más se puede escoger una vecindad  $V = N(U_1, \dots, U_{12})$  donde  $\delta(f) = \{b_1, \dots, b_{12}\}$  y  $b_i \in U_i$ ; para  $i = 1, \dots, 12$ , de donde  $f \in V \subset \mathcal{H}^{4,12}$ .

Dada  $\bar{f} \in \mathcal{H}^{4,12}$ , tal que  $\delta(\bar{f}) = A$ , como consecuencia del Teorema de extensión de Riemann  $f$  representa la clase de equivalencia de un cubriente  $4 : 1$  de  $\mathbf{P}_1$  cuyo lugar de ramificación es  $A = \{b_1, \dots, b_{12}\}$  y sea  $f : X \rightarrow \mathbf{P}_1$  un representante de dicho cubriente, y si  $p_1, \dots, p_{12} \in X$  son los puntos de ramificación de  $f$  con  $f(p_i) = b_i$ , y denotemos por  $\bar{U}_i \subset X$  una vecindad de  $p_i$ ; tal que  $f(\bar{U}_i) = U_i$ , luego entonces  $X - \bigcup_{i=1}^{12} \bar{U}_i$  es un retracto por deformación de  $X - \bigcup_{i=1}^{12} \{q_i\}$  para cada  $q_i \in \bar{U}_i$ ; para  $i = 1, \dots, 12$ .

Si  $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1,2,3}$  es una base canónica de homología asociada a la representación  $f \in \mathcal{H}^{4,12} \simeq Hom^t(\pi_1(\mathbf{P}_1 - A, x), S_4)$  y si  $\alpha_0, \beta_0$ , son trayectorias en  $X - f^{-1}(A)$  determinadas por  $f$  como en (19), podemos escoger los conjuntos  $U_j$ ,  $j = 1, \dots, 12$  suficientemente pequeños para que estos no

intersecten las trayectorias  $a_i = f(\alpha_i), b_i = f(\beta_i), i = 1, 2, 3$ , así como a  $a_0 = f(\alpha_0), b_0 = f(\beta_0)$ , entonces  $f_c^{-1}(a_i) = \cup \alpha_i^k, f_c^{-1}(b_i) = \cup \beta_i^k$ , constituyen conjuntos saturados de trayectorias.

Esto nos dice que si  $g_q : X' \xrightarrow{4:1} \mathbf{P}_1$  es el cubriente correspondiente a  $q_i \in U_i, i = 1, \dots, 12$ , entonces la  $\{\alpha, \beta\}$ -base de la homología entera de  $X'$  obtenida de la construida anteriormente de  $X$  via los retractos por deformación  $X - \cup \{p_i\} \xrightarrow{\cong} X - \cup U_i \xrightarrow{\cong} X' - \cup \{q_i\}$  nos dan una base del mismo tipo que la de  $X$ . Esto es, usando la base en  $X$  traducida a  $X - \cup \bar{U}_i$ , obtenemos una base estándar para toda  $g_q : X' \rightarrow \mathbf{P}_1$  tal que  $q_i \in U_i$ . Y como consecuencia de lo visto anteriormente, la homología de ciertos productos fibrados de las trayectorias  $\alpha_i^k, \beta_i^k$  (19) determinan una base de la homología entera de la curva  $Z_c$  la cual corresponde [Rec. 4] a la representación  $B(f) \in \mathcal{H}(6, 12)$ . Esto es, podemos suponer que estamos tomando la  $\alpha, \beta$  base que proviene de la existencia de bases doble en el sentido de Fay (Teorema 7 §1.2), ya que  $\bar{b}\bar{f} \in BN(U_1, \dots, U_{12})_f = N(U_1, \dots, U_{12})_{\bar{f}}$  es una vecindad de  $\bar{b}\bar{f}$ , la cual no interseca a la  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ -base de la homología entera determinada por (19), lo cual significa que las trayectorias  $a_k, b_k \in \mathbf{P}_1 - A, k = 0, 1, 2, 3$  determinan la homología entera de cada curva de la familia de  $\mathcal{Z}_{|N(U_1, \dots, U_{12})_{\bar{f}}}$ .

Como consecuencia de la existencia de dichas familias y del hecho de que las funciones theta con características están definidas de manera global en  $\mathbf{H}_3 \times \mathbf{C}^3$ , (donde  $\mathbf{H}_3$  denota el smiespacio de Siegel) y son tales que al restringir dichas funciones a cada fibra genérica  $P^{-1}(c) = Z_c$  constituyen un conjunto generador del espacio de diferenciales holomorfas de  $Z_c$ ,<sup>4</sup> y recordando que si  $\mathcal{T}_g$  denota el espacio de Torelli, esto es, el espacio de superficies de Riemann con una base canónica de homología, es posible mandar cada punto de  $\mathcal{T}_g$  a su matriz de periodos [Baily], y así se obtiene un morfismo analítico  $\mathcal{T}_g \rightarrow \mathbf{H}_g$  [Bers].

Anteriormente hemos visto que podemos escribir la matriz de Riemann de la curva  $Z_c$  (respectivamente  $Y_c$ ) en términos unicamente de  $(X, c)$ , por otra parte, Anderotti-Mayer en su artículo "On period relations for abelian

<sup>4</sup>Si  $\tau \in \mathbf{H}_3$  representa una variedad jacobiana  $JX$  genérica entonces, las funciones theta con características son una base de las funciones theta de segundo orden en  $JX$ , y se tiene un epimorfismo natural (§1.1)

$$\rho : H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta)) \longrightarrow H^0(Z_c, \omega_{Z_c}).$$

integrals on algebraic curves" [A.M.], muestran como dar una familia  $\mathcal{V} \rightarrow \mathbf{H}_g$  de variedades abelianas principalmente polarizadas. A continuación veremos que en el caso  $g = 3$  podemos identificar puntualmente  $\mathcal{K}_3$  con un abierto (de Zariski) de  $\mathcal{V}$  y como cada punto genérico de  $\mathcal{K}_3$  determina un elemento de  $\mathcal{H}^{4,12}$  siguiendo la construcción trigonal, obtenemos un elemento en  $\mathcal{H}^{3,12}$  y por ende, uno en  $\mathcal{R}_4$ .<sup>5</sup>

Esto es, dada la representación

$$\rho : \mathbf{Z}^{2g} \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{H}_g \times \mathbf{C}^g)$$

$$\rho(\gamma)(\tau, c) = (\tau, c + (I, \tau)\gamma),$$

sea  $\mathcal{V}$  el espacio cociente de  $\mathbf{C}^g \times \mathbf{H}_g$  módulo la acción determinada por esta representación, entonces  $\mathcal{V}$  es una variedad compleja de dimensión  $\frac{g(g+3)}{2}$  y se tiene un diagrama conmutativo de transformaciones holomorfas

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}_g \times \mathbf{C}^g & & \\ \downarrow & \searrow \varpi & \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{H}_g \end{array}$$

entonces:

- (i)  $\mathbf{H}_g \times \mathbf{C}^g$  es el cubriente universal de  $\mathcal{V}$ .
- (ii)  $\varpi$  es propia.
- (iii)  $\varpi^{-1}(\tau) = \mathbf{C}^g / (I, \tau)\mathbf{Z}^{2g} = T_\tau$ .
- (iv)  $\mathbf{H}_g \times \mathbf{C}^g$  admite una subvariedad  $A(\theta)$  la cual desciende a  $\mathcal{V}$  y es tal que determina una polarización principal en  $T_\tau$  para cada  $\tau \in \mathbf{H}_g$ .
- (v)  $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} \mathbf{H}_g$  es una familia de variedades abelianas principalmente polarizadas.

En el caso particular en que  $g = 3$  como genericamente toda variedad abeliana principalmente polarizada es una variedad jacobiana, por lo cual podemos suponer que hay un abierto de Zariski  $U$  de  $\mathcal{V}$  que parametriza las variedades jacobianas de curvas de género 3 de manera que  $\mathbf{H}_3 \times \mathbf{C}^3 \rightarrow U$  es un cubriente topológico.

(vi) Como conjunto,  $\mathcal{V}$  es el conjunto de clases de equivalencia  $(\tau, c)$  donde  $(\tau, c) \sim (\tau', c')$  si y sólo si  $\tau = \tau'$  y  $c' = c + (I, \tau)\gamma$  para algún  $\gamma \in \mathbf{Z}^6$ .

Como consecuencia de (v) y (vi) vemos que si  $(\tau, c) \sim (\tau', c')$  entonces,  $c$  y  $c'$  representan el mismo punto de la variedad abeliana  $T_\tau$ , luego entonces

<sup>5</sup>Esto es, componiendo con la aplicación  $\Phi$  dada en el Teorema 16 (iii)

$(\tau, c) \in \mathcal{V}$  representa un toro complejo  $T_\tau$  con un punto marcado  $c \in T_\tau$ , en otras palabras

$$\mathcal{V} = \{(T_\tau, c) / T_\tau \text{ es una v.a.p.p., } c \in T_\tau\}.$$

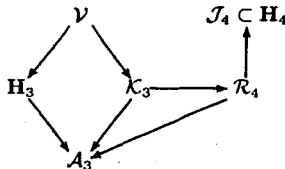
Luego entonces, cuando  $g = 3$  podemos identificar  $\mathcal{V}$  con el conjunto de variedades jacobianas con un punto marcado  $c$ , esto es, podemos identificar  $\mathcal{V}$  con el conjunto

$$\mathcal{K}_3 = \{(X, c) / X \in \mathcal{M}_3, c \in JX\}.$$

Como hemos visto anteriormente, si  $(X, c)$  es un punto genérico, entonces  $(X, c)$  determina un cubriente simple  $4 : 1$  de  $\mathbf{P}_1$  el cual hemos denotado  $f : X \rightarrow \mathbf{P}_1$ , a saber, el definido por el haz  $\mathcal{O}_X(K + c)$  y por Teorema de Riemann, esto determina una representación  $\rho_f : \pi_1(\mathbf{P}_1 \setminus B_f) \rightarrow S_4$ , de donde  $(X, c)$  y así un elemento  $\bar{f}_{(X,c)} \in \mathcal{H}^{4,12}$ , donde  $\mathcal{H}^{4,12}$  denota el conjunto de clases de equivalencia de cubrientes simples de  $\mathbf{P}_1$  con 4 hojas y 12 puntos de ramificación. Entonces existe una variedad  $\Xi$  y una transformación analítica  $F : \Xi \rightarrow \mathbf{P}_1 \times \mathcal{H}^{4,12}$  tal que para cada  $h \in \mathcal{H}^{4,12}$  "la fibra"  $F_h : \Xi_h \rightarrow \mathbf{P}_1 \times \{h\}$  es el cubriente correspondiente a  $h$ .

La composición de  $F$  con la proyección en  $\mathcal{H}^{4,12}$  da lugar a una familia de curvas de género 3. En particular si restringimos la familia  $F$  a una vecindad suficientemente pequeña del punto  $\bar{f}_{(X,c)} \in \mathcal{H}^{4,12}$  entonces existe una vecindad  $W = N(U_1, \dots, U_{12})$  tal que el lugar de ramificación de  $F_h$  esta en  $W$ , entonces existe una componente  $V$  de  $\delta^{-1}(W) \subset \mathcal{H}^{4,12}$  tal que cada cubriente simple de la familia corresponde a un punto de  $V$ .

Esto es tenemos el siguiente diagrama de transformaciones analíticas:



Luego entonces, dada  $(c, X) \in \mathcal{K}_3 \simeq \mathcal{V}$  como  $\mathbf{C}^3 \times \mathbf{H}_3$  es el cubriente universal de  $\mathcal{V}$  podemos escoger vecindades  $V' \subset \mathcal{K}_3$  de  $(c, X)$  y  $V'' \subset \mathbf{C}^3 \times \mathbf{H}_3$  isomorfa a  $V'$  con  $(c, \tau) \in V''$  un representante de  $(c, X)$  y podemos tomar  $V'$  suficientemente pequeña tal que la aplicación de Roth  $\mathcal{R}$  restringida a

esta vecindad sea 1:1 sobre una vecindad  $V \subset \mathcal{R}_4$ , de manera que podamos construir las bases canónicas de la homología entera de las curvas dadas como mencionamos anteriormente, además como  $\mathcal{R}_4$  es cubriente finito de  $\mathcal{M}_4$  y la aplicación que asocia a cada curva con una base canónica de homología dada, su matriz de Riemann es analítica tenemos el siguiente resultado:

**Teorema.17.**

*La matriz de Riemann de la curva  $Y_c$  depende en forma analítica de la elección de  $(X, c) \in \mathcal{K}_3$ .*  $\square$

En particular en [Fa.Ra.] se muestra que la matriz de Riemann de la curva  $Z_c$  puede expresarse en términos de las matriz de Riemann de la curva  $Y_c$  y la matriz de Riemann de la variedad  $\text{Prym}(Z_c \xrightarrow{\pi} Y_c)$ , luego entonces como consecuencia de lo anterior tenemos que es posible expresar la matriz de Riemann de la curva  $Y_c$  en términos de la información proporcionada por la pareja  $(X, c)$ , esto es:

**Teorema.18.**

*La matriz de Riemann de la curva  $Z_c$  depende en forma analítica de la elección de  $(X, c) \in \mathcal{K}_3$ .*  $\square$

Finalmente, notamos que el cubriente  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$  determina de manera natural un diferencial en  $X$ , esto es:

**Proposición.19.**

*Dada la base de homología de  $H_1(Y_c, \mathbf{Z})$  asociada a la  $\alpha, \beta$ -base de  $H_1(X, \mathbf{Z})$  y a la representación  $f : X \rightarrow \mathbf{P}_1$ , existe un diferencial meromorfo de tercer tipo  $\omega_D$  en  $X$  el cual está determinado de manera natural por el ciclo  $\bar{\beta}_1$ .*

**Demostación:**

Como  $Z_c = (\overline{X \times_f X \setminus \Delta_X})/S_2$ , (vía la topología cociente) dar un 1-ciclo en  $Z_c$  equivale a dar un 1-ciclo en  $(\overline{X \times_f X \setminus \Delta_X})$  el cual sea  $S_2$ - invariante, donde  $T : X \times X \rightarrow X \times X$  es la transformación  $T(x, y) = (y, x)$ , y  $S_2$  es isomorfo al grupo generado por  $T$ , de donde  $T$  describe la  $S_2$ -invariancia de  $(\overline{X \times_f X \setminus \Delta_X})$ . Como  $\pi_*(\bar{\beta}_1) = 2\bar{\beta}_1$ , y consideremos  $\tilde{\beta}$  un semiciclo en  $Z_c$  tal que  $\tilde{\beta} + \iota^*(\tilde{\beta}) = \bar{\beta}_1$  y denotemos nuevamente por  $\tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow Z_c$  un arco que lo represente, podemos suponer además que este arco no tiene autointersecciones y que no pasa por los puntos de ramificación de  $\pi_T$ .

En particular tenemos  $\tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow Z_c \setminus B_{\pi_T}$ . Denotemos por  $\mathcal{R} = \pi_T^{-1}(B_{\pi_T})$ , entonces  $\pi_{T|(\mathcal{R} \times_f \mathcal{R} \setminus \Delta_{\mathcal{R}})} : [0, 1] \rightarrow Z_c \setminus B_{\pi_T}$  es una aplicación cubriente, luego entonces existe un único levantamiento  $\tilde{\tilde{\beta}} : [0, 1] \rightarrow X \times_f X \setminus \Delta_X$  tal que  $\tilde{\tilde{\beta}}(0) = (p_1, p_2)$  si  $\tilde{\beta}(1) = p_1 + p_2$  y

denotemos  $\tilde{\beta}(1) = (p_3, p_4)$  donde  $\tilde{\beta}(1) = p_3 + p_4$ .

Notamos que por construcción  $\iota(p_1 + p_2) = p_3 + p_4$  y así existe  $b \in \mathbf{P}_1$  tal que  $f^{-1}(b) = \{p_1, \dots, p_4\}$ .

En particular, como la imagen de  $\tilde{\beta}$  esta contenida en  $X \times_f X$  tenemos que existen curvas en  $X$ ,  $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 : [0, 1] \rightarrow X$  tales que

$$\tilde{\beta}(t) = (\hat{\beta}_1(t), \hat{\beta}_2(t))$$

con

$$f(\hat{\beta}_1(t)) = f(\hat{\beta}_2(t))$$

para toda  $t \in [0, 1]$ . Sea  $D = p_1 + p_2 - (p_3 + p_4)$ , entonces  $D$  es un divisor de grado cero en  $X$ , luego entonces ver Apendice 3, existe un único diferencial de tercer tipo  $\omega_D$  (en  $X$ ) con polos de residuo 1 en  $p_1, p_2$  y  $-1$  en  $p_3, p_4$  y  $A$ -periodos cero. Así pues como consecuencia de las relaciones bilineales de Riemann

$$\int_{\beta_j} \omega_D = \int_{p_3+p_4}^{p_1+p_2} \omega_j,$$

donde  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in H^0(X, \omega_X)$  es base dual de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in H_1(X, \mathbf{Z})$ .

Consideremos los divisores  $pr_1^*(D)$  y  $pr_2^*(D)$  en  $\tilde{X}$ , entonces

$$\begin{aligned} pr_1^*(D) &= (p_1, p_2) + (p_1, p_3) + (p_1, p_4) \\ &+ (p_2, p_1) + (p_2, p_3) + (p_2, p_4) \\ &- [(p_3, p_1) + (p_3, p_2) + (p_3, p_4) \\ &+ (p_4, p_1) + (p_4, p_2) + (p_4, p_3)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} pr_2^*(D) &= (p_2, p_1) + (p_3, p_1) + (p_4, p_1) \\ &+ (p_1, p_2) + (p_3, p_2) + (p_4, p_2) \\ &- [(p_1, p_3) + (p_2, p_3) + (p_4, p_3) \\ &+ (p_1, p_4) + (p_2, p_4) + (p_3, p_4)]. \end{aligned}$$

Denotemos por

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= (p_1, p_2) \\ \tilde{p}_2 &= (p_2, p_1) \\ \tilde{p}_3 &= (p_3, p_4) \\ \tilde{p}_4 &= (p_4, p_3), \end{aligned}$$

entonces

$$pr_1^*(D) + pr_2^*(D) = 2[\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 - \tilde{p}_3 - \tilde{p}_4]$$

es un divisor  $T$ -invariante de grado cero en  $\hat{X}$ .

Y denotemos por

$$\tilde{D} = \frac{1}{2}(pr_1^*(D) + pr_2^*(D))$$

sea  $\omega_{\tilde{D}}$  el único diferencial meromorfo de tercer tipo en  $Z_c$  con residuo 1 en los puntos  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$  y  $-1$  en los puntos  $\tilde{p}_3, \tilde{p}_4$  nuevamente, como consecuencia de las relaciones bilineales de Riemann

$$\int_{\tilde{\beta}_j} \tilde{\omega}_{\tilde{D}} = \int_{p_3+p_4}^{p_1+p_2} \tilde{\vartheta}_j.$$

De donde  $\omega_{\tilde{D}}$  representa un diferencial meromorfo en  $Z_c$ , asociado de manera natural con el diferencial meromorfo  $\omega_D$  de  $X$ . Normalizando en  $\hat{X}$  podemos ver que

$$\omega_{(p_1+p_2)(D)} = \omega_{\pi_7^*(\tilde{D})}.$$

□

Notese que podemos escoger un sistema de coordenadas locales en  $X$  en forma tal que  $\omega_D$  y  $\omega_{\tilde{D}}$  tienen la misma expresión salvo constantes.

**Conjetura.20.**

*El diferencial  $\omega_{\tilde{D}}$  es dual del ciclo  $\tilde{\beta}_1$  que determina el cubriente  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$ .*

## 2 Interpretación Geométrica

### 2.1 Introducción:

Como hemos visto anteriormente, la pareja  $(X, c)$  determina en forma única un cubriente doble no ramificado  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$  (al cual le corresponde [M.1] un punto  $\eta \in \text{Pic}^0(Y_c)$  de orden dos), donde la matriz de Riemann de la curva  $Z_c$  puede describirse en términos únicamente de la matriz de Riemann de  $X$  y la representación  $f : X \xrightarrow{4:1} \mathbb{P}_1$  asociada al punto  $c$ .

En [DC.Rec.] y [Rec.2] se da una construcción proyectiva de la curva  $Y_c$  como intersección completa de dos superficies;  $Q_{Y_c}$  de grado 2 y  $C$  de grado 3, donde  $C$  esta asociada de manera canónica con el cubriente  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$ .

En particular como  $Z_c = \Theta_{c/2} \cdot \Theta_{-c/2}$  nos interesa estudiar la geometría de  $Z_c$  a partir de la geometría de  $(X, c)$ , para lo cual usaremos por un lado la descripción de las curvas canónicas de  $Z_c$  y  $Y_c$  como intersección de superficies una de ellas asociada de manera intrínseca al cubriente  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$  y por otro, usaremos el hecho (2) Proposición 3, de que existe un isomorfismo natural ente el espacio de diferenciales holomorfas globales  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$  y el complemento ortogonal (bajo la métrica hermitiana inducida por la polarización principal) de la función theta de segundo orden  $\theta(\zeta + c/2)\theta(\zeta - c/2) \in H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$ .

Como  $Y_c$  es una curva no-hiperelíptica de género 4, entonces su modelo canónico  $Y_{can}$  es una curva de grado 6 en  $\text{Proj}SH^0(Y_c, \omega_{Y_c})^*$ , la cual está contenida en una única superficie cuádrlica irreducible  $Q_{Y_c}$ , y esta curva es intersección completa de  $Q_{Y_c}$  con una superficie cúbica irreducible  $C$ , esto es,

$$Y_{can} = Q_{Y_c} \cdot C.$$

Por otra parte, en [DC.Rec.] se demuestra que dado  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$  un cubriente doble no ramificado de una curva de género 4 entonces  $Z_c$  posee exactamente dos haces lineales de grado 6 y dimensión 2,  $g_6^2$ , y  $g_6^{2'}$ , auto-residuales con respecto a la serie canónica, tales que  $1g_6^2 = g_6^{2'}$ . Además  $Z_c$  admite un único modelo plano  $\tilde{C}$  el cual es una sextica con tres puntos dobles no alineados. La curva  $Z_c$  en su espacio canónico  $\text{Proj}SH^0(Z_c, \omega_{Z_c})^*$  es intersección completa de una superficie de Del Pezzo  $S$  y una cuádrlica  $Q$ , esto es  $Z_{can} = S \cdot Q$ .



La superficie de Del Pesseo  $S$  se proyecta  $2 : 1$  en  $ProjSH^0(Y_c, \omega_{Y_c})^*$  desde  $ProjSH^0(Y_c, \omega_{Y_c} \otimes \eta)^*$  sobre la superficie cúbica de Cayley  $C$  asociada al punto  $\eta$ , mientras que la superficie cuádrica  $\tilde{Q}$  es el cono con vértice  $ProjSH^0(Y_c, \omega_{Y_c} \otimes \eta)^*$  y base  $Q_Y$ , donde  $Q_Y \subset ProjSH^0(Y_c, \omega_{Y_c})^*$  es la única superficie cuádrica que contiene a  $Y_{con}$ .

En esta sección nos interesa dar la descripción de la superficie cuádrica  $\tilde{Q}$  en términos de funciones theta de segundo orden de la curva  $X$ , así como la descripción de los haces  $g_c^2$  de  $Z_c$  en términos de las inclusiones  $j_{\pm c/2} : Z_c \hookrightarrow \Theta_{\pm c/2}$  y consecuentemente de la superficie de Del Pesseo  $S$ .

## 2.2 Preliminares

Dada  $X$  una curva no hiperelíptica de género  $g$  (con  $g \geq 3$ ), denotemos por  $\omega_X$  el haz canónico asociado a  $X$  y por  $K_X$  la clase de un divisor canónico.

Como  $X$  es no hiperelíptica, entonces  $|K_X| = ProjSH^0(X, \omega_X)$  no tiene puntos base, así  $|K_X|$  determina el encaje canónico

$$\varphi_{K_X} : X \longrightarrow P_{g-1} = ProjS(H^0(X, \omega_X)^*)$$

la imagen de  $X$  en  $P_{g-1}$  bajo este morfismo es una curva de grado  $2g - 2$  la cual se denomina la curva canónica asociada a  $X$  y la denotamos por  $X_{con}$ .

Como  $X$  es una curva no hiperelíptica, por el teorema de Max-Noether tenemos que el homomorfismo

$$\alpha_l : S^l H^0(X, \omega_X) \longrightarrow H^0(X, \omega_X^{\otimes l})$$

es suryectivo para  $l \geq 1$ . (Ver [ACGH] pag.117)

En particular cuando  $l = 2$

$$\alpha_2 : S^2 H^0(X, \omega_X) \longrightarrow H^0(X, \omega_X^{\otimes 2})$$

es suryectivo.

Denotemos por  $I_2 = Ker(\alpha_2)$ .

Como  $dim S^2 H^0(X, \omega_X) = \frac{(g+1)(g+2)}{2}$  y  $dim H^0(X, \omega_X^{\otimes 2}) = 3g - 3$  tenemos que la curva canónica esta sobre  $dim I_2 = \frac{(g-2)(g-3)}{2}$  cuádricas linealmente independientes.

Por otra parte, como  $deg 2K_X = 2deg K_X = 4g - 4 > 2g$  si  $g \geq 3$ , entonces  $|2K_X|$  no tiene puntos base, luego entonces  $|2K_X|$  determina un

encaje en  $ProjS(H^0(X, \omega_X^2)^*)$ , el cual se denomina el encaje bicanónico y lo denotaremos

$$\varphi_{2K_X} : X \rightarrow \mathbf{P}_{3g-4} = ProjS(H^0(X, \omega_X^{\otimes 2})^*)$$

la imagen de  $\varphi_{2K_X}$ , para  $X$  no hiperelíptica, es una curva en  $ProjS(H^0(X, \omega_X^{\otimes 2})^*) = \mathbf{P}_{3g-4}$  de grado  $4g - 4 = 2degK_X$  la cual denominamos la curva bicanónica y la denotaremos por  $X_{bic}$ .

En el caso particular en que  $g = 3$  tenemos que

$$\alpha_2 : S^2H^0(X, \omega_X) \rightarrow H^0(X, \omega_X^{\otimes 2})$$

es un isomorfismo, tomando duales y  $Proj$  tenemos que  $\alpha_2$  induce un isomorfismo canónico

$$ProjS^2(H^0(X, \omega_X)^*) \rightarrow ProjS(H^0(X, \omega_X^{\otimes 2})^*),$$

En lo sucesivo identificaremos estos dos espacios.

Si además  $v_2 : \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_5$  denota la aplicación de Veronese de orden 2 tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & X_{bic} \subset \mathcal{V} \subset \mathbf{P}_5 & \\ \nearrow & \uparrow v_2 & \\ X & \rightarrow & X_{can} \subset \mathbf{P}_2 \end{array}$$

donde las flechas horizontales son las aplicaciones canónica y bicanónica y  $\mathcal{V} = Im v_2$  denota la superficie de Veronese.

Podemos interpretar el morfismo  $f$  como sigue:

Como tenemos un isomorfismo canónico  $S^2H^0(X, \omega_X) \simeq H^0(\mathbf{P}_2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(2))$  donde  $H^0(\mathbf{P}_2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(2))$  representa el conjunto de cónicas en el espacio canónico  $\mathbf{P}_2 = ProjS(H^0(X, \omega_X)^*)$ , entonces dado un diferencial cuadrático  $\omega \in H^0(X, \omega_X^{\otimes 2})$  existe una única cónica  $C_\omega \subset \mathbf{P}_2$  la cual intersecta a la curva canónica en el divisor de ceros del diferencial  $\omega$ , esto es

$$C_\omega \cdot X_{can} = (\omega)$$

de donde, usando la identificación natural de

$$ProjS^2(H^0(X, \omega_X)) \simeq ProjS(H^0(X, \omega_X^{\otimes 2})) = |2K_X|$$

tenemos también la identificación natural

$$\text{Proj}S^2(H^0(X, \omega_X)^*) \simeq \text{Proj}S(H^0(X, \omega_X^{\otimes 2})) = |2K_X|$$

la cual podemos describir como:

$$C_\omega \mapsto C_\omega \cdot X_{\text{can}}$$

y en particular el rango del diferencial  $\omega$  se define como el rango de la cónica  $C_\omega$  asociada.

Por lo anterior podemos describir la superficie de Veronese en  $|2K_X|$

$$\mathcal{W} = \{(\omega) \mid \omega \in H^0(X, \omega_X^{\otimes 2}), \text{rk } \omega = 1\}$$

la cual corresponde a las cónicas degeneradas en  $\mathbf{P}_2$ , mientras que la variedad de cuerdas de esta superficie de Veronese en  $|2K_X|$  está dada como

$$\mathcal{H} = \{(\omega) \mid \omega \in H^0(X, \omega_X^{\otimes 2}), \text{rk } \omega \leq 2\}$$

y corresponde a las cónicas reducidas en  $\mathbf{P}_2$ .

**Observación. 21.**

(i)  $v_2$  es una inmersión inyectiva de  $\mathbf{P}_2$  en  $\mathbf{P}_5$ .

(ii)  $\text{deg } \mathcal{W} = 4$ .

Recordamos que  $\mathbf{P}_5 = \text{Proj}S(H^0(\mathbf{P}_2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(2)))$  y la superficie de Veronese es imagen del morfismo definido en  $\mathbf{P}_2$  por  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(2)$ .

Así  $c_1(v_2^*H)^2 = c_1(2H')^2 = 2^2 = 4$ , donde  $H$  y  $H'$  denotan la clase hiperplana en  $\mathbf{P}_5$  y  $\mathbf{P}_2$  respectivamente.

(iii) Por otra parte, si  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  es una base de  $H^0(X, \omega_X)$ , una base para  $S^2H^0(X, \omega_X)$  esta dada por

$$\{\omega_1^2, \omega_1\omega_2, \omega_1\omega_3, \omega_2^2, \omega_2\omega_3, \omega_3^2\}$$

la cual también es base de  $H^0(X, \omega_X^{\otimes 2})$  entonces, para cada  $p \in X$  tenemos que  $v_2 \circ \varphi_{K_X}(p) = \varphi_{2K_X}(p)$ .

Y en particular tenemos que  $X_{\text{bic}} = v_2(X_{\text{can}})$ .

(iv) Como toda curva en la superficie de Veronese es intersección completa, tenemos que  $X_{\text{bic}} = \mathcal{V} \cap \mathcal{Q}$  con  $\mathcal{Q}$  una hipersuperficie cuádrada en  $\mathbf{P}_5$  (de ninguna manera única).

Se demuestra además [Rec.2] que para  $c \in JX$  genérico que el conjunto

$$\{\omega \in H^0(X, \omega_X^2) \mid (\omega) \geq D \text{ para algún } D \in |K + c|\}$$

genera un subespacio lineal  $\Delta_c$  de  $H^0(X, \omega_X^2)$  de dimensión 4 y este espacio es tal que el sistema lineal tridimensional  $|\Delta_c| = \mathbf{P}(\Delta_c)$  de cónicas en el espacio canónico de  $X$  satisface las siguientes condiciones:

- (i)  $|\Delta_c| \cdot \mathcal{H}$  es una superficie cúbica de Cayley  $\mathcal{C}$ .  
(ii)  $|\Delta_c| \cdot \mathcal{W}$  consta de cuatro puntos  $q_i = \{f_i^2 = 0\}$ , donde  $f_i \in H^0(\text{Proj} SH^0(X, \omega_X)^*, \mathcal{O}(1))$  para  $i = 0, 1, 2, 3$ . Estos cuatro puntos son diferentes, los cuales están dados como 4 líneas dobles en posición general en el espacio canónico de  $X$ , las cuales denotaremos por  $l_i = \{f_i = 0\}$ , así podemos suponer que  $l_i = \{f_i = x_i = 0\}$  con  $x_i \in H^0(X, \omega_X)$ , donde  $x_0, x_1, x_2$  forman una base y  $x_3 = x_0 + x_1 + x_2$ . Estas cuatro líneas se intersectan en 6 puntos los cuales nos presenta una configuración del siguiente tipo.

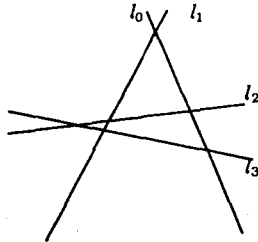


Fig. 13

De donde

$$\Delta_c = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = \\ (\lambda_0 + \lambda_3)x_0^2 + (\lambda_1 + \lambda_3)x_1^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)x_2^2 + 2\lambda_3(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) \end{array} \right\}$$

luego entonces para  $q \in |\Delta_c|$ ,  $q \in \mathcal{H}$  si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_0 + \lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Así la superficie  $\mathcal{C}$ , bajo esta elección de coordenadas en  $|\Delta_c|$  satisface la ecuación anterior y puede reescribirse como  $\sum_{i=0}^3 \frac{1}{\lambda_i} = 0$ . Esta superficie se conoce como la superficie cúbica de Cayley, Catanese [Ca.] demuestra que esta superficie tetranodal tiene exactamente un cubriente doble irreducible ramificado exactamente en los 4 nodos de  $\mathcal{C}$ . A continuación enunciaremos algunos lemas que necesitaremos para dar algunas relaciones entre la geometría de la curva  $X$  y la del cubriente  $\pi: Z_c \rightarrow Y_c$ , (no incluiremos en esta parte las demostraciones, pero dichas demostraciones pueden encontrarse en [Rec.2]).

**Lema.22.**

Las líneas en  $\mathbf{P}_2$  que pasan por los puntos  $\ell_i \cap \ell_j$  están en correspondencia 1:1 con los puntos en  $|\Delta|$  sobre la línea  $L_{ij} = \overline{q_i q_j}$  determinada por los puntos  $q_i$  y  $q_j$ .

**Lema.23.**

Si  $\ell$  no es una línea diagonal en  $\mathbf{P}_2$ , existe una línea  $\ell'$  en  $\mathbf{P}_2$  única tal que  $\ell + \ell' \in |\Delta|$ .

En particular obtenemos de esta manera una aplicación racional

$$\psi: \mathbf{P}_2^* \longrightarrow \mathcal{C} \subset |\Delta|$$

$$\ell \mapsto \ell + \ell'.$$

Como mencionamos anteriormente, la superficie  $\mathcal{C}$  contiene 9 líneas, 6 de las cuales son las líneas  $L_{ij}$ , esto es, son los ejes del tetraedro formado por los puntos  $q_0, \dots, q_3$  y otras tres líneas que hemos denotado  $M_i$ , las cuales satisfacen la condición  $\psi(m_i) = M_i$ .

**Lema.24.**

Si  $\ell$  es una línea en  $\mathbf{P}_2$  que contiene al punto  $m_i \cap m_j$  entonces  $\ell' = m_k$  con  $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$ .

Luego entonces si  $|\Delta_c| = \{\sum_{i=0}^3 \lambda_i x_i^2\}$ , la ecuación de la superficie  $\mathcal{C}$  esta dada como  $0 = \sum_{i=0}^3 \frac{1}{\lambda_i} = \sum_{i=0}^3 \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_i}$  esto es, la superficie  $\mathcal{C}$  es la superficie cúbica de Cayley con 4 nodos, Catanese [Ca.] demuestra que si  $\mathcal{P}$  denota el

sistema lineal de cúbicas planas que pasan por los puntos  $r_{ij}$  y si  $E_{ij}$  denota el divisor excepcional de  $r_{ij}$  obtenemos que  $C = \psi(\tilde{P}_2)$ , donde  $\psi$  está dado por el haz  $\mathcal{O}_{\tilde{P}_2}(3H - \sum E_{ij})$ .

En particular tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{P}_2 & & \\ \downarrow & \searrow & \\ P_2 & \rightarrow & ProjSH^0(P_2, \mathcal{O}(3H - \sum E_{ij})) \end{array}$$

y se demuestra además que vía restricción se tiene un isomorfismo natural  $H^0(P_2, \mathcal{O}(3H - \sum E_{ij})) \simeq H^0(Y_c, \omega_{Y_c})$ .

**Lema.25.** [Ca.Ce.]

*Dado un plano  $\pi$  en  $P_3$  que no pase por los nodos de  $C$ , entonces  $\pi$  es tangente simple a  $C$  en  $n$  puntos, con  $0 \leq n \leq 3$ . Además  $n = 3$  si y solo si  $\pi = \tilde{\pi}$ , y  $n = 2$  si y solo si  $\pi$  contiene alguna de las líneas  $M_k$ .*

### 2.3 La Superficie Cuádrlica

Como  $Y_c$  es una curva no hiperelíptica de género 4, entonces su modelo canónico  $Y_{can}$  es una curva de grado 6 en  $P_3 = ProjSH^0(Y_c, \omega_{Y_c})^*$ , la cual está contenida en una única superficie cuádrlica irreducible  $\mathcal{Q}_{Y_c}$ , y esta curva es intersección completa de  $\mathcal{Q}_{Y_c}$  con una superficie cúbica irreducible  $C$ , esto es,

$$Y_{can} = \mathcal{Q}_{Y_c} \cdot C.$$

Como  $\mathcal{Q}_{Y_c}$  es una cuádrlica en  $P_3$  tenemos dos posibilidades para la cuádrlica  $\mathcal{Q}_{Y_c}$  [A.M.]

(i)  $\mathcal{Q}_{Y_c}$  es suave, y así doblemente reglada, es decir  $rk = 4$ , ó bien,

(ii)  $\mathcal{Q}_{Y_c}$  es un cono, esto es  $rk = 3$ .

en cualquiera de estos casos se sabe que si  $\theta_{Y_c}$  denota la función theta de Riemann de la curva  $Y_c$  entonces la cuádrlica  $\mathcal{Q}_{Y_c}$  está dada por la ecuación [A.M.]

$$\sum_{i,j=1}^4 \frac{\partial^2 \theta_{Y_c}}{\partial z_i \partial z_j}(p) z_i z_j = 0$$

con  $p \in \Theta_{sing}^6$ .

<sup>6</sup>Notese que en este caso dichos puntos corresponden a los dos  $g_3^1$  de la curva  $Y_c$ .

Teniendo como objetivo dar mayor claridad a la presente sección a continuación veremos como se obtiene la superficie cuádrica  $\mathcal{Q}_Y$  a partir de la pareja  $(X, c)$  esta construcción se puede encontrar de manera completa en [Rec.2], por ahora solo nos interesa el caso en que el punto  $c$  sea genérico. Como  $X$  es una curva no-hiperelíptica de género 3 y  $L = \mathcal{O}_X(K_X + c) \in \mathbf{G}_4^1(X)$  es el haz lineal asociado al punto  $c \in JX$ , como consecuencia de la fórmula de Riemann-Roch, si  $L \neq \omega_X$  y  $L' := \omega_X^2 \otimes L^{-1}$ , entonces

$$\dim H^0(X, L) = 2 \text{ y } \dim H^0(X, L') = 2$$

de donde  $L' = \mathcal{O}_X(K_X - c) \in \mathbf{G}_4^1(X)$ .

Si  $\{s_1, s_2\}$  y  $\{t_1, t_2\}$  son bases de  $H^0(X, L)$  y de  $H^0(X, L')$  respectivamente, definamos

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, L) \otimes H^0(X, L') & \xrightarrow{\beta^*} & H^0(X, \omega_X^2) \\ s_i \otimes t_j & \longmapsto & s_i t_j = \omega_{ij}. \end{array}$$

En el espacio proyectivo  $\mathbf{P}_5 = Proj SH^0(X, \omega_X^2)^*$  consideremos la cuádrica

$$\mathcal{Q}_L = \{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21} = 0\}$$

que contiene a la curva bicanónica  $X_{bic}$ .

Entonces  $\mathcal{Q}_L \subset \mathbf{P}_5$  representa a una cuádrica que en condiciones genéricas es de rango 4, de donde  $Sing \mathcal{Q}_L$  es un espacio lineal de dimensión uno, esto es  $Sing \mathcal{Q}_L = \Lambda \cong \mathbf{P}_1$  y  $\mathcal{Q}_L$  es el cono con vértice  $Sing \mathcal{Q}_L$  y base una cuádrica  $\mathcal{Q}'_L$  de rango 4 en  $\mathbf{P}_3$  (en particular  $\mathcal{Q}'_L$  es suave)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}_L & \subset & \mathbf{P}_5 \\ p_\Lambda \downarrow & & \downarrow p_\Lambda \\ \mathcal{Q}'_L & \subset & \mathbf{P}_3^* \end{array}$$

donde  $p_\Lambda$  denota la proyección desde  $\Lambda$ .

Se sabe además que toda cuádrica de rango 4 en  $\mathbf{P}_5$  tiene dos reglados distintos cada uno formado por un espacio lineal de dimensión tres.

Se demuestra en [Rec. 3] que la cuádrica  $\mathcal{Q}_Y$  es la imagen bajo la aplicación de Gauss

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}_5 & & \mathbf{P}_3 \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{Q}_L & \longrightarrow & \mathcal{Q}_Y. \end{array}$$

donde  $(\text{Sing } \mathcal{Q}_L)^* = \mathbf{P}_3$ .

A continuación veremos [Rec.2] como se describe  $\Lambda$  y los reglados de la cuádrica  $\mathcal{Q}_c$  en términos de  $(X, c)$ .

El morfismo

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, L) \otimes H^0(X, L') & \xrightarrow{\beta^*} & H^0(X, \omega_X^2) \\ s_i \otimes t_j & \longmapsto & s_i t_j = \omega_{ij} \end{array}$$

induce una aplicación

$$\text{Proj}S(H^0(X, L) \otimes H^0(X, L'))^* \xrightarrow{\beta} \text{Proj}S(H^0(X, \omega_X^2))^*$$

Si tomamos ahora la aplicación de Segre

$$\text{Proj}S(H^0(X, L))^* \times \text{Proj}S(H^0(X, L'))^* \xrightarrow{f} \text{Proj}S(H^0(X, L) \otimes H^0(X, L'))^*$$

entonces

$$\phi : \text{Proj}S(H^0(X, L))^* \times \text{Proj}S(H^0(X, L'))^* \longrightarrow \text{Proj}S(H^0(X, \omega_X^2))^*$$

dado como  $\beta \circ f$  es un encaje cerrado cuya imagen es la superficie cuádrica  $\mathcal{Q}_c \subset \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}(\text{Im } \beta^*)$ .

Podemos ver fácilmente que la imagen de  $\beta^*$  esta generada por el conjunto de diferenciales cuadráticas  $\omega$  tales que existe un divisor  $D \in |K_X + c|$  de manera que el divisor de ceros de  $\omega$  domine a  $D$ , esto es

$$\text{Im } \beta^* = \{ \omega \in H^0(X, \omega_X^2) \mid (\omega) \geq D \text{ para algún } D \in |K_X + c| \}$$

y en particular  $\mathcal{Q}_c \subset |\Delta| = \mathbf{P}_3$ .

Aún más, es posible ver que cada línea en  $\mathcal{Q}_c$  pertenece a una de las siguientes reglas

$$\ell_D = \{ D + |K_X - c| \mid D \in |K_X + c| \},$$

$$\ell_E = \{ |K_X + c| + E \mid D \in |K_X - c| \}.$$

Finalmente en §1, Prop. 3, vimos que tenemos un isomorfismo natural entre el espacio de diferenciales holomorfas  $H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$  y el complemento ortogonal de la sección  $\theta(z+c/2)\theta(z-c/2) \in H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$  a continuación



describiremos como dar una inmersión "natural" del espacio de diferenciales cuadráticas en  $X$ ,  $H^0(X, \omega_X^2)$  en el espacio de funciones theta de orden 2 de la jacobiana de  $X$ ,  $H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$ .

Como  $\Theta \hookrightarrow JX$  canonicamente, si consideramos la sucesión restricción

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{JX}(-\Theta) \rightarrow \mathcal{O}_{JX} \rightarrow \mathcal{O}_\Theta \rightarrow 0 \quad (23)$$

al considerar el producto tensorial con  $\mathcal{O}_{JX}(\Theta)$ , obtenemos la sucesión exacta

$$H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(\Theta)) \rightarrow H^0(\Theta, \mathcal{O}_\Theta(\Theta)) \rightarrow H^1(JX, \mathcal{O}_{JX}) \rightarrow H^1(JX, \mathcal{O}_{JX}(\Theta))$$

y como consecuencia del Teorema de anulamiento de Kodaira tenemos que  $H^1(JX, \mathcal{O}_{JX}(\Theta)) = 0$ , por otra parte como  $JX$  es una variedad abeliana principalmente polarizada entonces

$$H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(\Theta)) \simeq \mathbb{C}$$

$$\theta \mapsto 1.$$

Como  $\theta|_\Theta = 0$  entonces la aplicación del lado derecho de la sucesión anterior es cero, y tenemos que

$$H^0(\Theta, \mathcal{O}_\Theta(\Theta)) \simeq H^1(JX, \mathcal{O}_{JX})$$

vía la aplicación de Abel tenemos un isomorfismo entre  $H^1(JX, \mathcal{O}_{JX})$  y  $H^0(X, \omega_X)^*$ .

Como consecuencia de la fórmula de adjunción  $\omega_\Theta = \mathcal{O}_\Theta(\Theta)$  y como  $H^0(X, \omega_X)^* \simeq H^0(\Theta, \omega_\Theta)$ , entonces

$$S^2 H^0(X, \omega_X)^* \simeq S^2 H^0(\Theta, \omega_\Theta)$$

y como se tenía

$$H^0(X, \omega_X^2) \simeq S^2 H^0(X, \omega_X)$$

se sigue que

$$H^0(X, \omega_X^2)^* \simeq S^2 H^0(\Theta, \omega_\Theta)$$

obteniéndose una inmersión natural

$$S^2 H^0(\Theta, \omega_\Theta) \hookrightarrow H^0(\Theta, \mathcal{O}_\Theta(2\Theta))$$

inducida por la aplicación

$$H^0(\Theta, \omega_\Theta) \otimes H^0(\Theta, \omega_\Theta) \longrightarrow H^0(\Theta, \mathcal{O}_\Theta(2\Theta)).$$

Considerando nuevamente la sucesión (23) y tomando producto tensorial con  $\mathcal{O}_{JX}(2\Theta)$  obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(\Theta)) \rightarrow H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta)) \rightarrow H^0(\Theta, \mathcal{O}_\Theta(2\Theta)) \rightarrow 0.$$

Si en el espacio  $H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$  consideramos la métrica hermitiana inducida por la polarización principal de  $(JX, \Theta)$  obtenemos un isomorfismo natural

$$H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(\Theta))^\perp \simeq H^0(\Theta, \mathcal{O}_\Theta(2\Theta))$$

de donde existe una aplicación lineal inyectiva

$$H^0(\Theta, \mathcal{O}_\Theta(2\Theta)) \hookrightarrow H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta)),$$

luego entonces podemos considerar al espacio  $H^0(X, \omega_X^2)^*$  inmerso de manera natural en  $H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$ . Luego entonces, se tiene un morfismo inyectivo

$$\text{Proj}SH^0(X, \omega_X^2)^* \rightarrow \text{Proj}SH^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta)) = \mathbf{P}_7 = |2\Theta|$$

así podemos considerar a  $\mathcal{Q}_L$  como una cuádrica de rango 4 en  $\mathbf{P}_7$ , y por tanto singular a lo largo de un 3-plano  $\Lambda_3 \subset \mathcal{Q}_L \subset \mathbf{P}_7$  esto es,  $\mathcal{Q}_L$  es el cono con vértice el 3-plano  $\Lambda_3 \subset \mathcal{Q}_L \subset \mathbf{P}_7$  y base la cuádrica  $\mathcal{Q}'_L = \mathcal{Q}_L \cap \mathbf{P}_3^*$  de rango 4 en  $\mathbf{P}_3^*$ .

Por otra parte, como (Prop. 3)

$$0 \rightarrow \theta(z + c/2)\theta(z - c/2) \rightarrow H^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta)) \rightarrow H^0(Z_c, \omega_{Z_c}) \rightarrow 0$$

es exacta obtenemos un morfismo (el cual podemos identificar con proyección desde el punto  $c$ )

$$\text{Proj}SH^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))^* \longrightarrow \text{Proj}SH^0(Z_c, \omega_{Z_c})^*$$

y como  $H^0(Y_c, \omega_{Y_c}) \simeq H^0(Z_c, \omega_{Z_c})^*$  obtenemos nuevamente un morfismo proyección

$$\text{Proj}SH^0(Z_c, \omega_{Z_c})^* \xrightarrow{\pi} \text{Proj}SH^0(Y_c, \omega_{Y_c})^*.$$

Consideremos ahora la aplicación de Gauss asociada ahora a la cuádrice  $\mathcal{Q}_L \subset \text{Proj}SH^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))$

$$\mathcal{G}_L : \mathcal{Q}_L \longrightarrow \text{Proj}SH^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))^*$$

y la cuádrice dual  $\mathcal{Q}_L^* = \mathcal{G}_L(\mathcal{Q}_L) \subset \text{Proj}SH^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))^*$ , como  $\mathcal{Q}_L$  es de rango 4 y tiene conjunto singular  $\Lambda_3$  entonces cada hiperplano tangente a  $\mathcal{Q}_L$  contiene  $\Lambda_3$ , y  $\mathcal{G}_L$  transforma la cuádrice  $\mathcal{Q}_L$  en una cuádrice suave en el subespacio  $\mathbf{P}_3 \subset \text{Proj}SH^0(JX, \mathcal{O}_{JX}(2\Theta))^*$  de hiperplanos que contienen a  $\Lambda_3$  y como se demuestra en [Rec.3]  $\mathbf{P}_3$  es el espacio canónico de la curva  $Y_c$ , esto es,  $\text{Proj}SH^0(Y_c, \omega_{Y_c})^*$  y que  $Y_c \subset \mathcal{Q}_L^*$ , de donde  $\mathcal{Q}_L^* = \mathcal{Q}_{Y_c}$ .

**Lema.26.**

Sea  $X$  una curva de género 3, no hiperelíptica tal que sus puntos de Weierstrass sean normales. Consideremos el siguiente diagrama dado por el encaje canónico, el bicanónico y el isomorfismo  $S^2 H^0(X, \omega_X) \simeq H^0(X, \omega_X^2)$

$$\begin{array}{ccccc} & & X_{\text{bic}} & \subset & \mathcal{V} & \subset & \mathbf{P}_5 \\ & \nearrow & & & & & \\ X & & \uparrow & & \uparrow & v_2 & \\ & \searrow & & & & & \\ & & X_{\text{can}} & \subset & \mathbf{P}_2 & & \end{array}$$

donde  $v$  es el encaje de Veronese y  $\mathbf{P}_5 = \text{Proj}SH^0(X, \omega_X^2)^*$ . Entonces dar  $L \in \text{Pic}^4 X \setminus ((X-X) \cup J_2 X)$  es equivalente a escribir  $X_{\text{bic}}$  como intersección completa de la superficie Veronese  $\mathcal{V}$  y una hipersuperficie cuádrice de rango 4  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_L$ .

**Demostación:**[Rec.3] □

**Observación.27.**

En el caso en que  $L$  sea un  $g_4^1$  no completo entonces,  $L = \text{Proj}W$  donde  $W \subset H^0(X, \omega_X)$ ,  $\dim_{\mathbb{C}} W = 2$ . Luego entonces, si  $\{s_1, s_2\}$  denota una base de  $W$  y si consideramos el morfismo

$$\begin{array}{ccc} W \otimes W & \longrightarrow & H^0(X, \omega_X^2) \\ s_i \otimes s_j & \longmapsto & s_i s_j = \omega_{ij} \end{array}$$

Denotemos nuevamente por

$$\mathcal{Q}_L = \{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}^2 = 0\}.$$

En este caso  $\mathcal{Q}_L \subset \mathbf{P}_5$  representa una cuádrice de rango 3, de donde  $\text{Sing} \mathcal{Q}_L = \Lambda = \mathbf{P}_2$  y  $\mathcal{Q}_L$  es un cono con vértice  $\text{Sing} \mathcal{Q}_L$  y base una cónica no singular.

## 2.4 Las Series Lineales Especiales sobre $Z_c$

En esta parte nos interesa describir como obtener los haces lineales  $g_6^2$  antes mencionados a partir de la pareja  $(X, c)$ .

Recordamos que en [MCSV] dada  $(A, [\vartheta])$  una variedad abeliana polarizada,  $A = \mathbb{C}^g/\Lambda$ , si  $\{T_m(A)\}_{m \in A}$  son los espacios tangentes a  $A$  en  $m$ , identificados de manera natural con  $\mathbb{C}^g$  y  $D \subset A$  es una subvariedad analítica de dimensión  $k$  donde  $D_{reg} = D - D_{sing}$  es el lugar suave de  $D$ , podemos definir la aplicación de Gauss

$$\mathcal{G}'_D : D_{reg} \longrightarrow \mathbf{G}(k, g) = \mathbf{C}^N$$

$$\mathcal{G}'_D(\lambda) = t_\lambda^* T_\lambda D$$

esto es, a cada punto  $\lambda \in D_{reg}$  le asociamos el espacio tangente a  $D$  en  $\lambda$  trasladado al origen. Y podemos ver  $T_\lambda D \subset T_\lambda M$  como un subespacio  $k$ -dimensional de  $T_\lambda M$ .

Proyectivizando, obtenemos

$$\mathcal{G}_D : D_{reg} \longrightarrow \mathbf{P}_{N-1} = Proj(\mathbf{G}(k, g))$$

$$\mathcal{G}_D(\lambda) = \mathbf{P}(\mathcal{G}'_D(\lambda))$$

Dada la pareja  $(X, c)$  con  $c \in JX$  un punto genérico, consideremos la aplicación de Gauss asociada al divisor  $\Theta_{c/2}$  de la variedad  $JX$ , como  $X$  es una curva de género 3 no hiperelíptica, entonces  $(\Theta_{c/2})_{sing}$  es el conjunto vacío. Esto es  $(\Theta_{c/2})_{red} = \Theta_{c/2}$ .

Denotemos por

$$\mathcal{G}_{c/2} : \Theta_{c/2} \longrightarrow Proj S(H^0(\Theta_{c/2}, \omega_{\Theta_{c/2}}))^* = \mathbf{P}_2 = |K_X|$$

la aplicación de Gauss asociada a  $\Theta_{c/2}$ .

Como cada sección hiperplana de  $X$  contiene solo un número finito de puntos, entonces la aplicación de Gauss asociada a  $\Theta_{c/2}$  es siempre finita, y como una sección hiperplana genérica de  $X$  consta de  $2g(X) - 2 = 4$  puntos en posición general, entonces  $\mathcal{G}_{c/2}$  tiene genericamente 6 hojas, esto es: <sup>7</sup>

<sup>7</sup>Además, si  $B_{c/2} \subset \mathbf{P}_2$  es el lugar de ramificación de  $\mathcal{G}_{c/2}$  se sabe que su cerradura corresponde a la curva dual de  $X$ , esto es, el conjunto de hiperplanos tangentes a la curva canónica. [A]

$$6 = \begin{pmatrix} 2g(X) - 2 \\ g(X) - 1 \end{pmatrix}.$$

En particular como  $Z_c$  está encajada canónicamente en  $\Theta_{c/2}$

$$j : Z_c \hookrightarrow \Theta_{c/2}$$

tenemos que la restricción de la aplicación de Gauss  $\mathcal{G}_{c/2}$  a la curva  $Z_c$  nos da un morfismo proyectivo  $g_{c/2} : Z_c \rightarrow \mathbf{P}_2$  de grado a lo más seis,

$$\begin{array}{ccc} Z_c & \xrightarrow{g_{c/2}} & \mathbf{P}_2 = \text{Proj} SH^0(\Theta_{c/2}, \omega_{\Theta_{c/2}})^* \\ \iota \downarrow & \nearrow & \\ \Theta_{c/2} & & \end{array}$$

el morfismo  $g_{c/2}$  corresponde al haz invertible

$$\eta_{c/2} = \omega_{\Theta_{c/2}} \otimes \mathcal{O}_{Z_c}$$

este haz, tiene asociado una serie lineal  $|E_d| \in \mathbf{G}_d^2(Z_c)$ , como consecuencia del teorema de Clifford  $5 \leq d \leq 6$ , y como  $Z_c$  es de género 7 se sigue de la fórmula de curvas planas que  $d = 6$ .

Procediendo de manera análoga con  $-c/2$ , obtenemos el haz invertible

$$\eta_{-c/2} = \omega_{\Theta_{-c/2}} \otimes \mathcal{O}_{Z_c}$$

estos haces son tales que:

**Lema.28.**

- (i)  $\eta_{c/2} = \iota^* \eta_{-c/2}$ ,
- (ii)  $\eta_{c/2} \otimes \eta_{-c/2} = \omega_{Z_c}$ .

**Demostación:**

- (i)  $-1 : \Theta_{-c/2} \hookrightarrow \Theta_{c/2}$  es un biholomorfismo lo cual implica que

$$(-1)^*(\omega_{\Theta_{c/2}}) = \omega_{\Theta_{-c/2}}$$

y como  $\eta_{\pm c/2} = \omega_{\pm c/2} \otimes \mathcal{O}_{Z_c}$  se obtiene el resultado deseado. Además

$$\deg \eta_{c/2} = \deg \eta_{-c/2} = 1/2 \deg \omega_{Z_c} = 6.$$

(ii) Se sigue de la Proposición 3. □

Y como la curva  $Z_c$  es no hiperelíptica, (ya que en este caso  $X$  sería hiperelíptica), las series lineales  $|E_{c/2}|, |E_{-c/2}| \in \mathbf{G}_6^2(Z_c)$ , se demuestra en [DC.Rec.] que estas series son únicas, (esto es, la aplicación de Gauss asociada al divisor  $\Theta_{c/2}$  nos proporciona una descripción geométrica de la serie  $|E_{c/2}|$ ).

Como  $\Theta_{c/2}$  y  $\Theta_{-c/2}$  se intersectan transversalmente, entonces  $g_{c/2} \neq g_{-c/2}$  es decir,  $\eta_{c/2} \neq \eta_{-c/2}$  para  $c$  genérica. En resumen tenemos [DC.Rec.]

**Proposición.29.**

*La curva  $Z_c$  construida anteriormente tiene exactamente dos series lineales  $|E_{c/2}|$  y  $|E_{-c/2}|$  de grado 6 y dimensión 2 las cuales están determinadas en forma única por la pareja  $(X, c)$  tales que:*

$$|E_{c/2} + E_{-c/2}| = |K_{Z_c}| \quad \text{y} \quad t^* E_{c/2} = E_{-c/2}$$

*y dichas series corresponden a los haces invertibles*

$$\eta_{\pm c/2} = \omega_{\Theta_{\pm c/2}} \otimes \mathcal{O}_{Z_c}$$

*determinados por los encajes canónicos*

$$j_{\pm c} : Z_c \hookrightarrow \Theta_{\pm c/2}.$$

□

Se demuestra además [DC.Rec] que la representación plana de  $Z_c$  dada por  $|E_{c/2}| \in \mathbf{G}_6^2$  es una sextica plana con tres puntos dobles no alineados (nodos o cúspides) y la involución aplicada al divisor correspondiente a un punto doble da la intersección residual de la línea opuesta con la sextica.

## 2.5 La Superficie Del Pezzo y La Superficie de Cayley Asociadas con $Z_c$ y $Y_c$

Como hemos mencionado anteriormente, tenemos una descripción  $\tilde{C}$  de  $Z_c$  como curva plana, dada por el morfismo

$$g_{c/2} : Z_c \longrightarrow \text{Proj} SH^0(Z_c, \eta_{c/2})^* = \text{Proj} SH^0(\Theta_{c/2}, \omega_{\Theta_{c/2}} \otimes \mathcal{O}(Z_c))^* = \mathbf{P}_2$$

la cual esta determinada por el haz invertible

$$\eta_{c/2} = \omega_{\Theta_{c/2}} \otimes \mathcal{O}_{Z_c} \in \mathbf{G}_6^2.$$

Como consecuencia de la fórmula del género para curvas planas, tenemos que  $\tilde{C}$  es una sextica plana en  $\mathbf{P}_2$ , se demuestra [DC.Rec.] que en condiciones genéricas  $\tilde{C}$  tiene tres puntos dobles no alineados y como  $\tilde{C}$  es birracional a  $Z_c$  es posible ver que estos puntos tienen que ser nodos o cúspides. Denotemos por  $p_i = g_{c/2}(\tilde{P}_i) = g_{c/2}(\tilde{Q}_i) \in \mathbf{P}_2$ ,  $i = 1, 2, 3$ , estos tres puntos dobles (no colineales, esto es para  $c \in JX$  genérica) de  $\mathbf{P}_2 = \text{Proj} SH^0(Z_c, \eta_{c/2})^*$  y por  $\mathcal{P}_2$  al sistema lineal (de dimensión tres) de cónicas que pasan por estos tres puntos, entonces [Be.]  $\mathcal{P}_{c/2}$  define un morfismo racional

$$\phi_{\mathcal{P}} : \mathbf{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_{c/2}^* \cong \mathbf{P}_2^*$$

(donde  $\mathcal{P}_{c/2}^*$  denota el dual de  $\mathcal{P}_{c/2}$ ), el cual se denomina una transformación cuadrática (o de Cremona). El sistema  $\mathcal{P}_{c/2}$  tiene tres puntos base, a saber,  $p_i$   $i = 1, 2, 3$ . y como consecuencia de la propiedad universal del "Blow-up"  $\phi_{\mathcal{P}_{c/2}}$  se extiende a un morfismo

$$f_{\mathcal{P}} : \tilde{\mathbf{P}}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_{c/2}^*$$

donde  $\tilde{\mathbf{P}}_2$  denota el blow-up de  $\mathbf{P}_2$  en  $\{p_i \mid i = 1, 2, 3\}$ .

Sea  $x \in \mathcal{P}_{c/2}^*$ , el punto correspondiente a un pincel de cónicas

$$\{\lambda C_1 + \mu C_2 \mid (\lambda; \mu) \in \mathbf{P}_1\}$$

con  $C_1, C_2 \in \mathcal{P}_{c/2}$ , como  $x \in \tilde{\mathcal{P}}_{c/2}$  entonces  $f_{\mathcal{P}}^{-1}(x)$  contiene los puntos base de los pinceles en  $\tilde{\mathbf{P}}_2$ , a saber los puntos de  $\tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2$ , donde  $\tilde{C}_i$  denota la transformada estricta de  $C_i$ ; y se tienen dos posibilidades:

(a)  $C_1 \cap C_2$  consta de cuatro puntos;  $\{p_i | i = 1, 2, 3, \}$  y un cuarto punto  $p_4$ , el cual es el único punto de  $f_P^{-1}(x)$ .

(b)  $C_1$  y  $C_2$  tienen una línea en común  $l$ , entonces  $C_1 \cap C_2 = l \cup \{t\}$  con  $t \in \mathbf{P}_2$ , lo cual solo sucede cuando  $t$  es uno de los puntos  $p_i$  y  $l$  pasa a través de los otros dos, y así hay tres de estos pinceles  $x_i \in \mathcal{P}_{c/2}^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Así  $\phi_{\mathcal{P}_{c/2}}$  es birracional y existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{P}}_2 & \xrightarrow{f_P} & \mathcal{P}_{c/2}^* \cong \mathbf{P}_2^* \\ \varepsilon \downarrow & \nearrow & \\ \mathbf{P}_2 & & \end{array}$$

donde  $\varepsilon : \tilde{\mathbf{P}}_2 \rightarrow \mathbf{P}_2$  es el blow-up de  $\mathbf{P}_2$  en  $\{p_i | i = 1, 2, 3\}$  y  $f_P : \tilde{\mathbf{P}}_2 \rightarrow \mathcal{P}_{c/2}^*$  es (salvo isomorfismos) el blow-up de  $\mathcal{P}_{c/2}^*$  en  $\{x_i | i = 1, 2, 3\}$ .

Como los puntos  $p_i \in \mathbf{P}_2$  están en posición general entonces el sistema lineal de cúbricas que pasa por estos tres puntos define un encaje

$$\iota_P : \tilde{\mathbf{P}}_2 \hookrightarrow \mathbf{P}_6 \cong \text{Proj} SH^0(\tilde{\mathbf{P}}_2, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{P}}_2}(3) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{P}}_2}(-\Sigma \tilde{p}_i))$$

(donde  $\tilde{p}_i$  denota el divisor excepcional del  $p_i$ ) y la superficie  $S^{(6)} = \iota_P(\tilde{\mathbf{P}}_2)$  es una superficie de grado 6 en  $\mathbf{P}_6$  esto es, una superficie de Del Pezzo de grado 6 [Be.].

Podemos ver que al tomar una curva plana  $\tilde{C} \subset \tilde{\mathbf{P}}_2$  y explotarla en los puntos  $p_i$  obtenemos una curva  $\hat{C}$  encajada en  $\text{Proj} SH^0(\tilde{\mathbf{P}}_2, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{P}}_2}(3) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{P}}_2}(-\Sigma \tilde{p}_i))$  y como  $\hat{C}$  tiene género 7 y grado 12 en  $\mathbf{P}_6 = \text{Proj} SH^0(\tilde{\mathbf{P}}_2, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{P}}_2}(3) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{P}}_2}(-\Sigma \tilde{p}_i))$  tenemos que  $\hat{C}$  es una curva canónica y que

$$\mathbf{P}_6 = \text{Proj} SH^0(\tilde{\mathbf{P}}_2, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{P}}_2}(3) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{P}}_2}(-\Sigma \tilde{p}_i))$$

es su espacio canónico, es decir:

$$H^0(\tilde{\mathbf{P}}_2, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{P}}_2}(3) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{P}}_2}(-\Sigma \tilde{p}_i)) \cong H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$$

y este isomorfismo viene dado por restricción. <sup>8</sup>

Como  $g_{c/2} : Z_c \rightarrow \mathbf{P}_2$  es un morfismo, si denotamos por  $\mathcal{I}$  el haz coherente de ideales correspondiente al blow-up  $\varepsilon : \tilde{\mathbf{P}}_2 \rightarrow \mathbf{P}_2$  en los puntos

<sup>8</sup>Como  $H^1(S, K_S) = H^1(S, \mathcal{O}_S)$ , donde  $S = \iota_P(\tilde{\mathbf{P}}_2)$  tenemos un isomorfismo  $H^0(S, \mathcal{O}_S(3H - \Sigma \tilde{p}_i)) \cong H^0(Z_c, \omega_{Z_c})$  dado por restricción.



$p_1, p_2, p_3$ , como  $g_{c/2}^{-1} \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{Z_c}$  es un haz invertible de ideales sobre  $Z_c$  entonces, existe un único morfismo

$$g_{c/2} : Z_c \longrightarrow \tilde{P}_2$$

que factoriza  $g_{c/2}$ , esto es :

$$\begin{array}{ccc} Z_c & \xrightarrow{g_{c/2}} & \tilde{P}_2 \\ & \searrow g_{c/2} & \downarrow \varepsilon \\ & & P_2 \end{array}$$

Componiendo con el morfismo

$$\iota_P : \tilde{P}_2 \longrightarrow P_6,$$

obtenemos

$$\begin{array}{ccc} Z_c & \xrightarrow{g_{c/2}} & P_2 \\ & \searrow g_{c/2} & \uparrow \varepsilon \\ & & \tilde{P}_2 \end{array} \xrightarrow{\iota_P} P_6 \cong ProjSH^0(Z_c, \omega_{Z_c})^*$$

en particular tenemos la aplicación inyectiva  $h = \iota_P g_{c/2} : Z_c \longrightarrow P_6$  donde  $h(Z_c)$  es una curva de grado 12 en  $P_6$ , esto es  $h$  es la aplicación canónica  $\varphi_{K_{Z_c}}$ , y además  $h(Z_c) \subset \iota_P(\tilde{P}_2) = S^{(6)}$ .

**Observación.30.** [DC.Rec.]

La superficie de Del Pezzo  $S^{(6)}$  construida anteriormente es invariante bajo la involución  $\iota : Z_c \rightarrow Z_c$  lo cual implica que la transformación inducida en el espacio canónico de  $Z_c$ ,  $ProjSH^0(Z_c, \omega_{Z_c})^* \rightarrow ProjSH^0(Z_c, \omega_{Z_c})^*$  al restringirla a la superficie de Del Pezzo  $S^{(6)}$  es precisamente el levantamiento de la transformación de Cremona dada anteriormente.

Consideremos  $\pi : S^{(6)} \rightarrow C$  el cociente por la involución  $\iota$ , este morfismo es de grado 2 y se ramifica en los puntos fijos de la transformación de Cremona sobre  $P_2^* = ProjSH^0(Z_c, \eta_{c/2})$  esto es en los nodos de  $C$ .

Así  $C$  es una superficie de grado 3 con cuatro nodos en

$$ProjS(H^0(Z_c, \omega_{Z_c})^*)^* \cong ProjSH^0(Y_c, \omega_{Y_c})^* \cong P_3$$

(asociada de manera natural con  $\eta_{c/2} \in G_6^2(Z_c)$ ).

Esto es,

$$\begin{aligned} C &= \{ \iota_P \mathcal{G}_{c/2}(\xi) + \iota_P \mathcal{G}_{-c/2}(\iota(\xi)) / \xi \in \Theta_{c/2} \} \cap ProjSH^0(Y_c, \omega_{Y_c})^* \\ &= \{ Proj(r_{\xi}^*(T_{\xi}^* \Theta_d)) + Proj(r_{\xi}^*(T_{K_X - \xi}^* \Theta_{-c/2})) / \xi \in \Theta_{c/2} \} \cap ProjSH^0(Y_c, \omega_{Y_c})^*. \end{aligned}$$

En particular tenemos asociado el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Z_c & \xrightarrow{\varphi_{KZ_c}} & S^{(6)} \subset \mathbf{P}_6 = \text{Proj} SH^0(Z_c, \omega_{Z_c})^* \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ Y_c & \xrightarrow{\varphi_{KY_c}} & \mathcal{C} \subset \mathbf{P}_3 = \text{Proj} SH^0(Y_c, \omega_{Y_c})^* \end{array}$$

Tomemos ahora la aplicación de vértices, esto es, la aplicación que a toda pareja de rectas le asocia su intersección <sup>9</sup>

$$v : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{P}_2$$

$$\iota_\rho \mathcal{G}_{c/2}(\xi) + \iota_\rho \mathcal{G}_{-c/2}(\iota(\xi)) = \iota_\rho \mathcal{G}_{c/2}(\xi) \cap \iota_\rho \mathcal{G}_{-c/2}(\iota(\xi)).$$

Tenemos así el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Z_c & \xrightarrow{\varphi} & S^{(6)} \subset \mathbf{P}_6 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ Y_c & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{C} \subset \mathbf{P}_3 \\ v\varphi \searrow & & \downarrow v \\ & & \mathbf{P}_2 \end{array}$$

Para finalizar esta sección haremos algunas observaciones sobre una relación que hay entre el haz lineal  $\mathcal{O}_X(K_X + c)$  y la representación plana de  $Z_c$  dada por el haz lineal  $\eta_{\pm c/2}$  así como su relación con las superficies  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{C}$  asociadas a las curvas  $Z_c$  y  $Y_c$  respectivamente. Para lograr este objetivo recordaremos primeramente algunas propiedades de la aplicación de Gauss, así como algunas propiedades sobre los sistemas de cónicas generales y aplicaremos estas propiedades al sistema de diferenciales cuadráticos asociados con el haz lineal  $\mathcal{O}_X(K_X + c)$  a saber,  $|\Delta_c| = \text{spann}\{\omega \in H^0(X, \omega_X^2 \mid (\omega) \geq D, \text{ para algún } D \in |K_X + c|\}$ .

Como mencionamos anteriormente, dado un sistema tridimensional de cónicas tal que  $|\Delta| \cdot \mathcal{W} = q_0 + \dots + q_3$  consta de cuatro puntos distintos, se sabe que  $|\Delta| \cdot \mathcal{H} = \{C \in |\Delta| \mid rk C \leq 2\}$  es una superficie de Cayley cuya ecuación es de la forma  $\sum \frac{\lambda_i}{\lambda_i} = 0$ , donde  $(\lambda) = (\lambda_0; \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$  son coordenadas homogéneas en  $\mathbf{P}_3 \cong |\Delta|$ . Esta superficie contiene exactamente 9 líneas: las 6 líneas  $L_{ij} = \bar{q}_i \bar{q}_j$  que unen las parejas de nodos  $q_i$ , y las tres líneas en las cuales el plano  $\tilde{\pi}$  cuya ecuación es  $\sum \lambda_i = 0$  interseca a la superficie  $\mathcal{C}$ ,

<sup>9</sup>La aplicación de vértices es una aplicación racional.

esto es,  $M_k = \{\lambda_i + \lambda_j = \lambda_k + \lambda_3 = 0\}$  con  $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$ . Denotemos además por  $p_{ij}$  el punto de intersección de la recta  $M_i$  con la recta  $M_j$ .

Sean  $x_0, x_1, x_2 \in H^0(\mathbf{P}_2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1))$  y  $x_3 = x_0 + x_1 + x_2$  tales que  $q_i = \{x_i^2 = 0\}$ . En  $\mathbf{P}_2$  consideremos las líneas  $\ell_i := \{x_i = 0\}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  las cuales se sabe [Rec.2] se intersectan en 6 puntos, denotemos por  $r_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$  el punto de intersección de la recta  $\ell_i$  con la recta  $\ell_j$ . Tomemos además las líneas diagonales  $m_k = \{x_k - x_3 = 0\}$  con  $k \in \{0, 1, 2\}$ , esto es, la línea  $m_k$  une el punto  $r_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$  con el punto  $r_{k3} = \ell_k \cap \ell_3$  con  $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$ .

La aplicación  $\psi : \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_3$  determinada por el sistema lineal de cúbicas planas que pasan por los puntos  $r_{ij}$  da la correspondencia brracional entre  $\mathbf{P}_2$  y  $\mathcal{C}$ . Además se tiene que  $\psi(m_k) = M_k$ ,  $\psi$  explota los puntos  $r_{ij}$  en las líneas  $L_{ij}$  y contrae la línea  $\ell_i$  al nodo  $q_i$ , y se tiene además que  $\psi^{-1}(\tilde{\pi}) = m_0 + m_1 + m_2$ , ver figura:

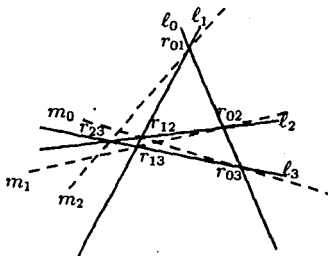


Fig. 14 El cuadrilátero en  $\mathbf{P}_2$ , sus diagonales y vértices.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

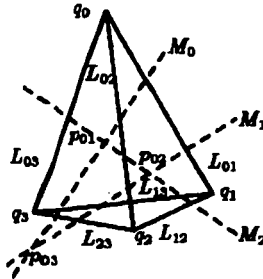


Fig. 15 Las 9 líneas en  $C$ , y sus puntos de intersección.

Por otra parte, para determinar los puntos dobles de la representación plana de  $Z_c$  y su relación con el haz lineal  $L = \mathcal{O}_X(K + c)$ , usaremos que vía la aplicación de Abel podemos identificar  $X^{(2)}$  el segundo producto simétrico de la curva  $X$  con el divisor theta de Riemann  $\Theta$  así como la identificación de  $H^0(X, \omega_X)^* \simeq H^0(\Theta, \omega_\Theta)$  de donde la aplicación de Gauss

$$\mathcal{G}_\Theta : \Theta \longrightarrow \text{Proj}SH^0(\Theta, \omega_\Theta)$$

$$\mathcal{G}_\Theta(\lambda) = t_\lambda^* T_\lambda \Theta$$

puede identificarse de manera natural con

$$\mathcal{G} : X^{(2)} \longrightarrow \text{Proj}SH^0(X, \omega_X)^*$$

$$\mathcal{G}_\Theta(z + y) = \ell_{zy}$$

donde  $\ell_{zy}$  denota la línea determinada por los  $z, y$ .

Como  $\Theta_{\pm c/2}$  es un trasladado del divisor theta entonces podemos identificar la aplicación de Gauss

$$\mathcal{G}_{\pm c/2} : \Theta_{\pm c/2} \longrightarrow \text{Proj}SH^0(\Theta_{\pm c/2}, \omega_{\Theta_{\pm c/2}})$$

$$\mathcal{G}_{\pm c/2}(\lambda \pm c/2) = T_{\lambda \pm c/2} \Theta_{\pm c/2}$$

con la aplicación

$$\mathcal{G}_\pm : X^{(2)} \longrightarrow \text{Proj}SH^0(X, \omega_X)^*$$

$$g_{\Theta}(x+y) = \ell_{xy}$$

donde  $\lambda$  es la imagen de  $x+y$  bajo la aplicación de Abel.

Como la representación plana  $\tilde{C} = g_{c/2}(Z_c)$  tiene tres puntos dobles no alineados, entonces existen puntos  $\tilde{P}_i, \tilde{Q}_i \in Z_c$  tales que  $g_{c/2}(\tilde{P}_i) = g_{c/2}(\tilde{Q}_i)$  para  $i = 1, 2, 3$ .

Como  $Z_c \subset \Theta_{c/2}$  por tanto existen  $P_i, Q_i \in \Theta$  tales que  $\tilde{P}_i = P_i + c/2$ ,  $\tilde{Q}_i = Q_i + c/2$  y  $\ell_{P_i} = \ell_{Q_i}$ , para  $i = 1, 2, 3$ .

Por otra parte, como  $Y_c = \mathcal{C} \cdot \mathcal{Q}_{Y_c}$  y  $M_i$  es una recta en  $\mathbf{P}_3$ , como consecuencia del teorema de Bertini  $\mathcal{Q}_{Y_c}$  intersecta la recta  $M_i$  en dos puntos (los cuales en el caso generico son distintos) y como consecuencia de los lemas antes mencionados corresponden a dos pares de rectas  $\tilde{\ell}_i + m_i, \tilde{\ell}'_i + m_i \in |\Delta_c|$  de donde existen divisores  $F_i, G_i \in |K_X + c|$  tales que

$$(\tilde{\ell}_i + m_i) \cdot X_{\text{can}} > F_i, (\tilde{\ell}'_i + m_i) \cdot X_{\text{can}} > G_i,$$

denotemos

$$\tilde{\ell}_i \cdot X_{\text{can}} = \sum_{k=1}^4 p_{ik} \in |K_X + c|$$

$$\tilde{\ell}'_i \cdot X_{\text{can}} = \sum_{k=1}^4 q_{ik} \in |K_X + c|$$

$$m_i \cdot X_{\text{can}} = \sum_{k=1}^4 r_{ik} \in |K_X + c|,$$

y podemos suponer (reenumerando índices si es necesario) que

$$p_{i1} + p_{i2} + q_{i1} + q_{i2}, p_{i1} + p_{i2} + r_{i1} + r_{i2} \in |K_X + c|.$$

Como  $\sum_{k=1}^4 p_{ik} \in |K_X|$  entonces,  $\sum_{k=1}^4 p_{ik} - (p_{i1} + p_{i2} + q_{i1} + q_{i2}) = c$  de donde  $\tilde{P}_i = p_{i3} + p_{i4} - c/2 = q_{i1} + q_{i2} + c/2 \in Z_c$ , y procediendo de manera análoga  $\tilde{P}'_i = p_{i1} + p_{i2} - c/2 = r_{i1} + r_{i2} + c/2 \in Z_c$  pero como  $\ell_{\tilde{P}_i} = \ell_{\tilde{P}'_i}$ , luego entonces  $g_{c/2}(\tilde{P}_i) = g_{c/2}(\tilde{P}'_i)$  obteniéndose así los tres puntos dobles de la representación plana de  $Z_c$  bajo el morfismo  $g_{c/2}$ .

Otra manera de ver esto es la siguiente: La superficie de Steiner  $S \subset |\Delta_c|$  tiene tres rectas de puntos dobles, las cuales se intersectan en un solo punto, que es un punto triple [S.R. pag. 134]. El punto triple se representará por los tres vértices del triángulo diagonal, es decir, es la imagen de las

rectas  $m_1, m_2, m_3$  vía el morfismo  $\chi : \mathbf{P}_2 \rightarrow S \subset |\Delta_c|$  el cual está dado como la composición de la aplicación de Veronese y la proyección  $\mathbf{P}_5 \rightarrow |\Delta_c|$ . Entonces  $P_i, P'_i$  son las intersecciones (como divisores) de  $\chi(m_i)$  con la cuádriga  $Q'_L$ .

Entonces  $p_i, p'_i$ , son las intersecciones (como divisor) de  $\phi_c(m_i)$  con  $Q'_L$ . En particular, en  $Y_c$  están los puntos  $P_{ij} + Q_{ij}$  tales que

$$W_2(Y_c) \cap (W_2(Y_c) + \eta) = \{P_{ij} + Q_{ij} \mid i < j = 0, 1, 2, 3\}.$$

Como  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$  es un cubriente 2:1 no ramificado entonces

$$P_{ij} = \{\tilde{P}_{ij}, \iota(\tilde{P}_{ij})\} \text{ con } \tilde{P}_{ij} \in Z_c$$

$$Q_{ij} = \{\tilde{Q}_{ij}, \iota(\tilde{Q}_{ij})\} \text{ con } \tilde{Q}_{ij} \in Z_c.$$

Entonces los puntos  $\tilde{P}_{ij}, \tilde{Q}_{ij} \in Z_c$  son tales que

$$T_{\tilde{P}_{ij}} \Theta_{c/2} \cdot T_{\iota(\tilde{P}_{ij})} \Theta_{-c/2} = T_{\tilde{Q}_{ij}} \Theta_{c/2} \cdot T_{\iota(\tilde{Q}_{ij})} \Theta_{-c/2}.$$

Como

$$\begin{aligned} W_2(Y_c) \cap (W_2(Y_c) + \eta) &= \{P_{ij} + Q_{ij} \mid i < j = 0, 1, 2, 3\} \\ &= \{P + Q \mid P + Q + \eta \neq \emptyset\} \\ &= \{P + Q \mid h^0(Y_c, \omega_{Y_c}(\eta - (P + Q))) = 2\} \end{aligned}$$

por Riemann-Roch y como  $Y_c$  es no hiperelíptica tenemos que  $h^0(Y_c, \omega_{Y_c}(\eta) \otimes \mathcal{O}_{Y_c}(-P)) = 2$ . Esto es

$$H^0(Y_c, \omega_{Y_c}(\eta - P)) = H^0(Y_c, \omega_{Y_c}(\eta - Q)) = H^0(Y_c, \omega_{Y_c}(\eta - (P + Q)))$$

y por Riemann-Roch esto equivale a  $h^0(Y_c, \mathcal{O}_{Y_c}(\eta + (P + Q))) = 1$  de donde existe  $t \in H^0(Y_c, \mathcal{O}_{Y_c}(\eta + (P + Q)))$  no cero (el cual es único salvo constantes).

Este elemento determina una inclusión natural

$$\alpha_t : H^0(Y_c, \omega_{Y_c}(\eta - (P + Q))) \rightarrow H^0(Y_c, \omega_{Y_c})$$

dado por

$$\alpha_t(w) = w \otimes t$$

notamos además que este morfismo es inyectivo, de donde tenemos en particular la siguiente proposición :

**Proposición.31.**

Para cada  $P_{ij} + Q_{ij} \in W_2(Y_c) \cap (W_2(Y_c) + \eta)$  tenemos un morfismo

$$\alpha_{t_{ij}} : H^0(Y_c, \omega_{Y_c}(\eta - (P_{ij} + Q_{ij}))) \longrightarrow H^0(Y_c, \omega_{Y_c})$$

dado por

$$\alpha_{t_{ij}}(w) = w \otimes t_{ij}$$

y estos morfismos son tales que:

(i)  $\Sigma \text{Im}(\alpha_{t_{ij}}) = H^0(Y_c, \omega_{Y_c})$ .

(ii) En particular tenemos seis subespacios de  $H^0(Y_c, \omega_{Y_c}(\eta))$  de dimensión 2 cuyas imágenes bajo los morfismos  $\alpha_{t_{ij}}$  inducen seis subespacios de  $H^0(Y_c, \omega_{Y_c})$  de dimensión dos que generan  $H^0(Y_c, \omega_{Y_c})$ .  $\square$

Podemos notar además que los puntos  $P_{ij} + Q_{ij}$  se relacionan de la siguiente manera:

(i)  $P_{ij} + Q_{ij} \sim P_{kl} + Q_{kl} + \eta \quad \{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$ ,

(ii)  $(P_{01} + Q_{01}) + (P_{02} + Q_{02}) \sim (P_{23} + Q_{23} + \eta) + (P_{13} + Q_{13} + \eta)$   
 $\sim (P_{23} + Q_{23}) + (P_{13} + Q_{13})$ .

Por lo tanto

$$K_{Y_c} - ((P_{01} + Q_{01}) + (P_{02} + Q_{02})) \sim K_{Y_c} - ((P_{23} + Q_{23}) + (P_{13} + Q_{13}))$$

y como  $Y_c$  es no-hiperelíptica, entonces

$$K_{Y_c} - ((P_{01} + Q_{01}) + (P_{02} + Q_{02})) = K_{Y_c} - ((P_{23} + Q_{23}) + (P_{13} + Q_{13})),$$

esto es,

$$\begin{aligned} & (P_{01} + Q_{01}) + (P_{02} + Q_{02}) + (K_{Y_c} - ((P_{01} + Q_{01}) + (P_{02} + Q_{02}))) \\ &= (P_{23} + Q_{23}) + (P_{13} + Q_{13}) + (K_{Y_c} - ((P_{23} + Q_{23}) + (P_{13} + Q_{13}))) \\ &\in |\omega_{Y_c}|, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$h^0(Y_c, \omega_{Y_c}(\eta) \otimes (\omega_{Y_c}(\eta - ((P_{01} + Q_{01}) + (P_{02} + Q_{02})))) = 2,$$

esto es,

$$(K_{Y_c} - ((P_{01} + Q_{01}) + (P_{02} + Q_{02}))),$$

corresponde a otro punto doble, digamos

$$(K_{Y_c} - ((P_{01} + Q_{01}) + (P_{02} + Q_{02}))) = P_{03} + Q_{03},$$

y entonces se tiene que

$$\begin{aligned} x_0 &: P_{01} + Q_{01} + P_{02} + Q_{02} + P_{03} + Q_{03} \\ x_1 &: P_{23} + Q_{23} + P_{13} + Q_{13} + P_{03} + Q_{03} \\ x_2 &: P_{23} + Q_{23} + P_{02} + Q_{02} + P_{12} + Q_{12} \\ x_0 + x_1 + x_2 &: P_{01} + Q_{01} + P_{13} + Q_{13} + P_{12} + Q_{12} \in |\omega_{Y_c}(\eta)|, \end{aligned}$$

determinan las cuatro rectas

$$x_0, x_1, x_2, x_0 + x_1 + x_2,$$

del cuadrángulo fundamental:

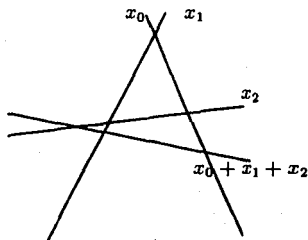


Fig. 13

Con lo cual concluimos esta interpretación de la geometría del cubriente  $\pi : Z_c \rightarrow Y_c$  a partir de la geometría de la pareja  $(X, c)$ .



### 3 Apéndice A. Funciones Theta.

En este apéndice daremos un breve resumen de la teoría de funciones theta asociadas variedades jacobianas, (para más detalles ver [Be.D.], [Gu.], [Ig.]). Dada una variedad abeliana  $J = V/\Lambda$  como el cociente de un  $\mathbf{C}$ -espacio vectorial  $V$  módulo una red discreta de rango máximo  $\Lambda$ , las funciones theta son funciones holomorfas sobre  $V = \mathbf{C}^n$  que satisfacen ciertas ecuaciones funcionales. Dentro de la variedad de moduli de las variedades abelianas principalmente polarizadas se tiene la clase de las variedades jacobianas y su naturaleza se refleja en un número de propiedades especiales e identidades que satisfacen sus funciones theta.

Dada  $S$  una superficie de Riemann de género  $g$ , podemos escoger un punto base  $s_0 \in S$  y un conjunto de generadores  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  del grupo fundamental  $\pi_1(S, s_0)$ , como topológicamente  $S$  es una esfera con  $g$  asas,  $a_j, b_j$  puede considerarse como una pareja de trayectorias alrededor de la  $j$ -ésima asa. Las clases de homología de estos  $2g$ -lazos los cuales denotaremos por  $\alpha_j, \beta_j$ , son generadores del grupo de homología  $H_1(S, \mathbf{Z})$ , tal que

$$\alpha_j \cdot \alpha_k = \beta_j \cdot \beta_k = 0, \quad \alpha_j \cdot \beta_k = \delta_{jk};$$

esto es  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}$  es una base canónica de  $H_1(S, \mathbf{Z})$ , y sea  $\omega_1, \dots, \omega_g$  una base para  $H^0(S, \omega_S)$  normalizada con respecto a  $\{\alpha_j, \beta_j\}$ , esto es,

$$\int_{\alpha_j} \omega_k = \delta_{jk}.$$

Como la variedad jacobiana  $J(S)$  de  $S$  está dada como  $J(S) = \mathbf{C}^g/\Lambda$ , donde  $\Lambda$  es la red generada por los vectores

$$e_j = \lambda_j = \begin{pmatrix} \int_{\alpha_j} \omega_1, \dots, \int_{\alpha_j} \omega_g \end{pmatrix}, \\ \lambda_{g+j} = \begin{pmatrix} \int_{\beta_j} \omega_1, \dots, \int_{\beta_j} \omega_g \end{pmatrix},$$

Como consecuencia de las relaciones de Riemann, la matriz de periodos  $\Omega$  de  $\Lambda \subset \mathbf{C}^g$  es de la forma

$$\Omega = (I, Z)$$

donde  $Z$  es una matriz simétrica con parte imaginaria positiva definida; si  $x_1, \dots, x_{2g}$  denotan coordenadas reales sobre  $\mathbf{C}^g$  dual a la base real  $\{\lambda_j\}$ , la

forma diferencial

$$\omega = \sum_{j=1}^g dx_j \wedge dx_{g+j}$$

representa la polarización principal de  $J(S) = \mathbb{C}^g/\Lambda$ . En términos de las coordenadas complejas  $z = (z_1, \dots, z_g)$ , podemos escribir

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum Y_{jk}^{-1} dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

donde  $Y = \text{Im}Z$ .

Denotemos por  $\mathcal{O}_J(\Theta_S)$  el haz lineal sobre  $J(S)$  con clase de Chern  $[\omega]$ , así una sección global  $\theta$  de  $\mathcal{O}_J(\Theta_S)$  está representado por la función theta de Riemann  $\theta \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^g)$  la cual satisface

$$\theta(z + e_j) = \theta(z), \quad \theta(z + Z_j) = \exp(-2\pi i(Z_j + Z_{jj}/2))\theta(z) :$$

Esto es, para cada vector  $\lambda \in \Lambda$  existe una función entera no-nula  $\eta(\lambda, z)$  en las  $g$  variables complejas  $z \in \mathbb{C}^g$  tal que

$$\theta(z + \lambda) = \eta(\lambda, z)\theta(z).$$

El conjunto de ceros de la función  $\theta$  es una subvariedad holomorfa de dimensión pura  $g-1$  de  $\mathbb{C}^g$  y es invariante bajo el subgrupo red  $\Lambda$ , así determina una subvariedad holomorfa de dimensión pura  $g-1$  del toro complejo  $J(S)$ . Está subvariedad se denomina el divisor theta de Riemann y lo denotamos por  $\Theta$ .

Luego entonces la serie theta asociada a la matriz  $Z$  con características  $[\nu, \tau] \in \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g$  tiene la forma

$$\theta[\nu, \tau](z; Z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp 2\pi i \left[ \frac{1}{2} {}^t(n + \nu)Z(n + \nu) + {}^t(n + \nu)(z + \tau) \right],$$

y la serie theta de segundo orden con características  $[\nu, \tau]$  es de la forma

$$\theta_2[\nu, \tau](z; Z) = \theta \left[ \frac{\nu}{2}, \tau \right] (2z; 2Z).$$

La propiedad básica de las funciones theta de segundo orden es que si  $\nu$  es un vector semi-entero, esto es  $2\nu \in \mathbb{Z}^g$ , entonces para cada vector  $\lambda \in \Lambda$ ,

$$\theta_2[\nu, 0](z + \lambda; Z) = \eta(\lambda, z)^2 \theta[\nu, 0](z; Z). \quad (\star)$$

El cuadrado de la función theta  $\theta(z)$  satisface esta ecuación, y puede reescribirse como  $\theta(z)^2 = {}^t c \cdot \theta_2(z)$  para algún vector  $c \in \mathbf{C}^g$ , de manera más general tenemos una relación entre las funciones theta elementales y las funciones theta de segundo orden dada por la:

*Fórmula de Weierstrass;*

$$\theta(z + \alpha)\theta(z + \beta) = {}^t \theta_2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \theta \left( z + \frac{\alpha + \beta}{2} \right),$$

o la forma dual correspondiente al caso en que  $\alpha = -\beta$

$$\theta(z + \alpha)\theta(z - \alpha) = {}^t \theta_2(\alpha) \cdot \theta(z).$$

Las funciones theta son funciones enteras en la variable  $z \in \mathbf{C}^g$  y  $\nu$  varia sobre  $\mathbf{Z}^g / 2\mathbf{Z}^{2g}$ . Las  $2^{2g}$  funciones theta de segundo orden describen una base del espacio vectorial de las funciones enteras sobre  $\mathbf{C}^g$  que se transforman por el factor de automorfía  $\rho_{-\tau} \zeta^2$  bajo la acción de la red  $\Lambda$ ;  $\rho_\tau \in \text{Hom}(\Lambda, \mathbf{C}^*)$  es la representación

$$\rho_\tau(\delta_j) = 1, \quad \rho_\tau(Z\delta_j) = \exp 2\pi i \tau_j,$$

donde  ${}^t \delta_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  tiene 1 en el  $j$ -ésimo lugar, y el factor de automorfía  $\zeta$  se define como

$$\zeta(\delta_j, z) = 1, \quad \zeta(Z\delta_j, z) = \exp(-2\pi i(z_j + \epsilon_j)),$$

donde  $2\epsilon$  es el vector diagonal de la matriz de periodos  $Z$ .

Es conveniente ver las  $2^g$  funciones theta como una función vector valuada

$$\theta_2(z) = \{\theta_2[\nu, 0](z, Z) : \nu \in \mathbf{Z}^g / 2\mathbf{Z}^g\},$$

este vector nunca es el vector cero, ya que si  $\Theta_2(c) = 0$  para algún punto  $c$  como consecuencia de la fórmula de Weierstrass tenemos que  $\theta(z+c)\theta(z-c) = 0$  para toda  $z$ , lo cual es claramente imposible. Así este vector describe un punto  $[\theta_2(z)]$  en el espacio proyectivo  $\mathbf{P}_{2^g-1} = \text{Proj} \Sigma(J, \mathcal{O}_J(2\Theta))$ . La ecuación funcional (\*) muestra que  $\theta_2(z)$  y  $\theta_2(z+\lambda)$  describen el mismo punto en  $\mathbf{P}_{2^g-1}$  para cada vector  $\lambda \in \Lambda$ , así obtenemos una aplicación holomorfa bien definida

$$[\theta_2] : J \longrightarrow \mathbf{P}_{2^g-1}.$$

La imagen de esta aplicación es una subvariedad algebraica  $K \subset \mathbf{P}_{2g-1}$  asociada de manera canónica con la matriz de periodos  $\Omega$ , denominada la variedad de Kummer-Wirtinger de  $\Omega$ . La aplicación  $[\theta_2] : J \rightarrow K$  es un cubriente doble ramificado con puntos dobles en los  $2^{2g}$  semiperiodos de  $J$  y en los otros puntos es no singular. De donde la variedad de Kummer puede identificarse con el cociente  $J / \langle -1 \rangle$  del toro  $J$  bajo la involución holomorfa  $-1 : J \rightarrow J$  inducida por la aplicación  $z \mapsto -z$ ; los semiperiodos en  $J$  son los puntos fijos de  $-1$ .

## 4 Apendice B. Variedades de Prym

Las variedades de Prym son variedades abelianas principalmente polarizadas, asociadas a cubrientes dobles no ramificados entre dos curvas, estas variedades son más generales que las variedades jacobianas, dichas variedades fueron descubiertas por Wirtinger y juegan un papel muy importante en las identidades de Schottky-Jung, para más referencias ver [Be.1], [Do.S.], [Fa.1], [Fa.2] y [M.1].

Sean  $C, \tilde{C}$  curvas de géneros  $g$  y  $2g-1$  respectivamente, y sea  $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$  un cubriente doble no ramificado, si  $\iota: \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}$  denota la involución de  $\tilde{C}$  que intercambia las dos hojas del cubriente  $\pi$ , entonces  $\iota$  actúa sobre la variedad jacobiana  $J\tilde{C}$  de  $\tilde{C}$ , en forma tal que  $J\tilde{C}$  se escinde bajo esta acción en una parte "+", (la cual corresponde a  $\pi^*JC$ ) y una parte "-",  $\mathcal{P}$ , la cual se denomina la variedad de Prym del cubriente ( $\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C$ ).

De manera más precisa, si  $Nm: J\tilde{C} \rightarrow JC$  es la aplicación de norma, tenemos

$$\mathcal{P} = \text{Im}(1-\iota^*) = (\text{Ker } Nm)^0 = \left\{ \begin{array}{l} \text{componente conexa de } Nm^{-1}(0) \\ \text{que contiene la identidad.} \end{array} \right\} \subset J\tilde{C}$$

y  $\mathcal{P}$  tiene dimensión  $g-1$ .

La variedad de Prym  $\mathcal{P}$  es una variedad abeliana principalmente polarizada; la polarización principal de  $J\tilde{C}$  induce dos veces una polarización principal sobre  $\mathcal{P}$ .

Usando las propiedades del divisor theta de una variedad jacobiana, se puede mostrar que el divisor theta de  $J\tilde{C}$  se restringe a dos veces un divisor theta sobre  $\mathcal{P}$  [M.1].

Esto es, si  $L$  es una theta con característica sobre  $C$ , es decir, si  $L$  es un haz lineal sobre  $C$  tal que  $L^2 = \omega_C$ , dicha theta con característica corresponde a un divisor theta simétrico  $\Theta_L$  sobre  $J\tilde{C}$  definido como

$$\Theta_L = \{ \alpha \in J\tilde{C} \mid h^0(L \otimes \alpha) \geq 1 \},$$

El haz lineal  $\pi^*L$  es una theta con característica en  $\tilde{C}$  y denotaremos por  $\tilde{\Theta}_{\pi^*L}$  el divisor theta correspondiente sobre  $J\tilde{C}$ . Tenemos los resultados básicos [M.1]:

**Teorema.**

(i)  $Nm^{-1}(\omega_C)$  es la unión disjunta de dos trasladados de la variedad de Prym  $\mathcal{P}$ , los cuales denotaremos  $\mathcal{P}^+$  y  $\mathcal{P}^-$ . Además,  $L \in \mathcal{P}^+$  si y solo si  $NmL = \omega_C$  y  $h^0(\tilde{C}, L)$  es par.

(ii) Existe un divisor  $\Xi$  sobre  $\mathcal{P}$ , el cual define una polarización principal de  $\mathcal{P}$ , tal que

$$\tilde{\theta}_{\pi^*L} \cdot \mathcal{P} = 2\Xi$$

La relación de  $\tilde{\theta}_{\pi^*L}$  con  $J\mathcal{C}$  se puede establecer fácilmente. El cubriente  $\pi$  está determinado por un semi-periodo  $\eta$  de  $C$ . Entonces

$$(\pi^*)^{-1}\tilde{\theta}_{\pi^*L} = \Theta_L + \Theta_{L \otimes \eta}$$

Estas relaciones se denominan la *configuración de Schottky-Jung* [Sc.], [Sc. J], las cuales implican las identidades de Schottky-Jung clásicas. Sean  $\theta, \xi, \theta$  secciones no cero de  $H^0(J\tilde{C}, \mathcal{O}(\tilde{\theta}_{\pi^*L}))$ ,  $H^0(\mathcal{P}, \mathcal{O}(\Xi))$ , y  $H^0(JC, \mathcal{O}(\Theta_L))$ . Entonces existen constantes  $a, b$  tales que

$$\tilde{\theta}(x) = a\xi(x)^2 \quad \text{para toda } x \in \mathcal{P}$$

$$\tilde{\theta}(\pi^*y) = b\theta(y)\theta(y + \eta) \quad \text{para toda } y \in J\mathcal{C}.$$

(Estas son igualdades entre elementos de haces lineales sobre  $\mathcal{P}$  y  $J\mathcal{C}$ .)

Aplicando estas dos últimas identidades al mismo elemento de  $J\tilde{C}$ . Este elemento debe de ser de la forma  $\pi^*y -$  con  $-y \in J\mathcal{C}$  y  $\pi^*y \in \mathcal{P}$ . Aplicando  $\pi_*$ , obtenemos  $2y = 0$ . Si denotamos por  $J_2C$  el grupo de puntos de orden 2 en  $J\mathcal{C}$ , se verifica que para un elemento  $y \in J_2C$ , se tiene que  $\pi^*y \in \mathcal{P}$  si  $y$  es ortogonal a  $\eta$  bajo el apareamiento natural de  $J_2C$ . Entonces para  $y \in \eta^\perp$  se obtiene que

$$\xi(\pi^*y)^2/\theta(y)\theta(y + \eta)$$

es independiente de  $y$ .

Esta es la forma clásica de las identidades de Schottky-Jung.

## 5 Apendice C. Diferenciales de $\mathbb{C}$

Un diferencial de *primer tipo* sobre una superficie de Riemann  $C$  es una 1-forma holomorfa; un *diferencial de segundo tipo* es una 1-forma meromorfa que no tiene residuos, y un *diferencial de tercer tipo* es una forma meromorfa que solo tiene polos simples. Notese que un diferencial es de primer tipo si y sólo si es tanto de segundo tipo como de tercer tipo.

### Observación:

(i) Una 1-forma meromorfa es la suma de diferenciales de segundo y tercer tipo.

(ii) Toda 1-forma holomorfa  $\omega$  cuyos  $A$ -periodos son cero es idénticamente nula.

(iii) Dado  $D = \sum a_j p_j$  un divisor de grado cero de  $C$ , existe un diferencial de tercer tipo  $\omega_D$  sobre  $C$ , holomorfa en  $C - \{p_j\}$  y tiene residuo  $a_j$  en  $p_j$ . Además este es único con la propiedad de que sus  $A$ -periodos son cero, como consecuencia de las relaciones bilineales de Riemann tenemos

$$\int_{\beta_j} \omega_D = \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \omega_j, \quad j = 1, \dots, g,$$

donde  $\omega_j$ ,  $j = 1, \dots, g$  es una base normalizada de diferenciales holomorfas de  $C$ ,  $\mathcal{A} = \sum_{a_j < 0} a_j p_j$  y  $\mathcal{B} = \sum_{a_j > 0} a_j p_j$ . Aquí se hace la convención que las trayectorias de integración entre los divisores no cortan la base de homología de  $C$  la cual se supone que no contiene ningún punto de  $D$ .

## Bibliografía

- [ACGH] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P., Harris, J., *Geometry of algebraic curves Vol. I*, 267, Springer-Verlag, New York, (1985).
- [A] Andreotti, A., On a theorem of Torelli. *Am.J. Math.*, 80, (1958), 801-828.
- [A.M.] Andreotti, A., Mayer, A., On Period relations for abelian integrals on algebraic curves. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 21 (1967), 189-238.
- [Baily] Baily, Jr., On the moduli of Jacobian varieties. *Ann. of Math.*, 71 (1960), 303-314.
- [Be.] Beauville, A., *Complex algebraic surfaces* London Math. Soc. Lect. Not. 68, (1983).
- [Be.1] Beauville, A., Prym varieties and the Schottky problem. *Invent. Math.*, 41 (1977), 149-196.
- [Be.D] Beauville, A., Debarre, O., Sur les fonctions theta du second ordre. *Preprint*.
- [Bers] L. Bers, On moduli of Riemann surfaces. *Notes et E.T.H. Zürich*, (1964).
- [B.E.] Berstein, I., Edmonds, A., On the construction of branched coverings of low-dimensional manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 247, January 1979.
- [Ca.] Catanese, F., On the rationality of certain moduli spaces related to curves of genus 4. *Lect. Notes in Math.*, 1008 (1981) Springer-Verlag.



- [Ca.Ce.] Catanese, F., Ceresa, G., Constructing sextic surfaces with a given number  $d$  of nodes. *Jour. Pure and App. Alg.*, 23 (1982) 1-12 North-Holland Publishing Co.
- [DC.Rec.] Del Centina, A., Recillas, S., Some projective geometry associated with unramified double covers of curves of genus 4. *Annali di Math. pura ed applicata IV.*, Vol. XXXIII, (1983) 125-140.
- [Do.] Donagi, R., The tetragonal construction. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 4, (1981) 181-186.
- [Do.S.] Donagi, R. Smith, R. C. The structure of the Prym map. *Acta Math.*, 146 (1982), 25-102.
- [F] Fay, J., Theta functions on Riemann Surfaces, *Lecture Notes*, 352 (1973), Springer-Verlag.
- [Fa.1] Farkas, H., On the Schottky relation and its generalisation to arbitrary genus. *Ann. of Math.*, 92 (2)(1970), 52-86.
- [Fa.2] Farkas, H., Schottky Jung theory. *Proc. of Symp. in Pure math.*, 49 (1989), Part 1. 459-483.
- [Fa.Ra.] Farkas, H. M. & Rauch, H., Period relations of Shottky type on Riemann Surfaces. *Ann. of Math.*, 92 (1970), 434-461.
- [Ful.] Fulton, W., Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves *Ann. of Math.*, 90 (1969), 542-575.
- [G.H.] Griffiths, P. A. & Harris, J., *Principles of algebraic geometry*. Wiley, 1978.
- [Gu.] Gunning, R. C., *Riemman Surfaces and Generalized Theta Functions*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [H] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [Ig.] Igusa, J., *Theta Functions*. Springer-Verlag, New York, 1972.

- [MCSV] McCroy, C., Shifrin, T., Varley, R., The Gauss map of a genus three theta divisor. *Preprint, Georgia Univ.*, (1989)
- [Ma.] Masiewicki, Universal properties of Prym varieties with an application to algebraic curves of genus five, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 222 (1976), 221-240.
- [M] Matsusaka, T., On a theorem of Torelli. *Am.J. Math.*, 80, (1958), 784-800.
- [M.1] Mumford, D., Prym varieties I, in *Contributions to Analysis*. N. Y., Academic Press, 1974.
- [M.2] Mumford, D., On the equation defining abelian varieties, I, II, III. *Invent. Math.* 1, 3., (1966) (1967), 287-354, 75-135, 215-244.
- [M.3] Mumford, D., *Abelian varieties* Lectures in Tata Institute, Bombay, 1968.
- [Pla] Pla, H., Sobre el problema de determinar si la matriu de Riemann de una curva trigonal de género  $g$  dep ende analíticament de la matriu de Riemann de una curva cuatrigonal de género  $g - 1$ , *Manuscrito*, 1984.
- [Rec.1] Recillas, S., Jacobians of curves with  $g_2^1$ 's are Prym's varieties of trigonal curves. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 19 (1974), 9-13.
- [Rec.2] Recillas, S., A relation between curves of genus 3 and curves of genus 4. *Brandeis University, Thesis*, 1970.
- [Rec.3] Recillas, S., Symmetric cubic surfaces and curves of Genus 3 and 4. *Preprint. Bolletino U.M.I.*.
- [Rec.4] Recillas, S., Maps Between Hurwitz spaces. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 18 (1973), 9-13.
- [Rie.] Riemann, B., *Collected Works, Nachtrag IV*. Dover, New York, 1953.

- [S.R.] **Seiple, J.G., Roth., *Introduction to Algebraic Geometry.* Oxford Univ. Press, 1949.**
- [Sh.] **Shafarevich, I. R., *Basic Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, Berlin, 1977.**
- [Sc.] **Schottky, F. *Über die modulen der theta-functionen.* Acta Math. Vol. 27, 1903.**
- [Sc.J] **Schottky, F., Jung, H., *Neue sätze über symmetrifunctionen un die Abelschen functionen der Riemannschen theorie: Erste un Zweite Mittheilung Berlin Akad. der Wissen, Sitzungsberichte.* Vol. 1, 1909.**