

300615

19  
2e;



**UNIVERSIDAD LA SALLE**

*Escuela de Ingeniería*

*Incorporada a la U.N.A.M.*

**"REVISION DE METODOS PARA LA DETERMINACION  
DE LA RESISTENCIA A CORTANTE EN ELEMENTOS  
DE CONCRETO REFORZADO"**

**TESIS PROFESIONAL**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERO CIVIL**

**PRESENTA**

**GUSTAVO ROSAS CORTES**

**Asesor de Tesis: Dr. Sergio Manuel Alcocer Martínez de Castro**

**México D.F. 1993**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **Temario**

### **Capítulo 1 Introducción**

1.1 Alcances y Organización	1
-----------------------------	---

### **Capítulo 2 Conceptos Básicos sobre Cortante**

2.1 Introducción y Alcances	4
2.2 Esfuerzos en Vigas Elásticas sin Agrietamiento	4
2.3 Criterios de Falla para el Concreto	5
2.4 Mecanismos de Transferencia de Cortante en Elementos de Concreto Reforzado	10
2.5 Comportamiento de Vigas que Fallan por Cortante	20
2.6 Comportamiento de Vigas sin Refuerzo en el Alma	30
2.7 Comportamiento de Vigas con Refuerzo en el Alma	31

### **Capítulo 3 Modelo de la Armadura Clásica**

3.1 Principios	34
----------------	----

### **Capítulo 4 Ecuaciones para Diseño de Vigas de Concreto Reforzado Sometidas a Cortante**

4.1 Ecuaciones de Diseño del Instituto Americano del Concreto	37
4.2 Ecuaciones de Diseño del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal	50
4.3 Limitaciones	52

## **Capítulo 5 Modelo de la Armadura Moderna**

5.1	Introducción y Alcances	54
5.2	Hipótesis para el Modelo de la Armadura Plástica	56
5.3	Componentes de la Armadura Moderna	57
5.4	Resistencia Efectiva del Concreto	58
5.5	Valor de la Inclinación $\theta$ en la Región de Compresión	61
5.6	Desarrollo del Modelo en Vigas Esbeltas de Concreto	71
5.7	Desarrollo del Modelo en Vigas Peralgadas de Concreto	76

## **Capítulo 6 Modelo de los Puntales y Tensores**

6.1	Introducción y Alcances	90
6.2	Regiones B y D de una Estructura	91
6.3	Procedimiento General de Diseño para el Modelo de los Puntales y Tensores	99
6.4	Desarrollo del Modelo de los Puntales y Tensores	102
6.5	Dimensionamiento de Puntales, Tensores y Nudos	118
6.6	Comparación Entre Diferentes Métodos para Determinar la Resistencia al Cortante	145
6.7	Condiciones de Servicio	147

## **Capítulo 7 Teoría de los Campos de Compresión**

7.1	Introducción y Alcances	148
7.2	Principios Generales	148
7.3	Diseño Usando la Teoría de los Campos de Compresión	151

<b>Conclusiones</b>	164
---------------------	-----

<b>Bibliografía</b>	169
---------------------	-----

## ***Lista de Figuras***

<b><i>Figura</i></b>	<b><i>Página</i></b>
1.1 Falla por cortante	3
2.1 Fuerzas internas en una viga	6
2.2 Esfuerzos normales, cortantes y principales en una viga homogénea sin agrietamiento	7
2.3 Trayectorias de esfuerzos principales a compresión y agrietamiento inclinado	8
2.4 Resistencia y formas de falla del concreto sujeto a esfuerzos biaxiales	11
2.5 Espécimen para ensaye de transferencia de cortante	13
2.6 Agrietamiento diagonal a lo largo de una plano de cortante previamente formado	15
2.7 Hipótesis del cortante por fricción	15
2.8 Cálculo del promedio de los esfuerzos cortantes entre grietas	19
2.9 Acción de arco de una viga	19
2.10 Claro de cortante en vigas	22
2.11 Variación de la resistencia al corte para vigas rectangulares según la relación $a/d$	22
2.12 Modos de falla en vigas peraltadas con relación $0 \leq a/d \leq 1$	23
2.13 Modos de fallã de vigas peraltadas con relación $1 \leq a/d \leq 2.5$	23
2.14 Agrietamiento inclinado y refuerzo transversal	26
2.15 Tipos de agrietamiento inclinado	28
2.16 Fuerzas internas en una viga agrietada sin estribos	33
2.17 Fuerzas internas en una viga agrietada con estribos	33

3.1	Analogía de la armadura	36
3.2	Cortante resistido por estribos verticales	36
4.1	Efecto del porcentaje de refuerzo en la resistencia al corte $V_c$ , de vigas sin estribos	39
4.2	Efecto de las cargas axiales en el agrietamiento inclinado	39
4.3	Derivación de la ec. 4.1	43
4.4	Cortante resistido por estribos inclinados	43
4.5	Máximo espaciamiento de estribos verticales	46
4.6	Máximo espaciamiento de estribos inclinados	46
4.7	Anclado de estribos	49
5.1	Modelo de la armadura plástica	55
5.2	Modelo de la armadura plástica en una viga peraltada	59
5.3	Esfuerzos en una alma agrietada	62
5.4	Diagrama de desplazamiento del campo de cortante de un elemento	65
5.5	Estado de deformaciones en un puntal diagonal	66
5.6	Diagrama de Mohr para el elemento de la Fig. 5.4	67
5.7	Relación entre la deformación de la grieta principal y la deformación del refuerzo al fluir con la inclinación del puntal	70
5.8	Fuerzas en estribos y diagonales a compresión	73
5.9	Fuerzas en las cuerdas superior e inferior de la armadura	75
5.10	Viga peraltada con carga concentrada al centro del claro	77
5.11	Viga peraltada con carga uniformemente repartida	79
5.12	Viga peraltada con carga uniformemente repartida en la cara inferior	80
5.13	Viga peraltada con dos claros	82
5.14	Modelo de la armadura plástica para una viga con estribos	83
5.15	Modelo de la armadura plástica para vigas con refuerzo horizontal en el alma	86

5.16	Armadura correcta e incorrecta	88
6.1	Regiones D	93
6.2	Trayectorias de esfuerzos en regiones B y D	95
6.3	Subdivisiones de las estructuras en regiones B y D, de acuerdo al principio de Saint-Venant	96
6.4	Identificación de regiones B y D	98
6.5	Estructura dividida en regiones B y D	98
6.6	Campos de esfuerzos prismáticos según la teoría de la plasticidad	106
6.7	Modelo de la armadura en una viga en cantiliver	106
6.8	Secciones transversales comunes para vigas	108
6.9	Región D típica: trayectorias de esfuerzos, esfuerzos elásticos y modelo de los puntales y tensores	108
6.10	Trayectorias de carga y modelo de los puntales y tensores	110
6.11	Modelos de la armadura para el mismo caso	110
6.12	Región D	112
6.13	Caso especial de la región D de la fig. 6.11	112
6.14	Modelos correcto e incorrecto	114
6.15	Modelos de los puntales y tensores más comunes	116
6.16	Diferentes modelos para una región D	117
6.17	Comparación entre los modelos de una viga peraltada y el de una viga presforzada	117
6.18	Ejemplos de: (1) modelos de puntales y tensores, (2) campos de esfuerzos, (3) nudos y refuerzo correspondiente	119
6.19	Campos de esfuerzos a compresión (puntales) básicos	122
6.20	Ejemplos de los tipos de nudo básicos	123
6.21	Dimensionamiento de un nudo singular CCT, con diferentes arreglos de refuerzo	130
6.22	Efecto de la posición del tensor en el tamaño del nudo y el puntal	131
6.23	Efectos de la reducción en el ancho del tensor	131

6.24	Ancho de puntal, definido como la razón del refuerzo mecánico	133
6.25	Dimensionamiento de los campos de esfuerzo en forma de botella	140
6.26	Zona de falla asumida, para la revisión de la resistencia a tensión de un tensor de concreto $T_c$	144
6.27	Falla progresiva de una viga debida a una falla local	144
6.28	Resistencia del concreto bajo un estado de esfuerzos biaxial tensión-compresión	144
6.29	Comparación de la cantidad de estribos en el alma de una viga, según varios procedimientos	146
7.1	Análisis de una sección con la Teoría de los Campos de Compresión	150
7.2	Curva esfuerzo a compresión-deformación del concreto agrietado diagonalmente	150
7.3	Procedimiento directo de diseño para una viga sometida a cortante	152
7.4	Esfuerzos en el concreto del alma de una viga	152
7.5	Deformaciones del concreto a media altura del peralte	152
7.6	Diseño del refuerzo transversal por cortante	154
7.7	Fuerzas longitudinales debidas al cortante	154
7.8	Elección del ángulo de inclinación de los esfuerzos principales a compresión $\theta$	156
7.9	Diseño por cortante	158
7.10	Influencia de los apoyos para el diseño del refuerzo longitudinal	160
7.11	Trayectorias de esfuerzos principales a compresión en regiones D	161
7.12	Comparación entre la resistencia de los puntales a compresión y un tensor pasando a través de un puntal	163



## ***Lista de Tablas***

<b><i>Tabla</i></b>	<b><i>Página</i></b>
5.1 Resistencia efectiva del concreto según MacGregor	63
6.1 Análisis enfocado a esfuerzos o fuerzas en puntales y tensores	101
6.2 Comportamiento estructural y métodos para el análisis de estructuras hiperestáticas	101
6.3 Resistencia efectiva del concreto según Schlaich	138

### ***Lista de Símbolos***

Los siguientes símbolos se emplearon en este trabajo. Los símbolos omitidos, se han definido donde han sido utilizados.

a	Claro de cortante.
$A_0$	Area total de la sección.
$A_v$	Area transversal de un estribo.
b	Ancho del alma de la viga.
b'	Ancho del patín de vigas T, L, I.
C	Fuerza de compresión.
d	Peralte efectivo de la viga.
$d_{cr}$	Espaciamiento entre grietas en una grieta principal.
E	Módulo de elasticidad.
EI	Rigidez de un miembro a flexión.
$f_x$	Esfuerzos de flexión.
$f'_c$	Resistencia especificada del concreto a compresión.
$f^*c$	Resistencia nominal del concreto a compresión.
$f_{ce}$	Resistencia efectiva del concreto a compresión (ACI).
$f_{cd}$	Resistencia efectiva del concreto a compresión (CEB).
$f^*cd$	Resistencia simplificada del concreto.
$f_{ct}$	Resistencia a tensión del concreto.
$f_d$	Esfuerzos a compresión en el concreto de la diagonal (ACI).
$F_R$	Factor de reducción de resistencia (RDF-87).
$f_y$	Límite de fluencia de las varillas de acero.
$f_2$	Esfuerzos a compresión en el concreto de la diagonal.
$f_{2max}$	Resistencia del concreto de la diagonal.

	<b>h</b>	Peralte total de una viga.
	<b>I</b>	Momento de inercia.
	<b>jd</b>	Brazo de palanca del momento interno.
	<b>/</b>	Ciara entre apoyos en una viga.
	<b>L<sub>D</sub></b>	Longitud de una región D.
	<b>M</b>	Momento flexionante actuante en la sección.
	<b>Mu</b>	Momento flexionante último.
	<b>Nu</b>	Fuerza axial normal a la sección transversal (positiva para compresión y negativa para tensión).
	<b>s</b>	Espaciamiento entre estribos.
	<b>T</b>	Fuerza de tensión.
	<b>V</b>	Fuerza cortante actuando en la sección.
	<b>v</b>	Esfuerzo cortante.
	<b>Vc</b>	Fuerza cortante que resiste el concreto (ACI).
	<b>V<sub>C<sub>R</sub></sub></b>	Fuerza cortante que resiste el concreto (RDF-87).
	<b>Vn</b>	Resistencia nominal del cortante.
	<b>Vs</b>	Fuerza cortante que resiste el refuerzo transversal.
	<b>Vu</b>	Cortante último (fuerza cortante de diseño).
	<b>z</b>	Separación entre cuerdas.
	<b>α<sub>s</sub></b>	Angulo entre el puntal y el tensor.
(alfa)		
	<b>γ</b>	Deformación total por cortante.
(gamma)		
	<b>γ<sub>s</sub></b>	Deformación por cortante debido a la deformación de los estribos.
	<b>γ<sub>L</sub></b>	Deformación por cortante debida a la deformación del refuerzo longitudinal.
	<b>γ<sub>c</sub></b>	Factor de reducción de resistencia parcial para el concreto (CEB).
	<b>ε</b>	Deformación.
(epsilon)		
	<b>ε<sub>c</sub></b>	Deformación en el concreto.
	<b>ε'c</b>	Deformación en el concreto (Cap. 7).

$\epsilon_{ds}$	Deformación principal por compresión.
$\epsilon_r$	Deformación de la grieta principal $\epsilon_r = \omega' / d_{cr}$
$\epsilon_s, \epsilon_L$	Deformaciones del refuerzo en la zona de un puntal deformado.
$\epsilon_x$	Deformación longitudinal en la mitad del peralte de un elemento (Cap. 7).
$\epsilon_1$	Deformación principal por tensión (Cap. 7).
$\epsilon_2$	Deformación principal por compresión (Cap. 7).
$\eta$ (eta)	Factor de eficiencia para el concreto.
$\sigma$ (sigma)	Esfuerzo normal.
$\sigma_1, \sigma_2$	Esfuerzos principales.
$\phi$ (phi)	Factor de reducción de resistencia (ACI).
$\phi_c$	Factor de reducción de resistencia para el concreto (CSA).
$\phi_s$	Factor de reducción de resistencia para el acero de refuerzo (CSA).
$\theta$ (theta)	Angulo de inclinación de los puntales a compresión.
$\omega$ (omega)	Razón del refuerzo.
$\omega_h$	Ancho del tensor.
$\omega'$	Ancho de la grieta principal.

## **Capítulo 1**

### **Introducción**

En el diseño de un miembro de concreto reforzado usualmente se considera a la flexión en primer lugar. Después de dimensionar la sección, se calcula y detalla el refuerzo que proporcione la resistencia a momento flexionante. En los reglamentos de construcción, se han establecido límites en las cantidades del refuerzo por flexión que puede colocarse de forma que se asegure que, si la falla ocurre, ésta se desarrolle en forma dúctil. Este tipo de fallas evolucionan gradualmente, permitiendo proteger a los ocupantes de la estructura.

Sin embargo, los elementos también deben proporcionarse para resistir las fuerzas cortantes. Puesto que las fallas por cortante son frecuentemente repentinas y frágiles (Fig. 1.1), el diseño debe asegurar que la resistencia al cortante sea igual o exceda a la resistencia a la flexión en todos los puntos del elemento.

El modo de falla por corte se manifiesta de diferentes formas y depende de diversas variables como son la dimensión y la geometría de la sección transversal, el tipo de carga, el límite de fluencia y el porcentaje del refuerzo longitudinal, la cantidad de refuerzo transversal, la relación claro de cortante - peralte ( $a/d$ ), el tipo de agregado de concreto, etc.<sup>1,2</sup> Por esta razón para diseñar correctamente una viga de concreto sometida a cortante, se deben considerar muchas variables; sin embargo, los diferentes enfoques de diseño consideran parcialmente a los aspectos que afectan el fenómeno.

#### **1.1 Alcances y Organización**

En este trabajo se hará una revisión de las diferentes metodologías existentes para diseño por corte. Únicamente se considerarán elementos estructurales de concreto reforzado tipo viga, es decir, con carga axial menor al 10% de la carga axial última (considerando sólo la contribución del concreto). Se analizarán vigas de concreto de peso normal.

El estudio está dividido en seis secciones. En el capítulo 2 se presentan los conceptos básicos sobre cortante. Se discuten los mecanismos de transferencia de cortante, así como el comportamiento de vigas con y sin refuerzo en el alma. Además se revisan algunos criterios de falla del concreto, y el comportamiento de vigas a la falla. En el capítulo 3 se describe el modelo de la armadura clásica, que representa el comportamiento de vigas con refuerzo en el alma.

Las ecuaciones de diseño para vigas de concreto reforzado de los códigos americano<sup>17)</sup> y mexicano,<sup>18)</sup> y las variables que afectan su comportamiento se presentan en el capítulo 4. En el capítulo 5 se explica el modelo de la armadura moderna, la cual es una versión refinada del modelo de la armadura clásica. Se estudia su comportamiento para vigas esbeltas y peraltadas, así como su criterio de falla. En el capítulo 6 se presenta el de los puntales y tensores. Este modelo es la forma generalizada de la analogía de la armadura. En el capítulo 7 se discute la teoría de los campos de compresión. Se explican los principios generales y el procedimiento de diseño para vigas de concreto reforzado.

Por último se presentan las conclusiones del trabajo. Se hace énfasis en el nivel de conservadurismo de algunos métodos de diseño.



Fig. 1.1 Fella por cortante (Ref. 3)

## Capítulo 2

### Conceptos Básicos sobre Cortante

#### 2.1 Introducción y Alcances

En este capítulo se tratan los conceptos básicos sobre cortante en vigas de concreto reforzado de manera que se facilite posteriormente la comprensión de los métodos de diseño por corte más elaborados. Se explican algunos criterios de falla para el concreto y se enfatiza el criterio de falla comúnmente empleado en problemas de cortante.

Se presentan los principales mecanismos de transferencia de cortante, y su papel en la resistencia al corte y en la redistribución de esfuerzos en secciones agrietadas. Se describen el comportamiento, y los tipos de agrietamiento y falla para diferentes tipos de vigas definidos por su relación claro de cortante - peralte ( $a/d$ ).

#### 2.2 Esfuerzos en Vigas Elásticas sin Agrietamiento

Del diagrama de cuerpo libre de la Fig. 2.1 notamos que  $dM/dx = V$ . De este modo las fuerzas y esfuerzos cortantes existirán en aquellas partes de la viga donde el gradiente de momento sea diferente de cero.

De acuerdo con la teoría tradicional de vigas rectangulares homogéneas, elásticas y sin agrietamiento, se pueden calcular los esfuerzos cortantes  $v$  usando la ecuación

$$v = \frac{VQ}{Ib} \quad (2.1)$$

donde

$V$  = fuerza cortante en la sección transversal,

$Q$  = distancia del centroide de la sección transversal al punto donde están siendo calculados los esfuerzos cortantes multiplicado por el área correspondiente,

$I$  = momento de inercia de la sección transversal no agrietada, y



$b$  = ancho del miembro en donde los esfuerzos se calculan.

Para una viga rectangular sin grietas la distribución de esfuerzos cortantes se puede calcular con la ec. 2.1 (Fig. 2.2b).

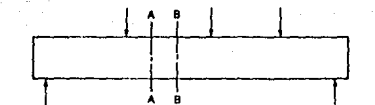
### **2.3 Criterios de Falla Para el Concreto**

Cuando se somete a una viga de concreto reforzado a flexión y cortante, se crea un estado de esfuerzos biaxiales (esfuerzos normales combinados con esfuerzos cortantes) como se muestra en la Fig. 2.2. Los esfuerzos normales son producidos por la flexión, mientras que los cortantes se deben a la variación del momento en el claro (es decir, al cortante). El estado de esfuerzos ilustrado puede ser rotado de manera que se obtengan esfuerzos cortantes nulos y sólo existan esfuerzos normales al elemento en estudio. A estos esfuerzos se les conoce como esfuerzos principales.

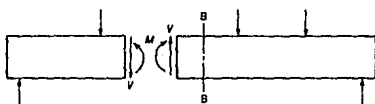
Los esfuerzos principales y los planos donde actúan se pueden encontrar usando la Teoría del Círculo de Mohr para esfuerzos.<sup>[2]</sup>

La orientación de los esfuerzos principales en la Fig. 2.2a se muestra en la Fig. 2.2c. Las trayectorias de los esfuerzos principales a compresión en una viga no agrietada se muestran en la Fig. 2.3a. Como se observa, las trayectorias de los esfuerzos a compresión son inclinadas en la parte media del peralte de la viga y tienden a ser paralelos a la cara superior de la viga cerca del centro del claro.

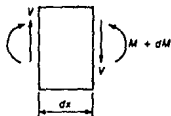
Cuando el esfuerzo principal a tensión excede la resistencia a tensión del concreto, la viga se agrieta. El fisuramiento inicial puede parecerse al patrón mostrado en la Fig. 2.3a. El patrón de agrietamiento en una viga ensayada en laboratorio se presenta en la Fig. 2.3b. En esta figura se observan dos tipos de grietas. Primeramente, ocurren las fisuras verticales debido a los esfuerzos por flexión. Las grietas se inician en la cara inferior de la viga donde los esfuerzos a tensión por flexión son máximos.



(a) Viga



(b) Fuerzas internas en la sección A-A.



(c) Fuerzas internas entre las secciones A-A y B-B.

Fig. 2.1 Fuerzas internas en una viga (Ref. 3)

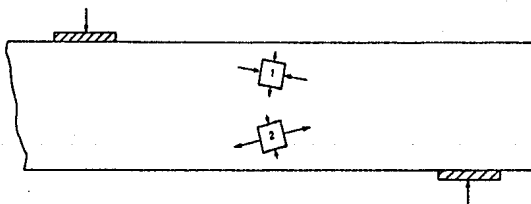
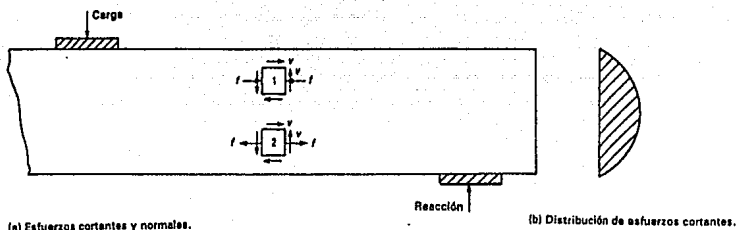
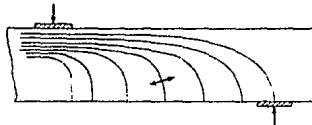
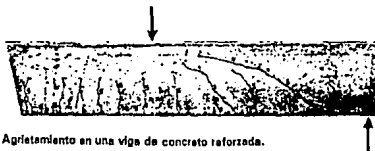


Fig. 2.2 Esfuerzos normales, cortantes y principales en una viga homogénea sin agrietamiento (Ref. 3)



(a) Trayectorias de esfuerzos principales a compresión en una viga sin agrietamiento.



(b) Agrietamiento en una viga de concreto reforzada.

Fig. 2.3 Trayectorias de esfuerzos principales a compresión y agrietamiento inclinado (Ref. 3)

Conforme aumenta la carga, se forman fisuras inclinadas cerca de los extremos de las vigas, las cuales se deben a la combinación de cortante y flexión. Estas son comúnmente referidas como grietas inclinadas, grietas por cortante o grietas por tensión diagonal.

La resistencia del concreto sujeto a esfuerzos biaxiales varía como una función de la combinación de esfuerzos. Si los esfuerzos normales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  varían, la resistencia del elemento mostrado en la Fig. 2.2 se podrá representar por el criterio de falla de Kupfer, Hilsdorf y Rüschi<sup>(13)</sup> mostrado por el diagrama de la Fig. 2.4.<sup>(3,13)</sup> Este diagrama es simétrico y puede ser dividido en varias zonas. Para un estado de esfuerzos como el representado en la zona 1, la cual el concreto se encuentra bajo tensión biaxial, la falla está controlada por la resistencia a tensión uniaxial del concreto. En la zona 4, para concreto bajo compresión biaxial, la resistencia a compresión es superior a la resistencia a compresión uniaxial (zona 3). En la zona 3, la falla se inicia por la formación de grietas a tensión en planos paralelos a la dirección de los esfuerzos de compresión. En la zona 2, que representa un estado bajo tensión y compresión combinadas, la resistencia a la compresión disminuye significativamente con respecto a los estados de esfuerzos antes mencionados.

Alternativamente la teoría de falla de Mohr<sup>1</sup> proporciona un modelo aceptable para calcular la resistencia en los casos mostrados en la Fig. 2.2, excepto para la zona 4, en donde es demasiado conservadora. Esto se debe a que el modelo no considera los efectos del esfuerzo principal intermedio, y por lo tanto, la resistencia del concreto bajo compresión biaxial es menor (líneas punteadas en el diagrama de la Fig. 2.4). El esfuerzo principal intermedio en la tercera dirección principal, es importante en las teorías de falla de concreto sujeto a estados de esfuerzos complejos, tales como los estados de esfuerzo triaxial. Para una familia de círculos de Mohr se puede proponer una envolvente de falla. Cualquier condición de esfuerzo que corresponda al círculo

---

<sup>1</sup> La teoría se basa en la condición de esfuerzos llamada esfuerzo plano. El estado de esfuerzos se puede conocer empleando las ecuaciones de transformación, su representación gráfica es el círculo de Mohr. Partiendo de este, se obtuvo un criterio de falla conocido como teoría de falla de Mohr (Ref. 2).

de Mohr, y que coincida con la envolvente, representará una condición de falla.

Basados en la Teoría de Mohr o en el diagrama de Kupfer, Hilsdorf y Rüschi,<sup>1131</sup> se han obtenido relaciones de resistencia derivadas de la resistencia de elementos esforzados biaxialmente. El objetivo es desarrollar un criterio de falla que considere todas las combinaciones de esfuerzos cortantes y normales. Sin embargo, este tipo de estados de esfuerzo se presentan principalmente en columnas, de forma tal que estos criterios de falla no se usan en vigas.

La resistencia del concreto sujeto a esfuerzos cortantes combinados con esfuerzos normales también puede ser estudiada por medio de la Teoría de los Esfuerzos Octaédricos.<sup>1131</sup> Sin embargo, se considera que las teorías de falla sencillas son lo suficientemente exactas para fines prácticos, por lo que son las más usadas para explicar la resistencia al cortante en estructuras. El criterio de falla más simple es la Teoría de Falla de los Esfuerzos Principales a Tensión. La falla se alcanza cuando el esfuerzo principal de tensión iguala o excede a la resistencia a tensión del concreto. Esta aproximación es de utilidad para la predicción de las fallas cuando se tienen estados de esfuerzo simples y conocidos; también son útiles cuando se aplican para entender al agrietamiento en una viga sujeta a cortante y flexión debido a tensión diagonal.

#### ***2.4 Mecanismos de Transferencia de Cortante en Elementos de Concreto Reforzado***

En elementos de concreto reforzado, el cortante se transmite de un plano a otro de varias formas, siendo las principales: a) por esfuerzos cortantes en el concreto; b) a través de la superficie de transferencia de cortante; c) por la acción de dovela; d) por la acción de arco; y e) mediante el refuerzo transversal.

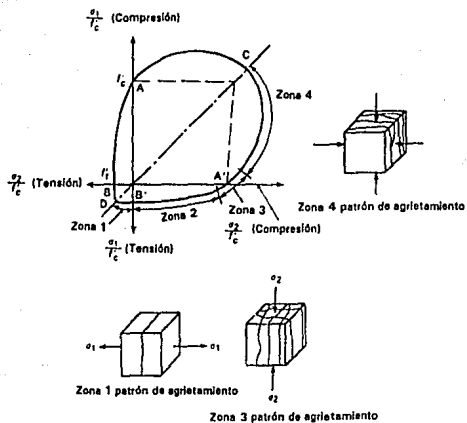


Fig. 2.4 Resistencia y formas de falla del concreto sujeto a esfuerzos biaxiales (Ref. 3)

#### **2.4.1 Transmisión de Esfuerzos Cortantes en Concreto**

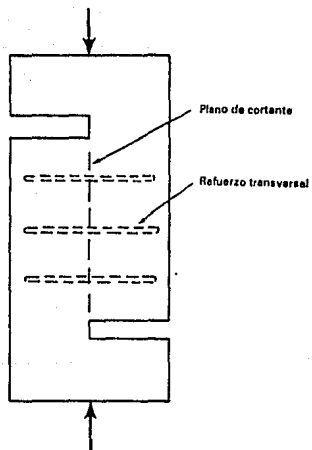
Este tipo de transferencia ocurre en miembros o en porciones de miembros que aún no se han agrietado. Si comparamos las Figs. 2.3a y 2.3b se puede notar que si bien hay una similitud entre los planos de los esfuerzos principales a tensión y el patrón de agrietamiento (como anteriormente se explicó), la relación no es perfecta. En vigas de concreto reforzado, las grietas a flexión ocurren generalmente antes de que se desarrollen los esfuerzos principales de tensión en el alma, (en algunos casos, sin embargo, las grietas en el alma ocurren primero). Una vez que una grieta se ha formado, el esfuerzo de tensión a través de la grieta se reduce a cero. Para mantener el equilibrio, debe ocurrir una redistribución de esfuerzos. Como consecuencia, al comienzo del agrietamiento inclinado, no se pueden predecir los esfuerzos principales, a menos que el agrietamiento a cortante preceda al fisuramiento por flexión. Esto muy rara vez sucede en concreto reforzado pero ocurre en algunas vigas presforzadas.

#### **2.4.2 Superficie de Transferencia de Cortante (Trabazón del Agregado)**

Hay diversos ejemplos donde el cortante debe ser transferido a través de un plano o una superficie definida donde puede ocurrir un deslizamiento. A este mecanismo se le conoce como *superficie de transferencia de cortante* o bien *trabazón del agregado*. El cortante que se transmite es una fuerza tangencial a través de una grieta o de un plano. Antes de que se agriete el concreto, el cortante es transmitido a lo largo del plano de cortante según lo mencionado en la sección 2.4.1. La trabazón del agregado opera cuando una vez agrietada la sección, los agregados de un lado de la grieta entra en contacto con la superficie del otro lado impidiendo el deslizamiento entre dichas caras. En la Fig. 2.5 se muestra un espécimen de ensaye para cuantificar la transferencia de cortante.

Si el plano bajo consideración se encuentra en concreto monolítico, un número de grietas diagonales ocurrirán a través de la superficie de transferencia y la falla se relacionaría con una acción de armadura a lo largo del plano (Fig. 2.6). Esta acción implica un sistema de fuerzas formadas por tensores (acero longitudinal y estribos) y puntales (zona de compresión entre las grietas diagonales, las cuales aparecen a





**Fig. 2.5** Espécimen para ensayo de transferencia de cortante (Ref. 3)

medida que se incrementa la carga). A esta acción se le conoce con el nombre de *analogía de la armadura* o *modelo de la armadura* y se estudiará con más detalle en el siguiente capítulo.

La falla de la armadura puede ocurrir cuando se aplasta el concreto de las diagonales debido a la acción combinada de fuerzas cortantes y axiales. El otro tipo de falla tiene asociada la fluencia del acero antes de que se aplaste el concreto (elementos subreforzados), lo que implica una falla dúctil. Si bien el cortante se transfiere a través de un plano definido, este mecanismo no se desarrolla estrictamente en una superficie de transferencia ya que se transfiere muy poco cortante a través de la grieta.

Cuando el concreto se agrieta, habrá transferencia de cortante solamente si existe confinamiento lateral o acero transversal, ya que las irregularidades de las superficies de la grieta se desplazan una con respecto a la otra y esto tiende a abrir la grieta. Como consecuencia, aparecerán fuerzas a tensión en el acero transversal (Fig. 2.7). Para que exista equilibrio en la sección se necesitarán esfuerzos de compresión.

La resistencia al cortante, proporcionada por la superficie de transferencia, es aproximadamente proporcional al promedio de los esfuerzos de compresión en la superficie, que será igual al porcentaje de acero que cruce el plano multiplicado por el límite de fluencia. A esta aproximación se le conoce como la *hipótesis del cortante por fricción*, aunque hablando estrictamente, la fricción no desempeña un papel importante.

El cortante a la falla se puede escribir como

$$V_u = A_s f_y \tan \theta \quad (2.2)$$

donde

$V_u$  = cortante último,

$A_s$  = área total del acero transversal que cruza el plano,

$f_y$  = límite de fluencia del acero, y

$\tan \theta$  = coeficiente de fricción equivalente.

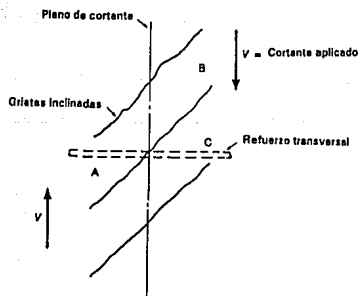


Fig. 2.6 Agrietamiento diagonal a lo largo de un plano de cortante (Ref. 3)

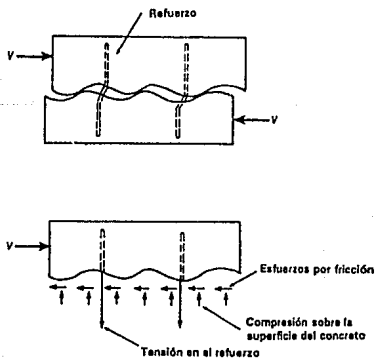


Fig. 2.7 Hipótesis del cortante por fricción (Ref. 3)

Después del agrietamiento, si se aplican cargas alternadas (sismos, por ejemplo), la aspereza de la entrecara se deteriora, lo que conduce a la reducción correspondiente en el coeficiente equivalente de fricción. La pérdida de transferencia de cortante es especialmente significativo cuando la carga alternada es de alta intensidad, ya que dicha acción, tiende a remover con mayor rapidez las partículas embebidas del agregado, reduciendo la trabazón de agregado.

Además de la fricción, otro mecanismo que interviene en la transferencia de cortante es la acción de dovela del refuerzo que cruza una grieta. En este caso Mattock<sup>[3]</sup> propuso una fórmula la cual involucra la fricción, el cortante transferido por la trabazón de agregados y la acción de dovela.

#### **2.4.3 Acción de Dovela**

La acción de dovela es aquella resistencia del acero longitudinal a fuerzas transversales a su eje, y es función de la rigidez del concreto bajo las varillas y de la distancia desde el punto donde se desarrolla el cortante de dovela a los estribos. La presencia de estribos aumenta considerablemente la acción de dovela. Cuando la grieta atraviesa alguna varilla del refuerzo longitudinal, los desplazamientos provocados por el cortante a lo largo de la grieta serán resistidos en parte por la acción de dovela en la varilla. Dichos desplazamientos aumentarán la tensión del concreto alrededor de la varilla y, en combinación con la acción de cuña debida a las corrugaciones de la varilla, producirán grietas a lo largo de refuerzo longitudinal. Estas fisuras a su vez disminuirán la rigidez del concreto alrededor de la varilla y por tanto, reducirán la resistencia por la acción de dovela.

Las grietas que se forman a lo largo del refuerzo longitudinal a tensión como una extensión del agrietamiento inclinado, tienen como consecuencia la reducción de la resistencia por la acción de dovela. Esto provoca que las grietas inclinadas se abran, lo cual a su vez reduce la trabazón del agregado a lo largo de la grieta diagonal, para que un poco después venga la falla. De los mecanismos de transferencia de cortante, la acción de dovela es poco significativa en vigas aunque en algunos tipos de elementos, como en losas, su contribución a la resistencia es importante.

#### 2.4.4 Acción de Viga y Acción de Arco

Cuando una viga se agrieta diagonalmente, la fuerza  $\Delta T$ , que equilibra la sección de la viga entre dos grietas (Fig. 2.8b), debe ser transferida por esfuerzos cortantes horizontales a lo largo de la cara superior del elemento (Fig. 2.8c). El valor promedio de estos esfuerzos se puede obtener con la siguiente expresión

$$v = \frac{V}{b jd} \quad (2.3)$$

donde

$jd \approx 0.875 d$  = brazo de palanca del momento interno, y

$b$  = ancho del alma

En la Fig. 2.8d se muestra la distribución del promedio de los esfuerzos cortantes horizontales, los cuales, por equilibrio son iguales a los esfuerzos verticales en el mismo elemento.

Se ha supuesto que los esfuerzos cortantes son transmitidos a través de la grieta y que la viga es elástica en compresión. Los procedimientos de diseño del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal<sup>(10)</sup> y del Instituto Americano del Concreto<sup>(7)</sup> proponen la siguiente ecuación, en la cual no se requiere calcular el brazo de palanca  $jd$

$$v = \frac{V}{b d} \quad (2.4)$$

Mientras el brazo de palanca  $jd$  permanezca constante y exista un flujo de cortante a través de un plano horizontal entre el refuerzo inferior y la zona de compresión, la transferencia de cortante será por medio de la acción de viga. Pero, cuando el flujo de cortante no pueda ser transferido debido a que el acero empieza a perder adherencia, o si el flujo de cortante es interrumpido por una grieta inclinada desde el apoyo hasta el punto de aplicación de la carga, el cortante será transferido por acción de arco (Fig. 2.9).

En el arco, la fuerza de compresión  $C$  en los puntales inclinados y la fuerza de tensión  $T$  en el refuerzo longitudinal son constantes sobre el claro de cortante. Si parte de la compresión del arco es resistida mediante acción de dovela, se formarán, como consecuencia, grietas a lo largo del refuerzo longitudinal, acelerando una falla de anclaje (o falla de adherencia).

En vigas, la acción de arco ocurre no sólo cuando se forman grietas en el extremo, sino también entre grietas por tensión diagonal. En vigas peraltadas la mayor parte de la carga se transmite a los apoyos por la acción de arco. Esta acción permite la transferencia de una fuerza concentrada vertical al apoyo en un miembro peraltado. Consecuentemente se reduce la contribución de otros tipos de mecanismos de transferencia de cortante.

El comportamiento y resistencia en una viga son muy diferentes en regiones donde se desarrolla la acción de viga, conocidas como *regiones B* y aquellas donde se desarrolla la acción de arco, conocidas como *regiones D*. Una mayor explicación sobre las regiones B-D, se dará en la sección 6.2.

#### **2.4.5 Refuerzo Transversal**

Cuando una grieta inclinada cruza un estribo, el acero transversal contribuye significativamente a la capacidad del miembro incrementando o manteniendo la transferencia de cortante ya sea por acción de dovela, acción de arco o mediante trabazón de agregado. De esta forma, el refuerzo transversal evita que las grietas inclinadas se abran manteniendo efectivamente la superficie de transferencia.

El refuerzo transversal no tiene papel importante directo en la transferencia de carga puesto que resiste solamente una pequeña parte del cortante, pero contribuye significativamente para que se desarrollen otros tipos de transferencia de cortante.<sup>1121</sup> Los efectos del refuerzo en el alma en una viga se discutirán en la sección 2.6.

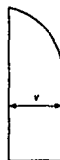
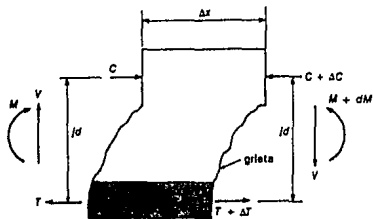
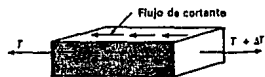
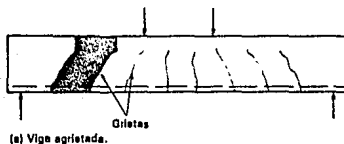


Fig. 2.8 Cálculo del promedio de los esfuerzos cortantes entre grietas (Ref. 3)

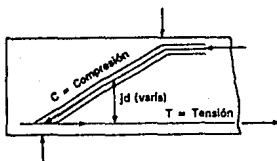


Fig. 2.9 Acción de arco de una viga (Ref. 3)

## 2.5 Comportamiento de Vigas que Fallan por Cortante

### 2.5.1 Agrietamiento Inclinado

Las fallas por cortante en vigas se caracterizan por la aparición de grietas inclinadas. En algunos casos, al agrietamiento inclinado le sigue la falla, mientras que en otros casos, las grietas inclinadas se estabilizan, y la viga puede seguir cargando antes que falle.

La manera en la cual las grietas inclinadas se desarrollan y crecen, así como el tipo de falla que ocurre, depende de las magnitudes relativas de los esfuerzos de cortante,  $v$ , y esfuerzos de flexión  $f_x$ . Como una aproximación, para una sección rectangular, estos esfuerzos se pueden definir como

$$v = \frac{V}{b d} k_1 \quad \text{y} \quad f_x = \frac{M}{b d^2} k_2 \quad (2.5)$$

donde

$V$  = fuerza cortante en la sección,

$b$  = ancho de la viga,

$d$  = peralte efectivo de la viga,

$M$  = momento flexionante en la sección, y

$k_1$  y  $k_2$  = coeficientes que dependen de la geometría de la viga, tipo de carga, cantidad y el arreglo del refuerzo, tipo de acero y de la interacción entre el acero y el concreto (adherencia).

La razón  $f_x / v$  es por lo tanto

$$\frac{f_x}{v} = k_3 \frac{M}{V d} \quad (2.6)$$

donde

$k_3 = k_2 / k_1$ ,

$V$  = fuerza cortante igual al gradiente de momento flexionante  $V = dM / dx$



Para vigas sujetas a cargas concentradas simétricas (Fig. 2.10) se obtiene que  $V = M/a$ , o bien  $a = M/V$ .

Entonces

$$\frac{f_x}{v} = k_3 \frac{a}{d} \quad (2.7)$$

donde

$a$  = claro de cortante (distancia medida desde el punto de aplicación de la carga concentrada hasta la reacción, ver Fig. 2.10)

Se puede notar que la carga que produce el agrietamiento inclinado y la falla por cortante en vigas rectangulares depende de  $a/d$  (claro de cortante - peralte efectivo). Manteniendo constantes otras variables que afectan el fenómeno de cortante, la influencia de la razón  $a/d$  en el agrietamiento de una viga rectangular simplemente apoyada se puede ilustrar considerando vigas de varias longitudes con dos cargas simétricas concentradas colocadas a una distancia  $a$  de los apoyos (Fig. 2.11).

Según la Fig. 2.11, se pueden señalar cuatro tipos de vigas según las relaciones claro de cortante - peralte efectivo: vigas muy cortas, cortas, esbeltas y muy esbeltas.

### Vigas Peralgadas

A las vigas con claros de cortante muy cortos y cortos también se les conoce como *vigas peralgadas*.

Las vigas peralgadas con claros de cortante muy cortos tienen una razón  $a/d$  que varía desde 0 hasta 1. En el diseño de vigas peralgadas, los esfuerzos cortantes y los esfuerzos verticales normales son dominantes y requerirán de mayor atención que los esfuerzos por flexión.

A lo largo de la línea imaginaria que une la carga con la reacción se desarrollan esfuerzos de compresión. Ortogonalmente, se tienen esfuerzos de tensión que producen grietas inclinadas a lo largo de la línea imaginaria anterior. Estas fisuras, destruyen el flujo de cortante horizontal que va desde el acero longitudinal del lecho inferior hasta la zona de compresión, por lo que el comportamiento cambia de la

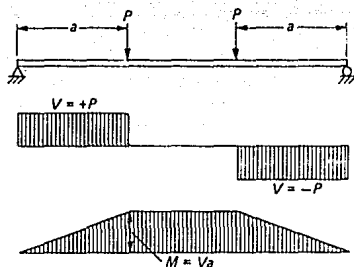


Fig. 2.10 Claro de cortante en vigas (Ref. 6)

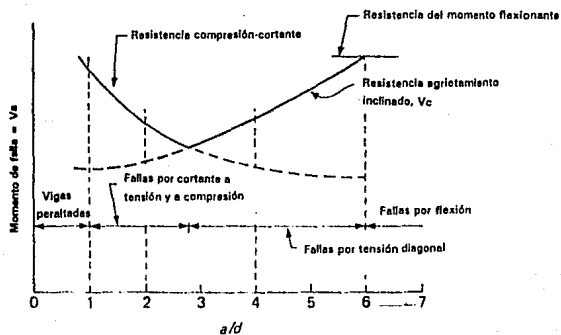


Fig. 2.11 Variación de la resistencia al corte para vigas rectangulares según la relación  $a/d$  (Ref. 6)

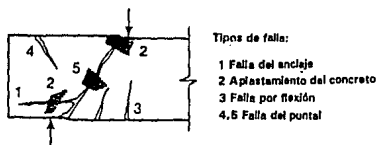
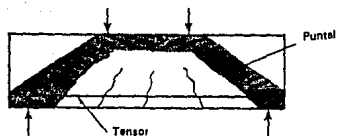


Fig. 2.12 Modos de falla en vigas peraltadas con  $0 \leq a/d \leq 1$  (Ref. 3)

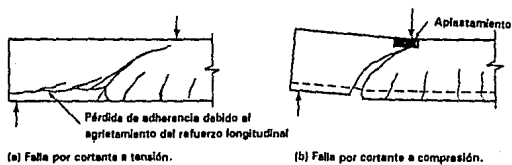


Fig. 2.13 Modos de falla de vigas peraltadas con  $1 \leq a/d \leq 2.5$  (Ref. 3)

acción de viga a la acción de arco (ver secc. 2.4.4, Figs. 2.9 y 2.12).

En este caso, el refuerzo sirve como un tensor del arco y tiene una fuerza uniforme de tensión de apoyo a apoyo. El modo más común de falla en tales vigas es la falla del anclaje en los extremos del tensor causado por la acción de dovela.

Una viga peraltada sin refuerzo en el alma puede fallar en general de las siguientes formas (Fig. 2.12): 1) falla del anclaje del tensor; 2) falla por aplastamiento del concreto en la zona de las reacciones; 3) falla por flexión, debido a la fluencia del refuerzo; 4) por aplastamiento del concreto cerca del vértice del arco; 5) falla del puntal de compresión; 6) aplastamiento a lo largo de la grieta (falla del puntal de compresión).

Las vigas peraltadas con claros de cortante cortos tienen razones  $a/d$  que varían desde 1 hasta 2.5. Antes de la falla este tipo de vigas resisten las cargas por acción de arco. Después de una redistribución de fuerzas internas, las vigas son capaces de soportar carga adicional, en parte debido a la acción de arco. Puesto que las grietas inclinadas generalmente se extienden más cerca de la cara superior de la viga que una grieta típica de flexión, la falla por corte ocurre sin alcanzarse la capacidad a momento flexionante.

En la zona de momento y cortante pueden presentarse dos modos de falla. En el primero, la grieta inclinada puede propagarse a lo largo del refuerzo longitudinal, debido a la acción de dovela sobre el refuerzo (Fig. 2.13a) causando la disminución o pérdida de adherencia a lo largo de la varilla. A medida que el refuerzo principal empieza a deslizarse, la acción de cuña que provoca las corrugaciones de la varilla contribuye a dividir al concreto y a que la grieta se extienda, resultando en una falla de anclaje del refuerzo longitudinal. A este tipo de falla se le conoce como *falla de cortante por tensión*. Alternativamente, el concreto localizado arriba del extremo superior de las grietas inclinadas, puede fallar por aplastamiento (Fig. 2.13b) resultando en una *falla de cortante por compresión*.

Es importante notar que para vigas con claros de cortante cortos y muy cortos, la mayor porción de la capacidad de carga después del agrietamiento inclinado se debe a la transferencia de carga a través de puntales de compresión. Si la viga no está

cargada en la parte superior y está apoyada en la parte inferior como se muestra en la Fig. 2.12, los puntales de compresión no se desarrollan y la falla ocurre, por lo tanto, cerca de la carga de agrietamiento inclinado inicial.

### Vigas Esbeltas

Las vigas esbeltas tienen una relación  $a/d$  que varía desde 2.5 hasta 6. En ellas las grietas inclinadas rompen el equilibrio de manera que la transferencia de cortante disminuye, las grietas se extienden y la viga falla con la carga que produce el agrietamiento inclinado (Fig. 2.11).

Las vigas esbeltas tienen poco peralte y por lo general fallan por flexión. Las primeras grietas se forman cuando los esfuerzos de tensión debido a la flexión exceden la resistencia a tensión del concreto. Conforme aumenta la carga, el agrietamiento por flexión aparece en regiones donde el momento es menor. La falla ocurre por flexión cerca de la sección donde el momento es máximo. Para vigas con relaciones  $a/d$  menores, la falla puede estar asociada a grietas flexo-cortantes. Tales tipos de grietas son una forma de agrietamiento inclinado, y se estudiarán en la sección 2.5.2.

En vigas esbeltas, las grietas formadas pueden propagarse debido a una carga adicional, hasta que en alguna parte llegue a ser inestable y se extienda a toda la viga (Fig. 2.14). Este tipo de falla se llama *por tensión diagonal*. Las grietas inclinadas causan la falla inmediatamente si las vigas no tienen refuerzo en alma.

Las vigas muy esbeltas, con una relación  $a/d$  mayor que 6, fallan por flexión. El refuerzo longitudinal de tensión fluye seguido del aplastamiento del concreto en la zona donde el momento flexionante es máximo, antes de la formación de grietas inclinadas.

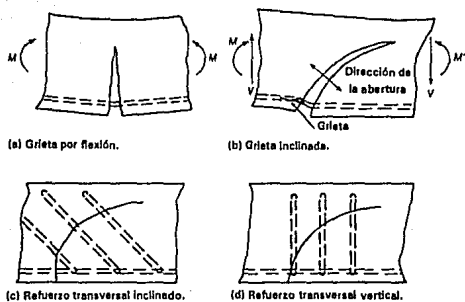


Fig. 2.14 Agrietamiento Inclinado y refuerzo transversal (Ref. 3)

### **2.5.2 Tipos de Grietas Inclinadas en Vigas de Concreto Reforzado**

Puesto que todos los tipos de falla por cortante son resultado del agrietamiento inclinado debido a los esfuerzos diagonales de tensión, es importante entender los factores que afectan la formación de tales grietas. Las grietas inclinadas deben existir antes de que ocurra la falla por cortante. Dos tipos de grietas inclinadas se muestran en la Fig. 2.15.

#### **Grietas por Cortante en el Alma**

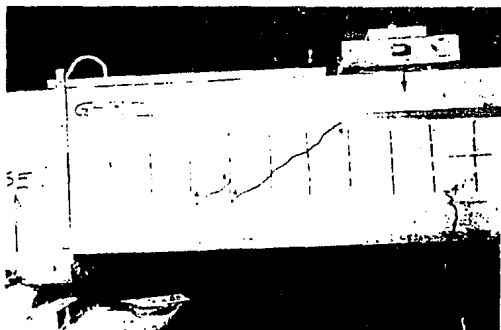
En la Fig. 2.15a se presentan el agrietamiento diagonal en el alma, (no hay fisuras por flexión). Generalmente este tipo de daño ocurre en vigas presforzadas con alma esbelta, en las cuales los esfuerzos cortantes en el alma son grandes, mientras que los esfuerzos por flexión son pequeños. El desarrollo de grietas por cortante en el alma ocurre cuando los esfuerzos principales de tensión en el eje neutro exceden a la resistencia a la tensión del concreto. Para estas vigas, los esfuerzos principales en el alma son superiores a los esfuerzos principales de tensión de la parte inferior. Tales grietas son muy poco comunes en vigas de concreto reforzado.

El agrietamiento por cortante en el alma puede ser calculado como el cortante necesario para causar que los esfuerzos principales de tensión sean iguales a la resistencia a tensión del concreto en el centroide de la viga. Recientemente se ha demostrado que una mejor predicción del cortante que produce el agrietamiento del alma se obtiene si se usan los límites propuestos por la teoría de falla de Mohr<sup>[13]</sup> para concreto sujeto a esfuerzos normales y cortantes.

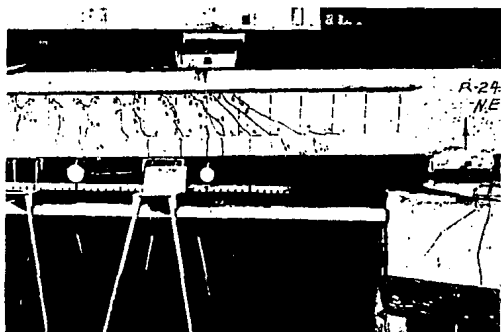
#### **Grietas Flexo-Cortantes**

En la mayoría de las vigas de concreto reforzado, las grietas a flexión ocurren primero y se extienden casi verticalmente dentro de la viga (Figs. 2.3b o 2.15b).

Estas grietas alteran el estado de esfuerzos en las vigas causando una concentración cerca de la punta de la grieta. Las grietas a flexión se desarrollan en regiones donde no había agrietamiento o se extienden para formar grietas flexo-cortantes (Fig. 2.15).



(a) Grieta cortante en el alma.



(b) Grietas por cortante-flexión.

Fig. 2.15 Tipos de agrietamiento inclinado (Ref. 3)



Las grietas flexo-cortantes no pueden ser predichas si se calculan los esfuerzos principales en una viga sin fisuras. Su mecanismo no se ha entendido completamente, a pesar de ser las grietas más comunes en vigas.

En una viga agrietada a flexión, la variación de los esfuerzos en el refuerzo longitudinal entre las grietas crea fuerzas sobre los cantilveres o dientes (Fig. 2.14b) las cuales tienden a causar deflexiones por flexión y cortante en el diente. A medida que surge la grieta inclinada, las fuerzas de dovela y los esfuerzos por la trabazón del agregado, se desarrollan entre los dientes evitando que el diente se flexione. De este modo, se retarda la aparición de grietas adicionales, primero, por los esfuerzos cortantes transferidos en la zona sin agrietamiento (zona de compresión), y después por la trabazón del agregado y por la acción de dovela. Esto sugiere que esfuerzos cortantes significativos pueden existir en los extremos superiores de las grietas por flexión en el claro de cortante.

Los esfuerzos no uniformes entre las grietas, inducen esfuerzos cortantes secundarios los cuales son considerables en la punta de la grieta debido a la flexión en el claro de cortante. Estos esfuerzos secundarios combinados con los esfuerzos necesarios para equilibrar las cargas aplicadas causan esfuerzos principales de tensión diagonal en la punta de la grieta. Por lo tanto, los esfuerzos principales de tensión más significativos se desarrollan en la punta de la grieta.

Se han desarrollado varias expresiones para calcular el cortante que produce el agrietamiento flexo-cortante en vigas de concreto reforzado sin refuerzo en el alma. La expresión más aceptada es

$$V_c = 2 \sqrt{f'_c} b d \quad (2.8)$$

donde

$V_c$  = fuerza cortante resistido por el concreto,

$f'_c$  = resistencia a la compresión del concreto, en lb/pulg<sup>2</sup>,

$b$  = ancho de la viga, y

$d$  = peralte efectivo.

La derivación de esta ecuación se explicará en la sección 4.1.

La carga que produce el agrietamiento inclinado en vigas hechas con concreto ligero donde el agregado es menos resistente y rígido, (por consiguiente no puede transferir cortante adecuadamente), generalmente es menor que el de vigas de concreto normal hechas con arena y grava (agregado de mayor peso volumétrico).

Cuando la viga es sometida a cargas alternadas, la inclinación de las grietas cambiarán de dirección en el apoyo (porque en el apoyo el cortante cambia de signo). Las cargas cíclicas reversibles causan agrietamiento inclinado en forma de X el cual causa que el cortante resistido por el concreto  $V_c$ , decrezca hasta desaparecer, debido a que los mecanismos de transferencia no se desarrollan (ver sec. 2.4.5.)

Como una consecuencia, se requerirán consideraciones especiales para el cálculo y para el diseño en regiones sísmicas, tales como factores de reducción especiales para cortante en miembros sujetos a cargas cíclicas.

## **2.6 Comportamiento de Vigas sin Refuerzo en el Alma**

Una vez que se inicia el agrietamiento, los desplazamientos a través de la grieta aumentan, y como resultado, la acción de dovela y la trabazón del agregado se incrementan de manera importante (por lo general representan entre un 40% y un 60% del cortante total, respectivamente). Las fuerzas internas que transfieren cortante a través de una grieta inclinada en una viga sin refuerzo en el alma se ilustran en la Fig. 2.16.

El cortante se transfiere a lo largo de la línea  $A-B-C$  por el cortante en la zona de compresión  $V_{cz}$ ; por el componente vertical del cortante transferido a través de la grieta por la trabazón del agregado  $V_a$ , y por la acción de dovela  $V_d$  en el acero longitudinal. Si se considera la porción  $D-E-F$  debajo de la grieta, y se toman momentos alrededor del refuerzo en el punto  $E$ , los momentos que actúan alrededor de este punto deberán equilibrarse por una fuerza de compresión  $C'_{t1}$ . Por equilibrio de fuerzas horizontales en la sección  $A-B-D-E$ , se demuestra que  $T_1 = C_1 + C'_{t1}$ .  $T_1$  y  $(C_1 + C'_{t1})$  deberán equilibrar al momento externo en esta sección.

Conforme se ensancha la grieta,  $V_a$  decrece, incrementándose la fracción del cortante resistido por  $V_{cz}$  y  $V_d$ . La acción de dovela  $V_d$  conduce al agrietamiento en el concreto a lo largo del refuerzo (Fig. 2.13a). Cuando esta grieta ocurre,  $V_d$  se reduce a cero. Al desaparecer  $V_a$  y  $V_d$ , y por lo tanto  $V'_{cz}$  y  $C'_t$ , todo el cortante y la compresión serán transmitidos en el ancho  $AB$  arriba de la grieta. Al suceder esto, la porción de concreto arriba de la grieta se somete a altos esfuerzos que podrían causar el aplastamiento del concreto.

Es importante notar que si  $C'_t = 0$ , entonces  $T_2 = T_1$ , y por lo tanto,  $T_2 = C_t$ . Es decir, el agrietamiento inclinado ha causado que la fuerza de tensión en el punto "C" sea una función del momento en la sección  $A-B-D-E$ . Esta dependencia de la fuerza de tensión se deberá considerar cuando se determinen los puntos de corte de las varillas y cuando se anclen las varillas. A este fenómeno se le conoce como interacción cortante - momento flexionante.

## **2.7 Comportamiento de Vigas con Refuerzo en el Alma**

Antes de que surja el agrietamiento por flexión, el cortante lo resistirá el concreto sin agrietarse; una vez que la sección se agriete, el cortante lo resistirá la viga mediante los mecanismos de transferencia de cortante descritos. Debido al agrietamiento inclinado, la resistencia de las vigas se reduce por debajo de la capacidad de flexión. El propósito del refuerzo en el alma es de asegurar que la capacidad total por flexión pueda ser desarrollada. El refuerzo en el alma tiene tres efectos primarios en la resistencia de una viga:

1. Resiste parte del cortante.
2. Controla el ensanchamiento de grietas por tensión diagonal, y con eso ayuda a mantener la trabazón del agregado.
3. Confina las barras longitudinales e incrementa la capacidad de dovela.

En suma, los estribos transfieren una pequeña fuerza a través de la grieta por la acción de dovela y tienden a mejorar la resistencia de la zona de compresión, confinando el concreto.

Un poco antes del agrietamiento inclinado, la deformación en los estribos es igual a la deformación correspondiente del concreto que los rodea. Puesto que el concreto se agrieta con una deformación menor que la de fluencia del acero, los estribos no evitan la formación de grietas inclinadas; solamente actúan una vez que las grietas se hayan formado. Las fuerzas internas en una viga con estribos se muestran en la Fig. 2.17.

Una vez que las grietas se han formado, una porción del cortante será transferido por la resistencia proporcionada por los estribos,  $V_s$ . Puesto que  $V_s$  no desaparece cuando se abre la grieta, siempre habrá una fuerza a compresión  $C'$  y una fuerza cortante  $V'_{cz}$  actuando en la parte de la viga debajo de la grieta. De esta forma,  $T_2$  será menor que  $T_1$ , (la diferencia dependerá de la cantidad de refuerzo en el alma). La fuerza  $T_2$  será, sin embargo, mayor que  $T = M / jd$ .

Aún cuando el acero transversal no puede incrementar la magnitud del cortante transferido, debido a que está fluyendo, el cortante adicional tiene que ser transmitido por los mecanismos  $V_{cz}$ ,  $V_d$  y  $V_a$ . Al fluir los estribos, la grieta se abrirá más y se reducirá la trabazón del agregado  $V_a$ , forzando a que la acción de dovola y los esfuerzos cortantes incrementen su contribución hasta la falla de la viga (falla del anclaje, a lo largo del refuerzo longitudinal, o por aplastamiento del concreto en la zona de compresión).

Los mecanismos de transferencia en vigas con refuerzo en el alma, ( $V_{cz}$ ,  $V_d$  y  $V_a$ ), tienen una curva carga-deformación quebradiza y difícil de cuantificar. Para efectos de diseño, dichos mecanismos se agrupan en  $V_c$ . Por lo que la resistencia nominal del cortante es

$$V_n = V_c + V_s \quad (2.9)$$

donde

$V_n$  = resistencia nominal al cortante,

$V_c$  = cortante resistido por el concreto, y

$V_s$  = cortante resistido por los estribos.

El cortante resistido por los estribos,  $V_s$ , se estudiará en el capítulo 3.

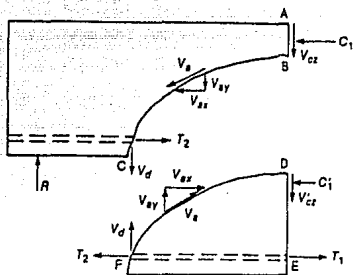


Fig. 2.16 Fuerzas internas en una viga agrietada sin estribos (Ref. 3)

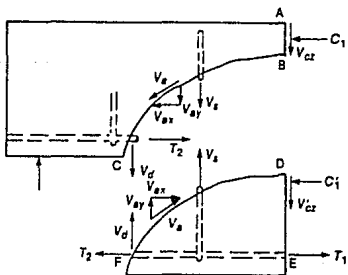


Fig. 2.17 Fuerzas internas en una viga agrietada con estribos (Ref. 3)

## Capítulo 3

### Modelo de la Armadura Clásica

#### 3.1 Principios

El modelo de la armadura representa con bastante precisión el comportamiento de vigas de concreto con refuerzo en el alma sometidas a cortante. Los primeros en desarrollar este modelo fueron el suizo Ritter en 1899 y el alemán Mörsch en 1902. Ambos trabajaron independientemente.

Como se muestra en la Fig. 3.1a, una viga agrietada en forma inclinada desarrolla fuerzas de compresión y de tensión  $C$  y  $T$ , en sus patines inferior y superior, respectivamente, tensiones verticales en los estribos con magnitud  $A_v f_y$  (donde  $A_v$  es el área del número de ramas del estribo y  $f_y$  es el límite de fluencia del acero) y fuerzas inclinadas de compresión entre las grietas inclinadas. Este sistema de fuerzas se puede representar como una armadura. Los miembros a compresión de la armadura se muestran con líneas punteadas y representan fuerzas en el concreto. Los miembros a tensión se muestran con líneas continuas (estribos y refuerzo longitudinal del lecho inferior).

El modelo de la armadura clásica considera que la inclinación de las grietas será de  $45^\circ$  y que los puntales de concreto a compresión se formarán paralelos a las grietas. Como una consecuencia los puntales tendrán un ángulo de inclinación igual a  $45^\circ$ .

En la Fig. 3.1b se muestra una armadura formada por el agrupamiento de todos los estribos cortados por la sección  $A-A$  dentro del elemento vertical  $b-c$  y por todos los miembros diagonales de concreto cortados por la sección  $B-B$  dentro de un elemento diagonal  $e-f$ . El elemento diagonal está esforzado a compresión para resistir el cortante en la sección  $B-B$ .

Por ejemplo, el estribo  $bc$  transmite una fuerza vertical igual a  $A_v f_y$  en la junta  $c$ , donde es resistido por el componente vertical de la fuerza en la diagonal  $ca$ .

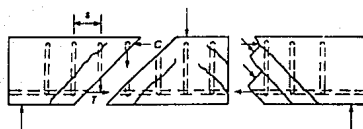
Para fines de diseño, la distribución ideal de los estribos corresponderá a lograr la fluencia simultánea de todos los estribos y que la viga esté al borde de la falla simultánea por flexión y cortante.

La Fig. 3.2 muestra un diagrama de cuerpo libre del extremo de una viga y una grieta inclinada. La proyección horizontal de la grieta es tomada como  $d$ , sugiriendo que la grieta tiene una inclinación aproximadamente de  $45^\circ$ . Si  $s$  es el espaciamiento entre estribos, el número de estribos cortados por una grieta es  $d/s$ .

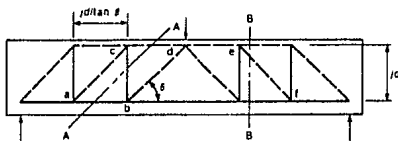
Como todos los estribos han fluido, el cortante resistido por los estribos cruzados por una grieta es

$$V_s = A_v f_y \frac{d}{s} \quad (3.1)$$

El modelo de la armadura ignora los mecanismos de transferencia de cortante (no considera una posible redistribución de esfuerzos que proporcionaría resistencia adicional al concreto, ver secc. 2.4). Esto es, el concreto no resistirá nada de cortante, todo será resistido por los estribos. Esto hace al modelo de la armadura clásica un procedimiento conservador para el diseño de vigas.



(a) Fuerzas internas en una grieta inclinada.



(b) Modelo de la armadura.

Fig. 3.1 Analogía de la armadura (Ref. 3)

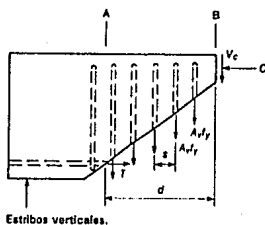


Fig. 3.2 Cortante resistido por estribos verticales (Ref. 3)



## **Capítulo 4**

### **Ecuaciones de Diseño para Vigas de Concreto Reforzado Sometidas a Cortante**

#### **4.1 Ecuaciones de Diseño del Instituto Americano del Concreto**

En las normas del Instituto Americano del Concreto, ACI<sup>(7)</sup> la ecuación básica para calcular la capacidad a cortante de vigas de concreto es

$$V_u \leq \phi V_n \quad (4.1)$$

donde

$V_u$  = fuerza cortante última (con cargas factorizadas),

$\phi$  = factor de reducción de resistencia (0.85), y

$V_n$  = resistencia nominal al corte.

La resistencia nominal al cortante  $V_n$ , es

$$V_n = V_c + V_s \quad (2.8)$$

donde

$V_c$  = cortante resistido por el concreto, y

$V_s$  = cortante resistido por los estribos.

Las ecuaciones de diseño para vigas de concreto reforzado sometidas a cortante se derivaron considerando el comportamiento de vigas con refuerzo en el alma y sin refuerzo en el alma. En esta sección las ecuaciones se presentan para variables en unidades del sistema inglés.

##### **4.1.1 Ecuaciones de Diseño para Vigas sin Refuerzo en el Alma**

La carga que produce el agrietamiento inclinado de una viga sin refuerzo en el alma está afectada esencialmente por las siguientes variables; algunas consideradas en las ecuaciones de diseño y otras no. Por lo general, estas variables no son

significativas cuando la viga tiene refuerzo en el alma.

#### Resistencia del Concreto a Tensión

La carga que produce el agrietamiento inclinado es una función de la resistencia a tensión del concreto. El estado de esfuerzos en el alma de la viga implican esfuerzos biaxiales.<sup>1</sup>

#### Cuantía del Refuerzo Longitudinal $\rho$

En la Fig. 4.1 se presenta la capacidad a cortante de vigas simplemente apoyadas sin estribos como una función de la cuantía de acero  $\rho = A_s / bd$ . El intervalo práctico de  $\rho$  para vigas que desarrollan fallas por cortante es aproximadamente entre 0.0075 y 0.025. En este intervalo la resistencia al cortante está dada por la siguiente ecuación (secc. 2.5.5)

$$V_c = 2 \sqrt{f'_c} b d \quad (2.7)$$

como se indica por la línea punteada de la Fig. 4.1. Esta ecuación tiende a subestimar  $V_c$  para vigas con poco porcentaje de acero.<sup>113,141</sup>

Cuando la cuantía de acero,  $\rho$ , se reduce, la acción de dovela, es pequeña; las grietas a flexión penetran más en la viga y son más anchas, como una consecuencia, se reduce la trabazón de agregados y la capacidad a cortante en la zona de compresión, resultando grietas inclinadas prematuras. Este comportamiento también se observa para el caso de valores altos de  $\rho$ .

#### Razón Claro de Cortante - Peralte ( $a/d$ )

La razón claro de cortante peralte,  $a/d$  o  $M/Vd$ , es una importante variable para definir el cortante que produce el agrietamiento inclinado.<sup>1121</sup>

---

<sup>1</sup> Un estado de esfuerzos biaxial similar existe en un cilindro ensayado a tensión mediante la prueba brasileña; la carga que produce el agrietamiento inclinado es frecuentemente relacionado a la resistencia de esta prueba.

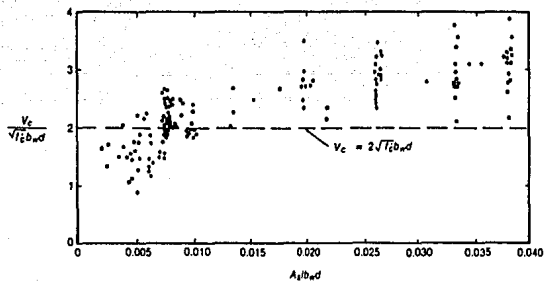


Fig. 4.1 Efecto del porcentaje de refuerzo en la resistencia al corte,  $V_c$ , de vigas sin estribos (Ref. 3)

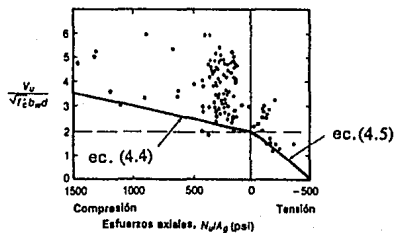


Fig. 4.2 Efecto de las cargas axiales en el agrietamiento inclinado (Ref. 3)

En vigas con relación  $a/d < 2$  el efecto es mayor que para vigas con relaciones  $a/d$  mayores. Esto se debe al tipo de transferencia de cortante que se desarrolla, el cual es más eficiente en vigas con relaciones  $a/d$  menores que dos (ver secc. 2.5).

Estudios más recientes señalan que la ecuación que considera la resistencia al cortante por parte del concreto (ec. 4.2, mostrada a continuación) subestima el efecto de  $\rho$  para vigas sin refuerzo en el alma, y que el tratamiento de la variable  $a/d$ , expresado como  $V_{ud} / M_u$  no es adecuado. En 1977, el Comité ACI-ASCE 326<sup>1131</sup> sobre cortante y tensión diagonal recomendó que dicha ecuación no debe ser usada extensamente.<sup>1141</sup> Para el intervalo normal de las variables, la ec. 2.7 da un límite inferior a la ec. 4.2.

#### **Tamaño de la Viga**

Si se aumenta el peralte de una viga, los esfuerzos cortantes en las grietas inclinadas tienden a decrecer para un  $f'_c$ ,  $\rho$ , y  $a/d$  constantes.<sup>1121</sup> Si el peralte se aumenta, los anchos de las grietas en los puntos arriba del refuerzo principal tienden a incrementarse. Esto lleva a una reducción en la trabazón del agregado, resultando un agrietamiento inclinado prematuro.

#### **Fuerzas Axiales**

Las fuerzas axiales a tensión tienden a reducir las cargas que producen el agrietamiento inclinado, mientras que las fuerzas axiales a compresión tienden a incrementarla (Fig. 4.2). Si las fuerzas axiales a compresión aumentan, el comienzo del agrietamiento por flexión se retrasa y las grietas por flexión no penetran mucho en la viga. Como una consecuencia, se requerirá de un cortante mayor para causar los esfuerzos principales de tensión que agrieten al concreto.

En 1962, el Comité ACI-ASCE 326 sobre cortante y tensión diagonal, presentó la siguiente ecuación para calcular la resistencia al cortante en vigas sin refuerzo en el alma.

$$V_c = \left( 1.9 \sqrt{f'_c} + \frac{2500 \rho V_u d}{M_u} \right) b d \quad (4.2)$$

donde

$V_c$  = cortante resistido por el concreto,

$f'_c$  = resistencia del concreto,

$\rho$  = cuantía del acero,

$V_u$  = cortante último,

$d$  = peralte de la viga,

$b$  = ancho de la viga, y

$M_u$  = momento flexionante último.

La deducción de esta ecuación siguió dos pasos.<sup>13,131</sup> Primero se hizo un análisis de los esfuerzos en la punta de la grieta a flexión en el claro de cortante, para identificar los parámetros significativos. Después, los datos de las pruebas existentes fueron graficados para diferentes tipos de variables (vigas con diferentes relaciones  $a/d$ , cantidades de refuerzo  $\rho$ , etc.) para establecer por medio de un ajuste de la curva obtenida, las constantes 1.9 y 2500 (Fig. 4.3).

Basado en estudios estadísticos, los datos para una viga esbelta sin refuerzo en el alma, Zutty<sup>1131</sup> dedujo ec. 4.3. Esta ecuación se apega más que la ec. 4.2 a los modelos estimando mejor los efectos reales de  $f'_c$ ,  $\rho$ , y  $a/d$ .

$$V_c = 59 \left( f'_c \rho \frac{d}{a} \right)^{1/3} \quad (4.3)$$

Para fines de diseño, el reglamento del ACI emplea las ecs. 2.7 y 4.2 para calcular  $V_c$ . Para miembros cargados axialmente, el ACI modifica la ec. 2.7 de las siguientes dos maneras<sup>1121</sup>

Para compresión axial

$$V_c = 2 \left( 1 + \frac{N_u}{2000 A_g} \right) \sqrt{f'_c} b d \quad (4.4)$$

Para tensión axial

$$V_c = 2 \left( 1 + \frac{N_u}{500 A_g} \right) \sqrt{f'_c} b d \quad (4.5)$$

### Vigas Continuas

La aplicación de la ec. 4.2 para el diseño de vigas continuas no es del todo correcta.<sup>61</sup> La variable  $Vud / Mu$  que maneja la ecuación no considera la acción del puntal debidamente, esta difiere para vigas con más de un claro que para las vigas para las que se dedujo (un claro). Ferguson<sup>61</sup> recomendó suficiente, usar la ec. 2.7 para el cálculo de la resistencia del concreto al corte en vigas continuas.

#### 4.1.2 Ecuaciones de Diseño para Vigas con Refuerzo en el Alma

##### Refuerzo Mínimo en el Alma

La falla por cortante de una viga sin refuerzo en el alma es repentina y frágil. Por otro lado, las cargas que producen esta falla, difieren de los valores dados por las ecuaciones de diseño,<sup>2</sup> por lo que se requerirá de una cantidad mínima de refuerzo en el alma para prever, cuando la fuerza cortante aplicada  $V_u$ , exceda la mitad de la carga de agrietamiento inclinado,  $\phi 0.5 V_c$  (excepto en vigas secundarias y vigas con peralte total menor a 10 pulg ó 250 mm, 2 ½ veces el espesor del patín ó 1 ½ el espesor del alma).

Cada excepción representa un tipo de miembros en el cual la redistribución de carga puede ocurrir en el elemento, o en el caso de vigas secundarias a miembros adyacentes.

Donde se requiera, el refuerzo mínimo del alma será por lo menos de<sup>3</sup>

---

<sup>2</sup> ACI Sec. 11.5.5.1

<sup>3</sup> ACI Sec. 11.5.5.3

Para vigas con concretos  $f'_c$  mayores a 10,000 psi se usa la ecuación propuesta en ACI Sec. 11.1.2.1.

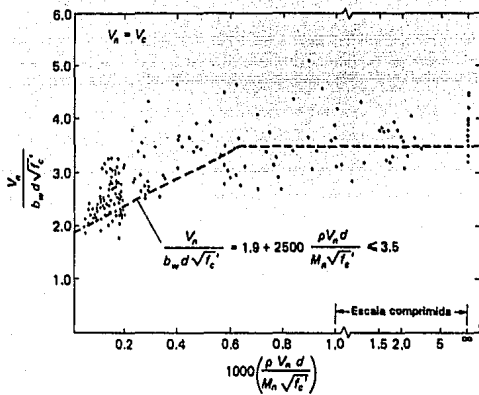
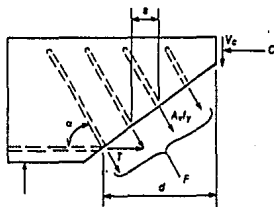


Fig. 4.3 Derivación de la ec. 4.1 (Ref. 6)



Estribos Inclinados.

Fig. 4.4 Cortante resistido por estribos inclinados (Ref. 3)

$$A_{V(\min)} = \frac{50 b s}{f_y} \quad (4.6)$$

En regiones sísmicas el refuerzo en el alma es requerido en todas las vigas puesto que  $V_c$  se toma como cero.<sup>4</sup>

La falla de vigas con refuerzo en el alma se debe principalmente a los siguientes factores.

#### Falla Debida al Flujo de Estribos

En el reglamento ACI  $V_{cz}$ ,  $V_{ay}$  y  $V_d$  se agrupan como  $V_c$  que es el cortante que resiste el concreto. De este modo la resistencia nominal a cortante,  $V_n$ , se toma como<sup>5</sup>

$$V_n = V_c + V_s \quad (2.8)$$

El reglamento ACI además asume que  $V_c$  es igual a la resistencia a cortante de una viga sin estribos que, se toma igual a la carga que produce el agrietamiento inclinado como se da por la ecs. 2.7, 4.2, 4.4 o 4.5. Se debe enfatizar que  $V_c$ , igual al cortante que origina el agrietamiento inclinado, es una observación empírica de las pruebas, lo cual es aproximadamente cierto si se asume que la proyección horizontal de las grietas inclinadas es  $d$ , como se muestra en la Fig. 4.5.

Si la grieta es tal que  $(jd \cot \theta)$  es mayor que  $d$ , se deberá reducir el valor de  $V_c$ . El cortante resistido por los estribos es

$$V_s = A_v f_y \frac{d}{s} \quad (3.1)$$

En las Figs. 3.2 y 2.17 también se muestra que el agrietamiento inclinado

---

<sup>4</sup> ACI Sec. 21.7.2.1

<sup>5</sup> ACI ec. 11-2



afecta las fuerzas a tensión  $T$ . Esto se traduce en un diagrama de momentos desplazado a lo largo de la viga. Esto es obvio en la analogía de la armadura pero no es tan obvio en el método de diseño del ACI. Si  $V_U$  excede  $\phi V_C$ , los estribos se pueden proveer de modo de que

$$V_U \leq \phi V_n \quad (4.1)$$

donde

$V_n$  = resistencia nominal del cortante dado por la ec. 2.8. Para fines de diseño, la ecuación generalmente se reordena de la forma

$$\phi V_s \geq V_U - \phi V_C \quad \text{ó} \quad V_s \geq \frac{V_U}{\phi} - V_C \quad (4.7)$$

Introduciendo la ec. 3.1 y reordenando, nos da el espaciamiento entre estribos verticales

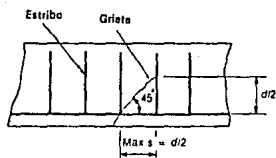
$$s = \frac{A_v f_y d}{V_U / \phi - V_C} \quad (4.8)$$

Los estribos son incapaces de resistir el cortante a menos que estén separados según el menor de  $d/2$  ó 24 pulg, de modo que cada grieta a  $45^\circ$  sea interceptada por lo menos por un estribo (Fig. 4.5). El espaciamiento máximo de estribos inclinados es tal que una grieta a  $45^\circ$  se extienda desde la altura media del miembro al refuerzo a tensión y sea interceptada por lo menos por un estribo (Figs. 4.6).

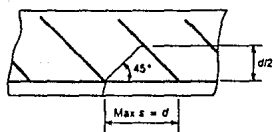
Si

$$V_U / \phi - V_C = V_s > 4 \sqrt{f_c} b d \quad (4.9)$$

el espaciamiento máximo permitido se reduce a la mitad. Para estribos verticales, la separación máxima es el menor de  $d/4$  ó 12 pulg. Esto obedece a dos razones. El espaciamiento cerrado de estribos estrecha las grietas inclinadas y también contribuye a un mejor anclaje de las varillas en los extremos bajos de las diagonales a compresión.



**Fig. 4.5** Máximo espaciamento de estribos verticales (Ref. 3)



**Estribos Inclinados.**

**Fig. 4.6** Máximo espaciamento de estribos inclinados (Ref. 3)

### Falla por Cargas de Servicio Debido a Anchos de Grieta Excesivos

Un agrietamiento inclinado excesivo en vigas pueden permitir la entrada de agua causando corrosión en los estribos. En suma, los anchos de grieta son menores para un espaciamiento cerrado de estribos de pequeño diámetro que para estribos más separados y de diámetros grandes. La siguiente ecuación evita los anchos excesivos en grietas, limitando el cortante máximo que puede ser transmitido por los estribos<sup>6</sup>

$$V_S (\text{MAX}) = 8 \sqrt{f_c'} b d \quad (4.10)$$

### Falla por Cortante Debido al Aplastamiento del Alma

Como se indicó en la discusión de la analogía de la armadura, los esfuerzos a compresión existen en las diagonales en el alma de una viga.

La falla de vigas de alma muy esbelta se rige por el aplastamiento de la misma. Puesto que los esfuerzos diagonales a compresión se relacionan con el esfuerzo cortante, las normas limitan el esfuerzo último cortante de 0.2 a 0.25 veces la resistencia a compresión del concreto. El código ACI<sup>(7)</sup> limita  $V_s$  para el control de grietas; la ec. 4.10 proporciona una adecuada resistencia contra el aplastamiento del alma en vigas de concreto reforzado.

### Falla por Cortante Iniciado por la Falla de la Cuerda a Tensión

La fuerza en el refuerzo a tensión longitudinal en un punto dado en el claro de cortante es una función del momento de una sección localizada aproximadamente a una distancia  $d$  cercana a la sección del momento máximo (ver Cap. 3). Por ésta razón se requiere que el refuerzo a flexión se extienda a lo largo del peralte  $d$  ó 12 diámetros más allá del punto donde se necesite.<sup>7</sup> (excepto en los apoyos de claros simples o en los extremos de los cantiliveres).

---

<sup>6</sup> ACI Sec. 11.5.6.8

<sup>7</sup> ACI Sec. 12.10.3

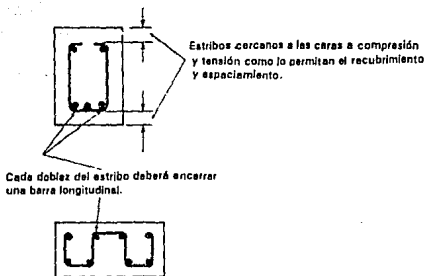
### Falla por Cortante Debida a la Falla del Anclaje de los Estribos

La ecs. 3.1 y 4.8 se basan en la hipótesis de que los estribos fluirán para alcanzar la resistencia última por cortante. Esto es cierto solamente si los estribos están bien anclados. Generalmente, el extremo superior de la grieta inclinada se aproxima mucho a la zona compresión, (Fig. 2.3). Al borde de la falla, el esfuerzo en los estribos se aproxima o es igual a la resistencia de fluencia,  $f_y$ , en cualquier punto donde una grieta inclinada intercepte un estribo. De este modo, las porciones de los estribos que han quedado por encima de la grieta deben ser capaces de desarrollar la fuerza  $f_y$ . Por esta razón, se requiere que los estribos se extiendan lo más cercano a las zonas a tensión y compresión como lo permita el recubrimiento y espaciamiento de las barras. Se deberá especificar un tipo de gancho que ancle adecuadamente los estribos.<sup>8</sup> Los requerimientos para el anclaje de estribos del código ACI<sup>(7)</sup> se ilustra en la Fig. 4.7.<sup>9</sup> Longitudes de anclaje y de desarrollo se discuten en la norma del ACI, secciones 7.1.3 y 12.2.

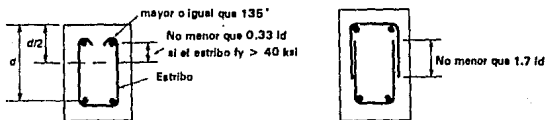
---

<sup>8</sup> ACI Sec. 13.13.1

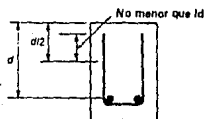
<sup>9</sup> ACI Secciones 12.13.2.1; 12.13.2.2; 12.13.2.3; 12.13.3, 12.13.5, 7.11; 7.13.2.2, 7.13.2.3



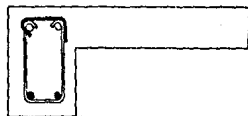
(a) Requerimientos generales.



(b) Anclaje del estribo.



(c) Estribo en forma de U.



(d) Estribo de dos piezas.

Fig. 4.7 Anclaje de estribos (Ref. 3)

## 4.2 Ecuaciones de Diseño del Reglamento de Construcciones del Distrito Federal<sup>10)</sup>

Las expresiones que se amplían en las Normas Técnicas Complementarias<sup>11)</sup> para el cálculo de la resistencia al cortante en vigas de concreto reforzado son una variación de las fórmulas presentadas en el ACI. Las formulaciones estiman, en términos generales, los mismos factores y consideraciones utilizados por el Instituto Americano del Concreto (ACI).

### 4.2.1 Ecuaciones de Diseño para Vigas sin Refuerzo en el Alma

La fuerza cortante que resiste el concreto,  $V_{cR}$ , se presentan enseguida para distintos elementos. Las expresiones son aplicables cuando la dimensión transversal del elemento, paralela a la fuerza cortante sea  $h \leq 70 \text{ cm}$  y que la relación entre el peralte total y el ancho del alma, sea  $h/b \leq 6$ . Para cada una de las condiciones que no se cumpla, se reducirá la resistencia  $V_{cR}$ .

En vigas de concreto reforzado, con relación claro - peralte,  $L/h > 5$ , la fuerza cortante  $V_{cR}$  será igual a

Si

$$\rho \leq 0.01 \quad V_{cR} = F_R b d (0.2 + 30 \rho) \sqrt{f^*c} \quad (4.11)$$

$$\rho > 0.01 \quad V_{cR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f^*c} \quad (4.12)$$

donde

$f^*c$  = resistencia nominal del concreto a compresión,

$F_R$  = factor de reducción de resistencia (0.8), y

$\rho$  = cuantía del acero de refuerzo a tensión.

Si  $L/h < 4$ , y las cargas y reacciones comprimen directamente las caras superior e inferior de la viga,  $V_{cR}$ , se obtendrá, multiplicando el valor que da la ec. 4.12 por la siguiente expresión

$$\left( 3.5 - 2.5 \frac{Mu}{Vu d} \right) > 1.0 \quad (4.13)$$

siempre y cuando  $Vc_R$  sea mayor que

$$1.5 FR b d \sqrt{f'c} \quad (4.14)$$

Para secciones  $T$ ,  $I$  ó  $L$ , en todas las expresiones anteriores se usará el ancho  $b'$ , en lugar de  $b$ , donde  $b'$  es el ancho del patín. Para el cálculo de cortante en otro tipo de elementos, como miembros anchos (losas, zapatas, muros), miembros sujetos a flexocompresión (columnas) o miembros de concreto preesforzado se consideran otras expresiones.<sup>10</sup>

Para determinar la fuerza cortante que resiste el concreto  $Vc_R$ , en vigas diafragma, se aplicará lo estipulado en la secc. 4.2.1, para vigas con relación  $L/h < 4$ .

#### 4.2.2 Ecuaciones de Diseño para Vigas con Refuerzo en el Alma

##### Refuerzo por Tensión Diagonal en Vigas de Concreto

Este refuerzo deberá estar formado por estribos cerrados perpendiculares u oblicuos al eje de la pieza, por barras dobladas o una combinación de estos elementos.<sup>1111</sup>

El refuerzo mínimo transversal por tensión diagonal cuando la fuerza de diseño  $V_u < Vc_R$ , estará formado por estribos verticales no menores a varillas del No. 2 (6.3 mm), espaciados a cada  $d/2$  y se colocarán a partir de cada unión de viga con columnas o muros hasta  $\frac{1}{4}$  del claro correspondiente.

Cuando se aplica el requisito anterior, así como cuando  $V_u > Vc_R$ , se requerirá refuerzo por tensión diagonal. En el segundo caso, la separación  $s$ , se determinará con la expresión y limitaciones siguientes

<sup>10</sup> Ver inciso a.II - a.IV de la sec. 2.1.5 Fuerza cortante (Ref. 11).

$$s = \frac{F_R A_v f_y d (\text{sen } \theta + \text{cos } \theta)}{V_U - V_{C_R}} \leq \frac{F_R A_v f_y}{3.5 b} \quad (4.15)$$

donde

$A_v$  = área transversal del refuerzo,

$\theta$  = ángulo que forma el refuerzo transversal con el eje de la viga, y

Para secciones circulares se sustituirá  $d$  por el diámetro de la sección.

La separación  $s$  no deberá ser menor a 5 cms.

Si

$$V_{C_R} < V_U \leq 1.5 F_R b d \sqrt{f^*c} \quad (4.16)$$

la separación  $s$  no debe ser mayor a  $0.5 d$ .

Si

$$V_U > 1.5 F_R b d \sqrt{f^*c} \quad (4.17)$$

la separación  $s$  no debe ser mayor a  $0.25 d$ .

En ningún caso se permitirá que

$$V_U > 2 F_R b d \sqrt{f^*c} \quad (4.18)$$

en caso contrario se tendrá que aumentar la sección propuesta.

Los requerimientos para el anclaje de estribos y longitudes de empotramiento y de desarrollo, son discutidos en los requisitos complementarios de las Normas Técnicas Complementarias del RDF-87.<sup>(11)</sup>

El refuerzo por tensión diagonal para vigas peraltadas (vigas diafragma) se tomará de la diferencia entre la fuerza cortante de diseño  $V_U$  en la sección crítica y el cortante tomado por el concreto  $V_{C_R}$ . El refuerzo constará de estribos cerrados verticales y barras horizontales y sus contribuciones se determinan por las expresiones presentadas en las Normas Técnicas Complementarias<sup>(11)</sup> sección 2.1.5, inciso g.



### **4.3 Limitaciones**

En el caso de la ec. 4.2, se mencionó en la sección 4.1.1 que esta ecuación subestima el valor de  $V_c$  para vigas con bajos porcentajes de acero. Como se explicó, el comportamiento de vigas con porcentajes bajos y altos de acero es poco deseable (aparición de agrietamiento inclinado prematuro). Por lo tanto, la ecuación sólo podrá estimar correctamente la resistencia  $V_c$  en vigas con porcentajes de refuerzo dentro del intervalo práctico (ver secc. 4.1.1). Para vigas fuera de este porcentaje, la ecuación dará resultados conservadores.

Algunos aspectos en el comportamiento del cortante, son pasados la deducción la ec. 4.2. Como consecuencia, tipos de falla en el anclaje, aplastamiento de los puntales, fallas locales, etc, determinantes en el comportamiento de una viga no son consideradas. La falta de una globalización de todas las variables da como resultado resistencias conservadoras. El procedimiento de diseño del ACI (ec. 4.2) no considera los cambios en el diagrama de fuerza a tensión (importantes en el detallado del acero longitudinal).

El modelo de la armadura clásica ignora los componentes de cortante  $V_{cz}$ ,  $V_{ay}$  y  $V_d$ , y por lo tanto no considera que una posible redistribución de esfuerzos proporcione resistencia adicional al concreto. Asume que el mecanismo de la armadura se ha formado completamente al fluir todos los estribos. Como una consecuencia, el concreto no resistirá nada de cortante una vez agrietada la sección, y todo será resistido por los estribos. Esto hace al modelo de la armadura clásica un procedimiento conservador para el diseño de vigas.

## Capítulo 5

### Modelo de la Armadura Moderna

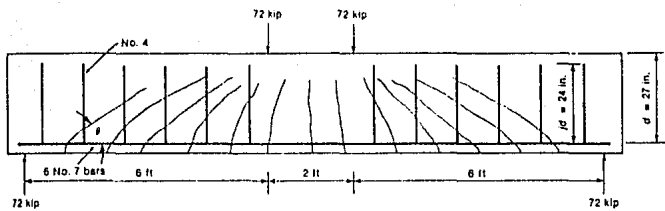
#### 5.1 Introducción y Alcances

El modelo de la armadura con variación en el ángulo de inclinación de las diagonales a compresión, es una versión refinada del modelo clásico (ver Cap. 3), y se le considera como un modelo más realista. El ángulo de inclinación de las diagonales deberá ser tal que en la zona en donde la falla ocurra, el refuerzo longitudinal y transversal alcancen sus resistencias de fluencia.

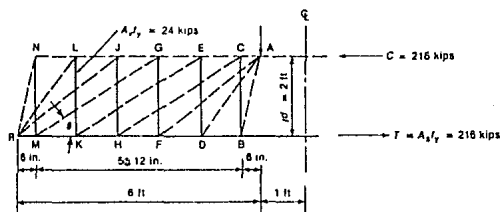
La Teoría de Plasticidad proporciona la base matemática para el modelo de falla. Se emplean los Límites Superior e Inferior del Teorema de Análisis Plástico al Límite.<sup>(15)</sup> Las suposiciones del modelo de la armadura han sido propuestas para mostrar que la carga para la cual es estable, si estáticamente es admisible un estado de esfuerzos en la armadura (valor límite inferior) es igual a la carga para la cual es inestable, si cinemáticamente es admisible un estado de movimiento (valor límite superior). Esta carga sería la carga que produciría la falla.

En la Fig. 5.1a se muestra una viga agrietada. El extremo izquierdo de la viga se puede reemplazar por la armadura mostrada en la Fig. 5.1b. La distribución ideal de los estribos corresponderá cuando los estribos fluyan simultáneamente cuando la viga falle. Cada estribo transmite una fuerza de magnitud igual a  $A_v f_y$ , a través de la grieta, donde  $A_v$  es el área de los estribos. Cuando esto sucede, la armadura se hace estáticamente determinada.

La armadura mostrada en la Fig. 5.1b es un *modelo de la armadura* en donde se depende de la plasticidad de los estribos para que la armadura se haga estáticamente determinada. La viga se dimensionará para que los estribos fluyan antes de que se aplaste el concreto, de forma que no se dependa de la plasticidad del concreto.



(a) Viga.



(b) Modelo de la armadura plástica.

Fig. 5.1 Modelo de la armadura plástica (Ref. 3)

## 5.2 Hipótesis para el Modelo de Armadura Plástica

En la construcción de un modelo de la armadura plástica se deberán considerar las siguientes hipótesis:

1. El modelo deberá estar en equilibrio.
2. Todo el cortante es resistido por los estribos. Solamente se presentarán fuerzas uniaxiales en el refuerzo (de este modo no se considera la acción de dovela).
3. El concreto solamente resiste compresión y tiene una resistencia efectiva  $f_{ce}$  igual a  $\eta f'_c$  donde el factor de eficiencia,  $\eta$ , es usualmente menor que 1.0. Por tanto, la resistencia a tensión del concreto se considera igual a cero, ya que el acero resistirá las fuerzas a tensión.
4. Los centroides de cada miembro de la armadura y las líneas de acción donde se aplican las cargas deben coincidir en el nudo.
5. La viga deberá estar al borde de la falla simultánea por cortante y flexión. El aplastamiento del concreto de la diagonal no ocurrirá antes de que fluya el refuerzo transversal. Esto implica que debe haber un límite superior para los esfuerzos de las diagonales de concreto, así como límites en el ángulo de inclinación de los puntales. En teoría, la falla del modelo ocurrirá cuando un miembro de concreto sometido a compresión se aplaste, o cuando un número suficiente de miembros a tensión fluya para producir un mecanismo. Este último tipo de falla tiene asociado un comportamiento dúctil. Las anteriores suposiciones satisfacen el Teorema del Límite Inferior Plástico,<sup>121</sup> que se puede reescribir como:

"Si se puede encontrar una distribución de esfuerzos en equilibrio con la carga aplicada y que esté debajo del límite de fluencia o en el límite de fluencia, la estructura no fallará o estará al borde de la falla." Puesto que la estructura podrá transferir por lo menos esta carga, la fuerza aplicada será un límite inferior de la capacidad de carga de la estructura. La carga se transmitirá siguiendo una trayectoria segura, aunque frecuentemente ocurre que haya otras trayectorias las cuales pueden soportar una mayor carga. Los procedimientos de diseño basados en el teorema del límite inferior requiere que el diseñador identifique, por lo menos, una posible trayectoria de carga

y que se asegure que ninguna porción de la trayectoria esté sobreesforzada. La elección de las trayectorias de carga está limitada por la capacidad de deformación de la viga. Si la trayectoria asumida difiere por mucho de la trayectoria de la carga original en la viga agrietada, la viga será incapaz de redistribuir las fuerzas para alcanzar la trayectoria de carga asumida.

### 5.3 Componentes de la Armadura Moderna

En general el modelo de la armadura moderna tiene los siguientes componentes:

1. Cuerdas longitudinales (Fig. 5.1a), una a tensión (acero longitudinal del lecho inferior) y otra a compresión (que es una fuerza en el concreto).

2. Diagonales a compresión (Fig. 5.1b) los cuales se inician en el punto de aplicación de la carga ( $AB$ ,  $AD$  y  $AF$ ) y que son referidas como *abanico a compresión*. El número de diagonales en el abanico debe de ser tal que toda la carga vertical en  $A$  sea resistida por los componentes de las fuerzas verticales en las diagonales que se salen de  $A$  ( $FA$ ,  $DA$ ,  $BA$ ). Un abanico a compresión similar existe en el apoyo  $R$  ( $RN$ ,  $RL$ ,  $RJ$ ). Entre los abanicos de compresión se encuentra una *zona de compresión* compuesta de puntales diagonales paralelos  $CH$ ,  $EK$  y  $GM$ . Los puntales diagonales se encuentran a compresión uniaxial. Los puntales tienen una resistencia última igual a  $f_{cc}$  (ver sec. 5.4). El área de la sección transversal de los puntales a compresión debe ser la suficiente para asegurar que los esfuerzos en el puntal no excedan a  $f_{cc}$ .

Los puntales tienen un ancho y espesor definidos por la fuerza en el miembro y el nivel de esfuerzos permisibles. Los extremos de los puntales están sometidos a esfuerzos principales que deben ser perpendiculares al eje longitudinal del puntal. El ángulo de inclinación  $\theta$  de la zona de compresión es determinado por el número de estribos que se necesitan para equilibrar las cargas verticales en los abanicos.

Cada uno de los abanicos de compresión ocurre en una región  $D$ . La zona de compresión entre los abanicos es una región  $B$  (ver secc. 6.2).

3. Los tensores o los miembros de acero a tensión se diseñan para alcanzar y soportar la resistencia de fluencia  $f_y$ . El colapso de la viga no ocurrirá cuando un

tensor alcance su resistencia de fluencia, al menos que esto sea suficiente para convertir a la armadura en un mecanismo. El acero de refuerzo deberá detallarse apropiadamente de modo que se eviten aplastamientos locales prematuros y fallas por adherencia.

Elementos adicionales como blocks, arcos, etc, son descritos en las herramientas para el diseño de vigas de concreto reforzado por Marti.<sup>[21]</sup>

#### **5.4 Resistencia Efectiva del Concreto**

Se mencionó con anterioridad (secc. 5.2) que los puntales de concreto y las zonas nodales tienen una resistencia efectiva igual a  $f_{ce} = \eta f'_c$ , donde  $\eta$  es un factor de eficiencia y  $f'_c$  es la resistencia del concreto a la compresión.

Los factores que más afectan la resistencia efectiva de compresión de los puntales y las zonas nodales son:

1. El valor de las deformaciones por tensión perpendiculares al puntal ó a la dirección de los esfuerzos principales de compresión en el alma de la viga. El valor de las deformaciones se basa en la medida de la longitud necesaria para cruzar una o más grietas. Collins y Mitchell<sup>[3]</sup> han demostrado que la resistencia última a compresión decrece a medida que la magnitud de las deformaciones de tensión se incrementan.

2. La dirección del agrietamiento si es paralela al puntal o inclinada a su eje.

3. La uniformidad del estado de deformación. La resistencia al aplastamiento de los miembros sujetos a deformaciones altas, tales como los nudos o los puntales en una viga (Fig. 5.2), tiende a ser mayor que el de una viga con esfuerzos uniformes en el alma (Fig. 5.8b). Este fenómeno se atribuye a la presencia de concreto adyacente a los puntales que está sujeto a esfuerzos menores y por lo tanto, es más resistente que los puntales, lo que permite una redistribución de esfuerzos.

En la Tabla 5.1, MacGregor recomiendan valores para la resistencia efectiva a compresión,  $f_{ce}$ .

Varios autores han propuesto diferentes valores para  $\eta$  expresados aquí en términos de la resistencia del cilindro.<sup>[3]</sup> El modelo exacto para diseño por cortante en

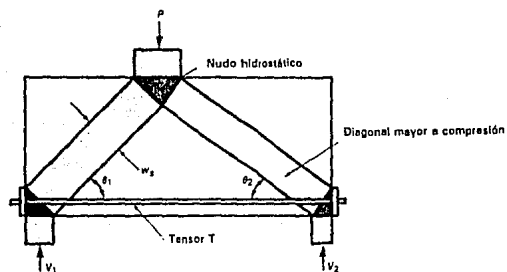


Fig. 5.2 Modelo de la armadura plástica en una viga peraltada (Ref. 3)

el código europeo de 1978<sup>[9]</sup> asignó un límite superior a  $f_{ce}$  para evitar el aplastamiento del alma. El valor corresponde a  $\eta = 0.6$ , basado en los factores de seguridad europeos.<sup>[9]</sup> Rogowsky consideró las diferencias entre los factores de carga y de reducción entre el CEB y el ACI, y disminuyeron el factor a  $\eta = 0.51$ .

Por su parte, Nielsen<sup>[21]</sup> propuso

$$f_{ce} = \left( 0.7 - \frac{f'_c}{29,000} \right) f'_c \quad (\text{lb / pulg}^2) \quad (5.1)$$

Y Ramirez<sup>[21]</sup> sugirió

$$f_{ce} = 30 \sqrt{f'_c} \quad (\text{lb / pulg}^2) \quad (5.2)$$

Rogowsky<sup>[21]</sup> ha observado que la selección de los puntales de concreto así como su inclinación era más importante que la adopción de algún valor para  $\eta$ . Observó que si los puntales seleccionados diferían excesivamente de la distribución elástica, la redistribución no ocurriría y la armadura fallaría prematuramente, dando la apariencia de un valor bajo de  $\eta$ . En su análisis, Rogowsky usó  $\eta = 0.85$ .

Schlaich y Weischedel<sup>[21]</sup> notaron que los puntales (como los ilustrados en la Fig. 6.22) tenían su menor anchura en los nudos, y que en un caso real se puede incrementar el ancho del puntal entre los nudos. Esto induce esfuerzos a tensión transversales a los puntales los cuales limitan la resistencia a compresión de los mismos (ver secc. 6.5.3). Schlaich y Weischedel presentaron un modelo experimental, el cual consiste en un mini-modelo de la armadura para un puntal. Los autores graficaron las resistencias a compresión para los puntales  $f_{ce} = \eta f'_c$ . Si, por ejemplo, el ancho efectivo del puntal en el punto medio entre sus extremos es del doble del ancho que en el nudo, el valor de  $\eta$  es igual a 0.67. De su estudio, recomendaron que la inclinación de los puntales de compresión debería variar  $\pm 15^\circ$  de la pendiente de las trayectorias elásticas de los esfuerzos de compresión.

Collins y Mitchell,<sup>[21]</sup> y Vecchio y Collins<sup>[21]</sup> reportaron que la resistencia efectiva del concreto bajo deformaciones principales por tensión  $\epsilon_1$ , con ángulos similares a la dirección de los esfuerzos principales a compresión (Fig. 5.3) es igual a



$$f_{ce} = \frac{f_c'}{0.8 + 170 \epsilon_1} \quad (\text{lb / pulg}^2) \quad (5.3)$$

Las deformaciones principales por tensión  $\epsilon_1$ , se obtienen del círculo de Mohr para deformaciones relacionando las deformaciones  $\epsilon_x$  paralelas a el eje de la viga, el ángulo  $\theta$  y la máxima deformación  $\epsilon_2$  correspondiente al máximo punto de la curva esfuerzo - deformación para el concreto, tomado como 0.002. En lugar de un análisis para la deformación  $\epsilon_x$ , Collins y Mitchell sugirieron que se tome como 0.002.

Si  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_x$  son iguales a 0.002,  $\eta$  varía casi linealmente desde 0 para  $\theta = 0^\circ$ , a cerca de 0.55 para  $\theta = 45^\circ$ , y tiende a 0 para  $\theta = 90^\circ$ .

La resistencia del concreto en las zonas del nudo es generalmente tomada como  $f_{ce}$ . En 1984 el código canadiense,<sup>[8]</sup> no obstante, tomó  $f_{ce}$  igual a:

- 0.85  $f_c'$  en las zonas nodales ligadas por puntales de compresión y áreas de apoyo.
- 0.75  $f_c'$  en zonas nodales en las cuales se ancla solamente un tensor.
- 0.60  $f_c'$  en zonas nodales en donde se anclan más de un tensor.

El empleo de valores de eficiencia menores conforme se anclen más tensores, trata de reflejar la incompatibilidad de esfuerzos entre los tensores y las zonas nodales de compresión y la distribución no uniforme de esfuerzos, particularmente si el anclaje es adherido. Los valores arriba mencionados se deben multiplicar por 0.80, para considerar las diferencias entre los factores de carga y de reducción de resistencia entre los códigos ACI<sup>[7]</sup> y el canadiense (CSA).<sup>[8]</sup>

Para uso general (nudos y puntales), se recomienda  $\eta$  igual a 0.60.<sup>[7]</sup>

### 5.5 Valor de la Inclinación $\theta$ en la Región de Compresión

Como ya se dijo, en el análisis de una viga dada, como el de la Fig. 5.1, el ángulo  $\theta$  está determinado por el número de estribos necesarios para equilibrar las cargas aplicadas y sus reacciones. El ángulo de inclinación de los puntales de compresión deberá ser tal que la viga esté al borde de la falla simultánea por cortante y flexión.

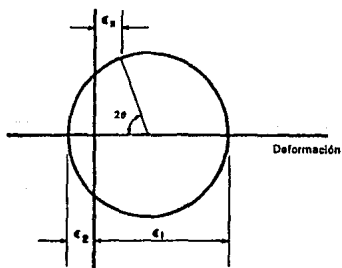
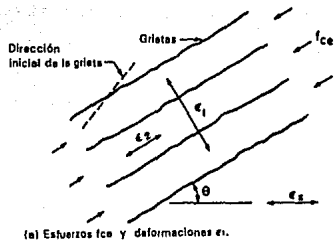


Fig. 5.3 Esfuerzos en una alma agrietada (Ref. 21)

**Tabla 5.1 Resistencia efectiva del concreto según MacGregor (Ref. 3)**

Tipo de Estructura	$f_{cr}$
Nudo de armadura	
Nudos limitados por puntales y zonas sometidas a compresión	$0.85 f_c$
Nudo donde se ancla un tensor	$0.65 f_c$
Nudos anclados por tensores en más de una dirección	$0.50 f_c$
Puntales en vigas peraltadas o en regiones D	$0.50 f_c$
Almas agrietadas de vigas esbeltas	
$\theta = 30^\circ$	$0.25 f_c$
$\theta = 45^\circ$	$0.45 f_c$

Cuando una viga de concreto reforzado con estribos es cargada hasta la falla, las grietas inclinadas iniciales se desarrollan entre un ángulo de  $35^\circ$  a  $45^\circ$  con respecto a la horizontal. Con incrementos de carga, el ángulo de los puntales de compresión varía y puede cruzar algunas de las grietas. Este fenómeno se logra cuando se alcanza la carga última y para que ocurra deberá transferirse el cortante entre las grietas ya formadas. Así, mientras más se abra la grieta, se reducirá la transferencia de cortante.

La dirección en la que se abre la grieta, se toma primero normal a la dirección de la grieta. Después se considera que el ángulo de inclinación de los esfuerzos principales de compresión pueda coincidir con el ángulo de inclinación de las deformaciones principales de compresión.

Considerando un elemento de un campo de cortante sujeto a esfuerzos cortantes, la energía será disipada por la fluencia del refuerzo longitudinal (en las secciones subreforzadas se considera que las diagonales de compresión son rígidas). Como resultado, la deformación principal de compresión  $\epsilon_{cs}$  se toma igual a cero. Además, si se considera que la abertura de las grietas son normales a su dirección, se podrá obtener el mecanismo cinemático para un elemento en un campo de corte sujeto a esfuerzos cortantes (Fig. 5.4).

La cinemática ayuda a explicar las limitaciones en la inclinación de las diagonales de compresión en el modelo de la armadura.

La deformación total por cortante se relaciona con la elongación del refuerzo longitudinal y transversal dando como resultado la siguiente expresión

$$\gamma = \gamma_x + \gamma_L = \epsilon_x \tan \theta + \epsilon_L \cot \theta \quad (5.4)$$

Un parámetro conveniente puede ser la deformación principal de la grieta  $\epsilon_r$ , definida como el ancho principal de la grieta,  $w$ , dividido por el espaciamiento entre grietas  $d_{cr}$  (Fig. 5.5).

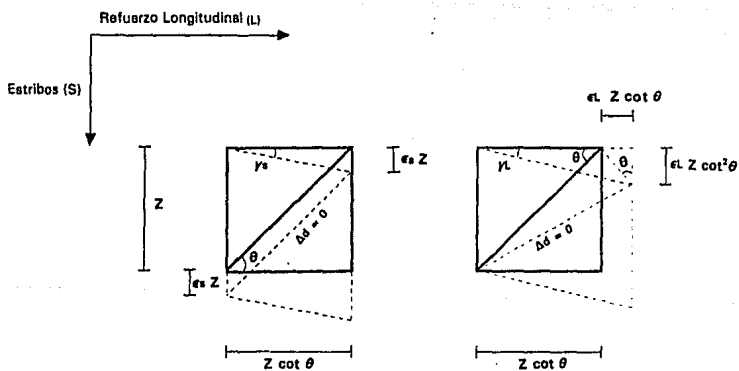


Fig. 5.4 Diagrama del desplazamiento del campo de cortante de un elemento (Ref. 23)

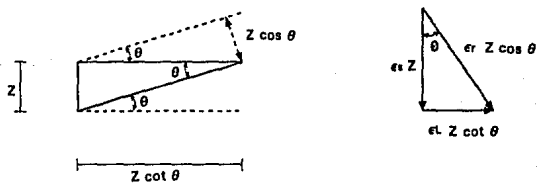
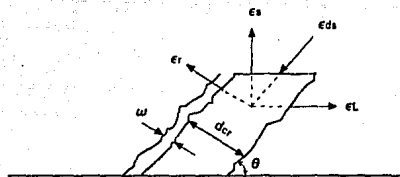


Fig. 5.5 Estado de deformaciones en un puntal diagonal (Ref. 23)

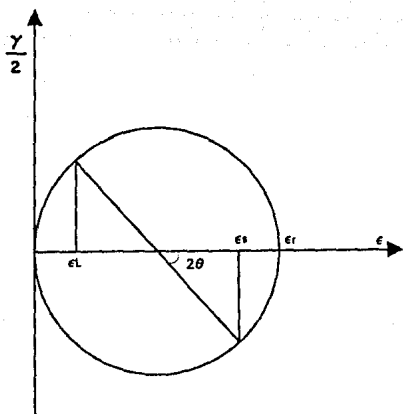


Fig. 5.6 Diagrama de Mohr para el elemento de la Fig. 5.4 (Ref. 23)

Según el estado de deformaciones en el puntal diagonal mostrado en la Fig. 5.5, la relación entre las elongaciones  $\epsilon_L$  y  $\epsilon_s$  se pueden formular de la siguiente manera:

$$\epsilon_s = \epsilon_L \cot^2 \theta \quad (5.5)$$

El desplazamiento debido a la deformación de la grieta principal  $\epsilon_r$  se relaciona con las elongaciones del refuerzo de la siguiente manera

$$\epsilon_s = \epsilon_r \cos^2 \theta \quad (5.6)$$

Y

$$\epsilon_L = \epsilon_r \operatorname{sen}^2 \theta \quad (5.7)$$

Sumando la ec. 5.6 y 5.7, se obtiene la sig. relación

$$\epsilon_s + \epsilon_L = \epsilon_r \quad (5.8)$$

Las mismas relaciones pueden ser derivadas del círculo de Mohr para las deformaciones del campo de cortante mostrado en la Fig. 5.4. Considerando  $\epsilon_{\text{cis}}$  igual a cero, el diagrama de Mohr al colapso es el mostrado en la Fig. 5.6.

De las ecs. 5.6 y 5.8, resulta que al fluir el refuerzo transversal ( $\epsilon_s = \epsilon_y$ )

$$\epsilon_r = \epsilon_y (1 + \tan^2 \theta) \quad (5.9)$$

Y cuando fluye el refuerzo longitudinal ( $\epsilon_L = \epsilon_y$ )

$$\epsilon_r = \epsilon_y (1 + \cot^2 \theta) \quad (5.10)$$

Si se grafican las ecs. 5.9 y 5.10 se obtiene la Fig. 5.7. En las abscisas se presenta la inclinación del puntal y en las ordenadas la deformación perpendicular de las grietas normalizada por la deformación de fluencia. Se puede apreciar que si los puntales de compresión están inclinados  $45^\circ$ , la deformación principal  $\epsilon_r$  (y, por tanto el ancho principal de la grieta) tienen un valor mínimo. Si el ángulo de inclinación es mayor que  $45^\circ$ , para que fluyan los estribos se requerirán de mayores aberturas de



las grietas. Para ángulos menores que  $45^\circ$ , la fluencia del refuerzo longitudinal se alcanzará para mayores aberturas de las grietas. Las aberturas de las grietas, así como la inclinación del campo de compresión, se deben limitar.

En la Fig. 5.7 se muestra, que fuera de los límites  $0.46 \leq \tan \theta \leq 2.1$  ( $25^\circ \leq \theta \leq 65^\circ$ ), la falla requerirá de la fluencia del refuerzo transversal o longitudinal asociado a una deformación principal de la grieta  $\epsilon$ , muy grande. Se ha considerado como límite de la deformación en la grieta cinco veces la deformación de fluencia.

Considerando que las secciones son subreforzadas, que el concreto es rígido, y que todas las deformaciones son causadas por elongaciones del refuerzo, varios investigadores han marcado limitaciones para el valor del ángulo de inclinación de los puntales de compresión. Thürlimann basándose en un modelo de carga última sugirió

$$0.5 \leq \tan \theta \leq 2.00$$

es decir,  $26^\circ \leq \theta \leq 64^\circ$

El código suizo consideró en su modelo cargas de servicio. Los límites se escogieron para limitar los anchos de grieta, el intervalo propuesto es más reducido

$$0.6 \leq \tan \theta \leq 1.67$$

o sea  $31^\circ \leq \theta \leq 59^\circ$

Estos límites fueron adoptados por el código europeo.<sup>191</sup>

Estos límites empíricos, básicamente se introdujeron para compensar el hecho de que los procedimientos basados en análisis plástico no distinguen entre elementos sobrerreforzados y subreforzados, ya que no predicen la deformación total.

Algunas normas, como la suiza, han reducido el límite inferior propuesto por Thürlimann<sup>211</sup> de  $\tan \theta \geq 0.60$  ( $\tan \theta \geq 31^\circ$ ), para controlar los anchos de grietas inclinadas durante cargas de servicio. Esto hace necesario la introducción de una región de transición entre las secciones sin agrietamiento y agrietadas para evitar la colocación de más refuerzo transversal en partes donde los esfuerzos por cortante son bajos, como se requería en los códigos anteriores.

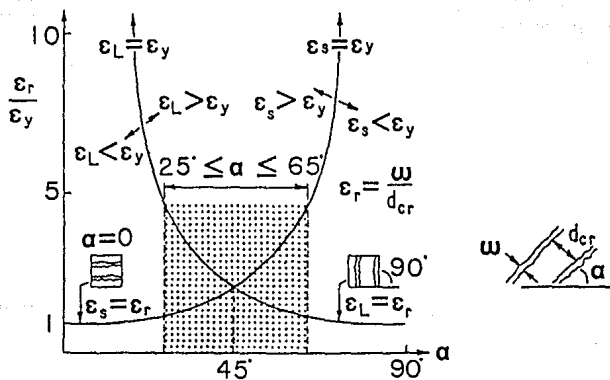


Fig. 5.7 Relación entre la deformación de la grieta principal y la deformación del refuerzo al fluir con la inclinación del puntal (Ref. 22)

Basado en un análisis de compatibilidad de deformaciones, Collins y Mitchell<sup>[3]</sup> han propuesto límites que pueden simplificarse como

$$\theta_{\min} = 10 + 110 \left( \frac{V_u}{\phi f'_c b jd} \right) \quad (5.11)$$

$$\theta_{\max} = 90 - \theta_{\min} \quad (5.12)$$

donde

$V_u$  = cortante último en Kips,

$f'_c$  = resistencia a la compresión del concreto en lb / pulg<sup>2</sup>,

$b$  = ancho de la viga en pulg,

$jd$  = brazo de palanca del momento interno en pulg.

Ramirez<sup>[21]</sup> y Rogowsky<sup>[21]</sup> han sugerido límites entre 25° y 65°.

Es importante tener presente que la elección de un valor pequeño de  $\theta$  reduce el número de estribos requeridos, pero incrementa los esfuerzos de compresión en el alma, incrementa la fuerza axial a tensión y disminuye la fuerza axial a compresión, de tal forma que cambia el diagrama de momento incrementándose el área del acero principal. Lo opuesto es cierto para ángulos  $\theta$  grandes.

## 5.6 Desarrollo del Modelo en Vigas Esbeltas de Concreto

### 5.6.1 Fuerzas Internas en el Modelo

Las fuerzas internas en un modelo de la armadura plástica se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 5.8a. Todo el componente vertical de la fuerza cortante es resistido por las fuerzas a tensión en los estribos que atraviesan esta sección (Fig. 5.8b). Si el número de estribos cortados es

$$\frac{jd / \tan \theta}{s} \quad (5.13)$$

la fuerza en un estribo es

$$Af_y = \frac{V s}{jd \tan \theta} \quad (5.14)$$

donde

$V$  = fuerza cortante actuante,

$s$  = separación entre estribos, y

$jd$  = brazo de palanca del momento interno.

Del diagrama de cuerpo libre mostrado en la Fig. 5.8b se observa que el ancho de las diagonales es  $jd \cos \theta$  y que la fuerza vertical,  $V$ , que actúa en la sección, debe ser resistida por una fuerza inclinada de compresión  $D = V / \sin \theta$  (Fig. 5.8c).

El promedio de los esfuerzos a compresión en las diagonales  $fd$ , es

$$fd = \frac{V}{b jd \cos \theta \sin \theta} \quad (5.15)$$

simplificando queda

$$fd = \frac{V \left( \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right)}{b jd} \quad (5.16)$$

donde

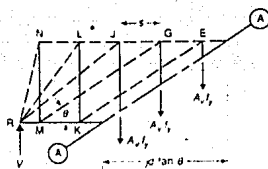
$b$  = espesor del alma.

Si el alma es muy esbelta, este esfuerzo puede causar que el alma se aplaste.

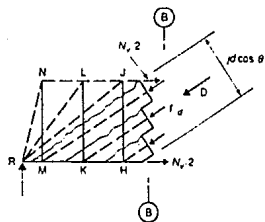
El cortante  $V$  en la sección  $B-B$  ha sido reemplazado por una fuerza de compresión diagonal  $D$  y una fuerza axial de tensión  $N_v$ , mostrada en la Fig. 5.8c

$$N_v = \frac{V}{\tan \theta} \quad (5.17)$$

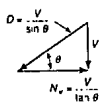
Si a esto se asume que los esfuerzos cortantes son constantes (ver sec. 2.5.1) sobre el peralte de la viga, las resultantes de  $D$  y  $N_v$ , actúan a medio peralte. Como consecuencia, la fuerza a tensión  $N_v/2$  actúa en las cuerdas superior e inferior (Fig. 5.8b). De esta forma se reduce la fuerza en la cuerda a compresión y se incrementa



(a) Cálculo de las fuerzas en los estribos.



(b) Cálculo de los esfuerzos en las diagonales a compresión.



(c) Solución de las fuerzas internas.

Fig. 5.8 Fuerzas en estribos y diagonales a compresión (Ref. 3)

la fuerza en la de tensión.

En las regiones de los abanicos de compresión, el ángulo  $\theta$  varía y por lo tanto  $Nv$  varía, aproximándose a cero debajo de la carga. La distribución de fuerzas en la cuerda a tensión y compresión de los puntales de la Fig. 5.1 se muestra en la Fig. 5.9. Las fuerzas  $C = T = M / jd$ , debido a la flexión se muestran con la línea discontinua. En la región de la zona de compresión, la fuerza en la cuerda a tensión es mayor que  $T = M / jd$ , (se incrementa en  $Nv/2$ ) y menor que  $C = M / jd$  en la cuerda a compresión por la misma cantidad, como se muestra por las líneas punteadas en la Fig. 5.9. Esto implica que el anclaje del tensor deba ser adecuado para desarrollar la varilla, de forma que se transmita la fuerza de anclaje sobre la longitud del nudo (es necesario anclar la barra longitudinal para una fuerza de tensión  $Nv/2$ , aunque el momento sea cero). En la práctica el anclaje del refuerzo en una viga se logra con ganchos doblados a  $90^\circ$  o a  $180^\circ$ , o bien proporcionando una longitud de desarrollo adecuada.

En la zona del abanico de compresión bajo la carga, el valor de  $Nv/2$  en la cuerda a tensión gradualmente se reduce a cero (Fig. 5.9a). De modo que en el punto de momento máximo, la fuerza en el refuerzo es  $T = M / jd$ . El cambio en el diagrama de la fuerza a tensión es equivalente a calcular  $T$  de un diagrama de momento el cual ha sido desplazado lejos de la zona de momento máximo por una cantidad

$$\frac{jd \cot \theta}{2} \quad (5.18)$$

El modelo de la armadura predice exactamente las fuerzas en las barras.

En la Fig. 5.2, el tensor se muestran con un anclaje externo (placa de anclaje), esto es para enfatizar que los nudos deberán anclarse adecuadamente. Este tipo de anclaje es comúnmente utilizado por investigadores para ensayos en laboratorio e idealiza a la fuerza del tensor distribuyéndose en el nudo (ver dimensionamiento de nudos, sec. 6.5.3).

De manera similar las cargas se muestran actuando sobre placas de apoyo. Esto es para que la carga se distribuya de manera más uniforme y por lo tanto no

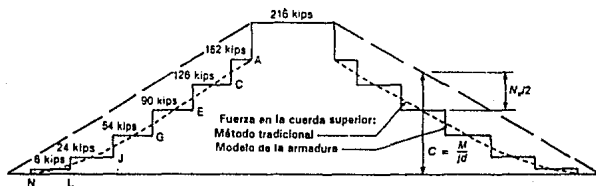
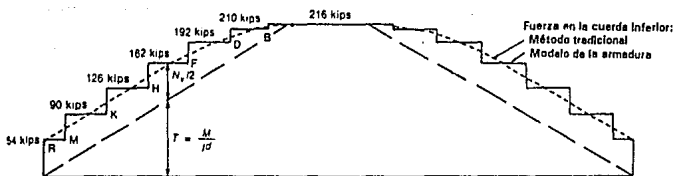


Fig. 5.9 Fuerzas en las cuerdas superior e inferior de la armadura. (Ref. 3)

cause concentraciones de esfuerzos indeseables en el miembro. En una estructura de concreto normal esta transferencia de fuerza ocurre donde la viga se apoya en las columnas o donde las columnas se apoyan en la viga.

### ***5.7 Desarrollo del Modelo en Vigas Peraltadas de Concreto***

Una viga peraltada es aquella en donde la transferencia de cortante se desarrolla predominantemente por acción de arco. Esto es, la carga es transferida a los apoyos por puntales de compresión, de forma que unen la carga con la reacción. Esto sucede si la carga concentrada actúa alrededor de una distancia  $2d$  del apoyo, (donde  $d$  es el peralte de la viga), o para cargas uniformemente repartidas si la viga tiene una razón claro-peralte menor que 4 ó 5. Para vigas con cargas concentradas, las vigas peraltadas serán aquellas con una razón claro de cortante-peralte tal que  $0 < a/d \leq 2.5$ . El caso más típico de vigas peraltadas es la de una viga secundaria. Estas pueden tener uno o varios claros y soportan la carga de una o más columnas. El comportamiento del tipo de viga peraltada también ocurre en algunos muros y pilas.

#### ***5.7.1 Análisis y Comportamiento de Vigas Peraltadas***

El análisis elástico de vigas peraltadas sin agrietamiento es solamente significativo antes de que ocurra el agrietamiento. En una viga peraltada, el fisuramiento inclinado ocurre cuando se aplica entre un tercio y la mitad de la carga última. Una vez agrietada la sección, se requiere una importante redistribución de esfuerzos, puesto que no se transmite tensión a través de las grietas.

El resultado del análisis elástico es de suma importancia porque nos muestra la distribución de esfuerzos (que causan el agrietamiento) y, por lo tanto, da una idea de la dirección del flujo de fuerzas después del agrietamiento. En las Figs. 5.10 a 5.13, se ilustran con líneas punteadas las trayectorias de los esfuerzos de compresión (perpendiculares a los esfuerzos principales de tensión). Se espera que las grietas se desarrollen perpendiculares a las líneas continuas (paralelas a las líneas punteadas).

En el caso de una viga peraltada de un solo claro con carga concentrada al



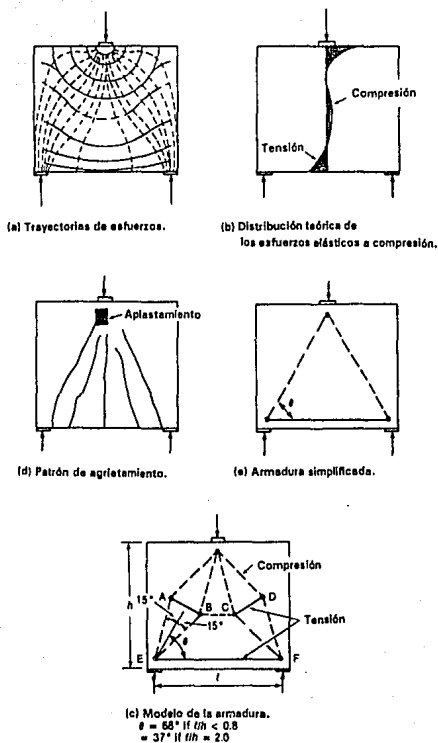


Fig. 5.10 Viga peraltada con carga concentrada al centro del claro (Ref. 3)

centro (Fig. 5.10), los esfuerzos principales de compresión actúan aproximadamente paralelos a las líneas que unen a la carga con los apoyos. Los esfuerzos principales máximos de tensión son paralelos a la cara inferior de la viga. La distribución elástica de esfuerzos horizontales al centro del claro se muestran en la Fig. 5.10b. Aunque no se ilustran en la gráfica es importante notar que los esfuerzos normales por flexión, de la cara inferior son constantes sobre gran parte del claro. Las trayectorias de esfuerzos de la Fig. 5.10a se pueden idealizar con el modelo de la armadura propuesto en la Fig. 5.10c. En esta ilustración, las líneas punteadas representan los puntales de compresión y las líneas continuas los tensores. El ángulo  $\theta$  variaría aproximadamente en forma lineal desde  $68^\circ$  (pendiente 2.5:1) para  $l/h \leq 0.80$ , hasta  $37^\circ$  (pendiente 0.85:1) para  $l/h = 2.0$ . Si la viga se ensayara, el patrón de agrietamiento sería similar al mostrado en la Fig. 5.10d. Notase que cada uno de los tres tensores en la Fig. 5.10c (A, C y E) atraviesan grietas. En la falla, la región sombreada en la Fig. 5.10d se podría aplastar, o bien las zonas de anclaje E y F podrían fallar. El modelo de la armadura (Fig. 5.10c) se puede simplificar aún más (Fig. 5.e). Sin embargo, este modelo sería insuficiente para explicar la formación de las grietas inclinadas en el alma.

Una viga elástica con claro de cortante sin agrietamiento y uniformemente cargada en su cara superior tiene las trayectorias de esfuerzo mostradas en la Fig. 5.11a. La distribución de esfuerzos horizontales en las secciones cercanas al centro y a un cuarto del claro se ilustran en la Fig. 5.11b. Las trayectorias de esfuerzo se pueden idealizar por una armadura simple (Fig. 5.11c), o por una armadura más elaborada (Fig. 5.11d). En el primer caso, la carga  $w$  se dividió en dos partes, cada una representada por su resultante. En el segundo caso, la carga uniforme se sustituyó por cuartas partes. En estas vigas el ángulo  $\theta$  varía linealmente desde  $68^\circ$  para  $l/d \leq 1.0$  hasta  $54^\circ$  para  $l/d = 2.0$ . El patrón de grietas en tal viga se representa en la Fig. 5.11e.

En una viga peraltada con carga uniforme actuando en la cara inferior, las trayectorias de esfuerzos a compresión forman una serie de arcos (Figs. 5.12a, 5.12b y 5.12c). Del patrón de agrietamiento (Fig. 5.12d) se deduce que la carga es

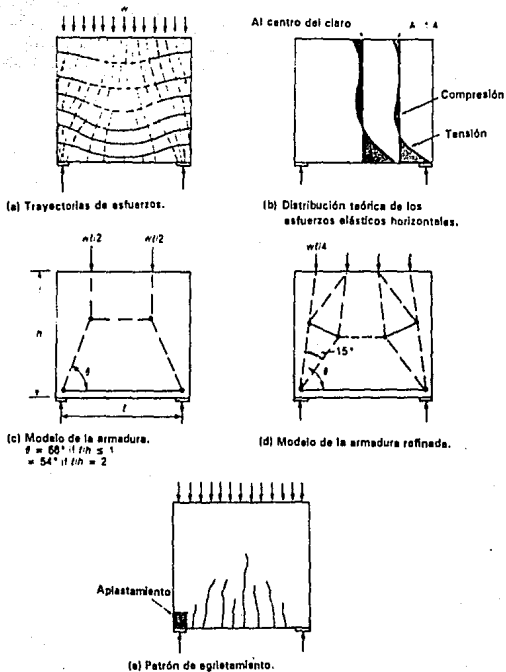
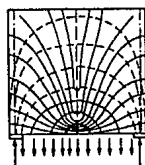
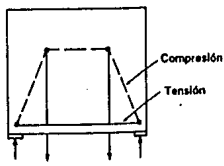


Fig. 5.11 Viga parabolada con carga uniformemente repartida (Ref. 3)

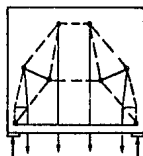
ESTA LIBRO NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA



(a) Trayectorias de esfuerzos.



(b) Modelo de la armadura.



(c) Modelo de la armadura refinada.



(d) Patrón de agrietamiento.

**Fig. 5.12** Viga peraltada con carga uniformemente repartida en la cara inferior (Ref. 3)

transferida hacia arriba por el refuerzo, y resiste mediante acción de arco hacia los apoyos.

Diagramas similares a los descritos se presentan para una viga peraltada de varios claros (Fig. 5.13). El ángulo  $\theta$  es similar al ángulo de la viga peraltada de un solo claro. El patrón de grietas en una viga continua con dos claros se ilustra en la Fig. 5.13d.

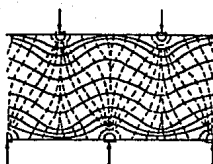
Como se mencionó anteriormente, los esfuerzos flexionantes son constantes en el claro, lo que sugiere que las fuerzas en los tensores longitudinales sean constantes también. Como una consecuencia, los nudos deberán ser diseñados y detallados para anclar esta fuerza.

### 5.7.2 Diseño de Vigas Peraltadas Usando el Modelo Plástico de la Armadura

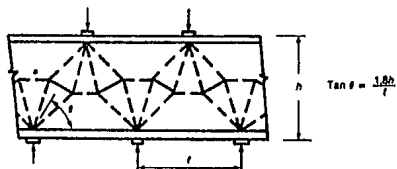
Anteriormente se había visto que el modelo plástico de la armadura para vigas esbeltas, consistía de puntales de compresión inclinados un ángulo  $\theta$  (entre  $25^\circ$  y  $65^\circ$ ), estribos, y cuerdas longitudinales a compresión y a tensión, abanicos de compresión y zonas de compresión. En esta sección se incluirán dos nuevos componentes: la *Diagonal Mayor de Compresión* y el *Nudo de la Armadura*. En la viga de la Fig. 5.2, la carga concentrada  $P$  es resistida por dos puntales mayores a compresión (sombra clara). El componente horizontal de la fuerza de los puntales es equilibrada por los tensores,  $T$ . En general, las diagonales mayores ocurrirán si las regiones de los abanicos de compresión se traslapan con puntales, de modo de que no exista un campo de compresión entre los abanicos (Fig. 5.14).

El tamaño de los puntales a compresión se seleccionarán para resistir  $f_{ce} = \eta f'c$ , donde  $\eta$  es el factor de eficiencia (ver secciones 5.2 y 5.4)

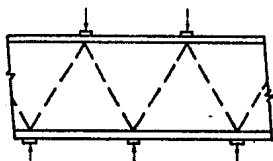
Los nudos están formados por elementos llamados hidrostáticos (sombra oscura, Fig. 5.2). El concreto de estos elementos está sujeto a esfuerzos principales iguales a  $f_{ce}$ . Aunque estos elementos pueden tener cualquier forma poligonal, deberán tener esfuerzos uniaxiales de compresión  $f_{ce}$  actuando en cada cara del elemento dentro del plano de la viga. Con todo rigor, estos elementos no están sometidos a un verdadero estado hidrostático de esfuerzos, puesto que los esfuerzos



(a) Trayectorias de esfuerzos.



(b) Modelo de la armadura.



(c) Modelo de la armadura simplificada.



(d) Patrón de agrietamiento en una viga de dos claros.

Fig. 5.13 Viga peraltada con dos claros (Ref. 3)

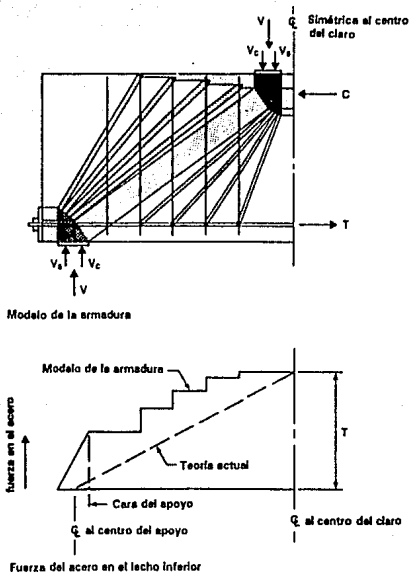


Fig. 5.14 Modelo de la armadura plástica para una viga con estribos (Ref. 3)

sobre las caras libres no serán iguales a  $f_{ce}$  (perpendiculares al dibujo).

### **5.7.3 Criterios Básicos en el Diseño Usando el Modelo de la Armadura Plástica**

Las fallas más comunes en la armadura de una viga peraltada (como la mostrada en la Fig. 5.2) son:

1. El tensor alcanza su resistencia de fluencia.
2. Alguno de los puntales se plasta cuando los esfuerzos exceden la resistencia del concreto,  $f_{ce}$ .
3. Algún nudo se aplaste al excederse su resistencia a compresión efectiva.
4. El refuerzo longitudinal pierde adherencia (fallas de anclaje)

Frecuentemente, el aplastamiento del nudo involucra una falla en los apoyos, ya sea en las reacciones o en el punto de aplicación de la carga. Puesto que una falla de tensión en el acero sería más dúctil que cualquiera de los otros modos falla, la viga se deberá diseñar de modo que la resistencia del acero se desarrolle antes de que la falla del concreto se alcance. Como se ha dicho, según el Límite Inferior de la Teoría Plástica, la carga de falla será igual o excederá a la carga de diseño. Es necesario, por lo tanto limitar los esfuerzos y deformaciones soportados por el concreto.

El requerimiento de que los ejes de los elementos de la armadura se encuentren en un punto, limita las secciones de los miembros, particularmente de los puntales a compresión. Cuando se tiene poco recubrimiento, el tensor estará cerca del lecho inferior, reduciéndose el tamaño del nudo; para que los ejes de los miembros coincidan, el puntal a compresión deberá ser más pequeño. Si la sección del puntal disminuye la viga se debilitará.

### **5.7.4 Validez de la Teoría de la Armadura Plástica**

En todo problema físico, la validez del modelo dependerá de la fidelidad con que represente el fenómeno. Esta afirmación es igualmente correcta para las armaduras plásticas. Las vigas de concreto pueden estar sometidas a un alto nivel de redistribución de fuerzas internas, cuando éstas cambian desde el estado elástico preagrietado, pasando por el estado elástico agrietado, hasta el estado plástico



agrietado. Si la armadura escogida requiere de excesivas deformaciones para alcanzar totalmente el estado plástico, puede fallar prematuramente. En la Fig. 5.15 se muestra un ejemplo de armadura, la cual es inadecuada. Esta ilustra la mitad de una viga simplemente apoyada con acero de refuerzo por flexión y un lecho de refuerzo horizontal en el alma a la mitad del peralte. Un modelo tentativo para esta viga consiste en dos armaduras, una utilizando el acero del lecho inferior como su tensor y la otra utilizando el acero del lecho a la mitad del peralte. Para un material plástico ideal, la capacidad se obtiene sumando el cortante transmitido por las dos armaduras,  $V_1$  y  $V_2$ . Sin embargo, si el refuerzo del lecho a la mitad del peralte es poco, no tendrá efecto sobre la resistencia. Al ser cargada, la viga, el refuerzo del lecho inferior fluye primero y se necesitarán grandes deformaciones para que fluya el refuerzo a la mitad del peralte. Como consecuencia, antes de que se desarrolle la resistencia total de la viga, la armadura inferior fallará.

#### 5.7.5 Procedimiento de Diseño

Como ya habíamos explicado, el diseño de una viga peraltada usando el modelo de la armadura consiste en proponer una armadura que pueda transmitir las cargas. Una vez que se haya encontrado dicha armadura, se detallarán sus miembros y juntas para que puedan transmitir las fuerzas exigidas. Las dimensiones definitivas de la viga deberán ser tales que, la armadura entera se adapte dentro de la viga y además, tenga un recubrimiento adecuado.

Puesto que las vigas peraltadas continuas son elementos rígidos y por tanto sensibles a los ajustes diferenciales de sus apoyos debido a los asentamientos de sus cimientos ó a los acortamientos diferenciales de las columnas que la soportan, en el diseño de tales elementos se debe estimar el intervalo de los valores de las reacciones. El intervalo se deberá usar para calcular envolventes de fuerza cortante y momento flexionante. Si bien podría haber una redistribución de cortante y momento, ésta estará limitada.<sup>1</sup> En vigas peraltadas se limita  $\phi V_n$  a (unidades inglesas)

---

<sup>1</sup> ACI Sec. 11.8.3

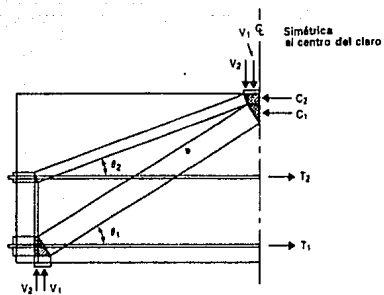


Fig. 5.15 Modelo de la armadura plástica para vigas con retuerzo horizontal en el alma (Ref. 3)

$$\phi (8 a 10) \sqrt{f_c} b d \quad (5.19)$$

dependiendo de la razón claro-peralte de la viga. Se puede obtener inicialmente una sección tentativa de acuerdo al siguiente límite

$$V_u = \phi V_n = \phi (6 a 10) \sqrt{f_c} b d \quad (5.20)$$

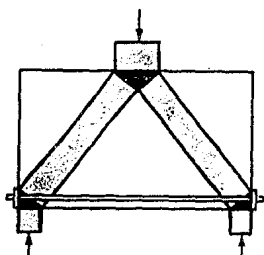
La parte crucial en el proceso de diseño es la selección del modelo de la armadura. La dirección de los puntales de compresión en cada claro de cortante deberá coincidir con la dirección de los esfuerzos principales de compresión. Por ejemplo, las trayectorias de esfuerzos, simplificadas de las Figs. 5.10 a la 5.13, nos ayudarían a establecer un modelo de la armadura. Como se mencionó, Schlaich<sup>13,24</sup> sugiere que los puntales varíen en  $\pm 15^\circ$  del ángulo de inclinación  $\theta$ , obtenidos de un análisis elástico. Los valores de  $\theta$  se muestran en las gráficas.

Quando se propongan diversas armaduras (Fig. 5.16), la que requiera la menor cantidad de acero (Fig. 5.16a) será la que se acerque más al comportamiento real de la viga y, por lo tanto, será la idónea.

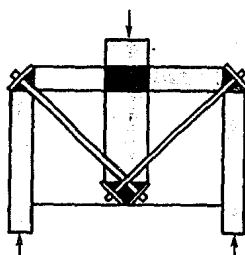
Si la viga es tan esbelta que las regiones de los abanicos de compresión en la carga y en apoyo no se traslapan, no existirán puntales mayores de compresión. En su lugar habrá una zona de compresión. En este caso, el ángulo de inclinación  $\theta$ , se determinará usando las ecs. 5.11 y 5.12, pero limitando tal que

$$25^\circ \leq \theta \leq 65^\circ$$

Una vez establecida la geometría de la armadura, se estimarán las fuerzas en los miembros. En muchos casos, las armaduras parecerán indeterminadas. Tales armaduras se podrán resolver fácilmente, suponiendo que los estribos y el refuerzo longitudinal fluyen cuando se alcanza la carga (momento) máxima. Este enfoque es el que se considera implícitamente en las normas del ACI para una viga normal esbelta. De la fuerza en cada miembro, se puede determinar la sección requerida para soportar las fuerzas de compresión. Normalmente  $f_{ce} = 0.5 f'_c$  en vigas peraltadas (Tabla 5.1).



(a) Armadura correcta.



(b) Armadura incorrecta.

Fig. 5.16 Armadura correcta e incorrecta (Ref. 3)

Es conveniente dibujar la armadura propuesta a escala para reconocer los elementos (nudos) en las intersecciones de los miembros de la armadura. Es frecuente que después del dibujo, las pendientes de algunos puntales cambia y, por tanto, será necesario recalcular para la nueva geometría las fuerzas y secciones en los puntales, tensores y nudos. El proceso de dibujo y cálculo se hará hasta que la solución converja; generalmente se necesitan dos iteraciones. Finalmente, se seleccionará el refuerzo tal que la fuerza  $A_s f_y$  sea igual a, o mayor que, las fuerzas a tensión en cada estribo y tensor.

## **Capítulo 6**

### **El Modelo de los Puntales y Tensores**

#### **6.1 Introducción y Alcances**

El modelo de la armadura moderna es considerado por investigadores y diseñadores como la base más apropiada para diseñar miembros de concreto reforzado sujetos a flexión, cortante y torsión. Sin embargo, un diseño basado en el modelo de la armadura común considera solamente algunas partes de la estructura. Puesto que dicha teoría no es aplicable para regiones discontinuas estáticas y geométricas como lo son las regiones  $D$  (debido a una discontinuidad, la carga se transmite por medio de la acción de arco), es común que, en la práctica, sean usados los procedimientos basados en la experiencia.

El modelo estudiado en este capítulo es un método de diseño general (analogía de la armadura generalizada), de tal forma que considera todas las regiones de la estructura, con diferentes condiciones de carga estática. El método propuesto en este capítulo sirve para diseñar elementos para los que no existen procedimientos de diseño fundamentados en la mecánica.

El modelo lo forman los siguientes elementos:

1. Puntales
2. Tensores
3. Nudos

Las estructuras de concreto reforzado resisten las cargas a través de una serie de campos de esfuerzos a compresión (puntales), los cuales se distribuyen y se unen por medio de tensores. Los tensores pueden ser barras de refuerzo, campos de esfuerzos a tensión en el concreto o tendones para el caso de vigas presforzadas. En suma, el modelo de los puntales y tensores condensa los diferentes estados de esfuerzo en miembros sujetos a tensión y a compresión unidos por nudos.

El modelo de los puntales y tensores se desarrolla siguiendo la trayectoria de las fuerzas en la estructura. La estimación de las fuerzas internas se usa para

determinar el refuerzo, revisar los esfuerzos en el concreto y detallar el anclaje. Un buen diseño se obtiene cuando los miembros del modelo (puntales, tensores y nudos) son diseñados considerando condiciones de falla y los estados límite de servicio (anchos de grieta, deflexiones, etc), dentro de un criterio uniforme.

Una ventaja del método es que, permite un claro entendimiento del comportamiento de las estructuras de concreto (ya que se tienen que visualizar el flujo de fuerzas dentro de la estructura, lo que no hacen los métodos comunes). Normas basadas en este concepto podrían mejorar el diseño de las estructuras.

En este capítulo se hará una breve revisión del procedimiento de los puntales y tensores. El desarrollo de este modelo como herramienta para el diseño de elementos de concreto reforzado es reciente, y como una consecuencia, algunos aspectos no han sido totalmente desarrollados y ensayados.<sup>[18]</sup> Sin embargo, es recomendado para el diseño de algunas regiones para las cuales no existe un método de diseño establecido.

## **6.2 Regiones B y D de una Estructura**

Aquellas regiones de un elemento, en donde la hipótesis de Bernoulli<sup>[4]</sup> es válida (las secciones transversales son planas antes y después de someterse a flexión) son conocidas como *Regiones B* (donde *B* se refiere a la palabra en inglés viga o a Bernoulli). Su estado interno de esfuerzos se desarrolla de acuerdo a la acción de viga (secc. 2.4.4), y se deriva fácilmente de las fuerzas aplicadas en una sección dada (momentos flexionantes y torsionantes, fuerzas cortantes y axiales). Mientras el elemento no se agriete, estos esfuerzos son calculados a partir de las propiedades de la sección no agrietada (área transversal y momentos de inercia).<sup>[2]</sup> Cuando se excede la resistencia a tensión del concreto el elemento se agrieta, por lo tanto se sugiere aplicar el modelo de la armadura o alguna de sus variaciones.

Las regiones *B* (por ejemplo losas y bóvedas) son diseñadas sobre la base del modelo de la armadura. Cuando la distribución de esfuerzos es no lineal, ya sea por

una discontinuidad geométrica o estática (como las regiones cercanas a cargas concentradas, aberturas u otras discontinuidades, como se muestra en la Fig. 6.1) los métodos estándar mencionados para analizar las regiones  $B$  no son aplicables. Tales regiones son llamadas Regiones  $D$  (donde  $D$  se refiere a discontinuidad).

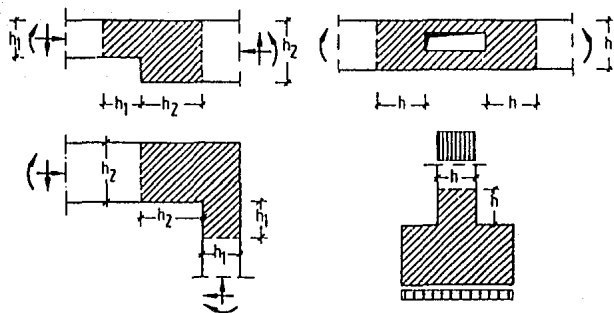
Mientras las regiones permanezcan sin agrietarse, pueden ser analizadas mediante la teoría común de vigas basadas en la ley de Hooke.<sup>[2]</sup> Sin embargo, si las secciones se agrietan, las aproximaciones de diseño solamente serán válidas para casos específicos, como en los apoyos de vigas, esquinas de estructuras, ménsulas y anclajes de miembros de concreto preesforzado. Estas aproximaciones usualmente llevan al cálculo de las cantidades requeridas de refuerzo, pero no incluyen un claro análisis del estado de esfuerzos en el elemento.

Generalmente, las regiones  $D$  han sido diseñadas empleando procedimientos complejos basados en otros métodos. El inadecuado manejo de las Regiones  $D$ , se ha basado en la experiencia o en criterios poco válidos, esto ha sido una de las principales razones del pobre desenvolvimiento e inclusive de la falla de algunas estructuras. Es lógico, entonces, que una metodología apropiada para diseño deberá considerar sin contradicciones a las Regiones  $B$  y  $D$ .

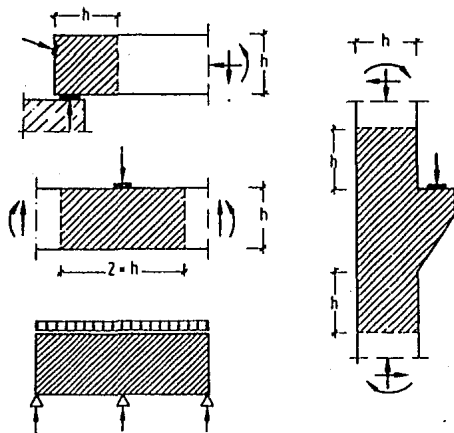
Si, en los métodos de diseño de las regiones  $B$  existen complicaciones, es de esperarse que en regiones más complejas (regiones  $D$ ), se necesite una simplificación aunque se pierda cierto grado de precisión, por lo tanto es preferible un método simplificado para el diseño de las regiones  $D$ . El concepto más aceptado es el modelo de los puntales y tensores. Este método estudia a las regiones  $B$  con el modelo de la armadura como un caso especial del modelo de los puntales y tensores. Usando la aproximación del modelo de los puntales y tensores, es conveniente primero, subdividir a la estructura en regiones  $B$  y  $D$ . Una vez resuelto el modelo de la armadura y el procedimiento de diseño para las regiones  $B$ , quedaría por desarrollar el modelo de los puntales y tensores para las regiones  $D$ , para luego ser agregadas.

El gradiente y la trayectoria de esfuerzos en las regiones  $B$  son muy suaves comparándolos con los patrones de esfuerzos que se dan en las regiones  $D$ , como se aprecia en la Fig. 6.2. En las regiones  $D$ , las intensidades de los esfuerzos decrecen





(a) Discontinuidades geométricas.



(b) Discontinuidades estéticas y geométricas.

Fig. 6.1 Regiones D (Ref. 24)

rápida a medida que se incrementa la distancia desde el origen de la concentración de los esfuerzos. Este comportamiento es el que permite la identificación de las regiones *B* y *D* en una estructura.

Para encontrar de una manera aproximada las líneas divisorias entre las regiones *B* y *D* se propone el siguiente procedimiento que se explica gráficamente con los ejemplos mostrados en la Fig. 6.3.

1. Reemplazar la estructura real (*a*) por una estructura ficticia (*b*) la cual está cargada de forma que cumpla con la hipótesis de Bernoulli y estén en equilibrio las fuerzas de la sección. De este modo, (*b*) se forma de una o varias regiones *B*. Es común violar las condiciones de frontera.

2. Seleccionar un estado de esfuerzos en equilibrio (*c*) el cual, se superpondrá sobre (*b*), satisfaciendo las condiciones límite de frontera de (*a*).

3. Aplicando el Principio de Saint Venant<sup>1</sup> a la figura (*c*), se encuentra la distancia donde los esfuerzos son casi uniformes, por lo tanto el valor de los esfuerzos es igual al valor promedio  $P/A$ . Esta distancia define el intervalo de las regiones *D* (*d*).

Se debe mencionar que los miembros de concreto agrietados tienen diferentes rigideces en diferentes direcciones. Esta situación puede influir en la extensión de las regiones *D* pero se desprecia ya que el principio de Saint Venant<sup>12</sup> no es preciso y las líneas divisorias entre las regiones *B* y *D* propuestas aquí, solamente sirven como una ayuda en el desarrollo de los modelos de los puntales y tensores. La subdivisión de la estructura en regiones *B* y *D* es de considerable valor para comprender el flujo de fuerzas internas en la estructura. También demuestra que, la simple regla  $l/h$  (donde  $l$  es el claro entre apoyos y  $h$  es el peralte total de la viga) usada para clasificar vigas, vigas peraltadas, ménsulas (cortas, largas, altas) y otros casos especiales es incorrecta.

---

<sup>1</sup> A una distancia (paralela a la carga aplicada) igual o mayor que el ancho del elemento, la distribución de esfuerzos a través de una sección dada es la misma. Es decir, excepto en la inmediata vecindad de los puntos donde se aplica una carga, la distribución de esfuerzos puede suponerse independiente de la forma como se aplican las cargas.

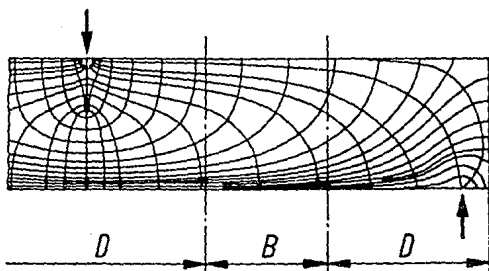
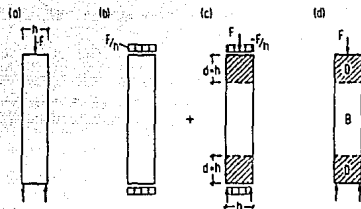
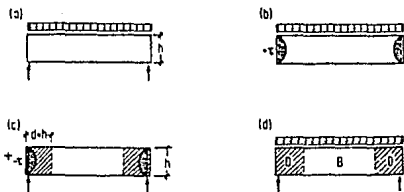


Fig. 6.2 Trayectorias de esfuerzos en regiones B-D (Ref. 24)

(1) Columna.



(2) Viga.



(3) Viga con discontinuidad geométrica.

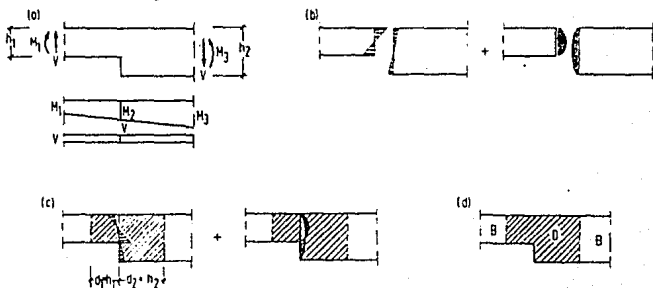


Fig. 6.3 Subdivisiones de las estructuras en regiones B y D, usando el principio de Saint Vénant (Ref. 24)

Para una clasificación apropiada se debe considerar tanto la geometría como las cargas, tal como se muestra en las Figs. 6.4 y 6.5. Si el estado de los esfuerzos en la estructura no cumple con la Hipótesis de Bernoulli, como en el caso de vigas con perforaciones o cargas concentradas, es recomendable dividir a la estructura en diferentes regiones, y diseñarlas por separado. De manera similar, patrones de esfuerzo en elementos de tres dimensiones pueden ser analizados en regiones planas. Por lo tanto, en general, solamente se necesitará considerar modelos de dos dimensiones. Sin embargo, la interacción de los modelos en diferentes secciones debe ser tomado, considerando las condiciones de frontera apropiadas.

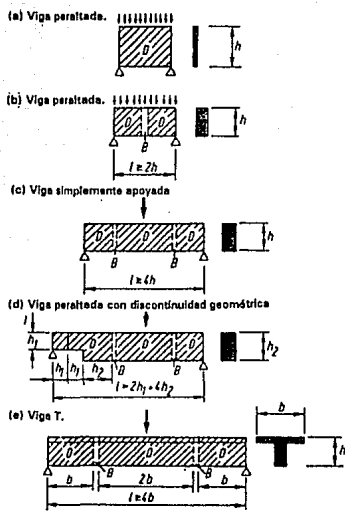


Fig. 6.4 Identificación de regiones B y D (Ref. 24)

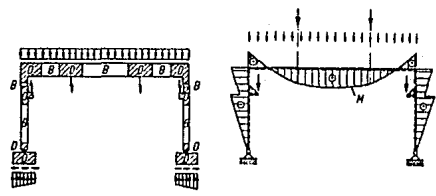


Fig. 6.5 Estructura dividida en regiones B y D (Ref. 24)

### **6.3 Procedimiento General de Diseño para el Modelo de los Puntales y Tensores**

Para el diseño de una estructura mediante el modelo de los puntales y tensores, es recomendable seguir los siguientes pasos:

1. Estimar las fuerzas y dimensiones de la sección, y analizar la estructura para determinar sus reacciones (ver Tabla 6.2).
2. Dividir la estructura en regiones B y D (ver secc. 6.2) y obtener las dimensiones y las fuerzas que actúan sobre cada área específica.
3. Seleccionar un modelo de los puntales y tensores que satisfaga las condiciones de equilibrio. El mejor modelo será aquel que tenga la menor cantidad y longitud de tensores (secc. 6.4.3).
4. Cálculo de las fuerzas internas en los puntales y tensores.
5. Dimensionar el refuerzo en los tensores (secc. 6.5.2).
6. Revisar los esfuerzos en el concreto (secc. 6.5.4).
7. Dimensionar los nudos (secc. 6.5.3).

El análisis de estructuras hiperestáticas deberá reflejar el comportamiento real de toda la estructura. La intención de esta sección (resumida en la Tabla 6.2) es el de dar una guía para el diseño de estructuras hiperestáticas. Parte de esta discusión se puede aplicar a estructuras isostáticas, especialmente cuando se trata de determinar condiciones de servicio como son las deformaciones.

Los métodos de análisis plástico como el método estático<sup>2</sup> son apropiados para determinar la capacidad de carga última, mientras los métodos elásticos son más apropiados para revisar las condiciones de servicio. De acuerdo con la Teoría de la Plasticidad, una estimación correcta de la carga última también se obtiene si el análisis plástico es reemplazado por un análisis elástico lineal o análisis elástico no lineal. La

---

<sup>2</sup> El método estático de análisis plástico, emplea el teorema del límite inferior, el cual es apropiado para el análisis de vigas continuas y marcos en donde el número de reacciones redundantes es uno o dos. El objetivo de este método es el de encontrar un diagrama de momento donde la condición  $M \leq M_p$  no se viola (Ref. 15).

experiencia ha mostrado que el diseño de estructuras agrietadas de concreto es conservadora, si se usa un método de análisis elástico lineal para determinar las fuerzas internas. Por el contrario, la distribución de esfuerzos en la sección derivados de métodos plásticos puede ser usado con propósitos simplificativos (para revisar las condiciones de servicio), si el diseño estructural (arreglo del refuerzo) está orientado de acuerdo a la Teoría de la Elasticidad, pero de manera similar, también resultaría un procedimiento conservador.

Una vez hecho el análisis estructural apropiado, se procederá a dividir al elemento en regiones B y D (secc. 6.2).

Si la estructura está formada por regiones B, se representará por un sistema de fuerzas en equilibrio (Fig. 6.5). El análisis de estructuras (vigas, marcos, arcos) con comportamiento lineal resulta en reacciones en los apoyos y efectos sobre la sección: momentos flexionantes  $M$ , fuerzas normales  $N$ , fuerzas cortantes  $V$  y momentos torsionantes  $M$  (ver Tabla 6.1). Las regiones B pueden ser fácilmente dimensionadas utilizando el modelo de la armadura o usando manuales o normas de la práctica común. Una vez que se haya analizado la estructura y diseñado sus regiones B, las fuerzas obtenidas en los límites de las regiones B serán las mismas fuerzas para las regiones D.

Si la estructura está formada solamente por una región D (como una viga peraltada), el análisis de los esfuerzos en la sección por un sistema estático convencional es omitido. En estos casos, si no se tiene la suficiente experiencia desarrollando modelos o la estructura es demasiado complicada, se podrá emplear un análisis de elementos finitos lineal para visualizar las trayectorias de los esfuerzos elásticos, y así poder orientar los puntales y tensores en el modelo. Para estructuras con apoyos redundantes, las reacciones en los apoyos tienen que ser determinadas por un análisis completo antes de que se desarrolle un modelo de puntales y tensores. Solo en casos excepcionales se podrá aplicar un método de análisis de elementos finitos no lineal.



Tabla 6.1 Análisis enfocado a esfuerzos o fuerzas en puntales y tensores

Estructura		Constitución de la estructura	
		Regiones B y D	
Tipo de Análisis		Regiones B	Regiones D
Análisis completo de la estructura (tabla 6.2)		Propiedades de la sección M, N, V, M	Condiciones frontera
			Efectos en la sección
Análisis de esfuerzos o fuerzas internas en regiones específicas	Estado I (no agrietado)	Propiedades de la sección: A, J, J	Análisis elástico lineal (con redistribución de los esfuerzos límite)
	Estado II (agrietado)	Modelo de los puntales y tensores y/o análisis no lineal	
		Modelo de la armadura	

Tabla 6.2 Comportamiento estructural y métodos para el análisis de estructuras hiperestáticas

Estado límite	Comportamiento de la estructura	Método de análisis para la determinación de efectos en la sección y reacciones en apoyos	
		Recomendable	Aceptable
De servicio	Sin agrietamiento	Elástico lineal	-
	Agrietada, esfuerzos en el acero menores al de fluencia	No lineal	Elástico lineal (o plástico, si el diseño se orienta al comportamiento elástico)
De resistencia última	Muy agrietada, formación de articulaciones plásticas	Plástico limitando la rotación o elástico con redistribución	Elástico lineal o no lineal, o plástico con restricciones estructurales

Una vez que se tenga la estructura dividida por regiones, se procederá a desarrollar el modelo de los puntales y tensores, el cual deberá cumplir con los requerimientos del Teorema del Límite Inferior de la Teoría de la Plasticidad (ver secc. 6.4.1). Las fuerzas internas en los puntales y tensores se determinan mediante equilibrio. El refuerzo se dimensionará usando la fuerza en el tensor y se revisará que los esfuerzos en los puntales no sean mayores a la resistencia del concreto (secc. 6.5.4). Por último, se dimensionarán los nudos, considerando el ancho del puntal, la longitud de anclaje del refuerzo y la transferencia de fuerzas.

El diseño usando el modelo de los puntales y tensores es un proceso iterativo (ver secc. 6.5.1), ya que, varios de los pasos están interrelacionados (pasos 3 a 7). Así, la geometría del modelo y el arreglo del refuerzo se alteran para un anclaje, ancho del puntal y tensor, tamaño del nudo etc., específicos. Se recomienda dibujar el modelo a escala de modo que se visualicen las fuerzas para tener una mejor idea para su dimensionamiento.

## **6.4 Desarrollo del Modelo de los Puntales y Tensores**

### **6.4.1 Principios Básicos y Procedimiento de Diseño del Modelo**

El modelo de los puntales y tensores deberá cumplir con las siguientes suposiciones basados en el Límite Inferior de la Teoría de la Plasticidad:<sup>3</sup>

1. La falla se deberá a la formación de un mecanismo debido a la fluencia de uno o varios tensores.
2. El aplastamiento del concreto de los puntales no ocurrirá antes de la falla por fluencia del refuerzo.
3. Sólo se presentarán esfuerzos uniaxiales en los puntales y tensores.
4. Todas las cargas se aplicarán sobre los nudos. En el caso de cargas uniformemente distribuidas, el modelo se deberá de detallar de manera que represente

---

<sup>3</sup> La carga última se calcula a partir de las ecuaciones de equilibrio y es menor, o cuando mucho igual, a la carga que resiste la estructura (Ref. 21).

la distribución de carga.

5. El refuerzo se detallará de forma que se eviten fallas por adherencia.

Para el diseño de las regiones *B* y *D* sin agrietamiento, están permitidos los métodos comunes para evaluar los esfuerzos en el concreto y el acero (ver Tabla 6.1). Pero, en el caso de esfuerzos altos a compresión, la distribución lineal de esfuerzos debe ser modificada, reemplazando la Ley de Hooke<sup>4</sup> para los materiales por una ley no lineal (curva esfuerzo-deformación parabólica, etc).

Si los esfuerzos a tensión en una región, ya sea *B* o *D*, exceden la resistencia del concreto y producen agrietamiento, las regiones son diseñadas de acuerdo al siguiente procedimiento:

1. Se desarrolla el modelo de los puntales y de los tensores de acuerdo al análisis recomendado en la Tabla 6.1 (para secciones agrietadas, se recomienda un análisis de esfuerzos no lineal). Los puntales y los tensores condensan los campos de esfuerzo reales en líneas rectas que cambian de dirección en los nudos.

2. Se calculan las fuerzas en los puntales y tensores, las cuales deberán estar en equilibrio. Estas son fuerzas internas.

3. Se dimensionan los puntales, tensores y nudos para las fuerzas internas considerando la limitación del ancho de las grietas.

Este método ignora fallas producidas por inestabilidad, aplastamiento local y por la falla en el anclaje del nudo. Como el concreto solamente permite deformaciones plásticas limitadas, el sistema estructural interno (puntales y tensores) se debe escoger de tal forma que el límite de deformación (capacidad de rotación o articulación plástica) no sea excedido en ningún punto, antes de que la resistencia se alcance en el resto de la estructura.

---

<sup>4</sup> El esfuerzo  $\sigma$  es igual a la deformación del material  $\epsilon$  por una constante de proporcionalidad  $E$  (módulo de elasticidad), la cual es la pendiente del diagrama de esfuerzo-deformación en la región linealmente elástica (Ref. 2).

En regiones muy esforzadas (puntos donde se aplica o soporta una carga, regiones D), es decir en donde los esfuerzos se salen del intervalo elástico, la ductilidad se logra orientando los puntales y tensores del modelo de acuerdo a la distribución de esfuerzos elásticos.

En regiones menos esforzadas (por lo general regiones B), la dirección de los puntales se puede desviar considerablemente del patrón elástico sin afectar la ductilidad de la estructura. Los puntales, y por lo tanto el refuerzo, se detallarán de acuerdo a consideraciones prácticas.

La metodología de orientar los puntales y tensores de acuerdo a la distribución de esfuerzos elásticos, subestima la capacidad de carga última, pero tiene la ventaja de que el mismo modelo puede ser utilizado para revisar la carga última y las condiciones de servicio. Si por alguna razón, el propósito del diseño fuese encontrar la carga última, el modelo puede adaptarse, cambiando la orientación de los puntales y tensores, de manera que la resistencia de la estructura se incremente. Sin embargo, en este caso, se deberá considerar la capacidad de rotación inelástica (articulación plástica) del modelo (la optimización del modelo se discutirá en la sección 6.4.3).

La geometría del modelo, según la distribución de esfuerzos elásticos conduce a diseños del lado de la seguridad, porque la resistencia a tensión del concreto es solamente una pequeña porción de su resistencia a compresión. Casos como el de la Fig. 6.6, donde se muestran dos campos de esfuerzos en forma de prisma de acuerdo a la Teoría de la Plasticidad, pueden ser inseguros para concreto simple<sup>5</sup> (ya que ignora los esfuerzos transversales a tensión, debidos a la propagación de fuerzas en el concreto), aún cumpliéndose los dos requerimientos del límite inferior de la Teoría de la Plasticidad, es decir, equilibrio en todos los puntos de la sección y que los esfuerzos no excedan la resistencia del concreto,  $f'_c$ .

Las fuerzas a tensión transversales a la dirección de la carga pueden causar agrietamiento prematuro e inclusive la falla. Las zonas de esfuerzos a compresión en

---

<sup>5</sup> El concreto simple se refiere a las secciones de concreto sin refuerzo, pero que forman parte de una estructura de concreto reforzado.

forma de botella introducidos en la sección 6.5.2 eliminan situaciones similares, aún en modelos muy simples.

### Diseño de Regiones B

Para regiones *B* agrietadas, el procedimiento propuesto sería el modelo de la armadura como se muestra en la Fig. 6.7. El ángulo de inclinación de los puntales diagonales en la armadura será el mismo ángulo de las grietas diagonales debidas a los esfuerzos elásticos a tensión en el eje neutro. Una reducción en el ángulo de inclinación del puntal de entre  $10^\circ$  y  $15^\circ$ , y el uso estribos verticales para el refuerzo en el alma (para una resistencia del concreto y un porcentaje del refuerzo de los estribos normales) no causarían alteraciones en el comportamiento. En vigas presforzadas, el presfuerzo decrementa la inclinación de las grietas y por lo tanto de los puntales diagonales. El presfuerzo permite el ahorro de refuerzo transversal, puesto que las fuerzas a tensión adicionales aumentan la inclinación de los puntales.

La distancia  $z$  entre las cuerdas (ver Fig. 6.7 y Fig. 6.9), se determina mediante la hipótesis de Bernoulli (secciones planas) en los puntos donde el momento es máximo y el cortante es cero. A modo de simplificación se mantendrá constante la zona entre dos puntos donde el momento sea cero.

Para el diseño de regiones *B* que tengan secciones transversales en forma de T, I, doble T o cajón (Fig. 6.8), el alma se modelará de acuerdo al modelo de los puntales y tensores-propuesto para regiones *D*, el cual en la mayoría de los casos resulta en un modelo de la armadura con la inclinación de sus puntales igual a la inclinación de los esfuerzos principales a compresión (ángulo de inclinación de  $45^\circ$ ) de acuerdo con la Teoría de la Elasticidad.

En suma, el diseño de regiones *B*, sometidas a cortante, flexión o torsión, no es más que la correcta aplicación del modelo de la armadura y el análisis de sus fuerzas, la revisión de los esfuerzos a compresión en el concreto, y de los esfuerzos a tensión en el refuerzo.

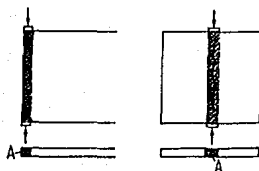


Fig. 6.6 Campos de esfuerzos prismáticos según la teoría de la plasticidad (Ref. 24)

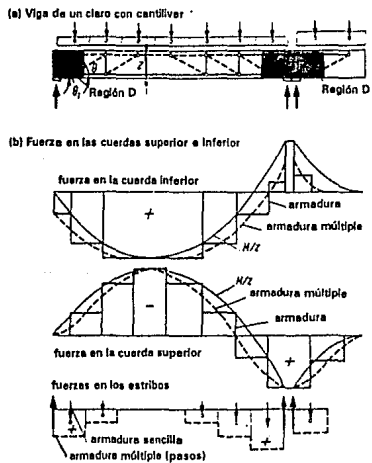


Fig. 6.7 Modelo de la armadura de una viga en cantiliver (Ref. 24)

### Diseño de Regiones D

Para las regiones  $D$  es necesario desarrollar un modelo de puntales y tensores para cada caso. Con la práctica, desarrollar un modelo para tales regiones será comparable a desarrollar un modelo para regiones B. Ambos procedimientos requieren de cierta experiencia y son de relevancia similar para las estructuras. Desarrollando el modelo de una región  $D$ , el trabajo se simplifica mucho, si los esfuerzos elásticos y las direcciones de los esfuerzos principales son accesibles como en el caso del ejemplo de la Fig. 6.9. Tal análisis elástico se facilita gracias a la extensa variedad de programas para computadora que existen. La dirección de los puntales puede entonces ser tomada de acuerdo con la dirección de los esfuerzos principales a compresión, o los puntales y tensores más importantes pueden ser localizados en el centro de gravedad de los diagramas de esfuerzos correspondientes,  $C$  y  $T$  (Fig. 6.9), usando el diagrama de esfuerzos  $\sigma_x$  obtenido.

Sin embargo, si no se tiene el tiempo para hacer un análisis elástico, es fácil desarrollar el modelo de los puntales y tensores usando el método de las *trayectorias de carga*.

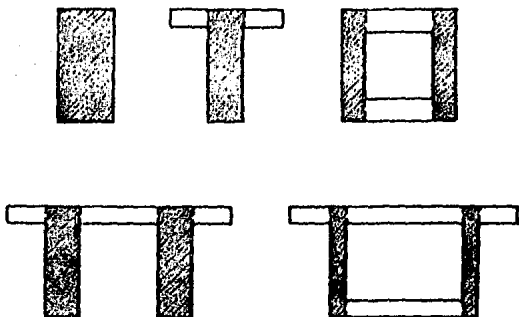


Fig. 6.8 Secciones transversales comunes para vigas (Ref. 24)

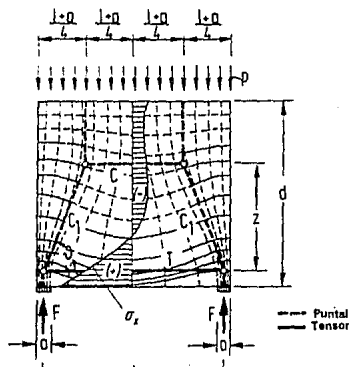


Fig. 6.9 Región D típica: trayectorias de esfuerzos, esfuerzos elásticos y modelo de los puntales y tendones (Ref. 24)



#### 6.4.2 Método de las Trayectorias de Carga

Primero, se debe estar seguro de que el equilibrio de la región  $D$  debe estar satisfecho, determinando todas las cargas y reacciones (fuerzas en el apoyo) que actúan sobre la región. En el límite adyacente a alguna región  $B$ , las cargas en la región  $D$  se toman de la región  $B$  diseñada, suponiendo, por ejemplo, una distribución lineal de esfuerzos  $p$ , como se muestra en la Fig. 6.10. Una vez que los esfuerzos en los límites de la sección se han calculado, el diagrama de esfuerzos se divide de tal forma que las cargas que obran en un lado de la estructura, se equilibran en el lado opuesto, considerando que las trayectorias de la carga que unen ambos lados no se cruzan. Las trayectorias de carga, empiezan y terminan en el centro de gravedad de los diagramas de esfuerzo correspondientes (Figs. 6.10 y 6.11a), tienen la misma dirección de las cargas aplicadas o de las reacciones, y tienden a tomar el camino más corto posible y que oponga la menor resistencia entre las fuerzas. Las curvas se agrupan cerca de las concentraciones de esfuerzos (reacciones en el apoyo o cargas).

En algunos casos, parte del diagrama de esfuerzos están asociadas a trayectorias que entran y salen de la estructura (trayectorias en forma de U como se ilustra en las Figs. 6.10 y 6.11a).

Hasta ahora, solamente ha sido considerado el equilibrio en la dirección de las cargas aplicadas. Después de dibujar las trayectorias de carga con curvas suaves y de reemplazarlas por polígonos, se deberán agregar puntales y tensores para mantener el equilibrio transversal que actúa entre los nudos, incluyendo aquellos en forma de U. Los tensores se colocan generalmente paralelos a la superficie del concreto. Se deben observar de anclaje.

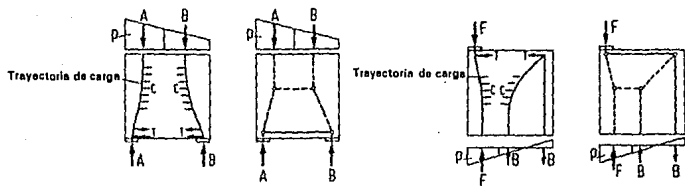


Fig. 6.10 Trayectorias de carga y modelo de los puntales y tendones (Ref. 24)

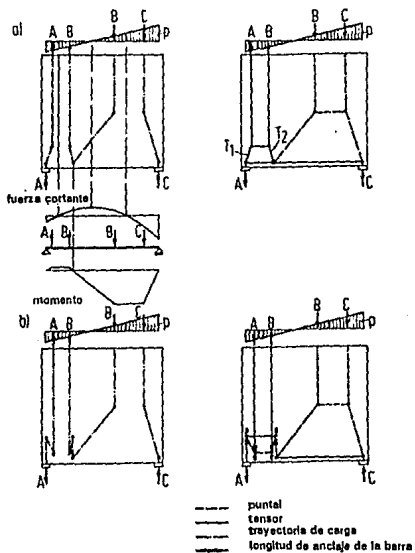


Fig. 6.11 Modelos de la armadura para el mismo caso (Ref. 24)

Para casos muy complicados, el modelo se desarrollará combinando un análisis elástico con elementos finitos con el método de las trayectorias de carga.<sup>[24]</sup> Este procedimiento se muestra en la Fig. 6.12. En esta figura, los puntales y tensores verticales se encontraron mediante el método de la trayectoria de carga, como se explicó en los ejemplos anteriores: primero, la estructura se dividió en regiones *B* y *D*. La parte inferior de la región *D*, actúa bajo los esfuerzos *p*, como se derivaron para la región *B* adyacente.

Estos esfuerzos se resuelven dentro de cuatro componentes (Fig. 6.12): las dos fuerzas a compresión  $C_3 + C_4 = F$ , el cual deja dos fuerzas iguales  $T_2$  y  $C_2$ . La fuerza  $C_3$  y  $C_4$  son las componentes, respectivamente, del lado izquierdo y del lado derecho del plano vertical, el cual se determina por la carga  $F$ . Por transferencia lateral, los componentes de la carga dentro de las posiciones dadas, generan esfuerzos transversales. Los puntales y los tensores horizontales correspondientes, se localizan en el centro de gravedad del diagrama de esfuerzos en secciones típicas, las cuales se derivan de un análisis elástico (Fig. 6.12b). Sus nudos con los puntales verticales también determinan la posición de los puntales diagonales (ver Fig. 6.12c).

El ejemplo de la Fig. 6.13 muestra que el tensor  $T_3$  de la Fig. 6.12c desaparece, si la carga  $F$  se mueve hacia la esquina de la región *D*.

### **6.4.3 Optimización del Modelo**

En la Fig. 6.11 se ha resuelto un caso de carga con dos diferentes modelos. La parte izquierda de los modelos de las Figs. 6.11a y 6.11b, muestra como se desarrollaron por medio de la trayectoria de carga y como se relacionan a los efectos de la sección de la región *D*. Los tensores  $T_1$  y  $T_2$  en la Fig. 6.11a requerirán refuerzo inclinado. Este tipo de refuerzo no es recomendable, ya que su colocación en la construcción es difícil. Por eso, se ha escogido el arreglo de los tensores de la Fig. 6.11b el cual se puede satisfacer mediante refuerzo ortogonal con barras paralelas a los lados. El refuerzo ortogonal es más común y recomendable en la práctica.

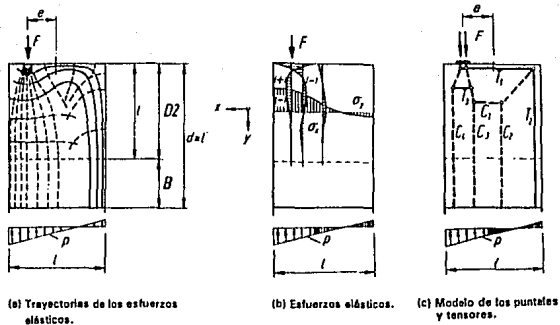


Fig. 6.12 Región D (Ref. 24)

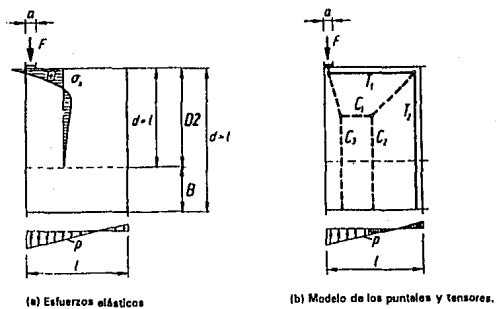


Fig. 6.13 Caso especial de la región D de la Fig. 6.12 (Ref. 24)

Durante el desarrollo del modelo pueden surgir dudas cuando se tenga que escoger modelo. Para seleccionarlo se debe admitir que las cargas tomarán las trayectorias donde se desarrollen las menores fuerzas y deformaciones. Puesto que los tensores de refuerzo son mucho más deformables que los puntales de concreto, el modelo con la menor cantidad y la menor longitud de tensores se considerará como el mejor. Este simple criterio de optimización de un modelo puede ser formulado como sigue

$$\sum F_i l_i \epsilon_{mi} = \text{mínimo} \quad (6.1)$$

donde

$F_i$  = fuerza en el puntal o en tensor,

$l_i$  = long. del miembro  $i$ ,

$\epsilon_{mi}$  = deformación media del miembro  $i$ .

Esta ecuación se deriva del principio de energía de deformación mínima para comportamiento elástico lineal de los puntales y de los tensores después del agrietamiento. La contribución de los puntales de concreto generalmente se omite porque sus deformaciones son generalmente mucho más pequeñas que aquellas de los tensores de acero. Este criterio también ayuda a eliminar los modelos poco deseables (Fig. 6.14). Sin embargo, es claro que no hay soluciones únicas u óptimas.

El reemplazo de un grupo de curvas continuas suaves (distribución de esfuerzos) por polígonos individuales (puntales y tensores) es una aproximación, y deja un amplio espacio para decisiones subjetivas. Además, variables como el tamaño de la región o el arreglo del refuerzo son siempre diferentes. Para un ingeniero con experiencia en el modelado de puntales y tensores siempre se encontrará una solución satisfactoria.

Si no se tiene experiencia en el desarrollo de modelos, se puede tomar como una guía sencilla para la selección del modelo será más adecuado aquel que tenga la menor cantidad y la menor longitud de tensores.

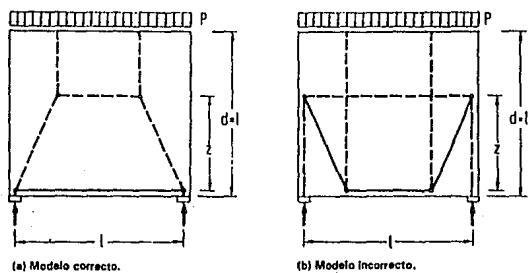


Fig. 6.14 Modelos correcto e incorrecto (Ref. 24)

#### 6.4.4 Valor Pedagógico del Modelo

Cualquiera que invierta tiempo desarrollando modelos de puntales y tensores observa que algunos tipos de regiones  $D$  se repiten invariablemente en estructuras diferentes. Las dos regiones  $D$  más frecuentes, las cuales han sido constantemente mencionadas como si fuese una, ya que tienen las mismas características en su distribución de esfuerzos a lo largo de su línea central, se presentan en la Fig. 6.15 con algunas de sus variaciones.

En la Fig. 6.16 se muestran las aplicaciones del primer tipo de modelo (Fig. 6.15a) para cuatro diferentes estructuras: la distribución de esfuerzos en la cubierta de un puente atirantado (Fig. 6.16a); un muro con grandes perforaciones (Fig. 6.16b); una viga cajón con zonas de anclaje de postensado (Fig. 6.16c) y un detalle de fuerzas internas en una viga rectangular sometida a flexión, la cual muestra, que los estribos necesitan estar estrechamente espaciados (Fig. 6.16d). En estos cuatro casos el patrón de las fuerzas internas es básicamente el mismo.

Por otra parte, no es claro si para los mismos casos se deben dar distintas soluciones, solamente porque aparecen bajo diferentes circunstancias. Por ejemplo, en la Fig. 6.17 se presenta una viga peraltada con tres apoyos y el extremo de una viga o una losa anclada con tres tendones de presfuerzo. Ambos casos serían idénticos, si las reacciones de la viga peraltada tuviesen la misma magnitud que las fuerzas de presfuerzo en la losa. Por consiguiente, el modelo no está considerando el pandeo en un caso o el agrietamiento diagonal en el otro caso, sino simplemente tensiones y compresiones. Por lo tanto, reconocer las características comunes de las estructuras es de gran ayuda para el diseño de un elemento por el método de puntales y tensores.

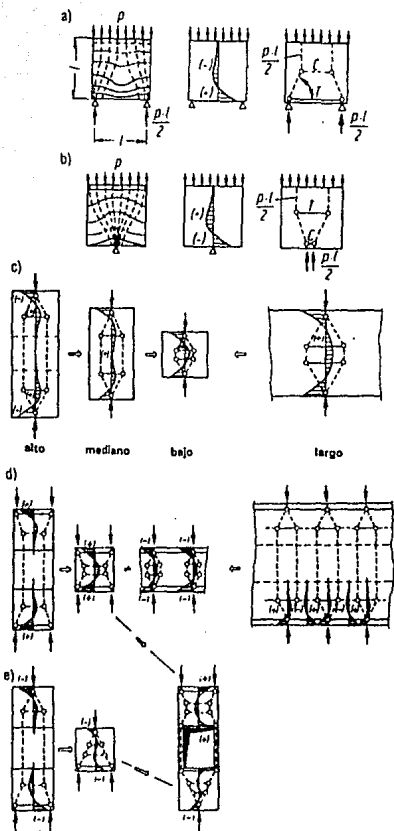


Fig. 6.15 Modelos de los puntales y tensores más comunes (Ref. 24)



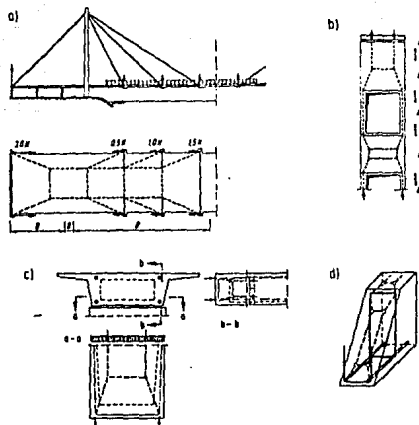


Fig. 6.16 Diferentes modelos para una región D (Ref. 24)

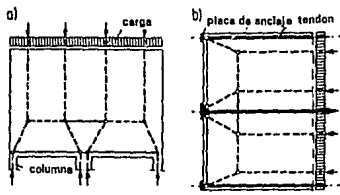


Fig. 6.17 Comparación entre los modelos de una viga peraltada y una viga prestozada (Ref. 24)

## **6.5 Dimensionamiento de Puntales, Tensores y Nudos**

### **6.5.1 Principios Generales**

En la Fig. 6.18 se muestran ejemplos típicos de modelos de puntales y tensores, las correspondientes trayectorias de esfuerzos y el arreglo del refuerzo. Las regiones del nudo se indican con sombra. Si se observan estos ejemplos, y los de pasadas secciones, se obtienen las siguientes conclusiones:

1. Dimensionar no solamente significa reforzar los puntales y tensores individuales para las fuerzas a las que están sometidos, sino también asegurar la transferencia de carga entre ellos, es decir, revisar los nudos.

2. Existe una estrecha relación entre el detallado de los nudos, la resistencia de los puntales apoyados en los nudos y la resistencia de los tensores anclados en los nudos, porque el detalle del nudo el flujo de fuerzas. Por eso, es necesario revisar si el modelo inicialmente escogido aún es válido, después de detallar, o si necesita de una corrección. De este modo, el dimensionamiento de los elementos de un modelo es un proceso iterativo.

Básicamente, existen tres tipos de puntales y tensores por dimensionar:

**Cc** : puntales de concreto a compresión,

**Tc** : tensores de concreto a tensión sin refuerzo,

**Ts** : tensores (refuerzo de acero de bajo carbono o acero de preesfuerzo).

### **6.5.2 Puntales y Tensores**

Mientras que los tensores *Ts*, son esencialmente rectos o elementos entre dos nudos, los puntales *Cc* y los tensores de concreto *Tc* son campos de esfuerzos de dos o tres dimensiones, y tienden a distribuirse entre dos nudos adyacentes. Esta distribución, mostrada por el abultamiento de los puntales en las Figs. 6.18 y 6.19a, puede resultar en esfuerzos de tensión transversal además de los esfuerzos de compresión los cuales deben ser considerados dentro del criterio de falla de los

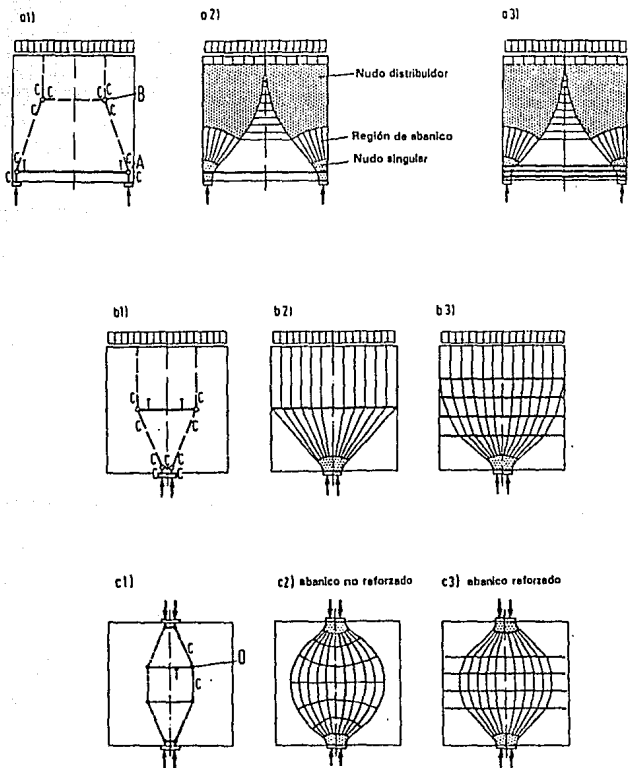


Fig. 6.18 Ejemplos de: (1) modelos de puntales y tensores, (2) campos de esfuerzos, (3) nudos y refuerzo correspondiente (al se proporción) (Ref. 24)

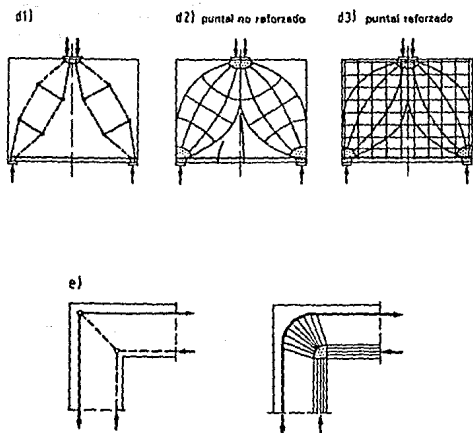


Fig. 6.18 (cont.) Ejemplos de: (1) modelos de puntales y tensores, (2) campos de esfuerzos, (3) nudos y refuerzo correspondiente (si se proporciona) (Ref. 24)

puntales  $C_c$  y los tensores  $T_c$ , o aplicando de nuevo el modelo de los puntales y tensores (Figs. 6.18c y 6.18d). Ambas alternativas llevan al mismo resultado.

Los tensores son los miembros a tensión del modelo de los puntales y tensores. Las fuerzas en los tensores son resistidos por el refuerzo, el cual se tendrá que extender a lo largo del tensor y deberá anclarse debidamente en el nudo. La cantidad de refuerzo se determinará por la fuerza en el tensor y se proporcionará de manera que asegure un comportamiento dúctil (el refuerzo fluirá de modo que se forme un mecanismo antes de que se aplaste el concreto).

Los miembros a compresión en el modelo son llamados puntales. Los puntales en el modelo representan los campos de esfuerzos en el concreto.

Por definición, los cambios de dirección de las fuerzas están concentradas en los nudos, los puntales son rectos. Esto es, una idealización de la realidad. En estructuras muy esforzadas algunas fuerzas a tensión pueden no ser consideradas adecuadamente, por tanto las longitudes de los puntales se deben reducir, ya sea refinando el modelo o distribuyendo el nudo sobre una longitud substancial del puntal (por ejemplo Figs. 6.18a2 y 6.18b2).

Para cubrir todos los casos de zonas de compresión incluyendo aquellos de las regiones  $B$ , las configuraciones típicas de puntales son las siguientes:

- a. *abanico* (ver Fig. 6.19a).
- b. *botella* (ver Fig. 6.19b).
- c. *prisma* o campo de esfuerzos paralelos (ver Fig. 6.19c), donde  $\alpha = 0$  y  $b/a = 1$ .

Para las tres configuraciones dadas, su estado de esfuerzos  $\sigma \leq f^*_{cd}$ , donde  $f^*_{cd}$  es un valor simplificado de la resistencia a compresión del concreto, el cual se propone para dimensionar los puntales y nudos (ver secc. 6.5.4)

El puntal en forma de prisma es la idealización más simple del campo de esfuerzos a compresión. Su geometría es uniforme y su estado de esfuerzos  $\sigma$ , es constante a lo largo de su longitud. Los prismas son generalmente utilizados para modelar campos de esfuerzos donde las trayectorias de sus esfuerzos son paralelas y los esfuerzos son constantes.

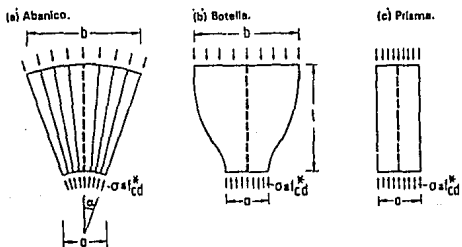
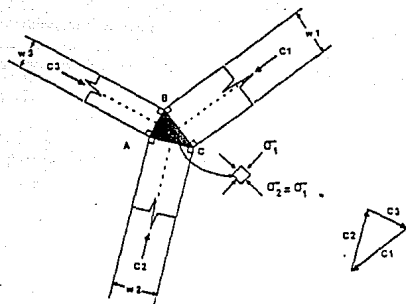
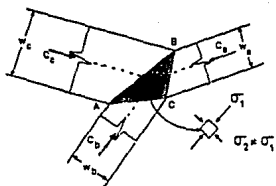


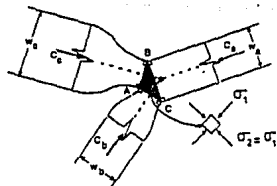
Fig. 6.19 Campos de esfuerzos a compresión (puntales) básicos (Ref. 24)



(a) Nudos CCC

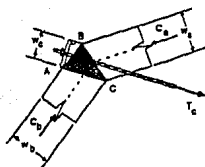


(a.1) Nudo CCC con esfuerzos de diferentes magnitudes



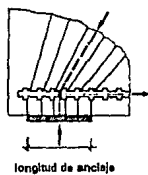
(a.2) Nudo CCC diseñado para ser hidrostático

Fig. 6.20 Ejemplos de los tipos de nudo básicos (Ref. 24)



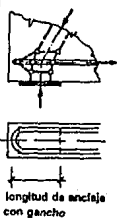
(b) Nudos CCT

(b.1)



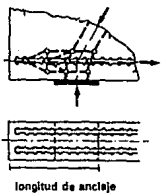
longitud de anclaje

(b.2)



longitud de anclaje  
con gancho

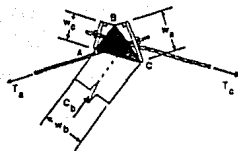
(b.3)



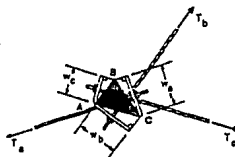
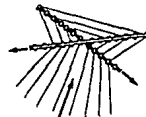
longitud de anclaje

Fig. 6.20 (cont.) Ejemplos de los tipos de nudo básicos (Ref. 24)





(c) Nudos CTT



(d) Nudos TTT



Fig. 6.20 (cont.) Ejemplos de los tipos de nudo básicos (Ref. 24)

La forma de abanico se utiliza normalmente en los puntos donde se aplica una carga concentrada o en las reacciones (Fig. 6.18a2). La región de abanico está formada por una serie de puntales trapezoidales los cuales distribuyen fuerza a los demás estribos (ver secc. 5.3).

Cuando los campos de esfuerzos se estrechan cerca de los puntos donde se aplican las cargas concentradas o donde están las reacciones (Figs. 6.18a2, 6.18b2, 6.18c2 y 6.18d2), se tendrá que modular usando los puntales en forma de botella. En este tipo de puntal, el incremento de su ancho induce esfuerzos a tensión normales al eje longitudinal del puntal. Estos esfuerzos a tensión tendrán que ser resistidos por refuerzo transversal o por la resistencia a tensión del concreto de manera que produzca agrietamiento (Figs. 6.18b3, 6.18c3 y 6.18d3).

### 6.5.3 Nudos

Los nudos unen los elementos del modelo. Se derivan como los puntos donde se unen tres o más puntales o tensores, los cuales representan campos de esfuerzos rectos o curvos, o barras de refuerzo. Los nudos en una estructura implican un cambio brusco en la dirección de las fuerzas. Estos cambios de dirección no son puntuales sino ocurren sobre una longitud y un ancho.

La importancia de los nudos en el diseño de un modelo es muy alta por dos razones: primero, los esfuerzos en el concreto de las zonas nodales deben ser limitados para permitir la adecuada transferencia de fuerzas, y segundo, el dimensionamiento de los nudos es importante para obtener un adecuado anclaje del refuerzo.

Los nudos se clasifican de acuerdo al número de puntales y/o tensores que se intersecan. Esencialmente hay cuatro tipos de nudos dependiendo de la combinación entre puntales  $C$  y tensores  $T$  (Fig. 6.20):

**Nudo CCC:** nudo donde se intersecan tres puntales a compresión,

**Nudo CCT:** nudo donde coinciden dos puntales a compresión y un tensor,

**Nudo CTT:** nudo donde se intersecan un puntal y dos tensores, y

**Nudo TTT:** nudo donde se unen tres tensores.

El principio permanece igual si más de tres puntales y tensores se encuentran.

De acuerdo a su tamaño se tienen dos tipos de nudos. Si un puntal o tensor representa un campo de esfuerzos concentrados, el cambio de dirección de las fuerzas tiende a ser también concentrado. En este tipo de nudos los puntales y tensores se concentran en una área relativamente pequeña. Para este caso los nudos son llamados *nudos singulares (o concentrados)* y se ejemplifica en el nudo A de la Fig. 6.18a1. Por el contrario, para campos de esfuerzos ensanchados unidos entre sí o con tensores o puntales a tensión (los cuales consisten en muchas barras de refuerzo distribuidas estrechamente), la desviación de las fuerzas puede distribuirse. En este caso se les llama *nudos distribuidores (o continuos)* como se muestran en el nudo B de la Fig. 6.18a1.

#### Nudos Singulares

Ya que los nudos singulares son cuellos de botella de los esfuerzos, se puede considerar como regla general a toda región *D* libre de este comportamiento, siempre que el esfuerzo bajo la placa más cargada (placa de apoyo o placa de anclaje) sea menor que 0.6 *fc'd* (para casos especiales 0.4 *fc'd*), si las fuerzas a tensión son resistidas por el refuerzo y, además, se tenga la suficiente longitud de desarrollo para anclar el refuerzo. Algunos refinamientos se discutirán en los siguientes párrafos.

Los nudos singulares se originan principalmente de cargas concentradas o de las reacciones de los apoyos, y de las fuerzas concentradas introducidas por el refuerzo a través de placas de anclaje, adherencia, o de la presión radial producida en ganchos de la varilla. Además, discontinuidades geométricas (como esquinas de vigas) pueden causar concentraciones de esfuerzos que son representados por medio de un nudo singular.

Si bien existen muchas formas para detallar nudos, en la mayoría de los casos las fuerzas se equilibran dentro del nudo a través de esfuerzos directos de compresión en el concreto. Los tensores pueden ser convertidos en fuerzas de compresión por medio de placas o soluciones similares, de modo que actúan por atrás del nudo (Figs.

6.20b1, 6.20b2 y 6.20b3). La fuerza de adherencia será transferida por medio de esfuerzos de compresión en el concreto, los cuales reaccionan con las corrugaciones del acero de refuerzo (Fig. 6.20b1 y 6.20b3) o por las presiones radiales dentro de las barras dobladas en U (Fig. 6.20b2).

Aún en estos casos, el flujo de fuerzas que actúa en el refuerzo, puede ser visualizado por un modelo de puntales y tensores con nudos singulares en las costillas de las varillas. Si estos modelos requieren tensores de concreto, se deberán valorar por el diseñador. Sin embargo, para propósitos prácticos, las longitudes de anclaje y de traslape recomendados por los códigos podrán ser usados.

En suma, el dimensionamiento de nudos singulares comprende:

1. Proponer la geometría del nudo considerando las fuerzas aplicadas.

Para los nudos *CCC* se puede asumir que las caras del nudo sean perpendiculares al eje de cada puntal, y que el estado de esfuerzos dentro del nudo es un plano hidrostático, esto es que, la geometría del nudo se dimensiona de manera que los esfuerzos en las caras del nudo sean iguales. En este caso particular, la relación geométrica es  $w_1:w_2:w_3 = C_1:C_2:C_3$  (Fig. 6.20a), la cual se puede usar para dimensionar la longitud del apoyo o el ancho de la placa de apoyo.

Puesto que en un nudo hidrostático las fuerzas en los puntales son proporcionales a su ancho y las caras del nudo son perpendiculares al eje de cada puntal, habrá algunas situaciones en que la geometría del modelo no permita la compensación de los esfuerzos en los bordes del nudo (Fig. 6.20a1). Este estado de esfuerzos se podrá tolerar si la razón entre los esfuerzos de dos caras cualesquiera es menor a 2.0. El nudo mostrado en la Fig. 6.20a1 se puede dimensionar para que sus esfuerzos sean hidrostáticos como se muestra en la Fig. 6.20a2, esto se hace, cambiando el ancho de los puntales donde se intersecan con el nudo (el puntal prismático ancho, se cambió por un puntal en forma de botella). Los puntales en forma de botella se usan por lo general, cuando uno de los lados del nudo tiene un tamaño establecido, como en el caso del nudo en un apoyo.

Los nudos *TTT* se dimensionarán igual que los nudos *CCC*, esto es posible, si

se considera que los tensores se anclarán detrás del nudo, de manera que el nudo esté a compresión.

Cuando se diseña un nudo singular CCT, el diseñador debe considerar la trayectoria de carga y la zona a compresión correspondiente, pues si ésta se extiende mucho desde el origen de la carga concentrada, es decir, que se aproxime a la placa de anclaje o la placa de apoyo (Figs. 6.9 y 6.10), los puntales y placas se podrán detallar conjuntamente.

2. Verificar que los esfuerzos del concreto estén dentro de los límites establecidos por los criterios de falla del concreto (secc. 6.5.4).

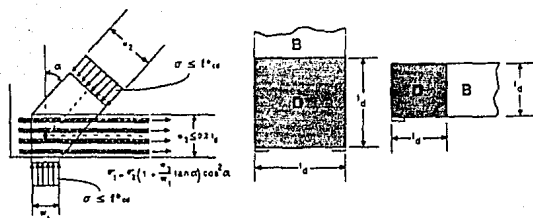
Esta condición se cumplirá para todo el nudo, siempre y cuando los esfuerzos en los bordes del nudo no excedan los límites de resistencia y el anclaje del refuerzo en el nudo esté libre (placa de anclaje). Si el refuerzo está anclado en la región del nudo, las posibles grietas aparecerán en esa zona, por lo que la resistencia del concreto se deberá tomar como la resistencia del concreto agrietado.

Para nudos CCT con refuerzo anclado por adherencia, como los mostrados en la Fig. 6.21, se revisarán los esfuerzos de los puntales adyacentes, relacionándolos entre sí (esto es, el esfuerzo del concreto  $\sigma_1$  de un puntal, con respecto al esfuerzo  $\sigma_2$  del puntal contiguo). Por eso, solamente se analizarán los esfuerzos en un puntal.

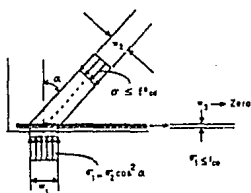
MacGregor<sup>13,21</sup> señala que la posición del tensor afecta el tamaño del nudo y del tensor (Fig. 6.22), si el tensor está cerca del lecho inferior de la viga, el tamaño del nudo y del tensor se reducirá, por otro lado, mientras el puntal se aleje del lecho inferior, el tamaño del nudo y tensor aumentará.

Por otra parte, el uso de varios lechos de refuerzo incrementa el ancho del tensor, como consecuencia el área del nudo aumenta, y sus esfuerzos se reducen (Fig. 6.23).

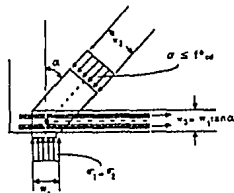
Al igual que en los nudos con varios lechos de refuerzo, cuando el área del nudo aumenta, los esfuerzos en el puntal y en el nudo disminuirán, pero de igual forma, si el área se reduce, los esfuerzos aumentarán y como consecuencia, la resistencia del elemento será menor. En general, el ancho de los puntales es importante para el dimensionamiento del nudo. En algunos nudos singulares CCT (comunes en los



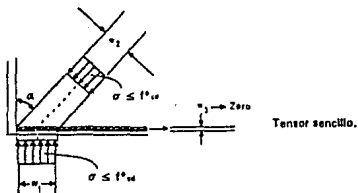
(a) Tensor en varios lechos.



(b) Tensor sencillo.



(c) Caso especial.



Tensor sencillo.

Fig. 6.21 Dimensionamiento de un nudo singular CCT, con diferentes arreglos de refuerzo (Ref. 24)

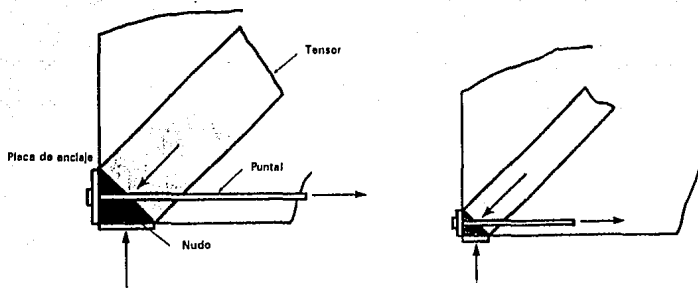


Fig. 6.22 Efecto de la posición del tensor en el tamaño del nudo y el punta (Ref. 3)

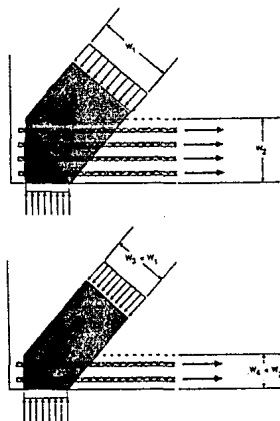


Fig. 6.23 Efectos de la reducción en el ancho del tensor (Ref. 16)

apoyos de vigas), el dimensionamiento está en función del ancho del puntal. Cuando se tiene el refuerzo cerca del lecho inferior de la viga, Schlaich, Schäfer y Jennewein<sup>[24]</sup> proponen que el ancho del tensor sea igual al doble de la distancia que hay entre el centroide del refuerzo y el borde inferior de la viga. Por otra parte, Marti<sup>[19]</sup> define el ancho del tensor  $\omega h$  (ver Fig. 6.24) como

$$\omega h = \frac{A_s f_y}{t (\eta f_c)} \quad (6.2)$$

donde

$\omega$  = razón del refuerzo mecánico (adimensional),

$h$  = ancho de la viga,

$A_s$  = área del tensor,

$t$  = ancho de la viga,

$\eta$  = factor de eficiencia de la resistencia del concreto (ver secc. 5.4), y

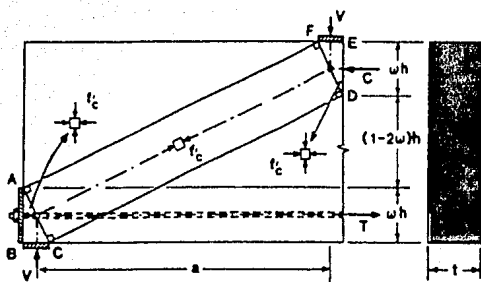
$f_c$  = resistencia del cilindro de concreto a compresión.

Otras sugerencias propuestas por Schlaich y colaboradores<sup>[24]</sup> para el dimensionamiento de nudos CCT, depende de factores como la magnitud de los campos de esfuerzos y la cantidad de refuerzo. En la Fig. 6.21a el ancho del tensor se puede tomar no mayor al 20% de la longitud de total de la región D ( $l_D$ ), siempre y cuando el esfuerzo  $\sigma_2$  sea menor que el esfuerzo adyacente  $\sigma_1$  y se tengan varios lechos de refuerzo. En el caso opuesto, cuando  $\sigma_2$  sea mayor que  $\sigma_1$  y solamente se tenga un lecho de refuerzo (Fig. 6.21b y 6.21d), el ancho del tensor será virtualmente cero.

3. Asegurar el anclaje de los tensores en el nudo.

El anclaje se logra si se desarrolla la fuerza en una longitud apropiada, por medio de placas de anclaje. Para seleccionar el tipo de anclaje, se tiene que determinar el punto donde el refuerzo desarrolla su fuerza de fluencia completamente. Si no se tiene el suficiente espacio para desarrollar la longitud de anclaje o para utilizar ganchos, se podrán usar placas de anclaje o refuerzo continuo (barras dobladas en U).





(a)

Fig. 6.24 Ancho de puntal, definido como la razón del refuerzo mecánico (Ref. 20)

En el caso de placas de anclaje se tendrá que verificar la resistencia a flexión de la placa de anclaje, la capacidad de la unión con el tensor y el ancho de la placa. La placa deberá tener la suficiente área de manera que los esfuerzos en la cara del nudo no exceden la resistencia a compresión del concreto  $f^*_{cd}$ . El área mínima para la placa de anclaje está dada por la siguiente relación

$$A_{\min} = \frac{T}{f^*_{cd}} \quad (6.3)$$

donde

$A_{\min}$  = área mínima para la placa,

$T$  = fuerza del tensor,

$f^*_{cd}$  = resistencia simplificada del concreto (ver sec. 6.5.4.).

En este caso, el tensor necesitará de una superficie lisa en la zona donde cruza al nudo (es decir sin adherencias).

Si los tensores se anclan directamente en el nudo, utilizando refuerzo continuo (barras rectas o ganchos), se recomienda utilizar ganchos (Fig. 6.20b4) para evitar el agrietamiento. Por lo general, se seleccionará varillas con el diámetro menor permitido por el código que se esté utilizando.

Para el anclaje de varillas rectas, la longitud de desarrollo se deberá colocar a través del nudo y deberá terminar por detrás del mismo (Figs. 6.20b1 y 6.20b2). El anclaje empezará donde las trayectorias de los esfuerzos de los puntales se encuentran con el refuerzo (el refuerzo es perpendicular a las trayectorias de esfuerzos) y se desvía, hasta donde termine el campo de compresión (Figs. 6.20b1 y 6.20b2). En el caso de campos de esfuerzos como los mostrados en las Figs. 6.18b3 y 6.18c3, el refuerzo se deberá extender a todo lo largo del campo de manera que se intercepten las trayectorias exteriores de los mismos.

### **Nudos Distribuidores**

En general los nudos singulares son los más críticos. Contrariamente, el estado de esfuerzos en nudos distribuidores no es tan crítica. Sin embargo, si se quiere evitar el agrietamiento de un nudo distribuidor *CCT*, se tendrán que evaluar los esfuerzos a tensión del concreto (ver tensores de concreto, secc. 6.5.5). Un ejemplo de este caso es el nudo *O* del modelo presentado en la Fig. 6.18c1 y su campo de esfuerzos en la Fig. 6.18c2.

Para el anclaje de las varillas de refuerzo en los nudos distribuidores, se deberán seguir las reglas para nudos singulares.

#### **6.5.4 Criterio de Falla del Concreto**

Como se mencionó en la sección 2.3, la resistencia del concreto en una zona de compresión (como lo es un puntal o un nudo), depende del estado de esfuerzos y de las alteraciones provocadas por grietas y refuerzo (ver sec. 2.3).

En la sección 5.4 se mencionaron algunos factores que afectan la resistencia a compresión del concreto. Los siguientes criterios complementan a los mencionados en dicha sección:

1. La compresión transversal es especialmente favorable si actúa en las dos direcciones transversales, como por ejemplo en regiones confinadas. Este confinamiento se provee por medio de refuerzo transversal o por concreto que rodea al campo de compresión y como una consecuencia se incrementa la resistencia a compresión del concreto  $f_{cd}$ .<sup>6</sup>

2. Los esfuerzos transversales a tensión y las grietas causadas por dichos esfuerzos debilitan el concreto. El concreto puede fallar por debajo de su resistencia medida en cilindros a compresión si la tensión transversal causa agrietamiento estrechamente separado y aproximadamente paralelo a los esfuerzos principales a compresión, de manera que los campos de esfuerzos en forma de prismas entre esas

---

<sup>6</sup> En el código CEB, la notación utilizada para la resistencia del concreto a compresión es  $f_{cd}$ , el código canadiense usa la misma notación del código ACI, esto es  $f_{ce}$ .

grietas son irregulares y estrechos. La reducción de la resistencia a compresión es pequeña si las fuerzas a tensión son tomadas por el refuerzo y si las grietas están bastante separadas.

3. En particular, el agrietamiento que no se desarrolla paralelo a los esfuerzos a compresión es perjudicial, esto es porque el refuerzo se detalla para impedir que las grietas se abran o propaguen. Si las grietas se desarrollan en otra dirección, (no paralela a los esfuerzos a compresión), el refuerzo no podría interceptar las grietas.

En 1982, Collins<sup>121</sup> presentó una expresión empírica para calcular la resistencia de las zonas a compresión paralelas y con tensión transversal. Dos años después, una ecuación similar fue introducida en el código canadiense de estructuras de concreto reforzado.<sup>181</sup> Esas expresiones consideran la influencia de parámetros significativos debidos a la deformación por tensión del refuerzo transversal  $\epsilon_t$ , como los anchos de grieta, la distancia entre las grietas, y su dirección (ver secc. 5.4).

Para propósitos prácticos, los siguientes valores para la resistencia  $f^*_{cd}$  se han propuesto para dimensionar todos los tipos de puntales y nudos:

$f^*_{cd} = 1.0 f_{cd}$  para un estado uniaxial de esfuerzos a compresión y sin alteraciones como los que existen en un puntal prismático (Fig. 6.19c) o en un nudo CCC (Fig. 6.20a);

$f^*_{cd} = 0.8 f_{cd}$  si las deformaciones por tensión en la sección transversal o en el refuerzo transversal causan agrietamiento paralelo al puntal con un ancho de grieta normal (esto quiere decir, que el ancho de grieta no deberá abrirse demasiado y con esto, perder la transferencia de carga). Esto se aplica también a los nudos donde los tensores se anclan con una placa o se anclan por adherencia (Fig. 6.20b);

$f^*_{cd} = 0.6 f_{cd}$  como en el caso anterior, pero para agrietamiento o refuerzo oblicuo;  
 $f^*_{cd} = 0.4 f_{cd}$  para grietas oblicuas con un ancho de grieta grande. Tales grietas se esperan si el modelo de los puntales se aparta demasiado del flujo de fuerzas internas obtenido según la Teoría de la Elasticidad. Se necesitará de una considerable redistribución de esfuerzos para que se desarrolle la capacidad última del miembro (sec. 2.4 ).

$f_{cd}$  es la resistencia del concreto a compresión, el cual se relaciona con la resistencia a compresión  $f'_c$  y depende del factor de seguridad del código designado (ver sec. 5.4). De acuerdo al código CEB,<sup>191</sup>  $f_{cd}$  se determina por

$$f_{cd} = 0.85 \frac{f'_c}{\gamma_c} \quad (6.4)$$

donde  $\gamma_c = 1.5$ , es un factor de seguridad parcial para el concreto a compresión y la constante 0.85 considera cargas permanentes.

En el código CEB,<sup>191</sup> el factor de seguridad es  $\phi = 1.0$  en todos los casos y los factores de carga para carga muerta y viva son 1.35 y 1.5 respectivamente.<sup>7</sup>

Los límites propuestos, por Schlaich para el diseño de puntales y nudos (según norma ACI) se presentan en la Tabla 6.3.<sup>116,171</sup> En la sección 5.4 se presentan las expresiones para el cálculo de la resistencia efectiva del concreto  $f_{ca}$ , deducidas por otros autores.

---

<sup>7</sup> El factor de seguridad y los valores para carga viva y muerta en los códigos ACI y RDF se encuentran en las siguientes referencias  
ASCE 7-88, "Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures"  
RDF-87, Título Sexto, capítulo IV y V, (Ref. 10).

Tabla 6.3 Resistencia efectiva del concreto según Schlaich (Ref. 16,17)

Estado de esfuerzos y/o arreglo del refuerzo del puntal o nudo	$f_{ce}$
Estado uniaxial de esfuerzos a compresión y sin alteraciones, como los que existen en un puntal prismático (Fig. 6.20c) o en un nudo CCC (Fig. 6.19a);	$0.85 f_c^o$
Deformaciones por tensión en la sección transversal o en el refuerzo transversal causan agrietamiento paralelo al puntal con un ancho de grieta normal (esto quiere decir, que el ancho de grieta no deberá separarse demasiado y con esto, perder la transferencia de carga); también se aplica a nudos donde los tensores (se anclan con una placa) o por adherencia (Fig. 6.19b);	$0.68 f_c$
Como en el caso anterior, pero para agrietamiento o refuerzo oblicuo;	$0.51 f_c$
Grietas oblicuas con un ancho de grieta grande. Tales grietas se esperan si el modelo de los puntales se aparta demasiado del flujo de fuerzas internas obtenido según la Teoría de la Elasticidad. Se necesitará de una considerable redistribución de esfuerzos para que se desarrolle la capacidad última del miembro (ver sección 2.4 ).	$0.34 f_c$

El incremento en la resistencia debido a los estados de esfuerzos a compresión en dos o tres dimensiones se podrá considerar, si la acción de los esfuerzos a compresión transversales es considerada como segura y permanente. Para elementos sometidos a cargas cíclicas no podrá considerarse ningún incremento en su resistencia.

Las grietas oblicuas no se presentarán si se sigue adecuadamente la Teoría de la Elasticidad durante el modelado. Por lo tanto el ángulo entre los puntales y tensores que se intersecan en un nudo singular no debe ser tan pequeño (pues la orientación del puntal deberá seguir la trayectoria de esfuerzos según la Teoría de la Elasticidad). Sin embargo, las grietas oblicuas podrían desarrollarse sobre la izquierda del punto donde se aplica la carga, con una situación de esfuerzos diferente.

Es recomendable antes de decidir uno de los valores para la resistencia, considerar las dos direcciones transversales.

### **6.5.5 Estados de Esfuerzo en Concreto y Acero**

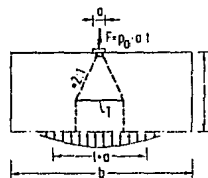
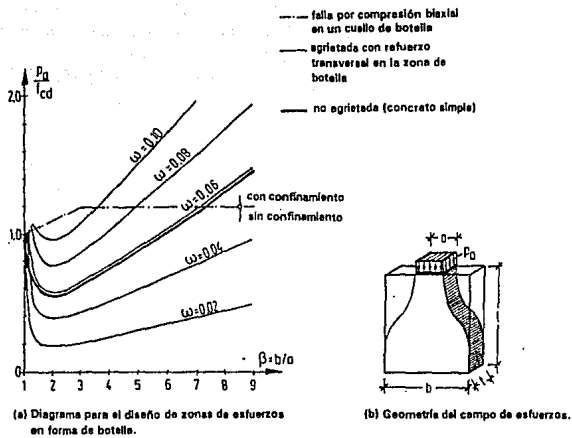
#### **Zonas de Esfuerzos Cc (Puntales de Concreto a Compresión)**

Los campos de esfuerzos en forma de abanico y de prisma no desarrollan esfuerzos transversales. Por consiguiente se deberá aplicar la resistencia uniaxial del concreto  $f_{cd}$ . Si los puntales son cruzados por esfuerzos transversales, grietas o tensores, su resistencia se basará en los límites propuestos en la sección 6.5.4.

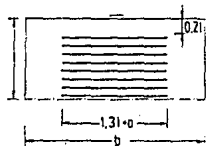
En los campos de esfuerzos en forma de botella (Fig. 6.19b) la distribución de fuerzas bajo la carga, causan compresión biaxial o triaxial, y más allá del punto de aplicación de la carga, tensión transversal. La tensión transversal, combinada con los esfuerzos longitudinales a compresión pueden provocar una falla prematura del concreto (ver secc. 6.5.4).

La regla general para nudos singulares dada en la sección 6.5.3, hace innecesario el cálculo de los esfuerzos dentro del campo de esfuerzos. Sin embargo, para casos particulares, una computadora podría ayudar en la comprobación.

En la Fig. 6.25a se presenta un diagrama para diseñar campos de esfuerzo



(c) Modelo de los puntales y tensores



(d) Arreglo del refuerzo para un campo de esfuerzos

Fig. 6.25 Dimensionamiento de campos de esfuerzo en forma de botella (Ref. 24)



plano en forma de botella en regiones  $D$ . Este campo se caracteriza por el ancho de la placa de anclaje  $a$ , un ancho máximo  $b$ , y la distancia  $l$  medida desde la placa de anclaje de la sección hasta donde las trayectorias de esfuerzos sean paralelas (Figs. 6.25b y 6.19b).

El diagrama para campos de compresión sin refuerzo transversal (línea oscura) se basa en un análisis elástico, en una resistencia a tensión del concreto, y

$$f_{ct} = f'_c / 15 \quad (6.5)$$

en un criterio de falla biaxial (compresión-tensión) como se presenta en la Fig. 6.28b.

Sin embargo, se ha observado que para ciertas relaciones geométricas, una presión baja ( $0.6 f'_c$ ) puede causar agrietamiento. Sin embargo, la carga que produce la falla en el puntal usualmente es mayor que la carga que produce el agrietamiento.

El campo de esfuerzos en forma de botella provee un límite inferior seguro para puntales de compresión sin refuerzo, mientras que un uso indiscriminado de la Teoría de la Plasticidad producen campos de esfuerzos en forma de prisma entre dos apoyos (Fig. 6.6) con un esfuerzo último igual a  $1.0 f'_c$ , los cuales presentan fallas prematuras.

El modelo de puntales y tensores para un campo en forma de botella (Fig. 6.25c), presenta un tensor horizontal, lo cual supone que el refuerzo longitudinal necesario para el campo sería aquel dimensionado para la fuerza que actúa en dicho tensor. El diseño para los nudos del tensor es poco claro, puesto que, si se usa solamente una barra para reforzar el tensor (como comúnmente se haría), los nudos se podrían considerar como nudos singulares. Si se usan varios lechos de refuerzo, los cuales se distribuyen sobre el peralte de la viga, los nudos se podrán considerar como nudos distribuidores, cuyo comportamiento no es tan crítico (Fig. 6.25d).

El modelo de puntales y tensores de la Fig. 6.25c, se presenta en la Fig. 6.25a, con una razón de refuerzo igual a

$$\omega = \frac{A_s f_y}{l f'_c} = 0.06 \quad (6.6)$$

donde

$A_s$  = área del refuerzo por unidad de longitud (la cual aproximadamente compensa la resistencia a tensión del concreto),

$f_y$  = límite de fluencia del acero de refuerzo,

$t$  = ancho del miembro,

$f_{cd}$  = resistencia del concreto a compresión (CEB).

Para los casos donde no se pueda utilizar la resistencia del concreto a tensión, se deberá usar razones de refuerzo bajas, reduciendo los valores de  $P_a / f_{cd}$  dados en la gráfica de la Fig. 6.25a.

### Tensores de Concreto $T_c$

La resistencia de campos de esfuerzo a tensión sin agrietamiento de concreto, es igual a la resistencia a tensión del concreto. Aunque es difícil desarrollar un criterio de diseño para este caso, no sería racional mantener el criterio de que la resistencia del concreto es baja, y por eso, no utilizarla.

El modelo de los puntales y tensores inevitablemente mostrará que el equilibrio solamente puede satisfacerse si los tensores o las fuerzas a tensión se pueden proporcionar en lugares donde, por razones prácticas, el refuerzo no se suministra, es decir, si se utiliza la resistencia a tensión del concreto. Es claro que ni un anclaje, ni un traslape, ni una esquina de estructura, ni una losa sin estribos, ni un puntal o ni un miembro a compresión sin refuerzo pueden trabajar sin usar la resistencia a tensión del concreto.

Desafortunadamente, en la mayoría de las normas no se reconoce este hecho. Como una consecuencia, las normas han llegado a ser imprecisas y complicadas.

Hasta que otro trabajo de investigación se realice en este campo, se propone la siguiente guía (la cual es segura cuando se compara con las pruebas)

La resistencia a tensión del concreto solamente se utilizará para equilibrar fuerzas donde no se espere una falla progresiva. Así, las fuerzas residuales y las microgrietas tienen que ser tomadas en consideración, aún en concreto sin agrietamiento o sin carga.

En la Fig. 6.26 se muestra una zona de falla  $\Delta A_c$  en un campo de esfuerzos, con el propósito de revisar la resistencia a tensión del concreto  $f_{ct}$  en el tensor. Al ocurrir el agrietamiento del área asumida  $\Delta A_c$ , los esfuerzos a tensión  $\sigma_{ct}$  se incrementan hasta  $\sigma'_{ct}$ . Como una consecuencia, la resistencia del concreto en el campo disminuirá, pudiendo fallar la sección. Si la falla local supuesta no se desarrolla se podrá considerar una redistribución de esfuerzos, con la cual se evita una falla progresiva.

Como una propuesta preliminar, se sugiere que

$$\Delta A_c \geq 4 d_g^2 \quad y \quad \geq A_{ct} / 10 \quad (6.7)$$

donde

$\Delta A_c$  = área de la zona de falla asumida,

$d_g$  = diámetro del agregado más grande, y

$A_{ct}$  = área de la zona a tensión.

La falla progresiva de una sección o miembro generalmente comienza en el perímetro de la estructura (cuando el diagrama de esfuerzos tiene gradientes muy inclinados), como por ejemplo, en la zona a tensión de una viga flexionada (Fig. 6.27). En esta figura se muestra el incremento de esfuerzos con línea punteada. Es de notar que el incremento de esfuerzos a tensión  $\sigma'_{ct}$  ha excedido la resistencia a tensión del concreto  $f_{ct}$ . Esto produciría una falla local, que propiciaría una falla progresiva en la viga.

Los esfuerzos a tensión pueden ser analizados con un método elástico lineal empleando la Ley de Hooke<sup>8</sup> para los materiales. Los máximos esfuerzos en las fibras exteriores o en una zona de falla se deben distribuir sobre una franja de 5 cm pero no más de  $3d_g$ . Esto es una regla justificada en los mecanismos de fractura del concreto.<sup>[24]</sup>

---

<sup>8</sup> El esfuerzo  $\sigma$  es igual a la deformación del material  $\epsilon$  por una constante de proporcionalidad E (módulo de elasticidad), la cual es la pendiente del diagrama de esfuerzo-deformación en la región linealmente elástica (Ref. 2).

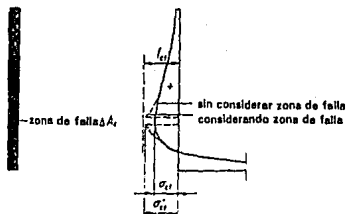


Fig. 6.26 Zona de falla asumida, para la revisión de la resistencia a tensión de un tensor de concreto  $T_c$  (Ref. 24)

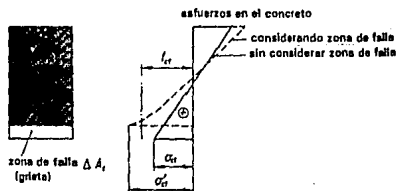


Fig. 6.27 Falla progresiva de una viga debida a una falla local (Ref. 24)

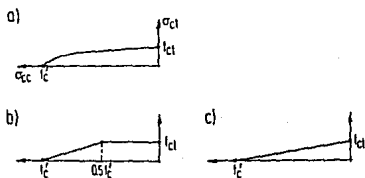


Fig. 6.28 Resistencia del concreto bajo un estado de esfuerzos biaxial tensión-compresión (Ref. 18)

El diseñador tendrá que decidir caso por caso, que fracción de la resistencia a tensión puede ser usada para soportar las cargas y que fracción para resistir los esfuerzos residuales. Estos esfuerzos por lo general son grandes en el sentido longitudinal de un miembro estructural y en su superficie, pero son pequeños en el sentido transversal y en peraltes grandes.

Si el campo de esfuerzos a tensión lo cruza un campo a compresión se deberá considerar una reducción en la resistencia biaxial. La gráfica de la Fig. 6.28c (la cual es una simplificación de la gráfica mostrada en la Fig. 6.28a) propone un límite seguro.

### Tensores $T_s$

Usualmente se provee el acero de refuerzo para resistir las fuerzas a tensión. El eje del refuerzo debe coincidir con el eje del tensor en el modelo. El dimensionamiento de estos tensores es tal que para la sección transversal  $A_s$  (acero de refuerzo) o  $A_p$  (acero de presfuerzo) y los límites de fluencia  $f_y$  y  $f_{py}$  para los aceros respectivos, la fuerza  $T_s$  sea

$$T_s \leq A_s f_y + A_p \Delta f_p \quad (6.8)$$

En la ec. 6.8 se considera al presfuerzo como una carga externa dentro del análisis, y a la fuerza del puntal actuante  $T_s$  como la resultante de todas las cargas externas (incluyendo presfuerzo). Sin embargo, parte de la resistencia del acero de presfuerzo se utiliza en el pretensado, y solamente el resto ( $\Delta A_p$ ) se utilizará para resistir  $T_s$ .

## ***6.6 Comparación Entre Diferentes Métodos para Determinar la Resistencia al Cortante.***

En la Fig. 6.29 se presenta una comparación de las cantidades requeridas de estribos en una viga de concreto, para los modelos de la armadura tradicional y moderna, el modelo de puntales y tensores, y diferentes pruebas.

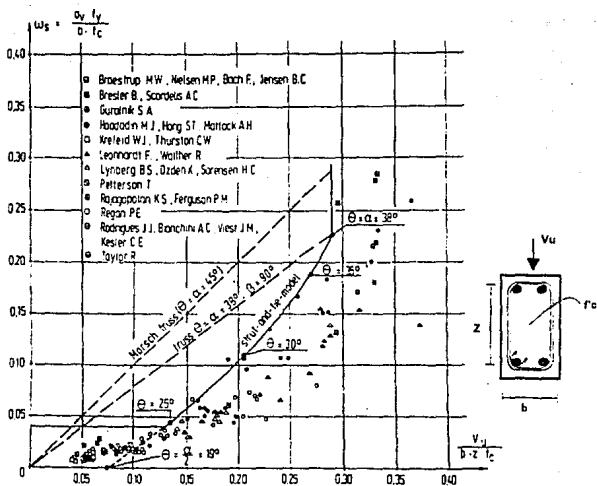
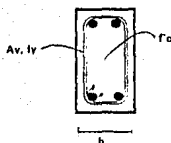


Fig. 6.29 Comparación de las cantidades de estribos en el alma de una viga, según varios procedimientos (Ref. 24)

requerirá de mayores cantidades de refuerzo longitudinal, un ángulo grande requerirá de mayores cantidades de refuerzo transversal). En uno u otro caso, los ángulos de inclinación propuestos fuera del intervalo de entre  $30^\circ$  y  $60^\circ$ , resultan en agrietamientos excesivos.

Un detallado apropiado (detallando el mínimo de refuerzo, adecuada selección del diámetro de las barras y de espaciamiento) es mucho mejor que los sofisticados cálculos para revisar el agrietamiento.

Si se han determinado las fuerzas en un modelo, el análisis de sus deformaciones es rápido y sencillo. Puesto que la contribución a la deformación de los puntales de concreto es pequeña, será suficiente usar un valor promedio de su sección transversal, aunque esta varíe a lo largo de su longitud.

## **Capítulo 7**

### **Teoría de los Campos de Compresión**

#### **7.1 Introducción y Alcances**

Para diseñar por corte vigas de concreto reforzado, el Reglamento de Construcciones del Canadá<sup>[9]</sup> (CSA) propone dos métodos: un método simplificado y un método general.

El método simplificado es una versión similar de las formulaciones del reglamento del ACI ( $V_n = V_c + V_s$ ; ver Cap 4). El método general, utiliza conceptos de la Teoría de la Plasticidad y de los modelos de la armadura desarrollados en Europa, y considera la influencia del cortante para diseñar el refuerzo transversal y longitudinal. El método se basa en la Teoría de los Campos de Compresión.<sup>[18,19,25]</sup>

Los conceptos de la Teoría de los Campos de Compresión<sup>[18]</sup> pueden ser aplicados al análisis y diseño de vigas de concreto reforzado sujetas a cortante, momento flexionante y carga axial. Si bien la metodología es demasiado compleja para el diseño de vigas simples, resulta conveniente para el diseño de secciones con cargas y geometría poco comunes (regiones D). Si se desea un análisis más completo de una viga, el método puede ser una herramienta adecuada.

#### **7.2 Principios Generales**

La resistencia de miembros sometidos a cortante se puede determinar satisfaciendo las condiciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones, y usando relaciones esfuerzo-deformación apropiadas para el refuerzo y para las diagonales de concreto agrietadas. La sección transversal se dimensiona para que las diagonales de concreto sean capaces de resistir los esfuerzos a compresión. La sección transversal se diseñará de manera que la sección agrietada resista los esfuerzos diagonales a compresión. Los refuerzos longitudinal y transversal, deberán equilibrar las diagonales a compresión.

En la Fig. 7.1 se ilustra la aplicación de la Teoría de los Campos de Compresión



en su forma más generalizada. Como se muestra, la sección transversal se divide en capas horizontales. Dentro de cada capa, la deformación longitudinal, los esfuerzos cortantes y la inclinación de los esfuerzos principales a compresión se consideran constantes. Para cada capa, los esfuerzos biaxiales y las deformaciones se determinan considerando la compatibilidad de deformaciones, el equilibrio, y la relación esfuerzo-deformación del material. También se asume que la dirección de los esfuerzos principales coincide con la dirección de las deformaciones principales. Cabe notar que, ya que la distribución de los esfuerzos cortantes no es uniforme sobre el peralte de la viga, la dirección de los esfuerzos principales por compresión cambian a lo largo del peralte. Se debe destacar que los esfuerzos a tensión entre las grietas contribuyen a que el elemento resista el cortante.

Los esfuerzos principales a compresión en el concreto,  $f_2$ , se relacionan con las deformaciones principales a compresión,  $\epsilon_2$ , y las deformaciones principales a tensión,  $\epsilon_1$ , (Fig. 7.2), mediante la siguiente expresión

$$f_2 = f_{2 \max} \left[ \frac{2\epsilon_2}{0.002} - \left( \frac{\epsilon_2}{0.002} \right)^2 \right] \quad (7.1)$$

donde

$$f_{2 \max} = \frac{\lambda \phi_c f'_c}{(0.8 + 170 \epsilon_1)} \leq \lambda \phi_c f'_c \quad (7.2)$$

donde

$f_{2 \max}$  = resistencia al aplastamiento de la diagonal,

$\lambda$  = factor para concretos ligeros,<sup>1</sup>

$\phi_c$  = factor de resistencia del material (para concreto  $\phi_c = 0.60$ ),<sup>(8)</sup>

$f'_c$  = resistencia del concreto a la compresión.

El código canadiense<sup>(8)</sup> utiliza factores de reducción para los materiales:  $\phi_c =$

<sup>1</sup>  $\lambda = 1.00$ , para concretos ligeros normales,  
 $\lambda = 0.85$ , para concretos semi ligeros estructurales,  
 $\lambda = 0.75$ , para concretos ligeros estructurales.



Fig. 7.1 Análisis de una sección usando la Teoría de los Campos de Compresión (Ref. 18)

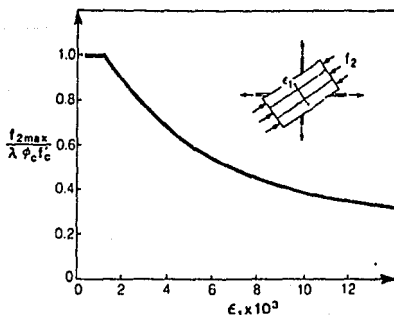
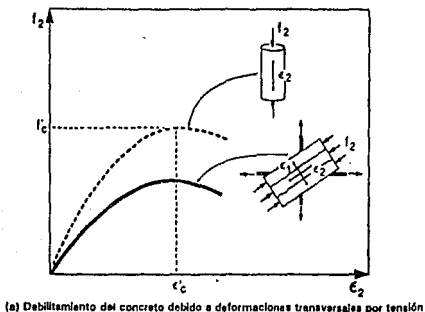


Fig. 7.2 Curva esfuerzo a compresión-deformación de concreto agrietado diagonalmente (Ref. 18)

0.60 para el concreto y  $\phi_s = 0.85$  para el acero.<sup>2</sup> Según la Fig. 7.2a, se asume que la deformación principal a compresión  $\epsilon'_c = 0.002$ . Se observa que si las deformaciones principales por tensión aumentan, la resistencia a la compresión del concreto disminuye.

### 7.3 Diseño Usando la Teoría de los Campos de Compresión

El reglamento canadiense<sup>18)</sup> permite el empleo de un procedimiento directo, el cual aplica la teoría de los campos de compresión a media altura del peralte de la viga. En este procedimiento (Fig. 7.3), se considera que la distribución de los esfuerzos cortantes es uniforme sobre el área de la sección transversal con ancho del alma  $b$  y peralte  $d$ ; y que la dirección de los esfuerzos principales a compresión (definidos por el ángulo  $\theta$ ) es constante sobre el peralte. Los esfuerzos a tensión en la viga agrietada son ignorados.

#### 7.3.1 Esfuerzos y Deformaciones a Medio Peralte de la Viga

Si no se tienen esfuerzos principales a tensión en el concreto, entonces, los esfuerzos principales a compresión en el concreto  $f_2$  se relacionarán con los esfuerzos cortantes en el concreto  $v = V / bd$ , por la ecuación presentada a continuación, derivada del círculo de Mohr mostrado en la Fig. 7.4.

$$f_2 = \left( \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right) \frac{V}{b d} \quad (7.3)$$

La resistencia del concreto al aplastamiento diagonal  $f_{2max}$  se relaciona con las deformaciones principales a tensión  $\epsilon_t$ , en la ec. 7.2.

Los requerimientos de compatibilidad relacionan la deformación principal a tensión  $\epsilon_{t,}$ , la deformación principal por compresión  $\epsilon_c$ , la deformación longitudinal a medio peralte  $\epsilon_x$ , la deformación transversal  $\epsilon_y$ , y el ángulo de la deformación principal

---

<sup>2</sup> La norma canadiense usa factores de reducción de resistencia parciales (para concreto, acero, etc.), en lugar de los factores de reducción de resistencia generales manejados por el ACI o RFD-87.

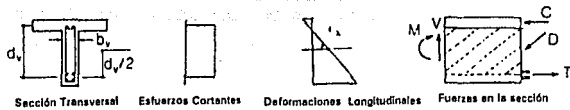


Fig. 7.3 Procedimiento directo de diseño para una viga sometida a cortante (Ref. 18)

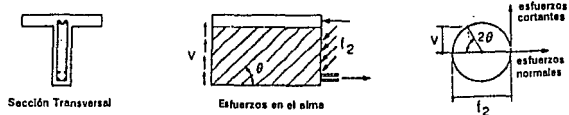


Fig. 7.4 Esfuerzos en el concreto del alma de una viga (Ref. 18)



Fig. 7.5 Deformaciones del concreto a media altura del peralte (Ref. 18)

por compresión  $\theta$  (Fig. 7.5). Se supone que en la falla, la deformación principal por compresión es igual a 0.002. La deformación principal por tensión se calcula con la siguiente expresión

$$\epsilon_1 = \epsilon_x + \frac{(\epsilon_x + 0.002)}{\tan^2 \theta} \quad (7.4)$$

### 7.3.2 Diseño del Refuerzo Transversal y Longitudinal

El refuerzo transversal debe ser capaz de equilibrar al puntal en los esfuerzos diagonales a compresión en el concreto (Fig. 7.6). Este requerimiento se expresa de la siguiente forma<sup>[8]</sup>

$$V_u = \frac{A_v \phi_s f_y}{s} \frac{d}{\tan \theta} \quad (7.5)$$

donde

$V_u$  = cortante resistente (cargas factorizadas),

$A_v$  = área del refuerzo transversal,

$\phi_s$  = factor de reducción de resistencia del acero,

$f_y$  = límite de fluencia del acero

$d$  = peralte efectivo de la viga, y

$s$  = separación de estribos (espaciamiento).

La fuerza cortante en la sección se resistirá a través de esfuerzos inclinados a compresión en el concreto. En la Fig. 7.3 el componente vertical de la fuerza  $D$  será la fuerza cortante actuante. El componente horizontal de la fuerza  $D$  es equivalente a una carga axial de compresión en el concreto igual a

$$\frac{V}{\tan \theta} \quad (7.6)$$

Esta fuerza a compresión se equilibra con la fuerza a tensión en el refuerzo longitudinal (Fig.7.7). De este modo, el cortante causa esfuerzos a compresión en el

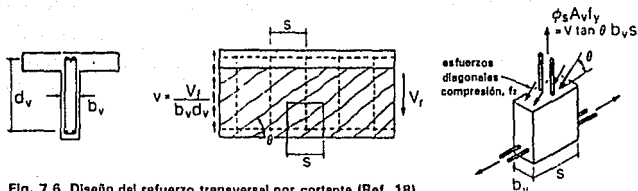


Fig. 7.6 Diseño del refuerzo transversal por cortante (Ref. 18)



Sección Transversal

fuerzas en la sección

Fig. 7.7 Fuerzas longitudinales debidas al cortante (Ref. 18)

concreto y esfuerzos a tensión en el acero longitudinal. En términos de tensión en el refuerzo longitudinal, el cortante es equivalente a una carga axial de tensión igual a

$$N_v = \frac{V}{\tan \theta} \quad (5.17)$$

Para el diseño del refuerzo longitudinal de una capa horizontal sometida a un momento flexionante  $M$  y fuerza axial  $N_v$ , se debe proporcionar el acero para un momento mayor igual a  $M + 0.5 N_v d$ . Esta simplificación es equivalente a considerar el momento flexionante más un incremento por la fuerza axial.

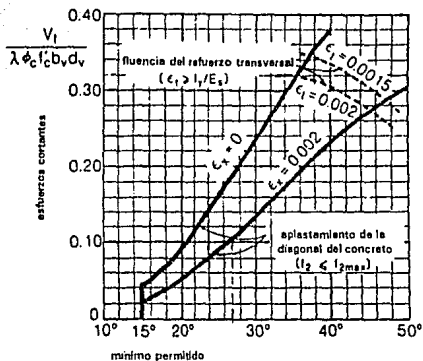
### 7.3.3 Elección del Ángulo de Inclinación $\theta$ y de la Deformación Longitudinal $\epsilon_x$

El ángulo de inclinación de los esfuerzos principales a compresión y la deformación longitudinal a medio del peralte son dos parámetros muy importantes en el diseño por cortante según la Teoría de los Campos de Compresión.

El ángulo de inclinación  $\theta$  determina las cantidades de refuerzo transversal y longitudinal (Figs. 7.6 y 7.7). Es recomendable (económico) utilizar las menores cantidades posibles de refuerzo transversal, (valor pequeño para  $\theta$ , ver sección 5.5). En la Fig. 7.8 se presenta la relación del ángulo de inclinación  $\theta$  con los esfuerzos cortantes máximos permitidos. Para ángulos menores que  $45^\circ$ , la falla está controlada por el aplastamiento del concreto de las diagonales.

El reglamento canadiense<sup>(6)</sup> considera que  $\epsilon_x = 0.002$ . Se usan valores menores para el diseño de secciones sujetas a fuerzas axiales a compresión, prefuerzo, para secciones con grandes cantidades de refuerzo longitudinal o con secciones sometidas a momentos pequeños. Estos tipos de secciones son rígidas y tienen deformaciones pequeñas en el alma (pequeño  $\epsilon_x$ , por lo tanto una deformación  $\epsilon_y$  pequeña); por consiguiente, resistirán esfuerzos cortantes más altos.

Si la sección transversal es adecuada, se podrán escoger valores para  $\theta$  y  $\epsilon_x$  que garanticen que el concreto no se aplaste prematuramente y que el refuerzo longitudinal fluya antes del colapso del miembro (Fig. 7.8). Por ejemplo, si se asume una



Ángulo de inclinación de los esfuerzos principales a compresión,  $\theta$

Fig. 7.8 Elección del ángulo de inclinación de los esfuerzos principales a compresión  $\theta$  (Ref. 18)



deformación  $\epsilon_x = 0.002$  y se tiene una razón de esfuerzos cortantes igual a 0.10, el ángulo que se debe seleccionar es  $\theta = 27^\circ$ . Para el diseño de regiones donde se tengan esfuerzos cortantes muy grandes (cerca de un apoyo o en el punto donde se aplica la carga, por ejemplo), el aplastamiento del concreto se evitará seleccionando un ángulo pequeño (aproximadamente  $24^\circ$ ). En el caso de que las dimensiones del elemento no permitan anclar el refuerzo longitudinal (esto debido a una fuerza grande en el refuerzo como consecuencia de la elección de un ángulo pequeño), se deseará reducir la fuerza en el refuerzo escogiendo un ángulo mayor.

No solamente se tendrá que considerar la resistencia del concreto al escoger el ángulo de inclinación. En algunas ocasiones otras variables pueden ser determinantes en el comportamiento de una sección dada y, por lo tanto, se le tendrá que dar la misma atención que los parámetros normalmente considerados (aplastamiento, fallas locales, etc.).

#### ***7.3.4 Consideraciones sobre el Diseño de Vigas de Concreto Sujetas a Cortante***

Independientemente del análisis capa por capa de un miembro como se ha explicado en los párrafos anteriores, se apega más a la realidad, un análisis que considere el comportamiento de la sección completa.

En la mayoría de los miembros sujetos a cortante las fuerzas varían a lo largo de la viga. Es común preguntarse, entonces, qué cortante es el que se debe considerar para diseñar. En la Fig. 7.9, los estribos entre las secciones A y B deberán resistir una fuerza igual a la diferencia entre la reacción del apoyo y la carga uniforme. Esta diferencia es igual al cortante de la sección B. Por consiguiente los estribos entre las secciones A y B se diseñarán para resistir el menor cortante.

En la Fig. 7.10 se ilustra la influencia que tiene el tipo de apoyo en el diseño de las cantidades de refuerzo longitudinal. Cuando los esfuerzos a compresión de los apoyos se sitúen sobre la cara inferior de la viga (Fig. 7.10b) se necesitarán de menores cantidades de refuerzo longitudinal que cuando las reacciones de los apoyos estén empotradas dentro del peralte del miembro (como en el caso de vigas

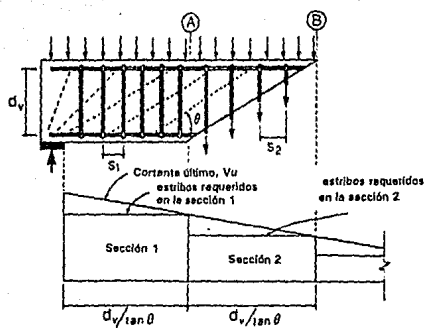


Fig. 7.9 Diseño por cortante (Ref. 18)

secundarias apoyadas en vigas principales, Fig. 7.10a).

Para una viga simplemente apoyada, el refuerzo superior no necesitará resistir el momento máximo.

### 7.3.5 Diseño de Regiones Discontinuas (Regiones D)

Hasta ahora se ha considerado que los esfuerzos cortantes son constantes sobre el peralte de la viga y que las trayectorias de los esfuerzos principales a compresión se pueden estimar como una serie de líneas paralelas las cuales forman un campo de compresión (Fig. 7.3). En regiones D, como las mostradas en la Fig. 7.11 (ver secc. 6.2), las hipótesis anteriores no son aplicables, y por lo tanto, se deben usar procedimientos que se aproximen lo más posible al verdadero flujo de fuerzas.

El flujo de fuerzas en regiones discontinuas puede ser analizado por medio del modelo de los puntales y tensores mostrado en la Fig. 7.12 (ver sec. 6.3).

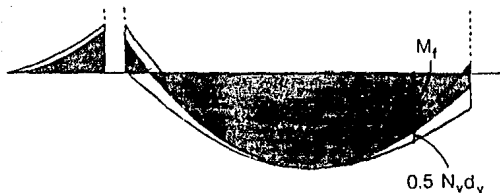
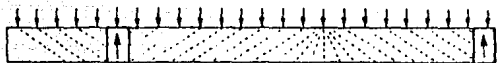
Los esfuerzos a compresión en el concreto,  $f_2$ , de los puntales no deberán ser mayores que la resistencia del concreto agrietado,  $f_{2max}$ , (ec.7.2). El valor de las deformaciones principales a tensión  $\epsilon_1$ , en el puntal es necesario para determinar dicha resistencia y se obtiene considerando las condiciones de deformación del concreto y del refuerzo cerca del puntal. Si un tensor cruza un puntal, la capacidad del concreto para resistir esfuerzos a compresión se reducirá. Considerando que la deformación principal por compresión es igual a 0.002 y que la deformación por tensión en el tensor es  $\epsilon_s$ , la deformación principal por tensión requerida es

$$\epsilon_1 = \epsilon_s + \frac{(\epsilon_s + 0.002)}{\tan^2 \alpha_s} \quad (7.7)$$

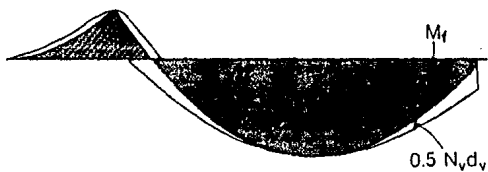
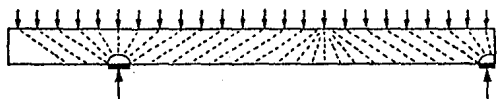
donde

$\alpha_s$  = ángulo entre el puntal y el tensor.

En la Fig. 7.12 se muestra la relación entre  $f_{2max}$  y el ángulo  $\alpha_s$ . Si el ángulo se

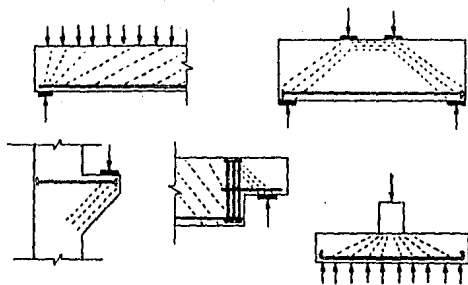


(a) Vigas secundarias empotradas en una viga principal



(b) Viga principal apoyada en vigas secundarias

Fig. 7.10 Influencia de los apoyos para el diseño del refuerzo longitudinal (Ref. 18)



**Fig. 7.11** Trayectorias de esfuerzos principales a compresión en regiones D (Ref. 18)

reduce, los valores de  $\epsilon_1$  aumentarán y, por lo tanto, se reducirá la resistencia  $f_{2max}$ .

En el caso, en que se sobreponen el puntal y el tensor ( $\alpha_1 = 0$ ) no existirá compatibilidad y como consecuencia el puntal no podrá resistir esfuerzos a compresión. En suma, el refuerzo principal de tensión en una región D, normalmente requerirá de pequeñas cantidades de refuerzo adicional para controlar ancho de grietas y asegurar la ductilidad en el elemento.

Para vigas peraltadas, el código canadiense<sup>[8]</sup> estipula el uso de refuerzo longitudinal mínimo ( $\rho = 0.002$ ).

El procedimiento de diseño en este capítulo está incluido en el código canadiense para el cálculo de cortante en vigas de concreto. El método se desarrolló con el fin de proporcionar un modelo que permita un mejor entendimiento del comportamiento de las estructuras.

El método de los puntales y tensores es muy útil para revisar estructuras existentes o diseñar estructuras poco comunes. Para secciones típicas, el código canadiense recomienda un método más directo, el cual analiza la sección a la mitad de su peralte. La deformación longitudinal a medio peralte se utiliza como un indicador de la rigidez del concreto en la sección. Para el diseño de elementos tan sencillos como una viga simplemente apoyada, el método resulta demasiado complejo, sin embargo para vigas peraltadas el método es muy recomendable.

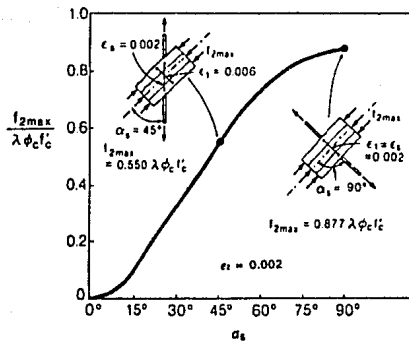


Fig. 7.13 Comparación entre la resistencia de los puntales a compresión y un tensor pasando a través de un puntal (Ref. 18)

## Conclusiones

En este trabajo se presentó una revisión de los métodos de cálculo de la resistencia al cortante en vigas de concreto reforzado. Las distintas metodologías toman en cuenta en forma diferente a los factores que afectan la resistencia.

Entre los factores están la dimensión y geometría de la sección transversal, el tipo de carga, el límite de fluencia y el porcentaje de refuerzo longitudinal, la cantidad de refuerzo transversal, la relación claro de cortante - peralte, y el tipo de agregado.

La trabazón del agregado y la acción de dovela son los mecanismos de transferencia que, por lo general, contribuyen en mayor medida a la resistencia.

El refuerzo transversal, además de resistir una parte de la fuerza cortante, contribuye a mantener e incrementar el trabajo de los mecanismos de transferencia de cortante. Es importante destacar que fuerzas cortantes alternadas conducen al deterioro del mecanismo de trabazón de agregado.

La participación de los estribos se ha deducido con base en el modelo clásico de la armadura. Este modelo considera que el refuerzo transversal resiste la totalidad de la fuerza cortante de forma que ignora los mecanismos de transferencia en el concreto.

Las expresiones de diseño vigentes en México y Estados Unidos (incluidos en los reglamentos de construcción) consideran que la resistencia al cortante está integrada por la contribución del concreto más la de los estribos. La ecuación que calcula la participación del concreto se obtuvo mediante el ajuste de las resistencias de vigas de concreto sin refuerzo en el alma ensayadas en laboratorio. En el ajuste no se hizo esfuerzo alguno para distinguir los diferentes modos de falla de las vigas. Un análisis reciente de la expresión de contribución del concreto ha señalado su conservadurismo puesto que subestima el efecto de la cuantía del refuerzo



longitudinal. Además, indica que la consideración de la variable claro de cortante - peralte no es adecuada.

Los reglamentos de diseño especifican límites de la fuerza cortante máxima que puede ser resistida por una sección con objeto de evitar el aplastamiento del concreto del alma y anchos excesivos de grietas.

Las ecuaciones de diseño vigentes no consideran explícitamente a las fallas de anclaje, ni el efecto de la interacción momento flexionante - cortante.

Recientemente se han observado desarrollos importantes en modelos para el cálculo de la resistencia al corte que consideran explícitamente la mayoría de los factores que determinan el comportamiento. Estos métodos son el modelo de la armadura moderna, el modelo de los puntales y tensores, y la teoría de los campos de compresión. Los diseños de elementos tipo viga empleando las metodologías anteriores conducen, por lo general, a diseños menos conservadores que aquellos que se obtienen de la aplicación de las expresiones del reglamento. Aún más, constituyen herramientas poderosas para el diseño y detallado de zonas para las cuales no existen métodos de diseño fundamentados en la resistencia de materiales y en la mecánica.

El modelo de la armadura moderna, basado en la Teoría de la Plasticidad, supone que la falla ocurrirá cuando la armadura forme un mecanismo después de la fluencia de los aceros longitudinales y transversales. El método es tal que la resistencia calculada es menor, o cuando mucho igual, que la que resiste la estructura. Durante el desarrollo del modelo, es importante elegir trayectorias de carga que requieran de capacidades de deformación razonables para el elemento en cuestión con objeto de alcanzar su resistencia. Se ha observado que la elección de los puntales, así como su inclinación, es el aspecto más importante en la elaboración del modelo. Se recomienda que los elementos de la armadura sigan la distribución elástica de fuerzas. Se ha sugerido que una variación de  $\pm 15^\circ$  en la inclinación de los puntales con respecto de la distribución elástica no afecta el comportamiento. Lo anterior es válido para vigas esbeltas y peraltadas. Para vigas esbeltas, y con base en

consideraciones cinemáticas y de ancho de grieta en el concreto, se ha recomendado que el ángulo de inclinación de los puntales varíe entre  $25^\circ$  y  $65^\circ$ . Finalmente, es importante destacar que el modelo de la armadura moderna predice correctamente las fuerzas en las varillas debidas a la interacción momento flexionante - cortante.

El modelo de los puntales y tensores es una generalización de la analogía de la armadura. Tiene la ventaja de considerar todas las regiones de la estructura (regiones B y D). Para regiones en donde el gradiente y la trayectoria de esfuerzos son suaves, el método emplea el modelo de la armadura. Su aplicación demuestra que la clasificación del tipo de viga en función de la relación claro de cortante - peralte (como lo hacen los reglamentos), no es suficiente; es necesario considerar el tipo de carga que obra en el elemento.

El modelo, igualmente basado en el teorema del límite inferior de la Teoría de la Plasticidad, asume que la falla será dúctil por la fluencia de uno o varios tensores. Las fallas locales (aplastamiento del concreto o falla del anclaje) son revisadas en el proceso de detallado. El método, sin embargo, ignora fallas por inestabilidad.

Se recomienda que el modelo de los puntales y tensores siga la distribución de esfuerzos elásticos. De esta forma el mismo modelo se usará para el diseño por estados límites de servicio y resistencia última.

El modelo con la menor cantidad y la menor longitud de tensores se considerará como el más adecuado.

En el diseño de puntales y nudos, se debe tener presente que; la resistencia del concreto depende del estado de esfuerzos y de las alteraciones provocadas por grietas y refuerzo. Los puntales y nudos no deberán fallar antes de que la falla del acero longitudinal o la falla de los estribos provoquen un mecanismo. Con base en resultados de laboratorio, se han propuesto límites a la resistencia del concreto. Se consideran distintos valores para los diferentes tipos de nudos y puntales.

Las normas de diseño desprecian la contribución de la resistencia a la tensión del concreto a la capacidad al corte. Se ha propuesto que dicha resistencia sea considerada, mientras más investigación se hace al respecto, en donde no se esperen

fallas progresivas.

Las resistencias calculadas con el modelo de los puntales y tensores son más precisas que las calculadas con expresiones comunes de diseño y con los modelos de la armadura, si se comparan con las resistencias medidas en laboratorio por varios investigadores.

La Teoría de los Campos de Compresión es una generalización del modelo de los puntales y tensores. En el modelo, la resistencia al cortante se determina combinando los principios de equilibrio y compatibilidad de deformaciones, con las ecuaciones constitutivas de los materiales. La metodología es útil para el diseño de regiones D, ya que para regiones B es demasiado compleja.

El método supone que las direcciones de los esfuerzos principales coinciden con las direcciones de las deformaciones principales. La resistencia al aplastamiento de la diagonal de concreto es función de la deformación a tensión perpendicular al puntal. Para evaluar esta última, se utilizan requerimientos de compatibilidad para relacionar las deformaciones principales a tensión y a compresión con las deformaciones longitudinales y transversales para un ángulo de inclinación dado.

Se ha recomendado que el ángulo de inclinación de los puntales sea el menor posible para obtener una menor cantidad de estribos. Al igual que el modelo de los puntales y tensores, se deberá considerar que la resistencia al aplastamiento de la diagonal es afectada por el refuerzo que la cruza.

Con base en las ideas anteriores, es clara la tendencia que existe para sustituir las ecuaciones empíricas de diseño por métodos fundamentales en principios de mecánica y resistencia de materiales. Aún más, algunos países europeos ya han adoptado los modelos de la armadura moderna y de puntales y tensores en sus normas de diseño. Sin embargo, es necesario reconocer que la adopción de este tipo de métodos en nuestro país debe ser gradual para sensibilizar y educar a los diseñadores.

Seguramente en etapas intermedias será necesario reducir la filosofía de los

métodos a formulas simples y prácticas. Es importante destacar que métodos como los propuestos conducen a diseños menos conservadores, ya que suponen un uso más eficiente de las resistencias de los materiales, en particular del concreto agrietado. Esto se traduce en diseños al límite con factores de seguridad cercanos al cociente del factor de carga y del factor de reducción de resistencia. En los próximos años, probablemente será motivo de discusión la incorporación de métodos de diseño en reglamentos que redunden en sobrerresistencias menores, en particular si la falla puede ser frágil.

Los métodos modernos se han desarrollado para el diseño de elementos ante fuerzas cortantes estáticas. Es necesario estudiar su aplicabilidad a casos con cortante cíclico (como el producido por sismos). Para ello, se requerirán investigaciones sobre el comportamiento ante cargas cíclicas de campos de concreto agrietado. El efecto del nivel de deformación, tipo de agregado y refuerzo en el deterioro deberá ser evaluado. La interacción del cortante y flexión en articulaciones plásticas deberá ser analizada con detalle. Los métodos de la armadura moderna y de los puntales y tensores requieren de más investigaciones, en particular sobre el diseño y detallado de los diferentes tipos de nudos, y en el efecto de la resistencia a tensión del concreto.

La aplicación de métodos como el de los puntales y tensores es muy prometedora sobre todo para regiones con altos niveles de esfuerzo como lo son las regiones D.

## ***Bibliografía***

1. Beer F.P. y Russell Johnston E., "Mecánica de Materiales," Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1985.
2. Gere J. M. y Timoshenko S.P., "Mecánica de Materiales," Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1984.
3. MacGregor J. G. y Rogowsky D.M., "Reinforced Concrete, Mechanics and Design," Prentice Hall, E.U.
4. Park R. y Paulay T., "Estructuras de Concreto Reforzado," ed. Limusa, México, 1990, pp. 279 - 312.
5. Popov E. E., "Introducción a la Mecánica de Sólidos," ed. Limusa, México, 1985, pp. 167 - 173.
6. Wang C. H. y Salmon C. G., "Reinforced Concrete Design," Harper International Edition, U.S.A., 1985, pp. 120 - 196.
7. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318 - 83)," American Concrete Institute, Detroit, 1983, 111 pp.
8. National Building Code of Canada 1990, NRCC 30629, National Research Council of Canada, Ottawa, 1990.
9. CEB--FIB, Model Code for Concrete Structures, Bulletin d' Information, 124/125E, Comité Euro-International du Béton, Federation Internationale de la Précontrainte, Paris, 1978.
10. Departamento del Distrito Federal, "Reglamento de Construcciones del Distrito Federal," Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal, México 1987.
11. Departamento del Distrito Federal, "Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal, México 1989.
12. ACI-ASCE Committee 326., "Shear and Diagonal Tension," ACI Journal, Proceedings, Vol. 59, Nos. 1-3, American Concrete Institute, Detroit, Enero - Marzo 1962, pp. 277 - 325.

13. ACI-ASCE Committee 426., "The Shear Strength of Reinforced Concrete Members," ACI Journal, Proceedings, American Concrete Institute, Detroit, Junio 1973, pp. 1091 - 1135.
14. ACI-ASCE Committee 426., "Suggested Revisions to Shear Provisions for Building Codes," ACI Journal, Proceedings, Vol. 75, No. 9, American Concrete Institute, Detroit, Septiembre 1977 and Discussion, Vol. 75, No. 10, Oct. 1978.
15. ASCE - Manuals and Reports on Engineering Practice - No. 41, "Plastic Design in Steel," ASCE Publications, U.S.A., 1971, pp. 17-28.
16. Anderson R.B., "Behavior of CTT-Nodes in Reinforced Concrete Strut-And-Tie Models," M.S. Thesis, The University of Texas at Austin, U.S.A., Diciembre 1988.
17. Barton P., "Concrete Compression Fields for the Design of Structural Concrete by Strut and Tie Models," M.S. Thesis, The University of Texas at Austin, U.S.A., Diciembre 1988.
18. Collins M. P. y Mitchell D., "A Rational Approach to Shear Design -- The 1984 Canadian Code Provisions," ACI Journal, Noviembre - Diciembre 1986, pp. 925 - 933.
19. Collins M. P., "Towards a Rational Theory for Reinforced Concrete Members in Shear," Journal of the Structural Division, Vol. 104, No. ST4, Abril 1978, pp. 649 - 665.
20. Marti P., "Basic Tools of Beam Design," ACI Journal, Proceedings, Vol. 82, No. 1, Enero - Febrero, 1985, pp. 46 - 56.
21. Rogowsky D. M. y MacGregor J. G., "Design of Reinforced Concrete Deep Beams," Concrete International: Design and Construction, Vol. 8, No. 8, Agosto 1986, pp. 49 - 58.
22. Ramirez J. A. y Breen J. E., "Evaluation of a Modified Truss-Model Approach for Beams in Shear," ACI Structural Journal, Septiembre - Octubre 1991, pp. 562 - 571.
23. Ramirez J. A. y Breen J. E., "Review of Design Procedures for Shear and Torsion in Reinforced and Prestressed Concrete," Center for Transportation Research, The University of Texas at Austin, U.S.A., Noviembre 1983.

24. Schlaich J., Schäfer K. y Jennewein M., "Toward a Consistent Design of Structural Concrete," Prestressed Concrete Institute Journal, Vol. 32, No. 3, Mayo - Junio 1987, pp. 74 - 150.
25. Vecchio F.V. y Collins M. P., "Predicting the Response of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear Using Modified Compression Field Theory," ACI Structural Journal, Mayo - Junio 1988, pp. 258 - 268.