18
2ej

APUNTES SOBRE OPTIMIZACION DINAMICA PARA UN MODELO DE CRECIMIENTO ECONOMICO

Tesis que para obtener el Título de Matemático presenta

Miguel Mayorga Martínez

13 de septiembre de 1993.

Fac. de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México.

INDICE

PROLOGO (A manera de justificación)

Este trabajo además de intentar cubrir el mero trámite administrativo de rigor para obtener la titulación en la Licenciatura de Matemáticas, tiene un segundo propósito de mayor peso: cubrir el vacio - casi total- que hay en en los textos dirigidos a la gente que estudia Economía y que abordan los problemas de optimización utilizando la herramienta del Cálculo de Variaciones y su pariente cercano, el Principio del Máximo de Pontryaguin.

En efecto, en las décadas recientes los trabajos de los economistas se han caracterizado por un creciente uso de modelos matemáticos más o menos sofisticados: el modelo económico keynesiano se estudia a través de la formulación matemática que en escencia le dio Hicks en 1950; los neokeynesianas, neoliberales y todo la corriente de quienes trabajan con las llamadas "expectativas racionales" han formulado diversos modelos macroeconómicos y microeconómicos que hacen uso de ecuaciones diferenciales, en diferencias, de optimización intertemporal, etc.; aún todo una serie de pensadores marxistas han apelado a los resultados del Algebra Lineal para buscar una presentación formal de la Teoría del Valor.

En contraste, específicamente en el terreno de la optimización intertemporal, la literatura se ha dirigido a un público con cierto grado de especialización, dejando al estudioso común y corriente a la deriva de comprensiones conceptuales de un excesivo grado de generalidad. Aquellos que desean tener una mayor claridad al respecto, se enfrentan a la barrera de un instrumental matemático accesible, cuando menos en nuestro medio, solo al estudiante de las Ciencias "Puras" y de Ingeniería.

En consecuencia, el presente trabajo está elaborado pensando en contribuir a llenar ese hueco. Aquí se intentará hacer digeribles, para un lector con nociones básicas del Cálculo, áreas del conocimiento matemático reservadas, hasta ahora, a los "iniciados". Convendría agregar que, por lo demás, no hay en esto nada de "misterioso" pues los modelos económicos a los que nos referimos parten usualmente de supuestos comprensibles y en ocasiones llegan a conclusiones del todo esperadas dado su paquete inicial de suposiciones.

Así pues, inicialmente se presentrará un menú de los problemas "clásicos" de la llamada optimización intertemporal para delinear nuestro objeto de estudio; posteriormente se desarrollará un método de solución que data de más de dos siglos: el Cálculo de Variaciones; después se reformularán las cosas para analizar un segundo método equivalente, bajo ciertas condiciones, al anterior y que es mucho más reciente: el Principio del Máximo. Para concluir se discutirá uno de los modelos de crecimiento económico mas difundido, cuyo planteamiento y solución dependerá de las herramientas matemáticas desarrolladas previamente: el modelo de Ramsey.

I. INTRODUCCION

Cuando trabajamos con funciones de variable real, $f(x)$ por ejemplo, el problema de buscar el máximo o mínimo, se reduce habitualmente al problema de encontrar un número, el valor de x tal que la derivada $f(x)$ se iguale a cero; analizando el valor de la segunda derivada $f(x)$ podemos determinar si el valor de $f(x)$ en este punto es efectivamente un máximo o un mínimo.

En lo que sigue, se procederá de una manera semejante, solo que ahora la función a optimizar depende no precisamente de una variable, sino de otra función. De esta manera, la solución del problema de optimizar ya no será un número; será, insistimos, una función. Tendremos el equivalente de la condición de que la primera derivada se iguale a cero y podriamos definir asimismo la equivalencia de las condiciones de segundo orden.

Para iniciar, en este capítulo presentaremos el tipo de funciones y problemas con los que vamos a trabajar.

1. FUNCIONAL

Consideremos la siguiente función:

Ejemplo 1.1:

$$J[x(t)]=\int_0^1 x(t)\,dt \ldots.(1)$$

Aquí observamos que J(x(t)) tendrá valores distintos dependiendo de como definamos x(t) En efecto:

$$si\ x(t)=t^2,\ J=\int_0^1 t^2 dx=\frac{t^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

$$si\ x(t)=t,\ J=\int_0^1 t dt=t^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

$$si\ x(t)=e^t,\ J=\int_o^1 e^t dt=e^t\Big|_0^1=1.718\ldots$$

Es decir $J(t^2)$= 0.333, J(t)=0.5; $J(e^*)$= 1.718. ¿ Para qué función x(t), J(x(t)) toma un valor máximo (o mínimo)?. Podemos observar que pudiera haber funciones para los que incluso J se anularía:

$$si\ x(t)=\cos\pi t,\ tenemos\ J=\int_0^1 \cos\pi t dt=\frac{1}{\pi} sen\pi t\Big|_0^1=0$$

A J(x(t)) de le llama funcional y existen toda una gama de problemas interesantes de diversa índole que nos conducen a funcionales que deben ser optimizadas. Consideraremos algunos de ellos.

Así pues en adelante nuestro objeto de estudio serán tales funciones de funciones, con el propósito de encontrar métodos que nos permitan encontrar cuándo toman un valor máximo o mínimo

Ejemplo 1.2

Consideremos un problema geométrico cuya solución es intuitivamente obvia: sean (t_0,x_0), (t_1,x_1) dos puntos en un plano cartesiano; ¿como encontraríamos la curva x(t) tal que la distancia entre dos puntos sea mínima?.

Evidentemente la solución es que la "curva" buscada es realidad una recta, pero podemos plantear el problema en los términos que nos interesa para no traer a colación ninguna "evidencia intuitiva".

Sea x(t) una curva tal que una ambos puntos. Pidamos solo que x(t) sea función y además continua. Supongamos que tiene una cierta forma caprichosa como la de la figura y que el triángulo rectángulo que se delinea ahí está visto con una especie de lupa de tal manera que los lados son "infinitamente" pequeños y en consecuencia, la hipotenusa "casi" coincide con un pedazo pequeño de la curva. (ver gráfica (1).

Entonces definamos:

$$dx=(x+\Delta x)-x_0$$

$$dt=(x_0+\Delta t)-t_0$$

Y por el teorema de Pitágoras:

$$ds^2\approx dx^2+dt^2$$

$$ds\approx\sqrt{dx^2+dt^2}=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+1}\quad dt\approx(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

Pero como nos interesa la longitud de toda la curva y no solo de esa parte "infinitamente pequeña" consideramos la suma de todos esos segmentos "infinitesimales"", es decir, la integral:

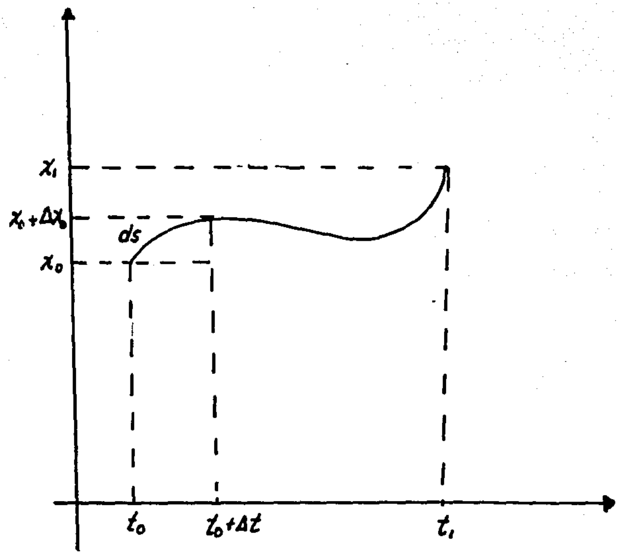


FIGURA No. 1

$$\int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} (x^2+1)^{\frac{1}{2}} dt$$

Entonces definamos

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} (x^2+1)^{\frac{1}{2}} dt \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Y el problema sería encontrar la curva x(t) para la cual J(x) toma un valor mínimo.

Concretemos:

Hemos considerado este par de problemas:

$$J = \int_0^1 x(t)\, dt \quad en \quad (1.1)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (x^2+1)^{\frac{1}{2}} dt \quad en \quad (1.2)$$

En general se considerarán funcionales J que estén definidas por una integral de una expresión que pueda incluir a x, como en (1.1), a x como en (1.2), a la variable t e inclusive a los tres x, x, t, es decir el problema a estudiar es encontrar los valores extremos de

$$J = J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} I(x, \dot{x}, t)\, dt$$

2. Problemas con restricciones:

Existen toda una serie de problemas donde la función x(t) de J(x(t)) debe cumplir ciertas condiciones adicionales, determinadas por la naturaleza misma del fenómeno que se trata de modelar. Por otra parte, hemos considerado I(...) (el integrando de la funcional J) como función de (x,x,t), pero nada impide que pudiera ser en realidad una función de otras variables mas. Veamos un ejemplo donde se reflejen ambas cosas:

Ejemplo 1.3

Sea

$$J=\int_0^1 (ux-u^2-x^2)\,dt \quad con \quad \dot{x}=x+u$$

Aquí se tiene de nueva cuenta J= integral de una función I(....)dt, pero I ahora depende tanto de $\dot{x}$ como de u, además de que éstas ahora deben cumplir una condición adicional. Sin embargo el problema sigue siendo semejante a los vistos anteriormente, solo que ahora en lugar de I= I(x, x, t), tenemos I= I(x(t), u(t), t).

Por ejemplo, tomemos la parametrización $x(t)=t^2$, $u(t)=2t-t^2$, es fácil verificar que x= x + u. En efecto

$$x=2t,\ x+u=t^2+2t-t^2=2t$$

Ahora bien, en este caso

$$J=\int_0^1 (ux-u^2-x^2)\,dt=\int_0^1 [(2t-t^2)(t^2)-(2t-t^2)^2-(t^2)^2]\,dt$$

$$=[-\frac{3}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-\frac{4}{3}t^3]_0^1\approx-0.433$$

Tomemos ahora una parametrización distinta x(t)=3t; u(t)= 3-3t. Aquí también se cumple obviamente que x=x+u. Sustituyendo como en el caso anterior:

$$J=\int_0^1 (ux-u^2-x^2)\,dt=\int_0^1 (27t-27t^2-9)\,dt=$$

$$=[\frac{27}{2}t^2-9t^3-9t]_0^1=-4.5$$

En este caso, como en las vistas anteriormente, J toma valores distintos dependiendo de cómo definamos las variables de los que depende, solo que aquí éstos deben ser escogidos más cuidadosamente para que cumplan la restricción.
En resumidas cuentas tenemos:

Problemas planteados en la sección 1

$$J=\int_{t_0}^{t_1} I(x,\dot{x},t)\,dt....(3)$$

Problema planteado en esta sección:

$$J=\int_{t_0}^{t_1} I(x(t),u(t),t)\,dt \quad sujeto\ a\ \dot{x}=f(x,u,t)\ldots(4)$$

Veamos ahora ejemplos que nos conducen a problemas de la forma (4)

3. Más ejemplos.

Aquí desarrollaremos el planteamiento de diversos problemas que conducen a (3) o (4). Con propósitos de motivación, aquí se deja solamente formulada la cuestión en los términos que nos interesan y los métodos de solución se abordaran en los siguientes capítulos.

Ejemplo 1.4

Sean p(t) los precios unitarios de un cierto producto en función del tiempo y sea Q(t) las ventas acumuladas al tiempo t de dicho producto. Supongamos que la tasa a la cual puede ser vendido el bien depende tanto del precio, como de las ventas acumuladas. Sería de esperar que si el precio se incrementa demasiado, se desplome la tasa de ventas; también sería lógico pensar que después de un cierto nivel de acumulación de ventas, el mercado quedaría saturado y la tasa caería. Lo inverso sería también plausible: si las ventas acumuladas estuvieran lejos de ese nivel, la tasa de venta seguiria creciendo. Una manera de representarlas sería definir de la siguiente manera la tasa de ventas al tiempo t:

$$tasa=\frac{dQ}{dt}=f(p(t))\,g(Q(t))$$
$$f'(p)<0$$
$$g'(Q)>0 \ si\ Q<Q_1$$
$$g'(Q)<0 \ si\ Q>Q_1$$

Hagamos otro supuesto mas: que los costos de producción o bien son fijos, o en la medida en que crecen las ventas, de alguna manera la empresa logra que los costos bajen (por ejemplo por la experiencia acumulada, etc.) es decir

$C=C(Q)$, $C\ (Q)\leq 0$ con C costo unitario

¿Cómo maximizaría beneficios la empresa en un tiempo T? ¿Qué política de precios p (t) debe seguir, donde $0\leq t\leq T$?

El problema se plantea así:

Beneficios en un intervalo de tiempo dado= $(p-C(Q))\ f(p)g(Q)$

Entonces en todo el lapso tendríamos:

$$Max \int_0^T (p-c(Q))\, f(p)\, g(Q)\, dt$$

$$sujeto\ a\ \dot{Q}=f(p)\, g(Q)\,;\ \ Q(0)=Q_0>0$$

Podemos observar que es un problema del tipo (4). Veamos otro ejemplo más cuya solución, luego de algún replanteamiento, será objeto de una mayor discusión en los capítulos que siguen.

Ejemplo 3

Sea K(t) el stock de capital y supongamos que la producción está dada por F(K), una función solo del capital. Naturalmente una función de producción "decente" también debería depender de la fuerza de trabajo, pero supongamos de momento este cuestionable supuesto por mera simplicidad; algunos otros supuestos acerca de F(K) serían señalados más adelante. Supongamos que el producto o se reinvierte, o se consume, es decir

F(K(t))= C(t)+K(t)

Digamos que la utilidad de los individuos depende del consumo; entonces el problema de maximizar a lo largo de todo un periodo, sería equivalente a que los individuos escogieran para cada periodo t, la cantidad exacta de consumo que, sin descuidar la necesaria inversión, optimizara la utilidad total que naturalmente sería la suma de las utilidades de cada momento t. El problema sería entonces

$$\max \int_0^T U(C(t))\, dt$$

$$sujeto\ a\ \dot{K}(t)=F(K(t))-C(t)$$
$$K(0)=K_0;\ \ K(T)\geq 0$$

Observemos que la formulación de este ejemplo tiene la forma (4), sin embargo podriamos simplemente hacer una sustitución para tener

$$\max \int_0^T U(F(K(t))-K(t))\, dt$$

Que se asemeja mas a (3). Lo anterior no es casual; los problemas de la forma (3) los atacaremos con el Cálculo de Variaciones y los de la forma (4) con el llamado Principio del Máximo de Pontryagin, sin embargo se puede demostrar, que ambos enfoques pueden ser equivalentes, de tal manera que un problema puede ser llevado a la forma del otro para ser resuelto con su respectiva metodología.

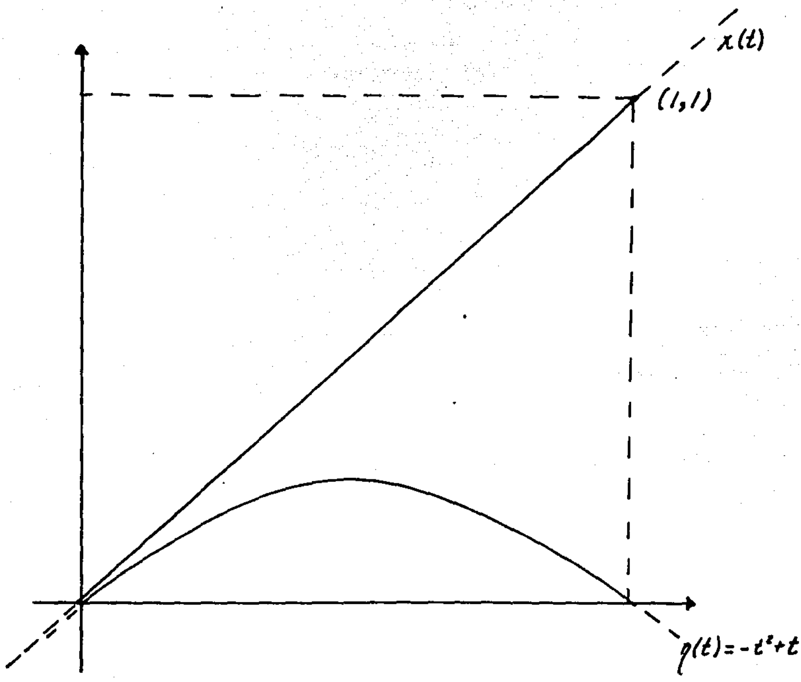


FIGURA No. 2

II EL CALCULO DE VARIACIONES

En este capítulo, desarrollaremos las ideas básicas y fundamentales acerca del problema de encontrar las funciones x(t) para las cuales la funcional

$$J[x(t)]=\int_{t_0}^{t_1} I(x,x,t)\,dt$$

toma un valor extremo

Conviene aclarar que nuestro estudio se centrará en la llamada ecuación de Euler, encontrada por este autor hace más de dos siglos, (en 1744). De entonces a la fecha la metodología euleriana se ha formalizado como una materia propia dentro de las matemáticas, bajo el nombre con el que titulamos este apartado. El Cálculo de Variaciones ha sido un instrumento valioso en áreas tan diversas como la Geometría Diferencial y la Mecánica Cuántica. Por nuestra parte, mediante una aproximación que se pretende simple, intentaremos comprender algunas de sus aplicaciones en Economía.

1. Un replanteamiento

Consideremos de nueva cuenta el problema de encontrar la curva de longitud mínima que une dos puntos en el plano. Supongamos por simplicidad que tales puntos son el origen y el punto (11). De antemano sabemos que tal curva será la recta $x(t)= t$. Podemos considerar, no obstante, otras muchas posibilidades no óptimas de la siguiente manera.

Sea

$$\eta(t)=-t^2+t$$

dicha función es una parábola orientada hacia abajo y que pasa por los puntos (0,0) y (1,0):

Observemos ahora que si definimos

$$x(t)=x(t)+\epsilon\eta(t)=t+\epsilon(-t_2+t)$$

Tendremos otras curvas admisibles en principio aunque no óptimas, por ejemplo

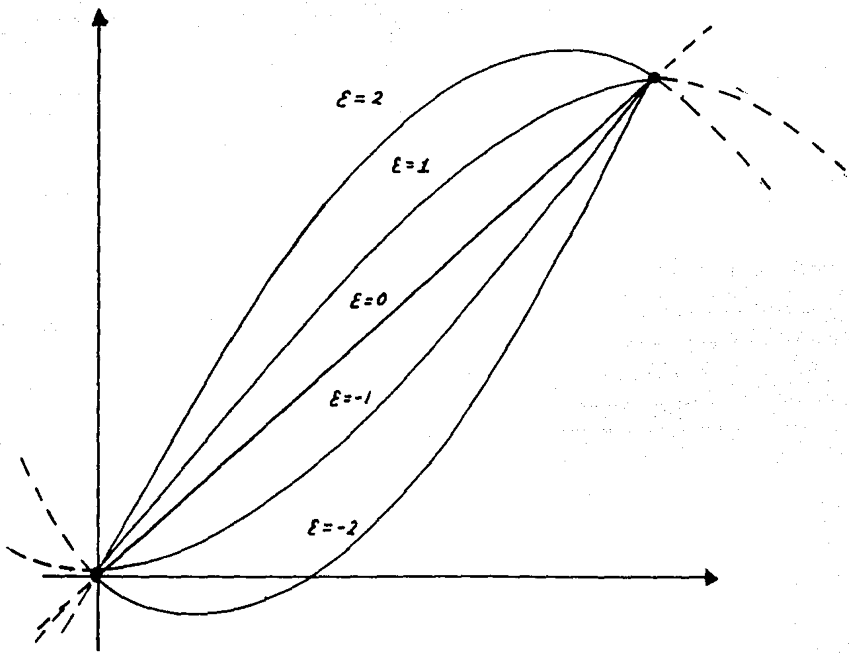


FIGURA No. 3

$\epsilon=2;\ x(t)= t + 2\ (-t^2 + t)= 3t-2t^2$
$\epsilon=-1;\ x(t)= t-(-t^2 + t)= t^2$
$\epsilon=-2;\ x(t)= t - 2(-t^2 + t)= 2t^2 - t$

Podemos observar que efectivamente todas esas curvas pasan por los puntos (0,0) y (1,1); gráficamente: (ver gráfica 3).

Es decir, dada la solución $x(t)=t$ y una curva $\eta(t)=- t^2 + t$,hemos construido otra serie de curvas, que bien tienen una longitud mayor a la de la recta, también unen a los puntos en cuestión.

Observamos asimismo que para cada valor de ϵ, tenemos un valor determinado para la longitud del segmento de curva; recordemos que dicha longitud, según dedujimos en el capítulo anterior, está dada por:

$$J=\int_0^1 (x^2+1)^{\frac{1}{2}} dt$$

Ahora bien para cada valor de ϵ podemos calcular el respectivo valor de J mediante la integración correspondiente

$\epsilon= 2,\ J=$
$\epsilon= 1,\ J=$
$\epsilon= 0,\ J= 2$
$\epsilon= -1,\ J=$
$\epsilon= -2,\ J=$

Así pues, podemos hacer dos observaciones; gracias al truco de obtener curvas no óptimas, pero admisibles definiendo

$$x(t)=x(t) +\epsilon\eta(t).$$

Tenemos que:

(i) el valor de J depende del valor de ϵ, J se convierte en función de ϵ.

(ii) J toma el valor mínimo cuando $\epsilon=0$

De lo anterior podemos deducir la siguiente conclusión importante

$$J'(\epsilon)= 0 \text{ si } \epsilon= 0$$

En resumen, si bien no hemos resuelto formalmente el problema, lo hemos replanteado en unos términos que resultarán ser mas fructíferos.

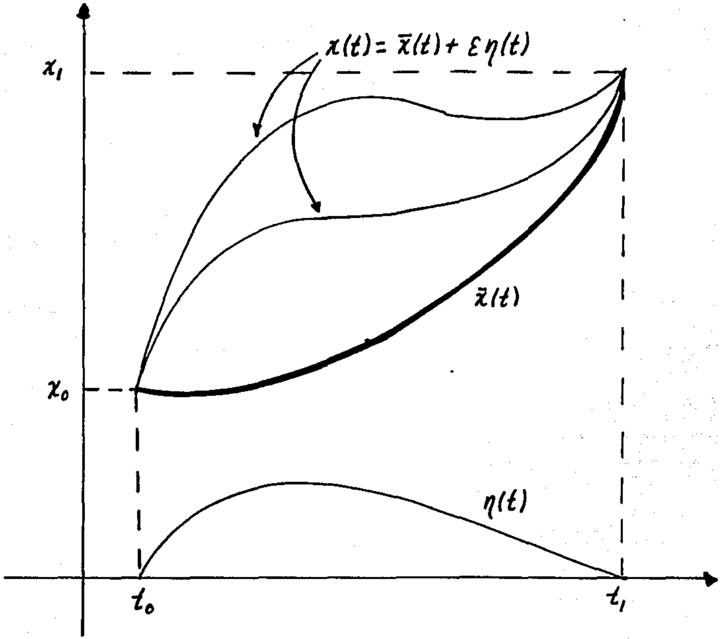


FIGURA No. 4

2. La ecuación de Euler

Intentaremos recoger el replanteamiento, obteniendo en el caso particular anterior, con el propósito de colocarlo en un contexto mas general.

El problema a resolver es encontrar la función $x(t)$ para la cual J toma un valor extremo donde:

$$J=\int_{t_0}^{t_1} I(\dot{x}, x, t)\, dt$$

$$\text{con } x(t_0)=x_0;\ x(t_1)=x_1$$

Supongamos como en el caso anterior, que de alguna manera tenemos la solución $x(t)$ al problema, además de una función $\eta(t)$ tal que $\eta\ (t1)= \eta\ (t\ )= 0$. Entonces podemos definir curvas admisibles

$$x(t)=\overline{x}(t)+\epsilon\eta(t)x....(1)$$

(ver gráfica 4)

Entonces

$$J(x(t))=\int_{t_0}^{t_1} I[\overline{x}(t)+\epsilon\dot{\eta}(t), \overline{x}(t)+\epsilon\eta(t), t]\, dt$$

Pero como $x(t)$ y $\eta(t)$ están dados, entonces en realidad $J = J(\epsilon)$

Y como en el caso anterior, por hipótesis, J toma un valor extremo cuando $\epsilon= 0$, es decir:

$$J'(\epsilon)= 0 \text{ si } \epsilon= 0$$

Lo cual podemos replantearlo así:

$$J'(\epsilon)=\frac{d}{d\epsilon}\int_{t_0}^{t_1} I(\dot{x}, x, t)\, dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{d\epsilon}I(\dot{x},x,t)\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \epsilon}+\frac{\partial I}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \epsilon}+\frac{\partial I}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \epsilon}\right)dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}(t)+\frac{\partial I}{\partial x}\eta(t)\right)dt$$

Para continuar, haremos una integración por parte del primer sumando:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}(t)\right)dt=$$

$$=\eta(t)\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\eta(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right)dt$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}\eta(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)dt \text{ pues } \eta(t_0)=\eta(t_1)=0$$

De donde sustituyendo:

$$J'(\epsilon)=\int_{t_0}^{t_1}\left[\eta(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right)dt+\eta(t)\frac{\partial I}{\partial x}\right]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\eta(t)\left[\frac{\partial I}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right)\right]dt=0$$

Hemos llegado a este resultado suponiendo $\eta(t)$ como dada, esto debe cumplirse aunque se diera cualquier otra $\eta(t)$, pues solo requerimos que dicha curva cumpla que $\eta(t0)=\eta(t1)=0$, entonces, como la integral debe anularse, es forzoso que la expresión entre corchetes deba ser cero. La demostración formal de este razonamiento, nada difícil, puede consultarse en el apéndice.

Tenemos entonces que si $J'(\epsilon)=0$, $\epsilon=0$, entonces obtenemos la llamada Ecuación Euler:

$$\frac{\partial I}{\partial x}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right)$$

Pero como $\epsilon= 0$ entonces de (1), $x(t)= x(t)$.

En otras palabras, hemos encontrado una ecuación que debera cumplirse siempre que $x(t)$ sea la curva óptima. Expresando en los términos lógicos de una implicación, tenemos que si $x(t)$ es óptima, entonces cumple la ecuación, de donde no puede concluirse que forzosamente si $x(t)$ cumple la ecuación, entonces es óptima.

Es decir, la ecuación encontrada, es solo una condición necesaria, pero no suficiente, para que $x(t)$ sea la solución buscada.

Lo anterior no deberia ser decepcionante. Usualmente cuando una $x(t)$ cumple la ecuación en el recuadro, el contexto del problema mismo nos permite saber si es efectivamente un máximo o un mínimo. Por otra parte de la misma manera que para funciones reales de variable real definimos criterios de segundo orden para analizar máximos y mínimos, también en el Calculo de Variaciones podemos definir criterios adicionales para analizar los valores extremos de J. No lo haremos aquí y más bien remitiremos al lector interesado a Takeyama, p( ) donde verá que bajo ciertas exigencias a $I(x,x,t)$, la ecuación de Euler sí puede constituirse en una condición necesaria y suficiente.

Antes de seguir adelante, realizaremos algunos ejemplos que nos permitirán ver el uso de la ecuación de Euler.

Ejemplo 2.1

Retomemos el ejemplo 3 de la sección anterior y añadamos algunos supuestos más:

a) Que por cada unidad de capital, se obtienen unidades de producto, es decir, $F(K)=\alpha K$, *con* $\alpha>1$ para que tenga sentido la producción.

b)Que los individuos obtienen su bienestar atendiendo a una actitud insaciable: su actitud crece de manera logarítmica en función del consumo; entre más consume, más quieren consumir: $U= \log C(t)$.

c)Que se intenta maximar en un periodo de un año teniendo un capital inicial de una unidad y pretendiendo que al final, no se tenga nada.

Entonces el problema quedaria planteado así:

$$Max \int_0^1 \log(\alpha K(t) - \dot{K}(t))\,dt$$

$$sujeto\ a\ K(0)=1,\ K(1)=0$$

Para aplicar la ecuación de Euler, identificamos:

$$I = log(\alpha K - K)$$

Entonces

$$\frac{\partial I}{\partial K} = \frac{\alpha}{\alpha K - \dot{K}};\ \frac{\partial I}{\partial \dot{K}} = -\frac{1}{\alpha K - \dot{K}}$$

$$además\ \frac{d}{dt}(\frac{\partial I}{\partial \dot{K}} = \frac{\alpha \dot{K} - K}{(\alpha K - \dot{K})^2}$$

entonces siendo que se debe cumplir la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial I}{\partial K} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial I}{\partial \dot{K}})$$

tenemos

$$\frac{\alpha}{\alpha K - \dot{K}} = \frac{\alpha \dot{K} - K}{(\alpha K - \dot{K})^2}$$

$\alpha^2 K - K = \alpha K - K;$ de donde tenemos la ecuación diferencial de segundo orden:

$$K\ (t) - 2\alpha K(t) + \alpha^2 K(t) = 0$$

Si proponemos la solución $K(t) = e^{rt}$ tendremos la ecuación característica.

$$r^2 - 2\alpha r + r^2 = 0 \text{ de donde } r=\alpha$$

La solución general sería en consecuencia:

$$K(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 t e^{\alpha t}$$

Pero

$$K(0) = 1 \text{ de donde } c_1 = 1$$
$$K(1) = 0 \quad c_2 = -1$$

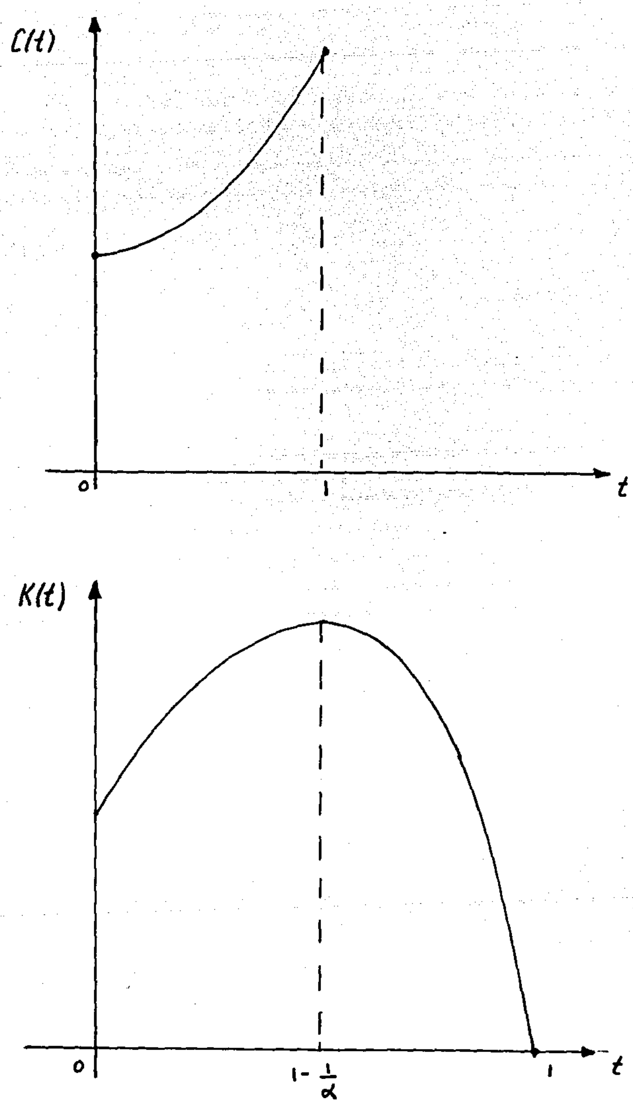


FIGURA N. 5

Es decir

$$K(t)=e^{\alpha t}-te^{\alpha t}=(1-t)\,e^{\alpha t}$$

Ahora bien, para obtener el consumo, tenemos

$$C(t)=\alpha K(t)-\dot{K}(t)=\alpha e^{\alpha t}-\alpha te^{\alpha t}-(\alpha e^{\alpha t}-e^{\alpha t}-\alpha e^{\alpha t})=e^{\alpha t}$$

Entonces tendríamos los siguientes resultados:

para $t=0,\ c(t)=1\ ;\ F(K\ (t))=\alpha\ \ ;\ K=\alpha\ -1$
$t=1,\ c(t)=e^{\alpha}\ ;\ K(t)=0;\ F\ (K(t))=0;\ K=-e^{\alpha}$

Podemos graficar el comportamiento de K y C en función del tiempo (ver gráfica 5).

Volveremos a ese problema haciendole algunos agregados y planteandolo de manera general.

3.- Casos especiales de la ecuación de Euler.

Antes de continuar conviene aclarar que la Ecuación Euler, una ecuación en derivados parciales, no siempre nos llevará a expresiones fácilmente manipulables; incluso pudiera darse el caso de que la ecuación no fuera resuelta con los métodos conocidos. No obstante, toda una serie de problemas conducen a una ecuación de Euler bastante manejable. Más aún, frecuentemente la función I(.) de (3), es más bien sencilla y no contiene una o dos de las variables que le hemos atribuido en su argumento.

Eso nos lleva a plantear la solución de la ecuación de Euler para una serie de casos específicos. Para abordar tal cosa, primeramente desarrollaremos la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial I}{\partial x}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right)\frac{dx}{dt}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}^2}\frac{d\dot{x}}{dt}+\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial \dot{x}}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2 I}{\partial t\partial \dot{x}}$$

$$=\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x}+\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial \dot{x}}\dot{x}+\frac{\partial^2 I}{\partial t\partial \dot{x}}$$

Lo cual suele expresarse como

$$I_{\dot{x}\dot{x}}\frac{d^2x}{dt^2}+I_{x\dot{x}}\frac{dx}{dt}+(I_{\dot{x}t}-I_x)=0\ldots(5)$$

Con tal resultado, procedemos a analizar algunos de los casos múltiples de la ecuación de Euler.

(i) $I= I(\dot{x})$ es decir no aparecen x ni t en el integrando de (3), entonces (5) queda así:

$$I_{\dot{x}\dot{x}}\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

Ahora bien si $I_{XX}= 0$ entonces

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

$$\therefore x=c_1 t+c_2$$

Es decir la solución son líneas rectas.

(ii) x no aparece en la expresión de I, $I=I(\dot{x},t)$ entonces la ecuación de Euler queda así:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right)=0$$

De donde

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}=c_1$$

(iii) t no aparece en la función I, $I=(x,\dot{x})$. Entonces (5) queda

$$I_{\dot{x}\dot{x}}\frac{d^2x}{dt^2}+I_{x\dot{x}}\frac{dx}{dt}-I_x=0$$

Multiplicando todo por x tenemos:

$$\dot{x}(I_{\dot{x}\dot{x}}\frac{d^2x}{dt^2}+I_{x\dot{x}}\frac{dx}{dt})-\dot{x}I_x=0$$

sumando y restando lo mismo:

$$\dot{x}(I_{\dot{x}\dot{x}}\frac{d^2x}{dt^2}+I_{x\dot{x}}\frac{dx}{dt})+I_{\dot{x}}\ddot{x}-I_{\dot{x}}\ddot{x}-\dot{x}I_x=0$$

Lo cual puede expresarse como:

$$(\dot{x}\frac{d}{dt}I_{\dot{x}}+I_{\dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt})-\frac{d}{dt}I=0$$

$$=\frac{d}{dt}\dot{x}I_{\dot{x}}-\frac{d}{dt}I=\frac{d}{dt}(\dot{x}I_{\dot{x}}-I)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(\dot{x}I_{\dot{x}}-I)=0$$

e integrando

$$\dot{x}I_{\dot{x}}-I=c_1 \ldots . (6)$$

A continuación aplicamos estos resultados a la resolución de algunos problemas. Para empezar resolveremos el problema 1.1., ahora sí formalmente.

Teniamos la cuestión formulada en estos términos:

$$Min \int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}^2+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$con\ x(t_0)=x_0\ ;\ x(t_1)=x_1$$

Observemos que aquí $I=(\dot{x}^2+1)^{1/2}$ y no depende ni de x, ni de t explícitamente, entonces estamos en el caso (i), pues en efecto al plantear la ecuación de Euler tendremos:

$$\frac{\partial I}{\partial x}=0,\ \frac{\partial I}{\partial \dot{x}}=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+1)^{-\frac{1}{2}}(2\dot{x})=\frac{\dot{x}}{(\dot{x}^2+1)^{1/2}}$$

entonces

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}})=\frac{x(\dot{x}^2+1)^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{(\dot{x}^2+1)^{1/2}}\dot{x}^2}{(\dot{x}^2+1)}$$

y la ecuación de Euler queda:

$$x(\dot{x}^2+1)^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{(\dot{x}^2+1)^{1/2}}\dot{x}^2=0$$

Multiplicando por la raíz de ambos lados:

$$x(\dot{x}^2+1)-x\dot{x}^2=0$$

de donde $x = 0$; integrando:

$x= C_1 t + C_2$ que es lo que habíamos afirmado inicialmente.

Ahora bien

$$x(t_0)= C_1 t_0 + C_2 = x_0$$

$$x(t_1)= C_1 t_1 + C_2 = x_1$$

de donde

$$C_1=(\frac{x_0-x_1}{t_0-t_1}),\quad C_2=x_0-(\frac{x_0-x_1}{t_0-t_1})\,t_0$$

$$C_1=(\frac{x_0-x_1}{t_0-t_1})\,t+(x_0-(\frac{x_0-x_1}{t_0-t_1})\,t_0)$$

despejando y reagrupando

$$x-x_0=(\frac{x_0-x_1}{t_0-t_1})\,(t-t_0)$$

Que es la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados como era de esperarse.

Ejemplo 3.2

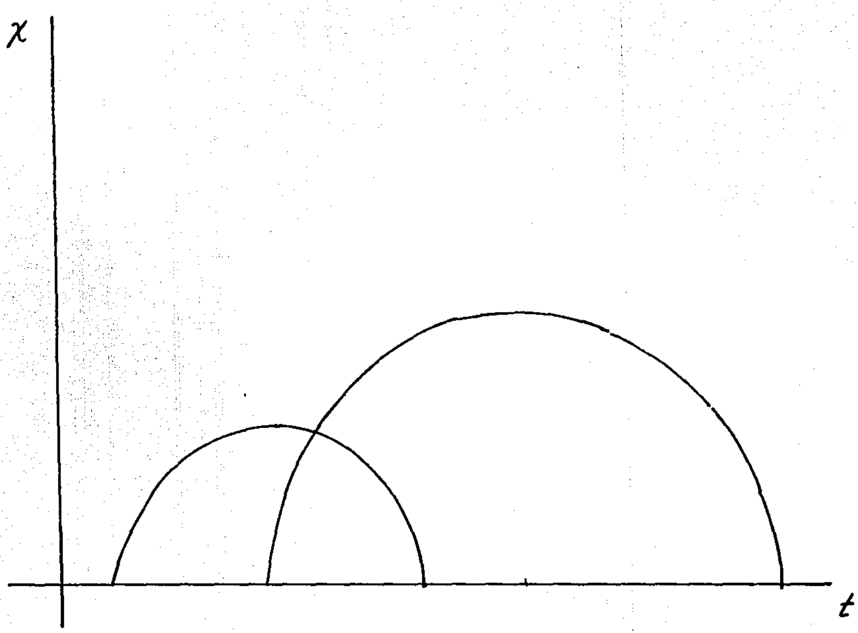


FIGURA N· 6

$$Mín \int_{t_0}^{t_1} \frac{(\dot{x}^2+1)^{\frac{1}{2}}}{x} dt$$

Observamos que aquí $I = I\ (x,\dot{x})$, entonces se trata del caso (iii), es decir $I - \dot{x}I_{\dot{x}} + C_1$

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{x(\dot{x}^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\dot{x}I_{\dot{x}} = \frac{\dot{x}}{x(\dot{x}^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

de donde

$$\frac{(1+\dot{x}^2)^{1/2}}{x} - \frac{\dot{x}^2}{x(1+\dot{x}^2)^{1/2}} = c_1 = \frac{1}{x(1+\dot{x})^{1/2}}$$

Despejando x:

$$\dot{x} = \frac{(c-\dot{x})^{1/2}}{x} \quad con\ c_1 = \frac{1}{c_2}$$

Entonces podemos integrar con el método de separación de variables y después integrando con una sencilla sustitución algebraica tenemos:

$$x^2 = -(t + c_2)^2 + c_1$$
$$x^2 + (t + c_2)^2 = c_1$$

Que son circunferencias con centro en $(-c_2\ ,0)$ y radio $\sqrt{c}$. (ver figura 6).

Lo anterior tiene una gran importancia en Física. Puede demostrarse que una función x(t) que optimice (7) nos da el camino que recorre un rayo de luz al propagarse, con velocidad proporcional a x, en un medio bidimensional no homogéneo. Entonces los rayos de luz representan arcos de circunferencia con centros en el eje t.

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 2.0:

Este ejemplo suele denominarse el "problema dinámico del monopolio" (ver R.D.G. Allen) supongamos que una cierta empresa puede imponer sus precios en el mercado sin otra restricción que la demanda; el público demanda, a su vez, dependiendo del precio ocurrente y del cambio que éste sufre a través del tiempo. El costo es una función de la cantidad producida; entonces:

Demanda $= q = q(p(t),\ p(t))$; *precio* $= p(t)$
Costo $= C(q)$

Los beneficios serán la diferencia entre la cantidad vendida por su precio y el coste de producción:

Beneficios $= qp - C(q)$

A lo largo de un intervalo de tiempo $[t_0\ ,\ t_1\ ]$ la suma de Beneficios será:

$$\textit{beneficios totales}=\int_{t_0}^{t_1}(qp-c(q))\,dt$$

Para continuar haremos un supuesto que Allen llama "artificio" pero que, como se verá mas abajo, puede suavisarse razonablemente. Asumiremos que $p(t)= p$ y que al final del periodo la empresa conoce a qué precio deberá venderse su producto, es decir $p(t_1) = p_1$

Aquí $I= qp - C(q)= pq(p(t),\ p(t)) - C(q\ (p(t),\ p(t)))$, es decir $I= I(p,\ p)$, entonces estamos en el caso (iv) en donde establecimos:

$I = pIp + etc.$

Especificamente:

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{p}}=p\frac{\partial q}{\partial q}-\frac{\partial C}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \dot{p}}=(p-\frac{\partial C}{\partial q})\,\frac{\partial q}{\partial \dot{p}}$$

y sustituyendo

$$qp-C(q)=(p-\frac{\partial C}{\partial q})\,\frac{\partial q}{\partial \dot{p}}+cte.$$

Lo que en principio es una ecuación diferencial que depende de p, p. Para ver un caso concreto, deberemos hacer supuestos también más concretos acerca de nuestras funciones. Supongamos que la demanda depende linealmente del precio actual y de su cambio, asumamos también que los costos son una función cuadrática de la cantidad producida, es decir:

$q = ap + b + cp$
$C(q) = \alpha q2 \; + \beta q + \gamma$

Sin pérdida de generalidad, podriamos hacer un cambio de variables para hacer más manipulable la función de costos. Abusando de la notación tendremos:

$C(q)= \alpha q^2$

Entonces $I= qp - C(q)= ap^2 \; + bp + cpp - \alpha q^2$

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{p}}=cp-2\alpha cq$$

$$\dot{p}I_{\dot{p}}=c\dot{p}p-2c\dot{p}q$$

Sustituyendo nos da $ap_2 + \alpha bp - \alpha q^2 = 2\alpha cpq + constante$

Derivando respecto a t y simplificando:

$2ap + b - 2\alpha aq + 2\alpha cap + 2\alpha c^2p = 0$

Sustituyendo q y reagrupando:

$$p+\frac{2a(1-a\alpha)}{2\alpha c^3}p+\frac{b-2ab\alpha}{2\alpha c^2}=0$$

Que es una ecuación diferencial de segundo orden cuya solución particular es:

$$p=\frac{2ab\alpha-b}{2a(1-a\alpha)}=\overline{p}$$

Y la solución de la homogénea:

$$p=c_1e^{r}+c_2e^{-r};\quad r=(\frac{a(1-a\alpha)^{1/2}}{\alpha c^2})^{1/2}$$

Obviamente requerimos $a<0$, $\alpha>0$, lo cual es consistente con las definiciones de nuestras funciones, pues en la medida en que crece el precio, esperamos que disminuya la cantidad demandada, al mismo tiempo que cuando crece el producto debiera, crecer su costo.

La solución general es:

$$p = p + C_1 e^{rt} + C_2 e^{-rt}$$

Donde los valores C_1, C_2 están determinados por las condiciones:

$$p(t_0) = p_0 ; p(t_1) = p_1$$

Considerando nuevamente el caso general, si desconociera p , el precio final, la empresa tendrá una función de beneficios.

$$u = F(p_1)$$

Entonces el monopolista escogerá de todos los precios posibles, aquel que maximice u, es decir:

$$du/dp_1 = 0; \ d^2u/dp_1^2 < 0$$

Lo cual determinara el valor p_1 que deberemos sustituir en la ecuación resultante.

Ejemplo 2.3

Supongamos que una empresa desea minimizar costos bajo las siguientes características: El costo unitario de producción crece proporcionalmente a la tasa de producción: Entre más rápido se produzca, más costo se tiene. Se supone que hay costo por retener a los productos ya elaborados en existencia al momento t; entonces:

Costo de $x(t) = C_2$
Costo de incrementar $x(t)$: $C_1 x(t)$

Entonces costos total: $(C_1x)x + (C_2)(x) = C_1 x + C_2 x$. Si pretendemos minimizar en todo un periodo, de 0 a T y además se quiere que en T se tengan B existencias, el problema sería:

$$Mín\int_0^1 (c_1\dot{x}^2 + c_2x)\, dt$$

$$s.a. \quad x(0) = 0; \ x(T) = B$$

Entonces tenemos:

$$I = c_1\dot{x}^2 + c_2x$$

$$\frac{\partial I}{\partial x}=c_2; \quad \frac{\partial I}{\partial \dot{x}}=2c_1\dot{x}; \quad \frac{d}{dt}I_{\dot{x}}=2c_1x$$

Entonces la ecuación de Euler queda:

$$2c_1x=c_2; \quad x=\frac{c_2}{2c_1}$$

e integrando tenemos

$$x(t)=\frac{c_2}{4c_1}t^2+k_1t+k_2$$

Ampliando las condiciones:

$$x(0)=0=k_2; \; x(T)=B=\frac{c_2}{4c_1}T^2+k_1T+k_2$$

$$\therefore \; k_1=\frac{B}{t}-\frac{c_2T}{4c_1}$$

4. Replanteando dos ejemplos.

En los problemas de economía es usual plantear los casos desde el punto de vista del valor presente; es decir pensando que las acciones de un momento dado tendrán efecto sobre el futuro pero de una manera acumulada. Se trata de concebir determinadas situaciones funcionando como funciona una inversión bancaria con interés compuesto aplicado a un tiempo continuo. Por eso se aplica en el integrado un factor de descuento: para considerar la función en cuestión en su valor presente neto. Para un desarrollo más detallado de estas ideas, consúltese el apéndice.

Desde esta prespectiva retomaremos, para concluir este capitulo, dos problemas planteados previamente.

Ejemplo 2.4:

Supongamos que en el ejemplo 1, los individuos tienen una función de utilidad tal, que la utilidad reportada en un momento dado, tiene implicaciones sobre la utilidad de un momento posterior. Específicamente, asumamos que el problema ahora es:

$$Max \int_0^1 (\log C)\, e^{-\alpha t} dt$$

Ahora supongamos que $F(K) = W + rK$, entonces

$$\dot{K} = w + rK - C$$

Y $K(O) = 0 = K(T)$; es decir que no se tiene capital ni al principio, ni al final. Entonces sustituyendo:

$$Max \int_0^1 (\log\ (w + rK - \dot{K}))\, e^{-\alpha t} dt$$

Donde $I = \log\ (w + rK - \dot{K})\ e^{-\alpha t}$, entonces

$$\frac{\partial I}{\partial K} = \frac{re^{-\alpha t}}{w + rK - \dot{K}};\quad \frac{\partial I}{\partial \dot{K}} = \frac{-e^{-\alpha t}}{w + rK - \dot{K}}$$

$$\frac{d}{dt} I_{\dot{K}} =$$

$$= \frac{\alpha e^{-\alpha t}(w + rK - \dot{K}) + e^{-\alpha t}(r\dot{K} - \ddot{K})}{w + rK - \dot{K}} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{-e^{-\alpha t}}{w + rK - \dot{K}}\right)$$

La ecuación de Euler sería, sustituida en términos de C:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{-e^{-\alpha t}}{c}\right) = \frac{re^{-\alpha t}}{c}$$

de donde

$$\frac{(\alpha e^{-\alpha t})(c) + \dot{c}(e^{-\alpha t})}{c^2} = \frac{re^{-\alpha t}}{c}$$

y despejando y eliminando el exponencial:

$$\dot{c} = (r - \alpha)\, c$$

integrando esta ecuación:

$$C=k_1 e^{(r-\alpha)t}$$

Sustituyendo tenemos:

$$\dot{K}-rK=w-C=w-k_1 e^{(r-\alpha)t}$$

Una solución particular sería

$$K_p=\frac{K_1}{\alpha}e^{(r-\alpha)t}-\frac{W}{r}$$

Y la solución de la homogénea sería evidentemente $K_h = K_2 e^r$, entonces la solución general es:

$$K=k_2 e^{r}+\frac{k_1}{\alpha}e^{(r-\alpha)t}-\frac{W}{r}$$

Aplicando las condiciones podemos obtener los valores de K_1, K_2. Comparese esta solución con la planteada sin el factor de descuento. Aun volveremos a este problema pero planteandolo con una función de utilidad $U= U(C)$ en general y una función de producción $F= F(K, L)$ que depende ahora tanto del capital como del trabajo.

Ejemplo 2.5:

Supongamos que en el problema 2.1. los gastos son descontados a una tasa r, entonces tendremos ahora:

$$Mín \int_0^1 e^{-rt}(c_1\dot{x}^2+c_2 x)\,dt$$

$$s.a.\ x(O)= O;\ x(T) = B$$

Entonces ahora tenemos $I= e^{-rt}(C_1\dot{x}^2 + C_2 x)$ de donde

$$\frac{\partial I}{\partial x}=c_2 e^{-\alpha t};\quad \frac{\partial I}{\partial \dot{x}}=2c_1\dot{x}e^{-rt};\quad \frac{d}{dt}I_{\dot{x}}=2c_1 \ddot{x}e^{-rt}-2c_1 r\dot{x}e^{-rt}$$

Y por la ecuación de Euler tenemos:

$$2C_1\, x - 2C_1\, rx = C_2$$

$$x - rx = C_2/2C_1$$

Haciendo $u = x$ y resolviendo la ecuación diferencial tenemos:

$$u(t) = k_1 e^{rt} - \frac{C_2}{2C_1 r} = \dot{x}(t)$$

Integrando esta última tenemos:

$$x(t) = \frac{k_1}{r} e^{rt} - \frac{C_2}{2C_1 r} + k_2$$

Donde los valores de K_1, K_2 se pueden encontrar aplicando las condiciones.

Véase que, aplicando el factor de descuento, ahora x(t) debe crecer exponencialmente en vez de hacerlo de manera cuadrática como se planteaba originalmente.

5. Comentarios finales.

Los ejemplos replanteados podrian aceptar una modificación más: El valor "final" de $x(t)$. En efecto, en el problema de encontrar el costo mínimo, podria plantearse que se quiere llegar efectivamente a concluir el proceso cuando se produzcan B unidades, pero que no nos interesa cuanto tarden en producirse. Pretenderemos que el costo total sea el menor posible sin importarnos el tiempo.

En tal caso tendríamos que $x(0) = 0$, pero en $x(T) = B$, T esta libre.

Observemos que si aplicamos la ecuación de Euler tal cual, quedara indeterminada una constante de integración pues nos quedaba:

$$x(t) = \frac{k_1}{r} e^{rt} - \frac{C_2}{2C_1 r} + k_2$$

Y calculabamos k_1, k_2 aplicando $x(0) = 0$, $x(t) = B$. Así pues para poder compensar la "falta" de una condición de frontera, se echa mano de un resultado conocido como Condiciones de Transversalidad, mismo que aparece en el apéndice.

Análogamente en nuestro problema 2.2, nos quedaba una expresión como:

$$Max \int_0^1 e^{-rt} I(\dot{x}, x)\, dt$$

$$s.a. \; x(O) = x(T) = 0$$

No obstante, si se trata de la utilidad de los individuos y nos preguntamos no por una generación, sino por la sociedad en su conjunto, no tiene sentido maximizar solo hasta T y entonces escribimos el símbolo ∞ en limite superior del integrado y queda libre la condición "final".

En este caso no se aplican condiciones de transversalidad, sino se busca de entre las posibles soluciones x(t), aquella que tienda, cuando t crezca infinitamente, a un nivel estacionario x^S. A este se le llama estado estacionario y se caracteriza por ser aquel en el cual x = x = 0.

Entonces la segunda condición de frontera se toma usualmente como:

$$\lim_{t \to \infty} = x_s$$

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.6

$$Min \int_0^\infty e^{-rt} (x^2 + ax + b\dot{x} + c\dot{x}^2)\, dt$$

$$s.a. \; x(O) = x_0$$

$$I = (x^2 + ax + b\dot{x} + c\dot{x}^3)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x}=e^{-rt}(2x+a)\ ;\ \ \frac{\partial I}{\partial \dot{x}}=e^{-rt}(b+2c\dot{x})$$

$$\frac{d}{dt}I_{\dot{x}}=-re^{-rt}(b+2c\dot{x})+e^{-rt}(2cx)$$

Entonces por la ecuación de Euler:

$$2x+a=-r(b+2c\dot{x})+2x;\ \ x-rx-\frac{x}{c}=\frac{a+rb}{2}c$$

Definimos x_S como aquel donde $x=x=0$, este caso:

$$x_S=(\ -a+rb)/2$$

Y observamos que es la solución particular de la ecuación diferencial. La solución general será entonces:

$$x(t)=Ae^{\lambda_1 t}+Be^{\lambda_2 t}-\frac{a+rb}{2}$$

Donde

$$\lambda_{1,2}=\frac{r}{2}\ \pm((\frac{r}{2})^2+\frac{1}{c})^{1/2}$$

En este caso, las raíces son reales y de signos opuestos, entonces aplicamos:

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=x_s$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=A\lim_{t\to\infty} e^{\lambda_1 t}+B\lim_{t\to\infty} e^{\lambda_2 t}-\frac{a+rb}{2}=x_s$$

Debemos entonces hacer $A=0$ si $\lambda_1>0$, entonces:

$$x(t)=Be^{\lambda_2}+x_s$$

Pero $x(0)= x_0 = B + x_S$, de donde $B= x_0 - x_S$ y

$$x(t)=(x_0-x_s)\,e^{\lambda_2 t}+x_s$$

Es usual plantear, en una exposición del Cálculo de Variaciones, el problema de optimizar (3) pero sujeto a restricciones que delimitan el conjunto del cual podemos escoger la función optimizadora x(t). De hecho el ejemplo 2.3 es un caso especial donde sucede tal cosa, y como recordara el lector, se resolvió mediante una simple sustitución. La manipulación de otras restricciones no es tan simple, pero dado que eso cae fuera del propósito de esta exposición, remitiremos a la persona interesada los textos que aparecen en la bibliografía, especialmente en los temas intitulados "problemas isoperimétricos".

APENDICE AL CAPITULO II

Abordaremos aquí temas complementarios que ayudarían al lector interesado, a una mayor comprensión del Cálculo de Variaciones. Por requerir un mayor dominio de algunos conceptos matemáticos, introducimos estos temas solo como material complementario.

1. El lema fundamental del Cálculo de Variaciones

Sea $F(t)$ una función dada, continua en $[a,b]$. Sea $n(t)$ una función continua cualquiera en dicho intervalo pero tal que $n(a)= n(b)= 0$. Si sucede que:

$$\int_a^b F(t)\,\eta(t)\,dt=0$$

Entonces $F(t)$ es idénticamente igual a cero en todo ese intervalo.

Prueba: Demostremos esta proposición por reducción al absurdo. Supongamos que $F(t_0)= 0$ *para* $t\epsilon[a,b]$, digamos $F(t_0)>0$. Entonces por ser F continua, $F(t)>0$ para t en una vecindad cerca a t_0, digamos $t\epsilon[c, d]\supset[a,b]$.

Seleccionamos una $n(t)$ tal que $n(t)>0$ para $t\epsilon[c,d]$ y $n(t)= 0$ en cualquier otro punto en $[a,b]$. Entonces:

$$\int_a^b F(t)\,\eta(t)\,dt=\int_d^c F(t)\,\eta(t)\,dt>0$$

Lo cual contradice la hipótesis y demuestra, por tanto, el lema.

2. El factor de descuento

Si A pesos son invertidos con una tasa de interés r anual, en un año el capital invertido sera:

$$A + rA = (1 + r)\,A$$

Al segundo año:

$$(1 +r)\,A + r(1+r)A = (1 +r)^2\,A$$

Es decir en t años:
$(1 +r)^t A$

Si la tasa de interés no fuera anual, pues se pudiera reinvertir semestralmente, tendríamos al año:

$$(1 + r/2)^2 A$$

En t años:

$$(1 + r/t)^t = A$$

En general si se pudiese reinvertir m veces al año, la tasa de interés por periodo seria r y tendríamos

$$\text{en un año:} \quad (1 + r/m)^m A$$

$$\text{en t años:} \quad (1 + r)^{mt} A$$

Haciendo $m\to\infty$, es decir una inversión continua en cada momento:

$$\lim_{m\to\infty}(1+\frac{r}{m})^{mt}A$$

Entonces en t años se tendría $e^{rt} A$

Ahora si planteamos el problema a la inversa, tendremos lo siguiente:

Supongamos que queremos saber cuanto capital inicial se necesito para tener B pesos en t años a una tasa de interés r:

$Y e^{rt} = B$ de donde

$Y = Be^{-rt}$

Es decir, el valor actual de B pesos a obtener en el futuro con una tasa de interés es $e^{-rt} B$. Se le llama a esta valor presente neto de B y a e^{-rt} el factor de descuento.

3. Condiciones de transversalidad

Supongamos que tenemos el problema siguiente:

$$Max\int_{t_0}^{t_1} I(\dot{x}, x, t)\, dt$$

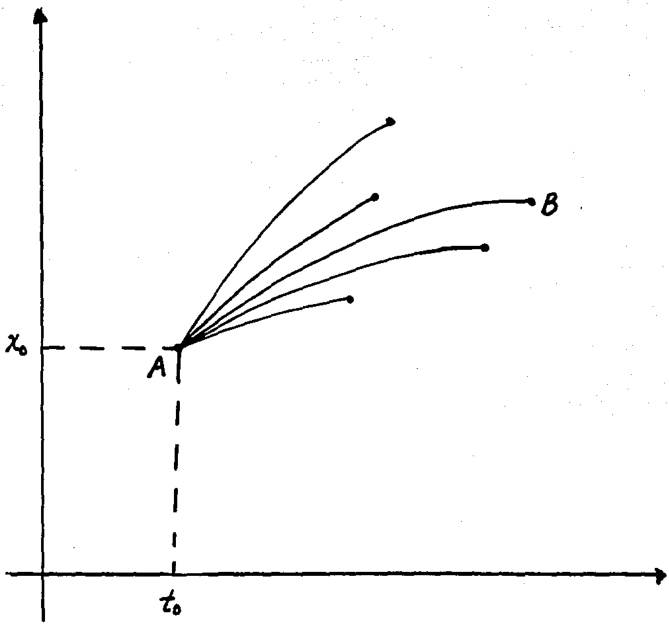


FIGURA N° 7

$$s.a.\ x(t_0) = x_0$$

x_0 , t_0 *fijos;* x_1 , t_1 *a ser especificados*

En este problema tenemos el valor inicial de x, pero no su valor final. Si recordamos los problemas resueltos, veremos que la condición final nos serviria pura definir las constantes de integración; como no quedarian especificadas, el problema se traduciría gráficamente (ver gráfica 7).

Donde cada curva parte de un mismo punto por tener la misma condición inicial, pero difieren en su punto final pues tal punto, así como la forma difinitiva de la curva - debido a las constantes de integración - dependen del valor que se le de a $x(t_1) = x_1$.

El problema ahora sería escoger de todo ese haz de curvas, aquella que maximiza a J. Tengamos en mente que todas estas curvas difieren solo en sus constantes de integración y coinciden en ser soluciones de la Ecuación de Euler. Para encontrar la condición adicional que debe cumplir esa curva maximizadora, supongamos que tal curva es la que en la gráfica une a los puntos A, B.

En cualquier otra curva J no toma un valor óptimo y entonces si $J(x^*) = J^*$ es el valor óptimo, definimos:

$$\Delta J = J - J^*$$

Y obviamente $\Delta J = 0$ solamente cuando x(t) no ha variado de la curva óptima. La idea entonces es desarrollar $J - J^*$ para igualarlo al último a cero y encontrar así una condición adicional que junto con las dudas por hipótesis, nos definan las constantes de integración.

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_0+\delta t_1} I(\dot{x}+\delta\dot{x}, cx+\delta x, t)\, dt - \int_{t_0}^{t_1} I(\dot{x}, x, t)\, dt =$$

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} I(\dot{x}+\delta\dot{x}, x+\delta x, t)\, dt}_{(1)} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} [I(\dot{x}+\delta\dot{x}, x+\delta x, t) - I(\dot{x}, x, t)\, dt]}_{(2)} =$$

Ahora desarrollaremos tanto 1 como 2 usando el teorema del valor medio y el desarrollo en series de Taylor. Veamos (1) aplicandole el teorema mencionado:

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t_1} I(\dot{x}+\delta\dot{x}, cx+\delta x, t)\, dt = I(\dot{x}, x, t)\,\delta t_1$$

donde t_1 es algún número y

$$t_1 < t < t_1+\delta t_1; \quad \dot{x}=\dot{x}(t); \quad x=x(t)$$

Pero en virtud de la continuidad de la función I tenemos:

$$I(\hat{\dot{x}}, \hat{x}, \hat{t}) = I(\dot{x}_1, x_1, t_1) + \epsilon_1$$

con $x_1 = x(t_1)$, $x_1 = x(t_1)$

Con ϵ_1 un valor "infinitamente pequeño". Entonces:

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t_1} I(\dot{x}+\delta\dot{x}, cx+\delta x, t)\, dt = I(\dot{x}_1 x_1, t_1)\,\delta t_1 + \epsilon_1 \delta t_1 \approx I(\dot{x}_1, x_1, t_1)\,\delta t_1 \ldots (1)$$

Ahora desarrollamos 2 mediante serie de Taylor:

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t_1} [I(\dot{x}+\delta\dot{x}, x+\delta x, t)\, dt - I(\dot{x}, x, t)] = \int_{t_0}^{t^1} [\delta x \frac{\partial}{\partial x} I(\dot{x}, x, t) + \delta\dot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} I(\dot{x}, x, t)$$

Con R_1 otro número infinitamente pequeño. La expresión puede aún ser simplificado:

$$\int_{t_0}^{t_1} (I_x \delta x + I_{\dot{x}} \delta\dot{x})\, dt =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} I_x \delta x dt + [I_{\dot{x}} \delta x]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} I_{\dot{x}} \delta x dt$$

$$= [I_{\dot{x}} \delta x]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} (I_x - \frac{d}{dt} I_{\dot{x}} \delta x dt = I_{\dot{x}} \delta x \Big|_{t_0}^{t_1}$$

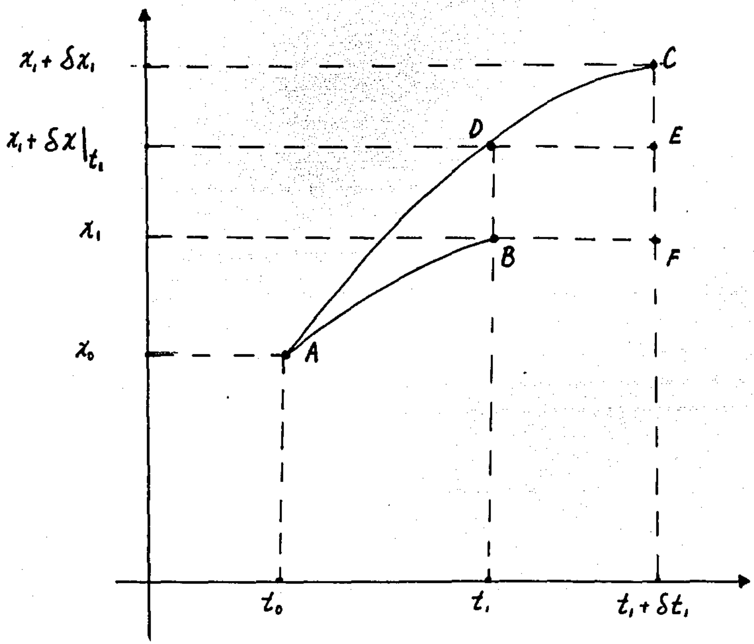


FIGURA N· 8

Por la ecuación de Euler, cuya utilización es valida pues hemos supuesto que x(t) es optimizadora. Además

$$\delta x(t_0)=0 \ \textit{pues} \ (t_0, x_0) \ \textit{es fijo}$$

$$\therefore \quad \int_{t_0}^{t_1}(I_x\delta x+I_{\dot{x}}\delta\dot{x})\,dt=I_{\dot{x}}\delta x|_{t_1}\ldots\ldots(2)$$

Ahora bien

$$\delta x|_{t_1}\neq\delta x_1$$

como podemos ver gráficamente

Entonces tenemos

$$BD=\delta x|_{t_1};\ FC=\delta x_{t_1}$$

Además

$$\dot{x}(t_1)\approx\frac{EC}{DE};\ EC\approx\dot{x}(t_1)\,\delta t_1$$

$$BD=FC-EC\approx\delta x_1-\dot{x}(t_1)\,\delta t_1$$

o bien

$$\delta x|_{t_1}\approx\delta_1-\dot{x}(t_1)\,\delta t_1$$

Entonces sustituyendo en (2):

$$\int_{t_0}^{t_1}(I_x\delta x+I_{\dot{x}}\delta\dot{x})\,dt\approx I_{\dot{x}}\,|_{t_1}(\delta x_1-\dot{x}(t_1)\,\delta t_1\ldots(3)$$

Sustituyendo ahora (3) en (1) y luego esto y (1) en (*) tenemos:

$$\Delta J \approx I|_{t_1}\delta t_1 + I_{\dot{x}}\,|_{t_1}(\delta x_1 - \dot{x}(t_1)\,\delta t_1) =$$

$$(I-\dot{x}I_{\dot{x}})\,|_{t_1}\delta t_1 + I_{\dot{x}}|_{t_1}\delta x_1$$

Es decir

$$\Delta J = (I-\dot{x}I_{\dot{x}})\,\delta t_1 + I_{\dot{x}}\delta x_1 \ldots . (4)$$

evaluados en t= t_1 y como deseamos J= 0 tenemos los siguientes casos:

a)Horizonte libre: si x esta fijo pero no t_1 , tenemos $\delta x_1 = 0$ y requerimos para que (4) se anule:

$$(I-\dot{x}I_{\dot{x}})\,|_{t_1}=0$$

b)Estado terminal libre: si t_1 está fijo, δt_1 ; x_1 está libre y requerimos:

$$I_{\dot{x}}|_{t_1}=0$$

c)Puntos finales totalmente libres: con x_1, t_1 requerimos ambos casos.

Usualmente se plantea que en realidad (x_1,t_1) estén en una curva G(x_1,t_1)= 0, pero no revisaremos tal caso remitiendo al lector a la literatura de la Bibliografía en el tema "condiciones de transversalidad".

Para concluir, veremos una aplicación en un ejemplo ya trabajado, el 2.1, es decir:

$$\max \int_0^T (c_1\dot{x}^2 + c_2 x)\, dt$$

s.a. x(O)= 0, x(T)= B ......(*)

con B pero T el tiempo final, libre.

Encontramos previamente que la solución era:

$$x(t) = \frac{C_2 t^2}{4C_1} + K^1 t + K_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\_(**) \quad 0 \le t \le T$$

Ya que T es libre, estamos en el caso b, entonces:

$$I = C_1 x^2 + C_2 x$$
$$I_X = 2C_1 x \; ; \; xI_X = 2C_1 x^2$$

Como por (a) se tiene $I = xI_X$, tenemos

$$C_2 x(T) = C_1 (x(T))^2$$

entonces de (**)

$$C_2 \left(\frac{C_2 T^2}{4C_1} + K_1 T + K_2\right) = C_1 \left(\frac{C_2 T}{2C_1} + K_1\right)^2$$

Entonces tenemos 2 condiciones en (*)' más esta ecuación; es decir tenemos 3 ecuaciones con K_1, K_2, T como incógnitas a resolver. No es difícil verificar que en este caso

$$x(t) = \frac{C_2}{4C_1} t^2 \quad , \; 0 \le t \le T$$

Con $T = \frac{C_2}{4C_1} T^2 = B$, es decir $T = 2(bC_1/c_2)^{1/2}$

39

CAPITULO III. EL PRINCIPIO DEL MAXIMO

Tradicionalmente los problemas planteados en el Cap. I se resolvian mediante el Cálculo de Variaciones. Cuando había restricciones adicionales, simplemente se replanteaba el problema para llegar, en esencia, a la ecuación de Euler estudiada en el Cap. II. Sin embargo en los 1950 y el matemático soviético L. S. Pontryagin, junto con otros autores, elaboró una metodología alterna que llamó "el principio del máximo". Dicha metodología aunque en una primera impresión pareciera hacer uso de mayores artificios matemáticos, es una herramienta más general y por lo tanto más poderosa, que la metodología tradicional euleriana.

Por lo anterior, en cursos de Matemáticas para Economistas, suele estudiarse este principio del máximo sin aludir para nada el Cálculo de Variaciones. De hecho en este trabajo, el lector que así lo quiera puede abordar este capítulo haciendo abstracción de todo el capítulo anterior. No obstante, puede demostrarse que hay una equivalencia entre uno y otro método.

En el capítulo I llegamos a problemas que tenían estas dos formas:

$$J=\int_{t_0}^{t_1} I(\dot{x},x,t)\,dt \quad con \quad x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1 \ldots (3)$$

$$J=\int_{t_0}^{t_1} I(u(t),x(t),t)\,dt \quad con \quad \dot{x}=g(t,x(t),u(t)),$$
$$x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1 \ldots (4)$$

Asimismo, veramos un ejemplo donde una simple sustitución permitía llevar a (4) a la forma (3). A la inversa, si definimos x= u, tendremos que (3) se convierte en

$$J=\int_{t_0}^{t_1} I(u,x,t)\,dt$$
$$s.a. \quad \dot{x}=u, x(t_1)=x_1,\ x(t_0)=x_0$$

Que es un caso particular de (4)

El problema (3), decíamos, es el problema clásico del Cálculo de Variaciones y el problema (4), del Principio del Máximo de Pontryagin. Los anteriores reflexiones permiten, en consecuencia, esperar que de un problema se puede parar a otro. De hecho los problemas resueltos en el capítulo anterior, serán analizados con la metodología que desarrollaremos aqui con la sencilla sustitución que hemos mencionado.

1. Condiciones necesarias en un caso simple.

Desarrollaremos la deducción del Principio del Máximo tal y como lo hace Kamien en el libro citado en la bibliografía. Posteriormente veremos una demostración más general basado en el trabajo de Intrilligator.

Supongamos que tenemos el problema

$$\max J=\int_{t_0}^{t_1} I(u(t),x(t),t)\,dt \ldots (0)$$
$$s.a. \quad \dot{x}=g(t,x(t),u(t)) \ldots (0)'$$

$$t_0 \text{ , } t_1 \text{ , } x(t_0)=x_0 \text{ fijos; } x(t_1) \text{ libre} \qquad (0)$$

Como $x - g = 0$, podemos reescribir

$$J=\int_{t_0}^{t_1} I(u(t),x(t),t)\,dt=$$
$$\int_{t_0}^{t_1}\left(I(u(t),x(t),t)-\lambda(t)\,[g(u(t),x(t),t)-\dot{x}(t)]\right)dt \ldots (1)$$

Pero por otro lado podemos integrar por partes una de las expresiones:

$$-\int_{t_0}^{t_1}\lambda(t)\dot{x}(t)\,dt=-\lambda(t_1)x(t_1)+\lambda(t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}x(t)\dot{\lambda}(t)\,dt$$

Y sustituyendo en (1):

$$J=\int_{t_0}^{t_1} I(u(t),x(t),t)\,dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}[\,I(\quad)-\lambda g(\quad)+\dot{\lambda}x(\quad)\,]\,dt-\lambda(t_1)x(t_1)+\lambda(t_0)x(t_0) \,.. (2)$$

Donde hemos dejado en blanco los argumentos de las funciones pues se pueden consultar en las expresiones de arriba.

Ahora supongamos que hemos encontrado la variable de control óptimo $u^*(t)$ y consideramos una pequeña variación de esta variable.

$$u(t)= u^*(t) +\epsilon\eta(t) \qquad (3)$$

Donde $\eta(t)$ es una función fija y ϵ un parámetro. En el ejemplo 1.3 vimos como pone cada función u(t), debemos dar otra función x(t) que haya cumplido la restricción y una vez hecho esto, sustituimos en el integrado de J para obtener un valor determinado. Supongamos que en el caso presente, para la u(t) dado por (3), tenemos una $x = x(t,\epsilon)$ que permita cumplir la restricción de (0).

Claramente si $\epsilon = 0$, $u= u^*$ y entonces es de esperarse que nuestra x fuera la variable de estado óptimo, es decir, $x= x^*$. Entonces tenemos:

$$x(t,0)= x^*,\ x(t,a)= x_0 \qquad (4)$$

Sustituyendo (4), (3) en (0), como u^*, x^*,η son fijas

$$J=\int_{t_0}^{t_1} I(u^*+\epsilon\eta(t), x(t,\epsilon), t)\, dt=J(\epsilon)$$

Y como hemos supuesto que si $\epsilon=0$, las variables de control y de estado son las óptimas y en consecuencia J toma su valor máximo, entonces se debe cumplir:

$$J'(\epsilon)= 0 \text{ si } \epsilon = 0$$

Sustituyendo (4), (3) en (2) tenemos

$$J(\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1}[I(u^*+\epsilon\eta(t), x(t,a), t)+\lambda(t)g(u^*+\epsilon\eta(t), x(t,a), t)+\dot{\lambda}(t)x(t,\epsilon)]\,dt- -\lambda(t_1)x(t_1,a)+\lambda(t_0)x_0$$

Como $J'(0)= 0$, diferenciando respecto a ϵ y evaluando en $\epsilon= 0$:

$$J'(0) = \int_{t_0}^{t_1}[\ (\frac{\partial I}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \epsilon}+\frac{\partial I}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \epsilon}+\frac{\partial I}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \epsilon})+\lambda(\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \epsilon}+\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \epsilon}+\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \epsilon})+\dot{\lambda}(\frac{\partial x}{\partial \epsilon})\ ]\,dt- -\lambda(t_1)\frac{\partial x}{\partial \epsilon}=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}[\ I_u\eta+I_x x_\epsilon+\lambda(g_u\eta+g_x x_\epsilon)+\dot{\lambda}x_\epsilon\ ]\,dt-\lambda(t_1)x_\epsilon=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}[\ (I_x+\lambda g_x+\dot{\lambda})x_\epsilon+(I_u+\lambda g_u)\eta\ ]dt-\lambda(t_1)x_\epsilon(t_1,0)=0$$

Como (t) puede ser escogida arbitrariamente - ver (1) - para que tanto la intrgral como la otra expresión sean cero, escogemos:

$$\dot{\lambda}(t)= -(I_X +\lambda\ \ g_X)\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (6)$$
$$\lambda\ (t_1)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (7)$$

Entonces (5) nos queda

$$J'(0)=\int_{t_0}^{t_1}(I_u+\lambda g_u)\eta dt=0$$

Como η(t) tampoco era una función determinada, escogemos:

$\eta(t)= Iu +\lambda\ gu$

De donde

$$\int_{t_0}^{t_1}(I_u+\lambda g_u)^2dt=0$$

Y como $\epsilon = 0$, $x = x^*$, $u = u^*$, entonces:

$$I_u(u^*(t),x^*(t),t)+\lambda(t)g_u(u^*(t),x^*(t),t)=0$$

En resumen tenemos que si x(t), u(t) son óptimos deben cumplir:

de (0) : $\dot{x}(t)= g(u(t),x(t),t)\ ;\ x(t_0)= t_0$ (ecuación de estado)

de (6),(7): $\dot{\lambda}(t)= -I_X(u(t),x(t),t) + \lambda\ (t)g_X\ (u(t),x(t),\ t)$
$\lambda\ (t_1\ ) = 0$ (ecuación del multiplicador)

de (8): $I_U\ (u^*(t),x^*(t),t) +\lambda\ (t)g_U(u^*(t),x^*(t),t)= 0$
(condición de optimalidad)

Dichas condiciones suelen ser reformuladas así:

Definimos $H(\lambda(t),x(t,t)= I(u,x,t) + \lambda g(u,x,t)$

$$\textit{ecuación de estado: } \frac{\partial H}{\partial \lambda}=\dot{x}$$

$$\textit{ecuación de estado: } \frac{\partial H}{\partial \lambda}=\dot{x}$$

$$\textit{ecuación del multiplicador: } -\frac{\partial H}{\partial x}=\dot{\lambda} \ ; \ \lambda(t_1)=0$$

$$\textit{condición de optimalidad: } \frac{\partial H}{\partial u}=0$$

A $H(\lambda,x,t)$ se le llama el hamiltoniano. Se pueden demostrar estas condiciones adicionales:

Para minimizar J, se requiere $H_{uu}(u^*_*,x^*_*,t)<0$
Para maximizar J, se requiere $H_{uu}(u^*, x^*, t)>0$

2. Algunos ejercicios puramente matemáticos

Consideramos nuevamente el ejercicio 1.3, pero ahora intentemos maximizar J:

$$\max \int_0^1 (ux-u^2-x^2)\,dt$$

$$s.a. \ x = x + u, \ x(0) = 0$$

En este caso definimos $I= ux-u^2-x^2$; $g= x+u$, entonces

$$H= I - \lambda g= ux2-u2-x+\lambda(x + u)$$

Aplicando las condiciones tenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}=x+u=\dot{x}\ldots\ldots(7)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=u-2x+\lambda=-\dot{\lambda}\ldots.(8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=x-2u+\lambda=0$$

observese que $H_{uu}<0$

Diferenciando la última ecuación respecto a t: $\dot{x}-2\dot{u}-\dot{\lambda}=0$ y sustituyendo:

$x + u - 2u - u + 2x -\lambda = 0$
de donde con otra sustitución
$4x - 2u - 2u= 0,$
pero diferenciando (8), $u = \dot{x} -x$
$4x - 2(\dot{x} -x) -2(\dot{x} - x)= 0$; $\ddot{x}-3x= o$

Resolviendo esta ecuación diferencial tenemos:

$$x(t)= C_1e^{\sqrt{3}t} + C_2e^{-\sqrt{3}t}$$

pero como x(0) = 0,

$$x(t)= Ce^{\sqrt{3}t} - Ce^{-\sqrt{3}t}$$

Como $u= \dot{x}-x= C(1-\sqrt{3})e^{\sqrt{t}} + C(1+\sqrt{3})e^{-\sqrt{3t}}$

Ahora bien, con esos valores de u, x, podemos determinar a λ a partir de (8).

Consideremos el siguiente problema:

Ejemplo 3.1

$$\max \int_0^1 (x+u)\,dt$$

$$s.a.\ \dot{x}= 1 - u^2 \quad ; x(0)= 1$$

En este caso $I= x+u$; $g= 1-u^2$ y el hamiltoniano seria:

$H= I - \lambda g= x + u - \lambda(1 - u2)$. Las condiciones para este caso son:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}=1-u^2=\dot{x}\ldots.(9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=1=-\dot{\lambda},\ \lambda(1)=0\ldots(10)$$

De (10) tenemos $\lambda(t) + C_1$, pero $\lambda(1)= 0$; $C_1= 1$ y

$\lambda(t)= 1 - t$

Sustituyendo en (11) nos queda:

$$1 - 2(1-t)u= 0$$
$$u= 1 / 2(1-t)$$

Para obtener x, sustituimos en (9):

$\dot{x}= 1 - \dfrac{1}{4(1 - t)^2}$; integrando directamente:

$x(t)= t - \dfrac{1}{4(1 - t)^2} + C_2$ pero $x(0)= 1$, entonces $C= 5/4$ y:

$$x(t)= t - \frac{1}{4(1 - t)} + \frac{5}{4}$$

Con eso obtenemos x(t), u(t), λ(t), obsérvese que si queremos maximizar:

$H_{uu}= 2\lambda = 2(1 - t) < 0$ sii $0< t< 1$ que es precisamente el caso.

Ejemplo 3.3
Resolver

$$\max J=-\int_0^1 u^2 dt$$

$$\dot{x}= x + u$$

$$x(0)= 1$$

En este caso $H= -u^2 +\lambda(x + u)$, entonces además de la ecuación de estado tenemos que deben cumplirse:

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\lambda=-\dot{\lambda}\ldots(12)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=-2u+\lambda=0\ldots(13)$$

Integrando (12) tenemos $\lambda(t)= Ce\text{-}t$, pero $\lambda(0)= 1$;

$$\lambda(t)= e^{-t}$$

Sustituyendo en (13) tenemos:

$$-2u + e^{-t} = 0 \;;\; u= -\frac{1}{2}e^{-t};$$

Y sustituyendo en la ecuación de estado:

$$x - x= -\frac{1}{2}e^{-t};$$

Encontrada la solución particular y la de la homogénea:

$$x(t)= Ce^{t} - \frac{1}{4}e^{-t} \;;\; \text{como } x(0)= 1,$$

$$x(t)= e^{t} - \frac{1}{4}e^{-t}$$

Observemos que $H_{uu}= -2< 0$

3.- Resolución de algunos problemas

En esta sección utilizaremos la herramienta del principio del Máximo para darle solución a los problemas planteados en el capítulo I que fueron resueltos en el Capítulo II con el enfoque alterno del Cálculo de Variaciones.

Ejemplo 3.4: En el ejemplo 1.2 planteamos así el problema de encontrar la curva x(t) que minimizara la distancia entre dos puntos (t_0 , x_0), (t_1 , x_1) en el plano:

$$\min \int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}^2+1)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$s.a.\ x(t_0)=x_0 \;;\; x(t_1)=x_1$$

Observemos que en este caso no aparece la restricción $x(t)= g(t, x(t)), u(t)$ que caracteriza al problema "clásico" del Principio Máximo; asimismo observamos que x(t) ya no esta libre. Ambas dificultades se superan con el sencillo expediente de definir $\dot{x}= u$ y de sustituir la ecuación (7) $\lambda(t_1)= 0$ que nos da una constante de integración, por la condición de frontera final. Especificamente planteamos:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}^2+1)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$s.a.\ \dot{x}= u\ ;\ x(t_0)= x_0\ ;\ x(t_1)= x_1$$

En este caso definimos $H= (u^2+1)^{1/2} +\lambda u$ y por tanto

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}=\dot{x}=u$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=0=-\dot{\lambda} \rightarrow \lambda(t)=C$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=\frac{1}{2}(u^2+1)^{-\frac{1}{2}}2u+\lambda=0$$

entonces sustituyendo:

$$\frac{u}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}}+C_1=0=\frac{u+C_1(u^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

es decir:

$u= -C_1(u^2 + 1)^{1/2}$ y despejando:.

$u^2= \dfrac{1}{1 - C^2}$; $u= C_2$

Pero $\dot{x}= u= C_2$; integrando $x(t)= C_2t + C_3$ y aplicando las condiciones de frontera $x(t_0)= x_0$, ; $x(t_1)= x_1$ podemos llegar, como de hecho lo hicimos en el capítulo anterior mediante manipulaciones algebráicas, a:

$$x-x_0=\frac{x_0-x_1}{t_0-t_1}(t_0-t_1)$$

Que es lo que queriamos demostrar.

Ejemplo 3.5 En el problema "dinámico del monopolio" llegábamos a la siguiente formulación:

$$\max J=\int_{t_0}^{t_1}(qp-C(q))\,dt$$

con $p(t_0) = p_0$; $p(t_1)= p_1$

Donde q = *Demanda*
p = *Precio*
$C(q)$ = *Costo*

Para utilizar el principio del máximo, hacemos:

$$p= u$$

Teniamos además el siguiente caso específico:

$$q= ap + b + cp$$
$$C(q)=\alpha q^2$$

Con lo cual reformulamos J de la siguiente manera:

$$\max J=\int_{t_0}^{t_1}(ap^2+bp+cu\dot{p}-\alpha(ap+b+c\dot{p})^2)\,dt$$

$$s.a.\ p= u$$

$$p(t_0)= p_0 \quad ; \ p(t_1)= p_1$$

Definamos el Hamiltoniano:

$$H= ap^2 + bp + cup - \alpha(ap + b + cu)^2 + \lambda u$$

Entonces las condiciones son:

$$\frac{\partial H}{\partial p}=2ap+b+cu-2\alpha a(ap+b+cu)=-\lambda\ldots(14)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=cp-2\alpha c(ap+b+cu)-\lambda=0\ldots(15)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}=u=\dot{p}\ldots\ldots(16)$$

Derivando (15) respecto a t y sustituyendo (16) tenemos:

$cp - 2\alpha ca\dot{p} - 2\alpha c^2 \ddot{p}= -\lambda$

E igualando a (14) y reordenando:

$$p + \frac{2a(1 - \alpha a)p}{2\alpha c^2} + \frac{b - 2\alpha ab}{2\alpha c^2} = 0$$

Cuya solución es (como se mostró en capítulos anteriores):

$$p= \bar{p} + c_1e^{rt} + c_2e^{-rt} \quad con\ \bar{p}= \frac{2ab\alpha - b}{2a(1 - \alpha)}$$

Y las constantes están determinadas por las condiciones de fronteras. Observese que en este caso nuevamente introducimos el valor de frontera "final" en lugar de la condición (7) para $\lambda(t)$.

Ejemplo 3.6: El problema de minimizar costos con un factor de descuento - prob. 2.5 - nos quedaba así:

$$\max J=\int_0^T e^{-rt}(c_1\dot{x}^2+c_2x)\,dt$$

Con x(o)= 0 ; x(T)= B donde está dado pero T no; redefinimos:

$$\max J=\int_0^T e^{-rt}(c_1u^2+c_2x)\,dt$$

$$u= x$$

Entonces el Hamiltoniano resulta ser:

$$H= e^{-rt}(c_1u^2 + C_2x) + \lambda u$$

Y las condiciones para este caso:

$$\frac{\partial H}{\partial x}=c_2e^{-rt}=-\dot{\lambda}$$

de donde integrando:

$$\lambda(t)=\frac{c_2}{r}e^{-rt}+K_1\ldots.(17)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=2c_1e^{-rt}u+\lambda=0,\ u=-\frac{\lambda}{2c_1e^{-rt}}\ldots.(18)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}=u=\dot{x}$$

Entonces sustituyendo (17) en (18) y utilizando (19) tenemos:

$u= -\frac{c_2}{2rc_1} - \frac{k_1}{2c_1}e^{rt} = \dot{x}$, e integrando:

$$x(t)= -\frac{c_2}{2rc_1}t - \frac{k_1}{2rc_1}e^{rt} + k_2$$

Con la condición x(O)= 0, podemos eliminar una de las constantes de integración; un método para eliminar la otra constante sería sustituir x(t) en J, con lo cual J= J(x, k_2); tendríamos la restricción x(T)=B con la cual J= J(T,k_2) y podriamos así maximizar J definiendo el lagrangiano

$$L = J(T, k_2) + \beta(x(T) - B)$$

Ejemplo 3.7: En el ejemplo 2.1 tenemos que los individuos maximizaban su utilidad de la siguiente manera:

$$\max \int_0^1 \log C(t)\,dt$$

$$\text{sujeto a } \dot{K}(t)= \alpha K(t) - C(t)$$

Entonces definimos el Hamiltoniano de la siguiente manera:

$$H= \log C + \lambda(\alpha K - C)$$

Y las condiciones en este caso son:

$$\frac{\partial H}{\partial k}=\alpha\lambda=-\dot{\lambda}\ldots.(20)$$

$$\frac{\partial H}{\partial C}=\frac{1}{C}-\lambda=0;\ \lambda=\frac{1}{C}\ldots(21)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}=\alpha K-C=\dot{K}\ldots\ldots(22)$$

La ecuación (20) resulta ser la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$\lambda + \alpha\dot{\lambda} = 0 \text{ ; cuya solución es}$$

$$\lambda = k_1 e^{-rt}$$

Sustituyendo en (21) tenemos:

$$C(t)k_1 e^{-\alpha t} = 1 \quad ; \; C(t) = k_2 e^{\alpha t} \ldots\ldots(23)$$

Ahora despejando C de (22) y sustituyendo:

$$K - \alpha K = -k_2 e^{\alpha t}$$

Cuya solución general es:

$$K(t) = k_3 e^{\alpha t} - k_2 t e^{\alpha t}$$

Como $K(0) = 1 = k_3$; $K(1) = e^{\alpha} - k_2 e^{\alpha} = 0$; $k_2 = 1$

por tanto $K(t) = e^{\alpha t} - te^{\alpha t}$

Y sustituyendo en (23) tenemos:

$$C(t) = e^{\alpha t}$$

Ejemplo 3.8: En el ejemplo 2.4 retomabamos al anterior ejercicio pero suponiendo que en la utilidad del individuo opera una tasa de descuento:

$$\max J = \int_0^T (e^{-\alpha t}) \log C(t)\, dt$$

$$s.a. \; \dot{K} = w + rK - C$$

$$K(0) = 0 = K(T)$$

El Hamiltoniano queda definido así:

$$H = e^{-\alpha t} \log C + \lambda(w + rK - C)$$

Cuyas condiciones son:

$$\frac{\partial H}{\partial C} = \frac{e^{-\alpha t}}{C} - \lambda = 0 ; \; \lambda = \frac{e^{-\alpha t}}{C} \ldots (24)$$

$$\frac{\partial H}{\partial K}=\lambda r=-\dot{\lambda}\ldots(25)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}=w+rK-C=\dot{K}\ldots.(26)$$

La ecuación (25) es una ecuación diferencial cuya solución es:

$$\lambda(t)=k_1e^{-rt}$$

Sustituyendo en (24):

$$k_1e^{-rt}=\frac{e^{-\alpha t}}{C(t)}\ ;\ C(t)=k_2e^{(r-\alpha)t}$$

Sustituyendo este valor de C(t) en (26) tenemos:

$$\dot{K}-rK=w-k_2e^{(r-\alpha)t}$$

Que tiene cómo solución particular:

$$K_p=\frac{k_2}{\alpha}e^{(r-\alpha)t}-\frac{w}{r}$$

Y como solución a la homogénea:

$$K_h=k_3e^{rt}$$

De donde la solución general seria:

$$K(t)=k_3e^{rt}+\frac{k_2e^{(r-\alpha)t}}{\alpha}-\frac{w}{r}$$

Con k_3, k_2 valores a determinar de acuerdo a las condiciones de frontera.

Ejemplo 3.9: En el ejemplo 1.4 planteabamos el problema de la búsqueda de un precio que maximizara beneficios para la empresa bajo los supuestos siguientes:

$$\textit{Tasa de ventas}=dQ/dt=f(p(t))\ g(Q(t))$$

Donde p(t)= precios; Q(t)= productos vendidos, f, g funciones tales que:

$$f'(p)<0$$

$g'(Q)$ mayor o menor a cero según Q sea mayor o menor a Q_1

$$\textit{Costos}=C(Q)\ ;\ C'(Q)\leq 0$$

Entonces el problema es:

$$\max \int_0^T (p-C(q))\, f(p)\, g(Q)\, dt$$

$$s.a.\ Q= f(p)\ g(Q)\ ;\ Q(O)= Q_0>0$$

Definimos el Hamiltoniano así:

$$H= (p - C(Q)\ f(p)\ g(Q) + \lambda f(p)\ g(Q)$$

Cuyas condiciones para optimización son, suprimiendo los argumentos de las funciones para facilitar la notación:

$$\frac{\partial H}{\partial p}=fg+(p-c)\, f'g-\lambda f'g=0$$

y reordenando y factorizando:

$$g[(f')(p - C +\lambda) + f]= 0........(27)$$

$$\frac{\partial H}{\partial Q}=-c'fg+(p-c)\, fg'+\lambda fg'=-\lambda$$

Nuevamente reordenando y factorizando:

$$f[(g')(p - C + \lambda) - C'g]= -\lambda.....\ (28)$$

$$\lambda(T)= 0.............\ (29)$$

Como deseamos maximizar, se debe cumplir:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}=[g]\ [(f'')\ (p-C+\lambda)+f'+f']=$$

$$=[g][(f'')(p-C+\ \lambda)+2f']\leq 0..........(30)$$

Como las anteriores expresiones, si bien no podemos obtener, sin mayor información, una solución explícita para p(t), Q(t), sí podemos caracterizar cualitativamente p(t) para ver que su crecimiento se corresponde con la respuesta intuitiva que se desprende del planteamiento de los supuestos.

De (27) podemos calcular:

$$p - C + \lambda = - \frac{f}{f'}\ ;\ \lambda = - \frac{f}{f'} - p + C\ ......\ (30')$$

Derivando respecto a t, tenemos:

$$\lambda = -\frac{f'\dot{p}f' - f''\dot{p}f}{(f')^2} - \dot{p} + C'\dot{Q}$$

de donde simplificando:

$$\lambda = -\dot{p}\left(2 - \frac{f''f}{(f'')^2}\right) + C'\dot{Q} \ldots (31)$$

Ahora sustituyendo (30') en (30),

$$g(f')[p - C - f/f' - p + C) + 2f] \leq 0$$

$$g[f''(-f/f') + 2f'] = gf'(2 - ff''/(f')^2) \leq 0$$

Como g es positiva y f' negativa, tenemos:

$$\left(\quad 2 - \frac{ff''}{(f)^2}\right) > 0 \ldots\ldots\ldots (32)$$

Sustituyendo (30') en (28), obtenemos por otra parte:

$$\lambda = f[C'g - g'(p - C + \lambda)] =$$

$$= f[C'g + g'\frac{f}{f'}] \ldots\ldots (33)$$

Igualando (33) y (31), simplificando y reordenando tenemos:

$$-g'\frac{f}{f'} = p\left(\quad 2 - \frac{ff''}{(f')^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

Utilizando nuevamente que f es negativo de (34) podemos ver:

$$g'(positivo) = p(positivo)$$

De donde p cambia en el mismo sentido que g' pero g' por hipótesis, cambia de signo según Qsea mayor o menor que Q_1, de donde:

p(t) crece cuándo el mercado se expande ($Q<Q_1$)
p(t) cae cuándo el mercado debe contraerse ($Q>Q_1$)

Conclusiones que evidentemente subyacen en los supuestos planteados de antemano.

4. Varias variables

Hasta ahora hemos considerado el caso donde la funcional a optimizar está definida como la integral de una cierta función $I= I(x, u, t)$ donde x, u son funciones reales de variable real. En realidad el caso mas general es cuando dichas funciones nos relacionan una variable real con un vector, es decir $\mathbf{x}(t)= (x_1(t),...,x_n(t))$; $\mathbf{u}(t)= (u_1(t),...,u_n(t))$; veremos a continuación que los resultados cualitativamente siguen siendo los mismos.

Consideremos el siguiente problema:

$$\max J=\int_{t_0}^{t_1} I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\,dt+F(\mathbf{x}_1, t_1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{u}(t)\in U$$

Definamos el lagrangiano de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}=J+\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{\lambda}(t)\bullet(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)-\dot{\mathbf{x}})\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)+\boldsymbol{\lambda}\bullet(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\,dt+F(\mathbf{x}_1, t_1)$$

Entonces un incremento en el lagrangiano debido a un cambio en $\boldsymbol{\lambda}(t)$ sería:

$$\Delta\mathcal{L}=\int_{t_0}^{t_1}\Delta\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)-\dot{\mathbf{x}})\,dt$$

de donde

$$\boxed{\mathbf{x}= \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)}\;.......(35)$$

Es decir esta restricción es a la vez una de las condiciones para optimizar J. Para obtener las otras condiciones, consideremos los cambios en **u** con sus consecuentes cambios en **x**, cambios en un momento dado. Para ello redefiniremos nuestro lagrangiano integrando por partes $\lambda(t)x(t)$:

$$\mathcal{L}=\int_{t_0}^{t_1}(I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)+\boldsymbol{\lambda f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)+\dot{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{x})\,dt+F(\boldsymbol{x}_1,t_1)-(\boldsymbol{\lambda}(t_1)\boldsymbol{x}(t_1)-\boldsymbol{\lambda}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0))$$

definiendo como H a los dos primeros sumandos del integrando tenemos:

$$=\int_{t_0}^{t_1}(\ H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda},t)+\dot{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{x}\ )\,dt+F(\boldsymbol{x}_1,t_1)-\boldsymbol{\lambda}(t_1)\boldsymbol{x}(t_1)-\boldsymbol{\lambda}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

Por tanto el incremento del lograngiano como respuesta al incremento de **u** y el consecuente cambio en **x** es:

$$\Delta\mathcal{L}=\int_{t_0}^{t_1}(\ \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}}\Delta\boldsymbol{u}+(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}+\dot{\boldsymbol{\lambda}})\Delta\boldsymbol{x}\ )\,dt+(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}_1}-\boldsymbol{\lambda}(t_1))\Delta\boldsymbol{x}_1$$

para igualarlo a cero:

$$\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0}\ ;\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\ ;\ \boldsymbol{\lambda}(t_1)=\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}_1}\ldots\ldots(36)$$

Donde los parciales de una función respecto a un vector denota el grandiente. Observese que al darnos (35), (36) las condiciones necesarias para obtener las funciones que optimizan J, se están repitiendo los resultados (8) ya encontrados previamente pero en una expresión más generalizada.

Ejemplo 4.1: Resolveremos un ejercicio que el lector interesado puede comprobar que tiene que ver con el movimiento de las partículas - ver Intrilligator - los autores llaman usualmente a la solución "Bing - bang".

El problema es el siguiente:

$$\max\ J=-\int_{t_0}^{t_1}dt$$

s.a. $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{Ax}+\mathbf{bu}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix};\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

Entonces podemos reformular el problema así:

$$Máx\ J= -(t_1 - t_0)$$

$$s.a.\ \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} u$$

La restricción, por tanto es:

$$x_1 = x_2;\quad x_2 = u \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (37)$$

Supondremos además t_0, $\boldsymbol{x}(t_0)$ dados, $\boldsymbol{x}(t_1)$ dado; $-1\leq u(t)\leq 1$

El Hamiltoniano sería:

$$H=-1+[\lambda_1,\lambda_2]\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} u\right\}$$

Por lo tanto tenemos:

$$H=-1*\lambda_1 x_2+\lambda_2 u$$

Hemos comentado que el Principio del Máximo tiene que ver con la maximización del Hamiltoniano respecto a la variable de control. En este caso concreto tenemos una restricción adicional, por lo que, si deseamos maximizar, debemos definir el lagrangiano y aplicar las condiciones de Khun Tucker:

$$\mathcal{L}=-1+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u+\beta_1(u-1)-\beta_2(u+1)$$

Por las condiciones de Khun - Tucker debe cumplirse:

$$\beta_1 \geq 0, \ \beta_1(u-1)=0$$

$$\beta_2 \geq 0, \ \beta_2(u+1)=0 \ \ldots\ldots\ldots \ (37)$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}=\lambda_2+\beta_1-\beta_2=0$$

de donde

$$\text{si} \quad \lambda_2>0, \quad \beta_2>0, \ \text{por } (37), \ u=-1$$

$$\lambda_2<0, \quad \beta_1<0, \ \text{por } (37), \ u=1 \ \ldots \ (38)$$

Por otro lado, por el Principio del Máximo:

$$-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}=-\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix}$$

Es decir $\dot{\lambda}_1 = 0; \quad \dot{\lambda}_2 = \lambda_1$ Integrando tenemos:

$\lambda_1 = c_1 \ ; \ \lambda_2 = c_1 \ t + c_2$

En (38) observamos que u puede tomar dos valores; en consecuencia tenemos dos posibles soluciones:

(i) $\quad$ si $u=1$, por $(37)'$, $\dot{x}_2 = 1$, $x_2 = t + c_1 \ldots\ldots(39)$

$$\dot{x}_1 = t + c_1 \ ; \ x_1= t^2/2 + c_1 \ t + c_2 \ \ldots\ldots\ldots \ (40)$$

Sustituyendo ahora (39) en (40), habiendo despejado t:

$$x_1 = \frac{(x_2 - c_1)^2}{2} + c_1(x_2 - c_1) + c_2$$

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2} + c_3$$

(ii) si u= -1 tenemos de manera totalmente análoga:

$$x_2 = -t + c_1$$

$$x_1 = \frac{-t^2}{2} + c_1 t + c_2$$

Y mediante un desarrollo similar al anterior:

$$x_1 = \frac{-t^2}{2} + c_3$$

Ejemplo 4.2: Consideremos ahora una funcional un poco más elaborada:

$$\max J=\int_{t_0}^{t_1} (x_1^2-u^2)\, dt$$

$$s.a. \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} u = \begin{bmatrix}x_2\\ -2x_1-3x_2-u\end{bmatrix}$$

$$x_1(0)=x_2(0)=1$$
$$x_1(1)=x_2(1)=0$$

El Hamiltoniano ahora sería:

$$H= x_1 2 - u2 + \lambda_1 x_2 - \lambda_2(2x_1 + 3x_2 + u)$$

Aplicando las condiciones necesarias:

$$\frac{\partial H}{\partial u}=-2u-\lambda_2=0 \; ; \; \lambda_2=-2u \; ; \; u=-\frac{1}{2}\lambda_2 \ldots . (40)'$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}=\begin{bmatrix}2x_1-2\lambda_2\\ \lambda_1-3\lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}$$

En consecuencia:

$$2x_1-2\lambda_2=-\dot{\lambda}_1....(41)$$
$$\lambda_1-3\lambda_2=-\dot{\lambda}_2....(42)$$

Derivando(42) con respecto a t y sustituyendo en (41) y despejando:

$$x_1=\frac{1}{2}\ddot{\lambda}_2-\frac{3}{2}\lambda_2+\lambda_2....(43)$$

Por otra parte, de la restricción, derivando también respecto a t:

$$\ddot{x}_1=\dot{x}_2$$
$$\therefore-\ddot{x}_1=2x_1+3\dot{x}_1+u \quad ...(44)$$
$$0=2x_1+3\dot{x}_1+\ddot{x}_1+ux$$

Ahora bien, sustituyendo (43), (40) en (44), tenemos una vez simplificado:

$$\ddddot{\lambda}_2-5\ddot{\lambda}_2+3\lambda_2=0....45$$

Encontrando las raíces características, tenemos:

$$\lambda_2=c_1e^{2.07t}+c_2e^{-2.07t}+c_3e^{0.8t}+c_4e^{-0.8t}$$

Utilizando ahora (42), tenemos que simplificando:

$$\lambda_1=1.93e^{2.07t}-10.49e^{-2.07t}+1.76e^{0.8t}-3.04e^{-0.8t}$$

Integrando esta expresión y sustituyendo las ecuaciones encontradas para λ_2,λ_1 en (41) tenemos:

$$x_1=0.035c_1e^{2.07t}+6.24c_2e^{-2.07t}+0.12c_3e^{0.8t}+2.52c_4e^{-0.8t}...(46)$$

Con (46) podemos encontrar el valor correspondiente de x_2 pues según la restricción:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

Asimismo queda determinado el valor de u por (40) y el valor de C_1 , C_2 ,C_3 , C_4 por los valores de fronteras planteados en la restricción.

CAPITULO IV. EL MODELO DE RAMSEY

En esta parte del presente trabajo, desarrollaremos un modelo que hemos abordado como ejercicio en los capítulos precedentes. En la literatura económica se conoce como el modelo dinámico de crecimiento económico de Ramsey. El propósito de este modelo, como en general el de toda la teoría macroeconómica, es el de determinar de que manera las distintas variables de una economía nacional, puede afectar el producto; de hecho su autor, en 1925, intentaba responder a la pregunta "¿cuanto debe ahorrar una nación?".

El modelo de Ramsey, con todo, no aporta una explicación esencialmente nueva a los problemas planteados. De hecho se estudia a manera de ejemplo de la teoría neo-clásica, pues sus conclusiones avalan tal concepción económica. Este modelo hace uso de los recursos matemáticos que hemos desarrollado hasta este momento además de la teoría cualitativa de los sistemas de ecuaciones diferenciales. El lector podrá percatarse, no obstante, que sus conclusiones están casi dibujados en sus supuestos y pueden ser obtenidas mediante un razonamiento intuitivo precindiendo del aparato matemático. El resultado más notable del modelo es harto conocido por otras vías quizás menos tortuosas: según esta teoría el desarrollo económico equilibrado se garantiza de manera óptima si se deja a la economía al libre juego de las fuerzas del mercado.

Considerando que, independientemente de que compartamos tal punto de vista o no, el trabajo de Ramsey representa una aplicación interesante e ilustrativa de lo visto hasta ahora, dejaremos en este punto estas consideraciones para continuar con el trabajo propiamente matemático.

1. El planteamiento del problema y la solución en un diagrama de fase

Supondremos que tenemos una serie de variables económicos agregados; que el producto - la suma agregada de la producción de bienes y servicios - es igual al ingreso y que éste se distribuye entre consumo e inversión. Se tendrá que aceptar, para seguir adelante, un supuesto bastante cuestionable: que hay pleno empleo de los recursos de capital y de mano de obra.

Así los cosas tenemos

$$Y_t=F(K_t,N_t)=C_t+\frac{dK_t}{dt}$$

Y_t = ingreso; $F(K_t , N_t)$= producción que depende del capital y la mano de obra.

C_t= Consumo

La función de producción se asume como homogénea de grado uno y con lo que se conoce como marginalmente decrece en Economía:

$f(0)=0$, $f'(0)=\infty$, $f'(\infty)=0$

Para continuar, trabajaremos en términos per capita:

$$\frac{1}{N_t}F(K_t,N_t)=F(\frac{K_t}{N_t},1)=f(k_t) \quad con \quad k_t=\frac{K_t}{N_t}$$

$$\therefore \quad f(k_t)=\frac{C_t}{N_t}+\frac{1}{N_t}\frac{dK_t}{dt}$$

Como $K_t= N_tK_t$, tenemos

$$\frac{dK_t}{dt}=\frac{dN_t}{dt}dk_t+N_t\frac{dk_t}{dt}$$

sustituyendo:

$$f(k_t)=c_t+\frac{1}{N_t}(\frac{dN_t}{dt}k_t+N_t\frac{dk_t}{dt})=c_t+n_tk_t+\frac{dk_t}{dt}$$

Es decir:

$$\dot{k}=f(k_t)-c_t-n_tk_t....(1)$$

La ecuación (1) será la restricción de la funcional a maximizar con la que hemos trabajado antes:

$$Max\ U=\int_0^\infty u(c_t)e^{-\theta t}dt...(2)$$

Con (1), (2), podemos definir el Hamiltoniano así:

$$H=u(c_t)e^{-\theta t}+\mu_t(f(k_t)-c_t-n_{tk_t})$$

Ahora haciendo

$$\mu_t=\lambda_te^{-\theta t}$$

para facilitar operaciones, tenemos:

$$H=[u(c_t)+\lambda_t(f(k_t)-c_t-n_t k_t)]\,e^{-\theta t}$$

Aplicando las condiciones necesarias del Principio del Máximo tenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial c_t}=(u'(c_t)-\lambda_t)\,e^{-\theta t}\ldots\ldots(3)$$

$$\frac{d\mu_t}{dt}0-\frac{\partial H}{\partial k_t}=-\mu_t(f'(k_t)-n_t)\ldots(4)$$

$$\lim_{t\to\infty}=0\ldots\ldots(5)$$

Por otra parte:

$$\frac{d\mu_t}{dt}=\dot{\lambda}e^{-\theta t}-\theta\lambda_t e^{-\theta t}$$

Sustituyendo en (4):

$$(\dot{\lambda}_t-\theta\lambda_t)\,e^{-\theta t}=\lambda_t e^{-\theta t}(-f'(k_t)+n_t)$$

$$\therefore\quad \dot{\lambda}_t+(f'(k_t)-n_t-\theta)\lambda_t=0$$

Ahora bien, de (3) tenemos:

$$u'(c_t)=\lambda_t\ ;\ \dot{\lambda}_t=u''(c_t)\frac{dc_t}{dt}$$

Sustituyendo en la ecuación previa a esta tenemos:

$$u''(c_t)\frac{dc_t}{dt}+u'(c_t)\,(\ f'(k_t)-n_t-\theta\ )=0$$

$$\therefore\quad \frac{dc_t}{dt}=-\frac{u'(c_t}{u''(c_t)}\,(\ f'(k_t)-n_t-\theta\ )\ldots(6)$$

La expresión (6) a pesar de que no parece explícita, determinará la solución al problema junto con la restricción (1). En Economía las funciones de utilidad que se definen suelen ser tales que el cociente de sus derivadas primera y segunda que aparece en (6), pueden simplificarse considerablemente. De hecho hemos llegado a un sistema de ecuaciones diferenciales donde c_t, son funciones de c_t ,k_t . Tal problema puede resolverse cualitativamente de manera más o menos sencilla y analítica mediante un desarrollo en series de Tylor.

El sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\dot{k}_t=f(k_t9-c_t-n_{tk_t}...(1)$$

$$\dot{c}_t=-\frac{u'(c_t}{u''(c_t)}(\ f'(k_t)-n_t-\theta)....(2)$$

Para construir el diagrama fase, hacemos $k_t = c_t = 0$ teniendo entonces:

$$\dot{c}_t=0 \rightarrow f'(k_t)=\theta+n_t...(7)$$

$$\dot{k}_t=0 \rightarrow c_t=f(k_t)-n_tk_t...(8)$$

Como 0 es un valor dado y n_t la tasa de crecimiento de la población que también podemos considerar dada, la ecuación (7) en realidad determina un cierto valor $k_t = k^*$ para el cual debe cumplirse la igualdad. Es un único valor pues hemos supuesto monótona creciente a la función $f(k_t)$.

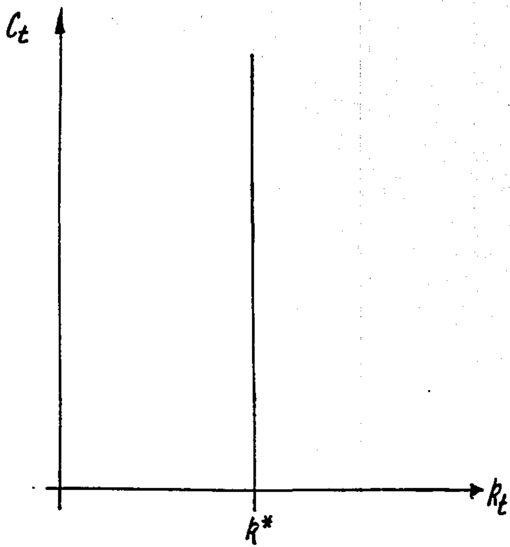
Para analizar que nos representa la ecuación (8), consideremos que dados los supuestos acerca de la función de producción, debemos tener (ver gráfica), en lo que también proponemos la linea n_tk_t . (Ver gráfica 9).

En dicha gráfica podemos ver que c_t definida como en (8), debe anularse en dos puntos determinados: en los que la curva y la recta se intersectan. Observamos que la diferencia entre la curva y la recta va aumentando hasta que llegado a un valor máximo, disminuye hasta anularse. Determinemos ese valor máximo:

De (8) tenemos, para maximizar:

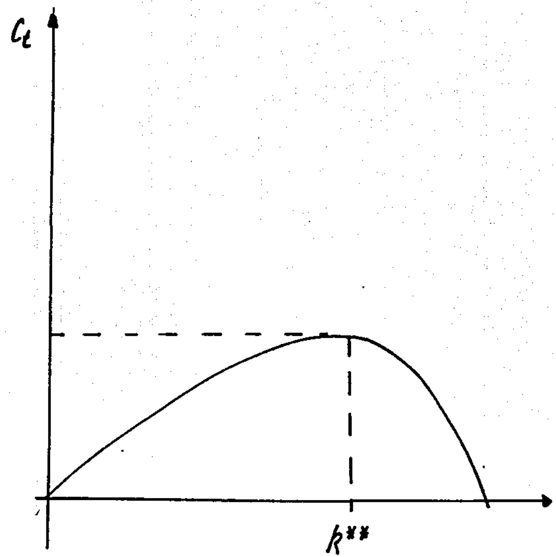
$$\frac{dc_t}{dk_t}=f'(k_t)-n_t=0\ ;\ f'(k_t)=n_t$$

En consecuencia tenemos gráficas (ver gráfica 10).



Gráfica de la ecuación (7) donde

$f'(k^*) = \theta + n_t$



Gráfica de la ecuación (8) donde

$f(k^{**}) = n_t$

FIGURA N° 10

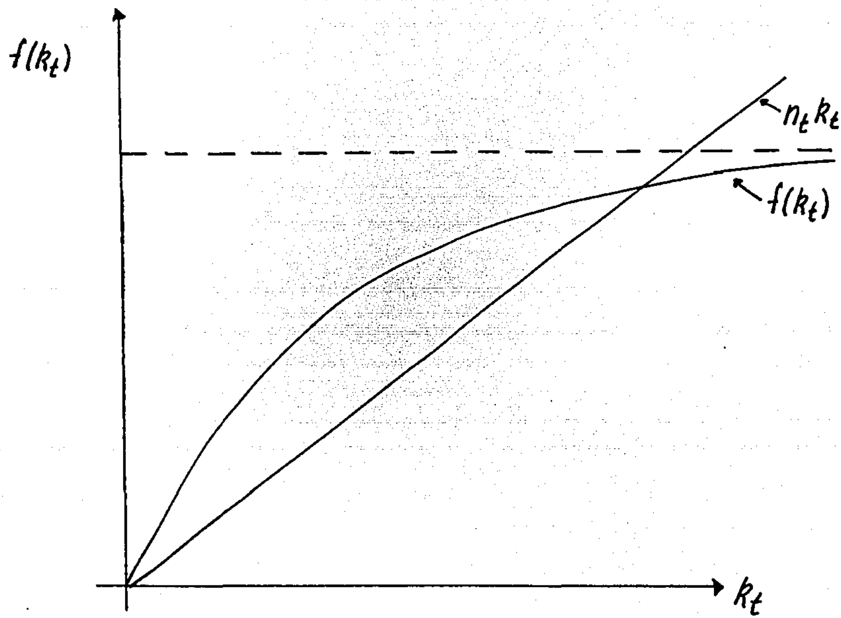


FIGURA Nº 9

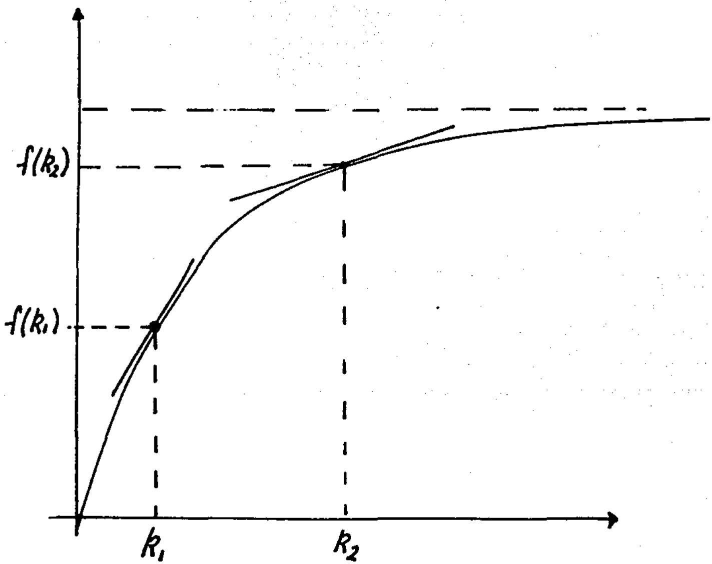


FIGURA 11

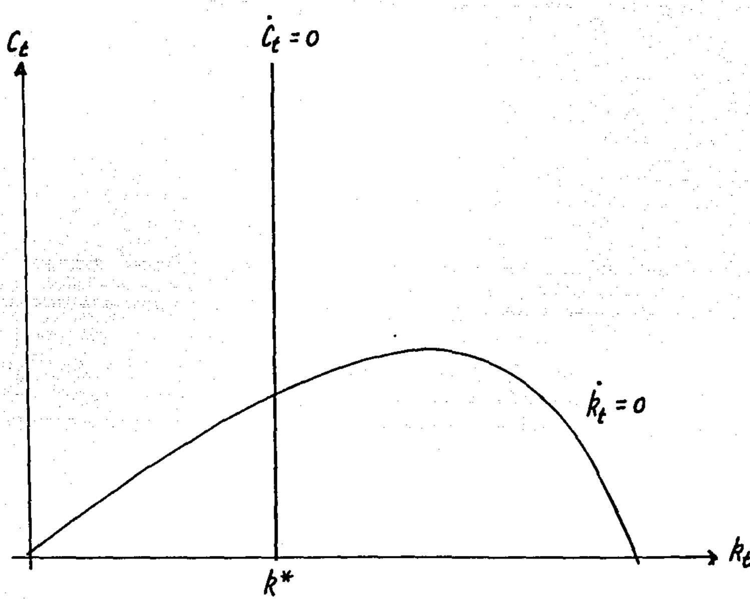


FIGURA 12

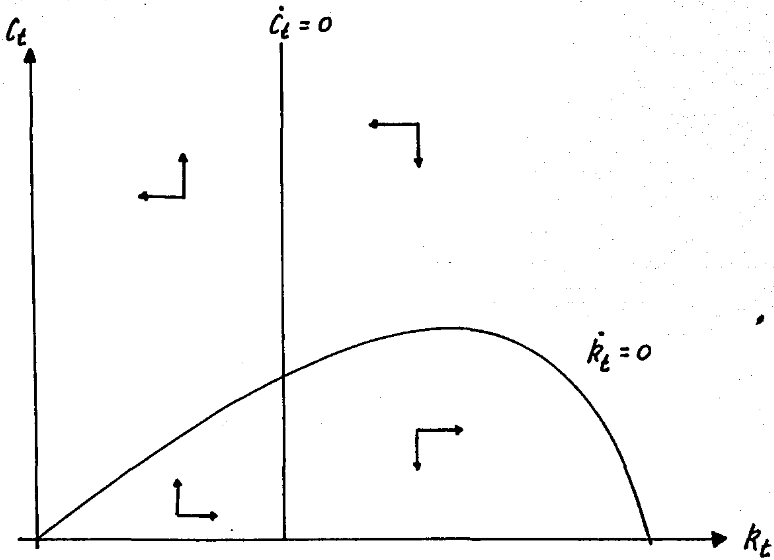


FIGURA 13

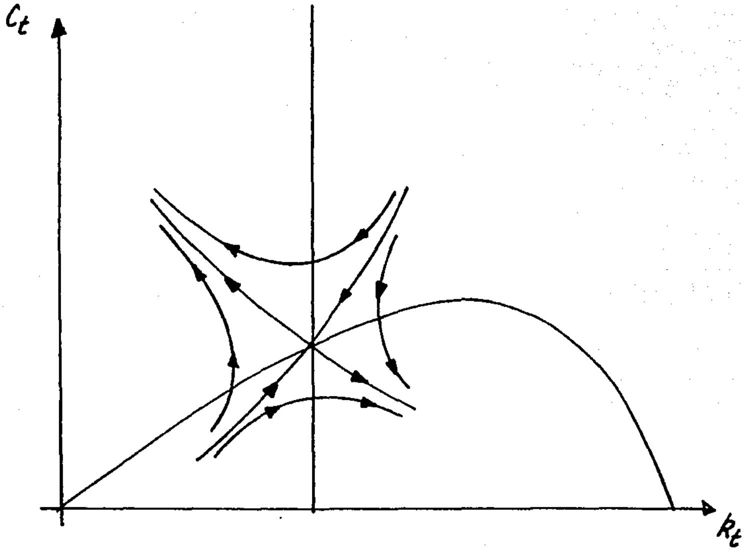


FIGURA N· 14

Para ver quien es menor, si k^* o k^{**} , volvamos a la gráfica de $f(k_t)$ donde tomamos dos puntos cuales quiera k_1, k_2 : (ver gráfica 11).

Observemos que la recta tangente para k_2 está menos inclinada que la determinada por k_1 , en consecuencia podemos concluir:

$$k_1 < k_2 \; sii \; f'(k_1) > f'(k_2)$$

En este caso concreto como suponemos θ, n_t positivos,

$$f'(k^*) > f'(k^{**}) \text{ y en consecuencia } k^* < k^{**}$$

Con lo cual podemos decir que la recta perpendicular definida por (7), intersecta a la curva definida por (9), antes de que esta llegue a su máximo. (Ver gráfica 12).

La intersección de las gráficas nos da el estado estacionario. Para poder dibujar las trayectorias C(t), (t), estudiaremos los signos de los derivados por regiones:

$$\dot{c}>0 \rightarrow f'(k_t) > \theta + n_t \text{ es decir puntos a la izquierda de } k^*$$
$$\dot{c}<0 \;\; f'(k_t) < \theta + n_t \text{ ; puntos a la derecha de } k^*$$
$$\dot{k}<0 \rightarrow c_t < f(k_t) - n_t k_t \text{ es decir puntos arriba de la curva}$$
$$\dot{k}>0 \rightarrow c_t < f(k_t) - n_t k_t \text{ puntos bajo la curva}$$

Situando la anterior información (Ver gráfica 13) y combinando los anteriores resultados, trazamos curvas que sean consistentes con ellos (Ver gráfica 14).

Como vemos, se trata de un punto silla con una única trayectoria asintóticamente estable. Observemos, en consecuencia, que para encontrar tal senda estable en un momento t dado, simplemente debemos escoger una cierta pareja (c_0, k_0) que se encuentre en la trayectoria y entonces el desarrollo económico óptimo cita teóricamente garantizado.

Naturalmente como trabajamos a nivel agregado, la pareja (c_t, k_t) está dada socialmente y para forzarla a estar en la trayectoria, alguna fuerza cuercitiva deberá ejercer su poder. A esta fuerza externa en economía se le llama "el planeador central". Veremos que según este modelo, las fuerzas libres del mercado sustituyen con eficacia a ese dictador benevolente, pero antes de abordar tal asunto, obtendremos la solución - punto silla - de manera más formal.

2. Solución analítica mediante aproximación lineal.

Aplicaremos a las ecuaciones (1), (6), un desarrollo en seno de Taylor hasta las primeras derivadas, alrededor del estado estacionario (c_t^*, k_t^*) en el cual los derivados respecto al tiempo se anulan. Recordemos que la formula de Taylor para este caso sería:

$$g(x,y) \approx g(x_0,y_0) + \Delta g(x_0,y_0) \bullet (x-x_0, y-y_0)$$

En este caso concreto, haciendo

$$\sigma(c_t) = -\frac{u'_t}{u''_t}$$

tenemos

$$\dot{c}_t = \sigma(c_t)\,(f'(k_t) - n_t - \theta)$$

Y su gradiente estaría determinado por:

$$\frac{\partial \dot{c}_t}{\partial c_t}\Big|_{(c^*,k^*)} = \sigma'(c_t)\,(f'(k_t) - n_t - \theta)\,\Big|_{(c^*,k^*)} = 0$$

Por otra parte

$$\frac{\partial \dot{c}_t}{\partial k_t} = \sigma(c_t)\,(-f''(k_t))$$

Sustituyendo en la fórmula planteada inicialmente, considerando que en (c_t^*, k_t^*), $\dot{c}_t = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}\dot{c}_t &= 0 + (0, -\sigma(c^*) f''(k^*))\,(c-c^*, k-k^*) = \\ &= -\sigma(c^*) f''(k^*)\,(k-k^*) = \\ &= -\beta\,(k-k^*) \quad con\ \beta > 0\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - n_t k_t$$

de donde

$$\frac{\partial \dot{k}_t}{\partial c_t}=-1 \ ; \ \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial k_t}=f'(k_t)-n_t$$

$$\therefore \quad \frac{dk_t}{dt}\approx 0+(-1,f'(k^*)-n_t)\bullet(c_t-c^*,k_t-k^*)=$$
$$=(-1,\theta)\bullet(c_t-c^*,k_t-k^*)=\theta(k_t-k^*)-(c_t-c^*)$$

En resumen tenemos la siguiente aproximación lineal:

$$\dot{c}_t=-\beta(k_t-k^*)\ldots\ldots(1)'$$
$$\theta(k_t-k^*)-(c_t-c^*)\ldots\ldots(6)'$$

Resolveremos este sistema mediante el método de sustitución. Derivando (6) nuevamente respecto a t, y sustituyendo (1) tenemos:

$$\frac{d^2k_t}{dt^2}=\theta\frac{dk_t}{dt}-\frac{dc_t}{dt}=\theta\dot{k}_t+\beta(k_t-k^*)$$
$$\therefore\ k-\theta\dot{k}-\beta\dot{k}-\beta k=-\beta k^*$$

La ecuación característica de la homogénea sería:

$$r^2-\theta r-\beta=0$$

Cuya solución es:

$$r=\frac{\theta\pm\sqrt{\theta^2+4\beta}}{2} \quad r_1>0,\ r_2<0$$

La solución particular es $k_t=k^*$. Por tanto la solución general es:

$$k_t=\alpha_1 e^{r_1 t}+\alpha_2 e^{r_2 t}+k^*$$

Observemos que

$$\alpha_1=0 \rightarrow \lim_{t\to\infty} k_t=k^*$$
$$\alpha_2=0 \rightarrow \lim_{t\to\infty} k_t=\infty$$

Por lo que como era de esperarse tenemos una única solución asintóticamente estable.

3. El modelo de Ramsey con una economía descentralizada.

Plantearemos ahora el modelo pero suponiendo no una economía centralizada, sino una en la que cada familia busca optimizar su función de utilidad disponiendo de una riqueza que se forma a través del salario que reciben como trabajadores y de los intereses por poner a disposición de los fabricantes parte de su riqueza. Los supuestos son muy similares a los que anteceden y habremos añadir algunos más: que cada empresa optimiza beneficios por lo que, como se justifica en el apéndice a este capitulo:

$$f'(k_t)=r_t$$
$$f(k_t)-k_t f'(k_t)=w_t$$

r_t= tasa de interés, w_t=salario....... (9)

Ahora el problema se plantea así:

$$\max\ U=\int_0^\infty u(c_t)\,e^{-\theta t}dt$$
$$s.a.\ \ c_t+\frac{da_t}{dt}+na_t=w_t+r_t a_t....(9)'$$

Donde a_t = riqueza humana= k_t-b_{pt}; b_{pt}= préstamos

Entonces aplicando de nueva cuenta el Principio Máximo:

$$h=u(c_t)\,e^{-\theta t}+\lambda e^{-\theta t}(w_t+ra_t-c_t-na_t)$$
$$\frac{\partial h}{\partial c_t}=u'(c_t)\,e^{-\theta t}-\lambda e^{-\theta t}=0....(10)$$
$$\frac{\partial H}{\partial a_t}=\lambda e^{-\theta t}(r_t-n)=-\frac{d}{dt}(\lambda e^{-\theta t})=-\dot{\lambda} e^{-\theta t}+\theta\lambda e^{-\theta t}...(11)$$

Las ecuaciones (9), (13) determinan la solución:

$$\dot{a}_t=w_t+r_t a_t-c_t-na_t$$
$$\dot{c}_t=-\frac{u'(c_t)}{u''(c_t)}(r_t-n-\theta)....(14)$$

$$\text{de (10)} \quad u'(c_t)-\lambda_t=0; \; \lambda_t=u'(c_t) \; , \; \dot{\lambda}_t=u''(c_t)\frac{dc_t}{dt} \ldots (12)$$

$$\text{de (11)} \quad \dot{\lambda}+\lambda(r_t-n-\theta)=0$$

$$\text{sustituyendo (12),} \quad u''(c_t)\frac{dc_t}{dt}+u'(c_t)(r_t-n-\theta)=0$$

$$\therefore \quad \frac{dc_t}{dt}=-\frac{u'(c_t)}{u''(c_t)}(r_t-n-\theta) \ldots (13)$$

Veremos ahora que esta solución es equivalente a la encontrada previamente en la economía centralizada.

Por definición de a_t tenemos:

$$\frac{da_t}{dt}=\frac{dk_t}{dt}-\frac{d_{pt}}{dt}$$

sustituyendo esto y (9) en (14) tenemos:

$$\frac{dk_t}{dt}-\frac{d_{pt}}{dt}=f(k_t)-k_tf'(k_t)+f'(k_t)(k_t-b_{pt})-c_t-n(k_t-b_{pt})$$

$$\frac{dk_t}{dt}=f(k_t)-f'(k_t)b_{pt}-c_t-nk_t+(nb_{pt}+\frac{db_{pt}}{dt})$$

Si consideramos ahora que la tasa de interés de capital se iguala con la tasa de interés por prestar, tenemos:

$$\frac{dk_t}{dt}=f(k_t)-c_t-nk_t$$

Que es la restricción presupuestal de la economía centralizada. Para obtener la otra parte del anterior sistema de ecuaciones una sustitución sencilla de (9) en (14) nos lleva a:

$$\frac{d_t}{dt}=-\frac{u'(c_t)}{u''(c_t)}(f'(k_t)-n-\theta)$$

Con lo cual se habrá demostrado la equivalencia entre los dos, problemas. Con esto, algunos economistas suelen concluir que la economía planificada es equivalente a una economía en la que cada quien busca racionalmente su beneficio propio; en otras palabras, que nuestro mundo es el mejor de los mundos posibles.

Lo cual si bien no parece muy adecuado como corolario final de este trabajo, por su metodología, acaso pudiera servir como aliciente para quienes sostengan puntos de vista alternativos.

BIBLIOGRAFIA.

1. Allen, Roy George P. *"Análisis Matemático para Economistas"*. Ed. Aguilar, Madrid 1959.

2. Arrow, Kenneth J. y Intrilligator. *"Handbook of Mathematics for Economics"* Elservier Science Publisher, Amsterdam, 1986.

3. Blanchard Oliver Jean and Stanley Fischer. *"Lectures on Macroeconomics"*. Massachusetts Institute of Technology, 1981.

4. Chiang Alpha C. *"Métodos Fundamentales de la Economía Matemática"*. Buenos Aires, Amorrartis, 1976.

5. Dixit.A.K. *"Optmization in Economic Theory"*. Ed. New York, Oxford University, 1990.

6. Elgoltz L. *"Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional"*. Editorial MIR, Moscu 1977.

7. Intrilligator, Michael D. *"Mathematical Optimizatiob and Economic Theory"*. Englewood Cliffs, N.J., 1971.

8. Kamien, Marton . *"Dynamic Optimization; The Calculus of Variation and Optimal Control in Economics and Management"*. New York, North Holland, 1981.

9. Krasnov M. et. al. *"Cálculo Variacional"*. Editorial MIR, Moscu 1976.

10. Leonard, Daniel y Ngo Van Long. *"Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics"*. Cambridge, University Press, 1992.

11. Millar. Ronald E. *"Dynamic Otimization and Economic Applications"*. Mc. Graw-Hill Book Company, 1979.

12. Simmons. *"Ecuaciones Diferenciales"*. Ed. Trillas, México 1978.

13. Takayama, Akira. *"Mathematical Economics"*. Cambridge University, 1985.