

21
2e3

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

Configuraciones Principales Locales de Superficies

Matemático

Patricia Murguía Romero

8510977-1

Septiembre 1993.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido.

Introducción.....	1
Capítulo I	3
Configuración Principal de una Superficie En \mathbb{R}^3	3
Introducción.	3
§ 1. Variedades y Superficies Diferenciables.....	4
§ 2. Funciones Diferenciables.....	6
§ 3. Curvatura.	7
§ 4. Primera y Segunda Formas Fundamentales.	12
§ 5. Configuraciones Principales.	15
Capítulo II.....	17
Inmersiones, Campos Vectoriales y Estabilidad Estructural.....	17
Introducción.	17
§ 1. El espacio de Inmersiones.	18
§ 2. Campos Vectoriales.	19
§ 3. Campos Lineales y Singularidades Hiperbólicas.....	23
§ 4. Estabilidad Estructural.	25
Capítulo III.....	29
Configuraciones Principales Locales estructuralmente estables. ...	29
Introducción.	29
§ 1. Parametrización Canónica de una superficie inmersa en \mathbb{R}^3	30
§ 2. Caracterización de las Configuraciones Locales Estructuralmente Estables.	32

§ 3. Análisis de la configuración principal en torno a un punto umbílico Darbouxiano.	39
§ 4. Comentarios y conclusiones.	48
Referencias y Bibliografía	49
Tabla de Notación.....	50

INTRODUCCIÓN.

Dada una variedad riemanniana, se tiene definido el concepto de curvatura normal para cada punto. Para el caso particular de una superficie, es decir una variedad de dimensión dos, encajada en R^3 , Euler definió la curvatura de la superficie en un punto p como el producto de las curvaturas máxima y mínima de las secciones normales en el punto, es decir, de las curvaturas principales. Posteriormente Gauss definió la curvatura de la superficie en un punto introduciendo la aplicación normal cuya diferencial es autoadjunta y llamó curvatura de la superficie en el punto al determinante de esta transformación. Estas dos definiciones coinciden y además, el teorema egregio de Gauss afirma que el concepto de curvatura es intrínseco.

Con base en la curvatura que tiene la superficie en cada punto, se tiene una clasificación de los puntos de la superficie según la curvatura sea positiva, negativa o cero, diferenciando aquéllos en donde las dos curvaturas principales son cero o sólo una de ellas se anula. Los puntos en donde se tengan las dos curvaturas principales iguales se llaman puntos umbílicos.

Por cada punto que no sea umbílico pasan exactamente dos líneas de curvatura, cosa que no sucede en los puntos umbílicos, por lo que se tiene una red (ortogonal) en la superficie, formada por las líneas de curvatura, en donde los puntos umbílicos son las singularidades de esta red. Si al conjunto de puntos umbílicos se añade la red, se obtiene la llamada configuración principal de la superficie.

En este trabajo se estudiarán las configuraciones principales en torno a un punto umbílico aislado de una superficie inmersa en R^3 tales que el tipo topológico de la configuración se preserve bajo perturbaciones en la inmersión. Dardoux dió una caracterización de éstos tipos pero no logró justificarla.

En el artículo [S-G] de Sotomayor y Gutiérrez (ver bibliografía) se hace un estudio completo de las configuraciones que son estructuralmente estables justificando la caracterización hecha por Darboux, mediante un estudio local que utiliza explosión, técnica originada en Geometría Algebraica y usada en teoría de Sistemas Dinámicos y un estudio global en superficies compactas y orientables. Este trabajo utiliza una técnica diferente a la que se tiene en [S-G] pero

propuesta por los mismos en $[G-S]$ construyendo una variedad en donde se facilita hacer el análisis para la estabilidad estructural de la configuración principal local.

La tesis se compone de tres capítulos, el primero expone las bases de la Geometría Diferencial necesarios para plantear el problema, en él se introducen definiciones y conceptos básicos.

El segundo capítulo es de tipo técnico; en él se muestran las herramientas de ecuaciones diferenciales, y la topología utilizada en el espacio de inmersiones.

Por último, en el tercer capítulo se hace un estudio de los campos de direcciones principales alrededor de un punto umbilíco aislado, demostrando la caracterización hecha por Darboux mediante la introducción de un haz en el cual es posible aplicar las técnicas de la teoría de geométrica de ecuaciones diferenciables.

CAPÍTULO I

CONFIGURACIÓN PRINCIPAL DE UNA SUPERFICIE EN R^3

Introducción.

En este capítulo se establecen las bases para el planteamiento del problema a tratar en esta tesis.

Primeramente, se define el concepto de variedad, haciendo énfasis en el de superficie en R^3 ; posteriormente, se exponen las dos definiciones de curvatura; la dada por Euler y la que define Gauss haciendo uso del espacio ambiente en donde se encuentra la superficie.

Del concepto de curvatura se desprende una clasificación de los puntos de una superficie según el valor de la curvatura. La clase de interés en este trabajo es la de los puntos umbilicos.

Se define la configuración principal de una superficie compacta y orientada como la terna formada por las líneas de curvatura y los puntos umbilicos, particularizando después este concepto en el de configuración principal en torno a un punto umbilico aislado.

§ 1. Variedades y Superficies Diferenciables.

Aunque este trabajo se centra en superficies inmersas en R^3 se dará la definición abstracta de superficie diferenciable como caso particular de una variedad de dimensión dos, pues en muchas ocasiones será útil la terminología de variedades.

Una *variedad de clase C^r de dimensión n* es un espacio topológico M en donde para cada punto p en M existen un conjunto abierto $V_\alpha(p)$ de M , un subconjunto abierto de R^n , $U_\alpha \subset R^n$ y un homeomorfismo x_α de $V_\alpha(p)$ en U_α tales que si $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W$ no es vacío entonces se tiene que

$$x_\alpha^{-1} \cdot x_\beta : x_\beta^{-1}(U_\beta) \rightarrow x_\alpha^{-1}(W) \text{ y } x_\beta^{-1} \cdot x_\alpha : x_\alpha^{-1}(U_\alpha) \rightarrow x_\beta^{-1}(W) \text{ son de clase } C^r$$

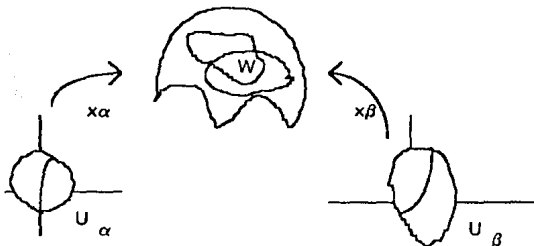


Figura 1.

Obsérvese entonces que los subconjuntos $x_\alpha(U_\alpha)$ son conjuntos abiertos en M .

A las funciones x_α se les llama *parametrizaciones*. El conjunto $x_\alpha(U_\alpha) \subset M$ es una *vecindad coordinada* de p en M y al conjunto $\{x_\alpha, U_\alpha\}_\alpha$ máximo con respecto a las condiciones dadas en la definición de variedad se le conoce como *atlas* de la variedad M .

Así, dada una variedad diferenciable, el atlas correspondiente es único, por lo que toda parametrización que se esté trabajando será compatible con las del atlas, es decir el cambio de coordenadas con cualquiera de ellas será de clase C^r .

A la variedad M de dimensión n se le suele denotar por medio de M^n ; además si las parametrizaciones son de clase C^∞ se dice simplemente que *la variedad es diferenciable*.

Ejemplos de variedades diferenciables de dimensión n son la gráfica de una función diferenciable de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o la imagen inversa de un valor regular de una función diferenciable de $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Una *superficie regular en \mathbb{R}^3* es una variedad diferenciable de dimensión dos con la topología relativa de \mathbb{R}^3 .

Si la superficie es una variedad de clase C^r , entonces, la superficie es de clase C^r .

Sea M^2 una superficie regular en \mathbb{R}^3 y sea x una parametrización

$$x: U \rightarrow x(U) \subset M^2$$

en torno a un punto $p \in M^2$, una *curva parametrizada en la superficie M^2* es una función diferenciable $\gamma: I \rightarrow M^2$. Es inmediato ver que, en términos de una carta, las curvas en la superficie están determinadas por curvas en \mathbb{R}^2 , es decir, si $\gamma: I \rightarrow M^2$ es una curva en la superficie M^2 , entonces $\gamma(t) = x(u(t), v(t))$.

El *vector tangente* a una curva parametrizada $\gamma(t) = x(u(t), v(t))$ en $\gamma(t_0)$ está dado por $\gamma'(t_0) = x_u u' + x_v v'$ en donde x_u y x_v denotan las derivadas parciales de la parametrización x con respecto a u y v evaluadas en el punto $(u(t_0), v(t_0))$.

Se puede demostrar que el conjunto de vectores tangentes a una superficie en un punto tiene estructura de espacio vectorial cuya dimensión es dos y como la superficie es regular, si x es una parametrización en torno a $p \in M^2$, el conjunto $\{x_u, x_v\}$ es un conjunto linealmente independiente en todo punto, por lo que todo vector tangente a la superficie es combinación lineal de x_u y x_v .

Al espacio vectorial generado por $\{x_u, x_v\}$ se le conoce como el *espacio tangente a la superficie en el punto p* y se denota mediante $T_p M$.

§ 2. Funciones Diferenciables.

Sean M^n y N^m variedades diferenciables y $f: V \subset M \rightarrow N$ una función definida en un abierto V de M , se dice que f es diferenciable en un punto p de V si dado $\{U, x\}$ en el atlas de M y $\{W, y\}$ en el atlas de N , con $p \in x(U)$ y $f(x(U)) \subset y(W)$ se tiene que la composición $y^{-1} \circ f \circ x: U \rightarrow W$ es diferenciable en $x^{-1}(p)$ como función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m .

La siguiente ilustración es un esquema de las composiciones que es necesario efectuar para la comprobación de la diferenciable de una función:

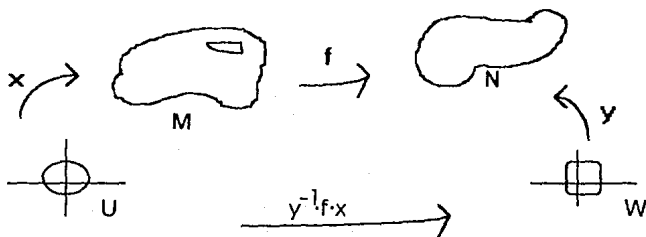


Figura 2.

Si $f: M \rightarrow N$ es una función diferenciable en un punto p en M , se define la diferencial de f en p como la transformación lineal $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ dada por $df_p(\alpha'(0)) = (f \circ \alpha)'(0)$, en donde α es una curva parametrizada en M tal que

$$\alpha(0) = p.$$

Un caso especial de funciones diferenciables es el de las inmersiones, en donde f es una inmersión de M en la variedad N si $f: M \rightarrow N$ es una función diferenciable tal que su diferencial df_p es inyectiva para todo punto p en M . Si la función es de clase C^r se dice que la inmersión es de clase C^r .

Nótese que la inmersión de una superficie en \mathbb{R}^3 no necesariamente es una superficie regular en \mathbb{R}^3 pues puede tener autointersecciones, pero como este trabajo se centra en un estudio local de superficies inmersas, el tener autointersecciones no representa ningún problema, pues la diferencial de la inmersión df_p es biyectiva y f es un difeomorfismo local, hecho de importancia para poder definir $T_p M$ en cada punto de una vecindad de p en $f(M)$.

Se volverá a tratar con inmersiones ya que son las funciones que se perturbarán para obtener aquellas que son estructuralmente estables.

Un ejemplo de inmersión de K en R^2 que no es un encaje está dado por $f(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$. Obsérvese que en θ hay una intersección, pues $f(2) = f(-2)$, pero al restringir f a una pequeña vecindad $(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ del θ , se tiene que f es inyectiva, como se puede observar en la siguiente figura:

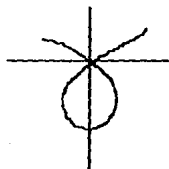


Figura 3.

§ 3. Curvatura.

El concepto de curvatura es necesario para definir el de configuración principal. Se darán a continuación dos definiciones de curvatura de una superficie; la definición que da Euler se basa en el concepto de curvatura normal y la que define posteriormente Gauss involucra un campo vectorial normal a la superficie, idea que se puede generalizar para definir curvatura de una variedad de dimensión n inmersa en algún R^n .

Sean M^2 una superficie regular en R^3 $p \in M^2$, N_p un vector normal a la superficie basado en p y $v \in T_p M$ un vector tangente no nulo, entonces la intersección de $T_p M$ con el plano que contiene a v y a N_p se llama *sección normal* de M^2 en la dirección v .

Se tiene entonces una sección normal para cada dirección en $T_p M$. Como las secciones normales son curvas regulares en la superficie, se puede obtener la curvatura de cada una de ellas.

Sea α una curva en la superficie M^2 con tangente v en p . Sea θ el ángulo entre el vector normal a la curva α y el vector normal a la superficie en p . Sea k_α la curvatura de la curva α en p vista como curva en R^3 .

Entonces la curvatura normal de la superficie M en el punto p en la dirección de v es $k_n(v) = k_n \cdot \cos(\theta)$.

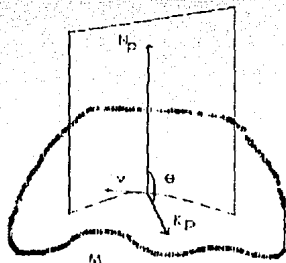


Figura 4.

Se puede demostrar que todas las curvas en una superficie M^2 que tienen la misma recta tangente en p tienen la misma curvatura normal, en particular la sección normal que está determinada por esa dirección tangente.

Considérese la función $k_n: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada dirección v en el plano tangente le asocia la curvatura de la sección normal correspondiente (obsérvese que se está definiendo esta función para un punto fijo en la superficie). Si restringimos esta función al círculo unitario que es un compacto, se tiene que la función k_n alcanza su valor máximo k_1 y su mínimo k_2 en dos direcciones específicas, si no es constante.

La siguiente definición es la que Euler da para curvatura en términos de las curvaturas normales máxima y mínima.

Si M^2 es una superficie en \mathbb{R}^3 , entonces la curvatura de la superficie M^2 en p es el producto de las curvaturas normales máxima y mínima. Es decir, $K_p = k_1 \cdot k_2$

Se tiene una clasificación para los puntos de una superficie, dada en términos de la curvatura que tiene la superficie en cada punto:

p es un punto *elíptico* si $k_1 \cdot k_2 > 0$

p es un punto *hiperbólico* si $k_1 \cdot k_2 < 0$

p es *parabólico* si $k_1 \cdot k_2 = 0$ y k_1 ó k_2 no es cero

p es un punto *plano* si $k_1 = k_2 = 0$.

La siguiente figura ilustra los tipos de puntos que tiene un toro de revolución.

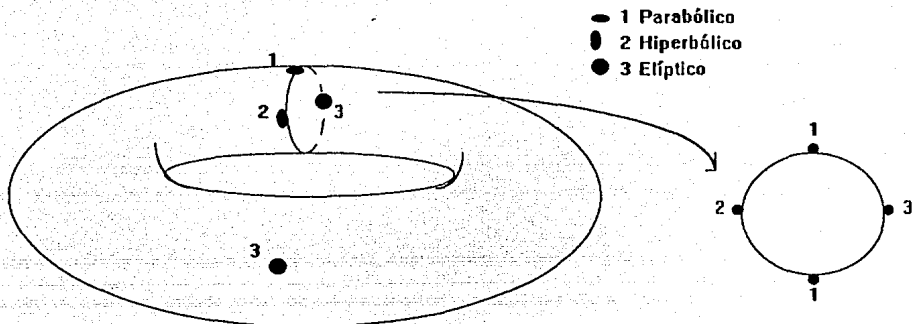


Figura 5.

Parametrizando con la función altura respecto al plano tangente, se puede demostrar que, para todo punto $p \in M^2$ elíptico, existe una vecindad en torno al punto p en la superficie tal que todo punto de la vecindad se encuentra del mismo lado del plano tangente $T_p M$. Si p es un punto hiperbólico, para toda vecindad del punto p los puntos de ésta quedarán de ambos lados del plano tangente $T_p M$. Si el punto es parabólico o plano, es decir $K_p = 0$, pueden ocurrir ambas situaciones.

Los *puntos umbilicos* son aquéllos en donde $k_1 = k_2$.

La conjetura de Caratheodory dice que una superficie regular, orientable, compacta y convexa tiene al menos dos puntos umbilicos. La esfera y el plano son superficies en donde todos sus puntos son umbilicos, un elipsoide que no sea de revolución tiene solamente cuatro puntos umbilicos y son aislados.

Cada uno de los tipos de elipsoides está determinado por una ecuación, por lo que se puede pensar en cómo cambia el conjunto de puntos umbilicos en una superficie según cambia la ecuación que la determina. Al perturbar la ecuación que describe la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, lo que se obtiene es un elipsoide de revolución $x^2 + \varepsilon y^2 + z^2 = a^2$ $\varepsilon \neq 1$, el cual ya no tiene todos sus puntos umbilicos a pesar de tener curvas de puntos umbilicos, y al perturbarlo se obtiene un elipsoide que no es de revolución $x^2 + \varepsilon y^2 + \delta z^2 = a^2$ $\varepsilon \neq \delta$ el cual sólo tiene cuatro puntos umbilicos y son aislados.



Figura 6.

Si M^2 es una superficie regular en R^3 , entonces todo punto $p \in M^2$ que no sea umbilico tiene las curvaturas normales máxima y mínima distintas.

A continuación se da el concepto de orientabilidad para poder definir curvatura de una superficie regular mediante la aplicación de Gauss.

Si p es un punto en la superficie $M^2 \subset R^3$, el plano tangente a M^2 en p , $T_p M$, tiene dimensión dos y por lo tanto hay una única dirección normal a ese plano y dos posibles vectores normales unitarios.

Dada una superficie regular M^2 en R^3 , un *campo vectorial normal* en M es una función N de clase C^r $N: M^2 \rightarrow R^3$ tal que $N(p)$ es un vector normal a la superficie en p .

Si es posible escoger un campo de vectores normales unitarios continuo para toda la superficie M^2 , entonces se dirá que la superficie es *orientable*. Si el campo de vectores normales está dado, la superficie es una *superficie orientada* y al campo $\{N_p\}$ de vectores normales se le llama *orientación* de la superficie.

Como ejemplos de superficies orientables están el elipsoide o un cilindro y de superficie no orientable la banda de Möbius, nótese que al pedir que los vectores sean unitarios se ha impedido el que los vectores se anulen.

Obsérvese que el concepto de orientabilidad es de tipo global, sin embargo localmente, siempre se puede definir un campo vectorial normal unitario aunque la superficie no sea orientable, pues si x es una parametrización en torno a p y x_u y x_v las derivadas parciales de x con respecto de u y de v , entonces se tiene que los vectores $N_p(u, v) = (x_u \wedge x_v) / \|(x_u \wedge x_v)\|$ varían no sólo continuamente sino diferenciablemente con respecto a u y v en esa vecindad.

De ahora en adelante se trabajará con *superficies locales regulares*, es decir, con una vecindad coordenada de una superficie regular, que admitirá un campo de vectores normales unitarios continuo "global" y por lo tanto será orientable.

La aplicación de Gauss está definida en una superficie regular orientada y toma valores en la esfera de dimensión 2 y a cada punto en la superficie le asocia el vector normal unitario correspondiente a p determinado por la orientación:

$$N: M^2 \rightarrow S^2 \text{ tal que } N(p) = N_p$$

A esta aplicación se le llama *la aplicación de Gauss*.

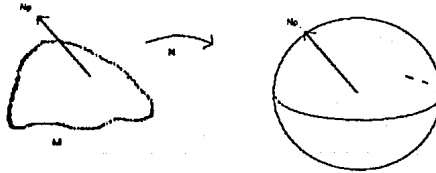


Figura 7.

Nótese que la diferencial de esta aplicación se puede ver como la transformación lineal

$$dN_p: T_p M \rightarrow T_p S^2$$

pues $T_p M$ es paralelo a $T_{N(p)} M$ ya que el vector normal N_p es paralelo al vector normal a S^2 , por lo tanto, se puede identificar a $T_p M$ con $T_{N(p)} M$.

Gauss llamó *curvatura de la superficie* M^2 en p al determinante de la diferencial dN_p .

Se puede demostrar* que la derivada de la aplicación de Gauss es lineal y autoadjunta, utilizando el hecho de que $\langle N, x_u \rangle = \langle N, x_v \rangle = 0$ por ser vectores perpendiculares. Esto permitirá definir una forma cuadrática en la superficie.

§ 4. Primera y Segunda Formas Fundamentales.

Al estar trabajando con superficies en R^3 , se puede introducir en la superficie una manera de medir, pues el producto interior usual en R^3 induce un producto interior en cada plano tangente $T_p M$ dado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ donde el producto $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ de $w_1, w_2 \in T_p M$ es el producto $\langle w_1, w_2 \rangle$ como vectores en R^3 , por lo tanto se puede definir una forma cuadrática en cada espacio tangente

$$I_p: T_p M \rightarrow R \text{ dada por } I_p(w) = \langle w, w \rangle_p$$

A la forma cuadrática I_p se le llama *primera forma fundamental de la superficie en el punto p* .

Utilizando el hecho de que la derivada de la aplicación de Gauss es una transformación autoadjunta, se tiene definida otra forma cuadrática

$$II_p: T_p M \rightarrow R \text{ tal que } II_p(w) = - \langle dN_p(w), w \rangle_p$$

A la forma cuadrática II_p se le conoce como la *segunda forma fundamental de la superficie en el punto p* .

* [Dc] pag.140

A los valores máximo y mínimo de la segunda forma fundamental II_p restringida al círculo unitario, se les llama *curvaturas principales* de la superficie en p .

Es fácil demostrar* que el valor de la segunda forma cuadrática en $v \in S^1 \subset T_p M$ coincide con la curvatura normal en la dirección de v definida por Euler, es decir

$$II_p(v) = k_n(v)$$

Por lo tanto el máximo y el mínimo de las curvaturas normales de una superficie en el punto p coinciden con las curvaturas principales en p .

Reescribiendo la definición de curvatura en términos de las curvaturas principales queda: La curvatura de una superficie en un punto p es el producto de las curvaturas principales en dicho punto.

La primera y la segunda formas cuadráticas tienen una expresión en términos de las coordenadas locales. Sea x una parametrización de M^2 en torno a un punto $p \in M^2$. Si $v \in T_p M$ entonces $v = \alpha'(0)$ para alguna curva parametrizada $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ con $\alpha(0) = p$. Así $v = x_u \cdot u'(0) + x_v \cdot v'(0)$. Por lo tanto se puede ver que:

$$I_p(v) = E_p u'(0)^2 + F_p u'(0)v'(0) + G_p v'(0)^2$$

en donde $E_p = \langle x_u, x_u \rangle_p$, $F_p = \langle x_u, x_v \rangle_p$, $G_p = \langle x_v, x_v \rangle_p$ son diferenciables en una vecindad del punto p y se les conoce como los *coeficientes de la primera forma fundamental*. Entonces se tiene la siguiente expresión:

$$I_p(u', v) = (u' \quad v) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v \end{pmatrix}$$

* [Dc] Pag.142

A continuación se determinarán los coeficientes de la segunda forma fundamental en términos de una parametrización x de M^2 en torno a p . Tómese N_p el vector normal unitario a M^2 en p . Sea $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ una curva parametrizada en M^2 con $\alpha(0) = p$; entonces el vector tangente a la curva $\alpha(t)$ en el punto p es $\alpha'(0)$ y la derivada de la aplicación de Gauss en $\alpha'(0)$ tiene la forma siguiente:

$$dN_p(\alpha'(0)) = N_u \cdot u' + N_v \cdot v'$$

en donde N_u y N_v son las derivadas parciales de la aplicación de Gauss con respecto a u y v . Como $N_u, N_v \in T_p M$ tienen una expresión en términos de la base $\{x_u, x_v\}$, la segunda forma fundamental se escribe como:

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= -\langle N_u \cdot u' + N_v \cdot v', x_u \cdot u' + x_v \cdot v' \rangle_p \\ &= e_p (u')^2 + 2 f_p u' v' + g_p (v')^2 \end{aligned}$$

en donde $e_p = -\langle N_u, x_u \rangle_p$, $f_p = -\langle N_v, x_u \rangle_p = -\langle N_u, x_v \rangle_p$, $g_p = -\langle N_v, x_v \rangle_p$ son funciones diferenciables de u y v .

A las funciones e, f y g se les llama *coeficientes de la segunda forma fundamental*.

Igual que con la primera forma fundamental, se tiene la siguiente expresión matricial:

$$II_p(u', v') = \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

De las igualdades $\langle N, x_u \rangle_p = \langle N, x_v \rangle_p = 0$, derivando se obtiene que

$$e_p = \langle N, x_{uu} \rangle, f_p = \langle N, x_{uv} \rangle = \langle N, x_{vu} \rangle, g_p = \langle N, x_{vv} \rangle$$

Esta expresión para los coeficientes de la segunda forma fundamental será de utilidad posteriormente.

§ 5. Configuraciones Principales.

En esta sección se definirá la configuración principal de una superficie, englobando en ella líneas de curvatura y puntos umbilícos. Este trabajo tiene como objetivo caracterizar a las configuraciones principales locales, (es decir, en una vecindad de un punto umbílico aislado) que son invariantes en tipo topológico, bajo perturbaciones en la inmersión.

Una curva en una superficie M^2 tal que su tangente en cada punto coincide con una dirección principal se llama *línea de curvatura*.

Obsérvese que una curva parametrizada regular α en M^2 es línea de curvatura si y sólo si $dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \lambda(t) \cdot \alpha'(t)$, con $\lambda(t)$ una función diferenciable y por lo tanto $-\lambda(t)$ es la curvatura principal a lo largo de $\alpha(t)$.

Ya que en cada punto que no sea umbílico se tienen dos direcciones principales distintas, se pueden definir dos campos de direcciones ortogonales, dados por las direcciones principales en la superficie menos los puntos umbilícos.

Al conjunto de las curvas integrales de uno de estos campos se le llama *foliación principal*. La *foliación principal máxima* \mathcal{F} corresponde a la familia de curvas integrales del campo de direcciones principales máximas y la *foliación principal mínima* f a la familia de curvas integrales del campo de direcciones principales mínimas.

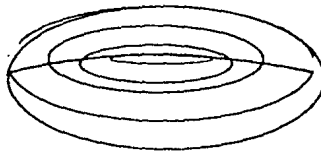


Figura 8.

La *configuración principal de la superficie* M^2 es la terna $(\mathcal{F}, f, \mathcal{U})$ formada por la familia de curvas principales máximas y mínimas y el conjunto de puntos umbilícos \mathcal{U} .

Como ya se ha dicho, este trabajo se basa en un estudio local, por lo que se manejará el concepto de *configuración principal local* en torno a un punto umbílico aislado considerando la configuración principal sólo en una vecindad del punto umbílico.

Las líneas de curvatura se pueden caracterizar por una ecuación diferencial en términos de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental. Haciendo algunos cálculos y utilizando la expresión de dN_p en términos de la base $\{x_u, x_v\}$ se obtiene que:

$$dN_p = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

Si $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ es una curva parametrizada en la superficie M^2 entonces $\alpha'(t) = x_u \cdot u' + x_v \cdot v'$ y se tiene que $\alpha(t)$ es línea de curvatura si y sólo si $dN_p(\alpha'(t)) = \lambda(t) \cdot \alpha'(t)$; al igualar coordenadas y eliminar λ se obtiene:

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0 \quad \dots(LC)$$

A esta ecuación se le conoce como *ecuación diferencial de líneas de curvatura*.

CAPÍTULO II

INMERSIONES, CAMPOS VECTORIALES Y ESTABILIDAD ESTRUCTURAL.

Introducción.

Este capítulo reúne los conceptos técnicos que se utilizarán posteriormente, en él se estudiará el espacio de inmersiones, el de campos vectoriales y la noción de estabilidad estructural local.

La configuración principal local de una inmersión en torno a un punto umbílico aislado, está definida por las foliaciones principales; por eso, para estudiar la estabilidad estructural de la configuración principal determinada por una inmersión, es necesario observar los cambios que presenta la foliación al aplicar pequeñas perturbaciones en la inmersión.

La justificación de la estabilidad estructural de las configuraciones principales propuestas por Darboux, se hará mediante técnicas de la teoría geométrica de las ecuaciones diferenciales, por eso se expondrán algunos resultados sobre estabilidad estructural de campos vectoriales; en especial, el teorema de Grobman y Hartman que asegura que un campo vectorial es localmente conjugado a su parte lineal en una singularidad hiperbólica.

En todo el capítulo, se trabajará con variedades regulares orientables y compactas.

§ 1. El espacio de inmersiones.

En esta sección se definirá una topología en el espacio de inmersiones conveniente para el estudio de la estabilidad estructural de configuraciones principales locales. Dicha topología será aquella que considere cercanía en derivadas; por lo tanto, se trabajará con la topología compacto abierta, considerando las derivadas hasta cierto orden.

Sean M y N variedades de clase C^r . $C^r(M, N)$ denotará el conjunto de aplicaciones de clase C^r de M a N .

Para introducir la topología compacto abierta en el conjunto $C^r(M, N)$, considérese una función $f \in C^r(M, N)$ y (x, U) y (y, V) cartas en M y N , respectivamente, y K un subconjunto compacto de M con $K \subset U$ tal que $f(K) \subset V$; entonces los conjuntos subbásicos de la topología compacto abierta están dados por

$$N(f, K, V) = \{g \in C^r(M, N) \mid g(K) \subset V\}$$

Se construirá una nueva topología, en donde una vecindad de $f \in C^r(M, N)$ consta de las funciones $g \in C^r(M, N)$ cercanas a f y tales que las derivadas hasta de orden s están cercanas a las de f , controlando esta cercanía sólo en conjuntos compactos.

Los conjuntos subbásicos para esta nueva topología, están dados por los conjuntos definidos a continuación.

Sean $f \in C^r(M, N)$, (x, U) y (y, V) cartas en M y N , respectivamente, y K un subconjunto compacto de M tal que $K \subset U$ y $f(K) \subset V$ y sea $\delta \in (0, \infty]$; entonces, un conjunto subbásico para la nueva topología será:

$$N^s(f, (x, U), (y, V), K, \delta)$$

$$= \{g \in C^r(M, N) \mid g(K) \subset V, \|D^j(yf_x^{-1})(p) - D^j(ygx^{-1})(p)\| < \delta \quad \forall p \in x(K), j \in \{0, 1, \dots, s\}\}$$

A la topología generada por estos conjuntos como subbásicos se le llama topología débil o *compacto abierta* $C^{r,s}$. A $C^r(M, N)$ con esta topología se le denota por $C^{r,s}(M, N)$.

Como se puede observar, el conjunto de inmersiones de clase C^r de una variedad M en otra variedad N , que se denotará por $\text{Imm}^r(M, N)$, es un subconjunto del conjunto de transformaciones de clase C^r de M a N . Así, $\text{Imm}^r(M, N)$ es un espacio topológico con la topología relativa de $C^r(M, N)$.

§ 2. Campos Vectoriales.

Un *campo vectorial diferenciable* (tangente) definido en $U \subset M$, es una aplicación diferenciable que a cada punto $p \in M$, le asigna un vector $X(p) \in T_p M$.

El conjunto de campos vectoriales diferenciables definidos en M se denotará mediante $\mathfrak{X}(M)$ y tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones naturales y de espacio topológico con la topología compacto abierta $C^{r,s}$ considerando a los campos como funciones. (Obsérvese que en este caso $r = \infty$ pues los campos son diferenciables). La estructura de espacio topológico es fundamental para definir el concepto de estabilidad estructural.

Un punto $p \in M$ es una *singularidad del campo* X si $X(p) = \bar{0}$.

Una *curva integral o trayectoria de un campo vectorial* X por p es una curva diferenciable $\alpha: I \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ para toda $t \in I$.

Ejemplo:

Tómese $M = \mathbb{R}^2$ y el campo $X(x, y) = (x, -3y)$, entonces $\alpha(t) = (x_0 e^t, y_0 e^{-3t})$ es la trayectoria por el punto (x_0, y_0) del campo X .

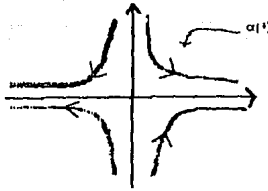


Figura 9.

Sea $X \in \mathcal{X}(M)$ un campo vectorial en M . A la curva integral que pasa por p en el tiempo $t=0$ se le denota mediante $X_t(p)$, $X_t(p): \mathbb{R} \rightarrow M$.

La siguiente definición ayudará a ver que el retrato fase de un campo vectorial sin singularidades es localmente como rectas paralelas a un eje coordenado de \mathbb{R}^2

Un grupo de difeomorfismos a un parámetro es una función

$$\varphi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U \text{ tal que } \varphi(t, p) = \varphi_t(p)$$

y satisface:

1. φ es diferenciable.
2. La familia $\{\varphi_t / t \in \mathbb{R}\}$ es tal que $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ para toda $t, s \in \mathbb{R}$ y $\varphi_0 = Id$.

Las condiciones 1 y 2 implican:

3. Para cada $t \in \mathbb{R}$ $\varphi_t: U \rightarrow U$ es un difeomorfismo.

Dado un campo vectorial no nulo en U un abierto de M tal que $p_0 \in U$, existe $\delta > 0$ tal que si $I = (-\delta, \delta)$ se tiene definido un grupo de difeomorfismos a un parámetro $\varphi: I \times U \rightarrow U$ tal que:

* [DC] pag. 176

$$\varphi(0, p) = p \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, p) = X(\varphi(t, p)) \quad \forall p \in U.$$

A esta función se le llama *el flujo local del campo X* y determina una foliación en $U \subset M$.

Dado un campo vectorial X definido en $U \subset M$ y $p \in U$ tal que $X(p) \neq 0$, se puede demostrar* que existen $V \subset U$ una vecindad de p y $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(X_t(q)) = C$ donde C es una constante; es decir, f es constante a lo largo de cada trayectoria del campo X y $df_q \neq 0$ para todo punto q en V .

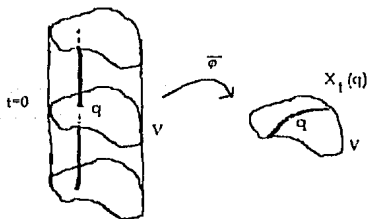


Figura 10.

Si $\bar{\varphi}$ es la restricción del flujo local al abierto $W = \{(I \times V) \cap (t, x, y) \mid x = 0\}$ y π_y es la proyección $\pi_y: I \times W \rightarrow W$, la función $f = \pi_y \cdot \bar{\varphi}^{-1}$ es tal que $f(X_t(q)) = q$ para toda $t \in I$ y se llama *la primera integral del campo X en una vecindad del punto p*.

Nótese que la existencia de la primera integral asegura que en una vecindad donde el campo no se anula, el retrato fase del campo se puede ver como rectas paralelas. En otras palabras se dice que el abierto está "foliado" por las trayectorias del campo.

Si M es una superficie diferenciable, una *foliación de clase C* de dimensión uno es un atlas (no maximal) \mathfrak{F} de M de clase C tal que

* [DC] pag. 177

a) Si $(x, U) \in \mathfrak{F}$ entonces $x^{-1}(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con U_1 y U_2 son abiertos en \mathbb{R} .

b) Si $(x, U), (y, V) \in \mathfrak{F}$ son tales que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $y \circ x^{-1}: x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ es tal que $y \circ x^{-1}(a, b) = (h_1(a, b), h_2(b))$, es decir, $y \circ x^{-1}$ manda rectas horizontales en rectas horizontales.

La siguiente figura ilustra esta definición:

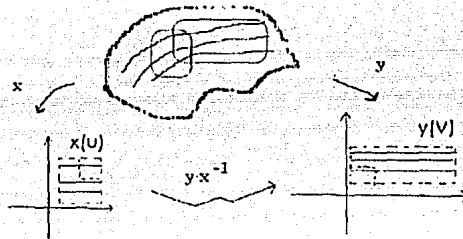


Figura 11.

En seguida se verá que si se tiene un campo vectorial no nulo definido en un subconjunto $U \subset M$ automáticamente se tiene una foliación de U determinada por las curvas integrales del campo.

Se puede definir un campo vectorial a través de un grupo de difeomorfismos a un parámetro.

Si se tiene un grupo a un parámetro de difeomorfismos $\{\varphi_t\}$ definido para todo $p \in U \subset M$ y $t \in I$, donde I es un intervalo abierto alrededor del 0 , se tiene un campo vectorial X en $U \subset M$ definido por la ecuación:

$$X(p) = \frac{d}{dt} \varphi_t(p)$$

cuyas curvas integrales en una vecindad del punto están dadas por los difeomorfismos, es decir: $X_t(p) = \varphi_t(p)$.

Por lo que se puede observar que el flujo local de un campo vectorial no nulo es un grupo a un parámetro de difeomorfismos restringido a un intervalo.

Con esto queda establecida la existencia de una correspondencia entre campos vectoriales sin singularidades y grupos de difeomorfismos a un parámetro.

Si X es un campo vectorial, una *separatriz* es una trayectoria $X_t(p)$ que tiende a una singularidad q del campo X , conforme t tiende a más (ó menos) infinito y su cerradura es una curva analítica.

Las separatrices de un campo que se definirá posteriormente, serán determinantes para describir la estructura cualitativa de las configuraciones principales locales estructuralmente estables.

§ 3. Campos Lineales y Singularidades Hiperbólicas

Las singularidades hiperbólicas y los campos lineales son fundamentales en el estudio cualitativo de los campos vectoriales. En este trabajo, se definirán campos vectoriales lineales con un número finito de singularidades hiperbólicas aisladas, asociados a las configuraciones principales, cuyas separatrices determinarán la estructura topológica de las configuraciones principales locales que sean estructuralmente estables.

A continuación se da una justificación de poder trabajar localmente con campos vectoriales en el espacio euclidiano R^n , en lugar de trabajar directamente con los campos definidos en una variedad de dimensión n .

Si f es un aplicación diferenciable entre las superficies M y N y X es un campo vectorial en M , entonces, f induce un campo vectorial Y en $f(M)$ dado por $df(X) = Y$. Es decir:

$$Y(f(p)) = df_p(X(p)) \in T_{f(p)}N$$

Por ejemplo, considérese un campo vectorial definido en la esfera y como el difeomorfismo (local) la proyección estereográfica de la esfera al plano, entonces este difeomorfismo induce un campo vectorial en R^2 .

Si f es un difeomorfismo entre dos superficies M y N y $\alpha(t)$ es la curva integral por p en M , de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$; entonces, $f(\alpha(t))$ será una curva integral por el punto $f(p)$ del campo Y inducido por f .

En el caso en que el difeomorfismo sea una carta x en M $x U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^2$, el campo inducido se llamará *la expresión en coordenadas locales* del campo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Es decir, el campo $Y = dx(X)$ es un campo vectorial definido en $x(U)$ tal que $Y(x(p)) = dx_p(X(p))$.

Si p_0 es una singularidad de un campo vectorial X definido en \mathbb{R}^n , y si dx denota la diferencial de la función $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, la ecuación:

$$\dot{x} = Ax \text{ con } A = dX_{p_0}$$

define un campo vectorial Ax llamado *parte lineal del campo X en p_0* .

Sea $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ el espacio vectorial de transformaciones lineales en \mathbb{R}^n , considérese la siguiente norma* :

$$\|L\| = \sup\{|Lv|/|v| = 1\} \in \mathbb{R}$$

Un *campo vectorial lineal* en \mathbb{R}^n es un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ tal que $X(x) = A(x)$ en donde $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es una transformación lineal.

Como A es una transformación lineal se puede hablar de sus valores propios; cuando éstos tienen parte real diferente de cero, se dice que el campo vectorial lineal es un *campo hiperbólico*.

Si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es un campo vectorial lineal hiperbólico, y el flujo del campo es I_t entonces I_t es un *isomorfismo hiperbólico*, es decir, que los valores propios del isomorfismo I_t no tienen norma uno.

Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ y p en M una singularidad de X ; se dice que p es una *singularidad hiperbólica* si la parte lineal en p de X ; $dX_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, no tiene valores propios en el eje imaginario.

* Se está denotando la norma en \mathbb{R}^n por valores absolutos $|\cdot|$ y la norma en el espacio de transformaciones por $\|\cdot\|$

En la siguiente sección se tratará la estabilidad estructural local de un campo en una singularidad hiperbólica.

§ 4. Estabilidad Estructural.

El estudiar la estabilidad estructural de las configuraciones principales se traducirá en estudiar la estabilidad estructural de ciertos campos vectoriales asociados a ellas. En esta sección se expone el concepto de estabilidad estructural para campos vectoriales, el cual proporciona una clasificación de los campos tales que la familia de las curvas integrales no cambian su tipo topológico bajo pequeñas perturbaciones en él.

Si X y Y son dos campos vectoriales tangentes en M , se dice que son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo $h: M \rightarrow M$ tal que manda trayectorias del campo X en trayectorias del campo Y preservando su orientación, es decir, $h(X_t(p)) = Y_s(h(p))$ con $t \in (0, \varepsilon)$ y $s \in (0, \delta)$ con $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Al homeomorfismo h se le llama *equivalencia topológica entre los campos X y Y* .

Si h es una equivalencia topológica entre dos campos vectoriales X y Y , entonces p es una singularidad de X si y sólo si $h(p)$ lo es del campo Y .

La siguiente definición se introduce pues el tratamiento hecho en esta tesis es de tipo local.

Sean $X, Y \in \chi(M)$ y $p, q \in M$; los campos X y Y son *topológicamente equivalentes en p y q* si existen vecindades V_p, V_q en M y un homeomorfismo $h: V_p \rightarrow V_q$ tal que $h(p) = q$ y lleva trayectorias de X en trayectorias de Y preservando su orientación.

Sean X un campo vectorial definido en M y p un punto en M . El campo vectorial X es *localmente estructuralmente estable en p* si para cualquier vecindad $U_p \subset M$ existe una vecindad $\partial U \subset \chi(M)$ de X tal que para cada $Y \in \partial U$, X y Y son topológicamente equivalentes en p y q para alguna $q \in U_p$.

Dada una M superficie inmersa en R^3 bajo $\alpha \in \text{Innf}(M, R^3)$ se dice que la configuración principal de la superficie es C^∞ estructuralmente estable en un punto p , si para toda vecindad W_p de p en M , existe una vecindad de α , $U_\alpha \subset \text{Innf}^s(M, R^3)$, tal que para toda $\beta \in U_\alpha$, exista un punto $q \in W_p$ y vecindades V_p y V_q de p y q respectivamente, y un homeomorfismo $h: V_p \rightarrow V_q$ que es una equivalencia topológica entre V_p y V_q .

Para estudiar la estabilidad estructural de una configuración, serán necesarios algunos resultados importantes relacionados con singularidades hiperbólicas; el primero es el teorema de Grobman-Hartman, que asegura la equivalencia topológica entre un campo y su parte lineal en una vecindad de una singularidad hiperbólica.

Los siguientes resultados son necesarios para la demostración del teorema de Grobman-Hartman y se enunciarán omitiendo su demostración que puede consultarse en [P-M] pp.61,65 y 66.

◆ *Lema 1.* Sea A un isomorfismo hiperbólico en R^n ; existe $\varepsilon > 0$ tal que si $\varphi_1, \varphi_2 \in C_b^0(R^n)$ tal que φ_1 y φ_2 tienen constantes de Lipschitz menores o iguales que ε entonces $A + \varphi_1$ y $A + \varphi_2$ son conjugados.

◆ *Lema 2.* Sea $X: V \rightarrow R^n$ un campo vectorial C^1 con $X(0) = 0$. Sea $L = dX_0$ su parte lineal en cero, dada $\varepsilon < 0$ existe un campo $Y: R^n \rightarrow R^n$ Lipschitz con constante K con las siguientes propiedades:

1. $Y = L$ fuera de una bola de radio ε .
2. $Y = X$ en un abierto U que contiene al cero, contenido en V .
3. Si $Y = L_1 + g_1$, entonces g_1 tiene constante de Lipschitz a lo mas ε . y $d(g_1)_0 = 0$, es decir, $d(Y)_0 = L_1$.

◆ *Teorema. (G-H)* Sea X un campo vectorial C^1 definido en V y sea 0 una singularidad hiperbólica de X . Si $L = dX_0$, entonces X es localmente equivalente a L en 0 .

Demostración.

Sea $X=L+\psi$ en una vecindad del cero tal que $\psi(0)=0$ y $d\psi_0=0$ y sea Y un campo vectorial que satisfaga las condiciones del lema 2, en donde Y tiene la forma $Y=l+g$ con

$$g(x) = \begin{cases} \alpha(\|x\|)\psi(x) & \text{si } x \in V \\ 0 & \text{si } x \notin V \end{cases}$$

y α es una función diferenciable definida por

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \varepsilon/2 \\ 0 & \text{si } |t| \geq \varepsilon \end{cases}$$

Por lo que $Y=X$ en $B_{\varepsilon/2}$ la bola de radio $\varepsilon/2$ y centro en el origen, y $Y=L$ fuera de B_ε .

Como $X=Y$ en una vecindad del cero, es trivial el que X es localmente conjugado a Y , por lo que basta demostrar que Y es localmente conjugado a L y así, por transitividad, se tendrá que X es localmente conjugado a L .

Como $Y_t = l_t + g_t$ entonces $d(Y)_0 = l_1$ pues $d(g)_0 = 0$, por lo que $d(Y)_0$ es un isomorfismo hiperbólico. Entonces, como $Y = l_1 + g_1$ y g_1 tiene constante de Lipschitz a lo más ε , se tiene, por el lema 1, que Y_1 y l_1 son localmente conjugados. Es decir, existe un homeomorfismo h entre vecindades del cero tal que $hY_1 = l_1h$

Con este homeomorfismo, se construirá una conjugación H entre los campos Y y L dada por:

$$H = \int_0^1 L_{\tau} h Y_{\tau} d\tau$$

Obsérvese que $HY_1 = l_1H$ y $hY_1 = l_1h$, por lo que, H será un homeomorfismo. Haciendo algunas operaciones sencillas, se demuestra que $HY_t = l_tH$ para toda $s \in \mathbb{R}$. Por lo tanto los campos Y y L son localmente conjugados.

Así se concluye la demostración del teorema, pues se tiene que X y L son campos localmente conjugados. ■ [Teo G-H]

Por último, se dará la definición de campo de direcciones, ya que son los campos con los que se desea trabajar.

Un *campo de direcciones* r en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ es una correspondencia que a cada punto p en U le asigna una línea $r(p) \in \mathbb{R}^2$ que pasa por p .

CAPÍTULO III

CONFIGURACIONES PRINCIPALES LOCALES ESTRUCTURALMENTE ESTABLES.

Introducción.

Se desea estudiar la estabilidad estructural de la configuración principal en torno a un punto umbílico aislado p de una superficie M inmersa en R^3 , para lo cual se introduce una parametrización canónica en una vecindad del punto umbílico que queda determinada por cuatro parámetros (k , a , b y c) y la ecuación de líneas de curvatura, en términos de esta parametrización, involucra solamente a tres de ellos (a , b y c), por lo que perturbar la configuración se traduce en una perturbación de los parámetros a , b y c .

La demostración del teorema principal en esta tesis se basa en técnicas de ecuaciones diferenciales utilizando un objeto adecuado para estudiar la ecuación de direcciones principales, que es el haz vectorial PM , en donde se define una superficie LM determinada por las líneas de curvatura principales máxima y mínima.

En la variedad PM se define un campo vectorial W tangente a la superficie LM que fuera del conjunto determinado por el punto umbílico corresponde al campo ν de direcciones principales de $M - \{p\}$, por lo que bastará hacer el análisis en el campo W que bajo las condiciones de Darboux tendrá un número finito de singularidades hiperbólicas aisladas. Estas condiciones están determinadas por desigualdades en términos de los parámetros a , b y c y caracterizan a los puntos umbílicos en donde la configuración principal local es estructuralmente estable.

§ 1. Parametrización Canónica de una superficie inmersa en R^3 .

Una superficie diferenciable admite distintas inmersiones en R^3 , cada una de las cuales determina una configuración principal. Dada una superficie inmersa, se estudiará cuáles configuraciones principales no varían bajo cambios pequeños en la inmersión.

Si M es una superficie inmersa en R^3 y $p \in M$ es un punto umbílico aislado, se puede obtener una parametrización utilizando la función altura respecto al plano tangente $T_p M$, que es el que parametriza y se mostrará que puede tener la forma siguiente:

$x(u, v): R^2 \rightarrow M$ tal que

$$x(u, v) = (u, v, (k/2)(u^2 + v^2) + (a/6)u^3 + (b/2)uv^2 + (c/6)v^3 + R)$$

en donde*

$$R = \alpha((u^2 + v^2)^2), \quad k = h_{uu}(0,0) = h_{vv}(0,0), \quad a = h_{uuu}(0,0), \quad b = h_{uuv}(0,0), \quad c = h_{vvv}(0,0)$$

y $h: U \subset R^2 \rightarrow R$ es la función altura tal que $h(0,0) = 0$.

Para esto tómesese la siguiente parametrización, en torno a p un punto umbílico aislado colocado en el origen:

$$x(u, v) = (u, v, h(u, v))$$

en donde h es la función altura respecto al plano tangente identificado con el plano xy . Tómesese el polinomio de Taylor de orden tres de la función altura, alrededor del cero:

$$h(u, v) = h + h_u + h_v + \frac{1}{2}(u^2 h_{uu} + uv h_{uv} + v^2 h_{vv}) + \frac{1}{6}(u^3 h_{uuu} + 3u^2 v h_{uuv} + 3uv^2 h_{uvv} + v^3 h_{vvv}) + R$$

todas ellas evaluadas en $(0,0)$. Entonces se tiene que:

a) $h(0,0) = 0$ por ser h la función altura respecto a $T_p M$,

$$\cdot \bar{0} = (0,0,0) \in R^3$$

b) $x_u(0,0) = (1,0, h_u(0,0)) = (1,0,0)$ y $x_v(0,0) = (0,1, h_v(0,0)) = (0,1,0)$, por que $x_u, x_v \in T_0 M$ entonces $h_u(0,0) = h_v(0,0) = 0$ y

c) como el $\bar{0}$ es un punto umbílico, la matriz de la segunda forma cuadrática es diagonal; entonces $f=0$ por lo que $h_{uv}(0,0) = 0$

Por lo tanto, para (u, v) en una vecindad de $(0,0)$ la función tiene la siguiente expresión:

$$h(u, v) = (k/2)(u^2 + v^2) + (1/6)(au^3 + 3du^2v + 3bu^2v + cv^3) + R$$

con lo cual se obtiene una parametrización de la forma

$$x(u, v) = (u, v, (k/2)(u^2 + v^2) + (a/6)u^3 + (d/2)u^2v + (b/2)u^2v + (c/6)v^3 + R)$$

El coeficiente del término u^2v se puede anular pues al plantear la ecuación para ver que existe una rotación que lo elimina, ésta queda de tercer grado por lo que al menos existe una solución real, obteniendo así, la parametrización:

$$x(u, v) = (u, v, (k/2)(u^2 + v^2) + (a/6)u^3 + (b/2)u^2v + (c/6)v^3 + R)$$

A esta parametrización se le llama *parametrización canónica*

Los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales en términos de una parametrización de este tipo tendrán la siguiente expresión:

$$E = 1 + h_u^2, \quad F = h_u h_v, \quad G = 1 + h_v^2, \quad e = h_{uu}, \quad f = h_{uv}, \quad g = h_{vv}$$

en donde todas las funciones $E = E(u, v)$, $F = F(u, v)$, $G = G(u, v)$ y $e = e(u, v)$, $f = f(u, v)$, $g = g(u, v)$ son funciones diferenciables que dependen del punto (u, v) .

La ecuación diferencial de líneas de curvatura es:

$$(gF - fG)(v')^2 + (gE - eG)(u'v') + (fE - eF)(u')^2 = 0$$

que en términos de esta parametrización se escribe

$$(bv + L)(v')^2 - ((b-a)u + cv + M)u'v' - (bv + N)(u')^2 = 0$$

pues

$$gF - fG = -h_{uv}h_u h_v - h_{uv} + h_{uv}h_u^2 = bv + L$$

$$gE - cG = h_{uu} - h_{uv} + h_{uv}h_u^2 - h_{uu}h_v^2 = -((b-a)u + cv) + M$$

$$fE - cF = h_{uv} + h_{uv}h_u^2 - h_{uu}h_{vv} = -(bv + N)$$

en donde L, M y N son funciones diferenciables de u y v que agrupan términos de grado mayor o igual a 2.

Por lo que la ecuación de líneas de curvatura en términos de la parametrización canónica se expresa:

$$\boxed{(bv + L)(v')^2 - ((b-a)u + cv + M)u'v' - (bv + N)(u')^2 = 0} \quad \dots(LC)$$

§ 2. Caracterización de las Configuraciones Locales Estructuralmente Estables.

En un punto umbílico todas las direcciones son direcciones principales, pero no toda curva por el punto umbílico es línea de curvatura. En este capítulo se verá que hay configuraciones principales locales que tienen una, dos ó tres direcciones por las cuales pasan líneas de curvatura, algunas de estas configuraciones serán estructuralmente estables.

Para determinar las direcciones por las cuales pasan líneas de curvatura basta tomar una aproximación a primer grado de los coeficientes de la ecuación, por lo que se tomarán L, M y N iguales a cero haciendo los análisis con la siguiente ecuación:

$$bv(v')^2 - ((b-a)u + cv)u'v' - bv(u')^2 = 0$$

Proposición 1. Toda línea de curvatura que tiene al punto umbílico en su cerradura, es tal que su tangente tiene una de las tres pendientes p_0 , p_1 ó p_2 , (si $b \neq 0$):

$$p_0 = 0, \quad p_1 = \frac{c}{2b} + \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}, \quad p_2 = \frac{c}{2b} - \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}$$

Demostración.

La ecuación de una recta tangente en $(0,0)$ un punto de M es de la forma $v=su$; entonces, si se considera la recta tangente a una línea de curvatura satisfará la ecuación diferencial de arriba, es decir:

$$(bsu)s^2 - ((b-a)u + cus)s - bsu = 0$$

$$\Leftrightarrow (bs^2)su - (b-a+cs)us - bsu = 0 \text{ que si } u \neq 0$$

$$\Leftrightarrow s^3b - s^2c + (a-2b)s = 0$$

es decir, si y sólo si $s = \{p_0, p_1, p_2\}$ ■ [Prop. 1]

A la ecuación $s^3b - s^2c + (a-2b)s = 0$ se le llamará (S).

La siguiente definición de punto umbílico darbouxiano resume el tipo de puntos en donde las configuraciones principales serán estructuralmente estables.

Un *punto umbílico darbouxiano* en una superficie M inmersa en R^3 , será aquél que satisfaga las siguientes condiciones T y D que, en términos de la parametrización canónica, se expresan como:

T : condición de transversalidad

$$b(b-a) \neq 0$$

D : condición de discriminante

Se satisface una y sólo una de las siguientes condiciones

$$D_1 : a/b > (c/2b)^2 + 2$$

$$D_2 : (c/2b)^2 + 2 > a/b > 1, \quad a \neq 2b$$

$$D_3 : a/b < 1.$$

Con ayuda de esta definición, el teorema a demostrar en la tesis quedará enunciado de la siguiente manera:

◆ *Teorema.* Sea M una superficie compacta y orientable y $\alpha \in \text{Innf}(M, \mathbb{R}^3)$ una inmersión y $\bar{0} \in \mathbb{R}^3$ un punto umbilíco aislado. Entonces la configuración principal de $\alpha(M)$ en torno a $\bar{0}$ es C^3 estructuralmente estable si $\bar{0}$ es un punto umbilíco darbouxiano.

A continuación se darán algunas propiedades geométricas de los puntos umbilícos darbouxianos que se obtienen de las condiciones T y D y que serán invariantes bajo pequeños cambios en la inmersión. Considérese primero la condición D .

Sean $I_0 = \{(u, p_0, u) \mid u \geq 0\}$, $I_1 = \{(u, p_1, u) \mid u \geq 0\}$ y $I_2 = \{(u, p_2, u) \mid u \geq 0\}$ las semirrectas en M con pendientes p_i . Obsérvese que si existe un sector angular recto que contenga a las semirrectas I_1 y I_2 , entonces también existe un sector angular recto que contiene a las tres semirrectas I_0 , I_1 y I_2 .

Se tiene entonces la siguiente relación entre la condición D de los puntos darbouxianos y los ángulos entre estas semirrectas.

Proposición 2. Sean a , b y c los coeficientes de la parametrización canónica en torno al punto umbilíco darbouxiano p . Entonces se tienen las siguientes equivalencias:

a) D_1 ocurre si y sólo si p_0 es la única solución de la ecuación (S).

b) D_2 se satisface si y sólo si existe un sector angular recto que contiene a las semirrectas I_1 y I_2 .

c) D_3 se cumple si y sólo si no existe un sector angular recto que contenga a las semirrectas I_1 y I_2 .

Demostración.

Obsérvese que $p_1, p_2 = a/b - 2$.

a) D_1 : $a/b > (c/2b)^2 + 2$, $\Leftrightarrow (c/2b)^2 + 2 - a/b < 0 \Leftrightarrow 0$ es la única solución real para la ecuación (S), con lo que se obtiene la equivalencia pedida.

b) Supóngase que existe un sector angular recto tal que contiene a las dos semirrectas l_1 y l_2 . Entonces las pendientes p_1 y p_2 de las semirrectas l_1 y l_2 cumplen que $p_1, p_2 > -1$. Entonces por la observación inicial $p_1, p_2 > -1$, si y sólo si $a/b - 2 > -1 \Leftrightarrow a/b > 1$.

Obsérvese que $a/b < (c/2b)^2 + 2$; pues si $a/b \geq (c/2b)^2 + 2$ entonces p_1 y p_2 serían complejos o serían iguales. Por lo tanto se obtiene la condición D_2 .

Ahora, si se supone D_2 , se tendrá que $a/b > 1$, por lo que $p_1, p_2 > -1$. Con lo cual queda demostrada la parte (b).

c) Como $p_1, p_2 > -1$ si y sólo si $a/b > 1$ entonces, $p_1, p_2 < -1$ si y sólo si $a/b < 1$ que es la condición D_3 . Así queda demostrado el inciso (c) ■ [Prop 2]

Observación 1. Las condiciones D_1 , D_2 y D_3 son invariantes bajo rotaciones en el plano uv por ángulos θ_i cuyas tangentes están en el conjunto $\{p_1, p_2\}$.

Es decir, si para la parametrización canónica de M en torno al punto umbílico p se satisface la condición D_2 o la condición D_3 , entonces al rotar por un ángulo θ_i la nueva parametrización estará dada en términos sólo de los parámetros a' , b' y c' , pues $d'=0$ ya que su expresión es equivalente a al ecuación (S). Entonces por la proposición anterior, se tendrán las condiciones análogas D'_2 y D'_3 . ■ [Obs 1]

Observación 2. Si se tiene un punto umbílico darboxiano que satisfaga la condición D_2 con $a/b > 2$, al hacer una rotación en el plano uv por un ángulo θ_i la nueva condición D_2 se tendrá con $a'/b' < 2$ y viceversa.

Demostración.

El caso D_2 en donde l_0 está entre las semirrectas l_1 y l_2 equivale a tener $p_1 p_2 < 0$, al hacer alguna rotación por un ángulo θ_i se tendrá, por la observación 1, un nuevo caso D'_2 en donde las semirrectas l'_1 y l'_2 no contendrán a l'_0 por lo que $p'_1 p'_2 > 0$.

Por lo que bastará demostrar que $A p_2 < 0 \Leftrightarrow 2 > \frac{a}{b}$ y $A p_2 > 0 \Leftrightarrow 2 < \frac{a}{b}$.

La siguiente figura ilustra las posiciones relativas de I_0 , I_1 y I_2 después de efectuar las rotaciones de los ejes:

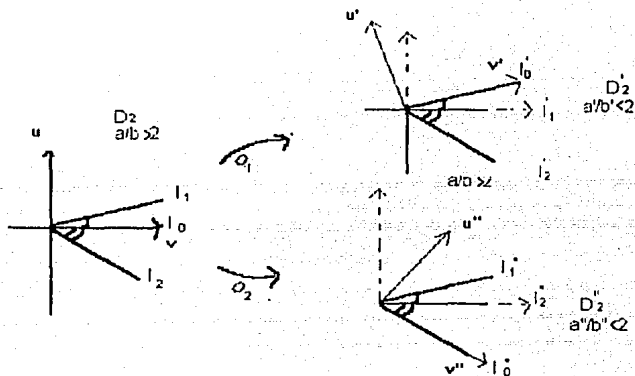


Figura 12.

Si p_1 y p_2 tienen signos opuestos

$$A p_2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 \frac{a}{b} + 2} > \frac{c}{2b}$$

$$\Leftrightarrow 2 > \frac{a}{b}$$

Si p_1 y p_2 tienen signos iguales:

$$A p_2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 \frac{a}{b} + 2} < \frac{c}{2b}$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{a}{b} < 0 \Leftrightarrow 2 < \frac{a}{b}$$

Con lo cual queda demostrada la observación ■ [Obs 2]

Las siguientes propiedades geométricas, surgen de la condición T de los puntos umbílicos darbouxianos. Se probará que el conjunto de puntos umbílicos se puede expresar como la intersección de dos curvas diferenciables β y γ en la superficie, que se cortan transversalmente en $(0,0)$.

Sean β y γ las curvas definidas por

$$\beta = \{x(u, v) \mid gF - fG = 0\} \quad \gamma = \{x(u, v) \mid gE - eG = 0\}$$

Se puede ver que $\beta = \{x(u, v) \mid bv + L = 0\}$ y $\gamma = \{x(u, v) \mid (b-a)u + cv + M = 0\}$, ya que en la sección 1 se hizo notar que

$$gF - fG = bv + L \quad \text{y} \quad gE - eG = -(b-a)u + cv + M.$$

A continuación se mencionarán algunas propiedades de estas curvas.

Propiedad 1. Si $(0,0)$ es un punto umbílico darbouxiano, entonces las curvas β y γ son regulares en $(0,0)$.

Demostración.

Basta demostrar que $\nabla(gF - fG)(0,0) \neq (0,0)$ y $\nabla(gE - eG)(0,0) \neq (0,0)$ en una vecindad de $(0,0)$ es decir, que $(0, b) \neq 0$ y $(b-a, c) \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$ y $(b-a \neq 0 \text{ ó } c \neq 0)$. Por lo que suponiendo la condición T , $\nabla(gF - fG)(0,0) \neq (0,0)$ y $\nabla(gE - eG)(0,0) \neq (0,0)$; por lo tanto las curvas β y γ son regulares en $(0,0)$. ■ [Prop 1]

La siguiente propiedad garantizará el hecho de que $(0,0)$ es un punto umbílico aislado.

Propiedad 2. La intersección de β y γ define los puntos umbílicos de M .

Demostración.

La diferencial de la transformación de Gauss respecto a la base $\{x_u, x_v\}$ inducida por una parametrización tiene la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & f \\ f & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

Ahora, si el punto es umbílico, se tiene que $a_{12} = 0 = a_{21}$ y $a_{11} = a_{22}$; entonces la matriz del primer término de la igualdad es escalar por lo que se tiene que:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

que implica $\lambda E = c$, $\lambda F = f$ y $\lambda G = g$; entonces:

$$gF - fG = \lambda(GF - FG) = 0 \quad \text{y} \quad gE - cG = \lambda(GE - EG) = 0$$

por lo que el punto pertenece a la intersección de las curvas β y γ .

Recíprocamente, si el punto pertenece a la intersección de β y γ se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} gE - cG &= 0 \rightarrow gE = cG \\ gF - fG &= 0 \rightarrow gF = fG \end{aligned}$$

por lo que si $g \neq 0$, se tiene que:

$$\frac{E}{G} = \frac{c}{g} \quad \text{y} \quad \frac{F}{G} = \frac{f}{g}$$

entonces existen λ y μ tales que

$$\begin{aligned} \lambda E &= c \quad \text{y} \quad \lambda G = g \\ \mu F &= f \quad \text{y} \quad \mu G = g \end{aligned}$$

lo cual implica que $\lambda = \mu$. Planteando matricialmente las ecuaciones anteriores se obtiene que:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

ESTA TESIS NO DEBE SER REPRODUCIDA SIN EL CONSENTIMIENTO DEL AUTOR

por lo que la derivada de Gauss adquiere una forma diagonal y por lo tanto el punto es umbílico.

Si $g = 0$ entonces el punto es plano y por lo tanto umbílico. ■ [Prop 2]

Propiedad 3. β y γ se intersecan transversalmente en $(0,0)$ si se considera la condición T .

Demostración.

$\beta \cap \gamma$ en $(0,0)$ si $T_{(0,0)}\beta \oplus T_{(0,0)}\gamma = \mathbb{R}^2$, por lo que basta demostrar que los vectores tangentes a β y γ en $(0,0)$ son linealmente independientes.

Como $\nabla\gamma(0,0) = (b - a, c)$ y $\nabla\beta(0,0) = (0, b)$, si se supone que

$\lambda(b - a, c) + \mu(0, b) = 0$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces, por la condición T , se tiene que $\lambda = 0 = \mu$. Por lo tanto, β y γ se intersecan transversalmente en $(0,0)$ ■ [Prop 3]

Por lo tanto se tiene que el punto umbílico $(0,0)$ es un punto aislado.

§ 3. Análisis de la configuración principal en torno a un punto umbílico Darbouxiano.

De ahora en adelante los campos serán considerados simplemente como campos de direcciones a menos que se indique lo contrario.

Se construirá una variedad de dimensión tres en donde se tendrá una superficie inducida por las líneas de curvatura, para lo cual se tiene que considerar la proyectivización de cada plano tangente:

$$P(T_p M) = T_p M - \{(0,0)\} / \nu \approx \lambda \nu \quad \text{con } \lambda \neq 0$$

Entonces la variedad de dimensión tres de interés es el haz de rectas proyectivas PM :

$$PM = \{(p, \{v\}) / [v] \in P(T_p M)\}$$

Si x es una parametrización de la superficie M en torno al punto p $x: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$, entonces se tienen las siguientes parametrizaciones para PM

$$y_r: U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow PM \text{ tal que } y_r(u, v, r) = (x(u, v); \frac{du}{dv}) \text{ en donde } \frac{du}{dv} = r$$

donde r es la clase de los vectores que pertenecen a la recta con pendiente r .

$$y_s: U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow PM \text{ tal que } y_s(u, v, s) = (x(u, v); \frac{dv}{du}) \text{ en donde } \frac{dv}{du} = s.$$

Por lo tanto, PM es localmente como \mathbb{R}^3 .

Considérese la superficie $LM \subset PM$ determinada por la solución de la ecuación diferencial de direcciones principales:

$$(bv + L)d^2v - ((b - a)u + cv + M)dudv - (bv - N)du^2 = 0 \dots (DP)$$

Entonces, los puntos en la superficie LM parametrizados por

$$y_r: U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow PM \text{ tal que } y_r(u, v, r) = (x(u, v); \frac{du}{dv})$$

corresponde a los ceros de la función:

$$\ell^r(u, v, r) = (bv + L) - ((b - a)u + cv + M)r - (bv + N)r^2$$

y los dados por la parametrización y_s están dados como los ceros de la función:

$$\ell^s(u, v, s) = (bv + L)s^2 - ((b - a)u + cv + M)s - (bv + N).$$

Considérese la proyección canónica $\Pi: PM \rightarrow M$; se comprobará que $D\Pi(W)$ genera las direcciones principales fuera de $(0, 0)$.

Se puede observar entonces que LM es una superficie regular fuera de $\Pi^{-1}(0, 0)$

En adelante se trabajará con una sola parametrización analogando los cálculos y procedimientos para la otra.

Sea $f: PM \rightarrow R$ la función diferenciable tal que

$$f(u, v, s) = (bv + L)s^2 - ((b - a)u + cv + M)s - (bv + N)$$

entonces:

$$f_u = s^2 L_u - s(b - a + M_u) - N_u,$$

$$f_v = s^2(b + L_v) - s(c + M_v) - (b + N_v),$$

$$\text{y } f_s = 2s(bv + L) - ((b - a)u + cv + M).$$

Observación 3. LM es una superficie regular si se supone la condición T.

Demostración.

Si el punto es el umbílico, es decir es $(0,0)$, entonces como $f_s = 2s(bv + L) - ((b - a)u + cv + M)$ se tiene que $f_s(0,0;s) = 0$ para toda s , y si además se tuviera que $f_u(0,0;s) = f_v(0,0;s) = 0$ para alguna s ,

como $f_u = s^2 L_u - s(b - a + M_u) - N_u$ y $f_v = s^2(b + L_v) - s(c + M_v) - (b + N_v)$ entonces:

$$f_u = 0 \rightarrow (s = 0 \quad \text{ó} \quad b = a)$$

que por la condición T se tendrá que $s = 0$, entonces $f_v = -b$ lo cual lleva a una contradicción (por la condición T) al suponer que también se anula. ■ [Obs 3]

Entonces LM es una superficie regular en PM ; en ella se definirá un campo vectorial tangente W con un número finito de singularidades aisladas y tal que, fuera del conjunto correspondiente al punto umbílico, su proyección generará las direcciones principales. A continuación se verá cómo es el campo W .

Sea $\gamma: I \rightarrow LM$ una curva en LM ; entonces $f(\gamma(t)) = 0$ en donde $\gamma(t) = (u(t), v(t); s(t))$ y $\gamma'(t) = (u', v'; s') \in T_{\gamma(t)} LM$. Entonces se tiene que $f_u \cdot u' + f_v \cdot v' + f_s \cdot s' = 0$, por lo que:

$$f_s \cdot s' = -(f_u u' + f_v v')$$

$$\rightarrow \ell_s \cdot s' = -(\ell_u + \ell_v \cdot s)u'$$

entonces

$$\gamma'(t) \frac{\ell_s}{u'} = (\ell_s, s\ell_s, -(\ell_u + \ell_v \cdot s))$$

Con esto se obtiene un campo de direcciones tangente a LM dado por:

$$W(u, v, s) = \ell_s \frac{\partial}{\partial u} + s\ell_s \frac{\partial}{\partial v} - (\ell_u + s\ell_v) \frac{\partial}{\partial s}$$

es decir:

$$W(u, v, s) = (2s(bv + L) - ((h - a)u - cv + M), s[2s(bv + L) - ((h - a)u - cv + M)], -s^3h + cs^2 + s(2b - a))$$

Observación 4. $\ell_s(u, v, s) = 0$ si y sólo si (u, v, s) es un punto umbílico.

Demostración.

Si (u, v, s) es un punto umbílico entonces $(u, v) = (0, 0)$ de lo que se sigue que $\ell_s(u, v, s) = 0$

Si $\ell_s(u, v, s) = 0$ y (u, v, s) no corresponde a un punto umbílico, se tiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} 2s(bv + L) &= (b - a)u + cv + M \\ \rightarrow s &= \frac{(b - a)u + cv + M}{2(bv - L)} \dots (1) \end{aligned}$$

Considérese las soluciones de la ecuación ℓ^s que determina las direcciones principales en el punto (u, v) :

$$\begin{aligned} \ell^s(u, v, s) &= (bv + L)s^2 - ((b - a)u + cv + M)s - (bv + N) \\ s &= \frac{(b - a)u + cv + N \pm \sqrt{[(b - a)u + cv + M]^2 + 4(bv + L)(bv + N)}}{2(bv + L)} \end{aligned}$$

por lo que al sustituir (1) en la igualdad anterior se puede observar que sólo hay una dirección principal, cosa que no puede ocurrir pues mínimo debe haber dos direcciones principales en cada punto. ■ [Obs 4]

Proposición 3. Las singularidades de $D\Pi(W)$ son puntos umbílicos en M .

Demostración.

Obsérvese que $D\Pi(W) = (\ell_s, s\ell_s) = (2sbv - (b-a)u - cv, 2s^2bv - (b-a)su - csv)$

Utilizando la propiedad 3 de las curvas β y γ , basta demostrar que si $D\Pi_p(W_p) = (0,0)$ entonces $p \in \beta \cap \gamma$. Por la observación 4, se tiene que $\ell_s = 0 \rightarrow p \in \beta \cap \gamma$ por lo tanto p es un punto umbílico

Mientras que si p es un punto umbílico se tiene que $gE - eG = 0$ y $gF - fG = 0$ entonces $D\Pi(W)_p = (0,0)$ ■ [Prop 3]

Obsérvese que $D\Pi(W) = (\ell_s, s\ell_s)$ genera las direcciones $s = dy/du$ que satisfacen la ecuación de direcciones principales (DP), por lo que fuera del punto umbílico, las dos preimágenes (u, v, s_1) y (u, v, s_2) de un punto $(u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ bajo la proyección Π , generan las dos direcciones principales en el punto (u, v) .

Proposición 4. Las singularidades de W sobre $\Pi^{-1}(0,0)$ son:

$$p_0 = 0, \quad p_1 = c/2b - \sqrt{(c/2b)^2 - a/b + 2} \quad \text{y} \quad p_2 = c/2b + \sqrt{(c/2b)^2 - a/b + 2}$$

Demostración.

$W(0,0;s) = \vec{0}$ si y sólo si $\ell_u + s\ell_v = 0$, es decir, si y sólo si

$$s^3b - s^2c - s(a - 2b) = 0$$

que es la ecuación (S) cuyas soluciones son:

$$s = 0 \quad \text{ó} \quad s = \frac{c}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}$$

Es decir, las soluciones son precisamente p_0 , p_1 y p_2 . ■ [Prop 4]

Por lo tanto, las singularidades del campo W sobre $\Pi^{-1}(0,0)$ coinciden con las direcciones de las líneas de curvatura que tienen al punto umbílico en su cerradura.

Se llama *separatriz umbilical* a una línea de curvatura cuya imagen inversa bajo el difeomorfismo Π es una recta que pasa por una singularidad del campo W de tipo silla. Estas ayudan a caracterizar los retratos fases de los campos estructuralmente estables.

Obsérvese que el plano tangente a la superficie LM en $\bar{0}$ es el plano us , pues

$$\nabla \ell(u, v, s) = (\ell_u, \ell_v, \ell_s)$$

$$= (s^2 L_u - s(b - a + M_u) - N_u, s^2(b + L_v) - s(c + M_v) - (b + N_v), 2s(bv + L) - ((b - a)u + cv + M))$$

que en $\bar{0}$ queda

$$(0, -b, 0)$$

que por ser un vector normal a LM en $\bar{0}$ implica que el plano tangente a LM en $\bar{0}$ es el plano us .

Como la proyección de LM al plano tangente, es un difeomorfismo en una vecindad del cero en LM , basta analizar al campo:

$$W(u, 0; s) = ((a - b)u + M, 0, -bs^3 + cs^2 + s(2b - a) + s^2 M_v - M_u)$$

que se puede ver como un campo ω en \mathbb{R}^2 . A continuación se analizará el tipo de singularidad que se tiene en $(0,0)$. Tomando su parte lineal en $(0,0)$, se puede determinar el tipo de singularidad de la que se trata:

$$D\omega_{(0)} = \begin{pmatrix} a - b & 0 \\ 0 & 2b - a \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es:

$$|D\omega_{(0)}| = (a-b)(2b-a)$$

Se hará un análisis de esta singularidad, en cada uno de los casos de las condiciones darboxianas

ⓐ Si se satisface $D_1 : a/b > (c/2b)^2 + 2$ entonces

$a/b > 2 \rightarrow 2b-a < 0$ y $a-b > 0$, por lo tanto $|D\omega_{(0)}| < 0$ y p_0 es la única singularidad (pues p_1 y p_2 serán complejas) y $(0,0)$ es un punto silla. Por lo tanto la única singularidad de ω es una singularidad hiperbólica así que ω es un campo estructuralmente estable en una vecindad de p_0 .

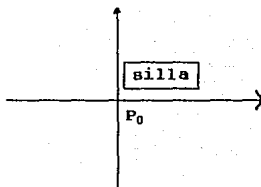


Figura 13 (de ⓐ).

ⓐ (a) Si se tiene la condición $D_2 : 1 < a/b < 2$ y $a \neq 2b$ con $2b-a > 0$, entonces $a-b > 0$ y $|D\omega_{(0)}| > 0$. Así, p_0 es un nodo y para hacer el análisis en p_1 y p_2 al efectuar las rotaciones pertinentes se obtendrá que las otras singularidades son puntos sillas.

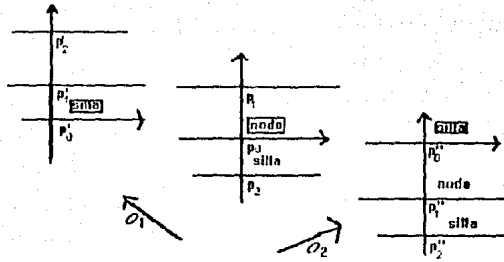


Figura 14 (de ② (a)).

② (b) Si se satisface D_2 con $2b-a < 0$ entonces p_0 será un punto silla, entonces, rotando por el ángulo σ_1 , conveniente, cambiará la condición D_2 con $2b-a < 0$ por una condición D'_2 en donde $2b-a > 0$, por lo que la singularidad p_1 será un punto silla. El análisis para la otra singularidad es análogo al caso anterior, por lo que la singularidad restante será un punto silla.

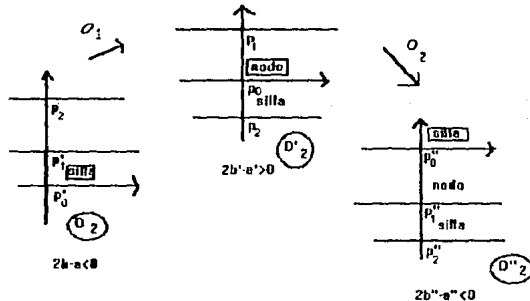


Figura 15 (de ② (b)).

③ Si se cumple $D_3 : a/b < 1$ se tiene que $1 - a/b > 0$ y $2 - a/b > 0$ entonces como $|D\omega_{(0)}| = -b^2(1 - a/b)(2 - a/b)$ se tiene que $|D\omega_{(0)}| < 0$ por lo que p_0 es un punto silla. Al hacer las rotaciones por los ángulos σ_1 y σ_2 la condición no se altera, por lo que las otras singularidades también serán puntos sillas.

Como la única singularidad del campo W en el caso D_1 es un punto silla, la configuración principal tiene una única separatriz. Entonces la configuración sería (bajo homeomorfismos) así:

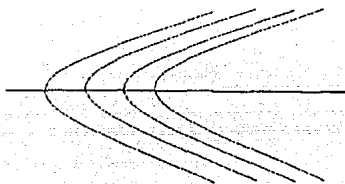


figura 16.

Como en el caso D_2 el campo W tiene solamente dos puntos sillas, entonces la configuración tiene el siguiente aspecto:

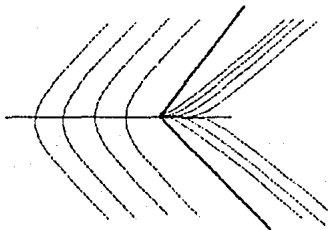


Figura 17.

Para el caso D_3 el campo tiene tres puntos sillas, por lo que la configuración principal tiene la siguiente forma:

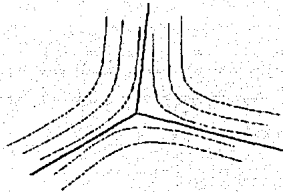


Figura 18.

En caso de tener la condición D_1 , el campo W tiene una única singularidad y es hiperbólica, por lo que, por el teorema de Grobman-Hartman, el campo es, localmente, estructuralmente estable.

Para los casos D_2 y D_3 , las tres únicas singularidades del campo W son hiperbólicas por lo que con ayuda de los teoremas de Grobman-Hartman y del flujo local, se prueba que se tiene estabilidad estructural en una vecindad conexa que contiene a las tres singularidades p_0 , p_1 y p_2 , y por lo tanto, las configuraciones principales locales determinadas por Darboux son estructuralmente estables.

§ 4. Comentarios y conclusiones.

Se ha demostrado que para tener una configuración principal local estructuralmente estable, es necesario tomarla en un punto umbilico darbuoxiano.

Para determinar las configuraciones principales locales estructuralmente estables se trabajó con campos vectoriales determinados por las foliaciones principales, estos campos están definidos en una superficie LM determinada por las líneas de curvatura.

Bajo las condiciones T y D estos campos vectoriales resultan tener sus singularidades aisladas e hiperbólicas; es decir, la condición de transversalidad T de los puntos umbilicos darbuoxianos junto con la condición de discriminante determinan las configuraciones principales estructuralmente estables.

Referencias y Bibliografía.

- [DC] Do Carmo M., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- [G-S] Gutierrez C., Sotomayor J., *Lines of Curvature and Umbilical Points on Surfaces*.
- [H] Hirsch M., *Differential Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 33 Springer-Verlag, 1976
- [P-M] Palis J and de Melo W., *Geometric Theory of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1992.
- [S-G] Sotomayor J., Gutierrez C., *Structurally Stable Configurations of Lines of Principal Curvature*, *Asterisque*, 98-99, 1982.

Tabla de Notación.

$C_b^0(\mathbb{R}^n)$	Conjunto de funciones continuas y acotadas en \mathbb{R}^n
$C^{r,s}(M, N)$	Espacio topológico de funciones de clase C^r con la topología compacto-abierta $C^{r,s}$
$Imm^{r,s}(M, N)$	Conjunto de las immersiones de M a N con la topología relativa de $C^{r,s}$
$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$	Espacio vectorial de los campos vectoriales lineales en \mathbb{R}^n
$\mathcal{X}(M)$	Conjunto de campos vectoriales definidos en M .