

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

"CONTROL ADAPTABLE DE SISTEMAS NO
LINEALES BASADO EN PASIVIDAD".

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA

P R E S E N T A

ARTEAGA PEREZ MARCO ANTONIO

CIUDAD UNIVERSITARIA 1993.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INTRODUCCION	1
I. PRELIMINARES	4
I.1 Introducción	5
I.2 Definiciones	5
I.3 Teoremas sobre pasividad	8
II. CONTROL ADAPTABLE PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA DE ROBOTS RIGIDOS BASADO EN PASIVIDAD	14
II.1 Introducción	15
II.2 Control de robots basado en pasividad	15
II.3 Control adaptable propuesto	19
II.4 Simulaciones	25
III. CONTROL ADAPTABLE PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA DE UNA CLASE DE SISTEMAS NO LINEALES	41
III.1 Introducción	42
III.2 Sistemas no lineales obtenidos por la metodología de Euler-Lagrange	43
III.3 Control adaptable de un péndulo invertido	45
IV. CONCLUSIONES	51
BIBLIOGRAFIA	54

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha obtenido un avance significativo en el estudio de control de sistemas no lineales. Este tipo de sistemas pueden ser analizados utilizando varios enfoques, dependiendo del sistema mismo y de la aplicación en particular que se desea analizar.

Tres de los enfoques más utilizados para llevar a cabo este fin son: linealización Euler [9], consistente en linealizar el sistema alrededor de un punto de operación. Su eficacia se reduce al contorno de este punto. Otro enfoque es el de la linealización por retroalimentación de estados. Esta técnica tiene la desventaja de no ser muy robusta, ya que existen cancelaciones de no linealidades, además de generar singularidades [13]. Finalmente se menciona el enfoque de pasividad [1, 2, 12, 14], el cual consiste en aprovechar las propiedades de disipación de energía que poseen cierta clase de sistemas no lineales para diseñar controladores que, poseyendo a su vez estas propiedades, permitan establecer la estabilidad de las señales de interés.

El método de pasividad, tema principal del presente trabajo, posee varias ventajas. La más relevante es que lo único que se requiere es que el mapeo de la variable de entrada a otra cualquiera sea pasivo. Esta última variable no tiene que ser, necesariamente, la variable que se desea controlar, puesto que se puede tratar de establecer una relación entre ambas. Una planta con estas características se manipula mediante un controlador estrictamente pasivo [1, 14]. Cabe hacer notar que el sistema conjunto resultante de esta metodología es un sistema robusto con respecto a la incertidumbre paramétrica de la planta, puesto que la pasividad se da más por la estructura de ésta que por los valores de sus parámetros.

El objetivo de la tesis consiste en diseñar un esquema de control adaptable que garantice que el error de seguimiento de trayectorias tienda a cero para una clase específica de sistemas no lineales: aquellos cuyas ecuaciones son obtenidas usando la metodología de Euler-Lagrange [3]. Estas plantas se caracterizan por poder describir su comportamiento mediante ecuaciones diferenciales de segundo orden, teniendo, además, propiedades que

facilitan su análisis (capítulo III).

Un tipo de plantas que pertenecen a esta clase de sistemas no lineales son los robots rígidos de n grados de libertad. Para este caso, se demuestra un teorema que establece las condiciones que el esquema adaptable debe satisfacer para que el error de seguimiento de trayectorias tienda a cero. Asimismo, se propone un algoritmo de adaptación que, bajo ciertas circunstancias, garantiza que el error paramétrico también tiende a cero. Este esquema adaptable es probado en simulación en un robot rígido. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios, ya que, confrontado con otros dos algoritmos de adaptación [4], el aquí propuesto es el único que obtiene errores paramétricos nulos cuando no se tiene excitación persistente [14].

Sin embargo, los robots rígidos sólo constituyen un caso particular de los sistemas no lineales modelados por el método de Euler-Lagrange. En general, pueden presentarse más salidas que entradas, por lo que es un problema interesante el llevar a cabo el objetivo de la tesis bajo esas circunstancias. Un ejemplo de este tipo de plantas es un péndulo invertido, el cual se analiza con la misma metodología que se utilizó en los robots rígidos, aunque considerando, desde luego, que se tienen más grados de libertad que entradas. En este caso, la salida de interés es el ángulo del péndulo, lo que implica que no es posible elegir la posición deseada del carrito de antemano, de donde surge el problema de garantizar, al menos, el acotamiento de esta posición.

La tesis está organizada de la siguiente manera: en el capítulo I se proporciona el concepto de pasividad, así como los teoremas y la nomenclatura que se utilizan en el resto de los capítulos; en el II se estudia la estabilidad de robots rígidos basada en pasividad; en el III se plantea el problema que se desea resolver cuando se trata con plantas que poseen menos entradas que grados de libertad; se proporciona como ejemplo el péndulo invertido. El capítulo IV presenta conclusiones.

I. PRELIMINARES

I.1 INTRODUCCIÓN

El concepto de pasividad juega un papel importante en los sistemas físicos. Gracias a este enfoque, distintos sistemas pueden ser analizados como casos particulares de un problema abstracto más general. En este capítulo se presentan la nomenclatura y la herramienta básica utilizada a lo largo de la tesis.

I.2 DEFINICIONES

En teoría de pasividad, el producto escalar es utilizado en la definición de los mapeos pasivos y estrictamente pasivos. Sus propiedades son aprovechadas para probar los teoremas presentados en la sección I.3, así como para definir la norma que se utiliza a lo largo del presente trabajo. A continuación se dan su definición y propiedades [2].

Definición I.1

Cualquier función (denotada por $\langle \cdot | \cdot \rangle$) que mapce $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{R}$, donde \mathcal{P} es un espacio lineal sobre el campo \mathfrak{R} , es llamada producto escalar si satisface los siguientes axiomas

$$\forall x, y, z \in \mathcal{P}, y \forall \lambda \in \mathfrak{R}$$

$$SI. \langle x | y + z \rangle = \langle x | y \rangle + \langle x | z \rangle$$

$$SII. \langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$$

$$SIII. \langle x | \lambda y \rangle = \lambda \langle x | y \rangle$$

$$SIV. \langle x | x \rangle \geq 0 \iff x \neq 0$$

$$SV. |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{Desigualdad de Schwarz}$$

(I.1)

donde $\|x\|^2 \triangleq \langle x | x \rangle$ es la norma inducida por el producto escalar y \mathfrak{R} representa el conjunto de los números reales.

El producto escalar utilizado en la tesis se define a continuación.

Definición. 1.2

Sea F el conjunto de instantes de interés (normalmente \mathfrak{R} , \mathfrak{R}^+), y V un espacio lineal con producto escalar. Sea \mathcal{F} la clase de funciones $x: F \rightarrow V$. Sea $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un producto escalar definido sobre un subconjunto de \mathcal{F} . Si $F = \mathfrak{R}^+$, $V = \mathfrak{R}^n$, se define como

$$\langle x | y \rangle \triangleq \int_0^{\infty} x^T y dt \quad (I.2)$$

Nota

Similarmente en el dominio discreto se define

$$\langle x | y \rangle \triangleq \sum_{t=0}^{\infty} x^T y \quad (I.3)$$

Se observa en (I.2) que la evaluación de 0 a ∞ de la integral puede no ser finita, por lo que resulta conveniente la siguiente proyección.

Definición 1.3

Para cada $t \in F$, sea P_T el operador lineal definido sobre F bajo la condición de que para cada $x \in \mathcal{F}$, $T \in F$

$$(P_T x)(t) = \begin{cases} x(t), & t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases} \quad (I.4)$$

En adelante se hará uso de la notación

$$x_T \triangleq P_T x \quad (I.5)$$

En base a las definiciones anteriores se definen a continuación los espacios con que se trabaja a lo largo de la tesis.

Definición 1.4

El espacio extendido \mathcal{H}_e está dado por

$$\mathcal{H}_e \triangleq \{x \in \mathcal{S} \mid \forall T \in F, \|x_T\|^2 = \langle x_T | x_T \rangle < \infty\} = L_{ne}^2 \quad (1.6)$$

De la desigualdad de Schwarz se sigue que

$$\text{si } x, y \in \mathcal{H}_e, \text{ entonces } \forall T \in F, |\langle x_T | y_T \rangle| < \infty \quad (1.7)$$

Similarmente, para el caso no extendido se tiene

$$\mathcal{H} \triangleq \{x \in \mathcal{S} \mid \|x\|^2 = \langle x | x \rangle < \infty\} = L_n^2 \quad (1.8)$$

Del producto escalar se cumplen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \text{HI. } & \forall x \in \mathcal{H}_e, \text{ la función } T \rightarrow \|x_T\| \text{ es monótonicamente creciente} \\ \text{HII. } & \forall x \in \mathcal{H}, \lim_{T \rightarrow \infty} \|x_T\| = \|x\| \\ \text{HIII. } & \forall x, y \in \mathcal{H}_e, \forall T \in F, \\ & \langle x_T | y_T \rangle = \langle x_T | y \rangle = \langle x | y_T \rangle \triangleq \langle x | y \rangle_T \end{aligned} \quad (1.9)$$

Nota

El superíndice 2 denota el uso de la norma dos en la definición de los espacios. Definiciones análogas se pueden establecer para cualquier número $p \in [1, \infty)$, siendo la notación respectiva $L_n^1, L_n^2, \dots, L_n^\infty$ [2]. En adelante, el subíndice n se omitirá cuando su valor sea igual a 1.

Dado lo anterior, se proporcionan a continuación las definiciones de mapeos pasivos y de mapeos estrictamente pasivos.

Definición 1.5

Sea el operador $H: \mathcal{H}_c \rightarrow \mathcal{H}_c$. Se dice que H es pasivo $\leftrightarrow \exists$ una constante $\beta \in \mathfrak{R}$ tal que

$$\langle Hx | x \rangle_T \geq \beta, \quad \forall x \in \mathcal{H}_c, \quad \forall T \in F \quad (I.10)$$

Se dice que $H: \mathcal{H}_c \rightarrow \mathcal{H}_c$ es estrictamente pasivo $\leftrightarrow \exists$ una constante $\delta > 0$, y una $\beta \in \mathfrak{R}$, tal que

$$\langle Hx | x \rangle_T \geq \delta \|x_T\|^2 + \beta, \quad \forall x \in \mathcal{H}_c, \quad \forall T \in F \quad (I.11)$$

1.3 TEOREMAS SOBRE PASIVIDAD

Esta sección presenta los teoremas sobre pasividad más relevantes, los cuales permiten estudiar la estabilidad de sistemas pasivos interconectados entre sí. Las demostraciones que son omitidas se encuentran en [2].

Teorema 1.6

Sea $H: L_c^2 \rightarrow L_c^2$ un sistema lineal e invariante en el tiempo definido por

$$\begin{aligned} Hu &= h * u, \quad u \in L_c^2 \\ h &\in L^1 \cap L^2 \end{aligned} \quad (I.12)$$

donde

h es la respuesta al impulso

(*) representa convolución

Entonces

$$\begin{aligned} H \text{ es pasivo} &\leftrightarrow R_c[\hat{h}(i\omega)] \geq 0, \quad \forall \omega \in \mathfrak{R} \\ H \text{ es estrictamente pasivo} &\leftrightarrow R_c[\hat{h}(i\omega)] > 0, \quad \forall \omega \in \mathfrak{R} \end{aligned} \quad (I.13)$$

El símbolo ($\hat{\quad}$) representa la respuesta en frecuencia.



Cuando se saben las propiedades de pasividad que poseen dos sistemas interconectados como en la Fig I.1, es posible establecer la estabilidad del sistema conjunto si se conocen las características de sus entradas, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema I.7

Considérese la Fig I.1. Con $u_2 = 0$ se cumple que

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1 - H_2 e_2 \\ e_2 &= H_1 e_1 \end{aligned} \tag{I.14}$$

Donde H_1 y H_2 mapean $\mathcal{H}_e \rightarrow \mathcal{H}_c$. Se asume que para cada $u_1 \in \mathcal{H} \exists$ soluciones e_1, e_2 en \mathcal{H}_c . Bajo estas condiciones, si H_1 es pasivo, H_2 es estrictamente pasivo, y $u_1 \in \mathcal{H}$ entonces $H_1 e_1 = y_1 \in \mathcal{H}$

■

Una generalización del teorema anterior permite no restringir a $u_2=0$, como se ve a continuación.

Teorema I.8

Considérese la Fig I.1 descrita por

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1 - H_2 e_2 \\ e_2 &= u_2 + H_1 e_1 \end{aligned} \tag{I.15}$$

Donde H_1 y H_2 mapean $\mathcal{H}_c \rightarrow \mathcal{H}_e$. Se asume que para cada $u_1, u_2 \in \mathcal{H} \exists$ soluciones e_1, e_2 en \mathcal{H}_c . Supóngase que se tienen constantes $\gamma_1, \beta_1, \delta_1, \beta_1', \epsilon_2$, y β_2' tales que, $\forall T \in F$, y $\forall x \in \mathcal{H}_c$

$$\|H_1 x\|_T \leq \gamma_1 \|x\|_T + \beta_1 \tag{I.16}$$

$$\langle x | H_1 x \rangle_T \geq \delta_1 \|x\|_T^2 + \beta_1' \tag{I.17}$$

$$\langle H_2 x | x \rangle_T \geq \epsilon_2 \|H_2 x\|_T^2 + \beta_2' \quad (\text{I.18})$$

Bajo estas condiciones, si

$$\delta_1 + \epsilon_2 > 0 \quad (\text{I.19})$$

y $u_1, u_2 \in \mathcal{H}$, entonces $e_1, e_2, H_1 e_1 = y_1, H_2 e_2 = y_2 \in \mathcal{H}$

■

Corolario I.9

Considérese la Fig I.1. Si $u_2=0$, H_1 y H_2 son pasivos, entonces el mapeo de $u_1 \rightarrow y_1$ es pasivo.

Demostración.

Por hipótesis se cumple que, $\forall T \geq 0$, y $\beta_1, \beta_2 \in \mathfrak{R}$

$$\begin{aligned} \langle e_1, y_1 \rangle_T &\geq \beta_1 \\ \langle y_1, y_2 \rangle_T &\geq \beta_2 \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

Por propiedades del producto escalar se tiene

$$\begin{aligned} \langle u_1, y_1 \rangle_T &= \langle e_1 + y_2, y_1 \rangle_T \\ &= \langle e_1, y_1 \rangle_T + \langle y_2, y_1 \rangle_T \\ &= \langle e_1, y_1 \rangle_T + \langle y_1, y_2 \rangle_T \\ &\geq \beta_1 + \beta_2 \triangleq \beta \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

q.d.

Nota

La demostración del corolario es distinta a la presentada en [2].

El corolario anterior es útil cuando se desea analizar la estabilidad de un sistema con tres bloques. Cabe hacer notar que, aunque se pueden analizar directamente los tres bloques

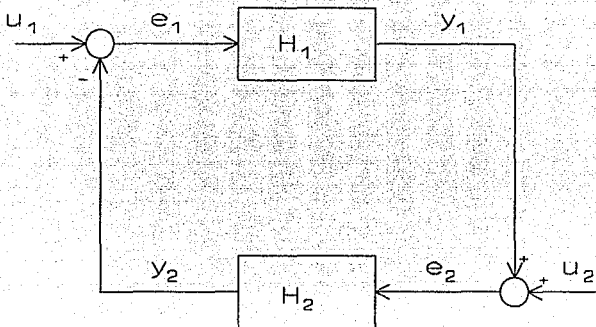


Figura I.1

reduciéndolos a dos, en ocasiones resulta más conveniente trabajar con el sistema original. Para ello se presenta el teorema I.10.

Teorema I.10

Considérese la Fig I.2, con $B_1: v \rightarrow \tau_1$, $B_2: \tilde{\tau} \rightarrow -v$, $B_3: \tau_2 \rightarrow v$. Si el bloque B_1 es estrictamente pasivo y con ganancia finita, y los bloques B_2 y B_3 son pasivos, entonces

$$v, \tau_1 \in L_n^2 \tag{I.22}$$

Demostración.

Por el corolario I.9 los bloques B_2 y B_3 constituyen un bloque pasivo. Aplicándose el teorema I.8, (I.22) es inmediato con $\epsilon_2=0$. (Obsérvese que (I.16) implica ganancia finita.)
q.d.

No obstante, puede darse el caso de que $v(t)$ no sea la variable de interés, pero si $v(t)$ está relacionada con esta variable como lo propone el siguiente lema, entonces el teorema I.10 puede ser utilizado para estudiar de manera indirecta la estabilidad de la variable de interés.

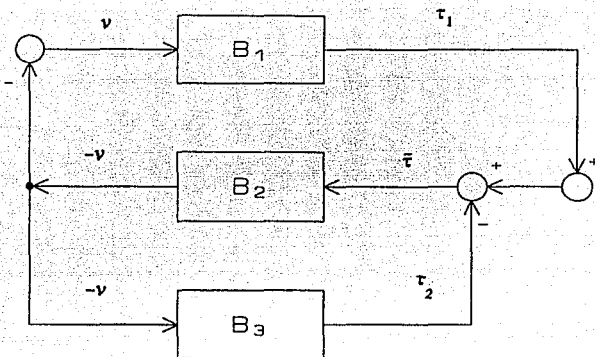


Figura I.2

Lema I.11

Sea $H(s) \in \mathcal{H}^m(s)$ exponencialmente estable y estrictamente propia, si

$$v \in L_n^2, \quad q = H(s)v(s) \tag{I.23}$$

Entonces

$$q \in L_n^2 \cap L_n^\infty, \quad \dot{q} \in L_n^2, \quad q \text{ es continua y tiende a cero cuando } t \rightarrow \infty \tag{I.24}$$

■

Los sistemas que son modelados por la metodología de Euler-Lagrange tienen algunas características en común; una de ellas es que, representados por la relación (I.25), se prueba fácilmente que el mapeo entre τ (vector de entrada) y $-v$ (vector de salida) es pasivo [1].

Teorema I.12

Considérese un sistema descrito por

$$\tau = -[D(t)\dot{v} + C(t)v] \tag{I.25}$$

Si

$$\begin{aligned} \text{RI. } D(t) & \text{ es simétrica positiva definida} \\ \text{RII. } C(t) - \frac{1}{2} \dot{D}(t) & \text{ es antisimétrica} \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

entonces el mapeo $\tau \rightarrow -v$ es pasivo.

Demostración

Por facilidad se omite el argumento de las matrices

$$\begin{aligned} \langle \tau | -v \rangle_T &= \int_0^T -v^T \tau \, dt \\ &= \int_0^T (v^T D \dot{v} + v^T C v) \, dt \\ &= \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v^T D v) - \frac{1}{2} v^T \dot{D} v + v^T C v \right\} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} v^T D v \, dt + \int_0^T v^T \left(C - \frac{1}{2} \dot{D} \right) v \, dt \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

Por la propiedad RII la segunda integral de la última parte de (I.27) es igual a cero; por RI es inmediato que

$$\langle \tau | -v \rangle_T \geq -\frac{1}{2} v^T(0) D(0) v(0), \quad \forall T \geq 0 \quad (\text{I.28})$$

q.d.

II. CONTROL ADAPTABLE PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA DE ROBOTS BASADO EN PASIVIDAD

II.1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el interés en controlar robots mediante un mecanismo adaptable se ha incrementado [1, 10]. Sin embargo, el principal obstáculo para la utilización de este tipo de esquemas es la dificultad para probar la estabilidad del sistema y la convergencia a cero del error de seguimiento de trayectorias.

Una metodología adecuada para llevar a cabo este objetivo es el enfoque de pasividad, el cual permite demostrar de manera simple la estabilidad total de sistemas cuyo bloque adaptable es pasivo y cuyo controlador es estrictamente pasivo [1, 11, 12].

Basado en este enfoque, esta sección propone un esquema de control adaptable que satisface las condiciones necesarias para garantizar la convergencia a cero del error de seguimiento y del error paramétrico.

II.2 CONTROL DE ROBOTS BASADO EN PASIVIDAD

Considérese el siguiente modelo de un robot de articulaciones rígidas de n grados de libertad obtenido utilizando el método de Euler-Lagrange [3]

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (II.1)$$

donde

q, \dot{q}, \ddot{q} son vectores de $n \times 1$ que representan la posición, velocidad y aceleración de las articulaciones respectivamente

$D(q)$ es la matriz de inercias ($n \times n$)

$C(q,\dot{q})$ son los términos de aceleración centrífuga y de Coriolis ($n \times n$)

$g(q)$ es el par gravitacional ($n \times 1$)

τ es el par de entrada a las articulaciones ($n \times 1$)

Las siguientes propiedades hacen del sistema (II.1) un caso particular de sistemas no lineales, lo que facilita tanto su estudio como el diseño de controladores [3, 10].

P1. $d_1 I \leq D(q) \leq d_2 I, \forall q \in \mathcal{R}^n, d_1, d_2 \in \mathcal{R}, 0 < d_1 < d_2$

P2. $\dot{b}(q) - 2C(q, \dot{q})$ es antisimétrica

P3. La ecuación (II.1) puede reescribirse como

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta, \quad (\text{II.2})$$

donde

θ es el vector de parámetros de interés ($r \times 1$)

$Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ es la matriz de funciones conocidas ($n \times r$)

Se observa que la última parte de (II.2) es lineal con respecto a los parámetros, los cuales se consideran constantes.

A continuación, se procede a resolver el problema de control adaptable, el cual consiste en diseñar un controlador y un algoritmo de adaptación que garanticen que el error de seguimiento de trayectoria ($\tilde{q} \triangleq q - q_d$) tienda a cero. q_d representa el vector de señales de trayectorias deseadas, el cual se asume que es acotado, lo mismo que su primera y segunda derivadas.

Las siguientes definiciones son útiles en el diseño del esquema adaptable [1, 11]

$$a \triangleq \dot{q}_d - K\tilde{q} \quad (\text{II.3})$$

$$v \triangleq \dot{q} - a = \dot{\tilde{q}} + K\tilde{q} \quad (\text{II.4})$$

donde K es una matriz diagonal positiva definida.

Sustituyendo (II.3) en (II.4) se obtiene

$$v = (sI + K) \bar{q} \triangleq F^{-1}(s) \bar{q} \quad \rightarrow \quad \bar{q} = F(s) v \quad (\text{II.5})$$

$F(s)$ es una función estrictamente propia y exponencialmente estable debido a la definición de K . De una manera más general se puede considerar una $K(s)$, con la restricción de que $F(s)$ continúe siendo estrictamente propia y exponencialmente estable.

Por otro lado, para trabajar con un esquema adaptable se puede utilizar la propiedad P3 sustituyendo (II.3) en (II.2) de tal manera que se satisfaga [1, 11]

$$\hat{D}(q)\dot{a} + \hat{C}(q, \dot{q})a + \hat{G}(q) = Y_a(q, \dot{q}, a, \dot{a})\hat{\theta} = Y_a\hat{\theta} \quad (\text{II.6})$$

donde ($\hat{\quad}$) son los valores estimados de los parámetros.

Utilizando (II.6) junto con el control definido por

$$\tau = Y_a\hat{\theta} - K_v v \quad (\text{II.7})$$

donde K_v es una matriz diagonal positiva definida. Al igual que K , K_v puede ser función de s sin que los resultados aquí presentados pierdan su validez.

Definiendo

$$\tilde{\theta} \triangleq \hat{\theta} - \theta \quad (\text{II.8})$$

se puede reescribir (II.2), restando $Y_a\theta$ en ambos lados de la ecuación, como

$$\tilde{\tau} \triangleq -[Y_a\tilde{\theta} - K_v v] = -[D(q)\dot{v} + C(q, \dot{q})v] \quad (\text{II.9})$$

Con base en el teorema I.10, se puede establecer el siguiente resultado.

Teorema II.1

Sea un algoritmo de adaptación (A.A.) para el sistema descrito por (II.2)-(II.9). Si el mapeo $-v$ a $Y_a \bar{\theta}$ es pasivo, entonces

$$\bar{q} \in L_n^2 \cap L_n^\infty, \dot{\bar{q}} \in L_n^2, v \in L_n^2, \bar{q} \text{ es continua y tiende a cero cuando } t \rightarrow \infty$$

Demostración

Primero se hace notar que la Fig II.1 corresponde a (II.9) definiendo la salida de la planta como $-v$. Para aplicar directamente el teorema I.10, se requiere que el mapeo $v \rightarrow k_v v$ sea estrictamente pasivo, lo que es inmediato de la definición de esta propiedad. Como por el teorema I.12 se sabe que el mapeo $\tilde{\tau} \rightarrow -v$ es pasivo, se concluye que $v \in L_n^2$. La demostración se sigue fácilmente del lema I.11 y de (II.5).

q.d.

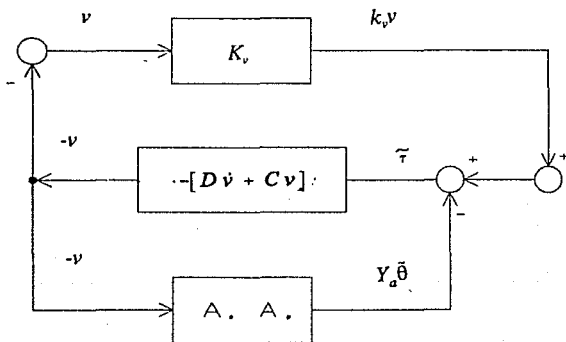


Figura II.1

El teorema II.1 toma ventaja de la propiedad de pasividad que una planta como la descrita por (II.2) posee. Por otro lado, se hace notar que K_v puede ser cambiado por cualquier controlador estrictamente pasivo.

II.3 CONTROL ADAPTABLE PROPUESTO

A continuación se propone un esquema de adaptación pasivo de $-v$ a $Y_a \bar{\theta}$, lo que permite probar estabilidad con base en el resultado de la sección anterior. Para ello, se definen el par de entrada filtrado y el error de predicción como

$$\tau_f \triangleq w(s)\tau = Y_f \theta_a, \quad w(s) = \frac{\lambda_f}{s + \lambda_f}, \quad \lambda_f > 0 \quad (\text{II.10})$$

$$e \triangleq \hat{\tau}_f - \tau_f = Y_f \hat{\theta} - \tau_f = Y_f \bar{\theta} \quad (\text{II.11})$$

Teorema II.2

Considérese el siguiente conjunto de ecuaciones que describen un algoritmo de adaptación para los parámetros del robot descrito en (II.2)

$$\dot{\hat{\theta}} = -\delta g - \gamma Y_a^T v, \quad \hat{\theta}(0) = 0 \quad (\text{II.12})$$

$$\dot{g} = -(\lambda I + \delta z)g + \lambda Y_f^T e - \gamma z Y_a^T v, \quad g(0) = 0 \quad (\text{II.13})$$

$$\dot{z} = -\lambda z + \lambda Y_f^T Y_p, \quad z(0) = 0 \quad (\text{II.14})$$

donde $\lambda \geq 0$, $\delta > 0$ son parámetros de diseño. Entonces, el mapeo $-v \rightarrow Y_a \bar{\theta}$ es pasivo.

Demostración

Se demuestra en primer lugar que g dada por (II.13) satisface

$$g = \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} Y_f^T(\tau) Y_f(\tau) d\tau \bar{\theta} \quad (\text{II.15})$$

De (II.11), (II.12) y (II.15) se obtiene

$$\begin{aligned}
 e^{\lambda t} g &= \lambda \int_0^t e^{\lambda \tau} Y_f^T(\tau) Y_f(\tau) d\tau \bar{\theta} \\
 \rightarrow \lambda e^{\lambda t} g + e^{\lambda t} \dot{g} &= \lambda e^{\lambda t} Y_f^T(t) Y_f(t) \bar{\theta} + \lambda \int_0^t e^{\lambda \tau} Y_f^T(\tau) Y_f(\tau) d\tau \dot{\bar{\theta}} \\
 \rightarrow \dot{g} &= -\lambda g + \lambda Y_f^T(t) Y_f(t) \bar{\theta} + \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} Y_f^T(\tau) Y_f(\tau) d\tau \dot{\bar{\theta}} \\
 &= -\lambda g + \lambda Y_f^T(t) \bar{c} + z(-\delta g - \gamma Y_a^T v)
 \end{aligned} \tag{II.16}$$

En donde se utiliza

$$z = \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} Y_f^T(\tau) Y_f(\tau) d\tau \tag{II.17}$$

obtenida de manera similar a como se hizo con (II.16). Ahora

$$\begin{aligned}
 \langle -v, Y_a \bar{\theta} \rangle_T &= \int_0^T -\bar{\theta}^T Y_a^T v dt = \frac{1}{\gamma} \int_0^T \bar{\theta}^T (\dot{\bar{\theta}} + \delta g) dt \\
 &= \frac{1}{\gamma} \int_0^T \bar{\theta}^T \dot{\bar{\theta}} dt + \frac{\delta}{\gamma} \int_0^T \bar{\theta}^T g dt \\
 &= \frac{1}{\gamma} \int_0^T \bar{\theta}^T \dot{\bar{\theta}} dt + \frac{\lambda \delta}{\gamma} \int_0^T \bar{\theta}^T \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} Y_f^T(\tau) Y_f(\tau) d\tau \bar{\theta} dt \\
 &= \frac{1}{2\gamma} \bar{\theta}^T(T) \bar{\theta}(T) - \frac{1}{2\gamma} \bar{\theta}^T(0) \bar{\theta}(0) + \frac{\delta}{\gamma} \int_0^T \bar{\theta}^T z \bar{\theta} dt \\
 &\geq -\frac{1}{2\gamma} \bar{\theta}^T(0) \bar{\theta}(0)
 \end{aligned} \tag{II.18}$$

La última parte de (II.18) se sigue del hecho de que z es positiva semidefinida, por lo que el mapeo $-v \rightarrow Y_a \bar{\theta}$ es pasivo.

q.d.

De (II.15) se puede observar que g pondera los valores pasados del error paramétrico, es decir, funciona como si fuera una memoria. La idea es tomar en cuenta la manera en que varía este error para hacerlo lo más pequeño posible. Ahora bien, la expresión (II.15) es una equivalencia del valor resultante de g de acuerdo con el algoritmo de adaptación, ya que no puede considerarse conocido el error paramétrico.

Otra propiedad del algoritmo (II.12)-(II.14) es que, bajo la condición (II.19), el error paramétrico también tiende a cero, como se muestra a continuación.

Teorema II.3

Bajo las condiciones (II.3)-(II.17), si existe $t_1 > 0$, $\alpha_1 > 0$ tal que

$$\delta z = \delta \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} Y_c^T(\tau) Y_c(\tau) d\tau \geq \alpha_1 I, \quad \forall t \geq t_1 \quad (\text{I.19})$$

entonces $\bar{\theta} \rightarrow 0$ exponencialmente cuando $t \geq t_1$.

Demostración

De (II.12), (II.15) y (II.17) se obtiene

$$\dot{\bar{\theta}} = -\delta z \bar{\theta} - \gamma Y_c^T v \quad (\text{I.20})$$

Considere la función candidata de Lyapunov

$$v(t) = \frac{1}{2} [v^T D v + \frac{1}{\gamma} \bar{\theta}^T \bar{\theta}] \quad (\text{I.21})$$

su derivada a lo largo de (II.9) y (II.20) es

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= v^T D \dot{v} + \frac{1}{2} v^T \dot{D} v + \frac{1}{\gamma} \dot{\theta}^T \bar{\theta} \\
&= v^T (Y_a \bar{\theta} - K_v v - C v) + \frac{1}{2} v^T \dot{D} v - \frac{\delta}{\gamma} \bar{\theta}^T z \bar{\theta} - \bar{\theta}^T Y_a^T v \\
&= -v^T K_v v - \frac{\delta}{\gamma} \bar{\theta}^T z \bar{\theta} + v^T \left(\frac{1}{2} \dot{D} - C \right) v \\
&= -v^T K_v v - \frac{\delta}{\gamma} \bar{\theta}^T z \bar{\theta}
\end{aligned} \tag{II.22}$$

Bajo la condición (II.19) se cumple que

$$\dot{V}(t) \leq -K_1 V(t), \text{ para } t \geq t_1 \tag{II.23}$$

con

$$K_1 := \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}(K_v)}{\lambda_{\max}(D)}, \alpha_1 \right\} \tag{II.24}$$

donde $\lambda_{\min}(\cdot)$ y $\lambda_{\max}(\cdot)$ representan los valores propios mínimo y máximo de una matriz, respectivamente. Se sigue de (II.24) que el error de seguimiento y el error paramétrico convergerán exponencialmente a cero al menos tan rápidamente como k_1 .

q.d.

Con el objeto de hacer algunas observaciones sobre el algoritmo de adaptación aquí presentado, se da la siguiente definición.

Definición II.4

El regresor (acotado) $Y_f(q,\dot{q})$ se dice [5,6] que es persistentemente excitante (PE), si para algún $t_2, \alpha_2 > 0$ y para todo $t \geq 0$

$$\int_t^{t+\alpha_2} Y_f^T(\tau) Y_f(\tau) d\tau \geq \alpha_2 I \tag{II.25}$$

y suficientemente excitante (SE), si para algún $t_2, \alpha_2 > 0$

$$\int_0^1 Y_f^T(\tau) Y_f(\tau) d\tau \geq \alpha_2 I \quad (\text{II.26})$$

Observación 1.

La condición *PE* en el regresor es requerida por la mayoría de los algoritmos existentes para su convergencia. Se observa que la condición *SE* es más débil que la *PE*, puesto que sólo se requiere que (II.25) sea satisfecha para $t=0$. La condición (II.19) se sitúa entre ambas condiciones: cuando λ es muy grande, esta tiende a ser *PE*, mientras que, cuando λ es pequeña y con $\delta=1/\lambda$, tiende a ser *SE*.

Observación 2.

El algoritmo de adaptación (II.12)-(II.14) incluye los casos de gradiente estándar, gradiente con promediación [6] y compuesto [4]. Si $\delta=\lambda=0$, entonces en (II.13)-(II.14) se tiene $z=0$ y $g=0$, por lo que (II.12) se convierte en

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma Y_a^T v \quad (\text{II.27})$$

que es el algoritmo gradiente estándar basado en error de seguimiento. Si ahora se considera $\gamma=0$, (II.12)-(II.14) se convierten en

$$\dot{\hat{\theta}} = -\delta g, \quad \hat{\theta}(0) = 0 \quad (\text{II.28})$$

$$\dot{g} = -(\lambda I + \delta z)g + \lambda Y_f^T e, \quad g(0) = 0 \quad (\text{II.29})$$

$$\dot{z} = -\lambda z + \lambda Y_f^T Y_f, \quad z(0) = 0 \quad (\text{II.30})$$

Estas tres relaciones representan el algoritmo gradiente con promediación usado para

identificación de plantas perturbadas [6]. Se hace notar que en este caso, como (II.29) utiliza sólo el error de predicción, el mapeo $v \rightarrow Y_a \bar{\theta}$ no es pasivo.

Por último, si $\lambda \rightarrow \infty$, lo que corresponde a una memoria instantánea (ya no se usa información pasada), entonces $g \rightarrow Y_t^T \epsilon$, $z \rightarrow Y_t^T Y_b$ y (II.12)-(II.14) se reduce a

$$\dot{\bar{\theta}} = -\delta Y_f^T \epsilon - \gamma Y_a^T v \quad (\text{II.31})$$

que es el algoritmo de adaptación compuesto con ganancia fija considerada en [4].

Observación 3.

Como se hace notar en la literatura [4, sec. 9.2], el algoritmo de adaptación compuesto (II.31) puede ser visto como un algoritmo gradiente con promediación, razón por la cual es capaz de dar una convergencia más rápida y suave a cero de los errores de seguimiento y paramétrico. De hecho, de (II.10) y (II.11), (II.31) puede expresarse como

$$\dot{\bar{\theta}} + \delta Y_f^T Y_f \bar{\theta} = -\gamma Y_a^T v \quad (\text{II.32})$$

comparando con (II.20) se nota que mientras este filtro variante en el tiempo tiene efecto de promediación sólo cuando el regresor Y_t es PE, el filtro variante en el tiempo (II.20) lo tiene bajo la condición (II.19), que es más relajada. Es por esto que los errores de seguimiento y paramétrico, usando (II.12)-(II.14), pueden ser incluso más suaves y con una convergencia más rápida que usando (II.31).

II.3 SIMULACIONES

Para probar la eficiencia del método propuesto se utilizaron con fines de comparación dos algoritmos de adaptación pasivos propuestos en [4].

Algoritmo 1 de Slotine-Li¹

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma Y_a^T v - \delta Y_f^T e \quad (\text{II.33})$$

Algoritmo 2 de Slotine-Li

$$\dot{\hat{\theta}} = -P(t)[Y_a^T v + \alpha(t)Y_f^T e] \quad (\text{II.34})$$

$$\dot{P}^{-1}(t) = -\lambda(t)P^{-1}(t) + 2\alpha(t)Y_f^T Y_f, \quad P^{-1}(0) = I \quad (\text{II.35})$$

con

$$\alpha(t) > 0, \quad 0 \leq \lambda(t) = \lambda \leq 1 \quad (\text{II.36})$$

La simulación se llevó a cabo con un robot de un grado de libertad (Fig II.2) cuyas ecuaciones son las siguientes [3]

$$J\ddot{\theta}_m + B\dot{\theta}_m + C\text{sen}(\theta_m/r) = \tau \quad (\text{II.37})$$

$$J = J_m + \frac{J_l}{r^2} \quad (\text{II.38})$$

¹ El algoritmo propuesto en [4] utiliza γ dos veces en lugar de δ .

$$B = B_m + \frac{B_l}{r^2} \quad (\text{II.39})$$

$$C = \frac{Mgl}{r} \quad (\text{II.40})$$

$$\theta_l = \frac{1}{r} \theta_m \quad (\text{II.41})$$

donde

J, J_m son las inercias rotacionales del eslabón y del motor, respectivamente

B, B_m son las constantes de amortiguamiento del eslabón y del motor, respectivamente

τ es el par de entrada

θ, θ_m son los ángulos del eslabón y del motor, respectivamente

M es la masa total del eslabón

r es la razón de reducción

d es la distancia del eje de la articulación al centro de masa del eslabón

Los valores de las constantes que se usaron en la simulación fueron

$$J_m = J_l = 0.0004 \frac{Nm s^2}{rad}, b_m = 0.015 \frac{Nm s}{rad}, b_l = 0 \frac{Nm s}{rad} \quad (\text{II.42})$$

$$M = 1 \text{ Kg}, l = 0.15 \text{ m}, r = 2, g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

Los parámetros que se consideran desconocidos son

$$\theta_{1*} = J, \quad \theta_{2*} = B, \quad \theta_{3*} = C \quad (\text{II.43})$$

Por otro lado, son inmediatas las relaciones

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \left[\ddot{q} \quad \dot{q} \quad \text{sen}\left(\frac{q}{r}\right) \right] \quad (\text{II.44})$$

y

$$Y_a(q, \dot{q}, a, \dot{a}) = \left[\dot{a} \quad a \quad \text{sen}\left(\frac{q}{r}\right) \right] \quad (\text{II.45})$$

con

$$q = \theta_m \quad (\text{II.46})$$

Para fines de comparación, los parámetros de los algoritmos de adaptación utilizados en los tres métodos son ajustados al mismo valor cuando son equivalentes. El controlador (K_v) es una constante unitaria. Los valores utilizados son

$$\lambda_f = 1, \quad \delta = 200, \quad \gamma = 1, \quad \lambda = 0.005, \quad \alpha = 0.5 \quad (\text{II.47})$$

$F(s)$ se calculó como

$$F(s) = \frac{1}{s+5} \quad (\text{II.48})$$

es decir, $K = 5$.

Las simulaciones consisten en el seguimiento de una señal senoidal y de un escalón. Se asume que es posible leer q y \dot{q} , mostrándose resultados en condiciones ideales y en presencia de ruido blanco en ambas señales. En las Fig 3 y 4 se presentan los resultados para el control adaptable propuesto. Las Fig 5 y 6 corresponden al algoritmo Slotine-Li 1 y las 7 y 8 al algoritmo Slotine-Li 2. Respectivamente, las Fig 9-14 muestran los resultados en presencia de ruido.

Observación 4

En las Fig 3-14 se puede ver que el error de seguimiento de trayectoria tiende a cero

independientemente del algoritmo de adaptación, la señal de referencia y la presencia de ruido, lo que era de esperarse de acuerdo con el teorema II.1.

Observación 5

Para el caso de señales de referencia senoidales, los tres algoritmos de adaptación hacen tender a cero los errores paramétricos en ausencia y presencia de ruido, pero el algoritmo propuesto tiene la ventaja de ser más rápido y suave.

Observación 6

Para el caso de señales de referencia escalón, en ausencia de ruido sólo el algoritmo propuesto garantiza la tendencia a cero de los errores paramétricos. En presencia de ruido los tres algoritmos hacen tender a cero estos errores, pero el algoritmo propuesto es más rápido.

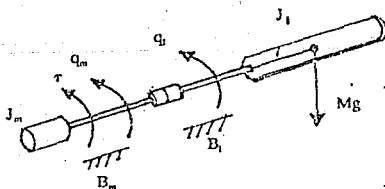


Figura II.2

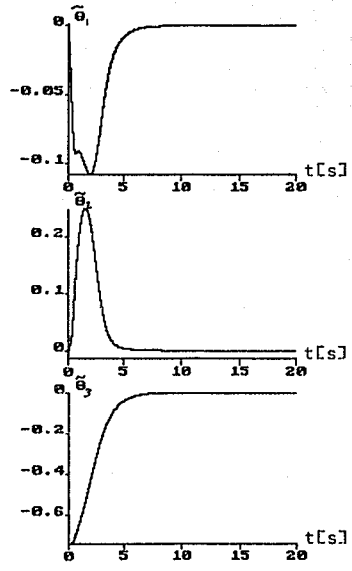
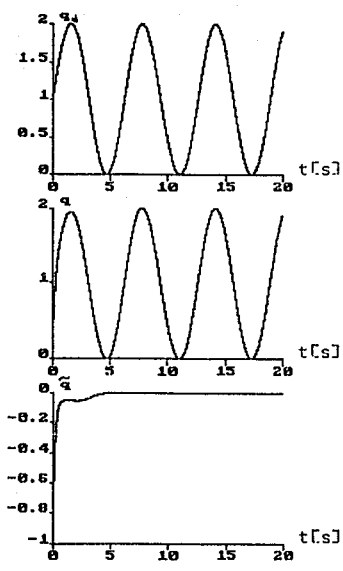


Figura II.3

Señal de referencia senoidal para el método propuesto

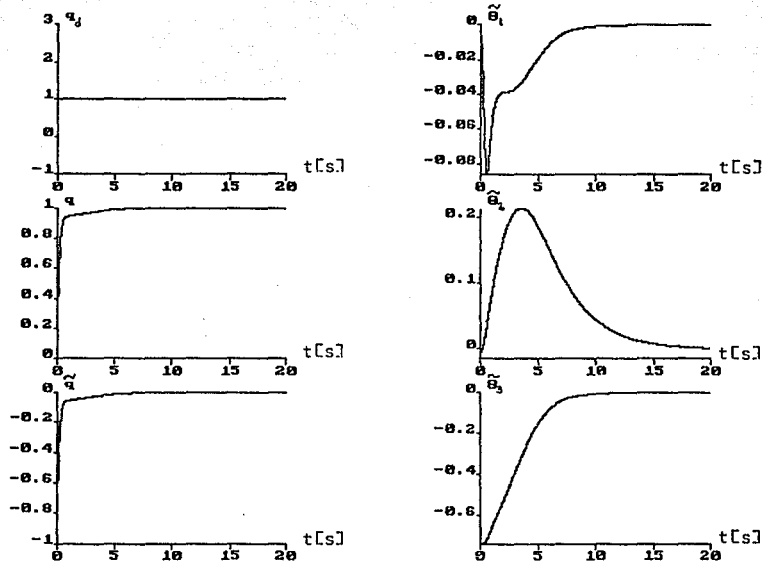


Figura II.4

Señal de referencia escalón para el método propuesto

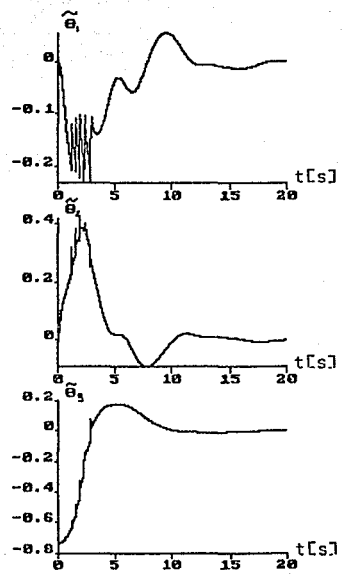
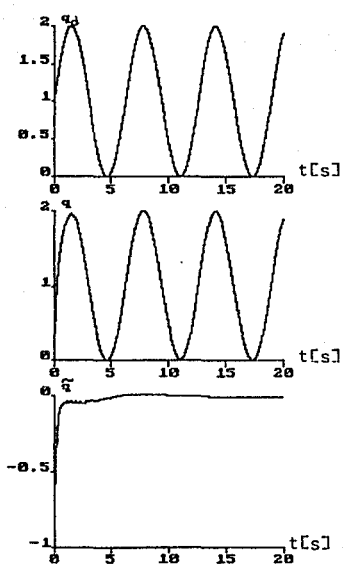


Figura II.5

Señal de referencia senoidal para el algoritmo de Slotine-Li 1

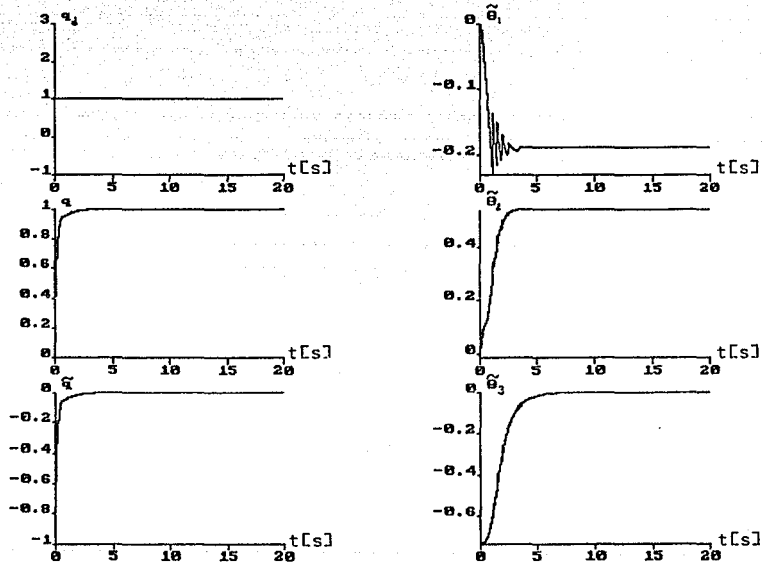


Figura II.6

Señal de referencia escalón para el algoritmo de Slotine-Li 1

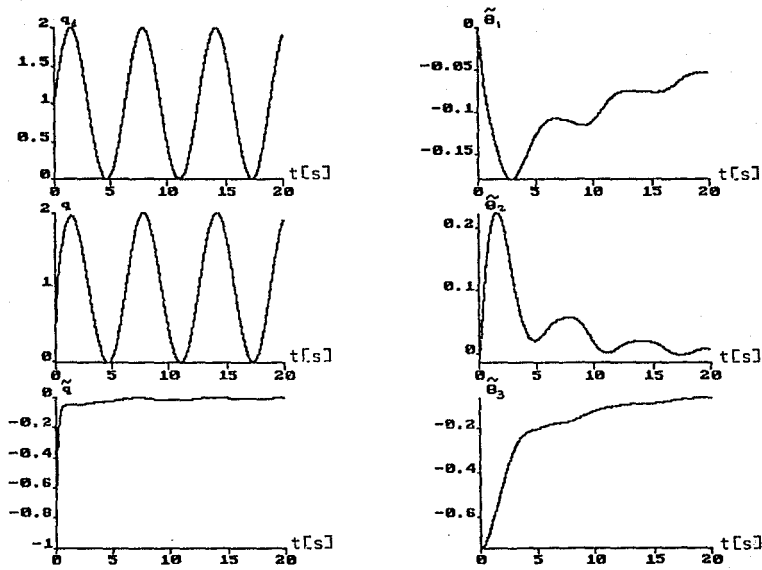


Figura II.7

Señal de referencia senoidal para el algoritmo de Slotine-Li 2

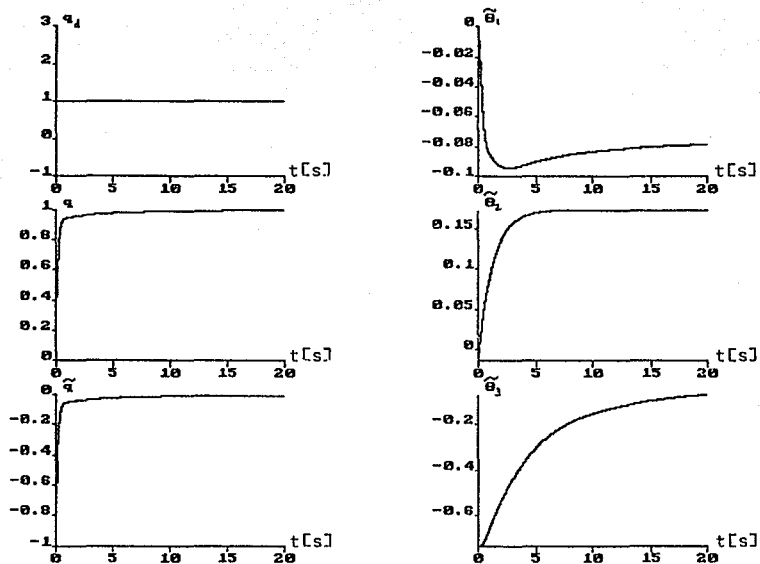


Figura II.8

Señal de referencia escalón para el algoritmo de Slotine-Li 2

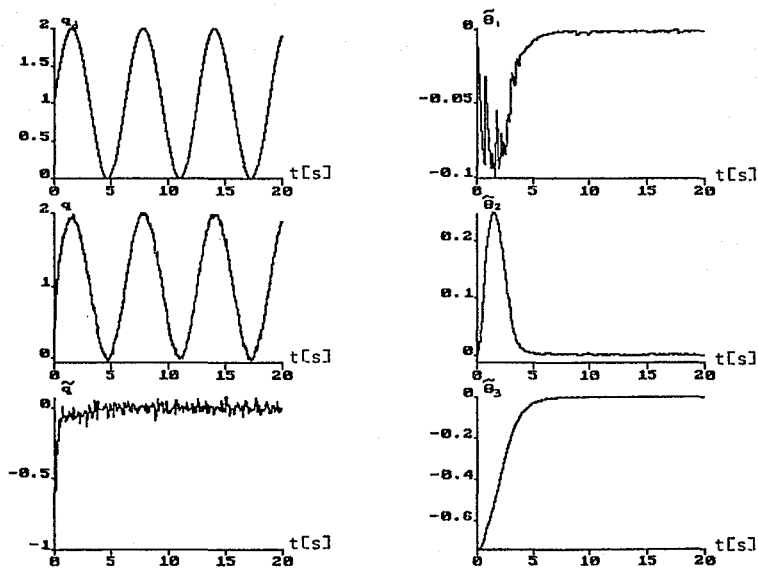


Figura II.9

Señal de referencia senoidal con ruido para el método propuesto

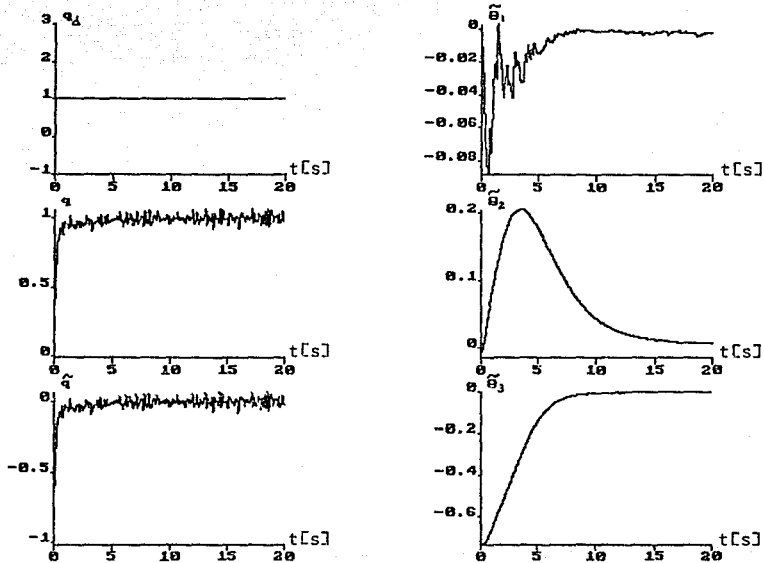


Figura II.10

Señal de referencia escalón con ruido para el método propuesto

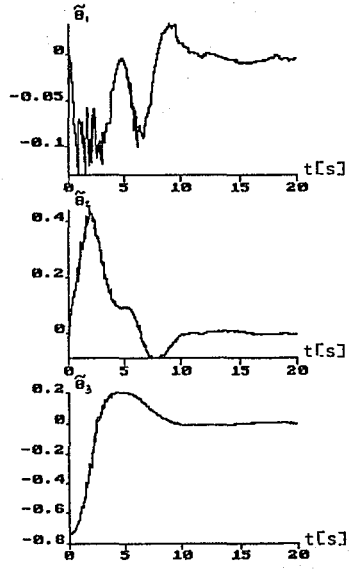
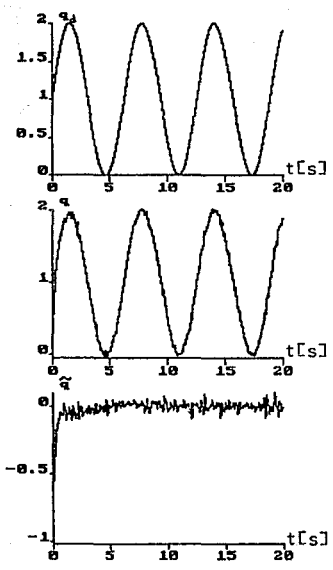


Figura II.11

Señal de referencia senoidal con ruido para el algoritmo de Slotine-Li 1

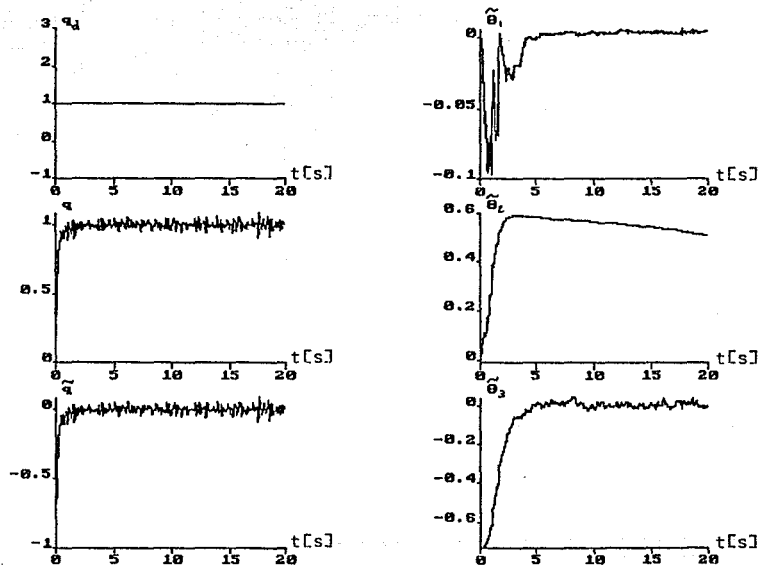


Figura II.12

Señal de referencia escalón con ruido para el algoritmo de Slotine-Li 1

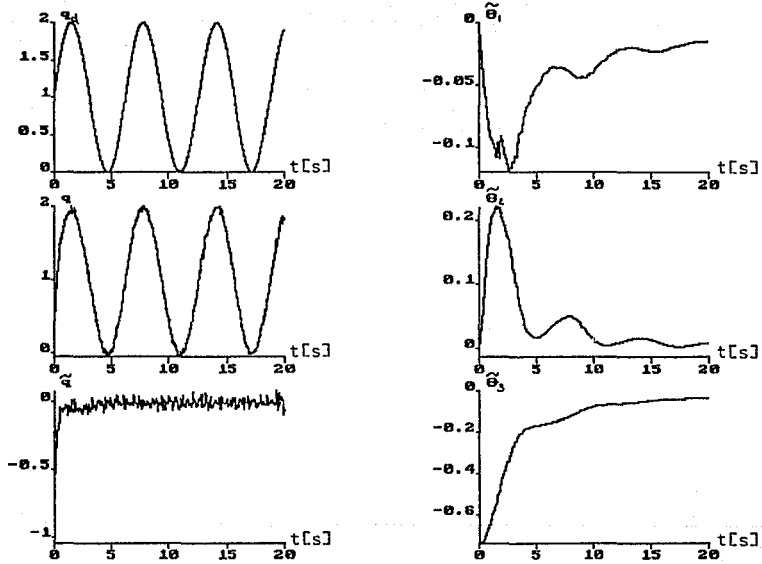


Figura II.13

Señal de referencia senoidal con ruido para el algoritmo de Slotine-Li 2

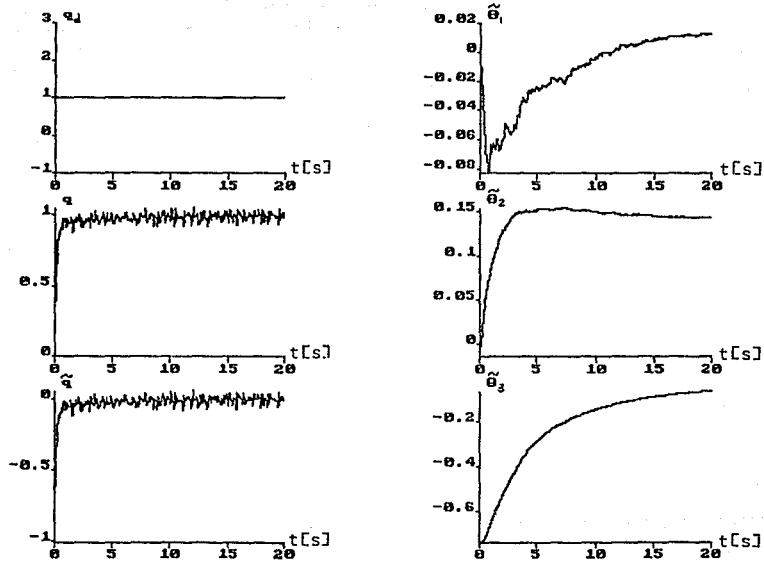


Figura II.14

Señal de referencia escalón con ruido para el algoritmo de Slotine-Li 2

III. CONTROL ADAPTABLE PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA DE UNA CLASE DE SISTEMAS NO LINEALES

III.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se analizaron los robots rígidos de n grados de libertad. Debido a la forma en que fueron obtenidas sus ecuaciones, las matrices del modelo tenían varias propiedades que fueron aprovechadas en el diseño del esquema de control adaptable. Con todo, el robot rígido sólo es un caso especial de una clase de sistemas no lineales modelados mediante la metodología de Euler-Lagrange.

Ahora bien, en esta clase de sistemas se dan algunos casos en que se tienen menos entradas que grados de libertad, siendo varias las plantas que poseen estas características [7, 15, 16].

Este tipo de plantas permiten controlar directamente un número de salidas igual al de las entradas disponibles. Sin embargo, el problema interesante lo constituye el tratar de manipular las salidas que no son controlables directamente.

La idea en estos casos consiste en controlar las salidas de interés a través de las entradas disponibles y del resto de las salidas. No obstante, surge un nuevo problema con este enfoque, dado que no sólo se tiene que encontrar una ley de control que garantice que los errores de seguimiento de trayectoria tiendan a cero, sino que también se debe garantizar que las señales de referencia deseadas de las salidas directamente controlables, generadas durante el proceso de control, están acotadas. Una extensión del problema anterior consiste en diseñar un esquema de control adaptable.

En este capítulo se plantea de forma general el problema a solucionar para esta clase de sistemas no lineales; después se resuelve parcialmente el caso de un péndulo invertido, mostrándose que esta planta pertenece a este tipo de sistemas.

III.2 SISTEMAS NO LINEALES OBTENIDOS POR LA METODOLOGÍA EULER-LAGRANGE

Las ecuaciones de los sistemas no lineales a los que se refiere esta sección pueden ser obtenidas mediante la metodología Euler-Lagrange [3]. La expresión general para este tipo de sistemas es

$$D(q)\ddot{q} + C(\dot{q}, q)\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = u \quad (\text{III.1})$$

donde

$$D(q) = \begin{bmatrix} D_{11}(q) & D_{12}(q) \\ D_{21}(q) & D_{22}(q) \end{bmatrix}$$

$$C(\dot{q}, q) = \begin{bmatrix} C_{11}(\dot{q}, q) & C_{12}(\dot{q}, q) \\ C_{21}(\dot{q}, q) & C_{22}(\dot{q}, q) \end{bmatrix}$$

$$F = \text{diag}(f_1, \dots, f_n), \quad f_i \geq 0 \quad (\text{III.2})$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} g_1(q) \\ \vdots \\ g_n(q) \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix}, \quad 0 \in \mathfrak{R}^{n_1}, \tau \in \mathfrak{R}^{n_2}$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad q_1 \in \mathfrak{R}^{n_1}, q_2 \in \mathfrak{R}^{n_2}, \quad n_1 \geq 0, n_2 > 0$$

Se puede demostrar que esta clase de sistemas posee las siguientes propiedades

PI. $d_1 I \leq D(q) \leq d_2 I, \quad \forall q \in \mathfrak{R}^n, \quad 0 < d_1 < d_2$

PII. $2C(q, \dot{q}) - \dot{D}(q)$ es antisimétrica

PIII. (III.1) se puede reescribir como

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta_* = u, \quad Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}, \theta_* \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$$

donde

θ , son los parámetros de interés del sistema.

$$n = n_1 + n_2$$

Algunos sistemas cuyas ecuaciones pueden generarse de esta forma son: los motores de inducción [15], los robots flexibles [16] y el péndulo invertido [4, 7].

El problema de control consiste en diseñar un esquema adaptable tal que, dadas las señales de referencia deseadas para el vector q_1 (q_{d1}), las cuales se consideran acotadas y diferenciables cuantas veces sea necesario, se genere un control τ acotado tal que se satisfaga

$$\begin{aligned}\tilde{q}_1 &\triangleq q_1 - q_{d1} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty \\ \tilde{q}_2 &\triangleq q_2 - q_{d2} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty \\ \tilde{\theta} &\triangleq \hat{\theta} - \theta, \text{ este acotado } \forall t\end{aligned}\tag{III.3}$$

donde $\hat{\theta}$ es el vector de parámetros estimados y q_{d2} son las señales de referencia deseadas para q_2 , las cuales se generan durante el proceso control y, por lo mismo, no pueden elegirse arbitrariamente. Esto significa que la elección de q_{d2} está condicionada a la dinámica de la planta y al esquema adaptable que se utilice, por lo que, en realidad, lo único que se puede exigir sobre q_{d2} es que tanto ella como sus derivadas sean acotadas, siendo esta la última etapa a resolver del problema de control.

III.3 CONTROL ADAPTABLE DE UN PÉNDULO INVERTIDO

Una planta que pertenece a la clase de Euler-Lagrange es el péndulo invertido mostrado en la Fig III.1. Sus ecuaciones son [7]

$$\begin{aligned} \varphi \ddot{\theta} + c \dot{\theta} - M_1 l_p g \sin(\theta) + M_1 l_p \ddot{x} \cos(\theta) &= 0 \\ M \ddot{x} + F_v \dot{x} + M_1 l_p (\ddot{\theta} \cos(\theta) - (\dot{\theta})^2 \sin(\theta)) &= \tau \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

donde

$$\varphi = \varphi_p + M_1 l_p^2$$

φ_p es el momento de inercia del péndulo

C es la constante de fricción del péndulo

l_p es la longitud del carrito al centro de gravedad del péndulo

F_v es la constante de fricción proporcional de la velocidad

τ es la fuerza aplicada al carrito

M_0 es la masa del carrito

M_1 es la masa del péndulo

$$M = M_0 + M_1$$

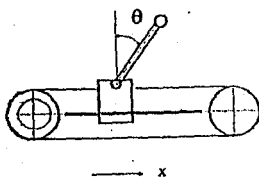


Figura III.1

Escribiendo (III.4) en forma matricial se tiene

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + G(q) = u \quad (\text{III.5})$$

con

$$D(q) = \begin{bmatrix} \varphi & M_1 l_s \cos(\theta) \\ M_1 l_s \cos(\theta) & M \end{bmatrix}, \quad C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -M_1 l_s \dot{\theta} \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & F_r \end{bmatrix}, \quad G(q) = \begin{bmatrix} -M_1 l_s g \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} -gr \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

$$q = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix}$$

En adelante se considerará que

$$D \triangleq \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, \quad C \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Ahora bien, no es difícil constatar que el péndulo invertido pertenece a la clase de funciones en estudio. Para la propiedad PI, primero se prueba que $D(q)$ es positiva definida, lo que es inmediato dado que $d_{11} > 0$, lo mismo que el determinante de la matriz, el cual es

$$\det(D(q)) = \varphi M - M_1^2 l_s^2 \cos^2(\theta) > 0 \quad (\text{III.8})$$

Por lo que PI se cumple con d_1, d_2 dados por los valores propios mínimo y máximo de $D(q)$.

La propiedad PII se sigue fácilmente calculando

$$2C(q, \dot{q}) - \dot{D}(q) = \begin{bmatrix} 0 & -M_1 l_s \dot{\theta} \sin(\theta) \\ M_1 l_s \dot{\theta} \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

De la misma manera se puede probar la propiedad PIII, dado que

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \theta_* = u \quad (\text{III.10})$$

con

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} \ddot{\theta} & \ddot{x} \cos(\theta) & 0 & \dot{\theta} & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & (\ddot{\theta} \cos(\theta) - (\dot{\theta})^2 \sin(\theta)) & \ddot{x} & 0 & \dot{x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

$$\theta_* = [\varphi \quad M_1 l_x \quad M \quad c \quad F_r \quad M_1 l_x g]^T \quad (\text{III.12})$$

Utilizando el concepto de pasividad, el péndulo invertido se analiza de manera similar a como se hace con un robot rígido de dos grados de libertad. El siguiente teorema propone un esquema de control adaptable que garantiza que el error de seguimiento de trayectoria tiende a cero. En cierta forma, este teorema no es más que un caso particular del teorema II.1, sólo que se considera que una entrada es nula en todo momento.

Teorema III.1

Sean las siguientes variables

$$a \triangleq \dot{q}_d - K \tilde{q} \quad (\text{III.13})$$

$$K \triangleq \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{III.14})$$

$$\tilde{q} \triangleq q - q_d \quad (\text{III.15})$$

$$v \triangleq \dot{q} - a \quad (\text{III.16})$$

$$K_v \triangleq \begin{bmatrix} K_{v1} & 0 \\ 0 & K_{v2} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{III.17})$$

De (III.13)-(III.17) se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned} v &= \dot{q} - a = (SI + K) \bar{q} \triangleq E^{-1}(s) \bar{q} \\ \bar{q} &= E(s) v \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

donde

q_d son las señales de referencia deseadas

$E(s)$ es una función estrictamente propia y exponencialmente estable por la definición de K

a, v vectores (2x1)

Bajo la condición

$$\bar{q}_{d2} \triangleq \frac{1}{d_{12}} [K_{v1} v_1 + \hat{g}_r - \hat{d}_{11} \dot{a}_1 - \hat{c} a_1] + k_2 \bar{q}_2 \quad (\text{III.19})$$

donde ($\hat{}$) representa un valor estimado por el algoritmo de adaptación

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma Y_a^T v \quad (\text{III.20})$$

el control definido por

$$\tau = \hat{d}_{21} \dot{a}_1 + \hat{d}_{22} \dot{a}_2 + \hat{c}_{21} a_1 + \hat{F}_r a_2 - k_{v2} v_2 \quad (\text{III.21})$$

genera errores de seguimiento nulos cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración.

Sea

$$u = \dot{D}a + \dot{C}a + \dot{F}a + \dot{g} - K_v v = Y_a(a, \dot{a}, q, \dot{q}) \dot{\theta} - K_v v \quad (\text{III.22})$$

con

$$Y_a = \begin{bmatrix} \dot{a}_1 & \dot{a}_2 \cos(\theta) & 0 & a_1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & (\dot{a}_1 \cos(\theta) - a_1 \dot{\theta} \sin(\theta)) & \dot{a}_2 & 0 & a_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

Restando $Y_a \dot{\theta}$ en (III.5) y (III.23) se tiene

$$D\dot{v} + Cv = -Wv + Y_a \ddot{\theta}, \quad W \triangleq K_v + F, \quad \ddot{\theta} \triangleq \ddot{\theta} - \dot{\theta}_a \quad (\text{III.24})$$

El resto de la demostración es prácticamente idéntica a la del teorema II.1, sólo se requiere probar que el mapco $-v$ a $Y_a \ddot{\theta}$ es pasivo, como se hace a continuación

$$\begin{aligned} \langle -v, Y_a \ddot{\theta} \rangle &= \int_0^T -\ddot{\theta}^T Y_a^T v dt \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_0^T \ddot{\theta}^T \dot{\theta} dt \\ &\geq -\frac{1}{2\gamma} \ddot{\theta}^T(0) \dot{\theta}(0) \triangleq \beta \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

En vista de lo anterior, se concluye la demostración notando que las relaciones (III.19) y (III.21) provienen del vector u considerado en (III.6).

q.d.

Observación 1

El problema planteado en la sección III.1 no se resuelve totalmente para el caso del péndulo invertido, dado que en ningún momento se garantiza que la señal de referencia deseada para el carrito será acotada.

Observación 2

Una mejora del algoritmo de adaptación consiste en no permitir que los valores estimados sean menores o iguales a cero, puesto que los parámetros de interés reales son positivos.

Observación 3

Una vez resuelto el problema de acotar q_{d2} , se deberá pensar en el diseño de un observador para estimar la velocidad del ángulo del péndulo, puesto que en una implementación en tiempo real no es probable que se tenga este dato.

IV. CONCLUSIONES

El objetivo de la tesis fue utilizar la propiedad de pasividad para diseñar controladores y esquemas adaptables para seguimiento de trayectoria en sistemas no lineales. Más específicamente, las plantas no lineales que se tenía interés en estudiar fueron aquellas cuyo modelo se obtiene a partir de la ecuación de Euler-Lagrange. Formulando el problema a resolver para casos generales, se presentaron dos ejemplos que estaban incluidos en esos casos: un robot rígido de 1 grado de libertad en el capítulo II, y un péndulo invertido para el caso de plantas con menos entradas que grados de libertad, tema del capítulo III.

Para el primer caso, el teorema II.1 proporciona inmediatamente las condiciones para asegurar la tendencia a cero del error de seguimiento de trayectoria en robots rígidos, pero no así la de los parámetros de interés calculados a los verdaderos. Para garantizar que esto último ocurrirá, se propuso un algoritmo de adaptación que, bajo ciertas condiciones, satisface este requerimiento. Esto se debe a la inclusión de memoria en el algoritmo de adaptación, ya que esto implica que el ajuste de los parámetros variará de acuerdo a como se comporte el error paramétrico (tanto en el presente como en el pasado). Con una función de Lyapunov se establece cual es la condición que se debe cumplir para que el error paramétrico tienda a cero. Es por esto que era de esperarse el mejoramiento del desempeño del esquema adaptable. Gracias a la simulación es posible observar que, si bien los tres algoritmos de adaptación utilizados hacen tender a cero el error de seguimiento de trayectoria, sólo el propuesto en el capítulo II proporciona buenos resultados en la convergencia de los parámetros estimados a los verdaderos, aun cuando la señal de referencia sea una constante, por lo que se comprueba la mejora esperada con la inclusión de memoria en el cálculo de los parámetros del robot.

En el segundo caso (el péndulo invertido) se utiliza una metodología parecida a la utilizada con el robot rígido, sólo que esta vez se obliga a la segunda derivada de q_{d2} a satisfacer una condición específica para igualar una de las entradas del péndulo invertido a cero. La forma de calcular esta derivada permite garantizar que será acotada, no obstante, no es posible decir lo mismo de la primera derivada ni de la propia señal deseada. Es un problema por resolver el acotar las señales de referencia deseadas para el carrito sin perder

la tendencia a cero de los errores de seguimiento de trayectoria garantizada para cuando q_{d2} no está acotada. Un primer paso para resolver este problema puede ser no exigir sobre los errores más que sean acotados.

Por otro lado, pensando en la implementación física del esquema adaptable y considerando, además, resuelto el problema para la señal de referencia del carrito, se debe tener en cuenta el inconveniente que existe cuando se considera conocida la velocidad del ángulo del péndulo, ya que esta no suele estar disponible. Aunque se puede utilizar una aproximación, lo más adecuado es diseñar un observador, lo que también se considera trabajo por realizar.

En general, se puede afirmar que la utilización del concepto de pasividad permite formular resultados globales de estabilidad de sistemas interconectados entre sí. Puede notarse, asimismo, que los resultados obtenidos mediante pasividad son equivalentes a los que se obtienen mediante el método de Lyapunov, teniendo el primero la ventaja de ser más flexible cuando se cambia algún componente del sistema global, y el segundo la de ser más general.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Brogliato, B., Lozano, R., "Adaptive Motion Control of Robot Manipulators: A Unified Approach Based on Passivity", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol.1, 187 - 202, 1991.
- [2] Vidyasagar, M., Desoer, C. A., "Feedback Systems: Input-Output Properties", Academic Press, 1975.
- [3] Vidyasagar, M., Spong, M. W., "Robot Dynamics and Control", John Wiley & Sons, 1989.
- [4] Slotine, J-J. E., Li, W., "Applied Nonlinear Control", Prentice Hall, 1991.
- [5] Krause, J., Khargonekar, P. "Parameter Information Content of Measurable Signals in direct Adaptive Control", *IEEE Tras. Automat. Contr.*, Vol. 32, pp. 802-810.
- [6] Tang, Y., "An Averaging Gradient Algorithm for the Identification of Perturbed Plant", *Proc. ACC, Atlanta, Georgia*, 1988.
- [7] "Laboratory Setup Inverted Pendulum", AMIRA, 1992.
- [8] Yuan, J., Stepanenko, J., "Robust Adaptive Control of a Class of Nonlinear Mechanical Systems with Unbounded and Fast-varying Uncertainties", *Automatica*. Vol.28, pag. 265-276, Gran Bretaña.
- [9] Vidyasagar, M., "Nonlinear System Analysis", Prentice Hall, 1978.
- [10] Ortega, R., Spong, M. "Adaptive Motion of Rigid Robots: A tutorial", *IEEE*, 1988.
- [11] Slotine, J. J. E., Li W., "Composite Adaptive Control of Robot Manipulators", *International Federation of Automatic Control*, 1989.
- [12] Lozano, R., Canudas, C., "Passivity Based Adaptive Control for Mechanical Manipulators Using LS-Type Estimation", *IEEE Tras. Automatic Control*, Vol. 35, No. 12, Dec. 1990.
- [13] Isidori, A., "Nonlinear Control Systems", Springer-Verlag, 1989.
- [14] Tang, Y., Arteaga P., M. A., "Adaptive Control of Robot Manipulators Based on Passivity", sometido al CDC '93.
- [15] Ortega, R., Espinosa, G., "Torque Regulation of Induction Motors", *Automatica*, Vol. 29, No. 3, p.p. 621-633, 1993

- [16] Lozano, R., Brogliato, B., "Adaptive Control of Robot Manipulators with Flexible Joints", IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol. 37, No. 2, 1992.