2
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Torneos 3 y 4-dicromáticos de orden mínimo

Tesis

que para obtener el título de

matemática

presenta

Martha Gabriela Araujo Pardo

INDICE

INTRODUCCION

El objeto central de esta tesis es exponer, de una manera detallada, el artículo de Víctor Neumann-Lara "3 and 4-dichromatic tournaments of minimum order" que aparecerá proximamente en Discrete Mathematics.

En este artículo se demuestra que el mínimo orden de un torneo 3-dicromático es 7 y que el mínimo orden de un torneo 4-dicromático es 11. Se determinan así mismo los 4 torneos 3-dicromáticos de orden 7 y el único torneo 4-dicromático de orden 11.

En la tesis, se incluyen también algunos resultados acerca de los grupos de automorfismos de ciertos torneos (Torneos de Paley), de los subtorneos transitivos de un torneo y se dan cotas para el mínimo orden de un torneo 5-dicromático.

PRELIMINARES

En este capítulo daremos algunas definiciones básicas y algunas observaciones que son necesarias para el resto del trabajo, las siguientes definiciones se tomaron de [1] y [2].

Si K es un conjunto cualquiera designamos por K^2 (respectivamente: por $K^{(2)}$) al conjunto de los pares ordenados (respectivamente: pares no ordenados) de elementos, no necesariamente distintos, de K.

Una *gráfica* $G = (V, A, f)$ es un objeto matemático que consta de:

i) Un conjunto $V = V(G)$ cuyos elementos se llaman *vértices (puntos o nodos)* de G.

ii) Un conjunto $A = A(G)$, el conjunto de las *aristas ó líneas* de G.

iii) Una función $f : A(G) \longrightarrow V(G)^{(2)}$, la función de *incidencia* de G.

En este trabajo se consideran solamente gráficas finitas, es decir, gráficas con un número finito de vértices y aristas.

El número de vértices de G recibe el nombre de *orden* de G.

Si α es una arista de G y $f(\alpha) = \{u, w\}$ se dice que u y w son *los extremos o vértices terminales de* α.

Una arista cuyos extremos coinciden es un *lazo.*

Dos aristas α y α' son *paralelas* si tienen los mismos extremos, es decir, si $f(\alpha) = f(\alpha')$.

Escribiremos $\alpha \sim uv$ para indicar $f(\alpha) = \{u, v\}$.

Dos vértices u y v son adyacentes, en símbolos: $u \ ady_G \ w$, si existe una arista que los tiene por extremos.

Si P, $Q \subseteq V(G)$ y α es una arista de G con un extremo en P y otro en Q, decimos que α es una $PQ - arista$

El conjunto de las $PQ - aristas$ es el conjunto que contiene a todas las aristas que van de P a Q.

Una gráfica G es *completa* si todo par de vértices u y v en G son adyacentes.

Sean $G(V, A, f)$ y $G'(V' A' f')$ dos gráficas. Se dice que G' es *subgráfica* de G (en símbolos $G' \subseteq G$) si $V' \subseteq V$, $A' \subseteq A$ y $f(\alpha') = f(\alpha)$ para toda arista α' de G'.

Si $G = (V, A, f)$ y $G' = (V', A', f')$ y $G' \subseteq G$, se dice que G' es una subgráfica:

i) *Generadora* de G cuando $V = V'$.

ii) *Inducida* de G, en símbolos $G' \subset G$ cuando $f(\alpha) \subset v'^{(2)}$ implica que $\alpha \in A'$.

Si $G' = (V', A', f')$ es una subgráfica inducida de G diremos que V' induce G' en G.

Sea G una gráfica. Un *camino* en G es una sucesión alternante $(v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, v_{n-1}, a_n, v_n)$ de vértices y aristas de G, donde $v_0, \ v_1, \ \ldots, v_n$

Si Γ es un camino, la *longitud* de Γ, $l(\Gamma)$, es el número de aristas no necesariamente distintas que figuran en Γ.

Sea $\Gamma = (v_0, a_1, v_1, ..., v_{n-1}, a_n, v_n)$ un camino en G, diremos que Γ es un $v_0 v_n$ $-$ *camino* que une a v_0 con v_n.

Si R, $S \subseteq V(G)$, $v_0 \in R$ y $v_n \in S$ se dice también que Γ es un RS $-$ *camino.*

Un camino no nulo (que no conste de un solo vértice) cuyos extremos son iguales (respectivamente: distintos) se llama *cerrado* (resp: *abierto*).

Un camino que no repite aristas (resp: vértices) se llama *paseo* (resp: *trayectoria*). Nótese que toda trayectoria es un paseo pero no recíprocamente.

Un paseo cerrado $P = (v_0, a_1, v_1, ..., v_{n-1}, a_n, v_n)$ en el cual no hay ocurrencias repetidas de vértices salvo por v_0 y v_n se llama *ciclo.*

Haciendo un abuso de notación denotaremos en adelante un paseo (y una trayectoria) $\Gamma = (v_0, a_1, v_1, ..., v_{n-1}, a_n, v_n)$ en G unicamente por sus vértices, es decir, $\Gamma = (v_0, ..., v_n)$.

Una *digráfica* $D = (V, A, f)$ es una terna que consta de:
i) Un conjunto $V = V(D)$ cuyos miembros se llaman *vértices* de D.
ii) Un conjunto $A = A(D)$ formado por las *flechas* de D.
iii) Una función $f : A(D) \longrightarrow V(D)^2$, la función de *incidencia* de D. Si $f(\alpha) = (u, v)$ u es el *origen* de α y w es el extremo de α. Se dice que dos flechas son *paralelas* si $f(\alpha) = f(\alpha')$.

Escribiremos $\alpha \sim uv$ para indicar $f(\alpha) = (u, v)$

Si P, $Q \subseteq V$ una $PQ - flecha$ es una flecha con origen en P y extremo en Q.

Subdigráficas, caminos, paseos, trayectorias y *ciclos* en D son siempre *dirigidos*, es decir, se suponen recorridos respetando la orientación de las flechas.

Un $PQ-$ *camino* en D es un camino con origen en P y extremo en Q, etc.

Denotaremos a una subdigráfica D' en D como $D[D']$.

Si D es una digráfica, la *invalencia* o *valencia interior* (resp: la *exvalencia* o *valencia exterior*) de un vértice w en D, en símbolos: $d^-(w,D)$, (resp: $d^+(w,D)$) es el número de flechas de las cuales w es extremo (resp: origen) y $d(w,D)$ es simplemente $d^-(w,D)+d^+(w,D)$.

La *invalencia mínima* (respectivamente la *exvalencia mínima*) de una digráfica G es el mínimo número natural n tal que $d^-(w,G) \geq n$ (respectivamente $d^+(w,G) \geq n$) para todo $w \in V(G)$. Simbolicamente $\delta^-(G)$ ($\delta^+(G)$).

La *invalencia máxima* (respectivamente la *exvalencia máxima*) de una digráfica G es el máximo número natural n tal que $d^-(w,G) \leq n$ (respectivamente $d^+(w,G) \leq n$) para todo $w \in V(G)$. Simbolicamente $D^-(G)$ ($D^+(G)$).

Definimos también el conjunto de vértices que están en el interior (resp: en el exterior) de un vértice w en D, en símbolos $N^-(w,D)$ (resp: $N^+(w,D)$) y decimos que $v \in N^-(w,D)$ (resp: $v \in N^+(w,D)$) si existe $\alpha \in A(D)$ tal que $f(\alpha)=(v,w)$ (respectivamente: existe $\alpha \in A(D)$ tal que $f(\alpha)=(w,v)$).

Sean $u,\ v \in V(D)$ entonces $N^-(u,v,D)$ (resp: $N^+(u,v,D)$) es igual a $N^-(u,D) \cap N^-(v,D)$ (resp: $N^+(u,D) \cap N^+(v,D)$).

Una gráfica es *orientada* o *dirigida* si $uw \in A(D)$ implica que $wu \notin A(D)$, es decir, no tiene ciclos (dirigidos) de longitud 2.

Una gráfica G (resp: digráfica D) es *conexa* si para cualquier par de vértices en $V(G)$ (resp: $V(D)$) existe una trayectoria (resp: una trayectoria dirigida) que los une.

Una gráfica G (resp: digráfica D) es *fuertemente conexa* si para cualquier par de vértices en $V(G)$ (resp: en $V(D)$) existe un ciclo (resp: un ciclo dirigido) que los contiene.

Un *isomorfismo* f entre dos gráficas G y H es una correspondencia uno a uno entre el conjunto de sus vértices tal que f y f^{-1} preservan adyacencias; es decir que si $\alpha \in A(G)$ entonces $f(\alpha) \in A(H)$ y si $\beta \in A(H)$ entonces $f^{-1}(\beta) \in A(G)$. Además $f^{-1} \circ f$ y $f \circ f^{-1}$ son la idéntidad.

Un *automorfismo* de una gráfica G es un isomorfismo de G en si misma. De ahí cada automorfismo α de G es una permutación del conjunto de vértices V que preserva adyacencias.

Claramente el conjunto de automorfismos de G, simbolicamente $Aut(G)$ es un grupo respecto a la composición de funciones.

Sea G una digráfica, la digráfica dual de G denotada por $D(G)$ es una digráfica tal que:

i) $V(D(G)) = V(G)$

ii) $A(D(G)) = \{ij/\ ji \in A(G)\}$.

Decimos que una gráfica G es *autodual* si existe un isomorfismo α entre G y su dual.

Un *Torneo* es una gráfica orientada completa.

Denotamos T_n a un torneo de orden n

Un torneo será llamado *acíclico* si no contiene ciclos dirigidos.

Si los vértices $\{v_1, ..., v_n\}$ de un torneo T_n están ordenados de manera que $d^+(v_1, T_n) \leq d^+(v_2, T_n) \leq, ..., d^+(v_n, T_n)$ entonces la eneada: $(d^+(v_1, T_n), d^+(v_2, T_n), ..., d^+(v_n, T_n))$ recibe el nombre de *sucesión de exvalencias* de T_n.

Un T_n con sucesión de exvalencias $(0, 1, ..., n-1)$ se define como *torneo transitivo de orden n* y se denota por TT_n [6].

Observación 0.1: T_n es acíclico si y solo si $T_n \cong TT_n$

Demostración:

Si T_n es acíclico entonces $T_n \cong TT_n$:
Haremos la demostración por inducción sobre el orden de T.
Sea $n = 1$ entonces $T_1 \cong TT_1$
Sea T_n acíclica entonces existe al menos algún $v \in V(T_n)$ tal que $d^-(v, T_n) = n - 1$ y $d^+(v, T_n) = 0$ (o bien, $d^-(v, T_n) = 0$ y $d^+(v, T_n) = n - 1$).
Supongamos, sin pérdida de generalidad que para todo $v \in V(T_n)$ $d^+(v, T_n) \neq 0$.

Sea $v_0 \in V(T_n)$ entonces existe $v_1 \in V(T_n)$ tal que $v_0v_1 \in A(T_n)$.
Como $d^+(v_1, T_n) \neq 0$ existe $v_2 \in V(T_n)$ tal que $v_1v_2 \in A(T_n)$.
Seguimos con este proceso y como T_n es finito existe $v_i \in V(T_n)$ tal que $v_iv_j \in A(T_n)$ con $0 \leq j < i - 1$ y entonces se forma un ciclo, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Entonces existe $v_0 \in V(T_n)$ tal que $d^+(v_0, T_n) = 0$ y $d^-(v_0, T_n) = n-1$.
Si tomamos $T_n - \{v_0\}$ obtenemos un T_{n-1} acíclico y por hipótesis de inducción $T_{n-1} \cong TT_{n-1}$; como $T_{n-1} \cup \{v_0\} = T_n$ concluimos que $T_n \cong TT_n$.

Claramente si $T_n \cong TT_n$ entonces es acíclico. ■

Introduciremos ahora algunos conceptos de Teoría de los Números que necesitamos en este trabajo:

Sea $a \in Z$ y $m \in Z^+$ tal que $(a, m) = 1$, a recibe el nombre de *residuo cuadrático módulo* m si la congruencia $x^2 \equiv a \ (mod\ m)$ tiene una solución. Si no tiene solución entonces a se llama *no residuo cuadrático módulo* m.

Es claro que 1 es residuo cuadrático $mod\ m$ para toda m.

Es sabido que si p es primo entonces -1 es residuo cuadrático $(mod\ p)$ si y solo si p es de la forma $p = 4m + 1$ con $m \in N$.

Además si $p = 4m + 3$ primo con $m \in N$, entonces para cada $r \in Z_p$ r ó $-r$ es residuo cuadrático $(mod\ p)$ y solo uno de ellos.[3]

Definimos como ST_m a la siguiente gráfica de orden m:
El conjunto de vértices de ST_m son los enteros $(mod\ m)$ y:
$A(ST_m) = \{ij / j - i$ es un residuo cuadrático mod m $\}$.

Si p es un primo de la forma $4n + 3$ con $n \in N$ $(p \equiv 3\ (mod\ 4))$, ST_p es un torneo llamado "Torneo de Paley de orden p".
También lo escribimos como $\vec{C}_n(a_1, a_2, ..., a_m)$ donde a_i es residuo cuadrático módulo p, $i = 1, 2, ..., m$.

Por último hablaremos de la coloración de una digráfica a la que hemos nombrado dicoloración, este término fué introducido en [4]:
Una *$n-$coloración acíclica* de una digrfica D es una función:
$f : V(D) \longrightarrow I_n$ tal que $f^{-1}(i)$ induce una subdigráfica acíclica en D para cada $i \in I_n$.
Si tomamos el conjunto $\{\{f^{-1}(1)\}, \{f^{-1}(2)\}, ..., \{f^{-1}(n)\}\}$ obtenemos una partición acíclica de los vértices de D, y a cada conjunto $\{f^{-1}(i)\}$ lo llamamos la clase cromática.

El número dicromático de una digráfica D, $dc(D)$, es el mínimo natural n tal que existe una n-coloración acíclica de D.
Se dice que D es n-dicromática si $dc(D) = n$ y que es n-dicromática minimal si $dc(D) = n$ y $dc(D_0) \leq n$ para toda D_0 subdigráfica propia de D.

Observación 0.2:
i) $dc(D_1) \leq dc(D_2)$ siempre que $D_1 \subseteq D_2$
ii) Si $dc(D) \geq n$, D contiene una n-subdigráfica dicromática minimal.
iii) Si D es (n+1)-subdigráfica minimal y $uv \in A(D)$, entonces $dc(D - \{uv\}) = n$ y $f(u) = f(v)$ para toda n-coloración acíclica de $D - \{uv\}$ [4]

CAPITULO I

SUBTORNEOS ACICLICOS

En este capítulo abordaremos el problema de encontrar el número natural máximo m tal que todo torneo de orden n contenga un subtorneo acíclico de orden m.

Formalmente, sea:
$f(n) = max\{m \in \mathbf{Z} \ / \ \text{Todo } T_n \text{ contiene un } TT_m\}$.

Dado que es difícil -tal vez imposible- determinar $f(n)$ daremos una cota inferior y otra superior de $f(n)$ debidas a Stearns y a Erdös y Moser respectivamente.

PROPOSICION 1: Si n es de la forma $n = 2^k$ entonces $f(n) \geq k+1$

Demostración:

La demostración se hará por inducción sobre k.
Si $k = 1$ es obvio (contiene un TT_2 que es el mismo).

Supongamos válida la afirmación para $k = k_0$ y sea $k = k_0 + 1$.
Entonces si $v_1 \in V(T_n)$ ó $d^+(v_1, T_n) \geq 2^{k-1}$ ó $d^-(v_1, T_n) \geq 2^{k-1}$.
Supongamos que $d^+(v_1, T_n) \geq 2^{k-1}$. Por hipótesis de inducción: $N^+(v_1, T_n) \supseteq S$, donde S es un conjunto acíclico de vértices de cardinalidad k.

Entonces $S \cup \{v_1\}$es un conjunto acíclico de cardinalidad $k+1$

Por lo tanto $f(n) \geq k+1$ ■

COROLARIO: $f(n) \geq [log_2 n] + 1$ (Stearns).

Demostración:

Dada n sea k tal que: $2^k \leq n < 2^{k+1}$.
Se tiene: $k \leq log_2 n < k+1$ y, por lo tanto,
$k = [log_2 n]$

Por lo anterior $[log_2 n] + 1 \leq f(n)$ ■

OBSERVACION: En la prueba de la proposición 1 se demostró en realidad que cada vértice v de T_n con $n = 2^k$ es extremo de un subtorneo acíclico de orden $k+1$. Se sigue que si u es un vértice de un torneo de orden n, u es extremo de un subtorneo acíclico de T_n de orden $1 + [log_2 n]$.

PROPOSICION 2: $f(n) \leq [2log_2 n] + 1$. (Erdös y Moser)

Demostración:

Sea $\Gamma = \Gamma_n$ la clase de todos los torneos con vértices $\{1, 2, 3, ...n\}$, y sea Γ' la clase de todos los torneos con vértices $\{1, 2, 3, ...n\}$ que contienen un subtorneo transitivo de orden ν

Se tiene:
$\Gamma' = \bigcup_A \bigcup_\sigma \Gamma_{A,\sigma}$, donde $A \subseteq \{1, 2, ..., n\}$, $|A| = \nu$, σ es una permutación de A, y $\Gamma_{A,\sigma}$ es el conjunto de torneos T tal que $T[A]$ está generado por σ ($\sigma(i)\sigma(j) \in A(T[A])$ si y solo si $i < j$).

$T[A]$ es fijo para todo T ($T[A]$ está generado por σ).

$T \in \Gamma_{A,\sigma}$ entonces las aristas de T que no pertenecen a $T[A]$ pueden orientarse libremente.

Se sigue que: $|\Gamma_{A,\sigma}| = 2^{\binom{n}{2} - \binom{\nu}{2}}$

Por lo tanto:

$$|\Gamma'| \leq \sum_{A,\sigma} 2^{\binom{n}{2} - \binom{\nu}{2}} = \binom{n}{\nu} \nu! 2^{\binom{n}{2} - \binom{\nu}{2}}$$

$$|\Gamma'| \leq \binom{n}{\nu} \nu! 2^{\binom{n}{2} - \binom{\nu}{2}}$$

Si se tiene:

$$|\Gamma'| \leq \binom{n}{\nu} \nu! 2^{\binom{n}{2} - \binom{\nu}{2}} < 2^{\binom{n}{2}} = |\Gamma|$$

Se tendría $\Gamma - \Gamma' \neq \emptyset$. Es decir, existiría un torneo $T \in \Gamma - \Gamma'$, es decir un torneo que no contiene un subtorneo transitivo con ν vértices.

Ya que:

$$\frac{\binom{n}{\nu}\nu!}{2^{\binom{\nu}{2}}} < \frac{n^\nu}{\nu!}\frac{\nu!}{2^{\binom{\nu}{2}}} = 2^{\nu log_2 n - \binom{\nu}{2}}$$

Si se cumple: $\nu log_2 n - \binom{\nu}{2} \leq 0$, lo que equivale

a: $\nu log_2 n - \frac{\nu(\nu-1)}{2} \leq 0$,

a: $log_2 n - \frac{\nu-1}{2} \leq 0$,

Y finalmente a: $1 + 2log_2 n \leq \nu$.

Luego si: $\nu \geq 2 + [2log_2 n]$

Entonces: $\binom{n}{\nu}\nu! 2^{\binom{n}{2}-\binom{\nu}{2}} < 2^{\binom{n}{2}}$ y de ahí existe un torneo T_n que no contiene subtorneos acíclicos de orden ν.

Se sigue que: $f(n) \leq 1 + [2log_2 n]$. ■

Entonces se tiene: $[log_2 n] + 1 \leq f(n) \leq 1 + 2[log_2 n]$

Cálculo de $f(n)$ correspondientes a valores chicos de n

n	$[log_2 n]+1$	$[2log_2 n]+1$	$f(n)$
2	2	3	2
3	2	4	2
4	3	5	3
5	3	5	3
6	3	5	3
7	3	6	3
$8-11$	4	7	4*
$12-13$	4	8	4*

Para $n = 2,3,4,5$ el cálculo de $f(n)$ es trivial. Para mostrar que $f(6) = 3$ hay que exhibir un T_6 que no contenga un TT_4, análogamente para mostrar que $f(7) = 3$.

Se sabe [6] que $f(n) = 4$ para $8 \leq n \leq 13$. También en [6] se prueba que existe un único torneo, salvo isomorfismo, ST_{13} de orden 13 que no contiene un TT_5.

Este torneo está definido como sigue:

$V(ST_{13}) = Z_{13}$ y

$A(ST_{13}) = \{\vec{ij} / j - i \equiv 1,2,3,5,6 \text{ ó } 9 \ (mod\ 13)\}$

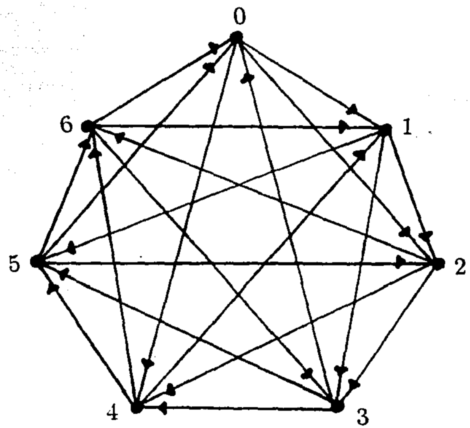
TEOREMA 1:

(i) ST_7 es el único torneo de orden 7 (salvo isomorfismo) que no contiene un TT_4.

(ii) ST_6 es el único torneo de orden 6 (salvo isomorfismo) que no contiene un TT_4.

Demostración:

(i) ST_7:
$V(ST_7) = Z_7$
$A(ST_7) = \{\vec{ij} / \ j - i = 1, 2, 4 \ mod \ 7\}$



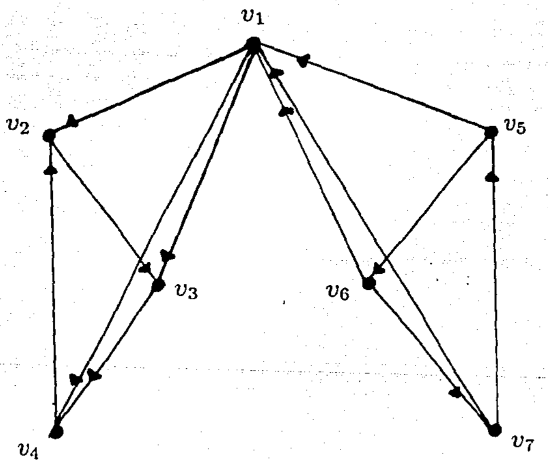
Este torneo no contiene un TT_4 ya que:
Sea $x \in V(ST_7)$ entonces $d^+(x, ST_7) = 3$ y claramente
$N^+(x, ST_7) = \{x+1, x+2, x+4\}$ induce un ciclo.

Sea T_7 que no contiene un TT_4.
Probaremos que T_7 es regular o lo que es equivalente $D^+(T_7) = 3$.

Supongamos $D^+(T_7) > 3$ y sea $x \in V(T_7)$ tal que $d^+(x, T_7) = D^+(T_7)$. Entonces $N(x, T_7)$ induce un TT_3 que junto con x dá un TT_4.

Así T_7 es regular y además $N(x, T_7)$ induce un ciclo triángular, pues de otro modo también T_7 contendría un TT_4.

Sea $v_1 \in V(T_7)$ y sea:
$N^+(v_1, T_7) = \{v_2, v_3, v_4\}$, $\quad N^-(v_1, T_7) = \{v_5, v_6, v_7\}$ tal que $v_2\vec{v}_3$, $v_3\vec{v}_4$, $v_4\vec{v}_2$, $v_5\vec{v}_6$, $v_6\vec{v}_7$, $v_7\vec{v}_5 \in A(T_7)$



Ahora, $|N^+(v_1, w)| = 1$ para todo $w \in N^-(v_1)$ ya que:

$N^+(w, T_7) = \{v_1, u, z\}$ con $u \in N^-(v_1)$ y $z \in N^+(v_1)$.

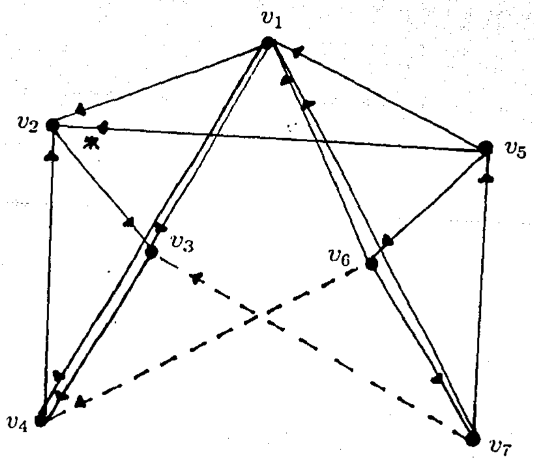
Podemos asumir, sin pérdida de generalidad que $v_5\vec{v}_2(*)$ es un arco de T_7.

Como $N^+(w_1, w_2, v_1) = \emptyset$ para $w_1 \neq w_2$ en $N^-(v_1)$ entonces se dá alguna de las dos, es decir, ó $v_6\vec{v}_3$ ó $v_6\vec{v}_4 \in A(T_7)$

Si $v_6\vec{v}_3 \in A(T_7)$ entonces $v_7\vec{v}_4 \in A(T_7)$ y:

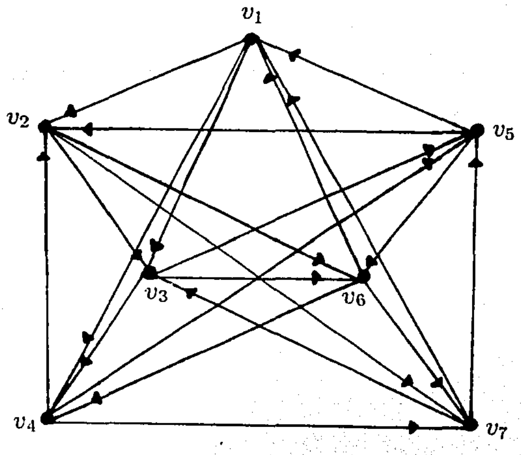
$N^+(v_4, T_7) = \{v_2, v_5, v_6\} \cong TT_3$ lo cual es una contradicción ya que $v_2\vec{v}_6 \in A(T_7)$

Por lo tanto $v_6\vec{v}_4 \in A(T_7)$ y de ahí $v_7\vec{v}_3 \in A(T_7)$



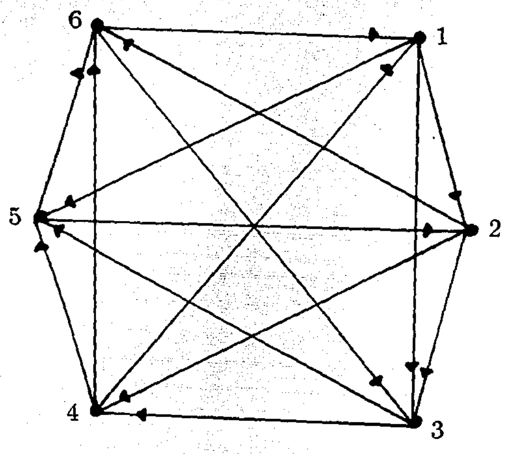
Así $v_2\vec{v}_6$, $v_2\vec{v}_7$, $v_3\vec{v}_5$, $v_3\vec{v}_6$, $v_4\vec{v}_5$, $v_4\vec{v}_7 \in A(T_7)$

En consecuencia un T_7 que no contiene un TT_4 está determinado de manera única. ■



Haciendo una identificación $\alpha : V(T_7) \longrightarrow I_6$ de la siguiente manera:
$\alpha(v_1) = 0$
$\alpha(v_2) = 1$
$\alpha(v_3) = 2$
$\alpha(v_4) = 4$
$\alpha(v_5) = 6$
$\alpha(v_6) = 3$
$\alpha(v_7) = 5$
α es un isomorfismo entre T_7 y ST_7

(ii) Si tomamos $ST_7 - \{0\} = ST_6$, ST_6 no contiene un TT_4.



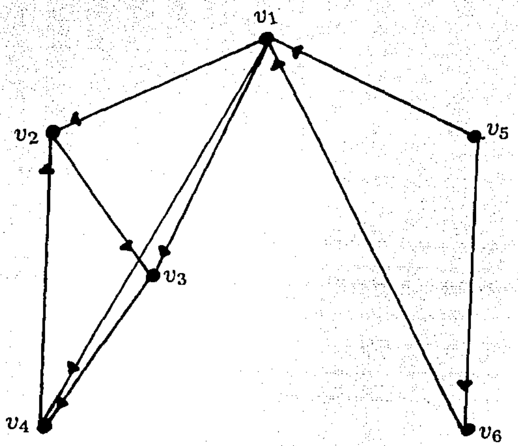
Sea T_6 que no contiene un TT_4, probaremos que ST_6 tiene tres vértices de exvalencia dos y tres vértices de exvalencia tres.

Supongamos $D^+(T_6) > 3$ y sea $x \in V(T_6)$ tal que $d^+(x, T_6) = D^+(T_6)$ entonces $N^+(x, T_6)$ induce un TT_3 y junto con x dá un TT_4. Así $D^+(T_6) = 3$.

Entonces obtenemos tres vértices de exvalencia tres y los otros tres de exvalencia dos.
Además, si $x \in V(T_6)$ y $d^+(x, T_6) = 3$ entonces $N^+(x, T_7)$ induce un triángulo cíclico pues de otro modo también T_6 contendría un TT_4.

Sea $v_1 \in V(T_6)$ tal que $d^+(v_1, T_6) = 3$.

Sea $N^+(v_1, T_6) = \{v_2, v_3, v_4\}$ y $N^-(v_1, T_6) = \{v_5, v_6\}$. tal que $v_2\vec{v}_3$, $v_3\vec{v}_4$, $v_4\vec{v}_2$, $v_5\vec{v}_6 \in A(T_6)$



$|N^+(v_1, v_i)| \leq 1$ para $i = 5, 6$ ya que, en otro caso v_1, v_i y los otro dos vértices que están en $N^+(v_1, v_i)$ formarían un TT_4 en T_6

También $|N^+(v_1, v_i)| \geq 1$ para $i = 5, 6$ ya que:
Si $i = 6$ y $|N^+(v_1, v_6)| = 0$ entonces $d^+(v_6) = 1$ lo cual es imposible porque $d^-(v_6) = 4$ y se formaría un TT_4 (ya que todo T_4 contiene un TT_3)

Por lo tanto $|N^+(v_1, v_6)| \geq 1$

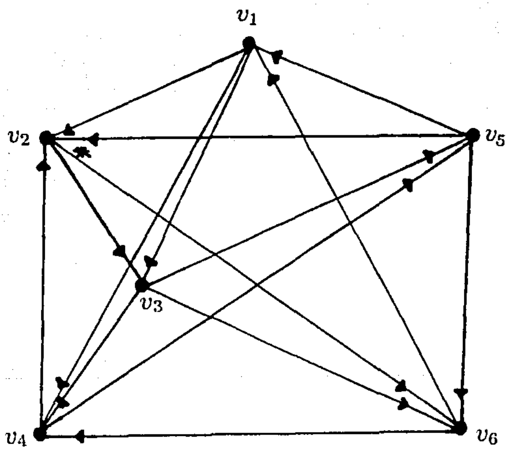
Ahora si $i = 5$ y $|N^+(v_1, v_5)| = 0$ entonces $d^+(v_5) = 2$, y $d^+(v_6) = 2$ (por lo anterior) y de ahí existen dos vértices en el exterior de v_1 que tienen exgrado tres, pero estos dos vértices junto con v_5 y v_6 forman un TT_4 en T_6

Por lo tanto $|N^+(v_1, v_i)| = 1$ para $i = 5, 6$
Podemos asumir que $v_5\vec{v}_2$ (*) es un arco en T_6

Si $v_6\vec{v}_2 \in A(T_6)$ entonces $\{v_5, v_6, v_1, v_2\}$ induce un TT_4
Si $v_6\vec{v}_3 \in A(T_6)$ entonces $\{v_2, v_4, v_5, v_6\}$ induce un TT_4

Entonces $v_6\vec{v}_4 \in A(T_6)$
Esto determina los demás arcos: $v_3\vec{v}_5$, $v_4\vec{v}_5$, $v_3\vec{v}_6$, $v_2\vec{v}_6$.

De esta forma un T_6 que no contiene un TT_4 está determinado de manera única. ■



Si identificamos mediante:
$\alpha : V(T_6) \longrightarrow I_6 - \{0\}$ de la siguiente manera:
$\alpha(v_1) = 1$
$\alpha(v_2) = 5$
$\alpha(v_3) = 2$

$\alpha(v_4) = 3$
$\alpha(v_5) = 4$
$\alpha(v_6) = 6$
α es un isomorfismo entre T_6 y ST_6

CAPITULO II

TORNEOS 3-DICROMATICOS DE ORDEN MINIMO

En el capítulo anterior demostramos que el Torneo de Paley de orden 7 es 3-dicromático.

En este capítulo, mostraremos que el orden mínimo de un torneo 3-dicromático es 7 y exhibiremos a los únicos cuatro torneos 3-dicromáticos de orden 7, salvo isomosrfismo.

Proposición 2.1: Para todo T_6, $dc(T_6) \leq 2$. Además $dc(ST_6) = 2$.

Demostración:

i) Si $T_6 \ncong ST_6$ entonces T_6 contiene un conjunto acíclico de vértices con cuatro elementos S, entonces:

$\{S, V(T_6) - S\}$ es una partición en conjuntos acíclicos, y cada elemento de la partición induce una clase monocromática, de ahí $dc(T_6) \leq 2$. ■

ii) Si $T_6 \cong ST_6$. Sabemos que $ST_6 = ST_7 - \{0\}$, entonces $\{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}\}$ es una partición acíclica de ST_6, de ahí $dc(ST_6) = 2$. ■

Proposición 2.2: Para todo T_7, $dc(T_7) \leq 3$. Además $dc(ST_7) = 3$

Demostración:

i) Si $T_7 \ncong ST_7$ entonces T_7 contiene un conjunto acíclico de de cardinalidad cuatro, S.

$T_7 - S$ es un torneo de orden 3 entonces $dc(T_7 - S) \leq 2$, de ahí $dc(T_7) \leq 3$. ■

ii) Si $T_7 \cong ST_7$.
$dc(ST_7) \geq 2$ ya que $ST_7 - \{0\} \cong ST_6$ y $dc(ST_6) = 2$.

Probaremos que $dc(ST_7) = 3$. Si fuera $dc(ST_7) = 2$ habría una partición de $V(ST_7)$ en dos subconjuntos acíclicos y uno de ellos tendría cardinal al menos 4, entonces ST_7 contendría un TT_4 lo que es falso. Entonces $dc(ST_7) = 3$. ■

Así deducimos que:
El orden mínimo de un torneo 3-dicromático es 7

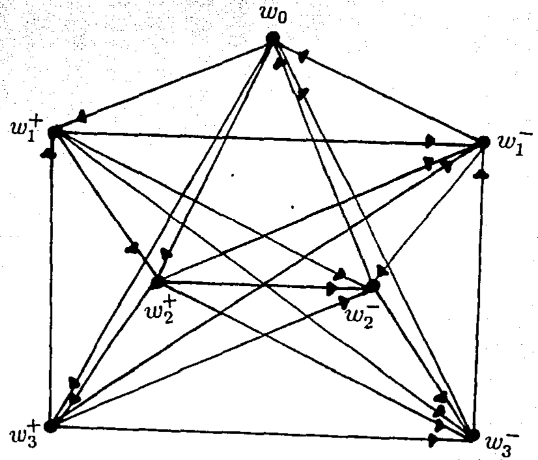
Los torneos W, W_0 y W_1:

Definimos el torneo W de la siguiente manera:

$V(W) = \{w_0, w_1^-, w_2^-, w_3^-, w_1^+, w_2^+, w_3^+\}$

$A(W) = \{w_i^+ w_j^-; 1 \leq i, j \leq 3\} \cup \{w_0 w_i^+; i = 1, 2, 3\} \cup \{w_j^- w_0; j = 1, 2, 3\} \cup \{w_i^+ w_{i+1}^+; i = 1, 2, 3\} \cup \{w_j^- w_{j+1}^-; j = 1, 2, 3\}$ (la suma es tomada mod 3)

W :



Observamos que si hacemos una partición del conjunto de vértices de W, $\{V_1, V_2, V_3\}$ con:
$V_1 = \{w_0\}$
$V_2 = \{w_1^+, w_2^+, w_3^+\}$
$V_3 = \{w_1^-, w_2^-, w_3^-\}$

Entonces el conjunto de flechas en W es la unión de los conjuntos: $\{V_1V_2 - flechas\}$, $\{V_3V_1 - flechas\}$ y $\{V_2V_3 - flechas\}$.

Además W contiene algún subtorneo isomorfo a un TT_4, por ejemplo $(w_1^+, w_2^+, w_1^-, w_2^-)$.

El número dicromático de W es diferente de uno ya que no es acíclica.

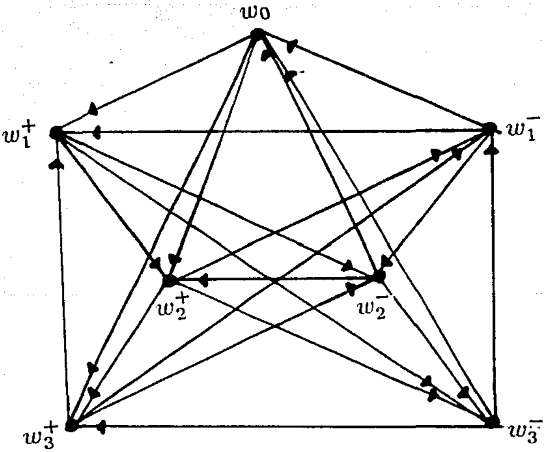
Supongamos que $dc(W) = 2$ y sea $f : V(W) \longrightarrow I_2$ una 2-coloración acíclica de W en la cual ni $\{w_1^-, w_2^-, w_3^-\}$ ni $\{w_1^+, w_2^+, w_3^+\}$ son monocromáticos, entonces existen dos vértices w_i^-, w_j^+ tales que $f(w_i^-) = f(w_j^+) = f(w_0)$ y (w_i^-, w_0, w_j^+) es un ciclo triángular monocromático.

Por lo tanto el número dicromático de W es tres.

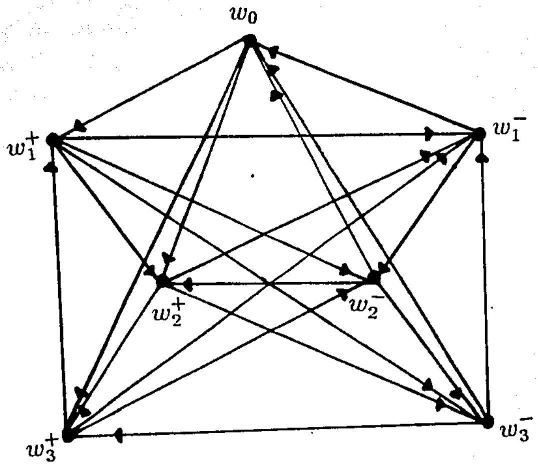
Definimos ahora:

$W_0 = W + \{w_1^- w_1^+,\ w_2^- w_2^+,\ w_3^- w_3^+\} - \ \{w_1^+ w_1^-,\ w_2^+ w_2^-,\ w_3^+ w_3^-\}$ y
$W_1 = W + \{w_2^- w_2^+,\ w_3^- w_3^+\} - \ \{w_2^+ w_2^-,\ w_3^+ w_3^-\}$

Además $W_1 = W_0 + w_1^+ w_1^- - w_1^- w_1^+$
W_0:



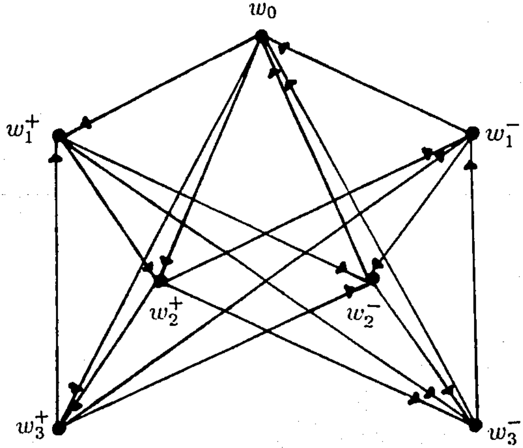
W_1:



Observemos que W_0 y W_1 contienen un subtorneo isomorfo a TT_4, por ejemplo $(w_1^+, w_2^+, w_2^-, w_3^-)$ que se encuentra en los dos.

Definimos $W' = W - \{w_1^+ w_1^-, w_2^+ w_2^-, w_3^+ w_3^-\}$

W' :



Claramente $W_0, W_1 \supseteq W'$. Probaremos que el número dicromático de

W_0 y de W_1 es tres.

$dc(W') \neq 1$ ya que W' no es aciclica.

ea $f : V(W') \longrightarrow I_2$ una 2-coloración de W' en la cual ni $\{w_1^+, w_2^+, w_3^+\}$ ni $\{w_1^-, w_2^-, w_3^-\}$ son monocromáticos.

Podemos suponer que $f(w_0) = 0$. Si w_i^- y w_j^+ con $i \neq j$ son dos vértices tales que $f(w_i^-) = f(w_j^+) = 0$, entonces (w_i^-, w_0, w_j^+) es un ciclo triángular monocromático; de ahí existe i fijo tal que $f(w_j^-) = f(w_j^+) = 1$ para todo $j \neq i$ y $f(w_i^-) = f(w_i^+) = 0$.

Pero $\{w_j^-, w_j^+;\ j \neq i\}$ contiene un ciclo triangular (monocromático) en $W_0 - w_1^- w_1^+ \supseteq W_0,\ W_1$.

Mas claramente:
Si $i = 1$ se forman los ciclos (w_2^+, w_3^+, w_2^-) y (w_2^+, w_3^-, w_2^+).
Si $i = 2$ se forma el ciclo (w_1^+, w_3^-, w_3^+).
Si $i = 3$ se forma el ciclo (w_1^-, w_2^-, w_2^+).

Entonces el número dicromatico de W_0 y de W_1 es tres.

Teorema 2.3: ST_7, W, W_0 y W_1 son torneos 3-dicromáticos de orden 7 mutuamente no isomorfos.

Demostración:

ST_7 no es isomorfo a ninguno de los otros tres ya que no contiene ningún subtorneo isomorfo a TT_4.

W_0 es un torneo regular mientras que:
En W: $d^+(w_0, W) = 3$, $d^+(w_i^-, W) = 4$ y $d^+(w_j^+, W) = 2$.

Y en W_0: $d^+(w_0, W_0) = 3$, $d^+(w_1^-, W_0) = 2$, $d^+(w_1^+, W_0) = 4$ y $d^+(z, W_0) = 3$ para todo $z \neq w_1^+, w_1^-$.

Entonces W, W_0 y W_1 no son mutuamente isomorfos. ■

Observamos que W, W_0 y W_1 tienen un único vértice, w_0 para el cual sus dos semi-vecindades son ciclos triangulares. Por esta razón llamaremos a w_0 el **vértice especial** de estos torneos.

En cada caso el grupo de automorfismos correspondiente fija a w_0, además hay exactamente tres (dos) $N^-(w_0, W_0)-N^+(w_0, W_0)$ flechas en W_0 (respectivamente en W_1) que son independientes, es decir que no coinciden en ningún vértice.

En el apéndice II veremos que:
$Aut(ST_7) = \{\psi_{ab};\ a \in \{1,2,4\}, b \in Z_7\}$, donde $\psi_{ab}(x) = ax + b$.

Definimos $\sigma_{rs} : V(W) \longrightarrow V(W)$ para $0 \leq r, s \leq 3$ como:
$\sigma_{rs}(w_0) = w_0$
$\sigma_{rs}(w_i^-) = w_{i+r}^-$
$\sigma_{rs}(w_i)^+ = w_{i+s}^+$

En particular σ_{00} es la idéntidad.

Probaremos que:
(i) $Aut(W) = \{\sigma_{rs}; 0 \leq r, s \leq 3\}$
(ii) $Aut(W_0) = \{\sigma_{rr}; 0 \leq r \leq 3\}$
(iii) $Aut(W_1) = \{\sigma_{00}\}$
(iv) ST_7, W, W_0 y W_1 son torneos autoduales.
$\{\sigma_{rs}; 0 \leq r, s \leq 3\}$ es un grupo de automorfismos ya que:

i) Es cerrado bajo la composición y es un automorfismo:
$\sigma_{rs} \circ \sigma_{r's'}(w_0) = w_0 = \sigma_{(r+r')+(s+s')}(w_0)$
$\sigma_{rs} \circ \sigma_{r's'}(w_i^-) = \sigma_{rs}(w_{i+r'}^-) = w_{i+r'+r}^- = \sigma_{(r+r')(s+s')}(w_i^-)$.
$\sigma_{rs} \circ \sigma_{r's'}(w_j^+) = \sigma_{rs}(w_{j+s'}^+) = w_{j+s'+s}^+ = \sigma_{(r+r')(s+s')}(w_j^+)$.
De ahí $\sigma_{rs} \circ \sigma_{r's'} \in \{\sigma_{rs}; 0 \leq r, s \leq 3\}$ y además:
$\sigma_{rs} \circ \sigma_{r's'} = \sigma_{(r+r')+(s+s')}$

Como es un conjunto finito entonces es un grupo.

Ahora probaremos que es automosfismo:
$\sigma_{rs}(w_0) = w_0$
$N^+(w_0, W)$ y $N^-(w_0, W)$ inducen ciclos triangulares ajenos en W, $\sigma_{rs}(\{N^+(w_0, W)\}) = N^+(w_0, W)$ y si $w_i^+ w_{i+1}^+ \in A(W)$ entonces:
$\sigma_{rs}(w_i^+)\sigma_{rs}(w_{i+1}^+) = w_{i+s}^+ w_{i+s+1}^+ \in A(W)$
Analogamente para $N^-(w_0, W)$.

Ahora $w_i^+ w_j^- \in A(W)$ para todo $1 \leq i, j \leq 3$ $\sigma_{rs}(w_i^+)\sigma_{rs}(w_j^-) = w_{i+s}^+ w_{j+r}^- \in A(W)$
Entonces $\{\sigma_{rs}/0 \leq r, s \leq 3\} \subseteq Aut(W)$

Ahora probaremos la otra implicación:
Sea $\alpha \in Aut(W)$ entonces $\alpha(w_0) = w_0$.
Como $d^+(w_i^+, W) = 4$ y $d^-(w_i^-, W) = 2$ para toda $1 \leq i \leq 3$ entonces $\alpha(w_i^+) \neq w_j^-$ para $1 \leq i, j \leq 3$

Si $\alpha(w_i^+) = w_{i+r}^+$; $1 \leq i, r \leq 3$ (tomando la suma mod 3); entonces $\alpha(w_{i+1}^+) = w_{i+r+1}^+$ y $\alpha(w_{i+2}^+) = w_{i+r+2}^+$.

Analogamente para $\{w_j^- \ /1 \leq j \leq 3\}$.

De ahí $\alpha(w_i^+) = w_{i+r}^+$ y $\alpha(w_j^-) = w_{j+s}^-$ para
$1 \leq i, j \leq 3$ y $0 \leq r, s \leq 3$; la suma tomada mod 3.

Entonces $Aut(W) = \{\sigma_{rs}/0 \leq i, j \leq 3\}$.

ii) $\{\sigma_{rr}/0 \leq r \leq 3\}$ es un subgrupo de $\{\sigma_{rs}/0 \leq r, s \leq 3\}$ y contiene a la idéntidad, por lo tanto es un grupo.

$\sigma_{rr}(w_0) = w_0$; como $\{\sigma_{rr}/0 \leq r \leq 3\} \in \{\sigma_{rs}/0 \leq r, s \leq 3\}$ entonces manda los ciclos triangulares ajenos $N^+(w_0, W_0)$ y $N^-(w_0, W_0)$ en ellos mismos.

Si $w_i^+ w_j^- \in A(W_0)$ entonces $i \neq j$,
$\sigma_{rr}(w_i^+)\sigma_r r(w_j^-) = w_{i+r}^+ w_{j+r}^- \in A(W_0)$ ya que $i + r \neq j + r$.

Si $w_i^- w_j^+ \in A(W_0)$ entonces $i = j$;
$\sigma_{rr}(w_i^-)\sigma_{rr}(w_j^+) = w_{i+r}^- w_{j+r}^+ \in A(W_0)$ ya que $i + r = j + r$; entonces $\{\sigma_{rr}/0 \leq r \leq 3\} \subseteq Aut(W_0)$

Demostraremos ahora: $Aut(W_0) \subseteq \{\sigma_{rr}/0 \leq r \leq 3\}$

Sea $\alpha \in Aut(W_0)$ $\alpha(w_0) = w_0$ ya que w_0 es el vértice especial.

$\alpha(w_j^+) \neq w_i^-$ para $1 \leq i, j \leq 3$ ya que $N^+(w_j^+, W_0)$ induce un TT_3 para todo $1 \leq j \leq 3$ mientras que $N^+(w_i^-, W_0)$ induce un $\vec{C_3}$ para todo $0 \leq i \leq 3$

Sea $\alpha(w_i^+) = w_{i+r}^+$ entonces $\alpha(w_{i+s}^+) = w_{i+s+r}^+$ la suma tomada $(mod\,3)$. Analogamente para $\{w_j^-/1 \leq j \leq 3\}$.

Si $w_i^- w_j^+ \in A(W_0)$ entonces $i = j$.
Si α es automosfismo; $\alpha(w_i^-)\alpha(w_j^+) = w_{i+r}^- w_{j+s}^+ \in A(W_0)$ para $0 \leq r, s \leq 3$ y la suma tomada $(mod 3)$, entonces $r = s$.

Por lo tanto $\alpha \in \{\sigma_{rr}/0 \leq r \leq 3\}$
Es decir, $A(W_0) = \{\sigma_{rr}/0 \leq r \leq 3\}$

iii) Ahora probaremos que $Aut(W_1) = \{\sigma_{00}\}$
$\sigma_{00} \subseteq Aut(W_1)$ porque es la idéntidad.

Sea $\alpha \in Aut(W_1)$, entonces $\alpha(w_0) = w_0$ por ser w_0 el vértice especial. Sabemos que: $d^+(w_1^+, W_1) = 4$; $d^+(w_1^-, W_1) = 2$ y $d^+(z, W_1) = 3$ para $z = w_i^+, w_j^-$ con $2 \leq i, j \leq 3$.

Entonces $\alpha(w_1^+) = w_1^+$ y $\alpha(w_1^-) = w_1^-$.

Además $\alpha(w_i^+) \neq w_j^-$ para $2 \leq i, j \leq 3$, ya que $N^+(w_i^+, W_1)$ induce un TT_3 mientras que $N^+(w_j^-, W_1)$ induce un $\vec{C_3}$.

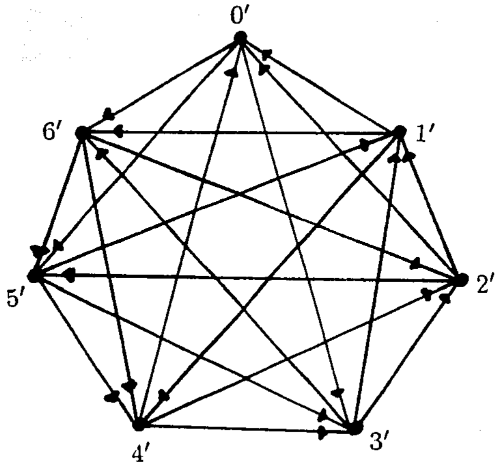
Entonces $\alpha(w_i^+) = w_j^+$ para $2 \leq i, j \leq 3$ pero $\alpha(w_i^+) \neq w_j^+$ para $i \neq j$ porque α fija w_1^+ y si $w_1^+ \in N^+(w_i^+, W_1)$ entonces $w_1^+ \in N^-(w_j^+, W_1)$

para $2 \leq i, j \leq 3 \quad i \neq j$.

De ahí $\alpha(w_i^+) = w_i^+$ y analogamente $\alpha(w_j^-) = w_j^-$ para $1 \leq i, j \leq 3$.
Así $\alpha \equiv \sigma_{00}$

Sea ST_7 y su dual, $D(ST_7)$:

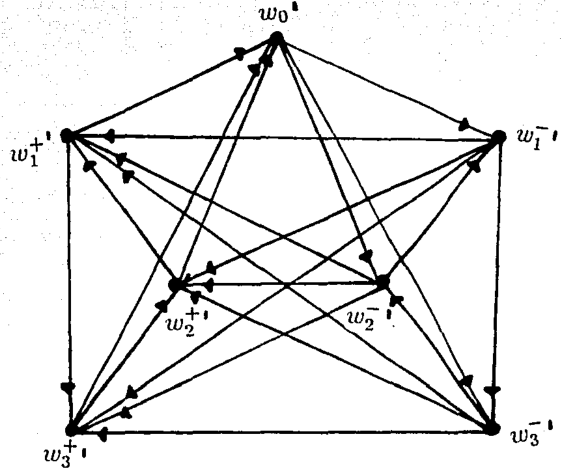
a) $D(ST_7)$:



Si definimos $\alpha : V(ST_7) \longrightarrow V(D(ST_7))$ tal que:
$\alpha(0) = 0'$
$\alpha(1) = 6'$
$\alpha(2) = 5'$
$\alpha(3) = 4'$
$\alpha(4) = 3'$
$\alpha(5) = 2'$
$\alpha(6) = 1'$

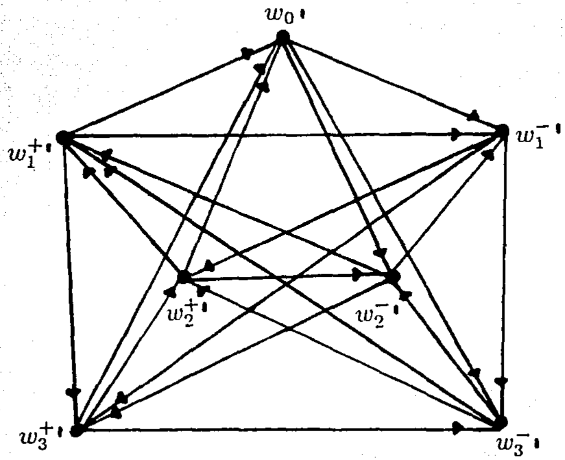
α es un isomorfismo entre ST_7 y $D(ST_7)$ y entonces ST_7 es autodual.

b) $D(W)$:



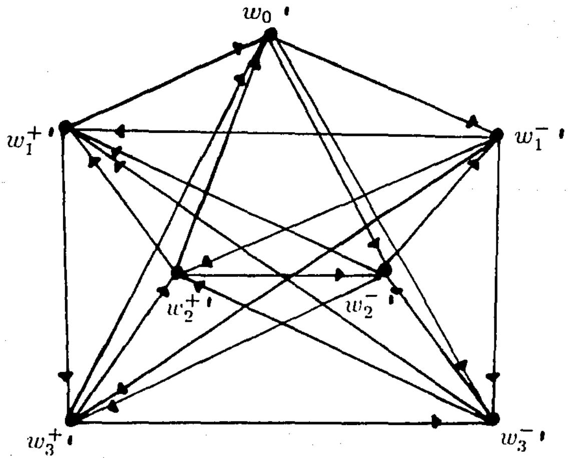
Si definimos $\beta : V(W) \longrightarrow V(D(W))$ tal que:
$\beta(w_0) = w_0'$
$\beta(w_1^+) = w_1^{-\prime}$
$\beta(w_2^+) = w_3^{-\prime}$
$\beta(w_3^+) = w_2^{-\prime}$
$\beta(w_1^-) = w_1^{+\prime}$
$\beta(w_2^-) = w_3^{+\prime}$
$\beta(w_3^-) = w_2^{+\prime}$
β es un isomorfismo entre W y $D(W)$ y entonces W es autodual.

c) $D(W_0)$:



Si definimos $\beta : V(W_0) \longrightarrow V(D(W_0))$ como en W obtenemos un isomorfismo entre W_0 y su dual y entonces W_0 es autodual.

d) $D(W_1)$:



$\beta : V(W_1) \longrightarrow V(D(W_1))$ definido como antes también es un isomor-

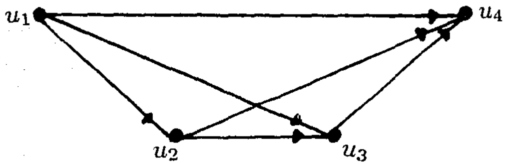
fismo entre W_1 y su dual y entonces W_1 es autodual.
Ahora podemos probar el siguiente:

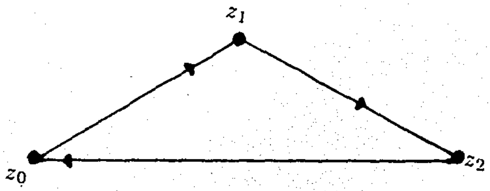
Teorema 2.4: ST_7, W, W_0 y W_1 son, salvo isomosfismo, los únicos torneos 3-dicromáticos de orden 7.

Demostración:

Sea T_7 un torneo 3-dicromático de orden 7. Consideremos tres casos diferentes:
Caso 1) T_7 no contiene un subtorneo transitivo de orden 4. Entonces $T_7 \cong ST_7$ ■

Caso 2) T_7 es regular y contiene un subtorneo transitivo de orden 4.
Sea $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \subseteq V(T_7)$ un conjunto que induce un TT_4 y suponemos que $u_i u_j \in A(T_7)$ para $1 \leq i < j \leq 4$.
Sea $R = \{z_0, z_1, z_2\} = V(T_7) - U$.
Claramente $T_7[R] \cong \vec{C_3}$ ya que T_7 es 3-dicromático, podemos asumir que $z_i z_{i+1} \in A(T_7)$ para $i \in \{0, 1, 2\}$ (la suma se toma mod 3).



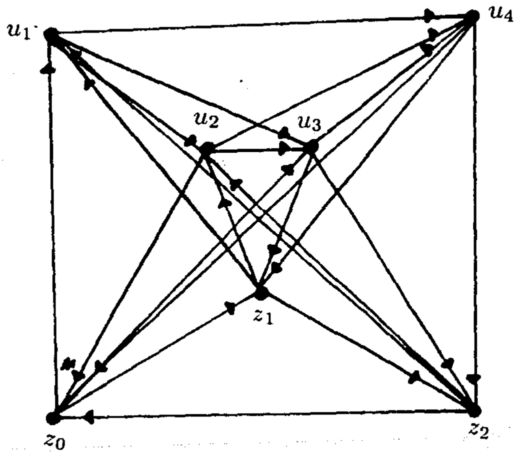


Como T_7 es regular $z_i u_1,\ u_4 z_i \in A(T_7)$ para $i \in \{0, 1, 2\}$.

Además exite una única $u_2 R - flecha$.
Podemos asumir que $u_2 z_0 \in A(T_7)$ (*) y de ahí: $z_1 u_2,\ z_2 u_2,\ z_0 u_3 \in A(T_7)$.

Entonces $u_3 z_1,\ u_3 z_2 \in A(T_7)$.

De esta forma T_7 queda determinado salvo isomorfismo y como W_0 satisface las condiciones $W_0 \cong T_7$. ■



Damos $\alpha : V(T_7) \longrightarrow V(W_0)$ un isomorfismo definido por:
$\alpha(z_0) = w_0$
$\alpha(z_1) = w_2^+$
$\alpha(z_2) = w_3^-$
$\alpha(u_1) = w_3^+$

$\alpha(u_2) = w_1^-$
$\alpha(u_3) = w_1^+$
$\alpha(u_4) = w_2^-$

Caso 3) T_7 no es regular y contiene un subtorneo transitivo de orden cuatro.

Afirmamos que $\delta^+(T_7) = 2$, ya que:
Si $\delta^+(T_7) = 0$ y $z \in V(T_7)$ tal que $d^+(z, T_7) = \delta^+(T_7)$.

Sea $W = T_7 - \{z\}$ entonces $dc(W) \leq 2$; como $d^+(z, T_7) = 0$ por el vértice z no pasa ningún ciclo de T_7 entonces podemos extender la coloración de W a T_7, lo cual es una contradicción.

Si $\delta^+(T_7) = 1$ y $z \in V(T_7)$ tal que $d^+(z, T_7) = \delta^+(T_7)$.

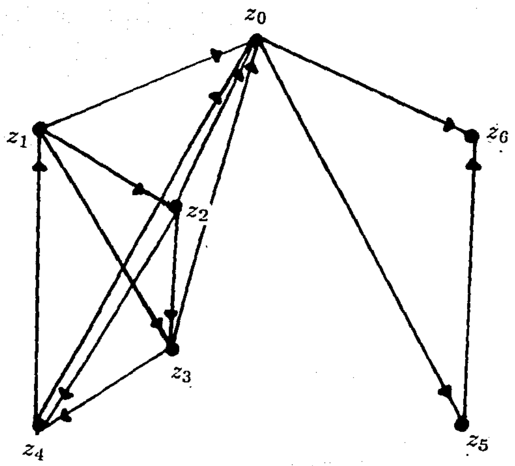
Sea $W = T_7 - \{z\}$ entonces $dc(W) = 2$; sea $v \in V(W)$ tal que $zv \in A(T_7)$ y sea $f : V(W) \longrightarrow \{0, 1\}$ una buena coloración de W tal que $f(v) = 0$, definimos $f(z) = 1$, sabemos que, todo ciclo en T_7 que contenga a z contiene también a v, de ahí $f : V(T_7) \longrightarrow \{0, 1\}$ es una buena coloración para T_7 lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $\delta^+(T_7) \geq 2$ y como T_7 no es regular $\delta^+(T_7) = 2$

Sea $z_0 \in V(T_7)$ tal que $d^+(z_0, T_7) = \delta^+(T_7)$ entonces $N^-(z_0, T_7)$ no es aciclíco ya que, en otro caso T_7 contendría un TT_5 y entonces $dc(T_7) = 2$ lo cual contradice la hipótesis.
Escribimos $N^-(z_0, T_7) = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ y $N^+(z_0, T_7) = \{z_5, z_6\}$ y consideramos dos subcasos:

i) $N^-(z_0, T_7)$ es fuertemente conexa.

Podemos asumir que $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_1)$ es un ciclo dirigido en $N^-(z_0, T_7)$ y que $z_1 z_3,\ z_2 z_4 \in A(T_7)$. Además $z_5 z_6 \in A(T_7)$

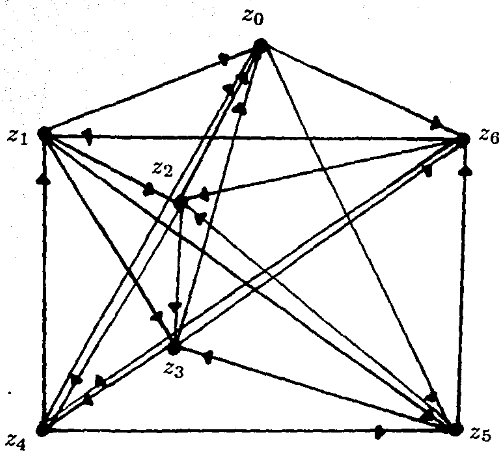


Como $\{z_0, z_2, z_3, z_4\}$ induce un torneo acíclico entonces (z_1, z_5, z_6) es un ciclo triangular, analogamente $\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ induce un torneo acíclico de ahí (z_4, z_5, z_6) es un ciclo triangular.
Por lo tanto $z_1z_5,\ z_6z_1,\ z_4z_5,\ z_6z_4 \in A(T_7)$.

Ahora $\{z_0, z_1, z_4, z_5\}$ también induce un torneo acíclico entonces (z_2, z_3, z_6) es un ciclo triangular, $z_3z_6,\ z_6z_2 \in A(T_7)$.

Como $\{z_2, z_4, z_6\}$ induce un TT_3 entonces $\{z_0, z_1, z_3, z_5\}$ no puede inducir un TT_4, por lo tanto $z_5z_3 \in A(T_7)$.

Analogamente $\{z_3, z_4, z_6\}$ induce un TT_4 entonces $\{z_0, z_1, z_2, z_5\}$ inducir un TT_3, de ahí $z_5z_2 \in A(T_7)$.



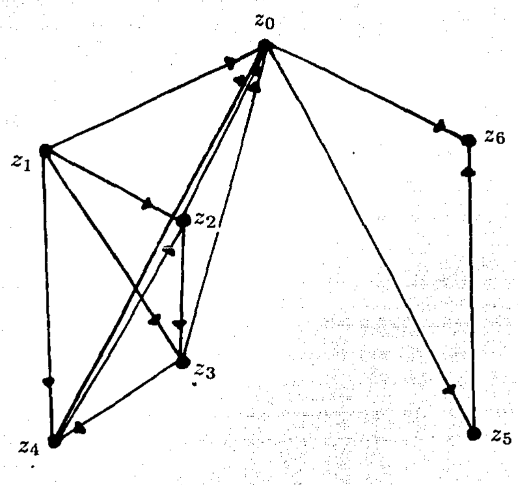
Entonces T_7 está determinado salvo isomorfismo y como W_1 satisface las condiciones $T_7 \cong W_1$. ■

Sea $\alpha : V(T_7) \longrightarrow V(W_1)$ un isomorfismo definido por:

$\alpha(z_0) = w_1^-$
$\alpha(z_1) = w_1^+$
$\alpha(z_2) = w_2^+$
$\alpha(z_3) = w_3^-$
$\alpha(z_4) = w_3^+$
$\alpha(z_5) = w_2^-$
$\alpha(z_6) = w_0$

ii) $N^-(z_0, T_7)$ no es fuertemente conexa.

Podemos asumir que z_1 es una fuente o un pozo en $N^-(z_0, T_7)$, que $\{z_2, z_3, z_4\}$ es un ciclo triangular dirigido y que $z_5 z_6 \in A(T_7)$

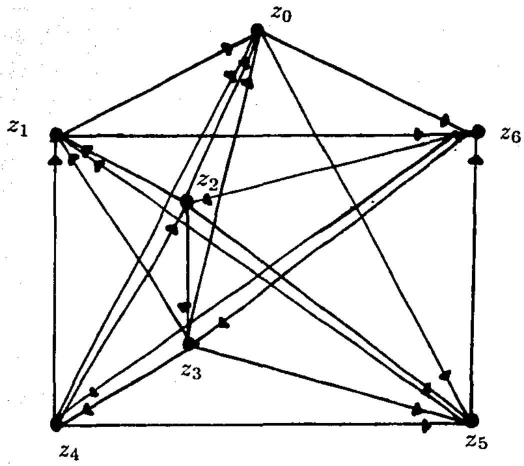


Como $N^-(z_0, T_7) \cup \{z_0\} - z_i$ para $i = 2, 3, 4$ es acíclica entonces $\{z_i, z_5, z_6\}$ es un ciclo triangular, de ahí $z_i z_5$, $z_6 z_i \in A(T_7)$ para $i = 2, 3, 4$.

Si z_1 es una fuente de $N^-(z_0, T_7)$ entonces $\{\{z_1, z_3, z_4, z_6\}, \{z_0, z_2, z_5\}\}$ sería una partición acíclica de $V(T_7)$
Entonces z_1 es un pozo, $z_i z_1 \in A(T_7)$ para $i = 2, 3, 4$.

Si $z_6 z_1 \in A(T_7)$ entonces $\{\{z_1, z_3, z_4, z_6\}, \{z_0, z_2, z_5\}\}$ es una partición acíclica de $V(T_7)$, por lo tanto $z_1 z_6 \in A(T_7)$.

Además $z_5 z_1 \in A(T_7)$ ya que de otra manera $d^+(z_5, T_7) = 1$.



Entonces T_7 está determinado salvo isomorfismo y como W satisface las condiciones $T_7 \cong W$. ■

Sea $\alpha : V(T_7) \longrightarrow V(W)$ un isomorfismo definido por:

$\alpha(z_0) = w_1^-$
$\alpha(z_1) = w_3^-$
$\alpha(z_2) = w_1^+$
$\alpha(z_3) = w_2^+$
$\alpha(z_4) = w_3^+$
$\alpha(z_5) = w_2^-$
$\alpha(z_6) = w_0$

Teorema 2.5: Sea Z un torneo 3-dicromático de orden 7 y $Z \supseteq Z_0 \cong ST_6$, entonces $Z \cong ST_7$. Además todo isomorfismo $f_0 : Z_0 \longrightarrow ST_6$ puede extenderse a un isomorfismo $f : Z \longrightarrow ST_7$.

Demostración:

Por el Teorema 2.4, Z es isomorfo a alguno de los torneos ST_7, W, W_0 o W_1.

Observamos que cada uno de los conjuntos $\{w_1^+, w_2^+, w_2^-, w_3^-\}$, $\{w_2^+, w_3^+, w_1^-, w_3^-\}$, $\{w_1^+, w_3^+, w_1^-, w_2^-\}$ inducen un TT_4 en W, W_0 y W_1 y si eliminamos cualquier vértice en ellos alguno de los torneos acíclicos se conserva.
Como ST_6 no contiene ningún TT_4, entonces $Z \cong ST_7$.

Para probar la segunda parte, definimos $f(z) = f_0(z)$ si $z \in Z_0$ y $f(z) = 0$ si $z \in Z - Z_0$ y entonces f es un isomorfismo. ■

Si $\overline{W_1} \cong W_1$ y $f : W_1 \longrightarrow \overline{W_1}$ es el (único) isomorfismo de W_1 a $\overline{W_1}$, entonces $\overline{\alpha}$ denotará el vértice $f(\alpha)$.

El siguiente lema se usará en el capítulo III:

Lema 2.6: Sea $\overline{W_1}$ una copia isomorfa de W_1 cuya intersección con W_1 es $W_1 - w_1^-$ y sea ξ el vértice de $\overline{W_1}$ que no está en W_1.
Si $\xi w_1^+ \in A(\overline{W_1})$, entonces:
$\overline{w_0} = w_3^+$, $\overline{w_1^+} = w_2^-$, $\overline{w_2^+} = \xi$, $\overline{w_3^+} = w_1^+$, $\overline{w_1^-} = w_2^+$, $\overline{w_2^-} = w_3^-$, $\overline{w_3^-} = w_0$.

Demostración:

Observamos que todo vértice de grado exterior 3 en W_1 tiene al menos una semivecindad cíclica, las vecindades interiores de w_2^+ y w_3^+ son cíclicas, también lo son las vecindades exteriores de w_2^- y w_3^-. Además w_0 tiene sus dos semivecindades cíclicas.

Como $d^+(w_1^+,\overline{W_1}) = 3$ y $N^+(w_1^+,\overline{W_1}) = \{w_2^+, w_2^-, w_3^-\}$ induce un torneo transitivo, entonces $N^-(w_1^+,\overline{W_1})$ induce un ciclo triángular, de ahí $w_0w_3^+$, $w_3^+\xi$, $\xi w_0 \in A(\overline{W_1})$.

Entonces w_0, w_1^+, w_3^+ tienen grado exterior tres en $\overline{W_1}$.

Como los vértices de grado exterior dos en $W_1 - w_1^-$ son w_2^+, w_3^+ y w_3^- entonces los vértices de grado exterior dos en $\overline{W_1}$ son $\{w_2^+, w_3^-, \xi\}$

Si $d^+(\xi,\overline{W_1}) = 2$ y $N^+(\xi,\overline{W_1}) = \{w_0, w_1^+\}$ como las dos semivecindades de w_3^+ en $\overline{W_1}$ son ciclos triángulares $\overline{w_0} = w_3^+$, mas aún, los vértices de grado exterior 2 y 4 en $\overline{W_1}$ son $\overline{w_1^-} = \xi$ y $\overline{w_1^+} = w_2^-$ respectivamente y ambos están en $N^+(\overline{w_0},\overline{W_1})$ lo cual es imposible.

Supongamos ahora que $d^+(w_3^-,\overline{W_1}) = 2$; entonces $w_2^+\xi$, $\xi w_3^- \in A(\overline{W_1})$. Si $w_2^-\xi \in A(\overline{W_1})$, w_2^- es el único vértice de grado exterior 4, $w_2^- = \overline{w_1^+}$ y $w_3^+ = \overline{w_0}$ ya que las dos semivecindades de w_3^+ son ciclos triangulares, de ahí $\xi = w_2^+$.

Además, por hipótesis $w_3^- = \overline{w_1^-}$ se tiene que $w_0 = \overline{w_2^-}$ y entonces $\overline{w_2^+w_2^-} \in A(\overline{W_1})$ lo cual es imposible.

Si $\xi w_2^- \in A(\overline{W_1})$ entonces $\overline{w_0} = w_2^+$, $\overline{w_1^+} = \xi$ y $\overline{w_1^-} = w_3^-$, de ahí $\overline{w_1^+}$ y $\overline{w_1^-}$ están ambos en $N^+(\overline{w_0},\overline{W_1})$ lo cual es imposible.

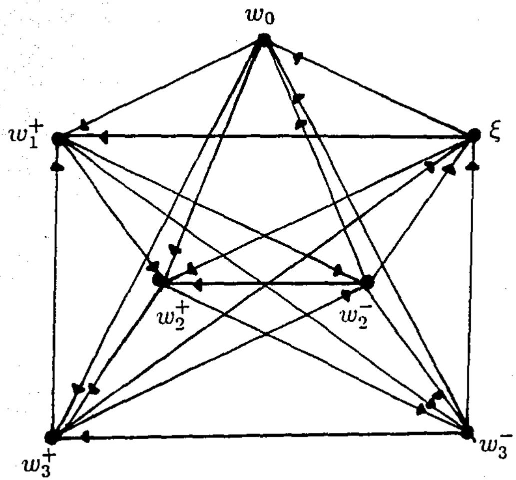
Entonces tenemos que probar que $\overline{w_1^-} = w_2^+$.

Si $\xi w_2^- \in A(\overline{W_1})$ entonces $\overline{w_1^+} = \xi$ y $\overline{w_0} = w_0$, en este caso $\overline{w_1^+} \in N^-(\overline{w_0},\overline{W_1})$ que es imposible, de ahí $w_2^-\xi \in A(\overline{W_1})$ y se deduce que:

$\overline{w_0} = w_3^+$
$\overline{w_1^+} = w_2^-$
$\overline{w_2^+} = \xi$
$\overline{w_3^+} = w_1^+$
$\overline{w_1^-} = w_2^+$

$\overline{w_2^-} = w_3^-$

$\overline{w_3^-} = w_0$ ■



Daremos ahora el dual del Lema anterior que usaremos también en el tercer capítulo:

Lema 2.6 (dual): Sea $\overline{W_1}$ una copia isomorfa a W_1 cuya intersección con W_1 es $W_1 - w_1^+$ y sea ξ un vértice de $\overline{W_1}$ tal que no está en W_1.
Si $w_1^-\xi \in A(\overline{W_1})$ entonces:
$\overline{w_0} = w_2^-$, $\overline{w_1^-} = w_3^+$, $\overline{w_2^-} = w_1^-$, $\overline{w_3^-} = \xi$, $\overline{w_1^+} = w_3^-$, $\overline{w_2^+} = w_0$, $\overline{w_3^+} = w_2^+$.

La demostración se sigue por dualidad

Observamos que las igualdades del Lema 2.6 y su dual (respectivamente) dan una descripción completa de $\overline{W_1}$ cuando $\xi w_1^+ \in A(\overline{W}_1)$ (respectivamente $w_1^-\xi \in A(\overline{W_1})$).

CAPITULO III

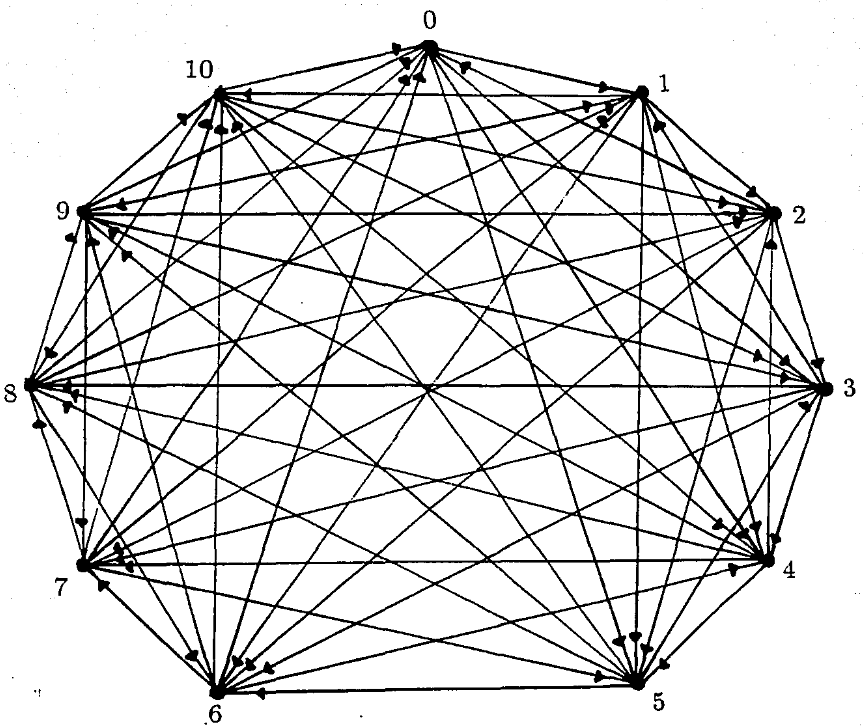
EL TORNEO 4-DICROMATICO DE ORDEN 11

En este capítulo mostraremos que el orden mínimo de un torneo 4-dicromático es 11 y probaremos que el Torneo de Paley:
$ST_{11} = \vec{C}_{11} = (1,3,4,5,9)$ es el único torneo 4-dicromático de orden 11, salvo isomorfismo.

En el Capítulo I observamos que todo T_{10} contiene un conjunto de cuatro vértices U que genera un subtorneo acíclico. Como $T_{10} - U$ es un torneo de orden 6, entonces $dc(T_{10} - U) \leq 2$ y $dc(T_{10}) \leq 3$.

Teorema 3.1: ST_{11} es 4-dicromático. Además para todo conjunto acíclico maximal U de vértices de ST_{11}, $ST_{11} - U \cong W_1$

ST_{11}:



Demostración:
$Aut(ST_{11}) = \{\Phi_{a,b}(z) = az+b; a \in \{1,3,4,5,9\}, b \in Z_{11}\}$ es el conjunto de automorfismos de ST_{11}. (ver apéndice II).

Sea $U_0 \subseteq V(ST_{11})$ un conjunto acíclico maximal en ST_{11} tal que:
$0, 1 \in U_0$, 0 es la fuente de U_0 y 1 es la fuente de $U_0 - \{0\}$.
Como $N^+\{(0,1), ST_{11}\} = \{4.5\}$, entonces $U_0 = \{0,1,4,5\}$.
Calcularemos $\Phi_{a,b}(U_0)$ para distintos valores de a y de b, obteniendo así los conjuntos acíclicos de orden 4 contenidos en ST_{11} ajenos a U_0.
Sea $U_0 = \{0,1,4,5\}$

b	$\Phi_{1,b}$	$\Phi_{3,b}$	$\Phi_{4,b}$	$\Phi_{5,b}$	$\Phi_{6,b}$
0	$\{0,1,4,5\}$	$\{0,3,1,4\}$	$\{0,4,5,9\}$	$\{0,5,9,3\}$	$\{0,9,3,1\}$
1	$\{1,2,5,6\}$	$\{1,4,2,5\}$	$\{1,5,6,10\}$	$\{1,6,10,4\}$	$\{1,10,4,2\}$
2	$\{2,3,6,7\}$	$\{2,5,3,6\}$	$\{2,6,7,0\}$	$\{2,7,0,5\}$	$\{2,0,5,3\}$
3	$\{3,4,7,8\}$	$\{3,6,4,7\}$	$\{3,7,8,1\}$	$\{3,8,1,6\}$	$\{3,1,6,4\}$
4	$\{4,5,8,9\}$	$\{4,7,5,8\}$	$\{4,8,9,2\}$	$\{4,9,7,2\}$	$\{4,2,7,5\}$
5	$\{5,6,9,10\}$	$\{5,8,6,9\}$	$\{5,9,10,3\}$	$\{5,10,3,8\}$	$\{5,3,8,6\}$
6	$\{6,7,10,0\}$	$\{6,9,7,10\}$	$\{6,10,0,4\}$	$\{6,0,4,9\}$	$\{6,4,9,7\}$
7	$\{7,8,0,1\}$	$\{7,10,8,0\}$	$\{7,0,1,5\}$	$\{7,1,5,10\}$	$\{7,5,10,8\}$
8	$\{8,9,1,2\}$	$\{8,0,9,1\}$	$\{8,1,2,6\}$	$\{8,2,0,6\}$	$\{8,6,0,9\}$
9	$\{9,10,2,3\}$	$\{9,1,10,2\}$	$\{9,2,3,7\}$	$\{9,3,7,1\}$	$\{9,7,1,10\}$
10	$\{10,0,3,4\}$	$\{10,2,0,3\}$	$\{10,3,4,8\}$	$\{10,4,8,2\}$	$\{10,8,2,0\}$

Así encontramos cuatro subtorneos transitivos de ST_{11} ajenos a U_0:
$\{2,3,6,7\}$, $\{9,10,2,3\}$, $\{6,9,7,10\}$ y $\{9,2,3,7\}$.
Sea U cualquiera de estos cuatro subtorneos, entonces el complemento de $U_0 \cup U$ en $V(ST_{11})$ es $\{8,9,10\}$, $\{6,7,8\}$, $\{2,3,8\}$ y $\{6,8,10\}$ respectivamente y estos inducen triángulos cíclicos en ST_{11}.

Con lo anterior mostraremos que $dc(ST_{11}) = 4$.

Supongamos que ST_{11} tiene una 3-coloración acíclica $\{C_1, C_2, C_3\}$ donde podemos suponer que:
$|C_1| \geq |C_2| \geq |C_3|$, entonces claramente $|C_1| \geq 11/3 > 3$ por lo tanto $|C_1| = 4$ ya que ST_{11} no contiene un TT_5 (para todo $x \in V(ST_{11})$,

$N^+(x, ST_{11}) = \{x+1, x+3, x+4, x+5, x+9\}$ y $\{x+3, x+4, x+5\}$ induce un ciclo en ST_{11}).

Sea i la fuente de C_1 e $i+1$ la fuente de $C_1 - \{i+1\}$.

Dado que ST_{11} es transitivo en flechas existe un automorfismo que manda la flecha $i\{i+1\}$ en la flecha 01, claramente este automorfismo manda a C_1 en U_0. Podemos asumir que $C_1 = U_0$.

Analogamente $|C_2| \geq 7/2 > 3$ entonces $|C_2| = 4$.

Como C_2 es ajeno a C_1 entonces C_2 es isomorfo a uno de los cuatro conjuntos dados para U.

C_3 es el complemento de $C_1 \cup C_2$, entonces C_3 es un triángulo cíclico lo que contradice la hipótesis, entonces $dc(ST_{11}) \geq 3$.

La partición: $\{\{0,1,4,5\}, \{2,3,6,7\}, \{8,9\}, \{10\}\}$ es acíclica entonces induce una buena 4-coloración para ST_{11}.

Observamos que $ST_{11} - U_0$ satisface las condiciones de W_1 ya que $dc(ST_{11} - U_0) = 3$ y
$V(ST_{11} - U_0) = \{2,3,6,7,8,9,10\}$ donde el grado exterior de cualquier vértice de $ST_{11} - U_0$ es 3 salvo el de 7 y 9 que es dos y cuatro respectivamente, además $97 \in A(ST_{11} - U_0)$.
Entonces $ST_{11} - U_0 \cong W_1$.
Sea $f : ST_{11} - U_0 \longrightarrow W_1$ el isomorfismo tal que:
$f(2) = w_2^+$
$f(3) = w_3^-$
$f(6) = w_3^+$
$f(7) = w_1^-$
$f(8) = w_0$
$f(9) = w_1^+$
$f(10) = w_2^-$

Como $ST_{11} - U_0 \cong ST_{11} - U$ para cualquier U conjunto maximal acíclico en ST_{11} entonces $ST_{11} - U \cong ST_{11} - U_0$.

Lema 3.2: Si $dc(T_{11}) = 4$, entonces T_{11} es regular.

Demostración:

Es suficiente probar que $\delta^+(T_{11}) = 5$ ya que:

Sea w un vértice tal que $d^+(w, T_{11}) = \delta^+(T_{11})$, tenemos que: $dc(T_{11} - \{w\}) \leq 3$.

Si $\delta^+(T_{11}) \leq 2$ entonces $dc(T_{11}) \leq 3$ ya que si $f : V(T_{11} - \{w\}) \longrightarrow I_3$ es una 3-coloración de $T_{11} - \{w\}$ puede extenderse a una 3-coloración f' de T_{11} de la siguiente manera:

Sea $N^+(w, T_{11}) = \{u, v\}$, $f(u) = 0$ y $f(v) = 1$, como todo ciclo que contenga a w en T_{11} contiene a u y a v entonces si $f'(w) = 2$, f' es una 3-coloración de T_{11} y $dc(T_{11}) \leq 3$, entonces $\delta^+(T_{11}) \geq 3$

Si $\delta^+(T_{11}) = 3$ entonces $T_{11}[N^-(w)] \cong ST_7$, en otro caso $T_{11}[N^-(w)]$ contendría un TT_4, T_{11} contendría un TT_5 y $dc(T_{11}) \leq 3$

Sea (z_1, z_2, z_3) una trayectoria dirigida en $T_{11}[N^+(w)]$

Si $\xi \in N^-(w)$ afirmamos que ya sea $T_{11}[\{z_1, z_2, \xi\}]$ ó $T_{11}[z_2, z_3, \xi\}]$ es transitivo; esto se afirma por lo siguiente:

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que hay al menos dos flechas desde $T_{11}[N^+(w)] = \{z_1, z_2, z_3\}$ a ξ, si $z_i\xi, z_{i+1}\xi \in A(T_{11})$ entonces $T_{11}[\{z_i, z_{i+1}, \xi\}]$ es acíclico (en ξ convergen dos flechas).

Si $z_i\xi, z_{i+2}\xi \in A(T_{11})$ entonces también $T_{11}[\{z_i, z_{i+1}, \xi\}]$ es acíclico (aquí es en z_{i+1} donde convergen dos flechas).

Como el orden de $T_{11}[N^-(w)]$ es 7 entonces existen dos vértices diferentes $\xi_1, \xi_2 \in N^-(w)$ para los cuales o $T_{11}[\{z_1, z_2, \xi_i\}]$ es transitivo para $i = 1, 2$ o $T_{11}[\{z_2, z_3, \xi_i\}]$ es transitivo para $i = 1, 2$.

Asumimos que $T_{11}[\{z_1, z_2, \xi_i\}]$ es transitivo para $i = 1, 2$.

Claramente $dc(T_{11} - \{z_1, z_2, \xi_i\}) \leq 3$ para $i = 1, 2$ ya que $T_{11} - \{z_1, z_2, \xi_i\} = T_8$ y $dc(T_8) \leq 3$

Como w tiene grado exterior 1 en $T_{11} - \{z_1, z_2, \xi_i\}$ entonces $dc(T_{11} - \{z_1, z_2, \xi_i, w\}) \leq 3$ ya que si $dc(T_{11} - \{z_1, z_2, \xi, w\}) \leq 2$ podriamos extender la 2-coloración a $T_{11} - \{z_1, z_2, \xi_i\}$.

Además $T_{11} - \{z_1, z_2, \xi_i, w\} \supseteq T_{11}[N^-(w)] - \{\xi_i\} \cong ST_6$ y se sigue del Teorema 2.5 que para $\eta \in N^-(w) - \{\xi_1, \xi_2\}$ tenemos que:

$z_3\eta \in A(T_{11}[N^-(w) \cup \{z_3\} - \{\xi_i\}]$ si $\xi_i\eta \in A(T_{11}[N^-(w)])$.

Como existe $\eta \in N^-(w) - \{\xi_1, \xi_2\}$ tal que $\xi_1\eta, \eta\xi_2 \in A(T_{11})$ entonces $z_3\eta, \eta z_3$ lo cual es imposible, entonces $\delta^+(T_{11}) \geq 4$.

Supongamos ahora que $\delta^+(T_{11}) = 4$. $T_{11}[N^-(w)] \cong ST_6$ en otro caso $T_{11}[N^-(w)]$ contendría un TT_4 y T_{11} contendría un TT_5 (entonces $dc(T_{11}) \leq 3$).

Extendemos $T_{11}[N^-(w)]$ a un torneo $T_7 \cong ST_7$ aumentando un vértice $\lambda \notin V(T_{11})$, las flechas quedan determinadas.

Sea $z_i \in N^+(w, T_7)$, $i = 1, 2$ tal que $T_{11}[N^+(w) - \{z_i\}]$ sea acíclico.

Entonces $T_{11}[N^+(w) \cup \{w\} - \{z_i\}]$ es acíclica y de ahí: $dc(T_{11}[N^-(w) \cup \{z_i\}]) = 3$.

Como $T_{11}[N^-(w)] \cong ST_6$ entonces nuevamente por el teorema 2.5 $T_{11}[N^-(w) \cup \{z_i\}] \cong ST_7$ y de ahí, para todo $\eta \in N^-(w)$ $i = 1, 2$; $\eta z_i \in A(T_{11}[N^-(w) \cup \{z_i\}])$ si $\eta\lambda \in A(T_7)$.

Tomamos η_1, $\eta_2 \in N^-(w)$ tales que $\eta_j\lambda \in A(T_7)$ para $j = 1, 2$, entonces $\eta_j z_i \in A(T_{11})$ para $i, j = 1, 2$ y $T_{11}[\{z_1, z_2, w, \eta_1, \eta_2\}] \cong TT_5$ lo cual es una contradicción, entonces $\delta^+(T_{11}) = 5$. ■

En lo siguiente U denotará un conjunto de vértices de T_{11} tal que $T_{11}[U] \cong TT_4$ y (u_1, u_2, u_3, u_4) es una trayectoria dirigida en $T_{11}[U]$.

Lema 3.3: Si T_{11} es regular y $T_{11} - U \cong W$, entonces T_{11} contiene un subtorneo isomorfo a TT_5.

Demostración:

Podemos asumir que $T_{11} - U = W$, supongamos que T_{11} no contiene un subtorneo isomorfo a TT_5

El arco $w_i^+ u_4 \notin A(T_{11})$ ya que si $w_i^+ u_4 \in A(T_{11})$ por regularidad $u_j w_i^+ \in A(T_{11})$ para $j = 1, 2, 3$ y $T_{11}[U \cup \{w_i^+\}] \cong TT_5$ entonces:

a) $u_4 w_i^+ \in A(T_{11})$ para $i = 1, 2, 3$; similarmente:
b) $w_i^- u_1 \in A(T_{11})$ para $i = 1, 2, 3$; ya que si $u_1 w_i^- \in A(T_{11})$ entonces $w_i^- u_j \in A(T_{11})$ para $j = 1, 2, 3$ y $T_1 1[U \cup \{w_i^-\}] \cong TT_5$.

Ahora, si para dos índices diferentes $j,\ k$ y alguna $i \in \{1, 2, 3\}$ $w_j^+ u_i,\ w_k^+ u_i \in A(T_{11})$ tendríamos que $u_m w_j^+,\ u_m w_k^+ \in A(T_{11})$ para $m \in \{1, 2, 3, 4\} - \{i\}$ y $T_{11}[\{w_j^+, w_k^+\} \cup (U - \{u_i\})] \cong TT_5$.

Entonces existe exactamente una $w_j^+ U - \mathit{flecha}$ para cada j, es decir, el conjunto $\{w_1^+, w_2^+, w_3^+\} - (U - \{u_4\}) - \mathit{flechas}$ es independiente y tiene cardinalidad 3.

Analogamente el conjunto $(U - \{u_1\}) - \{w_1^-, w_2^-, w_3^-\} - \mathit{flechas}$ es independiente y tiene cardinalidad 3, ya que si para dos índices diferentes $j,\ k$ y alguna $i = \{2, 3, 4\}$ $u_i w_j^-,\ u_i w_k^- \in A(T_{11})$ entonces $w_j^+ u_m,\ w_k^+ u_m \in A(T_{11})$ para $m \in \{1, 2, 3, 4\} - \{i\}$ y $T_{11}[\{w_j^-, w_k^-\} \cup \{u_i\}] \cong TT_5$.

Asumimos que $w_3^+ u_1,\ u_4 w_3^- \in A(T_{11})$ (*) entonces:

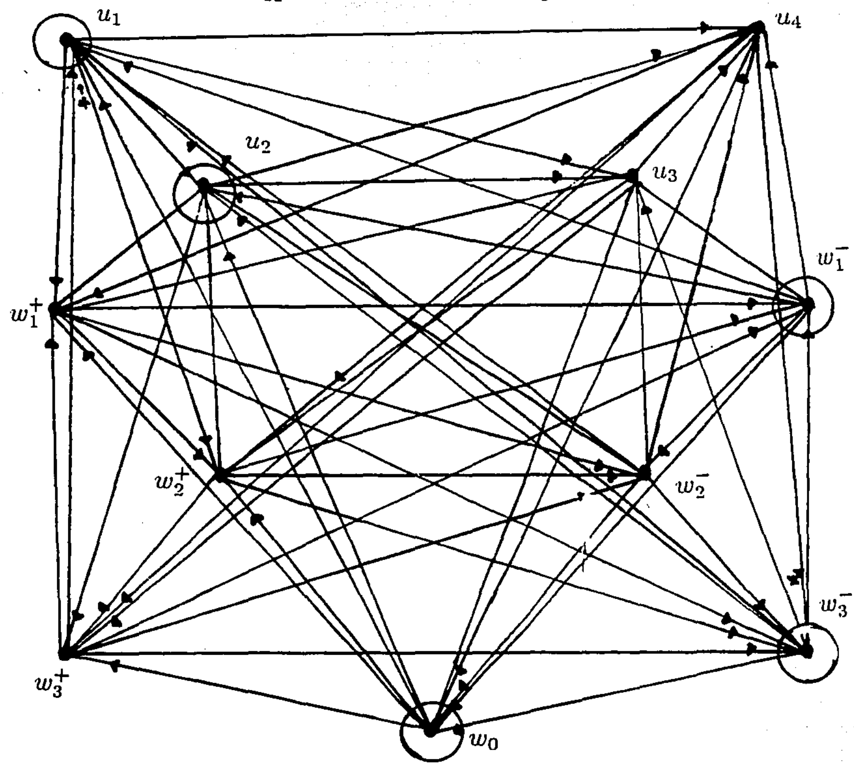
c) $w_3^+u_1,\ u_1w_1^+,\ u_1w_2^+$ y $u_mw_3^+ \in A(T_{11})$ para $m = 2, 3, 4$ y similarmente:
d) $u_4w_3^-,\ w_1^-u_4, w_2^-u_4$ y $w_3^-u_m \in A(T_{11})$ para $m = 1, 2, 3$.
Por regularidad: e) w_0u_1 y $u_4w_0 \in A(T_{11})$

Además existe exactamente una $\{w_1^-, w_2^-\}u_m - flecha$ para cada $m \in \{2, 3\}$ ya que el conjunto $(\{u_2, u_3\})\{w_1^-, w_2^-\} - flechas$ es independiente y tiene cardinalidad 2.

Ahora, por regularidad existe exactamente una $w_0 - \{u_2, u_3\} - flecha$. Sea $w_0u_s \in A(T_{11})$ con $s \in \{2, 3\}$ entonces:

$T_{11}[\{u_1, u_s, w_0, w_j^-, w_3^-\}] \cong TT_5$ donde w_j^- es el vértice tal que $w_j^-u_s \in A(T_{11})$.

Entonces el T_{11} dado contiene un TT_5.



En la figura anterior $u_s = u_2$, $w_j^- = w_1^-$ y los vértices que inducen el TT_5 están índicados.

Lema 3.4: Si T_{11} y $T_{11} - U$ son regulares y T_{11} no contiene un TT_5, entonces existen vértices $z, z', w \in V(T_{11}) - U$ tal que:

i) $zu_1, zu_4, u_2z, u_3z \in A(T_{11})$

ii) $u_1z', u_4z', z'u_2, z'u_3 \in A(T_{11})$ y

iii) $u_1w, wu_4, wu_2, u_3w \in A(T_{11})$

Además:

iv) Para todo $\xi \in V(T_{11}) - U - \{z, z', w\}$, ξu_1, $u_4\xi \in A(T_{11})$ y:

v) $\{zz', zw, wz'\}$ no está contenido en $A(T_{11})$.

Demostración:

Si $\xi \in V(T_{11}) - U$ es tal que $\xi u_4 \in A(T_{11})$ entonces tenemos:

a) ξu_1, $u_2\xi$, $u_3\xi$, $\xi u_4 \in A(T_{11})$ o

b) $u_1\xi$, ξu_2, $u_3\xi$, $\xi u_4 \in A(T_{11})$ ya que en otro caso $T_{11}[U \cup \{\xi\}] \cong TT_5$, esta afirmación se deduce de lo siguiente:

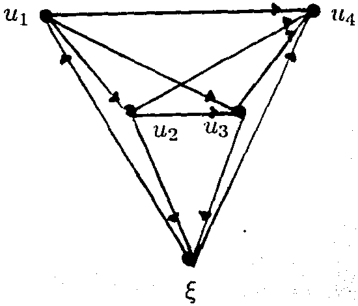
Si $\xi u_4 \in A(T_{11})$

Caso 1) Si $\xi u_1 \in A(T_{11})$ entonces por la regularidad de T_{11} $u_2\xi$, $u_3\xi \in A(T_{11})$ (insiso a)).

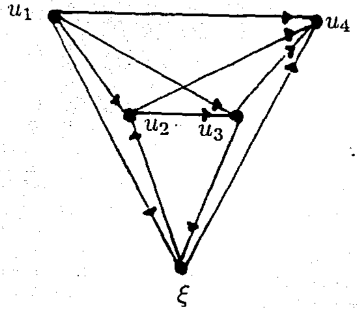
Caso 2) Si $\xi u_2 \in .(T_{11})$ entonces $u_1\xi$, $u_2\xi \in A(T_{11})$ (insiso b)) y

Caso 3) Si $\xi u_3 \in A(T_{11})$ entonces $u_1\xi$, $u_2\xi \in A(T_{11})$ y $T_1 1[U \cup \{\xi\}] \cong TT_5$.

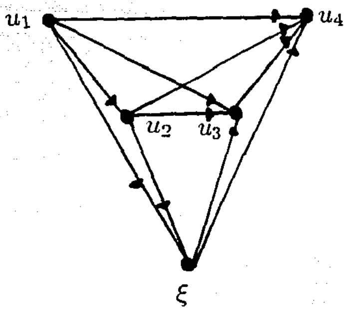
Caso 1



Caso 2



Caso 3



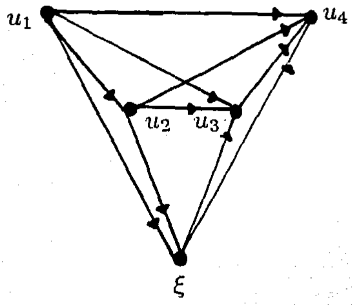
Sean ξ_1, ξ_2 dos valores diferetes de ξ, observamos que no pueden ser ambos del tipo (a) o ambos del tipo (b) ya que $T_{11}[\{\xi_1, \xi_2, u_1, u_2, u_4\}]$ es isomorfo a TT_5.

Entonces existe un vértice z del tipo (a) y un vértice w del tipo (b).

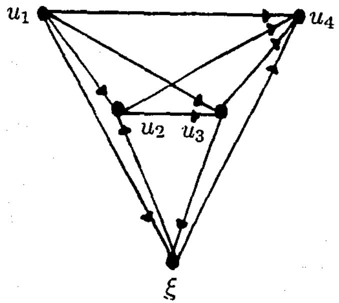
Dualmente si $\xi \in V(T_{11}) - U$ tal que $u_1\xi \in A(T_{11})$ entonces tenemos (c): $u_1\xi, \xi u_2, \xi u_3, u_4\xi \in A(T_{11})$ ya que, en otro caso $T_{11}[U \cup \{\xi\}] \cong TT_5$, esta afirmación se hace porque:

Si $u_1\xi \in A(T_{11})$
Caso 1) Si $u_2\xi \in A(T_{11})$ entonces $\xi u_3, \xi u_4 \in A(T_{11})$ y $T_{11}[U \cup \{\xi\}] \cong TT_5$
Caso 2) Si $u_3\xi \in A(T_{11})$ entonces $\xi u_2, \xi u_4 \in A(T_{11})$ y ξ es w en (ii)
Caso 3) Si $u_4\xi \in A(T_{11})$ entonces $\xi u_2, \xi u_3 \in A(T_{11})$ (insiso (c))

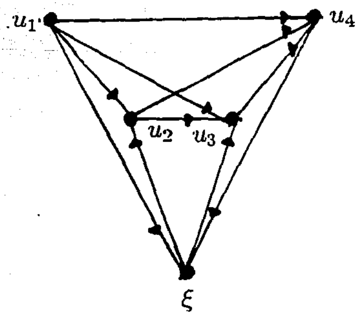
Caso 1



Caso 2



Caso 3



Si tomamos dos valores diferentes ξ_1, ξ_2 de ξ observamos que no pueden ser ambos del tipo (c) ya que $T_{11}[\{\xi_1, \xi_2, u_1, u_2, u_3\}]$ es isomorfo a TT_5. Entonces existe un único z' que satisface (ii)

La propiedad (iv) se satisface por la regularidad de T_{11}.

Finalmente, si $\{zz', zw, wz'\}$ estuviera en $A(T_{11})$ $\{u_1, u_4, z, z', w\}$ induce un TT_5 lo cual es imposible. ■

Lema 3.5: Si T_{11} es 4-dicromático entonces $T_{11} - U \cong W_1$.

Demostración:

Como $T_{11} - U$ es 3-dicromático y no es isomorfo a W (lemas 3.3 y 3.4) es suficiente, por el Teorema 2.4 probar que no es regular (garantizando así que $T_{11} - U$ no es isomorfo ni a ST_7 ni a W_0).

Supongamos que $T_{11} - U$ es regular; por el lema 3.4 $\{zz', zw, wz'\}$ no está contenido en $A(T_{11})$

Si $z'z \in A(T_{11})$ entonces $U_1 = \{u_2, u_3, z, z'\}$ induce un torneo acíclico. Además $T_{11} - U_1$ no es isomorfo a W (lemas 3.3 y 3.4).

Como $d^+(u_1, T_{11} - U_1) = 2$ y $d^+(u_4, T_{11} - U_1) = 4$ se sigue que $T_{11} - U_1 \cong W_1$ y $u_4u_1 \in A(T_{11} - U_1)$ lo cual es una contradicción.

Si $wz \in A(T_{11})$ entonces $U_2 = \{u_3, u_4, z, w\}$ es acíclico y:
$d^+(u_1, T_{11} - U_2) = d^+(u_2, T_{11} - U_2) = 2$.

Si $z'w \in A(T_{11})$, entonces $U_3 = \{u_1, u_2, z', w\}$ es acíclico y:
$d^-(u_3, T_{11} - U_3) = d^-(u_4, T_{11} - U_3) = 2$.

Como $T_{11} - U_2$ y $T_{11} - U_3$ son 3-dicromáticos, no regulares y diferentes de W (lema 3.3) entonces los dos son, isomorfos a W_1, pero cada uno tendría que tener solo un vértice de valencia exterior 2 y un vértice de valencia interior 2, entonces $\{zz', zw, wz'\} \in A(T_{11})$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $T_{11} - U \cong W_1$. ■

Teorema 3.6: ST_{11} es el único torneo 4-dicromático de orden 11.

Demostración:

Sea T_{11} un torneo 4-dicromático. Por el lema 3.5 $T_{11} - U \cong W_1$ y podemos asumir que $T_{11} - U = W_1$.

Como T_{11} es regular (por el lema 3.2) existe una $w_1^+u - flecha$ y una sola $uw_1^- - flecha$.

Si $w_1^- u_4 \in A(T_{11})$ entonces $U \cup \{w_1^+\}$ induce un TT_5, de ahí:
a) $u_4 w_1^+ \in A(T_{11})$

Dualmente, si $u_1 w_1^- \in A(T_{11})$ entonces $U \cup \{w_1^-\}$ induce un TT_5, de ahí:
a′) $w_1^- u_1 \in A(T_{11})$

Definimos $U_i = U \cup \{w_i^-\} - u_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$ y probaremos que $u_3 w_1^-$ es la $Uw_1^- - flecha$.

Dualmente definimos $U_i' = U - \{w_1^+\} - u_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$ y probaremos que $w_1^+ u_2$ es la $w_1^+ U - flecha$.

Supongamos que $u_2 w_1^- \in A(T_{11})$ entonces U_2 $(U_2 = U \cup \{w_1^-\} - u_2)$ es acíclico y $d^+(u_2, T_{11} - U_2) = 2$.

Como w_2^+, w_3^- y w_3^+ tienen grado exterior 2 en $T_{11} - U_2 - \{u_2\}$ y $T_{11} - U_2 \cong W_1$ (por el lema 3.5), se deduce que:

$w_2^+ u_2$, $w_3^- u_2$, $w_3^+ u_2 \in A(T_{11})$ y $\{u_2, w_1^-, w_2^+, w_3^+, w_3^-\}$ induce un TT_5, lo cual es imposible.

Entonces tenemos que:
b) $w_1^- u_2 \in A(T_{11})$.

Dualmente, supongamos que $w_1^+ u_3 \in A(T_{11})$ entonces U_3' ($U_3' = U \cup \{w_1^+\} - u_3$) es acíclico y $d^-(u_3, T_{11} - U_3) = 2$.

Como w_2^+, w_2^- y w_3^- tienen grado interior 2 en $T_{11} - U_3' - \{u_3\}$ y $T_{11} - U_3' \cong W_1$ (por el lema 3.5), se deduce que:

$u_3 w_2^+$, $u_3 w_2^-$, $u_3 w_3^- \in A(T_{11})$ y $\{u_3, w_1^+, w_2^+, w_2^-, w_3^-\}$ inducen un TT_5, lo cual es imposible.

Entonces: b′) $u_3 w_1^+ \in A(T_{11})$.

Supongamos ahora que $u_4 w_1^- \in A(T_{11})$, entonces U_4 es acíclico, $T_{11} - U_4 \cong W_1$ y $d^-(u_4, T_{11} - u_4) = 2$ aplicando el lema 2.6 con $\xi = u_4$, tenemos que $d^-(u_4, T_{11} - u_4) = 3$ lo cual es imposible, entonces:

c) $w_1^- u_4 \in A(T_{11}), d) u_3 w_1^- \in A(T_{11})$.

Dualmente, si $w_1^+ u_1 \in A(T_{11})$, entonces U_1' es acíclico y $T_{11} - U_1' \cong W_1$ y $d^+(U_1', T_{11} - U_1') = 2$, si aplicamos el dual del lema 2.6 con $\xi = u_1$ $d^+(u_1, T_{11} - U_1') = 3$ lo cual es una contradicción, entonces:

c′) $u_1 w_1^+ \in A(T_{11})$ y d′) $w_1^+ u_2 \in A(T_{11})$ *.

Mas aún, tenemos que:
e) $u_4 w_0 \in A(T_{11})$, ya que si $w_0 u_4 \in A(T_{11})$ entonces:
$N^+(u_4, T_{11}) \cup N^+(w_1^+, T_{11}) = \{w_2^+, w_2^-, w_3^-\}$ que es acíclica y entonces:
$\{u_4, w_1^-, w_2^+, w_2^-, w_3^-\}$ induce un TT_5.

Dualmente: e′) $w_0 u_1 \in A(T_{11})$, ya que, si $u_1 w_0 \in A(T11)$ entonces $N^-(u_1, T_{11}) \cup N^-(w_1^-, T_{11}) = \{w_2^+, w_3^+, w_3^-\}$ que es acíclico y entonces $\{w_1^-, u_1, w_2^+, w_3^-, w_3^+\}$ induce un TT_5 lo cual es una contradicción.

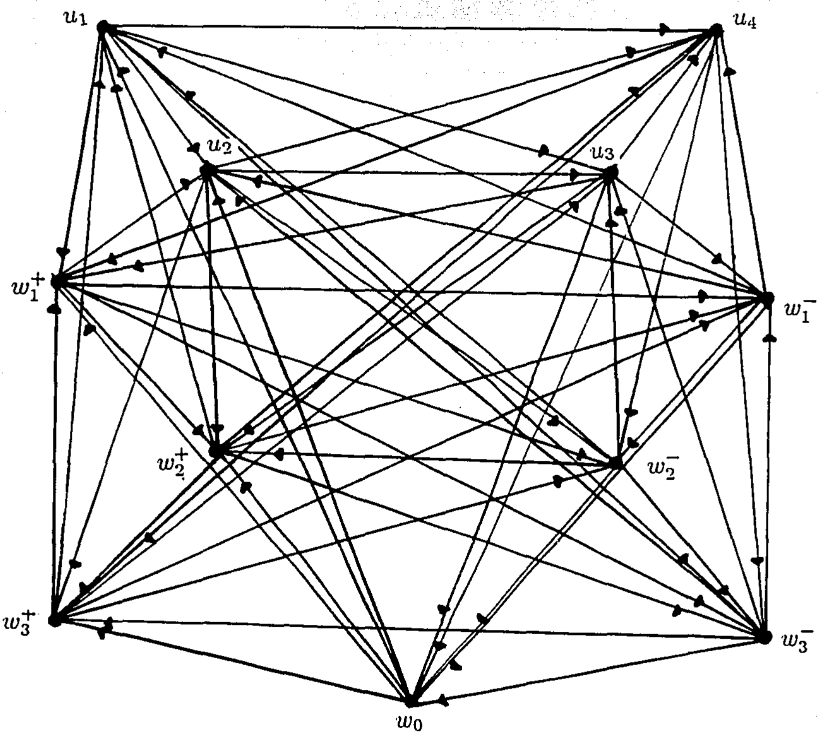
Ahora U_3 es acíclico, entonces aplicando el lema 2.6 a $T_{11} - U_3$ haciendo $\xi = u_3$, $N^+(u_3, T_{11} - U_3) = \{w_0, w_1^+, w_2^+\}$ y con esto $N^+(u_3, T_{11})$ está bien determinada.

Como $\{w_0, w_1^+, w_2^+\}$ es acíclico y u_4w_0, $u_4w_1^+ \in A(T_{11})$ entonces: $w_2^+u_4 \in A(T_{11})$, de otra manera $\{u_3, u_4, w_0, w_1^+, w_2^+\}$ induce un TT_5. Se sigue que $N^-(u_4, T_{11}) = U_4 \cup \{w_2^+\}$.

Por dualidad U_2' es acíclico entonces aplicando el dual del lema 2.6 a $T_{11} - U_2'$ y haciendo $u_2 = \xi$, $N^-(u_2, T_{11} - U_2') = \{w_1^-, w_3^-, w_0\}$ y con esto $N^-(u_2, T_{11}) = \{w_1^-, w_3^-, w_0\}$ queda determinado.

Como $\{w_1^-, w_3^-, w_0\}$ es acíclico y $w_1^-u_1$, $w_0u_1 \in A(T_{11})$ entonces $u_1w_3^- \in A(T_{11})$, si no $\{w_1^-, w_3^-, w_0, u_1, u_2\}$ induce un TT_5. Se sigue que $N^+(u_1, T_{11}) = U_1' \cup \{w_3^-\}$.

Así T_{11} queda completamente determinado y el resto de las flechas son las siguientes:
$w_2^+u_1$, $w_3^+u_1$, $w_2^-u_1$, $u_2w_2^+$, $u_2w_3^+$, $u_2w_2^-$, $w_3^+u_3$, $w_2^-u_3$, $w_3^-u_3$, $u_4w_3^+$, $u_4w_2^-$, $u_4w_3^- \in A(T_{11})$.



APENDICE I

Se sabe [6] que el orden mínimo de un torneo 5-dicromático es mayor que 16. En este apéndice mostraremos un torneo de orden 19 debido a Víctor Neumann-Lara, que es 5-dicromático.

Sean $D_1 = (V_1, A_1, f_1)$ y $D_2 = (V_2, A_2, f_2)$ gráficas, definimos la composición D de D_1 con D_2, simbolicamente $D = D_1[D_2]$ como la gráfica cuyo conjunto de vértices $V(D)$ es el producto cartesiano de V_1 y V_2:

$V(G) = V_1XV_2$ y además si para $u = (u_1, u_2) \in V(D)$ y

$v = (v_1, v_2) \in V(G)$, $uv \in A(D)$ si $u_1v_1 \in A(D_1)$ ó $u_1 = v_1$ y $u_2v_2 \in A(D_2)$

Es fácil ver que la composición no es conmutativa.

Además es claro que la composición de dos torneos es un torneo.

Sea T_{19} de la siguiente manera:

$T = ST[\vec{C_3}] - \{(0,0),(0,1)\}$

PROPOSICION 1: El número dicromático de T es 5.

Demostracion:

Ya que T contiene un subconjunto acíclico, U de orden 5 y $dc(T-U) \leq 4$ entonces $dc(T) \leq 5$.

Suponemos que $dc(T) \leq 4$ y sea:
$f: V(T) \longrightarrow I_4$ una coloración acíclica de T.

Supongamos, sin pérdida de generalidad que $f((0,2)) = 0$.

Sea $k: Z_7 \longrightarrow Z_3$ tal que K(0)=2, entonces el conjunto:
$S = \{(i, k(i)) \ /i \in Z_7\}$ induce un ST_7 en T.

Para $i \in Z_7 - \{0\}$ sea: $(\vec{C_3})_i = \{(i,j) \ /j \in Z_3\}$.

Dado que $dc(S) = 3$ entonces $f: S \longrightarrow \{0,1\}$ no es una buena coloración de S, entonces existe algún $(\vec{C_3})_i$ tal que $f: (\vec{C_3})_i \longrightarrow \{2,3\}$

Analogamente existen $(\vec{C_3})_k$ y $(\vec{C_3})_l$ con $i \neq k \neq l$ tales que:
$f: (\vec{C_3})_k \longrightarrow \{1,3\}$ y $f: (\vec{C_3})_l \longrightarrow \{1,2\}$.
Sean $i = 1$, $k = 2$ y $l = 3$

Como S no contiene un TT_4 entonces $i \in (f(V(\vec{C_3})_k)$ para una y solo una $k = 4,5,6$ con $i = 1,2,3$ ya que si $i,j \in \{f(V(\vec{C}_{3k})\}$ para una $k = 4,5,6$ fija con $i \neq j$ y $i,j = 1,2,3$, entonces existe $(\vec{C_3})_l$ con $k \neq l$ tal que $f(V(\vec{C_3})_l) = 0$ lo cual no es posible.

Entonces: $1 \in \{f(V(\vec{C_3})_k)\}$
$2 \in \{f(V(\vec{C_3})_r)\}$ y
$3 \in \{f(V(\vec{C_3})_s)\}$

Con $k \neq r \neq s$. Podemos asumir $k = 4$, $r = 5$ y $s = 6$.

Entonces $0 \in \{f(V(\vec{C_3})_i\}$ para $i = 4, 5, 6$ y esto nos lleva a una contradicción ya que $f((0, 2)) = 0$ y S no contiene un TT_4.

Entonces $dc(T) > 4$, de ahí $dc(T) = 5$. ■

La siguiente $f : V(T_{19}) \longrightarrow I_6$ con:
$f((0, 2)) = 0$
$f : V(\vec{C_3})_1 \longrightarrow \{2, 3\}$
$f : V(\vec{C_3})_2 \longrightarrow \{1, 3\}$
$f : V(\vec{C_3})_3 \longrightarrow \{1, 2\}$
$f : V(\vec{C_3})_4 \longrightarrow \{0, 1\}$
$f : V(\vec{C_3})_5 \longrightarrow \{0, 2\}$
$f : V(\vec{C_3})_6 \longrightarrow \{3, 4\}$
es una buena coloración de T.

Sea ahora $T' = ST_7[C_3]$ y sea:
$(\vec{C_3})_i = \{(i, j) \ /j \in Z_3\}$, $i \in Z_7$

Como el torneo de orden 19 expuesto anteriormente es una subdigráfica del ahora definido entonces $dc(T) \leq dc(T')$, por lo tanto $dc(T') \geq 5$.

Sea $f : V(T') \longrightarrow I_5$ de la siguiente manera:
$f : V(\vec{C_3})_1 \longrightarrow \{2, 3\}$
$f : V(\vec{C_3})_2 \longrightarrow \{1, 3\}$
$f : V(\vec{C_3})_3 \longrightarrow \{1, 2\}$
$f : V(\vec{C_3})_4 \longrightarrow \{0, 1\}$
$f : V(\vec{C_3})_5 \longrightarrow \{0, 2\}$
$f : V(\vec{C_3})_6 \longrightarrow \{3, 4\}$
$f : V(\vec{C_3})_7 \longrightarrow \{0, 4\}$
es una buena coloración para T'.
Entonces $dc(T') = 5$.

Sabemos que todo T_{21} contiene un subtorneo transitivo de orden 4. Llamemos U a este subtorneo transitivo, $T_{21} - U$ es un torneo de orden 16 y $dc(T_{16}) \leq 5$ entonces $dc(T_{21}) \leq 6$.

Hemos encontrado un torneo de orden 21 con número dicromático 5, sería interesante ahora buscar un torneo de orden 21 con número dicromático 6 ó probar que $dc(T_{21}) = 5$.

APENDICE II

En este apéndice trabajaremos con el grupo de automorfismos de los Torneos de Paley de orden p, donde p un primo congruente con 3 módulo 4.

Sea $A(p) = \{f(x) = ax + b \ / a$ es residuo cuadrático $(mod\ p)$ y $b \in Z_p\}$

PROPOSICION: $A(p)$ es un subgrupo de $Aut(ST_p)$

Demostración:

i) Demostraremos prin ero que $A(p)$ es un grupo respecto a la composición de funciones:

Sean $f,\ g \in A(p)$; $f(x) = a_0x + b_0$ y $g(x) = a_1x + b_1$ con a_o y a_1 residuos cuadráticos mod p y $b_0, b_1 \in Z_p$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$f(a_1x + b_1) = a_0(a_1x + b_1) + b_0$$
$$= a_0a_1x + a_0b_1 + b$$

Como a_0a_1 es residuo cuadrático y $a_0b_1 + b_0 \in Z_(p)$, $f \circ g \in A(p)$

Sabemos que los elementos de $A(p)$ son biyecciones y que $A(p)$ es fínito entonces $A(p)$ es un grupo. ■

ii) Demostremos ahora que $A(p) \subseteq Aut(ST_p)$

Sea $f \in A(p)$, $f(x) = ax + b$ y sea:
$ij \in A(ST_p)$ entonces $j - i$ es un residuo cuadrático módulo p.

$$f(i) = ai + b$$
$$f(j) = aj + b$$
$$f(j) - f(i) = a(j - i)$$

Como a y $j - i$ son residuos cuadráticos mod p, entonces:
$f(j) - f(i) \in A(ST_p)$.

De ahí: $A(p) \subseteq Aut(ST_p)$ ■

Ahora mostraremos que para $p = 3, 7, 19$ y 23 $A(p) = Aut(ST_p)$.

LEMA: Si todo automorfismo de ST_p que deja fija a la arista $\vec{01}$ está en $A(p)$ (y por lo tanto es la idéntidad), entonces todo automorfismo de ST_p está en $A(p)$.

Demostración:

Sea $\alpha \in Aut(ST_p)$ tal que $\alpha(0) = i$ y $\alpha(1) = j$.
Y sea $\beta = \frac{1}{j-i}x - \frac{i}{j-i}$ tal que
$\beta(i) = 0$ y $\beta(j) = 1$.

$\frac{1}{j-i}$ es residuo cuadrático *mod* p porque:

$$\frac{1}{j-i} \equiv y \ (mod\ p)$$
$$1 \equiv y(j-i) \ (mod\ p)$$

Como 1 y $j-i$ son residuos cuadráticos entonces y también lo es.

Además $\frac{i}{j-i} \in Z_p$ ya que si:

$$\frac{i}{j-i} \equiv y \ (mod\ p)$$
$$i \equiv y(j-i) \ (mod\ p)$$

Como i, $j-i \in Z_p$ entonces $y \in Z_p$
Además como $A(p) \subseteq Aut(ST_p)$, $\beta \in Aut(ST_p)$.

Entonces:
$\alpha\beta \in Aut(ST_p)$ y $\alpha\beta$ deja fija a $\vec{01}$ por hipóteisis $\alpha\beta = \gamma \in A(p)$, entonces:
$\alpha = \gamma\beta^{-1}$ y $\alpha \in A(p)$. ■

$Aut(ST_3)$:

Este caso es trivial ya que ST_3 es un ciclo y si α es un automorfismo que fija $\vec{01}$ α es la idéntidad y entonces $\alpha \in A(p)$.

De ahí $Aut(ST_3) = A(3)$

$Aut(ST_7)$:

Sea $\alpha \in Aut(ST_7)$ que fija $\vec{01}$, sabemos que:
$N^+(0, ST_7) = \{1, 2, 4\}$
$N^+(1, ST_7) = \{2, 3, 5\}$

Como $N^+(0, ST_7) \cap N^+(1, ST_7) = \{2\}$, entonces α deja fijo al 2; de ahí α fija $\vec{12}$.

Si hacemos un proceso análogo (ahora con 1 y 2) observamos que α fija $\vec{23}$ como ST_7 es finita podemos concluir que fija a todo ST_7, es decir α es la idéntidad, entonces $\alpha \in A(7)$

Por lo tanto $Aut(ST_7) = A(7)$

$Aut(ST_{11})$:

Sea $\alpha \in Aut(ST_{11})$ que fija $\vec{01}$, sabemos que:

$N^+(0, ST_{11}) = \{1, 3, 4, 5, 9\}$

$N^+(1, ST_{11}) = \{2, 4, 5, 6, 10\}$

Como $N^+(0, ST_{11}) \cap N^+(1, ST_{11}) = \{4, 5\}$

Entonces α deja fijo al conjunto $\{4, 5\}$, como $\vec{45} \in A(ST_{11})$ entonces $\vec{45}$ queda fija, siguiendo el mismo proceso quedan fijas: $\vec{89}$, $\vec{12}$, $\vec{56}$, $\vec{910}$, $\vec{23}$ y $\vec{67}$, es decir, fija todo ST_{11}. Por lo tanto α es la idéntidad y $\alpha \in A(11)$.

Entonces $Aut(ST_{11}) = A(11)$

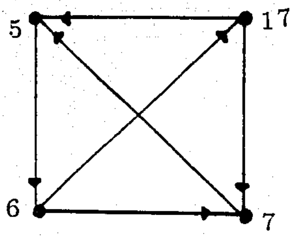
$Aut(ST_{19})$:

Sea $\alpha \in Aut(ST_{19})$ que deja fija $\vec{01}$, sabemos que:

$N^+(0, ST_{19}) = \{1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17\}$

$N^+(1, ST_{19}) = \{2, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 17, 18\}$

Como $N^+(0, ST_{19}) \cap N^+(1, ST_{19}) = \{5, 6, 7, 17\}$, α deja fijo al conjunto $R = \{5, 6, 7, 17\}$



Observamos que:

$d^+(5, R) = d^+(7, R) = 1$ y

$d^+(6, R) = d^+(17, R) = 2.$

Entonces α podría identificar el 5 con el 7 y/o el 6 con el 17:

Como $N^+(5, ST_{19}) = \{7\}$ entonces $\alpha(5) = 5$ y $\alpha(7) = 7$.

Además $\vec{67} \in A(ST_{19})$ $\vec{177} \notin A(ST_{19})$, entonces $\alpha(6) = 6$ y $\alpha(17) = 17$.

Entonces α deja fijo a la gráfica inducida por R en ST_{19} en partícular deja fija a la arista $\vec{56}$.

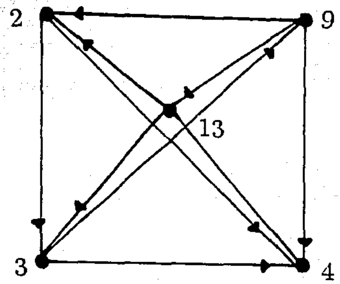
Siguiendo con el mismo proceso vemos que α deja fijo todo ST_{19} entonces es la idéntidad.

Por lo tanto: $\alpha \in A(19)$ y $Aut(ST_{19}) = A(19)$.

$Aut(ST_{23})$:

Sea $\alpha \in Aut(ST_{23}$ que deja fijo a $vec01$, sabemos que:
$N^+(0, ST_{23}) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18\}$
$N^+(1, ST_{23}) = \{2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 17, 19\}$

Como $N^+(0, ST_{23}) \cap N^+(1, ST_{23}) = \{2, 3, 4, 9, 13\}$, α deja fijo al conjunto $R = \{2, 3, 4, 9, 13\}$



Observamos que:
$d^+(4, R) = 1$,
$d^+(2, R) = d^+(3, R) = d^+(13, R) = 2$ y
$d^+(9, R) = 3$.
Entonces los vértice 9 y 4 se quedan fijos.

Como $N^+(9, R) = \{2, 4, 13\}$ y $N^-(4, R) = \{2, 3, 9\}$, entonces α deja fijo al 2 ya que, de otra manera $\alpha(2)$ tendría que estar en $N^+(9, R)$ y en $N^-(4, R)$ y no hay ningún otro vértice, además de 2, que este en ambos.

Entonces α deja fijo a $\vec{12}$.
Siguiendo con el proceso α deja fijo a todo ST_{23}, y de ahí α es la idéntidad.

ambos.

Entonces α deja fijo a $\vec{12}$.
Siguiendo con el proceso α deja fijo a todo ST_{23}, y de ahí α es la idéntidad.

Por lo tanto $\alpha \in A(23)$ y $Aut(ST_{23}) = A(23)$.

BIBLIOGRAFIA

Libros:

[1] HARARY. Frank
Graph Theory
Addison-Wesley,1969

[2] NEUMANN Víctor
Introducción a la Teoría de las Gráficas
1985, IV Coloquio. Departamento de Matemáticas.
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

[3] NIVEN Y ZUCKERMAN
Introducción a la Teoría de los Números
1985, Ed. Limusa.

Artículos:

[4] NEUMANN-LARA Víctor
The Dichromatic Number of a Digraph
Journal of Combinatorial Theory. Vol 33, No 3,(1982),(265-270).

[5] NEUMANN-LARA Víctor
The 3 and 4-dichromatic Tournaments of minimum order
Por aparecer en: Discrete Mathematics.

[6] K.B. REID AND E.T. PARKER
Disproof of a Conjeture of Erdös and Moser on Tournaments
Journal of Combinatorial Theory. 9,(1970),(225-238).