

03067



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES**

**UNIDAD ACADÉMICA DE LOS CICLOS PROFESIONAL  
Y DE POSGRADO**

**PROYECTO ACADÉMICO ESPECIALIZACIÓN, MAESTRÍA  
Y DOCTORADO**

**EN CIENCIAS DEL MAR (OCEANOGRAFÍA BIOLÓGICA  
Y PESQUERA)**

**INSTITUTO DE CIENCIAS DEL MAR Y LIMNOLOGÍA**

***SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE  
CRECIMIENTO EN PESO DE VON BERTALANFFY  
POR EL METODO DE VARIABLES ELEGANTES,  
ALGUNOS ASPECTOS TEORICOS Y PRACTICOS,***

**T E S I S**

**QUE EN CUMPLIMIENTO DE LOS REQUISITOS  
PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS  
DEL MAR, OCEANOGRAFIA BIOLÓGICA  
Y PESQUERA**

**P R E S E N T A :**

**JESUS JURADO MOLINA**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN.**

**FEBRERO 1993**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

|                          |  |    |
|--------------------------|--|----|
| <b>RESUMEN</b>           |  | 1  |
| <b>INTRODUCCION</b>      |  | 2  |
| <b>CAPITULO I</b>        | <b>Análisis de modelos de crecimiento</b>  | 7  |
| <b>CAPITULO II</b>       | <b>Dinámica de Poblaciones y Modelos</b>   | 10 |
| II.1                     | Análisis de modelos de dinámica de Poblaciones.  | 10 |
| II.2                     | Modelos Estructurales  | 19 |
| <b>CAPITULO III</b>      | <b>Modelo con estructura de peso de Schnute (1987).</b>  | 43 |
| <b>CAPITULO IV</b>       | <b>Solución de la ecuación de crecimiento en peso de von Bertalanffy por el método de Variables Elegantes.</b>   | 55 |
| <b>CAPITULO V</b>        | <b>Aplicación de la solución de la ecuación diferencial de crecimiento en peso de von Bertalanffy, en la estimación determinística de los parámetros <math>\rho</math> y <math>W</math> del modelo con estructura de peso de Schnute (1987).</b> | 60 |
| <b>CAPITULO VI</b>       | <b>Análisis de Estabilidad del modelo</b>  | 65 |
| <b>CAPITULO VII</b>      | <b>Aplicación del método a la lisa blanca (<u>Mugil curema</u>).</b>   | 68 |
| VII.1                    | Metodología  | 68 |
| VII.2                    | Resultados   | 69 |
| <b>CAPITULO VIII</b>     | <b>Discusión</b>   | 78 |
| <b>CONCLUSIONES</b>      |  | 85 |
| <b>LITERATURA CITADA</b> |  | 87 |
| <b>ANEXO</b>             |  | 92 |

**RESUMEN**

En el presente trabajo se calcula la solución general de la ecuación diferencial de crecimiento en peso de von Bertalanffy (1938) por el método de Variables Elegantes. Se analizan algunos aspectos teóricos que incluyen: el análisis de estabilidad del modelo, la interpretación de los parámetros de ajuste y una aplicación para la determinación determinística de los parámetros  $\rho$  y  $W$  del modelo con estructura de peso de Schnute (1987), concluyéndose que el modelo propuesto posee la mismas cualidades cualitativas que tiene el modelo clásico de crecimiento en peso de von Bertalanffy. También se realiza una primera aplicación práctica del modelo a datos de la lisa blanca (Muqil curema), bajo los criterios propuestos por Roff (1983) para la comparación de modelos, se concluye que el modelo desarrollado con el método de variables elegantes se ajusta mejor que el de von Bertalanffy, incluso en los valores extremos.



## INTRODUCCION

El crecimiento de un individuo y la dinámica de poblaciones son dos temas donde el desarrollo de modelos matemáticos ha sido prolífico. El crecimiento, según Everhart y Youngs (1989), se puede definir como un proceso de incremento ó como el desarrollo progresivo de un organismo. El crecimiento es un proceso complejo, generalmente se mide como el cambio de longitud ó peso de un individuo ó grupo de individuos entre dos tiempos de muestreo. Muchos factores pueden influenciar el crecimiento de un pez, entre ellos se encuentran: la cantidad, tamaño y calidad del alimento disponible; el número de individuos que usan la misma fuente de alimento; temperatura, oxígeno, y otros factores de calidad del agua; el tamaño, la edad y la madurez sexual del organismo (Everhart y Youngs, 1989). En opinión de Wootton (1990), si la tasa de consumo de alimento es suficientemente alta, un pez puede, aunado a los costos de energía de mantenimiento, sintetizar nuevo tejido. Este tejido puede ser retenido en el interior del organismo como crecimiento, incluyendo cualquier tipo de productos de almacenamiento, ó diseminado como gametos. El proceso de selección natural lleva a la evolución de patrones de crecimiento que tienden a maximizar el tiempo de vida de producción de descendencia. El crecimiento y la reproducción son procesos complementarios y ambos dependen de los recursos de energía y nutrientes disponibles conseguidos a través del comportamiento del pez.

Varios autores han tenido una participación destacada en el campo de la modelación matemática del crecimiento, entre ellos: Ford (1933), Walford (1946), Gulland (1984), Tomlinson y Abramson (1961), Allen (1980) y Beverton (1954). Sin embargo, según Csirke (1980) es von Bertalanffy (1938) quién ha logrado desarrollar la formulación matemática que mejor satisface ciertas condiciones primordiales en un modelo como son, el que la ecuación matemática sea coherente con el proceso biológico del crecimiento y tener una formulación que pueda ser incorporada fácilmente en los modelos de dinámica de poblaciones y de administración pesquera y lo más importante, que la ecuación se ajusta bien a la mayor parte de los datos observados sobre el crecimiento de peces.

En cuanto a la dinámica de poblaciones y las pesquerías, su manejo científico se inició en el primer cuarto de este siglo y su desarrollo posterior se debió en gran parte a los avances en la ecología y la dinámica de poblaciones. En la evolución de los modelos de pesquerías se observan dos tendencias principales. Según Healey (1984) la primera corresponde a una etapa que abarca desde el segundo cuarto de este siglo hasta principios de los años setenta, caracterizándose porque el principio central en el manejo de la pesquerías fue el concepto de rendimiento máximo sostenible (RMS) el objetivo principal de los modelos propuestos en esta etapa fue la estimación de esta cantidad. Healey (1984) menciona que la segunda tendencia tiene un inicio bien definido con la publicación de dos trabajos: *Policy for Canada's Commercial Fisheries* (Departament of Enviroment, Fisheries and Marine

Services, 1976) y en *Magnuson Fisheries Conservation and Management Act* (MFCMA). En estos documentos se establece de manera clara que el objetivo de la administración pesquera es maximizar el beneficio neto para la sociedad, que puede ser obtenido a partir de la pesca. El nuevo parámetro que juega un papel central en esta nueva etapa es el rendimiento óptimo, que de acuerdo a la MFCMA se define como: "La cantidad de peces que proveerá el beneficio global más grande a la nación, con énfasis en la producción de alimento y la recreación; a su vez esta cantidad esta basada en el rendimiento máximo sostenible de la pesquería, y es modificada por cualquier factor relevante de tipo ecológico, económico y social".

Al involucrar otros factores además de los estrictamente biológicos, los modelos adquieren una gran complejidad, debido a esto el desarrollo, adecuación o modificación de un modelo debe estar basado en la revisión de los modelos importantes desarrollados hasta la fecha, así como de un análisis de las hipótesis, conceptos y herramientas usadas en los mismos, como se hará en las próximas páginas.

Antes de iniciar la revisión de los modelos más usados en el análisis de las pesquerías es necesario establecer algunos conceptos básicos que ayudarán a una mejor comprensión.

Existen varias definiciones del concepto de modelo, destaca entre éstas, la propuesta por Gold (1977), debido a su carácter operacional: Un objeto M es un modelo de otro objeto S, si se

cumplen las siguientes condiciones:

- 1) Existe una colección de componentes de M, cada uno de las cuales corresponde a una componente de S
- 2) Por lo menos para algunas interacciones, la relación entre las componentes de M es análoga a la que existe entre las componentes de S.

En la literatura se observan varias clasificaciones de los modelos, entre ellas la sugerida por Gold (1977), quien los agrupa en dos categorías: la primera corresponde a los modelos correlativos, que según el autor solo reflejan una relación observada entre dos ó más variables, su propósito primario es describir y resumir una relación, de tal forma que esta puede ser verificada y usada como base para la predicción y el control. Por otra parte, los modelos explicativos también reflejan las relaciones observadas, pero además es necesario que la estructura del modelo refleje algún concepto del mecanismo causal que refuerze la relación, es decir el objetivo no es tanto describir la relación observada, sino explicarla. Levin y Hallam (1988) proponen un tercer tipo de modelos, en el cual estos se desarrollarían con el propósito de conocer la respuesta de un sistema a factores que no han sido observados.

Por otra parte Schnute (1977) clasifica los modelos de producción (aquellos que relacionan el esfuerzo de pesca con los datos de captura) en modelos de equilibrio, dinámicos y estocásticos; los segundos a diferencia de los primeros representan el estado presente de la pesquería en términos del estado pasado, los modelos estocásticos incluyen una variable azarosa que representa



la parte aleatoria del fenómeno.

En el presente trabajo se realiza una revisión bibliográfica de algunos modelos de crecimiento y dinámica de poblaciones con el fin de analizar las hipótesis, conceptos y metodologías usadas en los mismos; consideraciones que serán de gran utilidad para llevar a cabo el objetivo primordial de este trabajo que consiste en desarrollar un modelo de crecimiento en peso de naturaleza no-lineal a partir de la solución de la ecuación diferencial de crecimiento en peso por el método de variables elegantes.

Así mismo se examinarán algunos aspectos teóricos del modelo, tales como su adecuación al modelo con estructura de edades de Schnute (1987); también se realizó una aplicación práctica del modelo desarrollado a datos de la lisa blanca y se efectuó una comparación con los resultados obtenidos a partir del modelo clásico de von Bertalanffy.

CAPITULO I  
ANALISIS DE MODELOS DE CRECIMIENTO

En el presente capítulo se describen algunos aspectos relevantes de la ecuación de von Bertalanffy, la cual describe el crecimiento en longitud y esta dada por:

$$\frac{dl}{dt} = K(l_{\infty} - l) \quad (1.1)$$

donde:

- l : longitud del pez
- t : edad del pez
- $l_{\infty}$  : longitud asintótica
- K : define la tasa de crecimiento del organismo, también es conocida como *coeficiente de crecimiento de Brody*.

que es una ecuación diferencial lineal cuya solución se calcula fácilmente por el método de separación de variables. Al integrar entre los límites correspondientes a un tiempo inicial ( $t_0$ ) y un tiempo posterior (t), con la condición inicial de longitud  $l_0 = l(0)$ , se obtiene:

$$\int_{t_0}^{t(t)} dl / (Kl_{\infty} - Kl) = \int_{t_0}^t dt \quad (1.2)$$

Después de resolver y hacer algunas simplificaciones, la solución de (1.1), conocida como ecuación de crecimiento en longitud de von Bertalanffy, estará dada por:

$$l(t) = l_{\infty}(1 - e^{-k(t - t_0)}) \quad (1.3)$$

donde

$l(t)$  :denota la longitud del pez a la edad  $t$ .  
 $t_0$  :es la edad teórica a la cual el pez debe tener una longitud cero.

La expresión análoga para el crecimiento en peso no ha sido obtenida mediante una solución directa de una ecuación diferencial correspondiente, esta se obtiene al sustituir la expresión (1.3) en la ecuación que relaciona el peso con la longitud ( $W = aL^b$ , a y b constantes) dando:

$$W(t) = W_{\infty} (1 - e^{-k(t - t_0)})^b \quad (1.4)$$

donde  $W_{\infty}$  representa el peso asintótico. El exponente  $b$  para el caso isométrico toma el valor de 3.

El problema de determinar la ecuación de crecimiento en peso y longitud se reduce al cálculo de algunos parámetros ( $l_{\infty}$ ,  $W_{\infty}$ ,  $K$  y  $t_0$ ) y existen varios métodos para la determinación de los mismos, entre ellos se encuentran los desarrollados por Ford (1933), Walford (1946), Gulland (1964), Tomlinson y Abramson (1961), Allen (1966) y Beverton (1954).

La metodología mencionada anteriormente ha sido extensamente utilizada en varias regiones para diferentes especies tales como:

Sardina pilchardus (Larrafeta, 1965); Thunnus thynnus  
(Rodríguez-Roda, 1964); Phycis blennoides (Gallardo, 1986); Limanda  
limanda (Ortega 1988).

CAPITULO II  
DINAMICA DE POBLACIONES Y MODELOS

II.1 ANALISIS DE MODELOS DE DINAMICA DE POBLACIONES

La dinámica de poblaciones es quizá el área con mayor desarrollo matemático de la ecología (Gross, 1986), los primeros intentos en el modelado de estas interacciones se dieron con Verhulst (1838) quién desarrolló el modelo logístico, cuyas ecuaciones son las siguientes:

$$\frac{dx}{dt} = r(x)x \quad (2.1)$$

con  $r$  definida como:  $r(x) = r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ , y cuya solución es:

$$x(t) = \frac{Kx_0}{x_0 - (x_0 - K)e^{-r_0 t}} \quad (2.2)$$

MacCall (1990) menciona que la ecuación logística ha sido favorecida en el modelaje biomatemático y manejo de recursos, debido a que es concisa, de manejo matemático sencillo, y sobre todo porque es una muy buena primera aproximación para modelos denso-dependientes más complicados. Sin embargo, está basada en hipótesis que han sido criticadas por diversos autores, Hallam (1986) menciona las siguientes: todos los parámetros bióticos y abióticos son considerados constantes en el tiempo; debido a su carácter determinístico no se consideran eventos estocásticos; así mismo, todos los individuos de la población son tratados

identicamente, no son diferenciados por sexo, edad, o localización física; por otra parte se considera que la tasa de crecimiento per cápita responde instantáneamente a cambios en la densidad. Este modelo logístico fue utilizado por Graham (1935) para estimar la producción esperada del stock de peces del Mar del Norte.

Schaefer (1954, 1957) desarrolló una versión modificada del modelo logístico, que esencialmente consiste en igualar la tasa total de crecimiento a la tasa de crecimiento logística menos la tasa de captura. este modelo fue usado para estimar la máxima producción sostenible del atún aleta amarilla del Pacífico Este Tropical. Las hipótesis básicas de este modelo son las siguientes:

- 1) La tasa de incremento natural responde a los cambios en densidad de la población. Esto equivale a decir que se prescinden de los efectos retardados que puedan tener los cambios de densidad de la población sobre la tasa de incremento natural.
- 2) La tasa de incremento natural correspondiente a un peso dado de la población, es independiente de la composición por edades de dicha población.

Schaefer (1957) comenta que ninguna de las dos condiciones se cumplen exactamente en las poblaciones de peces, y que; sin embargo, si su modelo es aplicado a estados de equilibrio constante, los supuestos mencionados son innecesarios.

El concepto de equilibrio se define de la siguiente forma: "Si a cualquier nivel de la población de la pesquería se explota una cantidad igual a su tasa de incremento natural, no se registrará cambio alguno en la magnitud de la población". Por otra parte, si

lo explotado rebasa el incremento natural, la población disminuirá en un monto igual al del rebase. Así mismo establece la relación general entre la población y la pesca de equilibrio, bajo la siguiente ecuación:

$$C_e = k_1 \bar{P} f(\bar{P}) + \eta \bar{P} \quad (2.3)$$

donde:

$C_e$  : es la captura en equilibrio

$\bar{P}$  : es la población anual media

$k_1$  : es una constante

$\eta$  : es una variable azarosa

$f(\bar{P})$ : es una función univalente de P. Su valor es cero en el máximo nivel de población y aumenta al disminuir el nivel de ésta. Es por consiguiente, un término negativo auto-regulado necesario para describir el balance natural, de ajuste automático, que existe entre la tasa de incremento natural y la capacidad de carga de un ambiente limitado.

Después de asumir que la forma más sencilla de la función  $f(\bar{P})$  es la lineal:  $f(\bar{P}) = L - \bar{P}$ , (L es la magnitud máxima de la población), Schaefer (1957) establece el modelo que tiene la siguiente forma:

$$(1/k_2) \frac{\Delta U}{U} = \alpha(M - U) - \frac{C}{U} + \epsilon \quad (2.4)$$

donde:

- $\bar{U}$  : es la captura por unidad de esfuerzo promedio  
 $k_2$  : es una constante de proporcionalidad entre la  
 captura por unidad de esfuerzo promedio y la  
 población  
 $\alpha$  y  $M$  : son constantes  
 $c$  : es una variable azarosa

Si  $\Delta U = 0$  y  $c = 0$  (2.4) se reduce a:

$$\frac{C}{\bar{U}} = \alpha CM - \bar{U} \quad (2.5)$$

Esta ecuación fue llamada por Schaefer (1954): "Condición de línea de equilibrio" y describe la relación *promedio* entre el esfuerzo de pesca ( $F=C/\bar{U}$ ) y la abundancia de la población ( $\bar{U}$ ) cuando la captura anual está en equilibrio con la tasa anual de incremento natural.

Este modelo ha sido tomado como base para posteriores trabajos, cabe mencionar de manera resumida que en el modelo se incluye sólo una variable independiente, el tiempo ( $t$ ), además de cuatro variables dependientes (funciones del tiempo). Estas son: la biomasa de la población  $P(t)$ , la tasa de esfuerzo pesquero  $E(t)$ , la tasa de captura  $C(t)$  y la captura por unidad de esfuerzo  $U(t)$ . Existen también tres parámetros sumamente importantes en este modelo: la tasa de crecimiento natural ( $r$ ), la capacidad de carga del medio ( $K$ ) y el coeficiente de capturabilidad ( $q$ ). Finalmente es importante señalar que la naturaleza del modelo es continua



(Schnute, 1977).

Más tarde Fox (1975) basado en el modelo logístico, establece una formulación matemática para un modelo de producción:

$$\frac{dP}{dt} = P_t g(P_t) - P_t h(f_t) \quad (2.6)$$

donde:

- $P_t$  : es el tamaño de la población al tiempo  $t$   
 $P_t g(P_t)$  : es la función de producción de la población que engloba los efectos de reproducción, crecimiento en peso y mortalidad natural  
 $h(f_t)$  : es el coeficiente de mortalidad por pesca, ejercida por  $f_t$  unidades de esfuerzo pesquero.

Las hipótesis de trabajo son básicamente las mismas que estableció Schaefer (1954, 1957); sin embargo, enfatizan de forma particular el hecho de que el modelo se debe aplicar a una sola población aislada.

En el equilibrio ( $dP/dt = 0$ ) la producción  $Y$  se obtiene como:

$$Y = qfP = P g(P) \quad (2.7)$$

Pella y Tomlinson (1969) sugirieron la siguiente expresión para la función de producción:

$$P_t g(P_t) = HP_t^m - KP_t \quad (2.8)$$

La cual al sustituirla en la expresión (2.7) se obtiene la

siguiente relación de equilibrio:

$$Y = HP^m - Kp = qfP \quad (2.9)$$

Que al reescribir en términos de la captura por unidad de esfuerzo y el esfuerzo promedio pesado, toma la forma:

$$U_i = [(Kq^{m-1}/H) + (q^m/H)\bar{F}_i] \quad (2.10)$$

que simplificada da la expresión:

$$U_i = (\alpha + \beta\bar{F}_i)^{1/(m-1)} \quad (2.11)$$

La ecuación anterior es no-lineal, contiene tres parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $m$ , su determinación se realiza por el método de mínimos cuadrados. Por otra parte los puntos críticos que permiten determinar el esfuerzo óptimo, la captura por unidad de esfuerzo óptima y el rendimiento máximo son:

$$f_{opt} = (\alpha - \alpha m) / m\beta \quad (2.12)$$

$$U_{opt} = (\alpha/m)^{1/(m-1)} \quad (2.13)$$

$$Y_{max} = \frac{(\alpha - \alpha m)(\alpha/m)^{1/(m-1)}}{m\beta} \quad (2.14)$$

En la misma contribución, Fox (1977) desarrolló el programa de computación PRODFIT para llevar a cabo los cálculos anteriores, cabe mencionar que este sigue utilizándose de forma prolífica

para evaluar las pesquerías de atún del Océano Atlántico (Liu, 1986, 1987; Miyake y Kume, 1986, 1987; Gonzales-Garcés, 1980; Coan, 1979; Kume, 1981, 1984; Miyabe, 1988; Sun y Yang, 1984; Yeh y Liu, 1989).

Schnute (1977) trabajó con el modelo de Schaefer (1954, 1957), para obtener una versión modificada del mismo, esta posee la característica de ser dinámico y estocástico, la relación funcional propuesta tiene la siguiente forma:

$$\bar{C}_n = g(\bar{E}_n, \bar{C}_{n-1}, \bar{E}_{n-1}, \epsilon_n) \quad (2.15)$$

Este autor considera la captura del año  $n$  en términos del esfuerzo del mismo año y la captura y el esfuerzo del año anterior. Un modelo con estas características es dinámico porque representa el estado presente de la pesquería en función del pasado, al incluir la variable azarosa  $\epsilon_n$  el modelo adquiere un carácter estocástico. bajo estas condiciones el modelo desarrollado por Schnute toma la siguiente forma:

$$\bar{C}_n = \frac{qk}{r\tau} \bar{E}_n \ln \left[ 1 + \phi \left( 1 - \exp \left[ -\frac{r\tau}{qk} \frac{\bar{C}_{n-1}}{\bar{E}_{n-1}} \right] \right) \exp(\alpha \epsilon_n) \right] \quad (2.16)$$

$$\text{donde } \phi = \frac{r - q\bar{E}_{n-1} \exp[(r - q\bar{E}_n)\tau] - 1}{r - q\bar{E}_n [1 - \exp(-(r - q\bar{E}_{n-1})\tau)]} \quad (2.17)$$

Este modelo es de naturaleza discreta, contiene cuatro parámetros  $r$ ,  $q$ ,  $k$ , y la variable  $\sigma$  que es un término de error, que se incluye de la forma más sencilla en la ecuación. El autor enumera cuatro ventajas de este modelo sobre el de Schaefer: a) la ecuación maneja datos que son disponibles con gran facilidad para el patrón de pesca, es decir una lista de valores de esfuerzo y captura; b) como los errores debido al azar se muestran explícitamente en la ecuación anterior, el esquema de la estimación de los parámetros del modelo es dictado sin ambigüedad por la condición de mínimos cuadrados  $\sum_n^2 = 0$ ; c) debido a que el modelo es estocástico, es posible estimar la incertidumbre (ó varianza) en los parámetros, como los parámetros mismos y d) Las fórmulas de estimación son tan sencillas que se puede utilizar una calculadora de mano para realizarlas.

Como se mencionó en párrafos anteriores, el modelo de Schaefer (1954 y 1957) está basado en varios supuestos que le permiten una gran simplicidad en su manejo, Silliman (1971) menciona que el más importante es el que se refiere al efecto nulo que tiene el retraso temporal entre la reproducción y el reclutamiento en el crecimiento de la población, debido a esto se han hecho varios intentos para desarrollar modelos que incluyan este aspecto. En este sentido Walter (1973) modificó los modelos de Schaefer (1954, 1957), Pella y Tomlinson (1969) y Fox (1975) al adicionar un término que involucra la población de años anteriores:

$$\frac{1}{p} \frac{dP}{dt} = b - a_1 P(t) + a_2 P(t-w) - qf(t) \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{p} \frac{dP}{dt} = b - a_1 \log P(t) + a_2 \log P(t-w) - qf(t) \quad (2.19)$$

donde  $w$  es una unidad de tiempo que representa el retraso entre reproducción y reclutamiento,  $f(t)$  representa el esfuerzo pesquero y  $q$  es el coeficiente de capturabilidad. La solución de las ecuaciones anteriores se obtiene al integrar sobre un intervalo de tiempo para el cual sean disponibles los datos de captura y esfuerzo necesarios:

$$\log \frac{P(t+1)}{P(t)} = b - a_1 \bar{P}(t) + a_2 \bar{P}(t-w) - q\bar{f}(t) \quad (2.20)$$

$$\log \frac{P(t+1)}{P(t)} = b - a_1 \int_t^{t+1} \log P + a_2 \int_{t-w}^{t-w+1} \log P - q \int_t^{t+1} f \quad (2.21)$$

$\bar{P}(t)$ ,  $\bar{P}(t-w)$  y  $\bar{f}(t)$  son valores promedio. Los coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$  y  $b$  se determinan a partir de regresiones múltiples (Walter, 1973). Los niveles de equilibrio se calculan de la forma usual, para la ecuación (2.20) la condición de máximo rendimiento sostenible es:

$$a_1 P - qf = 0 \quad (2.22)$$

de forma semejante, para la ecuación (2.21) se encuentra que el nivel de  $f$  que maximiza el rendimiento sostenido es :

$$a_1 - qf = 0 \quad (2.23)$$

Al resolver las ecuaciones anteriores se determina el esfuerzo pesquero óptimo:

$$f_m = \frac{a_1 P}{q} = \frac{b + a_2 P(t-w)}{2q} \quad (2.24)$$

$$f_m = \frac{a_1}{q} \quad (2.25)$$

## II.2 MODELOS ESTRUCTURALES

Otro tipo importante de modelos son los llamados estructurales, utilizados en la evaluación de Stock, basándose en principio en la estructura de edades de la población, y que fueron desarrollados hace aproximadamente 60 años, para facilitar el análisis e interpretación de las estadísticas comerciales de captura. Su uso se considera para el manejo racional de los recursos pesqueros, debido a que la aplicación de estas poderosas técnicas analíticas permite la reconstrucción de la dinámica de la población y provee estimaciones de las tasas de mortalidad y abundancias absolutas de la población (Megrey, 1989).

Megrey (1989) menciona que la ventaja de los modelos estructurales con respecto a los de producción (Graham, 1935; Schaefer, 1954,

1957) ó el de Beverton y Holt (1957), radica en que se pueden aplicar sin conocimiento del esfuerzo efectivo de pesca, o de la selectividad del arte de pesca. En años recientes se ha observado una gran proliferación de la metodología mencionada, observandose incluso desarrollos paralelos de algunos modelos (Megrey, 1989). Una de las principales causas que han influido en este desarrollo, es la accesibilidad a computadoras con una grancapacidad de cálculo que permiten la estimación de parámetros, necesaria para modelos más elaborados que tienen un mayor sentido biológico, por lo que en la actualidad los métodos mencionados constituyen una de las principales herramientas de investigación usadas por los científicos dedicados al área de pesquerías, para evaluar el estado de un Stock de peces bajo explotación (Megrey, 1989).

En los modelos con estructura de edad, se estudian eventos a nivel de población al analizar individuos o grupos de edad similar. Al contrario de los modelos de producción, como los de Graham (1935) y Schaefer (1954, 1957), en los cuales el Stock es tratado como una sola identidad (Megrey 1989).

Los modelos estructurales de edad consideran explícitamente los procesos biológicos que alteran la población de peces. Lo anterior incluye mecanismos para describir los procesos de reproducción y mortalidad debida a causas naturales y a la actividad pesquera. Cada proceso es monitoreado independientemente para cada grupo de edad, al tratar cada proceso como un submodelo (Megrey, 1989).

A pesar de que todos los modelos estructurales están basados en

las mismas hipótesis, los numerosos métodos propuestos durante los últimos 80 años son bien diferentes con respecto a sus formulaciones matemáticas, los parámetros estimables y las técnicas de solución. Debido a estas diferencias, cada modelo tiene sus debilidades, virtudes y sus propias fuentes de error, más aún, la aplicación de más de un método a un conjunto de datos comunes no da resultados idénticos. Se han llevado a cabo pocos estudios comparativos, de tal forma que no es muy claro cual es el mejor método bajo un número dado de circunstancias (Megrey, 1989). Los modelos estructurales se basan en algunos supuestos básicos. En general se asume que la mortalidad total  $Z$  esta dada por la suma de la mortalidad natural  $M$  y la mortalidad por pesca  $F$ :

$$Z = M + F \quad (2.26)$$

Agger *et al* (1971), Doubleday (1976) y Pope (1977) enunciaron el supuesto de separabilidad, que permite una formulación más realista de la mortalidad por pesca al proveer factores específicos que podrían causar la variación de  $F$  debido a la edad y al año, usualmente ésta se escribe de la siguiente forma:

$$F(a,y) = s(a)f(y) \quad (2.27)$$

la cual expresa la mortalidad por pesca como el producto de dos cantidades, la primera representa un factor específico de la edad, la otra uno específico del año. Las siguientes son formas equivalentes de (2.27):



$$\ln F(a,y) = \ln s(a) + \ln f(y) \quad (2.28)$$

$$\ln F(a,y) = u(a) + e(y) \quad (2.29)$$

$$F(a,y) = \exp [u(a) + e(y)] \quad (2.30)$$

$$F(a,y) = \exp [\ln s(a) + \ln f(y)] \quad (2.31)$$

Por lo que la mortalidad total puede ser escrita como:

$$Z(a,y) = F(a,y) + M \quad (2.32)$$

Una ecuación que es básica en los modelos estructurales es la de supervivencia, que describe el cambio numérico que se lleva a cabo en la población, debido a mortalidad natural y por pesca:

$$N(a+1,y+1) = N(a,y)\exp[-F(a,y)-M] \quad (2.33)$$

Esta relación describe la supervivencia para dos edades sucesivas en una cohorte (Megrey 1989). Si además se asume que los peces se reclutan a la pesquería a una edad fija ( $r$ ), como lo propone Deriso (1980), entonces un pez con edad  $a$ , vivo en el año  $y$ , nació en el año  $y-a$  y fue reclutado a la edad  $r$  en el año  $y-a+r$ . Al incorporar los aspectos anteriores y suponiendo que  $R$  representa el número original de individuos (2.33) puede ser modificada:

$$N(a,y) = R(r,y-a+r)\exp\left[-\sum_{i=r}^{a-1} F(i,y-a+i)+M\right] \quad (2.34)$$

El número total de individuos en la población en cualquier año estará dada por la suma de todos los grupos de edad:

$$N(y) = \sum_{a=r}^n N(a,y) \quad (2.35)$$

Así mismo la biomasa total de la población esta dada por:

$$B(y) = \sum_{a=r}^n N(a,y)W(a) \quad (2.36)$$

donde  $W(a)$  representa el peso promedio adquirido en la edad  $a$ .

La ecuación de captura de Baranov (1919), es básica para la solución de problemas en dinámica de poblaciones. Esta ecuación describe la relación entre la tasa a la cual los peces son capturados y el número de peces vivos en la población capturable. La ecuación de captura combina la ecuación diferencial del proceso de captura con el modelo de supervivencia. En general se escribe de la siguiente forma (Megrey, 1989):

$$C(a,y) = \frac{F(a,y)}{F(a,y)+M} N(a,y) [1 - \exp[-F(a,y)-M]] \quad (2.37)$$

la captura total en cualquier año es la suma de la captura para todos los grupos de edad en la población:

$$C(y) = \sum_{a=r}^n C(a,y) \quad (2.38)$$

y la biomasa de captura total es:

$$C(a,y) = \sum_{a=r}^n C(a,y)W(a) \quad (2.39)$$

Como ya se mencionó, los modelos estructurales se refieren a las expresiones matemáticas exactas que resultan de combinar las ecuaciones (2.33) y (2.37) en diferentes formas. Sin embargo como comenta Megrey (1989): "Aún cuando todos los métodos estructurados comparten las mismas bases teóricas, son diferentes en cuanto a su formulación matemática, en la estimación de parámetros y las técnicas utilizadas para su solución. Debido a estas diferencias cada modelo tiene sus propias debilidades y ventajas, así como sus fuentes de error".

En los siguientes párrafos se detallan algunos de los modelos estructurales más importantes, esta descripción esta basada en el extenso trabajo realizado por Megrey (1989).

El primer modelo estructurado fué desarrollado por Derzhavin en 1922 (Megrey, 1989), su modelo usa valores anuales de captura, así como valores de la edad promedio (average age composition values) para estimar la tasa máxima de explotación, además de la abundancia mínima de la población. El modelo está basado en una idea simple: El tamaño de población de una cohorte al tiempo que entra a la fase explotable se puede aproximar al sumar las capturas de esa cohorte durante los años que contribuye a la pesquería, con ésta aproximación y el supuesto adicional de mortalidad natural despreciable, Derzhavin pudo estimar la abundancia total de cualquier grupo de edad en cualquier año y la

tasa de explotación para cualquier grupo de edad.

La expresión para la población mínima al inicio de cualquier año de referencia esta dada por:

$$\begin{aligned}
 N(y) = & [1-H(0,y)]\Theta(y) \\
 & + [1-H(0,y)-H(1,y)]\Theta(y+1) \\
 & + [1-H(0,y)-H(1,y)-H(2,y)]\Theta(y+2) \\
 & + [1-H(0,y)-H(1,y)-H(2,y)-\dots \\
 & - H(s-1,y)]\Theta(y+s-1)
 \end{aligned}
 \tag{2.40}$$

$H(a,y)$  representa la fracción de peces de edad  $a$  en la captura del año (la composición de edad estimada) y  $\Theta(y)$  es la captura total estimada (en números). Al considerar una unidad de tiempo la ecuación de captura (2.37) puede ser reescrita de tal forma (si se ignoran los índices) que se obtiene:

$$\frac{C}{N} = 1 - \exp(-F)
 \tag{2.41}$$

a partir de la ecuación anterior (2.41) la máxima tasa de mortalidad por pesca puede ser estimada por :

$$F = \ln \left( 1 - \frac{C}{N} \right)
 \tag{2.42}$$

Mas tarde Fry (1949), refinó el modelo de Derzhavin (1922). Su modelo usa datos de la captura anual y la composición de edad anual, es decir en lugar de usar una composición de edad promedio para todos los años, utiliza una estimación de la composición de

edad para cada año, cabe mencionar que al igual que Derzhavin, asume una mortalidad natural nula. Este método es también conocido como: "Análisis de población virtual". Fry (1949) estableció el concepto de población virtual como: "La suma de los peces, pertenecientes a una clase anual dada, presentes en el agua en cualquier tiempo que están destinados a ser capturados en ese año y los subsecuentes". El modelo VPA usa una estimación de la estructura de edades para cada año. Para establecer la ecuación se considera que la captura de edad  $a$  en cualquier año esta dada por:  $C(a,y) = \Theta(y)H(a,y)$ . La población virtual para cualquier edad y año es:

$$V(a,y) = \sum_{i=1}^{\min(A,Y)} C(a+i-1,y+i-1). \quad (2.43)$$

Megrey (1989) menciona que enseguida de la aparición del modelo de Fry (1949), Beverton (1954), Beverton y Holt (1957) junto con Palcheimo (1958), propusieron modelos con estructura de edad que enfatizan la estimación de las tasas de mortalidad con datos de captura y esfuerzo, un adelanto muy importante en estos modelos, se refiere a que por primera vez se supone la mortalidad natural como distinta de cero.

Más tarde Murphy (1965), basado en el modelo de Baranov (1918) propuso un modelo secuencial no-lineal, en este modelo la mortalidad por pesca es representada como una proporción de la captura del stock total. El modelo estima la tasa de mortalidad por pesca y la abundancia de la población con datos de captura por

edades, un valor para la mortalidad natural (conocida o supuesta) y un valor inicial de la mortalidad por pesca para el grupo de edad explotado más joven. Debido a la naturaleza no-lineal de las ecuaciones del modelo de Murphy, no se podía derivar una expresión sencilla para determinar la mortalidad por pesca y la abundancia de la población, por lo que en la solución de este modelo se usa un esquema computacional secuencial para ligar grupos de edad sucesivos dentro de un cohorte. En cada paso un proceso iterativo es requerido para resolver las ecuaciones (Megrey, 1989).

En el mismo año, Gulland (1965) describió un modelo un poco distinto, en el cual la ecuación de captura de Baranov (1918), fue combinado con el concepto de población virtual propuesto por Fry en 1949 (Megrey, 1989). Gulland usó un método similar al de Murphy (1965) para estimar los parámetros de su modelo, pero uso una variante de la solución de tipo retrospectivo (*backward*) para ligar los grupos de edad sucesivos. El procedimiento requiere proveer una condición ó valor inicial para la tasa de mortalidad por pesca para el grupo de edad más avanzada de una cohorte. La ecuación tiene la siguiente forma:

$$\frac{N(a+1, y+1)}{C(a, y)} = \frac{[F(a, y) + M] \exp[-F(a, y) - M]}{F(a, y) [1 - \exp[-F(a, y) - M]]} \quad (2.44)$$

como puede observarse en la ecuación anterior (2.44), para cualquier cohorte, el Modelo SPA de Gulland (1965) expresa la tasa entre la abundancia de la población y la captura como una función

no lineal de la mortalidad por pesca. Para cada cohorte, el número de edades para las cuales existen datos de captura disponibles es  $N$ , por lo que se tienen  $N$  ecuaciones similares a (2.44) con  $N+2$  parámetros desconocidos, la solución de Gulland para este problema consistió en proporcionar estimaciones de  $M$  y del valor final de mortalidad por pesca con ayuda de un proceso iterativo, usando el método de Newton-Raphson (Burden y Faires, 1985) para calcular la solución.

La ecuación de Murphy (1985) es similar al modelo de Gulland (1965), la diferencia entre ambos estriba en que Murphy usa una variante de la solución de tipo progresivo (*forward*) para resolver las ecuaciones no lineales, es decir calcula los parámetros a partir del grupo más joven hasta el grupo de edad más avanzada en la cohorte. Durante algún tiempo se investigaron las propiedades de convergencia de los modelos anteriores. Como se ha mencionado, las ecuaciones para cualquier cohorte pueden ser resueltas con un método *forward* (de jóvenes a viejos) o *backward* (de viejos a jóvenes). Megrey (1989) comenta que Jones (1981) fue el primero en demostrar las propiedades de convergencia-divergencia de las estimaciones de mortalidad por pesca, derivadas de las modalidades *backward* o *forward*. Así mismo Jones (1981) observó que cuando el proceso secuencial empezaba con la edad más grande y se trabajaba progresivamente hacia las más jóvenes, las estimaciones de la mortalidad por pesca convergían a sus valores reales. Por el contrario si el proceso comenzaba con los jóvenes, las estimaciones de la mortalidad por pesca para los más viejos

divergían, a menos que la  $F$  terminal fuera muy cercana a su valor real. Tomlinson (1970) también confirmó la superioridad de la modalidad *backward*.

La principal desventaja de los modelos propuestos por Gulland (1965) y Murphy (1965) estriba en que se requiere un proceso computacional iterativo intensivo (que representa una gran cantidad de cálculos) para resolver las ecuaciones (Megrey, 1989). Este problema fue resuelto por Pope (1972) quién propuso un modelo similar a los de Gulland (1965) y Murphy (1965), pero que reduce la cantidad de cálculos al introducir una aproximación al modelo no lineal secuencial, que consiste en reemplazar a la curva que describe el decaimiento exponencial por una función escalonada, la cual tiene la siguiente forma:

$$\exp(M/2) = \frac{[F(a,y) + M] \{1 - \exp[-F(a,y)]\}}{F(a,y) \{1 - \exp[F(a,y) - M]\}} \quad (2.45)$$

en la aproximación de Pope se asume que la captura total es tomada exactamente a la mitad del año, con ayuda de esta aproximación, las estimaciones de la abundancia de la población y las tasas vitales de la población pueden ser calculadas directamente de datos de captura sin la necesidad de un proceso iterativo (Megrey, 1989).

Más tarde se desarrolló el supuesto de *separabilidad* que básicamente consiste en establecer que en cualquier año, la mortalidad por pesca puede ser descrita por dos factores; el



primero, como mortalidad por pesca de reclutamiento total ó patrón de explotación y un factor para contabilizar el efecto diferencial de un patrón de explotación anual en varios grupos de edad en el Stock (Megrey, 1989). Agger et al. (1971) fue el primero en desarrollar un modelo dentro de un marco de optimización basado en el supuesto de separabilidad, en su trabajo redujó drásticamente el número de parámetros, al proveer un método por el cual todos los parámetros pueden ser estimados estadísticamente en forma simultánea en lugar de secuencialmente y de la misma forma ligar simultáneamente datos de varias cohortes.

Existen varios modelos que integran supuesto de separabilidad, entre ellos destacan: Doubleday (1976), Palohemino (1980), Fournier and Archibald (1982), Pope and Shepard (1982), Dupont (1983) y Deriso et al. (1985). En los siguientes párrafos se analizarán los trabajos de Deriso (1980 y 1985).

Deriso (1980) propusó un modelo que ha sido calificado como más realista y que está basado en el supuesto de que la pesquería tiene una selectividad de filo de navaja ('Knife edge'), es decir que, para alguna edad fija  $K$ , los peces de edad  $K$  ó más grandes, experimentan una mortalidad por pesca uniforme, por el contrario los jóvenes son invulnerables a la pesca. En su modelo, Deriso (1980) utiliza una modificación de la ecuación para el peso de Brody (Ricker, 1975):

$$W_{i,t} = W_{k,t-(i-k)} \left[ \frac{1 - \rho^{i+(i-k)}}{1 - \rho} \right] \quad (2.48)$$

donde:

$W_{i,t}$  = es el peso promedio de un adulto  
 capturable de  $i$  años de edad, durante el año  $t$   
 $\rho$  = es el coeficiente de crecimiento de Brody;  
 $0 \leq \rho \leq 1$ , adimensional.  
 $k$  = es la edad de reclutamiento para los  
 individuos de la pesquería

como ya se mencionó, los adultos capturables experimentan una mortalidad anual común, por lo que se puede definir  $l_t$  como la fracción anual de supervivencia de los adultos capturables del año  $t$  al  $t + 1$ . La biomasa capturable justo antes del inicio de la temporada de pesca del año  $t$  es:

$$B_t = \sum_{i=k}^{\infty} W_{i,t} N_{i,t} \quad (2.47)$$

$N_{i,t}$  representa el número de individuos de edad  $i$  en el año  $t$ . A partir de la expresión anterior, Deriso construyó un modelo que usa medidas de biomasa para estimar los parámetros  $l_t$  y  $\rho$ , y que es conocido como modelo de atraso-diferencia:

$$B_{t+1} = (1 + \rho) l_t B_t - \rho l_t l_{t-1} B_{t-1} + W_{k,t+1} N_{k,t+1} \quad (2.48)$$

Un supuesto adicional se refiere a que el reclutamiento  $W_{k,t+1} N_{k,t+1}$  es una función de la biomasa de los reproductores y

que ésta última esta dada por el escape ( $B_t - C_t$ ):

$$W_{k,t+1} N_{k,t+1} = FCB_{t+1-k} - C_{t+1-k} \quad (2.49)$$

Por otra parte la supervivencia  $l_t$  se puede separar en dos componentes, la supervivencia natural  $l$  y el escape de la pesquería  $S_t$ . Al introducir las cantidades establecidas, el modelo de retraso diferencial toma la siguiente forma:

$$B_{t+1} = (1 + \rho) l S_t - \rho l^2 \frac{S_t}{B_t} S_{t-1} + FCS_{t+1-k} \quad (2.50)$$

Es importante señalar que en el modelo anterior se encuentran de forma explícita los términos de crecimiento  $\rho$ , sobrevivencia natural  $l$ , escape ( $S_t = B_t - C_t$ ) y la relación de reproductores-reclutas  $F$ .

Cabe mencionar que el modelo representado por (2.50) sigue el patrón de reclutamiento de filo de navaja (Knife edge). A partir de (2.48) Deriso construyó lo que llamó: "Modelo de reclutamiento incompleto" y que esta dado por el par de ecuaciones siguientes:

$$P_{t+1} = (1 + \rho) l m P_t - \rho (l m)^2 P_{t-1} + FCS_{t+1-k} \alpha_{t+1-k} \quad (2.51)$$

$$B_{t+1} = (1 + \rho) l S_t - \rho l^2 \frac{S_t}{B_t} S_{t-1} + (1 - m) P_{t+1} \quad (2.52)$$

donde:

- $P_t$  : es la biomasa total de los adultos no-capturados de la población, los individuos en  $P_t$  son sexualmente inmaduros
- $B_t$  : es la biomasa total de los adultos capturables antes de la temporada en el año  $t$
- $S_t$  : ( $B - C$ ),  $C$  es la captura anual en el año  $t$ , y  $S_t$  es la biomasa total de reproductores en el año  $t$
- $1 - m$  : es la fracción de individuos en  $P_t$  que llegan a ser capturables al principio del año  $t$  (anterior a la temporada de pesca).
- $\rho$  : coeficiente de crecimiento en peso de Brody.

Los parámetros del modelo anterior se pueden estimar a partir de datos anuales de captura y esfuerzo, para llevar a cabo esto Deriso (1980) supuso la siguiente relación entre la Captura  $C_t$  y el esfuerzo  $E_t$ :

$$C_t = qE_t B_t \quad (2.53)$$

ó su equivalente:

$$c_t = \frac{C_t}{E_t} = qB_t \quad (2.54)$$

En las ecuaciones anteriores (2.53 y 2.54), están involucrados el esfuerzo  $E_t$ , el coeficiente de capturabilidad con dimensiones de esfuerzo a la menos uno y la captura por unidad de esfuerzo  $c_t$  para el año  $t$ , al sustituir (2.52) en (2.53) y utilizar  $B_t = c_t / q$ , se obtiene una ecuación equivalente al modelo general de retraso diferencial que tiene la ventaja de contener solo cantidades

observables (Deriso, 1980):

$$\begin{aligned}
 c_{t+1} = & (1 + \rho)l(1 - qE_t + m)c_t \\
 & - l^2 \{ \rho(1 - qE_t)(1 - qE_{t-1}) \\
 & + (1 + \rho)^2(1 - qE_{t-1})m + \rho m^2 \} c_{t-1} \\
 & + (1 + \rho)\rho l^3 m(1 - qE_{t-2})(1 - qE_{t-1} + m)c_{t-2} \\
 & - (\rho l^2)^2 m^2(1 - qE_{t-2})(1 - qE_{t-2})c_{t-2} \\
 & + \rho(1 - m)F \left[ (1 - qE_{t+1-k}) \frac{c_{t+1-k}}{q} \right] \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

para la estimación de parámetros se utilizó el procedimiento de Gauss-Newton por mínimos cuadrados.

A pesar de que el modelo de Deriso (1980) integra aspectos biológicos más realistas no ha sido completamente exitoso, Roof (1983) llevó a cabo un análisis comparativo, el cual se basó principalmente en los trabajos de Schnute (1977), Deriso (1980) y en un modelo propuesto por el mismo, este análisis se centró en la capacidad de estos modelos para predecir las capturas futuras. Roof (1983) propone que la CPUE del año  $t$  es muy parecida a la del año  $t-1$ , por lo que la captura ( $C_t$ ) en el año  $t$  es proporcional a  $E_t C_{t-1} / E_{t-1}$ . De esta forma construir un modelo predictivo de la captura, solo requiere establecer una regresión lineal entre las variables mencionadas:

$$C_t = A + B E_t C_{t-1} / E_{t-1} \quad (2.56)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes de regresión. El modelo anterior es

conocido como Modelo Autorregresivo Simple, es importante señalar que este modelo es de naturaleza estrictamente predictiva y que su utilidad debe ser juzgada con base en su habilidad para predecir capturas y CPUE, más que en ser base de una razón fundamental de tipo biológico (Roff, 1983).

Los parámetros que utilizó Roff (1983) para la comparación de los modelos fueron el error cuadrado medio y el error porcentual absoluto promedio (MA%E), definido por el autor como:

$$\text{MA}\%E = \frac{1}{(T_2 - T_1 + 1)} \sum_{t=T_1}^{T_2} \left| \frac{O_t - P_t}{O_t} \right| \times 100\% \quad (2.57)$$

donde  $T_1$  y  $T_2$  son los años inicial y final de la serie de tiempo respectivamente;  $O_t$  y  $P_t$  son las capturas observadas y predichas para el año  $t$ . En sus conclusiones Roff (1983) comenta que los modelos examinados dependen exclusivamente de datos de esfuerzo y captura, y que este aspecto es al mismo tiempo su fuerza y debilidad, la primera radica en que tales datos son relativamente fáciles de obtener, por otra parte su debilidad se debe a que no podrían ser capaces de reflejar la complejidad inherente de los sistemas biológicos. Sin embargo, en lo que respecta a la predicción de futuras capturas, el modelo SA funciona mejor que los propuestos por Deriso (1980) y Schnute (1977), por lo que sugiere que en general el SA puede ser considerado hasta el momento como el mejor modelo.

Schnute (1985) menciona que un problema fundamental en el manejo

de las pesquerías es deducir el estado de un stock a partir de datos históricos de capturas y esfuerzos. Existen varios modelos que han sido propuestos para solucionar este problema, como los de Baranov (1925), Thompson y Bell (1934), Schaefer (1954 y 1957), Pella y Tomlinson (1989), Walter (1973) y Schnute (1977). Por otra parte Schnute (1985) considera que el modelo de Deriso (1980) contiene un gran avance, debido a que incorpora aspectos biológicos y teóricos, y que a pesar de su metodología funciona pobremente en la práctica, como lo demostró Roff (1983), el modelo de Deriso (1980) tiene valor considerable como herramienta conceptual y teórica, debido a que principalmente refleja el hecho inegable de que la población consiste de cohortes que envejecen un año cada año.

Schnute (1985) utilizó los supuestos de Deriso (1980) para proponer una teoría general para el análisis de la captura y el esfuerzo pesquero. Como resultado de ello, se desarrolló un modelo de carácter global; con dos medidas básicas del tiempo (en años), la edad  $\alpha$  y el año  $t$ ; y por otra parte, el reclutamiento se lleva a cabo a una edad fija ( $K$ ).

Existen tres relaciones importantes de  $\alpha$  y  $t$ : (i) la población total  $N_{at}$  de edad  $\alpha$  al principio del año  $t$ ; (ii) la captura  $C_{at}$  y (iii) el peso individual de los organismos  $W_{at}$ , cuyas expresiones correspondientes, en términos de biomasa, son:

$$N_{at}^* = W_{at} N_{at}$$

(2.58)

$$C_{at}^* = W_{at} C_{at} \quad (2.59)$$

en forma similar el reclutamiento en relación a la biomasa (donde  $W_{kt}$  es el peso de los organismos a la edad de reclutamiento  $k$ ) está dado por:

$$R_t^* = W_{kt} R_t \quad (2.60)$$

si se toman en cuenta las poblaciones con estructura de edad, las relaciones de biomasa totales son:

$$N_t^* = \sum_{a \geq k} N_{at} \quad (2.61)$$

$$C_t^* = \sum_{a \geq t} C_{at} \quad (2.62)$$

El modelo de Schnute (1985) está basado en ocho supuestos básicos, que relacionan las cantidades definidas con varios parámetros:

$$N_{a+1,t+1} = \tau_t N_{at} \quad (2.63)$$

$$C_{at} = (1 - \phi_t) N_{at} \quad (2.64)$$

$$N_{kt} = R_t (N_{t-k}^* - C_{t-k}^*) \quad (2.65)$$

$$W_{a+1,t+1} - W_{at} = \rho C W_{at} - W_{a-1,t-1} \quad (2.66)$$

$$\tau_t = \sigma_t \phi_t \quad (2.67)$$



$$\sigma_t = e^{-M_t} \quad (2.68)$$

$$\phi_t = e^{-q_t E_t} \quad (2.69)$$

$$R_t = \alpha_t SK_1 - (\beta \gamma S)^{1/\gamma} \quad (2.70)$$

donde:

- $\beta$     parámetro de reclutamiento óptimo
- $\gamma$     parámetro de limitación de reclutamiento
- $\alpha_t$    parámetro de productividad del reclutamiento
- $\rho$     coeficiente de crecimiento de Ford

las primeras tres relaciones (2.63, 64 y 65) describen la dinámica de las poblaciones, la cuarta (2.66) se refiere a la dinámica de crecimiento de los organismos, las siguientes tres (2.67, 68 y 69) involucran a la supervivencia y las mortalidades natural y por pesca, la última (2.70) detalla el proceso de reclutamiento. Las ecuaciones anteriores son de carácter general, aunque presentan limitaciones, las principales son, primero, que las mortalidades natural y por pesca se consideran independientes de la edad, segundo, que en realidad el reclutamiento puede suceder a una edad distinta a  $K$  (Schnute, 1985).

Para aplicar el modelo, es necesario que este incluya sólo datos de esfuerzo y captura anuales, por lo que Schnute derivó las ecuaciones de diferencia a partir de las ecuaciones iniciales (2.63-2.70), las primeras cinco suposiciones (ecuaciones 2.63-2.67) dan origen a las siguientes ocho importantes

consecuencias:

$$N_{a+1,t+1} - \tau N_{at} = 0 \quad (2.71)$$

$$N_{a+1,t+1}^* - \tau_t N_{at}^* = \rho \tau_t (C N_{at}^* - \tau_{t-1} N_{a-1,t-1}^*) \quad (2.72)$$

$$N_{l+1} - \tau_l N_l - R_{l+1} = 0 \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} N_{l+1}^* - \tau_l N_l^* - R_{l+1} \\ = \rho \tau_l (C N_l^* - \tau_{l-1} N_{l-1}^* - v_{l-k} R_l^* / V_{l-k}) \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$N_{lt} = C / (1 - \phi) \quad (2.75)$$

$$N_l^* = C_l^* / (1 - \phi) \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} N_{l+1}^* = & C(1 + \rho) \tau_l N_l^* - \rho_l \rho_{l-1} N_{l-1}^* + \\ & + V_{l+1-k} R_{l+1} \{ \phi_{l+1-k} N_{l+1-k}^* \} \\ & - \rho \tau_l v_{l-k} R_l \{ \phi_{l-k} N_{l-k}^* \} \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} & C_{l+1}^* / (1 - \phi_{l+1}) \\ = & (1 + \rho) \tau_l C_l^* / (1 - \phi_l) - \rho \tau_l \tau_{l-1} C_{l-1}^* / (1 - \phi_{l-1}) \\ & + V_{l+1-k} R_{l+1} \{ \phi_{l+1-k} C_{l+1-k}^* / (1 - \phi_{l+1-k}) \} \\ & - \rho \tau_l v_{l-k} R_l \{ \phi_{l-k} C_{l-k}^* / (1 - \phi_{l-k}) \} \end{aligned} \quad (2.78)$$

La ecuación (2.71) es una pequeña variación de (2.63), que puede ser considerado un principio de conservación; ya que los peces de edad  $a$  que sobreviven en el año  $l$  son precisamente aquellos peces de edad  $t+1$  que comienzan el año  $t+1$ . De forma similar (2.63) es

un principio de conservación para la biomasa. La ecuación (2.73) es similar a (2.71), excepto que esta última describe a la población entera; el mismo caso sucede entre las ecuaciones 2.72 y 2.74. La ecuación (2.75) es una consecuencia de (2.64), y cabe mencionar que  $\phi_t$  representa la supervivencia, por lo que  $1 - \phi_t$  se refiere a la mortalidad; de la misma forma (2.76) muestra que el mismo concepto se puede aplicar a la biomasa. La ecuación (2.77) es una fórmula recursiva para calcular la biomasa  $N_{t+1}^*$  al tiempo  $t+1$  basada en la biomasa de dos años anteriores ( $t$  y  $t-1$ ). La ecuación (2.78) satisface el criterio mencionado en el párrafo anterior, es decir sólo involucra datos de captura y esfuerzo de varios años, y por lo tanto ésta ecuación recibe el nombre de *ecuación de captura* (Schnute, 1985).

La aplicación práctica de la ecuación (2.78) requiere de algunas suposiciones sobre los parámetros, mortalidad, supervivencia y reclutamiento; por ejemplo, si todos los parámetros son independientes del tiempo, y la supervivencia y el reclutamiento están dados por las ecuaciones (2.68-2.70) se obtiene la siguiente expresión (Schnute, 1985):

$$\begin{aligned}
 & (1 - e^{-qE_{t+1}})^{-1} C_{t+1}^* \\
 &= (1 + \rho) e^{-M} (e^{qE_t} - 1)^{-1} C_t^* \\
 & \quad - \rho e^{-2M - qE_t} (e^{qE_{t-1}} - 1)^{-1} C_{t-1}^* \\
 & \quad + \alpha V (e^{qE_{t+1-k}} - 1)^{-1} C_{t+1-k}^*
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ 1 - \beta\gamma C e^{-qE_{t+1-k}} - 1 \right]^{-1} C_{t+1-k}^* \Big]^{1/\gamma} \\
 & - \rho \alpha u e^{-M-qE_t} C e^{qE_{t-k}} - 1 \Big]^{-1} C_{t-k}^* \\
 & \times \left[ 1 - \beta\gamma C e^{-qE_{t-k}} - 1 \right]^{-1} C_{t-k}^* \Big]^{1/\gamma} \quad (2.79)
 \end{aligned}$$

A pesar de que la ecuación anterior (2.79) es compleja, es una ecuación predictiva para  $C_{t+1}^*$ , basada en los siguientes datos:  $C_{t-k}^*$ ,  $C_{t+1-k}^*$ ,  $C_{t-1}^*$ ,  $C_t^*$ ,  $E_{t-k}$ ,  $E_{t+1-k}$ ,  $E_{t-1}$ ,  $E_t$ , y  $E_{t+1}$  y los siguientes parámetros:  $M$ ,  $q$ ,  $\rho$ ,  $\alpha u$ ,  $\alpha v$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ .

Dependiendo de los supuestos que se hagan sobre los aspectos mencionados en el párrafo anterior, se puede establecer una extensa gama de ecuaciones de captura (Tabla 5; Schnute, 1985). Para el caso particular aquí comentado, se obtiene que el equilibrio está dado por:

$$C^* = \frac{1 - \phi}{\beta\gamma\phi} \left[ 1 - \left( \frac{(1 - \alpha\phi)(1 - \rho\alpha\phi)}{\phi(\alpha v - \rho\alpha u\phi)} \right)^\gamma \right] \quad (2.80)$$

En el mismo trabajo Schnute (1985) desarrolló la versión estocástica de su modelo; sin embargo, no lo aplica a una situación real y ha quedado solo como desarrollo teórico.

Los modelos propuestos por Deriso (1980) y Schnute (1985) se basan en el supuesto de que la pesquería posee una selectividad de filo de navaja (Knife-edged), es decir que para alguna edad fija  $k$ , los peces de edad  $k$  o mayor experimentan una mortalidad de pesca uniforme, mientras que los que son más jóvenes de la edad  $k$ , son

invulnerables a la pesquería. En opinión de Schnute (1987) existen dos consecuencias desafortunadas de éste supuesto, la primera es que es demasiado simple; por ejemplo, si la pesquería es manejada con un límite de talla, los peces pueden alcanzar esta talla crítica a distintas edades. El segundo supuesto, desde un punto de vista analítico, fuerza al investigador a seleccionar una  $k$  fija.

## CAPITULO III

## MODELO CON ESTRUCTURA DE PESO DE SCHNUTE (1987)

Debido a las limitaciones descritas anteriormente se desarrollaron modelos estructurales (Fournier y Donnan, 1987; Schnute, 1987) que se basan principalmente en la talla (peso). El modelo propuesto por Schnute (1987) es particularmente aplicable a los casos donde no se dispone de datos de edad de los individuos capturados, pero que se conoce la distribución de la frecuencia de tallas. Esencialmente el modelo se deriva de supuestos simples de crecimiento, supervivencia, y reclutamiento (Schnute, 1989).

El primer supuesto en el que se basa el modelo se refiere al crecimiento en peso. La ecuación de von Bertalanffy ha sido usada en varios modelos con estructura de edad (Schnute, 1987):

$$W_t = W_{\infty} (1 - e^{-k(t-t_0)}) \quad (3.1)$$

a partir de (3.1) se puede derivar la ecuación siguiente:

$$w' = W + pw \quad (3.2)$$

en ella se relaciona el peso  $w$  al inicio del año  $t$  con el peso  $w'$  del siguiente año  $t+1$ , donde los parámetros  $W$  y  $p$  representan la ordenada al origen y la pendiente, respectivamente. Es importante señalar que en (3.2)  $w'$  es un función de  $w$ , es decir el peso después de un año, sólo es función del peso inicial (Schnute, 1987). Cabe mencionar que los parámetros de (3.1) y de (3.2) se

relacionan de la siguiente forma:

$$W = W_m (1 - e^{-k}) \quad (3.3)$$

$$\rho = e^{-k} \quad (3.4)$$

La ecuación (3.2) solo es aplicable para aquellos organismos que posean un peso  $W$  mayor ó igual a un peso de reclutamiento  $V$ :

$$w \geq V \quad (3.5)$$

Schnute (1987) señala que el modelo descrito por (3.2) se puede implementar con cualquier otra ley de crecimiento ( $w \rightarrow w'$ ) que cumpla la condición de que exista un incremento en el peso ( $w' > w$ ). Así mismo Schnute (1987) comenta que (3.2) posee una característica importante, que es su naturaleza lineal, lo cual hizo posible alguno de los resultados obtenidos por el autor.

El segundo supuesto esta relacionada con la densidad  $N(w, t)$  de peces con peso  $w$  al principio del año  $t$ , específicamente se asume que para cada intervalo de peso ( $w_1, w_2$ ) se tiene (Schnute, 1989a):

$$\int_{w_1}^{w_2} N(w, t+1) dw = \int_{w_1}^{w_2} r(w, t) N(w, t) dw \quad (3.6)$$

donde  $r(w, t)$  representa la fracción de peces con peso  $w$  que sobrevivieron del año  $t$  al  $t+1$  y su interpretación está basada en la ecuación (3.2). Un organismo cuyo peso se encuentra en el intervalo ( $w_1, w_2$ ) al principio del año  $t$  debe, si sobrevive, tener

un peso en el intervalo  $(w'_1, w'_2)$  al principio del año  $t+1$ , la ecuación (3.6) expresa los efectos combinados de crecimiento y sobrevivencia de un año a otro (Schnute, 1989a). La única restricción que propuso Schnute (1987) a la ecuación (3.6), es su aplicación a organismos reclutados, es decir con un peso mayor ó igual a un peso específico  $V$ .

El tercer supuesto se refiere a que la mortalidad para los peces reclutados, no es dependiente de la talla y que en términos de la sobrevivencia se puede expresar como (Schnute, 1989a):

$$\tau(w, t) = \tau_t \quad \text{para } w \geq V \quad (3.7)$$

existen algunas variables asociadas a los supuestos anteriores: el número total de peces reclutados al inicio del año  $t$  esta representado por la integral:

$$N_t = \int_V^{\infty} N(w, t) dw \quad (3.8)$$

en forma similar la biomasa total reclutada al principio del año  $t$  esta dada por:

$$N_t^* = \int_V^{\infty} w N(w, t) dw \quad (3.9)$$

y el peso promedio por pez:

$$X_t = N_t^* / N_t \quad (3.10)$$

la dispersión del peso está asociada a la desviación de un peso



típico  $w$  de la media  $X_t$ , en general, la dispersión total de orden  $n$ , al inicio del año  $t$  es:

$$N_t^{(n)} = \int_V^{\infty} (w - X_t)^n N(w, t) dw \quad (3.11)$$

de forma semejante la dispersión promedio es:

$$X_t^{(n)} = N_t^{(n)} / N_t \quad (3.12)$$

Las cantidades  $N_t$ ,  $N_t^*$ ,  $X_t$ ,  $N_t^{(n)}$  y  $X_t^{(n)}$ , están asociadas al intervalo de peso  $(V, \infty)$  para la población total reclutada. Las cantidades  $R_t$ ,  $R_t^*$ ,  $Y_t$ ,  $R_t^{(n)}$  y  $Y_t^{(n)}$  definidas para la población de peces recientemente reclutada en el intervalo  $(V, V')$ ; y  $P_t$ ,  $P_t^*$ ,  $Z_t$ ,  $P_t^{(n)}$  y  $Z_t^{(n)}$ , corresponden a la población previamente reclutada, definidas en el intervalo  $(V', \infty)$ .

Los supuestos anteriores (ecs. 3.2, 3.6 y 3.7) conducen matemáticamente a las siguientes cuatro conclusiones principales (Schnute *et al.*, 1989a):

$$N_{t+1} = R_{t+1} + \tau_t N_t \quad (3.13)$$

$$N_{t+1}^* = R_{t+1}^* + t_t (X_t^* / X_t) N_t^* \quad (3.14)$$

$$Z_{t+1} = X_t^* \quad (3.15)$$

$$Z_{t+1}^{(n)} = \rho^n X_t^{(n)} \quad (3.16)$$

cuyas interpretaciones biológicas son simples. Por ejemplo (3.13) establece que la población al principio del año  $t+1$  consiste de

los reclutas de ese año, más los supervivientes del año  $t$ . La ecuación (3.14) corresponde a una ecuación dinámica similar para la biomasa total, excepto porque la biomasa  $N_t^*$  está multiplicada por un factor de supervivencia  $\tau_t$  y otro de crecimiento ( $X_t^*/X_t$ ). Por otra parte, debido a que los peces previamente explotados consisten completamente de sobrevivientes, su peso promedio  $Z_{t+1}$  en el año  $t+1$  como se expresa en (3.15), es exactamente el valor proyectado  $X_t^*$  del promedio  $X_t$  del año  $t$ . Así mismo, el crecimiento influye en la dispersión del peso. Si  $\rho < 1$ , entonces los peces pequeños crecen más rápidamente que los grandes, por consiguiente la dispersión del peso es reducida por el crecimiento. Si  $\rho > 1$ , los peces grandes crecen más rápido que los pequeños y la dispersión aumenta. Estas conclusiones se expresan matemáticamente en (3.16), donde el factor  $\rho^n$  corresponde a un incremento ó decremento en la dispersión (Schnute *et al.*, 1989a).

Schnute *et al.* (1989a) también propusieron una versión estadística de su modelo, esta se basa en la siguiente modificación de la ecuación (3.2):

$$w' = V' + \rho(w - V) \quad (3.17)$$

con  $V' = W + \rho V$ , La estimación de los parámetros  $\rho$  y  $V'$  se puede realizar determinísticamente a partir de las ecuaciones (3.3 y 3.4), para el cálculo estadístico se pueden utilizar dos tipos de datos, los primeros determinados a partir del método de captura-recaptura y los segundos a través de series de tiempo de datos de pesquerías. Respecto al primer caso, si se considera una

muestra de  $n$  peces que han sido pesados, marcados y liberados en el año  $t$ , y recobrados un año más tarde ( $t + 1$ ) y vueltos a pesar, el conjunto de datos consiste de pares  $(u_t, v_t)$ , donde  $u_t$  es el peso del  $t$ -ésimo pez cuando se marcó y regresó al mar,  $v_t$  representa el peso del mismo pez cuando es recobrado un año más tarde. El siguiente modelo es la contraparte estadística de (3.17) para este conjunto de datos:

$$u_t = w_t + \alpha \delta_t \quad (3.18)$$

$$v_t = w_t + \alpha \varepsilon_t \quad (3.19)$$

$$w_t = V' + \rho(w_t - V) \quad (3.20)$$

para  $t = 1, \dots, n$ , en las ecuaciones anteriores (3.18, 3.19 y 3.20)  $\delta_t$  y  $\varepsilon_t$  se suponen variables aleatorias con distribución normal y con media 0 y varianza 1. El parámetro  $\alpha$  representa una desviación estándar asociada con el error estadístico de las ecuaciones (3.19 y 3.20). Después de algunos supuestos y manejo algebraico (apéndice B, Schnute *et al.* 1989a) los parámetros  $\rho$  y  $V'$  están determinados por:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2S_{uv}} [(S_{vv} - S_{uu}) + ((S_{vv} - S_{uu})^2 + 4S_{uv}^2)^{1/2}] \quad (3.21)$$

$$V' = \bar{v} - \hat{\rho} \bar{u} - V) \quad (3.22)$$

con:

$$S_{uu} = \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2 \quad (3.23)$$

$$S_{uv} = \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v}) \quad (3.24)$$

$$S_{vv} = \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2 \quad (3.25)$$

Los parámetros anteriores también se pueden determinar a partir de datos de pesquerías (Ecs. 211 a 219, Schnute et al 1989a).

En un trabajo publicado en el mismo año Schnute et al (1989b) analiza la supervivencia y el reclutamiento, basado en el modelo con estructura de peso que se ha mencionado en párrafos anteriores. En el mismo se introducen otras variables basadas en las siguientes razones:

$$X_t = N_t^*/N_t \quad (3.26)$$

$$Y_t = R_t^*/R_t \quad (3.27)$$

$$Z_t = P_t^*/P_t \quad (3.28)$$

A partir de las ecuaciones (3.26, 3.27 y 3.28) se definen las proporciones de abundancia y biomasa de los peces recientemente reclutados al principio del año  $t$ , mediante las ecuaciones:

$$\omega_t = R_t/N_t \quad (3.29)$$

$$\omega_t^* = R_t^*/N_t^* \quad (3.30)$$

que en términos de (3.26, 3.27 y 3.28) se pueden reescribir como (Schnute et al, 1989b):

$$\omega_t = \frac{Z_t - X_t}{Z_t - Y_t} \quad (3.31)$$

$$\omega_t^* = \frac{Y_t}{X_t} \cdot \frac{Z_t - X_t}{Z_t - Y_t} \quad (3.32)$$

Por otra parte, aunado a los tres primeros supuestos (ecs. 3.2, 3.6 y 3.7) Schnute et al (1989b) propusieron otros tres supuestos el cuarto supuesto se refiere a que el índice de abundancia  $I(w,t)$  proviene de la razón entre la captura y el esfuerzo:

$$I(w,t) = C(w,t)/E_t \quad (3.33)$$

el quinto supuesto supone la existencia de proporcionalidad entre el índice y la población, con  $q$  conocida como la capturabilidad:

$$I(w,t) = qN(w,t) \quad (3.34)$$

el sexto supuesto relaciona la biomasa reclutada  $R_t^*$  en el año  $t$  con las biomazas sobrevivientes anteriores:

$$R_t^* = \sum_{a=k_1}^{k_2} \pi_a F(\tau_{t-a} N_{t-a}^*) \quad (3.35)$$

donde  $F(\cdot)$  es una función de la relación Stock-reclutamiento, como la propuesta por Ricker (1975) ó Schnute (1987).

Para aplicar el modelo (ecs. 3.2, 3.6, 3.7, 3.33, 3.34 y 3.35) se deben derivar resultados que se relacionen específicamente con

datos de la pesquería y que además tengan una interpretación biológica clara (Schnute, 1989b). Dos de las conclusiones importantes ya se han mencionado anteriormente (Ecs. 3.13 y 3.14):

$$N_{t+1} = R_{t+1} + \tau_t N_t \quad (3.13)$$

$$N_{t+1}^* = R_{t+1}^* + \omega_t (X_t^*/X_t) N_t^* \quad (3.14)$$

éstas describen la población en el año  $t + 1$  como la suma del reclutamiento del año  $t + 1$  y la sobrevivencia del año  $t$ , donde (3.13) y (3.14) se refieren a números y biomasa, respectivamente. Si se reemplaza  $R_{t+1}^*$  por  $\omega_{t+1}^* N_{t+1}^*$  en la ecuación (3.14), se obtiene (Schnute, 1989b):

$$N_{t+1}^* = \omega_t \tau_t N_t^* \quad (3.36)$$

donde el factor

$$\omega_t = \frac{1}{1 - \omega_{t+1}^*} \cdot \frac{X_t^*}{X_t} \quad (3.37)$$

cuenta para el crecimiento y el reclutamiento.

Los resultados (3.12, 3.13, 3.36 y 3.37) dependen sólo de los dos primeros supuestos (ecs. 3.2 y 3.6). Al integrar las suposiciones referentes al índice de abundancia (3.33 y 3.34) Schnute et al., (1989b) demostraron que:

$$I_t^* = C_t^*/E_t \quad (3.38)$$

$$I_t^* = qN_t^* \quad (3.39)$$

$$A_t^* = \omega_t^* I_t^* \quad (3.40)$$

Las ecuaciones anteriores establecen que el índice de biomasa es la biomasa de captura por unidad de esfuerzo (CPUE) en el año  $t$ , que el índice  $I_t^*$  es proporcional a la biomasa de la población  $N_t^*$  y que la CPUE  $A_t^*$  de los peces recientemente reclutados representa la proporción  $\omega_t^*$  de la CPUE total  $I_t^*$  (Schnute et al., 1989b).

el tercer supuesto (ec. 3.7) también se puede escribir como:

$$\tau_t N(w, t) = \sigma(N(w, t) - C(w, t)) \quad (3.41)$$

al multiplicarla por  $q$  e integrar se llega a:

$$\tau_t I_t^* = \sigma(I_t^* - qC_t^*) \quad (3.42)$$

si se divide (3.42) por  $I_t^*$  y se toma en cuenta (3.38) se obtiene:

$$\tau_t = \sigma(1 - qE_t) \quad (3.43)$$

la cual representa la sobrevivencia total  $\tau_t$  como producto de dos factores:

(D) sobrevivencia  $\sigma$  de la mortalidad natural

(W) sobrevivencia  $(1 - qE)$  de la mortalidad por pesca.

Si  $q$  es pequeña ( $qE \ll 1$ ), entonces:

$$1 - qE_t \cong e^{-qE_t} \quad (3.44)$$

consecuentemente (3.43) puede ser escrita en forma aproximada

como:

$$\tau_t = e^{-M - qE_t} \quad (3.45)$$

donde  $\sigma = e^{-M}$ .

Schnute et al. op. cit. concluyeron que en su modelo:

Ø las ecuaciones (3.13, 3.14 y 3.36) describen la dinámica de la población.

∩ las ecuaciones (3.38 - 3.40) se relacionan con el índice de abundancia.

∪ las ecuaciones (3.41 y 3.43) describen la partición entre la mortalidad natural y la total.

Los resultados anteriores se pueden acoplar para obtener cinco modelos específicos para los datos en una pesquería (Schnute et al., 1989b):

$$I_{t+1}^* = \nu_t \tau_t I_t^* \quad (3.46)$$

$$I_{t+1}^* = \sigma \nu_t (I_t^* - qC_t^*) \quad (3.47)$$

$$A_t^* = q \sum_{\alpha=k_1}^{k_2} \Pi_{\alpha} F \left[ \frac{1}{q} \tau_{t-\alpha} I_{t-\alpha}^* \right] \quad (3.48)$$

$$I_{t+1}^* = A_{t+1}^* + \tau_t (X_t' / X_t) I_t^* \quad (3.49)$$

$$I_{t+1}^* = A_{t+1}^* + \sigma (X_t' / X_t) (I_t^* - qC_t^*) \quad (3.50)$$

Las ecuaciones anteriores (3.46-3.50) representan un conjunto consistente de ecuaciones para examinar datos desde varios puntos



de vista, todo desde un marco de referencia biológico.

El modelo con estructura de peso, que ha sido descrito en las secciones anteriores fue desarrollado en versión estadística y aplicado por Schnute et al (1980a y 1980b) a la pesquería del bacalao (Ophiodon elongatus) en la región suroeste de la Isla Vancouver, Columbia Británica, Canada. Y encontró que las estimaciones gráficas preliminares de los parámetros concuerdan con las estimaciones finales del modelo estadístico.

## CAPITULO IV

SOLUCION DE LA ECUACION DE CRECIMIENTO EN PESO DE VON BERTALANFFY  
POR EL METODO DE VARIABLES ELEGANTES

En esta sección se presenta una solución para la ecuación diferencial de crecimiento en peso por el método de variables elegantes, el cual es un procedimiento sencillo para obtener su solución y al mismo tiempo, determinar los valores de los parámetros requeridos a partir de datos observados.

La ecuación para el crecimiento isométrico:

$$\frac{dW(t)}{dt} = \eta W(t)^{2/3} - \kappa W(t) \quad (4.1)$$

está basada en hipótesis que reflejan básicamente que la densidad y forma de un organismo se mantienen esencialmente iguales dentro de su ciclo de vida, aunado a que el aumento de peso por unidad de tiempo, se debe al ritmo de anabolismo-catabolismo y que el ritmo de anabolismo es proporcional a la superficie del organismo (Aguilar et al., 1984).

Un caso más general de la ecuación (4.1) es el siguiente:

$$\frac{dW(t)}{dt} = \eta W(t)^\alpha - \kappa W(t) \quad (4.2)$$

donde  $\alpha = \frac{r+1}{2r+1}$ ,  $\eta$  y  $\kappa$  representan las tasas de metabolismo y  $r$  es el exponente de la relación entre el ancho (altura) y largo del

organismo, dado por:

$$a(t) = c_1(t)^r \quad (4.3)$$

Cabe mencionar que para el caso isométrico  $r = 1$ . A partir de (4.2) se determina el peso asintótico, siendo este:  $W_\infty = (n/\kappa)^{1/\beta}$ . Al introducir este parámetro en la ecuación (4.2) se obtiene:

$$\frac{dW(t)}{dt} = \kappa [W(t)^\alpha (W_\infty^\beta - W(t)^\beta)] \quad (4.4)$$

donde  $\beta = r/(2r+1)$  y que cumple la condición de que:  $\alpha + \beta = 1$ .

Para resolver la ecuación (4.4) se considera la existencia de una variable elegante, dada por:

$$P(t) = W_\infty^\beta - W(t)^\beta \quad (4.5)$$

que transforma la ecuación en un modelo de tipo Malthusiano de fácil solución. La demostración se basa en la derivación con respecto a  $t$  de la variable introducida. En forma conjunta con la ecuación (4.4), la expresión resultante es:

$$\frac{dP(t)}{dt} = -n\beta P(t) \quad (4.6)$$

cuya solución esta dada por:

$$P(t) = P_0 e^{-\kappa t} \quad (4.7)$$

donde  $P_0 = W_m^\beta - W_0^\beta$ ; y  $W_0$  representa el peso al tiempo  $t=0$ . Al igualar (4.7) con la expresión (4.5) y resolver para  $W(t)$  se obtiene la solución de la ecuación (4.2):

$$W(t) = W_m (1 - A e^{-\kappa t})^{1/\beta} \quad (4.8)$$

donde  $A = \frac{W_m^\beta - W_0^\beta}{W_m^\beta}$

En (4.8) aparecen tres parámetros:  $W_m$ ,  $A$  y  $\kappa$ , estos son de fácil determinación. Se puede demostrar que si se cumple (4.7) para todo  $t \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $P(t)$  decrece a tasa constante por unidad de tiempo (Gutierrez, 1985):

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = -q \quad (4.9)$$

para cierto número  $q$  positivo. Si se sustituye el valor de  $P(t)$  (ecuación 4.7) en la expresión anterior, se encuentra que  $q$  y  $\kappa$  están relacionados de la siguiente forma:

$$q = 1 - e^{-\kappa} \quad (4.10)$$

al escribir explícitamente  $P(t)$  en (4.0) se obtiene la siguiente relación lineal entre  $W(t+1)^p$  y  $W(t)^p$ :

$$W(t+1)^p = H W(t)^p + B \quad (4.11)$$

donde  $H = 1 - q$  y  $B = qW_m^p$  los cuales pueden ser determinados por mínimos cuadrados. Si estos valores se sustituyen en (4.10) se obtienen  $x$  y  $W_m^p$ , los cuales están dados por:

$$k = -1/\beta \ln H \quad ; \quad W_m^p = \frac{B}{1-H} \quad (4.12)$$

El parámetro  $A$  (ecuación 4.8) se determina a partir de una regresión lineal. Después de hacer algunas operaciones algebraicas en (4.8), se tiene que la regresión mencionada estará dada por:

$$\ln \left[ \frac{W_m^p - W(t)^p}{W_m^p} \right] = H_1 t + B_1 \quad (4.13)$$

donde  $H_1 = -k\beta$  y  $B_1 = \ln A$ .

Es importante señalar que las regresiones lineales (4.11) y (4.13) son válidas para el crecimiento alométrico, el isométrico es un caso particular en el cual  $r = 1$  y  $\beta = 1/3$ , cuyas regresiones correspondientes son:

$$W(t+1)^{1/3} = H W(t)^{1/3} + B \quad (4.14)$$

y

$$\ln \left( \frac{W_m^{1/B} - W(t)^{1/B}}{W_m^{1/B}} \right) = H_1 t + B_1 \quad (4.15)$$

donde  $H = 1 - q$ ,  $B = qW_m^{1/B}$ ;  $H_1 = -\kappa/B$  y  $B_1 = \ln A$ .

Para facilitar los cálculos se desarrolló un programa en lenguaje turbo pascal (VARELEG), que es útil para estimar los parámetros necesarios del modelo de crecimiento propuesto.

## CAPITULO V

APLICACION DE LA SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE  
 CRECIMIENTO EN PESO DE VON BERTALANFFY, EN LA ESTIMACION  
 DETERMINISTICA DE LOS PARAMETROS  $\rho$  Y  $W$  DEL MODELO CON ESTRUCTURA  
 DE PESO DE SCHNUTE (1987).

Una de las características importantes de la ecuación de crecimiento de von Bertalanffy (1938) es su facilidad para ser incorporada en los modelos de dinámica de poblaciones y de administración pesquera (Csirke, 1980). En el presente capítulo se desarrolla una metodología para incorporar a la ecuación de crecimiento en peso calculada por el método de variables elegantes al modelo con estructura de peso de Schnute (1987), Schnute et al (1989a y 1989b) y mostrar así, que el modelo propuesto, posee la misma características que el modelo de von Bertalanffy.

Como ya se mencionó, Schnute (1987) basandose en los trabajos propuestos por Fournier y Doonan (1987) y Walters (1986), desarrolló un modelo con estructura de peso, el cual es particularmente aplicable a los casos en donde los datos de edad de captura no son disponibles, pero la frecuencia de tallas si es conocida.

Como ya se ha observado, los parámetros  $\rho$  y  $W$  juegan un papel muy importante en el modelo de Schnute (1987), Schnute et al (1989a y 1989b), estos se pueden determinar a partir de dos metodologías distintas, la primera es de naturaleza determinística y está basada en las ecuaciones (3.3 y 3.4). Los datos necesarios para al

cálculo se obtienen a partir de muestreos biológicos, usando un criterio de ajuste por mínimos cuadrados. Por el contrario, es necesario usar datos de captura-recaptura para la estimación estadística de los parámetros mencionados. lo anterior se logra a partir de la ecuación de Ford y Walford (3.2) de naturaleza lineal (Cass et al., 1988).

La ecuación (3.2) usada por Schnute (1987) para desarrollar su modelo es lineal; sin embargo, muchas especies de peces (Gallardo, 1988; Larrañeta, 1985; Maupome, 1989; Ortega, 1988) no siguen este tipo de crecimiento.

En los siguientes párrafos se establecen las bases para incorporar una ecuación no-lineal de crecimiento al modelo con estructura de peso de Schnute (1987, 1989a, 1989b) y dar así, una aproximación más general y realista del problema.

La ecuación de crecimiento no-lineal que se analizará es la calculada a partir del método de variables elegantes:

$$W(t) = W_{\infty} (1 - Ae^{-\beta t})^{1/\beta} \quad (5.1)$$

Para introducir la ecuación (5.1) en el modelo con estructura de peso de Schnute (1987), es necesario linealizarla, lo cual se logra mediante un desarrollo de la ecuación (5.1) en serie binómica (Abramowitz, 1972). Al aplicar la serie binómica y cortar en el término lineal, la ecuación (5.1) se puede aproximar por:



$$W(t) = W_{\infty}(1 - 1/\beta Ae^{-\alpha bt}) \quad (5.2)$$

si se evalúa la expresión anterior para el tiempo  $t + 1$  se obtiene:

$$W(t+1) = W_{\infty}(1 - 1/\beta Ae^{-\alpha\beta(t+1)}) \quad (5.3)$$

Después de aplicar las propiedades de la función exponencial, en forma conjunta con la adición y sustracción del término  $W_{\infty}e^{-\alpha\beta}$ , la expresión resultante es:

$$W(t+1) = W_{\infty}(1 - e^{-\alpha\beta}) + e^{-\alpha\beta}(W_{\infty} - Ae^{-\alpha\beta t}) \quad (5.4)$$

que puede ser reescrita como:

$$W(t+1) = W_{\infty}(1 - e^{-\alpha\beta}) + e^{-\alpha\beta} W(t) \quad (5.5)$$

y que en términos de la notación propuesta por Schnute (1987) adquiere la siguiente forma:

$$W' = W + \rho W \quad (5.6)$$

con:

$$W = W_{\infty}(1 - e^{-\alpha\beta}) \quad (5.7)$$

$$\rho = e^{-\alpha\beta} \quad (5.8)$$

Es importante notar que con la metodología propuesta se obtiene una vez más la ecuación de Ford-Walford (ec. 3.2); sin embargo, cabe señalar que las identidades para  $\rho$  y  $W$  difieren de las

obtenidas a partir de las ecuaciones (3.3 y 3.4):

$$W = W_{\infty}(1 - e^{-K}) \quad (3.3)$$

$$\rho = e^{-K} \quad (3.4)$$

en este último caso  $K$  representa la tasa de crecimiento, también conocida como el *coeficiente de crecimiento de Brody* (Ricker, 1975). Por otra parte, en la ecuación (5.8)  $\kappa$  es la tasa de catabolismo. Los parámetros  $K$  y  $\kappa$  (caso isométrico) se encuentran relacionados de la siguiente forma (Aguilar et al, 1984):

$$K = \frac{\kappa}{3} \quad (5.9)$$

si se sustituye  $\beta = 1/3$  en (5.7) y (5.8), se obtienen las ecuaciones 3.3 y 3.4, es decir la ecuación (5.5) se reduce a la ecuación de crecimiento (5.6) propuesta por Schnute (1987); por lo que podemos considerar a la metodología para estimar determinísticamente  $\rho$  y  $W$  como un caso particular del aquí desarrollado.

Como se ha observado en párrafos anteriores, la aplicación de la serie binómica constituye un método adecuado para linealizar ecuaciones de crecimiento, incluso aquellas tan complejas como (5.1), de hecho al aplicar esta metodología al caso general de la ecuación de von Bertalanffy:

$$W(t) = W_{\infty}(1 - e^{-K(t - t_0)^b}) \quad (5.10)$$

los valores de los parámetros  $\rho$  y  $W$  coinciden con los obtenidos para el caso particular (ecs. 3.3 y 3.4).

Es importante señalar que al linealizar las ecuaciones (3.1, 5.1 y 5.10) se obtiene la ecuación de Ford-Walford (3.2), que fue utilizada por Schnute et al (1989a) para desarrollar la versión estadística de su modelo, en el cual los parámetros  $\rho$  y  $W$  se pueden determinar a partir de datos observados registrados por el método de captura-recaptura; sin embargo, estos parámetros también se pueden determinar a partir de ecuaciones de tipo determinístico (ecs. 3.3, 3.4, 5.7 y 5.8). En conclusión, con la metodología descrita en ésta sección, El cálculo determinístico de los parámetros  $\rho$  y  $W$  del modelo de Schnute (1987) es puede generalizar para los organismos cuyo tipo de crecimiento se ajusta a las ecuaciones 5.1 y 5.12.

CAPITULO VI  
ANALISIS DE ESTABILIDAD DEL MODELO

El análisis de estabilidad del modelo se lleva a cabo utilizandola siguiente ecuación :

$$\frac{dW(t)}{dt} = \eta W(t)^\alpha - \kappa W(t) \quad (6.1)$$

en la anterior se cumplen las siguientes condiciones:  $\alpha + \beta = 1$  y  $W(0) = W_0 > 0$ . El análisis inicia al igualar la parte derecha de la ecuación anterior a cero:

$$\eta W(t)^\alpha - \kappa W(t) = 0 \quad (6.2)$$

que al factorizar adquiere la siguiente forma:

$$W(\eta W^{\alpha-1} - \kappa) = 0 \quad (6.3)$$

a partir de la cual se obtiene la primera solución constante de (6.2):  $\phi_1(t) = 0$ , la segunda se calcula al resolver la expresión entre paréntesis de la ecuación (6.3):

$$\eta W^{\alpha-1} - \kappa = 0 \quad (6.4)$$

cuya solución es:

$$\phi_2(t) = (\eta/\kappa)^{1/\beta} \quad (6.5)$$

Las soluciones  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son dos soluciones constantes para (6.1) y representan puntos de equilibrio. En la figura 1 se observa el

comportamiento de la derivada  $dW/dt$  como función de  $W$ . La gráfica corta dos veces el eje, en los puntos que ya se han calculado:  $\phi_1 = 0$  y  $\phi_2 = (c\eta/\kappa)^{1/\beta}$ .

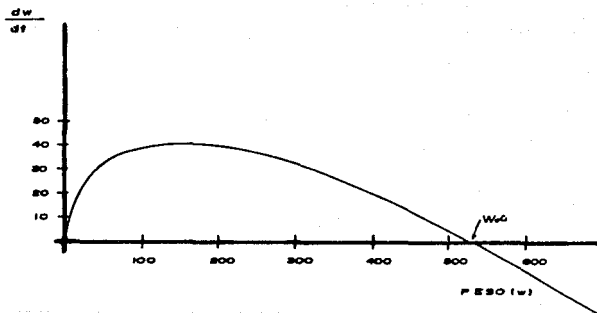


Fig. 1.- Derivada de la función  $f(W)$  ( $dW/dt$ ) en función del peso  $W$ .

Es fácil apreciar que en el intervalo  $0 < W < (c\eta/\kappa)^{1/\beta}$  la derivada es positiva, es decir la solución de (4.1) es creciente y tiende a  $(c\eta/\kappa)^{1/\beta} = W_0$ . Por otra parte si  $W > (c\eta/\kappa)^{1/\beta}$  entonces  $dW/dt < 0$  y  $W$  decrece a  $(c\eta/\kappa)^{1/\beta}$ , es decir si  $W_0 > 0$  entonces, al

crecer  $t$ ,  $W(t)$  se aproxima a la solución  $\phi_2 = (\eta/\kappa)^{1/\beta}$ . En lo que respecta a la solución  $\phi_1 = 0$ , si se tiene la condición inicial  $W_0 = 0$  entonces  $W(t) = 0$ . Con el análisis anterior podemos afirmar que la solución constante  $\phi_1 = 0$ , es un punto de equilibrio inestable, por el contrario la segunda solución  $\phi_2 = (\eta/\kappa)^{1/\beta}$ , es un punto de equilibrio estable. Los resultados anteriores poseen una interpretación biológica que será discutida más adelante en el Capítulo VIII.

## CAPITULO VII

APLICACION DEL METODO A LISA BLANCA (Mugil curema)

## VII.1 METODOLOGIA

En la presente sección se aplica la metodología desarrollada en las secciones anteriores a la lisa blanca (Mugil curema). La validación del modelo se realizó al aplicar el programa VARELEG, a datos (proporcionados por el Ing. Pesq. Raúl Villaseñor) que fueron colectados en muestreos mensuales de octubre de 1986 a diciembre de 1987 en la Bahía de Matanchén, Sistema Pozo-Rey y Estuario San Cristobal en la costa de Nayarit, México.

Para la obtención de datos morfométricos se examinaron un total de 2250 organismos, determinándose en campo su longitud total, longitud patrón, altura y peso. La estimación de la edad se llevó a cabo en el laboratorio y se realizó por medio de un estudio de escamas (12 en promedio por organismo), que se observaron con un proyector de transparencias y mediante microscopio simple con luz directa y reflejada .

La relación longitud-peso fue determinada de acuerdo con la ecuación:  $W = aL^b$ . W representa el peso, L la longitud, a y b son constantes (Ricker, 1975). El crecimiento se determinó con la ecuación de Von Bertalanffy (1938), para la cual se empleó el método de Ford (1933) y Walford (1946) para determinar los parámetros  $L_{\infty}$  (longitud asintótica), k (constante),  $t_0$  (tiempo

hipotético para el que  $L = 0$ ) se obtuvo empleando la ecuación de Beverton y Holt (1957).

Para comparar los modelos, se utilizaron los criterios propuestos por Roff (1983); el primero, es el error cuadrado medio (Neter et al., 1990) que de acuerdo con Roff (1983) es la opción adecuada para comparar el funcionamiento de los modelos, el método que consistentemente de el valor más bajo de ECM se considerará como el mejor método. Roff también propuso el error porcentual absoluto medio (Ec 2.57) para indicar el valor práctico de un modelo y menciona que para propósitos de ajuste un 30% es tolerable, sin embargo adoptó un nivel de aceptabilidad más bajo (20%), este último criterio fue también adoptado en el presente trabajo.

## VII.2 RESULTADOS

La relación Peso-longitud estimada a partir de los datos de peso y longitud fué  $W = (8.64 \times 10^{-5})L^{2.59}$ , para el modelo de crecimiento de Von Bertalanffy la ecuación resultante es la siguiente:

$$L_t = 338.40C1 - e^{-0.341(t + 1.117)} \quad (7.1)$$

para obtener el crecimiento en peso a partir de la ecuación de Von Bertalanffy, se utilizó la relación peso-longitud y quedó expresada para todos los organismos como:



$$W_t = 307.69(1 - e^{-0.341(t + 1.117)})^{2.59} \quad (7.2)$$

Los datos de longitud patrón, altura, edad y peso también se utilizaron para calcular las constantes del modelo por el método de variables elegantes. La determinación de los parámetros se llevó a cabo con el programa de computación desarrollado (VARELEG), la ecuación es la siguiente:

$$W(t) = 531.7(1 - (0.66)e^{-10.17t})^{2.59} \quad (7.3)$$

En la tabla I se presentan los valores de peso observados (que representan valores promedio con distribución normal), así como los calculados a partir de (7.2) y (7.3), para la lisa blanca (Mugil curema); en general las estimaciones calculadas con la ecuación (7.3) presentan una menor desviación de los valores observados.

En la tabla II se presentan los porcentajes de error en la estimación para las ecuaciones mencionadas (7.2 y 7.3), para la ecuación (7.2) varían de un mínimo de 2.5% a un máximo de 12.56%, en el caso de la otra ecuación (7.3), se observa una variación menor de 0.31% a 9.94%.

TABLA I

Comparación de los pesos estimados y observados para la lisa blanca (Mugil curema).

| Edad (años) | Valores observados de peso (grs.) | Valores estimados Ecuación (7.2) (grs.) | Valores estimados Ecuación (7.3) (grs.) |
|-------------|-----------------------------------|---|---|
| 1           | 62.9                              | 55                                      | 62.7                                    |
| 2           | 111.6                             | 102.8                                   | 100.5                                   |
| 3           | 135.4                             | 148.5                                   | 141.4                                   |
| 4           | 167.9                             | 187.4                                   | 182.8                                   |
| 5           | 224.0                             | 218.4                                   | 222.9                                   |
| 6           | 267.8                             | 242.3                                   | 260.7                                   |

TABLA II

Valores de los porcentajes de error en las estimaciones para las ecuaciones (7.2 y 7.3).

| Edad (años) | Porcentaje de error(%) (Ec. 7.2) | Porcentaje de error(%) (Ec. 7.3) |
|-------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 1           | 12.58                            | 0.31                             |
| 2           | 7.88                             | 9.94                             |
| 3           | 9.88                             | 4.43                             |
| 4           | 11.81                            | 8.87                             |
| 5           | 2.50                             | 0.49                             |
| 6           | 9.50                             | 2.65                             |

En la tabla III y IV se observan los resultados de las regresiones lineales para la determinación de los parámetros A,  $W_{\infty}^{1/p}$  y  $\kappa$ . La ecuación 4.11 resultó altamente significativa ( $r = 0.971$ ,  $r^2 = 0.944$  y  $p = .006$ ). De la misma forma, para la ecuación 4.13 se obtuvo un coeficiente de correlación muy alto ( $r = .992$ ) y un

porcentaje de variación explicada alta ( $r^2 = 0.985$ ); así mismo, el análisis de varianza indica que la prueba es significativa ( $p = 0.0001$ ).

TABLA III

Resultados de la regresión (Ec. 4.11) para obtener los parámetros del modelo de crecimiento en peso por el método de variables elegantes .

|                      | Valor             | error estándar | P                | r      | $r^2$ |
|----------------------|-------------------|----------------|------------------|--------|-------|
| Constante            | 1.778             | 0.788          | 0.109            | 0.971  | 0.944 |
| Pendiente            | 0.841             | 0.119          | 0.008            |        |       |
| Análisis de Varianza |                   |                |                  |        |       |
|                      | Suma de cuadrados | gl             | cuadrados medios | F      | P     |
| SSR                  | 3.793             | 1              | 3.793            | 50.298 | 0.006 |
| SSE                  | 0.226             | 3              | 0.075            |        |       |

TABLA IV

Resultados de la regresión (Ec. 4.13) para obtener los parámetros del modelo de crecimiento en peso por el método de variables elegantes .

|                      | Valor             | error estándar | P                | r       | $r^2$  |
|----------------------|-------------------|----------------|------------------|---------|--------|
| Constante            | -0.409            | 0.041          | 0.001            | 0.992   | 0.985  |
| Pendiente            | -0.170            | 0.010          | 0.0001           |         |        |
| Análisis de Varianza |                   |                |                  |         |        |
|                      | Suma de cuadrados | gl             | cuadrados medios | F       | P      |
| SSR                  | 0.505             | 1              | 0.505            | 261.905 | 0.0001 |
| SSE                  | 0.008             | 4              | 0.002            |         |        |

La figura 2 muestra el comportamiento de la solución para el caso de crecimiento en peso de von Bertalanffy, se observa que presenta una forma sigmoidea y que a excepción del último punto, la curva se ajusta a los datos observados; en la figura 3 se observa el

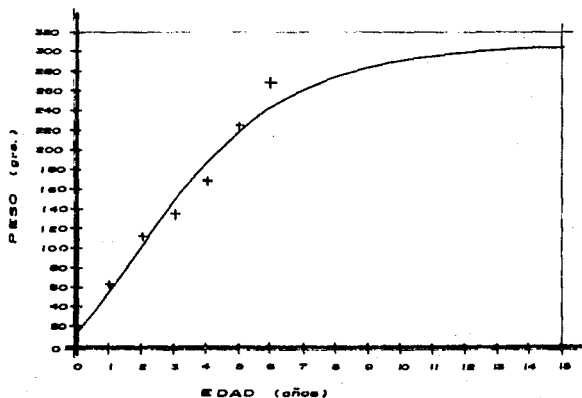
comportamiento de la solución de la ecuación diferencial para el crecimiento en peso de Von Bertalanffy por el método de Variables Elegantes (ecuación 4.8) cuyos parámetros se obtienen a través de (4.11) y (4.13); en ella se presenta nuevamente la forma sigmoidea, observándose que la curva se ajusta a todos los puntos; sin embargo, es difícil decidir a partir de estas dos gráficas cual se ajusta mejor a los datos registrados; una comparación cualitativa se presenta en la figura 3, donde se graficaron los valores observados y los estimados a partir de las ecuaciones mencionadas, en ella se observa que a excepción de la edad 2, todos los valores estimados con (7.3) se encuentran más cercanos a los valores observados.

Para una comparación cuantitativa se usaron los criterios propuestos por Roof (1983): el error cuadrático medio (Neter et al., 1990) y el error porcentual absoluto medio (Ec. 2.57). En la tabla V se observan los valores correspondientes para las cantidades mencionadas, se observa que en ambos casos los valores más bajos corresponden a la ecuación (7.3).

TABLA V

Resultados de el Error Cuadrático Medio y del Error Porcentual Absoluto Medio para las ecuaciones (7.2 y 7.3).

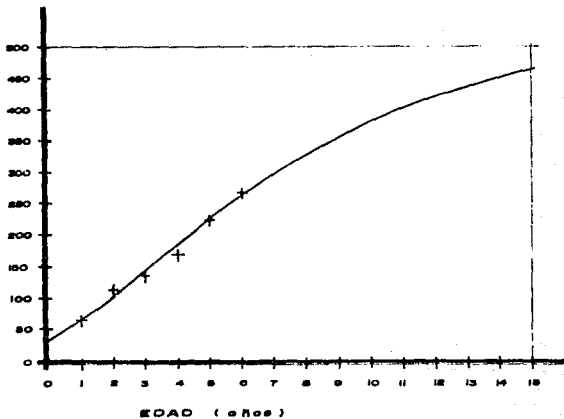
|         | ECM     | EPAM (%) |
|---------|---------|----------|
| Ec. 7.2 | 1373.72 | 8.06     |
| Ec. 7.3 | 432.88  | 4.45     |



+ VALORES OBSERVADOS

Fig. 2.- Comportamiento de la solución para el caso de crecimiento en peso obtenida mediante una transformación directa que relaciona el peso con la longitud (Ec. de von Bertalanffy).

## VARIABLES ELEGANTES



+ VALORES OBSERVADOS

Fig. 3.- comportamiento de la solución de la ecuación diferencial para el crecimiento en peso de Von Bertalanffy (Variables Elegantes).

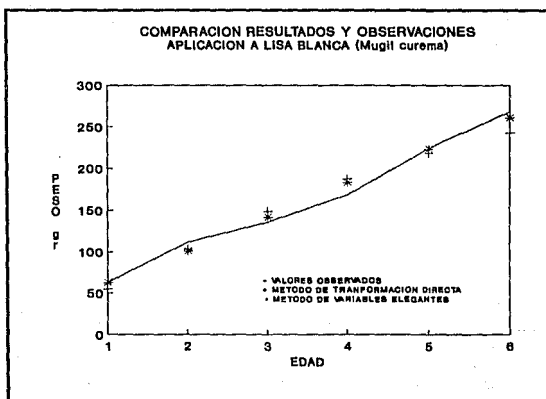


Fig. 4.- Comparación de los pesos estimados y observados para la Lisa Blanca (Mugil curema).

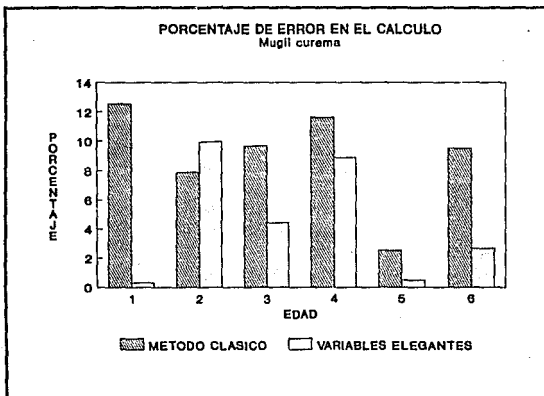


Fig. 5.- Porcentaje de error en el cálculo de pesos usando transformación directa y variables elegantes.



## CAPITULO VIII

## DISCUSION

Existen varios aspectos, tanto teóricos como prácticos que es necesario discutir. En cuanto a los primeros, cabe mencionar que existe confusión en relación con el modelo de crecimiento en peso de von Bertalanffy. Woolton (1990) menciona que la ecuación diferencial de crecimiento en peso:

$$\frac{dW(t)}{dt} = \eta W(t)^{2/3} - \kappa W(t) \quad (8.1)$$

al integrar, tiene como solución, la siguiente expresión:

$$W(t) = W_{\infty} (1 - e^{-k(t - t_0)})^3 \quad (8.2)$$

sin embargo, es fácil demostrar que la ecuación anterior no es solución de (8.1), para lo cual basta con derivar (8.2) y no se podrá obtener la expresión (8.1). Es importante señalar que el Método de variables elegantes es el adecuado para resolver una ecuación diferencial complicada y de carácter no-lineal como (8.1). La solución de la ecuación (8.1) obtenida por el método, de Variables Elegantes es:

$$W(t) = W_{\infty} [1 - Ae^{-(k/3)t}]^3 \quad (8.3)$$

para demostrar que la ecuación anterior es solución de la ecuación (8.1), basta con calcular la derivada:

$$\frac{dW(t)}{dt} = 3W_{\infty} (1 - Ae^{-(\pi/B)t})^2 (-Ae^{-(\pi/B)t}) (-\pi/B) \quad (8.4)$$

$$\frac{dW(t)}{dt} = W_{\infty} (1 - Ae^{-(\pi/B)t})^2 (-Ae^{-(\pi/B)t}) (-\pi) \quad (8.5)$$

de la ecuación (8.3) se despeja el término  $(-Ae^{-(\pi/B)t})$  y se sustituye en la expresión anterior dando:

$$\frac{dW(t)}{dt} = W_{\infty} (1 - Ae^{-(\pi/B)t})^2 \left[ 1 - \frac{W(t)^{1/B}}{W_{\infty}^{1/B}} \right] (-\pi) \quad (8.6)$$

$$= \pi W_{\infty} (1 - Ae^{-(\pi/B)t})^2 - \pi \frac{W(t)^{1/B}}{W_{\infty}^{1/B}} W_{\infty} (1 - Ae^{-(\pi/B)t})^2 \quad (8.7)$$

despejando  $W(t)^{1/B}$  de (8.6) y sustituyendo en la anterior se llega a la expresión:

$$\frac{dW(t)}{dt} = \pi W_{\infty} (1 - Ae^{-(\pi/B)t})^2 - \pi W_{\infty} (1 - Ae^{-(\pi/B)t})^3 \quad (8.8)$$

que al factorizar el primer sumando, adquiere la forma:

$$\frac{dW(t)}{dt} = \kappa W_{\infty}^{1/3} W_{\infty}^{2/3} C_1 - A e^{-(\kappa/3)t} - \kappa W_{\infty} C_1 - A e^{-(\kappa/3)t} \quad (8.9)$$

que al utilizar  $\eta = \kappa W_{\infty}^{4/3}$  se puede reescribir como:

$$\frac{dW(t)}{dt} = \eta (W_{\infty} C_1 - A e^{-(\kappa/3)t})^{2/3} - \kappa W_{\infty} C_1 - A e^{-(\kappa/3)t} \quad (8.10)$$

con lo cual finalmente encontramos la equivalencia:

$$\frac{dW(t)}{dt} = \eta W(t)^{2/3} - \kappa W(t) \quad (8.1)$$

debido a lo anterior se puede asegurar que el modelo (8.3) es la solución de la ecuación (8.1). El caso general es muy semejante, el modelo de crecimiento (Ecuación 4.8) es la solución general de la ecuación diferencial de crecimiento en peso (4.2). Por el contrario, como ya se mencionó, la ecuación de crecimiento en peso de von Bertalanffy (8.2) proviene de una transformación de la ecuación de crecimiento en longitud a una de crecimiento en peso, vía la ecuación:  $W = aL^b$ ; es decir, su desarrollo fué a partir de un modelo de tipo correlativo. Por lo anterior, se espera que en general, la ecuación (8.3) que fue derivada de un modelo de tipo explicativo y que trata de incluir las causas que influyen en el crecimiento, presente un mejor ajuste a los datos observados.

En cuanto a la determinación de los parámetros, el método de Variables elegantes proporciona un procedimiento sencillo para la estimación de los mismos, que consiste en tres regresiones

lineales con datos observados (Ecs. 4.3, 4.11 y 4.13). A partir de las regresiones mencionadas, se pueden determinar  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $W_{\infty}$  y  $A$ , parámetros necesarios para establecer la ecuación (8.3). Por su parte la ecuación (8.10) utiliza los parámetros  $t_0$ ,  $K$  y  $W'_{\infty}$  (donde se ha puesto una ' para diferenciarlo del parámetro anterior).

Es importante analizar la interpretación biológica de los parámetros mencionados. El parámetro  $W'_{\infty}$  usado en la ecuación de crecimiento de von Bertalanffy, es determinado a partir de un modelo correlativo, al sustituir la ecuación (8.2) en la expresión que relaciona el peso con la longitud ( $W = aL^b$ ,  $a$  y  $b$  constantes), por lo que  $W'_{\infty} = aL_{\infty}^b$ . Por el contrario  $W_{\infty}$  es determinado a través de una regresión lineal (Ec. 4.12) derivada de un modelo de tipo explicativo. En cuanto a  $\alpha$  y  $K$ , ya se ha mencionado que éstos se relacionan para el caso isométrico de la siguiente forma:  $K = \alpha/3$  y en general como  $K = \alpha/\beta$ .

La ecuación de crecimiento en peso de von Bertalanffy utiliza el parámetro de ajuste  $t_0$ , que biológicamente se interpreta como: "El tiempo al cual un organismo tiene un peso igual a cero", el principal problema, con esta interpretación estriba en que ningún organismo durante su ciclo de vida tiene un peso nulo. Por lo anterior el valor de  $t_0$  radica más como parámetro de ajuste que por su interpretación. Por el contrario la ecuación de crecimiento obtenida con Variables Elegantes usa el parámetro  $A$  que está relacionado con  $W_0$  (Ec. 4.8), este último se interpreta como el peso inicial al tiempo  $t = 0$  y que gráficamente es la distancia del punto donde corta la curva al origen (Fig. 3). Desde el punto

de vista biológico, es claro que en el tiempo inicial, los organismos poseen un peso mayor a cero, por lo que en este sentido  $W_0$  no solo es útil como parámetro de ajuste, sino que también es coherente en su interpretación biológica.

Como resultado del análisis de estabilidad de la ecuación (4.2) se obtuvieron dos soluciones constantes conocidas como puntos de equilibrio, el primero inestable ( $\phi_1 = 0$ ) y el segundo estable ( $\phi_2 = (\eta/\kappa)^{1/\beta}$ ). Existe una clara interpretación biológica, si el peso es igual a cero no existe crecimiento; por el contrario si el peso inicial es estrictamente mayor que cero, no importa que tan pequeño, se observa un aumento progresivo en el peso de tal forma que cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $w \rightarrow W_\infty$ .

En cuanto a los resultados que se obtuvieron al aplicar la metodología mencionada, las figuras 2 y 3 son cualitativamente semejantes; ambas presentan forma sigmoidea, la primera porción de ambas curvas es concava hacia arriba, la segunda es concava hacia abajo. En cuanto a su interpretación, la región que es concava hacia arriba corresponde a un crecimiento inicial de tipo exponencial, es decir el crecimiento del pez es rápido; en la región concava hacia abajo, el crecimiento es lento y tiende asintóticamente a  $W_\infty$ . Se puede asegurar que la ecuación propuesta para el crecimiento posee las mismas características cualitativas que tiene la de von Bertalanffy y que también son observadas en el ciclo de vida de los organismos.

El punto de inflexión que divide a las dos regiones citadas, es

calculado al igualar la segunda derivada de la ecuación (4.8 ó 5.10) a cero y resolver para  $t$ . La expresión resultante para von Bertalanffy (EC. 5.10) es:

$$t = t_0 - \frac{1}{K} \ln(1/b) \quad (8.11)$$

el valor calculado al sustituir los valores adecuados para la lisa blanca es:  $t = 1.87$

En forma análoga, para la ecuación desarrollada con el método de Variables Elegantes se obtiene:

$$t = \frac{-1}{K\beta} \ln(\beta/A) \quad (8.12)$$

que para el caso particular de la lisa blanca toma el valor:  $t = 3.15$ . Al observar en ambas figuras (2 y 3), los valores calculados concuerdan con los valores correspondientes de las gráficas.

En la figura (4) se observa en general una desviación menor de los valores calculados con VE con respecto a los datos observados, una situación semejante se da en las figuras 2 y 3, cabe mencionar que la Ecuación de von Bertalanffy se caracteriza por no presentar un buen ajuste en los valores extremos (Adolfo Gracia, comunicación personal); como se observa en la figura 3, la ecuación propuesta para el crecimiento en peso de la lisa blanca (Mugil curema) se ajusta a todos los valores incluyendo los extremos.

La figura 5 muestra el porcentaje de error en el cálculo con respecto a los valores observados, se puede apreciar que en un

solo punto se presenta un porcentaje de error mayor al calcular con variables elegantes sobre los resultados obtenidos con la ecuación de von Bertalanffy. Cabe mencionar, que en general, los porcentajes de error para el método de VE son bajos (Tabla 2) comparados con los obtenidos para la ecuación de von Bertalanffy, llegando incluso a valores tan bajos como 0.31% y 0.40%, lo cual indica un buen ajuste .

Por otra parte, Como puede apreciarse en la tabla V, La ecuación (7.3) obtuvo el valor más bajo de Error Cuadrático medio (432.68); por lo anterior, bajo los criterios establecidos por Roff, se puede considerar que para el caso de los datos de la lisa blanca aquí tratado, el mejor modelo es el desarrollado con el Método de variables Elegantes. En cuanto al valor práctico de los modelos, ambas ecuaciones (7.2 y 7.3) obtuvieron un valor por abajo del mínimo aceptable (20%); cabe señalar que también en este aspecto el valor más bajo de Error Porcentual absoluto medio corresponde a Variables Elegantes.

En Resumen, la ecuación obtenida con el método de Variables Elegantes posee las mismas características cualitativas que la de von Bertalanffy; sin embargo, para el caso específico de la lisa blanca (Mugil curema) aquí estudiado su ajuste es mejor, incluso en los valores extremos.

## CONCLUSIONES

El método de Variables Elegantes es un procedimiento adecuado para solucionar la ecuación diferencial de crecimiento en peso (4.2).

La solución obtenida es un modelo de crecimiento de naturaleza no lineal. Los parámetros del modelo (ecuación 4.8) se pueden determinar fácilmente a partir de tres regresiones lineales (Ecs. 4.3, 4.11 y 4.13), la aplicación del programa VARELEG facilita aún más el cálculo de los parámetros mencionados.

La ecuación obtenida es de carácter general, por lo que el caso isométrico es un caso particular del modelo propuesto y se encuentra caracterizado por las ecuaciones (4.14 y 4.15).

El análisis de estabilidad indica la existencia de dos soluciones constantes, una de ellas corresponde a un punto de equilibrio inestable ( $\phi_1 = 0$ ) y la otra a uno estable ( $\phi_2 = (\eta/\kappa)^{1/\rho}$ ). La interpretación de las soluciones anteriores es coherente con lo observado en los ciclos de vida de los organismos.

El desarrollo por serie binómica es un procedimiento ideal para linealizar el modelo propuesto (ec. 4.8) para el crecimiento de peces.

Mediante la linealización de la ecuación (4.8), se obtiene un método alternativo para la estimación determinística de los parámetros  $\rho$  y  $W$  del modelo estructurado de Schnute, mediante las



relaciones (5.7 y 5.8).

Al aplicar los modelos de von Bertalanffy y el obtenido por el método de Variables Elegantes a la lisa blanca (Mugil curema) se observo un mejor ajuste para la solución por VE (tabla II; figs. 1, 2, 3, 4, 5), incluso en los valores extremos, así mismo bajo los criterios de Roff (1983), el modelo propuesto presentó un mejor ajuste que el de von Bertalanffy. Sin embargo, es necesario validar el modelo con otras especies de peces.

El Modelo de crecimiento propuesto posee las mismas características cualitativas que el modelo de von Bertalanffy, es coherente con el proceso biológico de crecimiento y puede ser incorporado (vía desarrollo en serie binómica) fácilmente a los modelos de dinámica de poblaciones y de administración pesquera, pero además posee una ventaja importante: su ajuste a los datos observados de la lisa blanca es mejor; sin embargo, es necesario probarlo en distintas especies.

## LITERATURA CITADA

- Agger, P.I. Boetius, and H. Lassen. 1971. On errors in the virtual population analysis. International Council for the Exploitation of the Sea, C.M. 1971/H:16, Copenhagen.
- Abramowitz, M. and I. A. Stegun. 1972. Handbook of mathematical functions, Ed. Dover USA pp.14-15
- Aguiar V.F., et al. 1984. Modelo de crecimiento para organismos que guardan proporciones alométricas. Ciencias del Mar. Univ. Autón. Sin. Epoca 1. año 2 No. 6.
- Allen, K.R. 1966. A method of fitting growth curves of the Von Bertalanffy type to observed data. J. Fish. Res. Board. Can. 23: 163-179.
- Baranov, F.I. 1918. On the Question of the biological basis of fisheries. Nauchnye Issledovaniya Ikhtologicheskii Instituta Izvestiya 1:81-128.
- Baranov, F.I. 1925. On the Question of the dynamics of the fishing industry. Byull Rybn. Khoz. 8:7-11
- Beverton, R.J.H. 1954. Notes on the use of theoretical models in the study of the dynamics of exploited fish populations. U.S. Fish and Wild. Serv. Fish. Lab., Beaufort. Misc. Contrib., 2:1-181.
- Beverton, R.J.H. and S.J.Holt. 1957. On the dynamics of exploited fish populations. Fisheries Investigation Series II, Marine Fisheries , Great Britain Ministry of Agriculture, Fisheries and Food 19.
- Burden L.R. y J.D. Faires, 1985. Análisis Numérico. Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- Cass, A.J., L.J. Richards, and J.T. Schnute. 1988. A summary of fishery and biological data for lingcod off the southwest coast of Vancouver Island. Can. Tech. Rep. Fish. Aquat. Sci. 1818: v + 33 p.
- Coan, A.L. 1979. Production model analysis from atlantic yellowfin tuna (*Thunnus albacares*) 1964 to 1978: How are the conclusions affected by current CPUE estimates?. SCRS/79/92
- Cirske, J., 1980. Introducción a la dinámica de poblaciones de peces. FAO, Doc. Tec. Pesca, (192):82 p.
- Derek, A. Roff. 1983. Analysis of catch/effort data: a comparison of three methods. Can. J. Fish. Aquat. Sci. 40:1496-1506.
- Deriso, R.B. 1980. Harvesting strategies and parameter estimation for an age-structured model. Can. J. Fish. Aquat. Sci 37:268-282
- Deriso, R.B., T.J. Quinn II and P.R. Neal. 1985. Catch-age

analysis with auxiliary information Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences 42:815-824

- Derzhavin, A.N. 1922. The stellate aturgeon (*Acipenser stellatus* Pallas), a biological sketch. Byulleten Bakinskoi Ikhtologicheskoi Stantsii 1:1-303
- Doubleday, W.G. 1976. A least squares approach to analysing catch at age data. International Commission for the Northwest Atlantic Fisheries Research Bulletin 12:69-81
- Dupont, W.D. 1983. A stochastic catch-effort method for estimating animal abundance. Biometrics 39:1021-1033
- Ford, E. 1933. An account of the herring investigations conducted at Plymouth during the years from 1924-1933. J. Mar Biol. Assoc. U.K. 19:305-384.
- Fournier, D., C.P. Archibald. 1982. A General theory for analyzing catch at age data. Can. J. Fish. Aquat. Sci. 39:1195-1207
- Fournier, D.A., and I.J. Donnan. 1987. A length-based stock assessment method utilizing a generalized delay-difference model. Can. J. Fish. Aquat. Sci. 44:422-437.
- Fox, W. 1975. Fitting generalized stock production model by least-squares and equilibrium approximation, Fish. Bull. 73(1), p. 23-26
- Fry, F.E. 1949. Statistics of a lake trout fishery. Biometrics 5:26-67.
- Gallardo-Cabello, 1986. Análisis del crecimiento de la brótola *Phycis Blennoides* (BRUNNICH, 1768) en el Mediterráneo Occidental (Pisces: Gadidae)
- Gold, H.J. 1977 Mathematical modeling of biological systems an introductory guidebook Wiley New York
- González-Garcés A., P. Moguelet, y B. García. 1988. Análisis de la pesquería de atún blanco (*Thunus alalunga*) del Atlántico Norte: Estimación de los coeficientes de mortalidad por pesca y de los rendimientos en peso utilizando modelos estructurales. SCRS/88/88
- Graham, M. 1935. Modern theory of exploiting a fishery and application to North Sea trawling. Journal du Conseil. Conseil International per l'Exploration de la Mer 10:254-274
- Gross L.J. 1986. Ecology: An idiosyncratic overview. In: Mathematical Ecology; Biomathematics, vol 17 (eds. T.G. Hallam y S.A. Levin), pp 1-15. Springer-Verlag
- Gulland, J.A. 1984. Manual of methods of fish populations analysis FAO Fish. Tech. Pap., 40:1-60
- Gulland, J.A. 1965. Estimation of mortality rates. Anex to Arctic Fisheries Working Group Report (Meeting in Hamburg, January 1965). International Council for the Exploration of the Sea. C.M. 1965, Document 3 (mimeo), Copenhagen.

- Gutierrez, S.J.L. 1985. Matemáticas para las ciencias naturales, primera parte. Serie Textos. Vinculos Matemáticos. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. UNAM
- Healey, M.C. 1984. Multiattribute analysis and the concept of optimum yield. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 41:1393-1406.
- Kimura, D.K., and J.V. Tagart. 1982. Stock reduction analysis, another solution to the catch equations. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 39:1467-1472
- Kimura, D.K., J.W. Balsigler, and D.H. Ito. 1984. Generalized stock reduction analysis. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 39:1467-1472
- Kume, S. 1981. Overall fishing intensity on Atlantic bigeye tuna caught by longline fishery and evaluation of the stock status by production model analysis. *SCRS/81/34*
- Kume, S. 1984. Production model approach to evaluate the stock status of atlantic bigeye tuna. *SCRS/84/59*
- Jones, R. 1981. The assessment of long-term effects of changes in gear selectivity and fishing effort. Marine Research Department of Agriculture and fisheries for Scotland 2:1-19
- Larrañeta, M.G. 1985. Les constantess de la croissance de la sardina de Castellón. *Doc. Tech. VIII C. G. P.M.*, 39:1-5
- Liu H.C. 1986. Stock assesment of south atlantic albacore by production model analysis, 1967-1985. *SCRS/86/82*
- Maupome, C.A. 1989. Aspectos biológico-pesqueros de Pargo Lunarejo del Pacífico Lutjanus guttatus Steindachner 1859. Tesis de Biólogo. Facultad de Ciencias UNAM
- Megrey, B.A. 1980. Review of age structured model. Pgs. 8-48 in E.F. Edwards y B.A. Megrey editors. Mathematical analysis of fish stock dynamics. American Fisheries Society Symposium 6
- Miyabe N., M. Kiyota y S. Kume., 1987. An updated production model analysis on atlantic bigeye tuna. *SCRS/87/53*
- Miyabe N. 1986. An updated production model analysis of atlantic bigeye tuna as of 1986. *SCRS/86/26*
- Murphy, G.I. 1985. A solution of the catch equation. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada* 22:191-202.
- Neter J.W. Wasserman and M.H. Kutner. 1990. Applied Linear Statistical Models, Regression, Analysis of Variance and Experimental Designs. 3rd. Ed. Richard D. Irwin Inc. Boston Ma. USA
- Ortega Salas, A.A., 1988. Age and growth of the dab, *Limanda limanda* (Linnaeus) in Isla of Man Waters, UK., *An. Inst. Cienc. del Mar y Limnol. Univ. Nal. Autón México.*, 15(1):1-18
- Palohemino, J.E. 1958. A method of estimating natural and fishing mortalities. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada* 15:749-758.

- Paloheimo, J.E. 1980. Estimation of mortality rates in fish populations. Transactions of the American Fisheries Society 109:378-386
- Pella, J.J., and P.K. Tomlinson 1969. A generalized stock production model. Inter-Am. Trop. Tuna Comm. Bull. 13:421-496
- Pope, J.G. 1972. An investigation of the accuracy of virtual population analysis using cohorts analysis International Commission for the Northwest Atlantic Fisheries Research Bulletin 9:65-74
- Pope, J.G., and J.G. Shepherd. 1982. A simple method for the consistent interpretation of catch-at age data. Journal du Conseil, Conseil International pour l'exploration de la Mer 40:176-184
- Pope, J.G. 1977. Estimation of fishing mortality, its precision and implications for the management of fisheries. Pages 63-76 in J. H. Steele, editor, Fisheries mathematics. Academic Press, New York.
- Ricker, W.E. 1975. Computation and interpretation of biological statistics of fish populations. Bull. Fish. Res. Board. Can. 181:xvii + 382 p.
- Rodriguez Roda, J., 1984. Biología del atún, *Thunnus thynnus* L. de la costa sudatlántica de España. Inv. Pesq., 25:33-146
- Roff, D.A. 1983. Analysis of catch/effort data a comparison of three methods. Can. J. Fish. Aquat. Sci. 40:1496-1506
- Sánchez, G.F., 1989. Matemáticas para las Ciencias Naturales, segunda parte. Serie Textos. Vínculos Matemáticos. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias UNAM. México
- Schaefer, M.B. 1957. A study of the dynamics of the fishery for yellowfin tuna in the eastern tropical Pacific Ocean. Inter-Am. Trop. Tuna Comm. Bull. 2:245-265
- Schaefer, M.B. 1957. A study of the dynamics of the fishery for yellowfin tuna in the eastern tropical Pacific Ocean. Inter-Am. Trop. Tuna Comm. Bull. 2:245-265
- Schnute, J. 1977. Improved estimates from the Schaefer production model: theoretical considerations. J. Fish. Res. Board. Can. 34:583-603
- Schnute, J. 1985. A general Theory for analysis of catch and effort data. Can. J. Fish. Aquat. Sci. 42:414-429.
- Schnute, J.T. 1987. A general fishery model for a size-structured fish population. Can. J. Fish. Aquat. Sci. 44:924-940
- Schnute, J.T., L.J. Richards, and A.J. Cass. 1989a. Fish growth: investigations based on a size-structured model. Can. J. Fish. Aquat. Sci. 46:730-742.
- Schnute, J.T., L.J. Richards, and A.J. Cass. 1989b. Fish survival and recruitment: investigations based on a size-structured

- model. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 46:743-769.
- Silliman, R.P. 1971. Advantages and limitations of 'simple' fishery models in light of laboratory experiments. *J. Fish. Res. Board Can.* 28: 1211-1214.
- Sun, C.L., and R.T. Yang. 1984. Stock assesment of south atlantic albacore by production model analysis, 1987-83. *SCRS/84/86*
- Thompson, W.F., and F.H. Bell. 1934. Biological statistics of the Pacific halibut fishery (2) Effects of changes in intensity upon total yield and yield per unit gear. *Int. Fish. Comm. Rep.* 8
- Tomlinson, P.K. y N.J. Abramson. 1961. Fitting a von Bertalanffy growth curve by least squares. *Fish. Bull. Calif.*, 116:3-69
- Tomlinson, P.K. 1970. A generalization of the Murphy catch equation. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada* 27:821-825
- von Bertalanffy, L., 1938 A quantitative theory of organic growth., *Hum. Biol.*, 10(2):181-213
- Walford, L. A. 1946. A new graphical method of describing the growth of animals. *Biol. Bull.* 90:141-147.
- Walter, G.G. 1973. Delay-differential equation models for fisheries. *J. Fish. Res. Board. Can.* 30:939-945.
- Wootton, R.J., 1990. *Ecology of Teleost Fishes*. Chapman and Hall N.Y. U.S.A. pp. 117-158.
- Yeh S.Y. and H.C. Liu., 1987. Stock assesment of south atlantic albacore bi using production model analysis, 1987-1986. *SCRS/87/8*
- Yeh S.Y. and R.T. Yang., 1988. Stock assesment of south atlantic albacore by using production model analysis, 1987-1987. *SCRS/88/80*

## A N E X O

En el presente anexo se dan algunos de los fundamentos más importantes en los que se basa el método de Variables Elegantes, para mayor información al respecto se puede consultar a Sánchez (1989).

Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de primer orden, también conocidas como de Malthus tienen la siguiente forma:

$$\frac{dY(t)}{dt} = kY(t) \quad (A.1)$$

y tienen como solución a la expresión:

$$Y(t) = Y_0 e^{kt} \quad (A.2)$$

El método de Variables Elegantes tiene como objeto, reducir ecuaciones del tipo:

$$\frac{dY(t)}{dt} = F(Y) \quad (A.3)$$

a ecuaciones malthusianas (Ec. A.1) de fácil solución, para ello es necesario determinar una transformación  $T(Y)$ , tal que la nueva variable ( $\mu = T(Y)$ ) satisfaga la siguiente relación:

$$\frac{d\mu(Y)}{dt} = k\mu(Y) \quad (A.4)$$

para algún número real  $k$ , la ecuación anterior también se puede escribir en términos de  $T(Y)$ :

$$\frac{dTC(Y)}{dt} = kTC(Y) \quad (A.5)$$

es claro que las siguientes relaciones son equivalentes:

$$\frac{dTC(Y)}{dt} = \frac{d\mu(Y)}{dt} = \frac{d\mu(Y)}{dY} \frac{dY(t)}{dt} = k \mu(Y) \quad (A.6)$$

al despejar  $\mu(Y)$  y  $\frac{dY(t)}{dt}$  se obtiene:

$$\frac{d\mu}{dY} / \mu = k \frac{dY}{dt} \quad (A.7)$$

que al multiplicar por  $dY$  se puede reescribir como:

$$\frac{d\mu}{\mu} = k \frac{dY}{FC(Y)} \quad (A.8)$$

despues de integrar, se encuentra la siguiente relación:

$$\ln \mu = k \int dY / FC(Y) \quad (A.9)$$

la solución para  $\mu$ , se logra al aplicar la función exponencial:

$$\mu = e^{k \int dY / FC(Y)} \quad (A.10)$$

es decir, la variable elegante existe, si la integral  $(k \int dY / FC(Y))$  del argumento de la función exponencial existe; debido a lo anterior, la ecuación (A.3) podrá reducirse a una ecuación de tipo Malthusiano (A.1) cuya solución será la ecuación (A.2).