

N° 95
2ES.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA

IMPORTANCIA DE LA CONSERVACION DEL MOMENTUM
ANGULAR EN LA FISICA Y EN LA INGENIERIA QUIMICA

T E S I S
Que para obtener el Título de
INGENIERO QUIMICO
p r e s e n t a

LUIS MIGUEL RIVERA CHAVEZ



México, D. F.

1992

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE.

	PAGINA.
PROLOGO.	4
CAPITULO I. GENERALIDADES.	5
CAPITULO II. LEY DE LA CONSERVACION DEL MOMENTUM ANGULAR.	18
CAPITULO III. DISEÑO Y CONSTRUCCION DE LA PARTE EXPERIMENTAL.	30
CAPITULO IV. ANALISIS DE RESULTADOS.	46
CAPITULO V. APLICACIONES DE LA LEY DE CONSERVACION DEL MOMENTUM ANGULAR EN LA FISICA.	71
CAPITULO VI. APLICACIONES DEL LA LEY DE CONSERVACION DEL MOMENTUM ANGULAR EN LA INGENIERIA.	84
CONCLUSIONES.	114
BIBLIOGRAFIA.	116

PROLOGO.

Cuando escuchamos los términos "Momentum lineal" o "Momentum angular", no pensamos en nada, a menos que tengamos conocimientos de Física, en cuyo caso sólo vendrá a nuestra mente un Juego de billar.

No se les da a las leyes de conservación del momentum lineal y del momentum angular la importancia que tienen en el modelaje de los fenómenos naturales.

El presente trabajo tiene como objetivos la comprensión de estos términos, matemática y conceptualmente, así como el diseño y construcción de un aparato que ilustre la conservación del momentum angular, para ser utilizado después como práctica de laboratorio de Cinemática y Dinámica.

Las características del diseño y funcionamiento del aparato están definidos por un problema dado en un libro ("Mecánica Vectorial para Ingenieros", F.P. Beer & E.R. Johnston.), y en el capítulo dedicado al análisis de resultados y en las conclusiones se explica lo obtenido, así como las desviaciones de los valores teóricos.

Los problemas se presentaron tanto en el diseño y construcción, como en el método de seguimiento con cámaras y estroboscopios agradeciendo la colaboración del personal académico y administrativo de los Laboratorios de Física de la Facultad de Química de la U.N.A.M., en especial a la M. en C. Ma. de los Angeles Olvera Treviño, a la M en C. Patricia Aviles y a su esposo por su valiosa colaboración.

Una vez logrado esto, se usaron las leyes de conservación del momentum lineal y del momentum angular para aplicaciones a la Física y la Ingeniería.

CAPITULO I

GENERALIDADES.

En este capítulo, se revisarán conceptos necesarios para la mejor comprensión del presente trabajo.

El tema principal de la tesis, es la ley de la conservación del momentum angular, para lo cual nos auxiliaremos de algunos conceptos matematicos y físicos:

a) Las principales operaciones vectoriales que se usarán son: El producto punto ó escalar y el producto cruz ó vectorial. Definiremos el producto interior, punto ó escalar de los vectores $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $\vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ separados un ángulo θ , de la siguiente manera:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum a_i b_i$$

Lo que significa que el producto punto de dos vectores da como resultado un escalar, $\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$. Basándose en su interpretación geométrica, tenemos que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

Por otro lado, el producto cruz ó vectorial está definido de la siguiente forma: Si se tienen los vectores $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ separados por un ángulo θ en el espacio vectorial de dimensión 3:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

obteniéndose otro vector de dimensión tres. Y de su interpretación geométrica, tenemos que:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$$

b) El concepto de *masa* se usa para caracterizar y comparar los cuerpos con base en ciertos experimentos mecánicos fundamentales. Por ejemplo, los cuerpos que tengan la misma masa serán atraídos por la Tierra con igual aceleración; también presentarán la misma resistencia a un cambio en su movimiento traslacional.

c) Torca ó momento: Se observa que es más fácil abrir y cerrar una puerta, entre más lejos del eje de giro apliquemos la fuerza, es decir, la facilidad con que gira está en función de la fuerza aplicada y la distancia del eje de giro al punto de aplicación de dicha fuerza (a la cual llamaremos brazo de palanca), además la dirección en que se aplica la fuerza también es importante, siendo máximo el efecto cuando está en un ángulo de 90° respecto al brazo de palanca, es decir, se puede describir con la relación:

$$|\vec{\tau}| = |\vec{F}| |\vec{r}| \sin\theta,$$

$|\vec{F}|$ y $|\vec{r}|$ representan la magnitud de la fuerza y el brazo de palanca respectivamente, y θ el ángulo que forman ambos vectores. La magnitud creada para cuantificar la facilidad de giro se conoce como torca ó momento y se representa como $\vec{\tau}$. De acuerdo a lo descrito, la torca es un vector definido como:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

d) El momentum lineal de una partícula se define como el producto de su masa por su velocidad. Designándolo por \vec{P} , tenemos que:

$$\vec{P} = m \vec{v}.$$

El momentum lineal es una cantidad vectorial, y tiene la misma dirección de la velocidad (\vec{v}). Es un concepto físico de mucha importancia porque combina los dos elementos que caracterizan el estado dinámico de una partícula. De aquí en adelante denotaremos al momentum lineal simplemente como momentum.

Para ejemplificar la ley de la conservación del momentum, se tiene un experimento simple en el cual un objeto choca frontalmente con otro. Se sabe que cuando un objeto se pone en movimiento sobre una superficie horizontal sin fricción, se mueve sin cambio en la velocidad. Cada uno de los dos objetos cambia su velocidad uniforme en función de la medida en que interactúa, o lo que es igual, choca con el otro. Un objeto de 1.00 kg, moviéndose inicialmente a razón de 2.00 m/s hacia la derecha, choca con un objeto de 3.00 kg originalmente en reposo. Los resultados observados se muestran en la figura 1.1a; el objeto más ligero rebota hacia la izquierda a 0.7 m/s, y el objeto de masa mayor se pone en movimiento hacia la derecha con una velocidad de 0.9 m/s. Las velocidades están graficadas como funciones del tiempo en las figuras 1.1b y 1.1c.

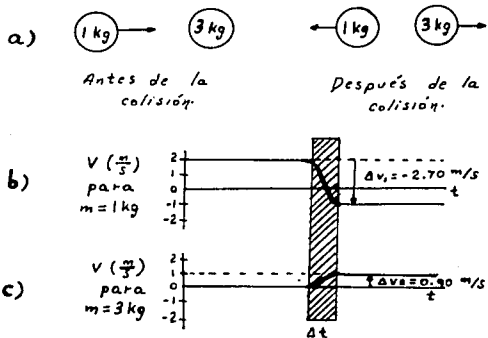


FIG. 1.1: a) Las velocidades de dos objetos antes y después de la colisión frontal. b) Gráfica tiempo-velocidad para el objeto de 1.0 kg, c) Gráfica tiempo-velocidad para el objeto de 3.0 kg.

Cada objeto tiene una velocidad constante antes de la colisión y una velocidad constante, pero diferente, después de la colisión. La velocidad cambia sólo cuando los objetos interactúan. La velocidad del objeto de 1.00 kg cambia en la cantidad $\Delta v_1 = -2.70$ m/s; el cambio de velocidad correspondiente al objeto de 3.00 kg es $\Delta v_2 = 0.90$ m/s (los subíndices 1 y 2 designan a los objetos de 1.00 kg y 3.00 kg respectivamente). Los cambios de velocidad Δv_1 y Δv_2 y las masas m_1 y m_2 están relacionadas simplemente por:

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = \frac{-2.70 \text{ m/s}}{0.90 \text{ m/s}} = -3.00$$

y

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{3.00 \text{ kg}}{1.00 \text{ kg}} = 3.00$$

de lo anterior $m_1 \Delta v_1 = -m_2 \Delta v_2$ ó $m_1 \Delta v_1 + m_2 \Delta v_2 = 0$. ----- (1.1)

Experimentos posteriores establecen que el resultado simple expresado en (1.1) es válido para otras colisiones frontales. Desde luego, es también válido para todas las colisiones, independientemente de la naturaleza de los objetos interactuantes, siempre que el sistema, como un todo, esté aislado.

La ecuación (1.1) expresa una regularidad notable en la naturaleza que merece la designación de ley física. Escribiéndola en términos del momentum, tenemos:

$$\Delta \vec{P} = \Delta(m\vec{v}) = m \Delta \vec{v}$$

donde se ha considerado, en el último paso, que la masa permanece constante, por lo que la ecuación (1.1) resulta:

$$\Delta \vec{P}_1 = -\Delta \vec{P}_2 \text{ ó } \Delta \vec{P}_1 + \Delta \vec{P}_2 = \vec{0} \text{ ----- (1.2)}$$

La ecuación (1.2) dice: "Cuando dos objetos aislados interactúan uno con otro, la pérdida en el momentum de un objeto es igual al momentum ganado por el segundo objeto". O, "el cambio total en el momentum para el sistema es cero". Una colisión es un proceso en el

cual el momentum es transferido de un cuerpo al otro, sin cambio en el momentum total del sistema. Así, si \vec{P}_1 es el momentum del objeto 1 y \vec{P}_2 el del objeto 2, el momentum total del sistema aislado es constante.

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \text{constante (en dirección y magnitud)} \quad \text{---- (1.3).}$$

Esta es la ley de conservación del momentum. Regresando al ejemplo original (Figura 1.2), dibujamos ahora las gráficas del momentum con respecto al tiempo. Véase la figura 1.2. El objeto de 1.00 kg pierde un momentum de 2.70 kg·m/s hacia la derecha, mientras que el objeto de 3.00 kg gana el mismo momentum hacia la derecha. No habiendo cambio en el momentum total del sistema.

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 2.0 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

a la derecha antes y después de la colisión.

La figura 1.2 muestra, posteriormente, que el momentum es el mismo, no sólo antes y después de la colisión, sino también en cada instante durante la colisión.

El poder y generalidad de la ley de conservación del momentum difícilmente puede ser más enfatizada. En tanto que las partículas estén aisladas de la influencia externa, el momentum total se conserva, independientemente de los detalles, ó del conocimiento de la interacción. Si la interacción es "suave" (el momentum cambia lentamente) ó "brusca" (el momentum cambia rápidamente), si las partículas se separan después de la colisión (como las bolas de billar) ó permanecen juntas (como con piezas de plastilina), se "tocan" ó meramente se acercan (como en el caso de la repulsión entre imanes). En resumen, cualesquiera que sean las circunstancias, el momentum total \vec{P} antes de la colisión es igual al momentum total después de la misma en un sistema aislado:

$$\vec{P} = \sum \vec{P}_i = \text{constante (en magnitud y dirección).}$$

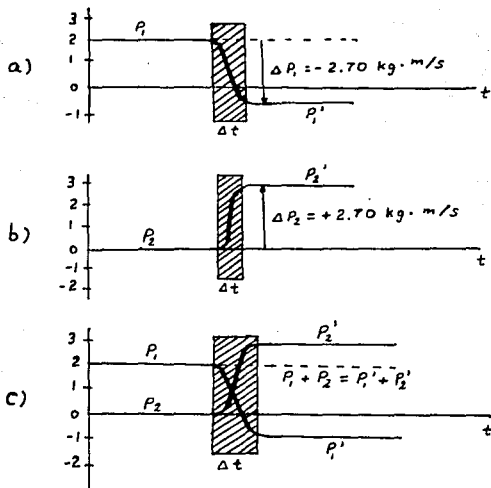


FIG. 1.2: Gráfica tiempo-momento correspondiente a la colisión de la figura 1.1 para a) El objeto de 1 kg. b) El objeto de 3.0 kg. c) El momento total del sistema formado por los dos objetos.

Tomando lo anterior acerca de la conservación del momento, se define el *coeficiente de restitución* (e) en la interacción entre dos partículas A y B, como la relación de momenta:

$$e = - \Delta p' / \Delta p,$$

el superíndice ' indica "después de la interacción". Desarrollando la ecuación anterior, se tiene:

$$e = (mbv_b' - mava') / (mava - mbv_b)$$

Si se considera que la masa no cambia durante la interacción, y además que es la misma para ambos cuerpos, tenemos:

$$e = (v_b' - va') / (va - v_b)$$

Presentándose dos casos de particular interés:

a) $e = 0$ (Impacto perfectamente plástico). No hay período de restitución y las dos partículas permanecen unidas después del impacto.

b) $e = 1$ (Impacto perfectamente elástico). Después del impacto, las partículas se alejan con la misma velocidad con la cual se acercaron.

El coeficiente de restitución es una forma de medir experimentalmente la elasticidad de los materiales.

El gran preámbulo hecho con motivo de la ley de la conservación del momentum, se debe a que todos estos conceptos pueden aplicarse (con pequeñas modificaciones) a la dinámica rotacional, y por ello al momentum angular y a su conservación.

e) La velocidad angular está definida como la derivada del desplazamiento angular ($d\bar{\theta}$) con respecto al tiempo de un cuerpo que gira, es decir:

$$\bar{\omega} = d\bar{\theta}/dt.$$

Por convención una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj ó levógiro se toma como positiva y una rotación

en el sentido de las manecillas del reloj ó dextrógira se toma como negativa. Así la magnitud de $\bar{\omega}$ da el ángulo girado por unidad de tiempo, su signo da el sentido de la rotación.

El momentum angular con respecto al origen O (figura 1.3) de una partícula de momentum lineal \bar{P} y radio de giro \bar{r} está definido como el producto vectorial:

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{P} ,$$

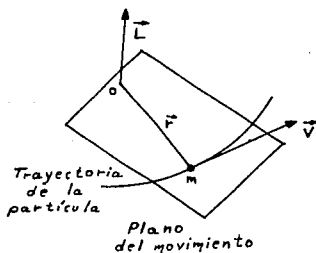


FIG. 1.3: El momentum angular de una partícula.

El momentum angular es entonces un vector perpendicular al plano determinado por \bar{r} y \bar{v} . El momentum angular de la partícula en general cambia en magnitud y dirección mientras la partícula se mueve. Sin embargo, si una partícula se mueve en un plano, y el punto O está situado en el plano, la dirección del momentum angular permanece invariante, es decir, perpendicular al plano, ya que tanto \bar{r} como \bar{v}

están en el plano. En el caso de un movimiento circular cuando O es el centro del círculo, los vectores \vec{r} y \vec{v} son perpendiculares entre sí y

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| |\vec{r}|,$$

de modo que:

$$|\vec{L}| = m |\vec{r}| |\vec{v}| = m |\vec{r}|^2 |\vec{\omega}|.$$

La dirección de \vec{L} es la misma que la de $\vec{\omega}$, de modo que podemos escribir:

$$\vec{L} = m |\vec{r}|^2 \vec{\omega}.$$

Si el movimiento plano en vez de circular es una curva cualquiera, podemos descomponer la velocidad en sus componentes radial y transversa, esto es, $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$. Luego podemos escribir el momentum angular como:

$$\vec{L} = m \vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = m \vec{r} \times \vec{v}_\theta$$

ya que $\vec{r} \times \vec{v}_r = \vec{0}$ (\vec{r} y \vec{v}_r son paralelos). Por ello, la magnitud de \vec{L} es:

$$|\vec{L}| = m |\vec{r}| |\vec{v}_\theta|.$$

Pero como:

$$|\vec{v}_\theta| = |\vec{r}| |d\theta/dt|,$$

la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$|\vec{L}| = m |\vec{r}|^2 |d\theta/dt|.$$

La ley de la conservación del momentum angular (a reserva de comprobarla matemáticamente después), dice que: "El momentum angular de un sistema es constante en magnitud y dirección, si la resultante de las fuerzas que interactúan en el sistema dan lugar a una torca cero".

f) Fuerzas conservativas y no conservativas: Una fuerza es conservativa si su dependencia del vector posición \vec{r} ó de las coordenadas x, y, z de la partícula es tal que el trabajo W puede ser expresado como la diferencia entre los valores de una cantidad $E_p(x, y, z)$ que se llama *energía potencial*, y es una función de las coordenadas de las partículas. Luego, si \vec{F} es una fuerza conservativa

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{p,A} - E_{p,B} \text{ ----- (1.4)}$$

por lo que se observa que el trabajo efectuado por las fuerzas conservativas es independiente de la trayectoria, ya que, cualquiera que sea la trayectoria que une a los puntos A y B, la diferencia $E_{p,A} - E_{p,B}$ es la misma porque depende solamente de las coordenadas de A y B. En particular, si la trayectoria es *cerrada*, de modo que el punto final coincide con el inicial (esto es, A y B son el mismo punto), entonces $E_{p,A} = E_{p,B}$ y el trabajo es cero ($W = 0$). Lo que significa que en parte de la trayectoria el trabajo es positivo y en otra negativo pero igual en magnitud, dando un resultado neto nulo. Cuando la trayectoria es cerrada, la integral en la ecuación (1.4) se escribe \oint . El círculo en el signo integral indica que la trayectoria es cerrada. Por consiguiente, para las fuerzas conservativas:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ ----- (1.5)}$$

La fuerza gravitacional, siendo central es de este tipo. Las fuerzas centrales (conservativas por naturaleza) son aquellas cuya dirección pasa siempre a través de un punto fijo.

Por otro lado, es fácil encontrar fuerzas en la naturaleza que no son conservativas. Un ejemplo de ellas es la fricción. La fricción

siempre se opone al desplazamiento. Su trabajo depende de la trayectoria seguida y, aunque la trayectoria pueda ser cerrada, el trabajo no es nulo, de modo que la ecuación (1.5) no se aplica. Similarmente, la fricción en los fluidos se opone a la velocidad, y su valor depende de ésta mas no de la posición. Una partícula puede estar sujeta a fuerzas conservativas y no conservativas al mismo tiempo.

Si se considera un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje Z con velocidad angular $\vec{\omega}$ (Figura 1.4), cada una de sus partículas describe una órbita circular con centro en el eje Z. La magnitud de la velocidad es $|\vec{v}_i| = |\vec{\omega}| |\vec{r}_i| \text{sen}\theta_i = |\vec{\omega}| |\vec{R}_i|$. El momentum angular de una partícula A_i con respecto al origen O es:

$$\vec{L}_i = m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i).$$

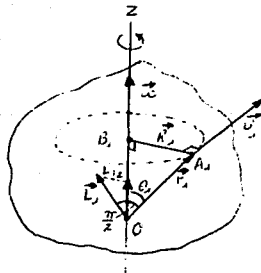


FIG. 1.4: Momentum angular de un cuerpo rígido rotante.

Su dirección es perpendicular al plano determinado por los vectores \vec{r}_1 y \vec{v}_1 y está situado en el plano determinado por \vec{r}_1 y el eje Z. Por consiguiente hace un ángulo $\pi/2 - \theta_1$ con el eje de rotación Z. La magnitud de \vec{L}_1 es $m_1 |\vec{r}_1| |v_1|$, y su componente paralela al eje Z es:

$$L_{1z} = (m_1 r_1 v_1) \cos(\pi/2 - \theta_1) = m_1 (r_1 \sin \theta_1)(\omega r_1) = m_1 r_1^2 \omega$$

La componente del momentum angular total del cuerpo rotante a lo largo del eje de rotación Z es:

$$|\vec{L}_z| = |\vec{L}_{1z}| + |\vec{L}_{2z}| + \dots = \sum |\vec{L}_{iz}| = (m_1 |\vec{R}_1|^2 + m_2 |\vec{R}_2|^2 + \dots) |\vec{\omega}|$$

$$|\vec{L}_z| = (\sum_i m_i |\vec{R}_i|^2) |\vec{\omega}|.$$

La cantidad $I = m_1 |\vec{R}_1|^2 + m_2 |\vec{R}_2|^2 + m_3 |\vec{R}_3|^2 + \dots = \sum m_i |\vec{R}_i|^2$ representa el segundo momento de la masa respecto al eje de rotación Z, que coincide con el centroide del cuerpo, y su nombre más común es el de *momento de inercia*. Dicho momento se obtiene sumando, para cada partícula, el producto de su masa multiplicado por el cuadrado de su distancia al eje Z. Por lo tanto, la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}.$$

Análogamente, para un objeto plano y delgado, se tiene:

$$I = \sum A_i |\vec{R}_i|^2,$$

siendo A el área de cada elemento diferencial de la figura, observándose que el momento de inercia es el segundo momento del área. Por otro lado, se define al *radio de giro* (k) como la distancia a la que una banda delgada paralela al eje respecto al que se calcula el momento de inercia de la figura tendría el mismo momento de inercia que la totalidad de la figura.

En el caso de querer calcular el momento de inercia respecto a un eje que no pase por el centroide del cuerpo, teniendo sólo el valor del momento respecto al eje que pase por el centroide, siendo ambos ejes paralelos entre sí, se puede utilizar el teorema de Steiner también conocido como teorema de los ejes paralelos, que nos dice: Sea Z un eje arbitrario y Z_c un eje paralelo a Z que pasa a través del centro de masa del cuerpo. Si d es la separación entre los dos ejes, la siguiente relación es válida:

$$I = I_c + A d^2 ,$$

donde I e I_c son los momentos de inercia del cuerpo con respecto a Z y Z_c respectivamente, y A es el área del cuerpo. Similarmente, para cuerpos, se tiene:

$$I = I_c + m d^2 ,$$

donde m es la masa del cuerpo.

En el caso de un rectángulo, el momento de inercia respecto a un eje que pase por su centroide es: $1/12 b h^3$, siendo b la base y h la altura, observándose que no es indistinto el que su lado menor o mayor esté en la base. Esta forma de cuantificar la distribución de masa (en cuerpos) o de área (en figuras) es útil en el análisis de elementos estructurales. Por ejemplo explica el hecho de que una viga de sección transversal rectangular sea más sensible a la flexión cuando está apoyada sobre su lado mayor que sobre su lado menor.

CAPITULO II.

LEY DE LA CONSERVACION DEL MOMENTUM ANGULAR.

En este capítulo, se discutirá formalmente la ley de conservación del momentum angular, y se ilustrará con ejemplos de astronomía.

El ser humano evolucionó de primates primitivos hasta su estado actual, sin embargo, cabe la pregunta: ¿En qué momento deja de ser prehomínido para convertirse en hombre?, aunque hay varias opiniones, se considera que es cuando toma conciencia de su medio ambiente, y que mejor muestra de ello, cuando observa los cuerpos celestes, percatándose de que no se mueven al azar, sino conforme a ciertas leyes aún no comprendidas por él.

Los primeros hombres se mantenían de la caza y la pesca, pero la periodicidad de las estaciones, determinaba la abundancia ó escasez de animales, y con ello quedaba normada toda su vida. Posteriormente se da cuenta que puede sembrar plantas de tal forma que ya no depende de la naturaleza en forma silvestre para su sustento y se asienta en un lugar, teniendo más tiempo para observar las estrellas y relacionarlas con el transcurso de su vida, es decir, cuándo sembrar, cosechar, etc., así que la astronomía se convirtió en algo aún más importante en su vida.

Conforme tenía más tiempo de observar los astros, el hombre, ya sedentario, se da cuenta que las estrellas se mueven con regularidad y regresan al mismo lugar en periodos definidos de tiempo. Así que empieza a orientarse por medio de ellas, y con su incipiente tecnología, inicia su migración hacia todo el mundo.

Ya asentado por todos los confines del orbe, y teniendo cubiertas sus necesidades más elementales, el ser humano trata de explicar los fenómenos que suceden a su alrededor y en especial los relacionados con los cuerpos celestes, que tantos beneficios le había reportado.

Así pues, tenemos testimonios a este respecto de las culturas más prósperas de la antigüedad: Los Egipcios por ejemplo, creían que Nut, la diosa del firmamento cubría con su cuerpo a la Tierra, y debajo de ella, se encontraban: Shu, dios del aire y Geb, dios de la Tierra, mientras que una barca llevaba al Sol. Y por el tenor Mesopotamia, Siria, y México que albergó una de las culturas más importantes al respecto: los mayas.

Los primeros astrónomos se encontraron seguramente con el problema de que cinco cuerpos celestes eran "Errantes" (πλανητες (planetes) en griego significa errante). Es decir, trazaban trayectorias irregulares, pareciendo algunas veces que retrocedían, conociéndose posteriormente como planetas, y siendo llamados: Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno (Figura 2.1) según la tradición griega, que fue la más difundida.

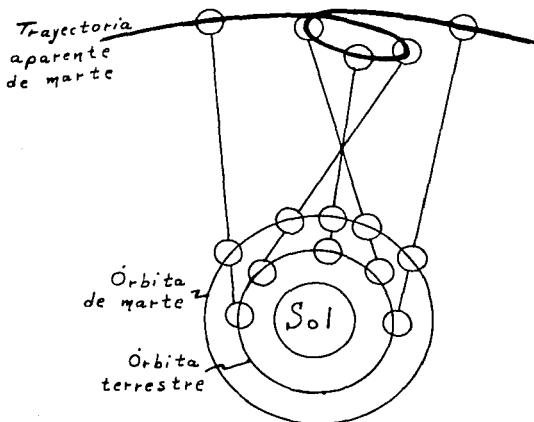


FIG. 2.1: Trayectoria aparente de marte.

Los griegos son los primeros en tratar de reproducir los movimientos celestes por medio de esferas y engranes, es decir, dejando a un lado la magia. Para subsanar el aparentemente errante comportamiento de los planetas, considerando a la Tierra como centro de todo, optaron por añadir esferas secundarias cuyas trayectorias formaban ángulos variables con las primarias, pero se necesitaban demasiadas. Eudoxo de Cnido (409 - 356 A. de C.) llegó a emplear 27 esferas, y sus sucesores se vieron obligados a usar 57, pero aun así, sus movimientos no satisfacían las observaciones astronómicas. La teoría griega más famosa es la de Claudio Ptolomeo (aprox. 100 - aprox. 178), que con el tiempo llegó a convertirse en dogma de fe, por lo que nadie podía refutarla sin el riesgo de ser acusado de hereje. Su teoría decía que la Tierra era el centro del sistema planetario y alrededor de ella giraban el Sol y los demás planetas, aunque éstos giraban además en pequeños círculos.

Después vendría Nicolás Copérnico (1473 - 1543) a contradecir la teoría de Ptolomeo y a sugerir otra en la que el Sol es el centro del sistema planetario, y los planetas giran en órbitas concéntricas alrededor de él. Galileo ratificaría esta idea. Posteriormente, Johannes Kepler (1571 - 1630) demostró matemáticamente el concepto heliocéntrico, y que las órbitas de los planetas eran elípticas y no circulares como el concepto que presentaba Copérnico. Y finalmente, el gran genio Issac Newton (1642 - 1727), realizando una de las hazañas más grandes en la historia del pensamiento, explicó, por medio de la teoría de la gravitación, porque los planetas no caen, a partir de lo que hace caer las cosas al suelo.

A continuación se muestran animaciones por computadora de los planetas: urano, venus, saturno, neptuno y mercurio, en las que se aprecia su trayectoria retrógrada. El período animado es del seis de noviembre de 1989 a las 20 Hrs. al veintiseis de marzo de 1990 a la misma hora, con una diferencia de dos días entre las animaciones. Estas fueron realizadas con el paquete "Cosmos"™ en una PC 80286. El paquete fue desarrollado por la compañía: Kara Technology Corp. en 1989.

11/ 6/1989 20:00:00

□

Neptuno

Saturno

Interval: 2 days

Se inicia la órbita de Neptuno y la de Saturno, el 6 de noviembre de 1989, a las 20:00:00 Hrs. .

12/28/1989 20:00:00



Interval: 2 days

Se observa el inicio del "rizo" de las órbitas retrógradas de Venus y Mercurio, el 28 de diciembre

11/ 6/1989 20:00:00

□

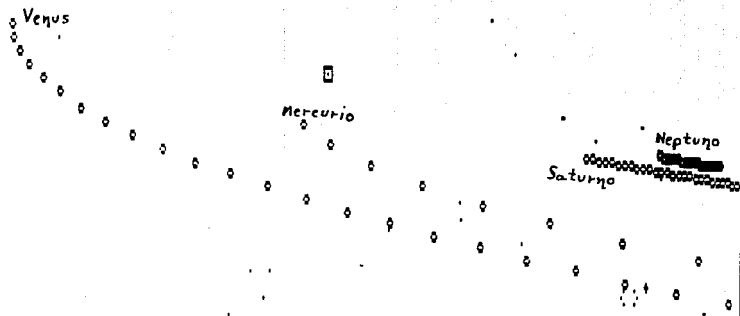
Neptuno

Saturno

Interval: 2 days

Se inicia la órbita de Neptuno y la de Saturno, el 6 de noviembre de 1989, a las 20:00:00 Hrs.

12/28/1989 20:00:00



Interval: 2 days

Se observa el inicio del "rizo" de las órbitas retrógradas de Venus y Mercurio, el 28 de diciembre

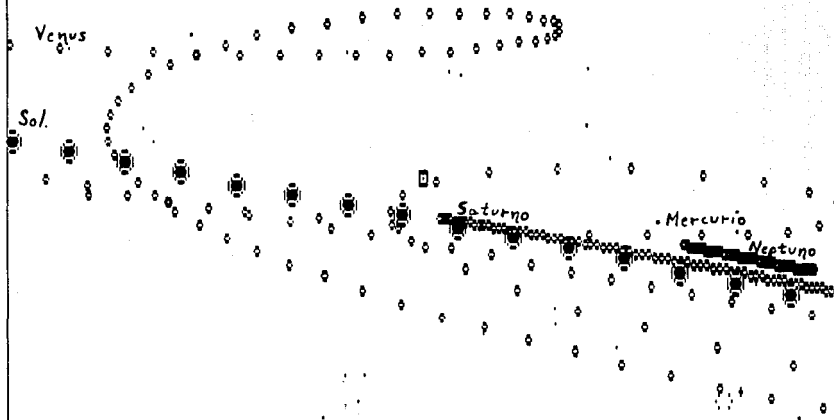
2/16/1990 20:00:00



Interval: 2 days

El 16 de febrero de 1990 a las 20:00:00 Hrs, se ve ya el "rizo" casi completo de las órbitas de Venus y Mercurio.

3/26/1990 20:00:00



Interval: 2 days

El 26 de marzo de 1990, se completan las órbitas retrógradas de Venus y Mercurio.

Este enorme parentesis ha sido abierto porque es en el campo de la astronomía, y durante el último período relatado, que se presentaron las aplicaciones más espectaculares del principio de conservación del momentum angular, aunque la humanidad ha seguido avanzando, y se han encontrado nuevas aplicaciones, de las que nos ocuparemos después. Además, este relato ha servido para tener en mente al sistema solar, con el cual, se ejemplificará el principio de la conservación del momentum angular, pero antes se presentará la demostración matemática (formal) de la ley de la conservación del momentum angular:

Por definición se tiene:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}, \quad \text{y} \quad \vec{P} = m \vec{v} \quad \text{--- (2.1)}$$

Para que se cumpla la conservación del momentum angular, es decir, que no varíe con el tiempo, $\dot{\vec{L}}$ debe ser igual al vector cero. $\dot{\vec{L}}$ es conocida como notación de Newton, y simboliza la primera variación de \vec{L} (en este caso) respecto al tiempo.

Derivando respecto al tiempo la función:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P},$$

tenemos que:

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{P} + \vec{r} \times \dot{\vec{P}} \quad \text{--- (2.2)}$$

Para relacionar la torca con la ecuación 2.2, es necesario aclarar que la variación de la posición con el tiempo se llama velocidad (\vec{v}), por lo que $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$, dado que \vec{r} es un vector posición. Y la variación de la velocidad con el tiempo es conocida como aceleración (\vec{a}), por lo que $\dot{\vec{v}} = \vec{a}$.

De la ecuación 2.2 se tiene:

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times m \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times m \vec{a} \quad \text{--- (2.3)}$$

Newton definió la fuerza como el producto de la masa por la aceleración ($\vec{F} = m \vec{a}$), por lo que:

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times m \vec{a} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}$$

se observa que el segundo miembro es la definición vectorial de la torca, por lo que:

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{\tau} \quad \text{--- (2.4)}$$

Por otro lado, $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$. Por lo que el primer sumando de la ecuación 2.4 queda:

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = \vec{v} \times m \vec{v}$$

Y la norma del vector resultante del producto cruz es:

$$|\dot{\vec{r}} \times \vec{p}| = (|\vec{v}|)(m |\vec{v}|) \sin\theta,$$

y si se asume que las dos velocidades son iguales y por lo tanto, son paralelas $\rightarrow \theta = 0^\circ$, así que $\sin \theta = \sin 0^\circ = 0$, y la ecuación 2.4 queda:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}.$$

Para que se cumpla la conservación del momentum angular (\vec{L}), es necesario que $\dot{\vec{L}} = \vec{0}$, por lo que queda demostrado que el momentum angular se conserva, siempre y cuando no haya fuerzas externas al sistema cuya resultante provoque una torca, es decir, $\vec{\tau} = \vec{0}$.

Con todo esto en mente, hagamos una reflexión: Sabemos que si la torca es cero, el momentum angular permanecerá constante, ahora, ¿Qué provoca que la torca sea cero? Recordemos que:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F},$$

con ello vemos que:

$$\text{si } \vec{F} = \vec{0} \rightarrow \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{0} = \vec{0},$$

es decir, si sobre la partícula no actúa fuerza alguna, pero también $\vec{\tau} = \vec{0}$ si \vec{r} y \vec{F} son paralelos entre sí, porque:

$$|\vec{\tau}| = (|\vec{r}|)(|\vec{F}|) \text{ sen}\theta,$$

y si $\theta = 0^\circ$, entonces:

$$|\vec{\tau}| = (|\vec{r}|)(|\vec{F}|) \text{ sen } 0^\circ = 0.$$

Cuando el último caso se presenta, se dice que la partícula está sometida a una fuerza central¹ (figura 2.3). Como en el caso de la Tierra y el Sol.

Ahora, si se consideran al Sol y a la Tierra como cuerpos rígidos de un sistema aislado, es decir, sin considerar sus interacciones con el resto del universo, la Tierra tiene una masa m y una velocidad v , con ello tiene un momentum lineal:

$$\vec{P} = m \vec{v},$$

y un momentum angular:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P},$$

¹ Se conoce como fuerza central, aquella cuya dirección pasa siempre a través de un punto fijo.

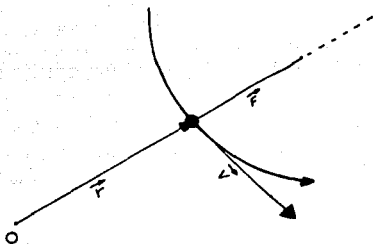


FIG. 2.2: El momentum angular es constante en el movimiento bajo fuerzas centrales.

\vec{r} es el vector posición de la Tierra respecto al Sol en todo momento. Desarrollando se tiene:

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m \vec{v}) = m (\vec{r} \times \vec{v}) \Rightarrow |\vec{L}| = m (|\vec{r}| |\vec{v}| \sin\theta),$$

de aquí se observa en la figura 2.3, que en los puntos (A) y (B) el $\sin\theta$ es máximo = 1, porque $\theta = 90^\circ$; y que el momentum angular sea constante, significa en (A) que \vec{r} es mínima y \vec{v} máxima y en (B) que \vec{r} es máxima y \vec{v} mínima. En la realidad se observa un aumento en la velocidad terrestre en el perihelio (A) respecto del afelio (B) (figura 2.3.)

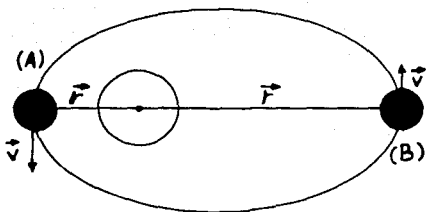


FIG. 2.3: Posición de la Tierra respecto al Sol en el perihelio (A) y en el afelio (B).

CAPITULO III.

DISEÑO Y CONSTRUCCION DE LA PARTE EXPERIMENTAL.

Con objeto de ilustrar lo hasta aquí expuesto, se diseñó y construyó un aparato, cuyos resultados se discutirán en el capítulo siguiente. Las siguientes medidas están dadas en CGS para uniformizar criterios, excepto en las constantes de los resortes.

La idea básica, surge de un problema², que dice:

"El collar B tiene una masa de 2 kg y se puede deslizar libremente sobre la barra OA, la cual a su vez puede girar libremente en un plano horizontal (fig. 3.1). El conjunto gira con una velocidad angular $\omega = 1.5$ rad/s cuando se libera un resorte localizado entre A y B, que lanza al collar sobre la varilla con una velocidad inicial relativa $v_r = 1.5$ m/s. Si el momento de inercia alrededor de O de la barra y el resorte es 0.3 kg·m², encuentrese:

La distancia mínima entre el collar y el punto O en el movimiento subsecuente.

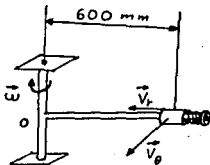


FIG. 3.1.

² "Mecánica Vectorial para Ingenieros", F.P. Beer & E.R. Johnston, p. 805.

El aparato debía haber cubierto las condiciones descritas en el problema, pero se presentaron varios problemas en su diseño y construcción. A continuación se hace un listado de los problemas que se presentaron, y sus soluciones en orden cronológico.

a) El diseño de la base: La base debía ser lo suficientemente masiva para evitar vibraciones al momento de su funcionamiento, por lo que se escogió un diseño como el mostrado en la figura 3.2, con el objeto de que nada estorbara la barra horizontal que gira. Se construyó con láminas de acero de 4 mm. de espesor. Las dimensiones se muestran en la misma figura.

b) Sistema de giro: El problema especifica que la varilla vertical debe girar con velocidad constante, por lo que se asume que no debe tener fricción con el resto del aparato, así que se optó por poner una barra de latón de 2 cm de diámetro y 50 cm de longitud como eje de giro del sistema, sujeta por dos baleros cónicos lubricados de 4.5 cm de diámetro externo, colocados en la base mayor y menor de la pirámide truncada que constituye la base. Conforme se experimentó, se observó que el balero colocado en la base mayor de la pirámide rozaba con la lámina que forma el piso, así que se elevó, poniendo la cazuela del balero sobre la original (figura 3.3.).

c) Barras horizontales: Se escogieron dos varillas de aluminio, una de 1.3 cm de diámetro y 50 cm de longitud (incluyendo 2 cm de rosca) y otra de 0.9 cm de diámetro y 30 cm de longitud (incluyendo 2 cm de rosca), ambas con una horadación cilíndrica a 0.5 cm de un extremo. Al principio sólo se tenía la segunda, pero se optó por rosacar las entradas de ambas y poder intercambiarlas, con objeto de observar el experimento variando la longitud y diámetro de las barras, (figura 3.4.).

d) Collar: Para el anillo que se lanza, se escogieron varillas cilíndricas de cold-rolled perforadas para pasar a través de las barras de aluminio, perfectamente lubricadas para evitar la fricción entre los collares y las varillas de aluminio. Preparándose dos para

cada barra, una de 2.5 cm de diámetro, 6.2 cm de largo y 204.9 g de masa y otra de 2.5 cm de diámetro, 13.2 cm de largo y 452.2 g de masa. En la parte superior de cada una, tienen horadaciones cilíndricas de 1 y 1.5 cm de diámetro, dependiendo de la varilla a la que estén destinados (figura 3.5.).

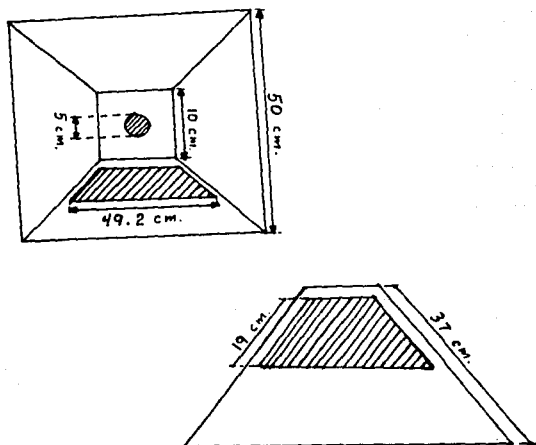


FIG. 3.2: Diseño de la base

Nota: Las zonas vacías se indican ashurando.

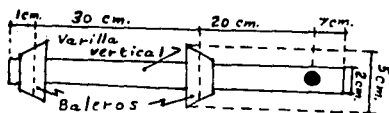


FIG. 3.3: Diseño del sistema de giro.

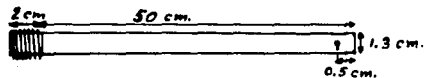
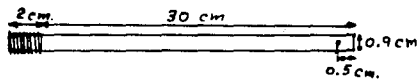


FIG. 3.4: Barras horizontales.

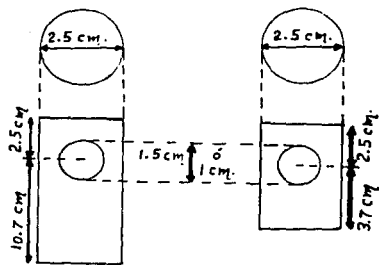


FIG. 3.5: Collares.

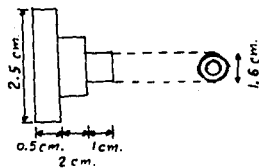
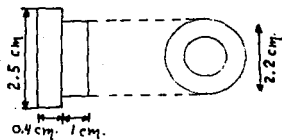


FIG. 3.6: Tubos de ajuste de los resortes.

e) Resortes: Se escogieron dos resortes que lanzaran los collares para cada barra horizontal, uno de 7.2 cm de largo y 2.3 cm de diámetro interno, y otro de 11.5 cm de largo y 2.5 cm de diámetro interno, con constantes de 500.2 N/m y 200.12 N/m respectivamente. Sin embargo al experimentar, se observó que al lanzar el collar, provocaban distorsión en el movimiento al no ser su diámetro interno igual al diámetro externo de las varillas. Así que se optó por poner tubos de plástico dentro de los resortes para ajustarlos lo mas posible a las varillas, pero desgraciadamente se provocó con esto que en la varilla de mayor diámetro sólo entrara un resorte, porque en uno, el diámetro interno del tubo es menor al diámetro externo de la barra (las dimensiones y forma de los tubos de ajuste se muestran en la figura 3.6.).

e) Sistema disparador: Es esta la parte cuyo diseño tardó más tiempo. Los problemas consistían en dar un impulso inicial a la barra vertical, de tal forma que al moverse el sistema con velocidad angular constante, se soltara el resorte y el collar se pusiera en movimiento, todo esto con el mismo sistema, evitando así la intervención de fuerzas externas, para que el momentum angular se mantuviera constante. Estos problemas se solucionaron de la siguiente forma:

I) Giro de la barra: Se enrolló alrededor de la varilla vertical una cuerda, de tal forma que al desenrollarse, pusiera a girar la barra central. Para evitar que resbalara, se pegó en la superficie lija de agua, primero en forma de cilindro y después en forma de espiral, siendo ésta última su forma definitiva.

II) Disparo del collar: Al final del resorte, se encuentra un tope, formado por una rondana de 3.5 cm de diámetro externo y 1.3 cm de diámetro interno, atorado con una horquilla introducida en el horificio superior de cada varilla horizontal, a la cual está amarrado un gancho que mantiene al resorte comprimido, de tal suerte que al jalar el gancho, el resorte se suelta. Una vez enrollada en la barra vertical, la cuerda mencionada en el inciso anterior se sujeta al gancho, con lo que al poner en movimiento al sistema, y moverse con

velocidad angular constante, se suelta el resorte y el collarin (figuras 3.7 y 3.8).

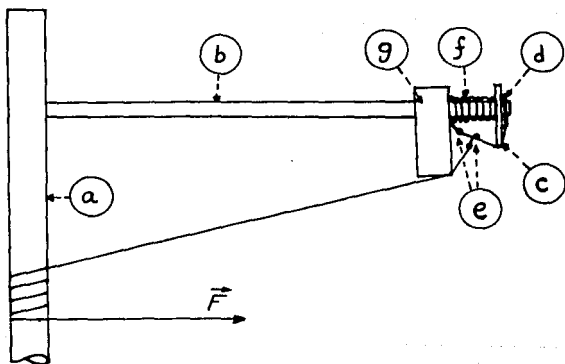


FIG. 3.7: Partes constitutivas del sistema de disparo: a) varilla vertical, b) barra horizontal, c) rondana, d) horquilla, e) gancho, f) resorte, g) collarin.

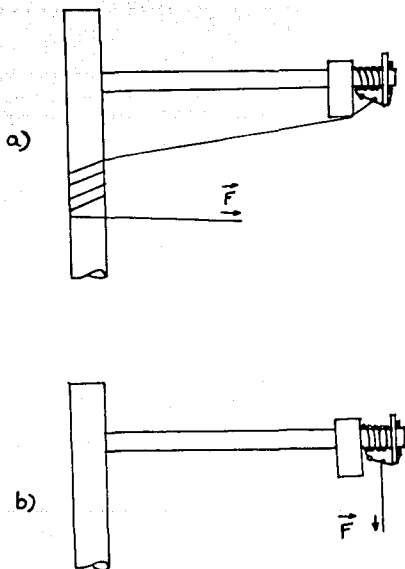


FIG. 3.8: Secuencia de pasos para el disparo del collarín: a) La cuerda enrollada se jala y pone la barra vertical en movimiento, b) Una vez desenrollada, la cuerda jala el gancho, soltando el collar.

III) Para asegurar que la fuerza con que el sistema se pone en movimiento sea uniforme, por medio de una polea se conectan cuerpos de peso conocido que jalen la cuerda siempre con la misma fuerza. Los cuerpos son cilíndricos, de cold-rolled, de 5 cm de diámetro, con las siguientes medidas de largo:

- a) 12.1 cm,
- b) 24.2 cm,
- c) 36 cm,

Cada cilindro tiene en su parte media una horadación perpendicular a su eje longitudinal de 1 cm de diámetro. Considerando esto, los cilindros tienen unas masas de:

- a) 1681.6 g,
- b) 3391.4 g,
- c) 5058.8 g,

respectivamente.

f) Soporte: Con el fin de mantener constantes las distancias entre la polea y la varilla vertical, y que la base del sistema tuviera tres patas para así ser estable, se diseñó y construyó una base con un perfil hueco de sección cuadrada de Fe de 4 cm de lado, sobre la que se asentó todo lo hasta aquí expuesto. Su forma y medidas se muestran en la figura 3.9.

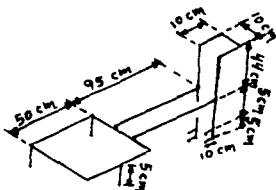
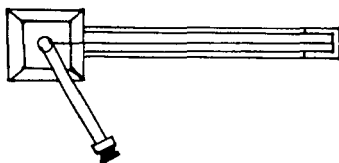


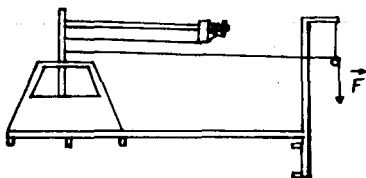
FIG. 3.9: Soporte del sistema.

g) Sistema de seguimiento: Para observar la trayectoria del collar durante el movimiento del sistema, se filmaron los experimentos con una cámara reflex auxiliada de un estroboscopio, cuyos resultados se discuten en el siguiente capítulo.

h) En resumen, la forma en que todo el sistema se montó para los experimentos se muestra en la figura 3.10a en vista de planta y en la figura 3.10b en vista de elevación.



a)



b)

FIG. 3.10: Todo el sistema, en vista de: a) planta, b) elevación.

Para poder utilizar el presente proyecto como práctica del laboratorio de Cinemática y Dinámica, se hacen las siguientes sugerencias:

1.-) Que la base se hiciera de cemento, aproximadamente con una masa de 10 kg, dejando un orificio cilíndrico para poner la barra vertical en los baleros.

2.-) Construir un soporte en la parte superior, de forma que pudiera fotografiarse de planta.

3.-) El soporte donde se aloja la polca, se puede construir al mismo tiempo que se construye la base, para que se forme una sola pieza.

4.-) Se pueden reducir las medidas hasta un tamaño adecuado, con algunos problemas para observar el movimiento.

5.-) Hacer los collares blanco brillante y el resto de la estructura negra, para producir contrastes, y poder fotografiar adecuadamente.

6.-) Calibrar para cada aparato, las oscilaciones por minuto del estroboscopio para observar bien el movimiento.

7.-) Usar resortes mas pequeños y de mayor constante, para observar mejor el movimiento (de preferencia a simple vista).

a)



b)

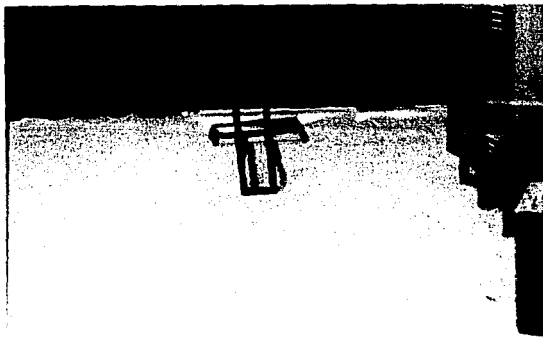
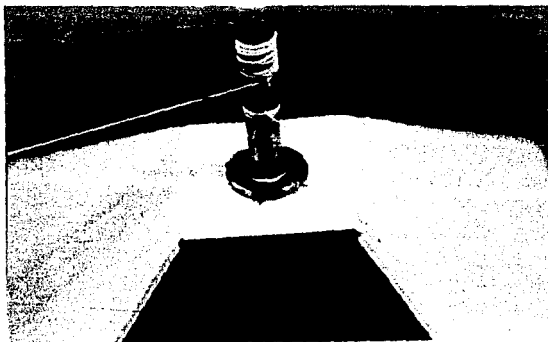


FIG. 3.11: Fotografía que muestra el soporte tubular visto: a) de lado y b) de frente.

a)



b)

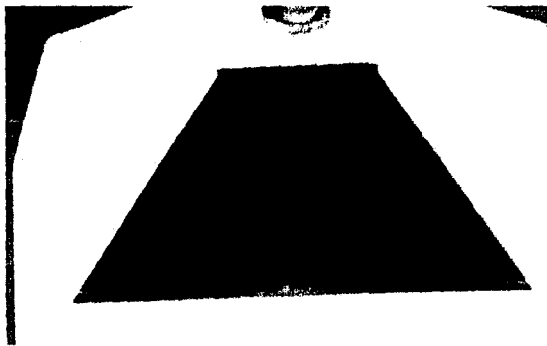
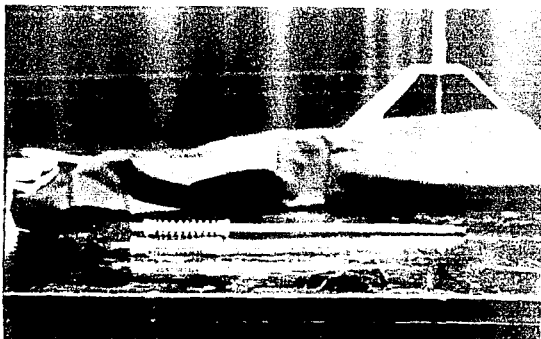


FIG. 3.12: Fotografía que muestra el balero: a) Superior, b) Inferior.

a)



b)

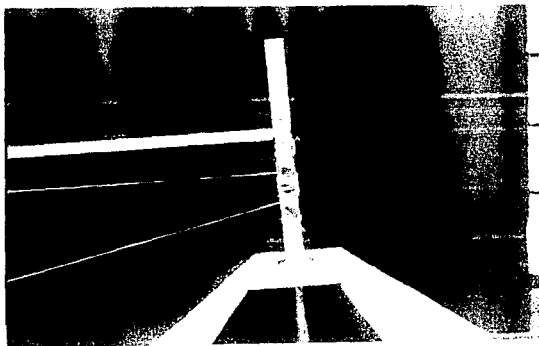


FIG. 3.13: Fotografía que muestra: a) Las varillas horizontales con resortes y tubos de soporte, y b) Cuerda matriz enrollada en la barra vertical.

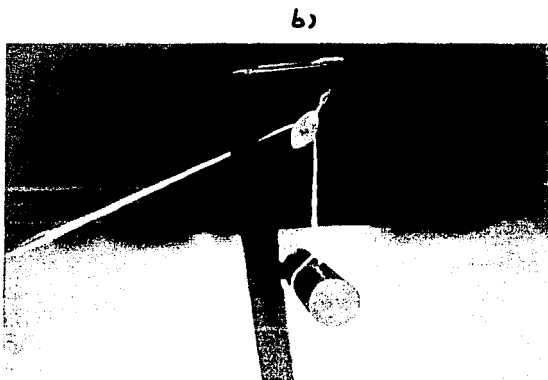
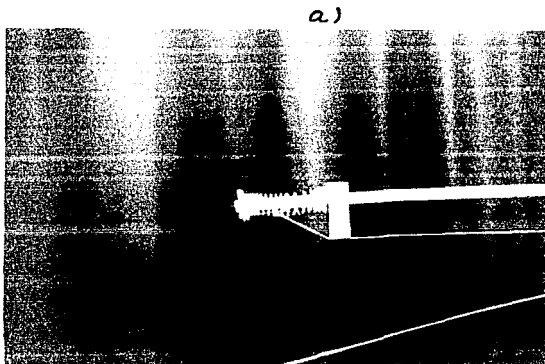
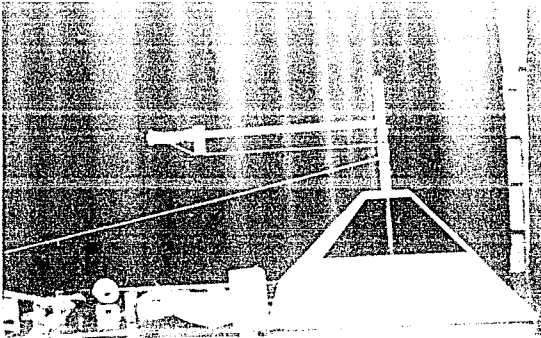


FIG. 3.14: Fotografía que muestra: a) Detalle del sistema de disparo, y b) El cuerpo cilíndrico de masa conocida, que al caer, inicia el movimiento del sistema.

a)



b)

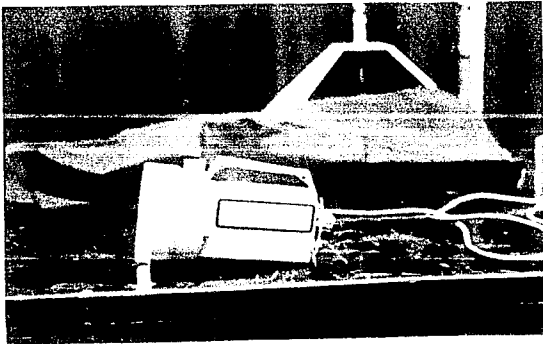


FIG. 3.15: Fotografía que muestra: a) El aparato montado, y b) El estroboscopio con el que se fotografio.

CAPITULO IV.

PRESENTACION Y ANALISIS DE RESULTADOS.

El problema que dio origen al proyecto se repite para mostrar la resolución y los resultados del experimento:

El collar B tiene una masa de 2 kg y se puede deslizar libremente sobre la barra OA, la cual a su vez puede girar libremente en un plano horizontal (fig. 4.1). El conjunto gira con una velocidad angular $\omega = 1.5$ rad/s cuando se libera un resorte localizado entre A y B, que lanza al collar sobre la varilla con una velocidad inicial relativa $v_r = 1.5$ m/s. Si el momento de inercia alrededor de O de la barra y el resorte es $0.3 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, encuentrese:

la distancia mínima entre el collar y el punto O en el movimiento subsecuente.

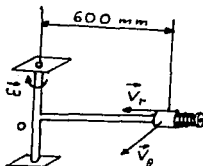


FIG. 4.1:

En el diagrama de cuerpo libre (fig 4.2.) se puede apreciar que los únicos vectores presentes paralelos al plano del movimiento, son las componentes radial y trasversa de la velocidad, por lo que la máxima aproximación se logra cuando la resultante de la velocidad radial y de la velocidad tangencial pase lo más cerca a la barra vertical.

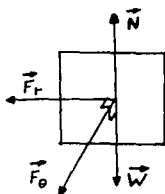


FIG 4.2: Diagrama de cuerpo libre del anillo.

Por lo tanto: v_{θ} (componente trasversa de la velocidad) = $(1.5 \text{ rad/s})(1 \text{ revolución}/2\pi \text{ rad})(1.2 \pi \text{ m/revolución}) = 0.9 \text{ m/s}$.
 v_r (componente radial de la velocidad) = 1.5 m/s , por lo tanto, la trayectoria que siga el anillo tendrá un ángulo de:

$$\text{arc tg } \frac{1.5 \text{ m/s}}{0.9 \text{ m/s}} = 59.04^\circ$$

respecto a la componente trasversa de la velocidad.

Por lo tanto, la máxima aproximación del anillo se presentará cuando la resultante de la suma vectorial de v_{θ} y v_r sea perpendicular a la varilla horizontal (fig 4.3), es decir:

$$\text{máxima aproximación} = 510 \text{ mm.}$$

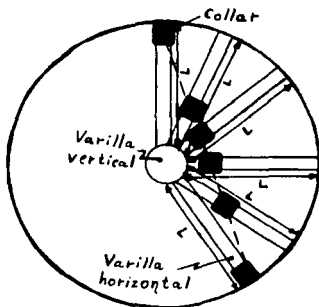


FIG. 4.3: Vista de planta de la trayectoria del anillo.

En el experimento, se modificó la distancia entre la posición inicial del anillo y la varilla vertical de latón a 30 y 50 cm dependiendo de la varilla empleada. A continuación se ilustra el cálculo de las componentes radial y trasversal de la velocidad con los datos disponibles en el experimento:

a) Cálculo de v_r :

v_r se debe al empuje ejercido por el resorte sobre el collar.

El cálculo se basa en la conservación de la energía para fuerzas conservativas. Es válido, ya que el trabajo efectuado por la fuerza ejercida por un resorte es independiente de la trayectoria, así se tiene:

$$E_c \text{ (Energía cinética)} - E_c = E_p \text{ (Energía potencial)} - E_p \quad (4.1)$$

$E_c = 0$, ya que parte del reposo.

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2, v = v_r$$

$E_p = 0$, ya que el resorte esta completamente extendido.

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2, x = \text{la parte comprimida del resorte, y } k \text{ la constante del resorte.}$$

Por lo tanto la ecuación 4.1 queda:

$$\frac{1}{2} m v^2 - 0 = \frac{1}{2} k x^2 - 0 \quad \text{----- (4.2)}$$

Despejando v de la ecuación anterior, se tiene:

$$v_r = v = \sqrt{\frac{kx^2}{m}}$$

Substituyendo valores, para $x = 0.025$ m, se tiene:

I.-) Resorte de constante = 500.2 N/m.

Collar de masa 0.2049 kg $\Rightarrow v_r = 1.235$ m/s.

Collar de masa 0.4522 kg $\Rightarrow v_r = 0.831$ m/s.

II.-) Resorte de constante = 200.1 N/m.

Collar de masa 0.2049 kg $\Rightarrow v_r = 0.781$ m/s.

Collar de masa 0.4522 kg $\Rightarrow v_r = 0.526$ m/s.

b) Cálculo de v_{θ} :

Como se comentó en el capítulo precedente, el sistema de disparo del aparato, se basa en un cuerpo de masa conocida que al caer jalaba una cuerda que hace girar la varilla vertical central. La componente transversa de la velocidad es el producto de la liberación de la varilla al completarse la caída del cuerpo.

En el cálculo, se considera el principio de conservación de la energía para fuerzas conservativas justo antes de que se dispare el collar, y tenemos:

$$\Delta E_c = - \Delta E_p$$

$$\frac{1}{2} m_c v_{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = m_t g h \quad \text{---- (4.3)}$$

donde m_c es la masa del collar, I es el momento de inercia del sistema, ω es la velocidad angular, h es la altura de caída del cuerpo de masa conocida y m_t es la masa del cuerpo que dispara el sistema. La velocidad indicada en la ecuación 4.3 es la velocidad total del collar, sin embargo se pone v_{θ} , porque justo antes de que el resorte se libere, la velocidad total tiene sólo componente trasversa.

Por otro lado, sabemos que:

$$\omega r = v_{\theta}, \quad \text{----- (4.4)}$$

Si se substituye la ecuación 4.4 en la ecuación 4.3, y al desarrollarla, se obtiene:

$$\frac{1}{2} m_c v_{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{m_B}{12} L^2 + m_B \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] \left(\frac{v_{\theta}}{L} \right)^2 = m_t g h \quad (4.5)$$

donde m_B es la masa de la varilla horizontal, y L la longitud de la misma varilla, se simplifica, se despeja v_{θ} y se obtiene:

$$v_{\theta} = \sqrt{\frac{2 m_t g h}{m_c + \frac{m_t}{3}}} \quad \text{--- (4.6)}$$

Por lo tanto, se obtienen los siguientes resultados teóricos, si se considera que la altura h es constante para todas las corridas e igual a 1.30 m:

I.-) Varilla de 0.3 m de longitud (masa de 0.0517 kg):

a) Collar de 0.2049 kg:

Cuerpo de 1.6816 kg $\rightarrow v_{\theta} = 13.89$ m/s.

Cuerpo de 3.3914 kg $\rightarrow v_{\theta} = 19.73$ m/s.

Cuerpo de 5.0588 kg $\rightarrow v_{\theta} = 24.10$ m/s.

b) Collar de 0.4522 kg:

Cuerpo de 1.6816 kg $\rightarrow v_{\theta} = 9.55$ m/s.

Cuerpo de 3.3914 kg $\rightarrow v_{\theta} = 13.57$ m/s.

Cuerpo de 5.0588 kg $\rightarrow v_{\theta} = 16.58$ m/s.

II.-) Varilla de 0.5 m de longitud (masa de 0.1798 kg):

a) Collar de 0.2049 kg:

Cuerpo de 1.6816 kg $\rightarrow v_{\theta} = 12.73$ m/s.

Cuerpo de 3.3914 kg $\rightarrow v_{\theta} = 18.07$ m/s.

Cuerpo de 5.0588 kg $\rightarrow v_{\theta} = 22.07$ m/s.

b) Collar de 0.4522 kg:

Cuerpo de 1.6816 kg $\rightarrow v_{\theta} = 9.15$ m/s.

Cuerpo de 3.3914 kg $\rightarrow v_{\theta} = 13.00$ m/s.

Cuerpo de 5.0588 kg $\rightarrow v_{\theta} = 15.87$ m/s.

c) Cálculo de la aceleración del cuerpo de masa conocida que cae:

Es interesante calcular la aceleración con la que cae el cuerpo de masa conocida que da inicio al movimiento del sistema:

Si se hace el diagrama de cuerpo libre del cuerpo (fig. 4.4), el balance de fuerzas verticales usando la segunda ley de Newton puede ser expresada como:

$$T - m_t g = - m_t a \Rightarrow T = m_t (g - a) \quad \text{--- (4.7)}$$

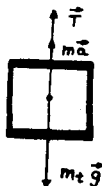


FIG. 4.4: Diagrama de cuerpo libre del cuerpo de masa conocida que pone en movimiento al sistema.

Por otro lado, se sabe al hacer la suma de torcas que:

$$T r = I \omega \Rightarrow T r = I \left(\frac{a}{r} \right) \Rightarrow T = \frac{I a}{r} \quad \text{--- (4.8)}$$

Al substituir la ecuación 4.8 en la 4.7, se obtiene:

$$\frac{I a}{r} = m t (g - a) \quad \text{--- (4.9)}$$

Al despejar a de la ecuación 4.9 obtenemos:

$$a = \frac{m t g}{m t + I/r} \quad \text{--- (4.10)}$$

Al desarrollar el momento de inercia la ecuación 4.10 se convierte en:

$$a = \frac{m t g}{m t + (m_c r^2 + (m_B/12) L^2 + m_B (L/2)^2)/r} \quad \text{(4.11)}$$

A continuación se considera que $r = L$, porque el momento de inercia centroidal del collar es muy pequeño respecto al agregado por el Teorema de Steiner (El momento de inercia centroidal del collar = $m_c a$ donde a es el radio del cilindro, mientras que el momento de inercia que aporta el Teorema de Steiner es $m_c L$, donde L es la longitud de la varilla horizontal). Por lo que la ecuación 4.11 queda:

$$a = \frac{m t g}{m t + m_c + (m_B)/3} \quad \text{--- (4.12)}$$

Por lo tanto, substituyendo valores se tiene:

a) Para la varilla de 0.3 m (0.0517 kg)

I.-) Collar de 0.2049 kg:

- Cuerpo de 1.6816 kg $\Rightarrow a = 8.66$ m/s

- Cuerpo de 3.3914 kg $\Rightarrow a = 9.21$ m/s

- Cuerpo de 5.0588 kg \rightarrow a = 9.40 m/s

II.-) Collar de 0.4522 kg:

- Cuerpo de 1.6816 kg \rightarrow a = 7.66 m/s

- Cuerpo de 3.3914 kg \rightarrow a = 8.62 m/s

- Cuerpo de 5.0588 kg \rightarrow a = 8.98 m/s

Resultados cercanos pero no iguales a la aceleración de la gravedad.

d) Resultados experimentales:

Se presentan en la tabla, los datos experimentales de la magnitud de la velocidad, así como la desviación estándar para cada dato (Cabe la aclaración que los ángulos no variaron, por lo que se presentan directamente en el inciso e, referente a la suma vectorial de v_r y v_θ inicial):

I.-) Resorte de constante = 500.2 N/m:

a) Varilla de 0.3 m:

α) Collar de 0.2049 kg:

Cuerpo de 1.6816 kg \rightarrow 1.-) 9.8 m/s
2.-) 10.1 m/s
3.-) 10.4 m/s
s = 0.3

Cuerpo de 3.3914 kg \rightarrow 1.-) 16.5 m/s
2.-) 16.8 m/s
3.-) 16.8 m/s
s = 0.17

Cuerpo de 5.0588 kg \Rightarrow 1.-) 19.5 m/s
2.-) 19.1 m/s
3.-) 19.6 m/s
s = 0.26

β) Collar de 0.4522 kg:

Cuerpo de 1.6816 kg \Rightarrow 1.-) 6.5 m/s
2.-) 7.3 m/s
3.-) 7.2 m/s
s = 0.43

Cuerpo de 3.3914 kg \Rightarrow 1.-) 9.9 m/s
2.-) 10.4 m/s
3.-) 10.6 m/s
s = 0.36

Cuerpo de 5.0588 kg \Rightarrow 1.-) 14.4 m/s
2.-) 14.9 m/s
3.-) 15.1 m/s
s = 0.36

b) Várlilla de 0.5 m:

α) Collar de 0.2049 kg:

Cuerpo de 1.6816 kg \Rightarrow 1.-) 10.8 m/s
2.-) 11.3 m/s
3.-) 11.5 m/s
s = 0.36

Cuerpo de 3.3914 kg \Rightarrow 1.-) 16.1 m/s
2.-) 16.3 m/s
3.-) 16.8 m/s
s = 0.36

Cuerpo de 5.0588 kg → 1.-) 18.0 m/s
2.-) 18.5 m/s
3.-) 18.1 m/s
s = 0.26

β) Collar de 0.4522 kg:

Cuerpo de 1.6816 kg → 1.-) 8.5 m/s
2.-) 8.9 m/s
3.-) 8.7 m/s
s = 0.2

Cuerpo de 3.3914 kg → 1.-) 10.2 m/s
2.-) 10.6 m/s
3.-) 10.4 m/s
s = 0.0.2

Cuerpo de 5.0588 kg → 1.-) 13.5 m/s
2.-) 13.8 m/s
3.-) 13.8 m/s
s = 0.17

II.-) Resorte de constante = 200.1 N/m:

a) Varilla de 0.3 m:

α) Collar de 0.2049 kg:

Cuerpo de 1.6816 kg → 1.-) 10.1 m/s
2.-) 10.5 m/s
3.-) 10.3 m/s
s = 0.2

Cuerpo de 3.3914 kg → 1.-) 15.4 m/s
2.-) 18.5 m/s
3.-) 15.6 m/s
s = 0.2

Cuerpo de 5.0588 kg → 1.-) 16.2 m/s
2.-) 16.8 m/s
3.-) 16.2 m/s
s = 0.35

β) Collar de 0.4522 kg:

Cuerpo de 1.6816 kg → 1.-) 7.0 m/s
2.-) 7.6 m/s
3.-) 7.0 m/s
s = 0.35

Cuerpo de 3.3914 kg → 1.-) 10.4 m/s
2.-) 10.7 m/s
3.-) 10.7 m/s
s = 0.17

Cuerpo de 5.0588 kg → 1.-) 13.5 m/s
2.-) 13.9 m/s
3.-) 14.0 m/s
s = 0.26

e) Suma vectorial de v_r y v_θ inicial:

Durante el movimiento, v_r se reduce y v_θ aumenta, de tal forma que la suma vectorial de ambas es constante, porque no hay fuerzas externas que produzcan torcas (es decir, el momentum lineal y el momentum angular son constantes).

A continuación, se presenta la suma vectorial de v_r y v_θ , así como el promedio del ángulo y magnitud de la velocidad experimental, con el error porcentual (Si el error porcentual es negativo indica que el valor experimental es menor que el teórico, ya que el cálculo del error porcentual es la diferencia del valor experimental menos el teórico dividido entre el valor teórico). Cabe la aclaración de que el ángulo está dado respecto a la componente trasversal de la velocidad.

1.-) Resorte de constante = 500.2 N/m:

a) Varilla de 0.3 m (0.0517 kg):

α) Collar de 0.2049 kg:

Cuerpo de 1.6816 kg \Rightarrow $v_r = 1.235$ m/s
 $v_\theta = 13.89$ m/s

magnitud: 13.94 m/s, ángulo: 5.08°
magnitud ex: 10.1 m/s, ángulo ex: 3°
error en magnitud: - 27.57 %
error en ángulo: - 40.96 %

Cuerpo de 3.3914 kg \Rightarrow $v_r = 1.235$ m/s
 $v_\theta = 19.73$ m/s

magnitud: 19.77 m/s, ángulo: 3.58°
magnitud ex: 16.7 m/s, ángulo ex: 1°
error en magnitud: - 15.52 %
error en ángulo: - 72.08 %

Cuerpo de 5.0588 kg \Rightarrow $v_r = 1.235$ m/s
 $v_\theta = 24.10$ m/s

magnitud: 24.13 m/s, ángulo: 2.93°
magnitud ex: 19.4 m/s, ángulo ex: 2°
error en magnitud: - 19.61 %
error en ángulo: - 31.82 %

β) Collar de 0.4522 kg:

Cuerpo de 1.6816 kg \Rightarrow $v_r = 0.831$ m/s
 $v_\theta = 9.55$ m/s

magnitud: 9.59 m/s, ángulo: 4.97°
magnitud ex: 7.0 m/s, ángulo ex: 3°
error en magnitud: - 26.98 %
error en ángulo: - 39.67 %

Cuerpo de 3.3914 kg \Rightarrow $v_r = 0.831$ m/s
 $v_\theta = 13.57$ m/s

magnitud: 13.59 m/s, ángulo: 3.5°
magnitud ex: 10.3 m/s, ángulo ex: 2°
error en magnitud: - 24.24 %
error en ángulo: - 42.93 %

Cuerpo de 5.0588 kg \Rightarrow $v_r = 0.831$ m/s
 $v_\theta = 16.58$ m/s

magnitud: 16.60 m/s, ángulo: 2.87°
magnitud ex: 14.8 m/s, ángulo ex: 1°
error en magnitud: - 10.84 %
error en ángulo: - 65.15 %

b) Varilla de 0.5 m (0.1798 kg):

α) Collar de 0.2049 kg:

Cuerpo de 1.6816 kg \Rightarrow $v_r = 1.235$ m/s
 $v_\theta = 12.73$ m/s

magnitud: 12.79 m/s, ángulo: 5.54°
magnitud ex: 11.2 m/s, ángulo ex: 4°
error en magnitud: - 12.43 %
error en ángulo: - 27.81 %

Cuerpo de 3.3914 kg \Rightarrow $v_r = 1.235$ m/s
 $v_\theta = 18.07$ m/s

magnitud: 18.11 m/s, ángulo: 3.91°
magnitud ex: 16.4 m/s, ángulo ex: 2°
error en magnitud: - 9.45 %
error en ángulo: - 48.85 %

Cuerpo de 5.0588 kg → $v_r = 1.235$ m/s
 $v_\theta = 22.07$ m/s

magnitud: 22.10 m/s, ángulo: 3.20°
magnitud ex: 18.2 m/s, ángulo ex: 2°
error en magnitud: - 17.66 %
error en ángulo: - 37.55 %

β) Collar de 0.4522 kg:

Cuerpo de 1.6816 kg → $v_r = 0.831$ m/s
 $v_\theta = 9.15$ m/s

magnitud: 9.19 m/s, ángulo: 5.18°
magnitud ex: 8.7 m/s, ángulo ex: 4°
error en magnitud: - 5.31 %
error en ángulo: - 22.92 %

Cuerpo de 3.3914 kg → $v_r = 0.831$ m/s
 $v_\theta = 13.00$ m/s

magnitud: 13.03 m/s, ángulo: 3.65°
magnitud ex: 10.4 m/s, ángulo ex: 2°
error en magnitud: - 20.16 %
error en ángulo: - 45.32 %

Cuerpo de 5.0588 kg → $v_r = 0.831$ m/s
 $v_\theta = 15.87$ m/s

magnitud: 15.89 m/s, ángulo: 3.00°
magnitud ex: 13.7 m/s, ángulo ex: 2°
error en magnitud: - 13.79 %
error en ángulo: - 33.28 %

II.-) Resorte de constante = 200.1 N/m:

a) Varilla de 0.3 m de longitud (0.0517 kg):

α) Collar de 0.2049 kg:

Cuerpo de 1.3816 kg: → $v_r = 0.781$ m/s
 $v_G = 12.73$ m/s

magnitud: 12.75 m/s, ángulo: 3.51°
magnitud ex: 10.3 m/s, ángulo ex: 3°
error en magnitud: - 19.24 %
error en ángulo: - 14.55 %

Cuerpo de 3.3914 kg: → $v_r = 0.781$ m/s
 $v_G = 18.07$ m/s

magnitud: 18.09 m/s, ángulo: 2.47°
magnitud ex: 15.6 m/s, ángulo ex: 2°
error en magnitud: - 13.75 %
error en ángulo: - 19.19 %

Cuerpo de 5.0588 kg: → $v_r = 0.781$ m/s
 $v_G = 22.07$ m/s

magnitud: 22.08 m/s, ángulo: 2.03°
magnitud ex: 16.4 m/s, ángulo ex: 2°
error en magnitud: - 25.74 %
error en ángulo: - 1.31 %

β) Collar de 0.4522 kg:

Cuerpo de 1.6816 kg: $\rightarrow v_r = 0.526 \text{ m/s}$
 $v_\theta = 9.15 \text{ m/s}$

magnitud: 9.16 m/s, ángulo: 3.29°
magnitud ex: 7.2 m/s, ángulo ex: 3°
error en magnitud: - 21.44 %
error en ángulo: - 8.82 %

Cuerpo de 3.3914 kg: $\rightarrow v_r = 0.526 \text{ m/s}$
 $v_\theta = 13.00 \text{ m/s}$

magnitud: 13.01 m/s, ángulo: 2.32°
magnitud ex: 10.6 m/s, ángulo ex: 2°
error en magnitud: - 18.53 %
error en ángulo: - 13.68 %

Cuerpo de 5.0588 kg: $\rightarrow v_r = 0.526 \text{ m/s}$
 $v_\theta = 15.87 \text{ m/s}$

magnitud: 15.88 m/s, ángulo: 1.90°
magnitud ex: 13.8 m/s, ángulo ex: 1°
error en magnitud: - 13.09 %
error en ángulo: - 47.32 %

El tubo de ajuste del resorte no permitió que éste entrara en la varilla de 0.5 m de longitud.

Es necesario explicar que la velocidad experimental se midió por medio de las fotografías tomadas con ayuda de un estroboscopio: Si las pulsaciones eran de 3 por segundo (180 por minuto), la razón de la distancia recorrida por el collar entre los segundos que tardó en recorrerla (3 entre el número de apariciones en la foto), será la magnitud de la velocidad, mientras que el ángulo se midió dibujando una línea representativa de la trayectoria del collar y otra tangente a la trayectoria y luego midiendo el ángulo con un transportador, con incertidumbre de $\pm 0.5^\circ$. En la figura 4.5 se muestra una fotografía

de este tipo, acompañada del cálculo de la velocidad (magnitud y dirección)

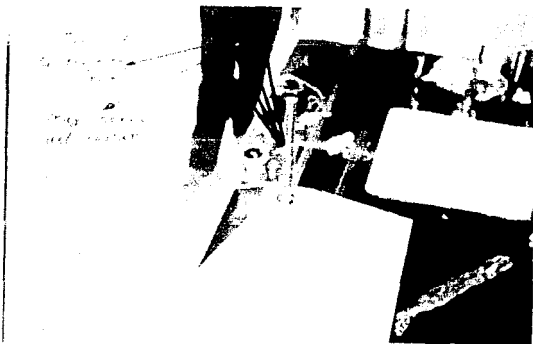


FIG. 4.5: Fotografía que ilustra el movimiento del collar tomada con una cámara reflex ASA 400, y un estroboscopio a 180 pulsaciones por minuto (La varilla es de 0.5 m, el collar de 0.4522 kg y el resorte de 500.2 N/m de constante).

Como se habrá observado, en el problema se especifica que la varilla que sirve de "riel" para que el collar se mueva debe ser horizontal, lo cual significa que la deflexión de la varilla de aluminio debida al peso del collar es cero, lo cual es falso en la realidad.

A continuación se calcula la deflexión máxima de las varillas, considerándolas como vigas empotradas de sección circular, y suponiendo (como sucedió), que la cuerda de la rosca soportará la torca producida por el collar:

Si consideramos un radio de curvatura de la línea elástica de la viga de ρ , es decir, el eje flexionado de la misma, definimos a la curvatura (K) como el inverso del radio de curvatura, es decir:

$$K = \frac{1}{\rho} \quad \text{----- (4.7)}$$

Si se considera además que el ángulo de deformación de un elemento de la viga es $\Delta\theta$ y que las distancias y desde la superficie neutra hasta las fibras deformadas se miden de la manera usual como positivas hacia arriba, la deformación total Δu de una fibra se puede expresar como:

$$\Delta u = -y \Delta\theta \quad \text{----- (4.8)}$$

Si se divide la ecuación 4.8 entre la longitud de arco Δs correspondiente a la longitud inicial de todas las fibras del elemento, obtenemos:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = -y \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \quad \text{ó bien,} \quad \frac{du}{ds} = -y \frac{d\theta}{ds} \quad (4.9)$$

Es posible reconocer que du/ds es la deformación unitaria en la fibra de una viga situada a una distancia y del eje neutro. Por lo tanto:

$$du/ds = c \quad \text{----- (4.10)}$$

Por otro lado, sabemos que $\Delta s = \rho \Delta\theta$, por lo que sacando límites:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = K \quad \text{---- (4.11)}$$

Con base en lo anterior, sustituyendo la ecuación 4.10 y 4.11 en la 4.9, se puede expresar la relación fundamental entre la curvatura

de la elástica y la deformación longitudinal como sigue:

$$\frac{1}{\rho} = K = - \frac{\epsilon}{y} \quad \text{---- (4.12)}$$

Conviene ahora obtener la relación entre la deformación unitaria (ϵ) y el momento torsionante:

ϵ está definida como el alargamiento observado por unidad de longitud, y se observa experimentalmente que varía linealmente (en el límite de proporcionalidad del material) con el esfuerzo normal aplicado (σ), por lo que se relacionan por medio de una constante de proporcionalidad llamada módulo de elasticidad o módulo de Young (E), matemáticamente tenemos la relación conocida como *Ley de Hooke*:

$$\sigma = E \epsilon \quad \rightarrow \quad \epsilon = \sigma/E \quad \text{---- (4.13)}$$

Por otro lado, tenemos un segmento de viga bajo la acción de un momento flexionante positivo M (fig. 4.6)

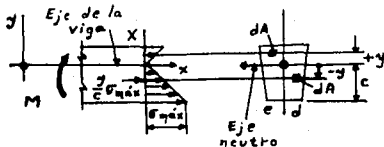


FIG. 4.6: viga en flexión pura.

Puesto que el segmento de la viga mostrado en la figura 4.4a debe estar en equilibrio, el momento aplicado externo M es equilibrado por el momento inducido interno debido a los esfuerzos por flexión que se desarrollan en la sección. Dicho momento interno se determina sumando las fuerzas que actúan sobre áreas infinitesimales dA (fig. 4.6), multiplicadas por sus respectivos brazos de momento a partir del eje neutro. Al formular matemáticamente estos enunciados se obtiene la siguiente igualdad:

$$M = \int_A \left(-\frac{y}{c} \sigma_{\max} \right) dA = 0 \quad \text{-----} \quad (4.14)$$

donde el subíndice A de la integral indica que la suma se debe efectuar sobre el área transversal total de la viga. Sin embargo, en la sección σ_{\max} y c son constantes, así que la integral se puede escribir de nuevo como:

$$M = -\frac{\sigma_{\max}}{c} \int_A y^2 dA = 0 \quad \text{-----} \quad (4.15)$$

La integral en la ecuación 4.15 se conoce como *momento de inercia del área de la sección*¹ y se designa por I . Si se hace caso omiso del signo para el esfuerzo normal ya que su sentido se puede determinar por simple examen, y se despeja σ_{\max} , la ecuación 4.15 puede escribirse simplemente como:

$$\sigma_{\max} = \frac{M c}{I} \quad \text{-----} \quad (4.16)$$

Y la expresión general para los esfuerzos normales en una sección es:

$$\sigma = \frac{M y}{I} \quad \text{-----} \quad (4.17)$$

Substituyendo la ecuación 4.17 en la ecuación 4.13, obtenemos:

¹ Ver capítulo I.

$$c = \frac{M y}{I E} \quad \text{----- (4.18)}$$

Substituyendo la ecuación 4.18 en la ecuación 4.12, obtenemos:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{I E} \quad \text{----- (4.19)}$$

En textos de geometría analítica se demuestra que en coordenadas cartesianas, la curvatura de una línea se define por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d y/dx}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad (4.20)$$

donde x , y son las coordenadas de un punto de ésta. En el problema que se considere, la distancia x localiza un punto de la elástica de un viga flexionada y y es la deflexión, ó sea, la desviación del punto con respecto a su posición inicial.

Si se sustituyera la ecuación 4.20 en la ecuación 4.19, se obtendría la ecuación diferencial exacta de la elástica. Sin embargo la resolución de tal ecuación es muy difícil, pero puesto que son muy pequeñas las deflexiones que se toleran en la gran mayoría de las estructuras de ingeniería, también lo es la pendiente dy/dx de la elástica. Por tanto, el cuadrado de la pendiente y' es una cantidad despreciable comparada con la unidad, y la ecuación 4.20 se simplifica en:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d y}{d x} \quad \text{---- (4.21)}$$

Por lo tanto, para el cálculo de la deflexión, se debe resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{\rho} = y'' = \frac{d y}{d x} = \frac{M}{E I}$$

Esta ecuación se resuelve con ciertas condiciones a la frontera debido al tipo de viga que se trate, es decir, al tipo de cargas y

apoyos que tenga (en este caso, una viga en voladizo o cantiléver con una carga puntual hacia abajo cerca del extremo).

Sin embargo, una forma más sencilla y clara se puede deducir a partir del diagrama de momento flexionante de la viga (fig. 4.7).

Es interesante notar que para fines prácticos se considera la carga móvil (collar) en el punto de máxima deflexión, es decir, en el extremo de la varilla. Así pues, si se observa el diagrama se notará que como el momento flexionante es negativo desde A hasta B, la elástica en toda esta distancia será concava hacia abajo. En el empotramiento A, la elástica debe iniciarse tangente a la dirección inicial AB' de la viga descargada.

Ahora es posible ver por la geometría del croquis de la elástica que la distancia BB' representa la deflexión deseada en el extremo libre. Sin embargo, BB' es también la desviación tangencial del punto B con respecto a la tangente en A. Por lo tanto, se puede utilizar el segundo teorema del área de momento para obtener t_{BA} (desviación tangencial), que en este caso especial es la deflexión en el extremo libre. El área del triángulo del diagrama de momento flexionante es:

$$\phi = \frac{1}{2} \frac{L P}{E I} = \frac{1}{2} \frac{L P}{E \left(\frac{\pi R^4}{4} \right)} = \frac{2 L P}{E \pi R^4}$$

donde L es la longitud de la varilla, P el peso del collar, E el módulo de elasticidad del aluminio, I el momento de inercia de la sección y R el radio de la sección de la varilla.

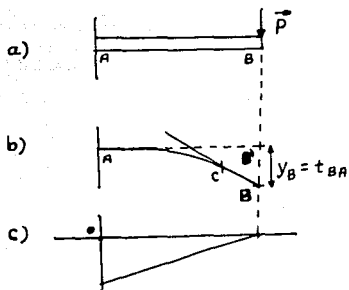


FIG. 4.7: a) Diagrama de la viga con la carga, b) Deflexión de la viga por la carga, c) Diagrama de momento flexionante de una viga catiliver con una carga puntual en un extremo.

Por lo tanto la máxima deflexión (en este caso también la máxima desviación tangencial) en forma algebraica es:

$$y = t_{AB} = \phi_x = \frac{2}{E} \frac{L}{\pi R} \frac{P}{L} = \frac{2}{E} \frac{L^2 P}{\pi R}$$

Substituyendo valores en la ecuación 4.22, considerando que el módulo de elasticidad del aluminio es de $75 \text{ GPa}^2 = 75 \times 10^6 \text{ N/m}^2$.

2

"MECÁNICA DE MATERIALES", E. P. Popov, p. 643.

Varilla horizontal de 0.3 m de longitud (0.0045 m de radio):

collar de 0.2049 kg → peso de 2.01 N :

$$y = t_{AB} = 0.0011 \text{ m} = 1.1 \text{ mm}$$

collar de 0.4522 kg → peso de 4.44 N :

$$y = t_{AB} = 0.0025 \text{ m} = 2.5 \text{ mm}$$

Varilla horizontal de 0.5 m de longitud (0.0065 m de radio):

collar de 2.01 N de peso :

$$y = t_{AB} = 0.0012 \text{ m} = 1.2 \text{ mm}$$

collar de 4.44 N de peso :

$$y = t_{AB} = 0.0026 \text{ m} = 2.6 \text{ mm}$$

Como se puede observar, aunque la deflexión se presenta por el peso del collar en la varilla, y es muy pequeña respecto a la longitud total, así que se puede considerar que las varillas son realmente horizontales.

CAPITULO V.

APLICACIONES DE LA LEY DE CONSERVACION DEL MOMENTUM ANGULAR EN LA FISICA.

Con lo hasta aquí expuesto, el lector debe tener ya una idea bastante clara de lo que es la ley de la conservación del momentum angular. Se procede ahora a estudiar aplicaciones, tanto de la ley antes citada, como de la ley de la conservación del momentum lineal.

Las dos primeras son leyes que pueden comprobarse (no deducirse, dado que son experimentales) a partir de la ley de conservación del momentum lineal. Tienen como objeto informar acerca de la importancia (que como se comentaba en el prólogo, es mayor de la que se le otorga) que ha tenido la conservación del momentum lineal y del momentum angular en la historia de la Física.

Empecemos pues con la confirmación de la segunda y tercera leyes de Newton a partir de la ley de conservación del momentum lineal:

Tomemos el concepto de momentum lineal (\vec{P}) del primer capítulo, y consideremos la interacción de dos partículas A y B (figura 5.1):



FIG. 5.1: Interacción de A y B.

Se define la fuerza (\vec{F}) como:

$$\vec{F} = \Delta\vec{P}/\Delta t \text{ ---- (5.1),}$$

haciendo que en la ecuación 5.1 Δt tienda a cero y sacando límites, se puede escribir:

$$\vec{F} = d\vec{P}/dt \text{ ----- (5.2).}$$

Recordando que:

$$\vec{P} = m \vec{v},$$

la ecuación 5.2 puede escribirse en la forma:

$$\vec{F} = d(m \vec{v})/dt,$$

ecuación que a su vez puede ser escrita como:

$$\vec{F} = m (d\vec{v}/dt) + \vec{v} (dm/dt),$$

en donde se presentan dos casos de especial interés:

a) Interacciones de velocidad variable y masa constante (Por ejemplo dos bolas de billar al chocar).

b) Interacciones de masa variable y velocidad constante (Por ejemplo las escaleras eléctricas, mangueras funcionando con agua, transportadores de bandas).

Si la masa es constante,

$$\vec{F} = m (d\vec{v}/dt),$$

y como se indicaba anteriormente: $d\vec{v}/dt = \vec{a}$, con lo que:

$$\vec{F} = m \vec{a},$$

que es conocida como la segunda ley del movimiento de Newton, y dice que "La fuerza con que puede interactuar una partícula es el producto de su masa por su aceleración".

Partiendo de la ecuación:

$$\vec{P} = m \vec{v} = m \vec{a} t = \vec{F} t,$$

y llamando Δt al tiempo que dure la interacción, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\Delta \vec{P} = \vec{F} \Delta t \text{ ----- (5.3).}$$

Sin embargo, si el momentum es constante en el sistema:

$$\Delta \vec{P}_A = - \Delta \vec{P}_B.$$

por lo que:

$$\vec{F}_A \Delta t_A = - \vec{F}_B \Delta t_B \text{ ----- (5.4).}$$

Como el tiempo de interacción es el mismo para ambas partículas, $\Delta t_A = \Delta t_B$ y pueden ser suprimidos, por lo que la ecuación 5.4 puede ser escrita de la forma:

$$\vec{F}_A = - \vec{F}_B.$$

Esta ecuación se conoce como la tercera ley de Newton, ó simplemente como la ley de acción y reacción. Dice que "Las fuerzas de interacción entre dos partículas son iguales en magnitud, pero de sentido contrario".

Continuando con los ejemplos de la utilidad de la ley de la conservación del momentum, veamos las colisiones atómicas.

La conservación del momentum se aplica a colisiones de moléculas, átomos y sus partículas constituyentes. Se puede obtener mucha información concerniente a partículas atómicas y subatómicas aplicando el principio de conservación del momentum a tales colisiones.

En una colisión de partículas, tal como se muestra en la figura 5.2, las trazas de las partículas cargadas eléctricamente se vuelven visibles y pueden ser fotografiadas cuando tales partículas pasan a través del vapor sobresaturado de una cámara de niebla ó el líquido

supercalentado de una cámara de burbujas. En la primera, se forman gotitas líquidas a lo largo de la estela de la trayectoria de la partícula cargada; en el otro caso, las burbujas se alinean a lo largo de la estela. Las partículas que chocan están efectivamente aisladas, y el momentum antes de ocurrir la colisión es exactamente igual al momentum después de la colisión.

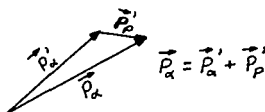
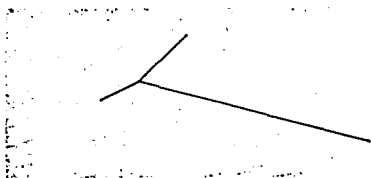
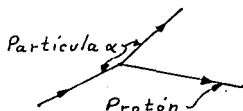


FIG. 5.2: Fotografía en una cámara de niebla que muestra una partícula α (núcleo de helio) que choca con un protón inicialmente en reposo.

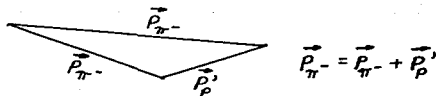
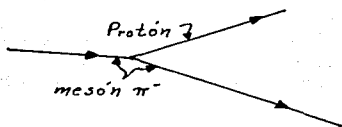


FIG. 5.3: Fotografía en una cámara de burbujas que ilustra la conservación del momento lineal. Un meson π^- , una partícula 300 veces más pesada que un electrón, entra a la izquierda y choca con un protón inicialmente en reposo. El protón se pone en movimiento oblicuamente hacia arriba mientras que el meson π^- se deflecta hacia abajo.

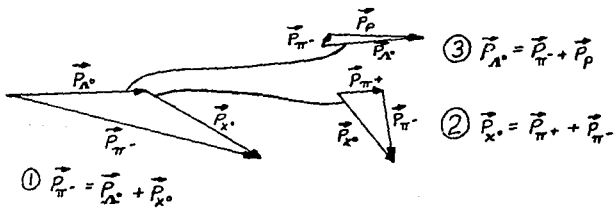
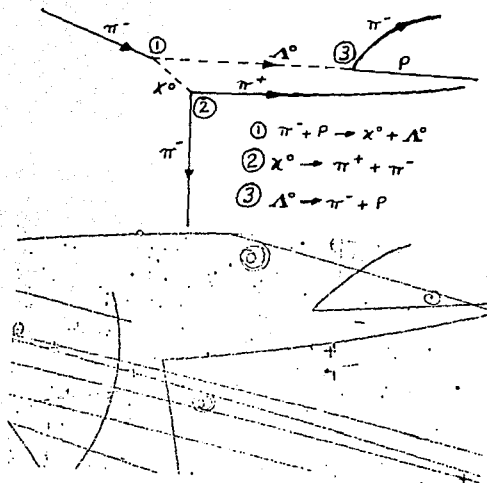


FIG. 5.4: Una serie de eventos iniciados por el meson π^- que entra por la izquierda. (1) El meson se combina con el proton, al chocar se produce un meson X^0 y una partícula Λ^0 , esta partícula al ser electricamente neutra no deja huella. (2) El meson π^0 explota en vuelo convirtiendose en un meson π^+ y un meson π^- . (3) La partícula Λ^0 se escinde en un meson π^- y un proton. La traza de la partícula cargada electricamente se curva debido a la acción de un campo magnetico.

Partículas tales como electrones, protones y neutrones, todas tienen momentum. Además, la radiación electromagnética, en forma de ondas de radio, luz visible y rayos X, también transporta momentum. (La luz ejerce una presión sobre los objetos en que incide.) La teoría cuántica muestra que la radiación tiene aspectos "Como si fuera partícula"; las "partículas" de la radiación electromagnética se llaman "fotones". Cada fotón transporta un momentum, y la colisión entre un fotón y una partícula material también está gobernada por el principio de conservación del momentum.

Un gran número de colisiones atómicas se muestran en las figuras 5.3 y 5.4.

Continuando con los ejemplos de los usos del principio de la conservación del momentum, veamos los cohetes:

En el cohete, las partículas (las moléculas del gas consumido) son expulsadas por la parte posterior. Cada partícula sale con una velocidad \vec{v}_e . Es importante tener presente que las partículas siempre son expulsadas con la misma velocidad \vec{v}_e relativa al cohete. La velocidad de las partículas expulsadas relativa, por ejemplo, a la Tierra, no es la misma para todas las partículas debido al cambio de la rapidez del cohete con respecto a la Tierra.

La masa inicial del cohete (más su combustible) es m_0 y está inicialmente en reposo. Consideremos que el sistema cohete-combustible está aislado (en el espacio); la conservación del momentum requiere que el momentum total del sistema continúe siendo cero. La masa Δm del primer grupo de partículas expulsadas se considera muy pequeña comparada con la masa restante del cohete. Después de que las primeras partículas han sido expulsadas, el cohete ha ganado rapidez $\Delta \vec{v}$. Habiendo perdido una masa Δm , la masa del cohete es ahora $m_0 - \Delta m$ y su momentum es $(m_0 - \Delta m)\Delta \vec{v}$. El momentum de las partículas expulsadas es $(\Delta m)\vec{v}_e$ en la dirección opuesta a $\Delta \vec{v}$.

Por el principio de conservación del momentum,

$$(m_0 - \Delta m)\Delta \vec{v} = (\Delta m)\vec{v}_e$$

Debido a que Δm es muy pequeño comparado con m_0 , podemos eliminarlo del lado izquierdo de la ecuación anterior sin error apreciable, y se tiene:

$$m_0 \Delta \vec{v} = (\Delta m)\vec{v}_e \text{ ----- (5.5)}$$

La masa del cohete se reduce por el factor $\Delta m/m_0$ y su rapidez se incrementa por $\Delta v/v_e$.

La masa restante del cohete puede ser escrita

$$m_0 - \Delta m = m_0 (1 - (\Delta m/m_0))$$

De este modo, la masa final del cohete está relacionada con la masa original por el factor $1 - (\Delta m/m_0)$. La rapidez del cohete es relativa al sistema de referencia con respecto al cual estuvo inicialmente en reposo.

Ahora supongamos que vemos el cohete desde otro marco de referencia, aquel desde el cual el cohete esté en reposo después de expulsar el primer grupo de partículas. Entonces, cuando se expulsa el segundo grupo de partículas, su rapidez (relativa al nuevo sistema de referencia) es otra vez v_e . La masa del segundo grupo de partículas expulsada se elige de tal forma que el cohete gane nuevamente la rapidez Δv en la dirección hacia adelante. Por la ecuación 5.5, esto implica que el cambio fraccional de masa $\Delta m/m_0$, la masa sobrante del cohete es $m_0(1 - \Delta m/m_0)(1 - \Delta m/m_0) = m_0(1 - \Delta m/m_0)$. Relativa a nuestro sistema de referencia inercial la rapidez del cohete es ahora $2\Delta v$.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Se puede continuar con este procedimiento, siempre eligiendo un sistema de referencia inercial desde el cual el cohete esté en reposo y escogemos la masa de cada grupo expulsado de tal modo que la masa residual del cohete incremente su rapidez en la misma cantidad Δv . (Nótese que, desde la ecuación 5.5, si Δv es la misma después de cada expulsión, las masas de los grupos expulsados deben ser diferentes). Encontramos entonces que, después que n grupos han sido expulsados, el cohete ha ganado una velocidad, relativa al sistema de referencia en que inicialmente estaba en reposo, de $n \Delta v$, y tiene una masa residual m dada por:

$$m = m_0 (1 - \Delta m/m_0)^n \text{ ----- (5.6).}$$

Se designa la rapidez final del cohete $n \Delta v$ como v , y la ecuación ecuación 5.5 puede ser escrita como:

$$\frac{\Delta m}{m_0} \frac{\Delta v}{v_e} = \frac{1}{n} \frac{v}{v_e}$$

y la ecuación 5.6 resulta:

$$m = m_0 \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - (v/v_e)/n]^n \text{ ----- (5.7)}$$

Podemos tomar el límite cuando el número de expulsiones n tienda a infinito y la masa de cada una de ellas tienda a cero. Esto corresponde a la emisión continua de moléculas en un cohete real.

Por definición:

$$e^{-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x/n)^n \text{ ----- (5.8)}$$

donde e es la base de los logaritmos naturales: $e = 2.718281...$

Si se comparan las ecuaciones 5.7 y 5.8, se observa que:

$$m = m_0 e^{-v/v_e} \quad \text{-----} \quad (5.9)$$

Podemos llegar a este resultado de forma diferente, utilizando el cálculo integral. La ecuación 5.5 se escribe:

$$\begin{aligned} m \, dv &= -v_e \, dm \\ \int_0^v dv &= -v_e \int_{m_0}^m (dm/m) \\ v &= -v_e \ln(m/m_0) \\ m &= m_0 e^{-v/v_e} \end{aligned}$$

Notense las consideraciones implícitas por esta derivación del cálculo. La ecuación 5.5 se aplica en cada instante debido a que el cohete residual se considera instantáneamente en reposo en un sistema inercial, y la ley de conservación del momentum es válida para cualquier sistema inercial. Además, la rapidez de expulsión v_e puede ser sacada del símbolo de integral debido a que todas las partículas salen con la misma velocidad relativa al sistema inercial instantáneo del cohete. La figura 5.5 es una gráfica de la ecuación 5.9.

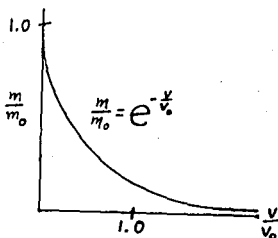


FIG. 5.5: La razón de la masa residual a inicial del cohete (m/m_0) como función de la rapidez final residual del cohete y dividido por la velocidad de expulsión v_0 . La masa decae exponencialmente con v .

En un cohete de combustible típico, las moléculas expulsadas tienen velocidades de alrededor de 2 km/s, relativas al cohete. Si el cohete logra una velocidad $v = 8 \text{ km/s}$ (la velocidad de un satélite cercana a la Tierra), $v/v_e = 4$. La ecuación 5.9 prueba que la razón de masa correspondiente es $m/m_0 = 0.0018$, o $m_0 = 55 m$. La masa inicial del cohete es 55 veces más que la carga útil. La última partícula expulsada por un cohete real tiene una velocidad relativa al marco de referencia en que el cohete estuvo en reposo, de: $4v_e - v_e = 3v_e = 6 \text{ km/s}$.

Hasta aquí se ha estudiado la importancia de la ley de conservación del momentum lineal en la Física, lo cual nos ayudará a comprender mejor la importancia que ha tenido la ley de conservación del momentum angular.

Regresemos al sistema Sol-Tierra (figura 5.6).

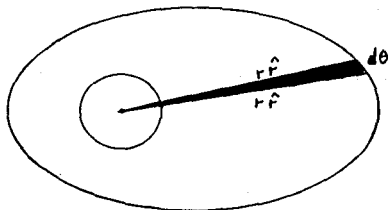


FIG. 5.6: Sector circular en la órbita elíptica terrestre.

Se tiene un sistema de dos cuerpos, uno gira en torno al otro elípticamente (sólo se muestra la órbita). El área sombreada está delimitada por dos líneas que parten del cuerpo central y van a la órbita, ambas están casi juntas, dado que están separadas por un ángulo diferencial($d\theta$) que tiende a cero. Por esta característica, consideraremos que la figura así descrita forma un sector circular, y que las dos líneas que limitan al sector son de igual longitud ($r \hat{r}$).

Se sabe que el momentum angular es: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, y también que el vector posición r es $r \hat{r}$. Por lo tanto: $\vec{L} = r \hat{r} \times \vec{p}$.

Por otro lado,

$$\vec{p} \text{ (el momentum lineal) } = m \vec{v}, \text{ y } \vec{v} = r \dot{\hat{r}} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$$

en coordenadas cilíndricas. Por lo tanto:

$$\vec{L} = r \hat{r} \times m (r \dot{\hat{r}} + r \dot{\theta} \hat{\theta}) = m r^2 \dot{\theta} \hat{k},$$

por ser un producto cruz, y estar su notación en coordenadas cilíndricas.

Como es un sistema cuya única fuerza presente es la gravitatoria:

$$\vec{F} = -G (m M / r^2) \hat{r}$$

Por ser un sistema de fuerzas centrales, \vec{r} es paralelo a \vec{F} , así que:

$$\vec{\tau} = \vec{0},$$

por lo que:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{\tau} = \vec{0},$$

es decir, \bar{L} es constante.

$$\text{Para que } \bar{L} \text{ sea constante, } \bar{L} = m r^2 \dot{\theta} \hat{k} = \text{constante.} \text{ -----(5.10)}$$

La diferencial de área del sector circular es: $dA = [r(r d\theta)]/2$.
Si dividimos entre dt ambos miembros de la ecuación, tenemos:

$$dA/dt = r^2/2 (d\theta/dt) = (r^2 \dot{\theta})/2 \text{ ----- (5.11).}$$

Pero de la ecuación 5.5, sabemos que $m r^2 \dot{\theta} = \text{constante}$, por lo que $r^2 \dot{\theta}$ también es constante, dado que la masa es invariable.

Despejamos $\dot{\theta}$ de la ecuación 5.10, y suprimimos \hat{k} para trabajar solo con la norma, tenemos: $\dot{\theta} = L / (m r^2)$. Substituimos lo anterior en la ecuación 5.11, obtenemos: $dA/dt = r [L / (2 m r^2)]$, $dA/dt = L / (2 m) = \text{constante}$. Este sorprendente resultado, nos indica que "En el movimiento bajo fuerzas centrales, el radio vector de la partícula barre áreas iguales en tiempos iguales". Conocida como la segunda ley de Kepler.

CAPITULO VI.

APLICACIONES DE LA LEY DE CONSERVACION DEL MOMENTUM LINEAL Y DEL MOMENTUM ANGULAR EN LA INGENIERIA.

Para terminar el presente trabajo, se procede a analizar métodos que podrían usarse en Ingeniería, basados en las leyes de la conservación de los momenta lineal y angular.

En primer lugar, consideremos un método básico de la solución de problemas relacionados con el movimiento de las partículas, el cual se basa en el principio del impulso y el momentum y que puede usarse para resolver problemas en los que intervienen fuerza, masa, velocidad y tiempo.

Considérese una partícula de masa m sobre la que actúa una fuerza \bar{F} . La segunda ley de Newton puede expresarse en la forma:

$$\bar{F} = d(m \bar{v})/dt \quad \text{-----} \quad (6.1)$$

en la que $m \bar{v}$ es el momentum lineal de la partícula. Si se multiplican ambos lados de la ecuación 6.1 por dt y si se integra desde un tiempo t_1 hasta t_2 , entonces:

$$\bar{F} dt = d(m \bar{v})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = m \bar{v}_2 - m \bar{v}_1$$

ó bien, al transponer el último término,

$$m \bar{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = m \bar{v}_2 \quad \text{-----} \quad (6.2)$$

La integral de la ecuación 6.2 es un vector que se conoce con el nombre de *impulso lineal*, ó simplemente el *impulso*, de la fuerza \bar{F} durante el intervalo de tiempo considerado. Al dividirse \bar{F} en

componentes rectangulares, escribimos:

$$\text{Imp } 1-2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

$$\text{Imp } 1-2 = \hat{i} \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_x dt + \hat{j} \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_y dt + \hat{k} \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_z dt \quad \text{-- (6.3)}$$

Notese que las componentes del impulso de la fuerza F son iguales a las áreas bajo las curvas obtenidas al graficar las componentes \bar{F}_x , \bar{F}_y y \bar{F}_z contra t (figura 6.1), respectivamente. En el caso de una fuerza \vec{F} de magnitud y dirección constantes, el impulso está representado por el vector $\vec{F}(t_2 - t_1)$, que tiene la misma dirección que \vec{F} .

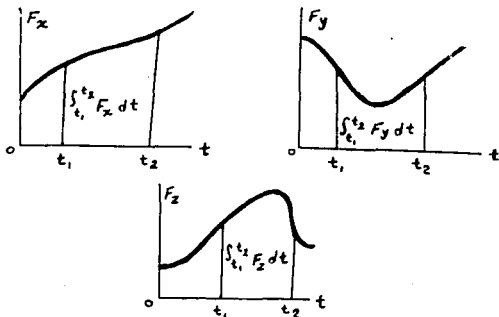


FIG 6.1: Gráficas de tiempo-fuerza.

La ecuación 6.2 expresa que cuando una fuerza \vec{F} actúa sobre una partícula durante cierto intervalo, puede obtenerse el momentum $m \vec{v}_1$ y el impulso de la fuerza \vec{F} durante el intervalo de tiempo considerado (figura 6.2).

Observamos que mientras la energía cinética y el trabajo son cantidades escalares, el momentum y el impulso son cantidades vectoriales. Con el objeto de obtener una solución analítica, es

entonces necesario sustituir la ecuación 6.4 por las ecuaciones equivalentes de las componentes.

$$\left. \begin{aligned} (m \bar{v}_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_x dt &= (m \bar{v}_x)_2 \\ (m \bar{v}_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_y dt &= (m \bar{v}_y)_2 \\ (m \bar{v}_z)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_z dt &= (m \bar{v}_z)_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

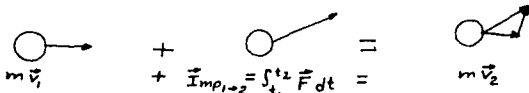


FIG. 6.2: Ilustración del cálculo del momentum final de un sistema.

Cuando actúan varias fuerzas sobre una partícula, debe considerarse el impulso de cada una de las fuerzas. Tenemos:

$$m \bar{v}_1 + \sum \text{Imp } 1-2 = m \bar{v}_2 \quad \text{-----} \quad (6.6)$$

También en este caso la ecuación obtenida representa una relación entre cantidades vectoriales; en la solución real de un problema debe substituirse por las ecuaciones correspondientes de las componentes.

Si en un problema intervienen dos ó más partículas, cada partícula debe considerarse por separado y la ecuación 6.6 se escribe para cada partícula. Podemos también sumar vectorialmente las cantidades de movimiento de todas las partículas y los impulsos de todas las fuerzas que intervienen. Entonces escribimos:

$$\sum m \bar{v}_1 + \sum \text{Imp}_{1-2} = \sum m \bar{v}_2 \text{ ----- (6.7)}$$

Como las fuerzas de acción y reacción entre las partículas forman parejas de fuerzas iguales y opuestas y como el intervalo desde el tiempo t_1 hasta t_2 es común a todas las fuerzas que aparecen, los impulsos de las fuerzas de acción y reacción se cancelan y sólo necesitamos considerar los impulsos de las fuerzas externas.

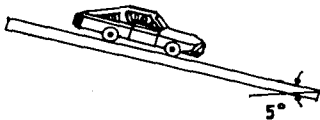
Si sobre las partículas no actúa ninguna fuerza externa ó, en términos más generales, si la suma de las fuerzas externas es cero, el segundo término de la ecuación 6.7 se anula y ésta se reduce a:

$$\sum m \bar{v}_1 = \sum m \bar{v}_2 \text{ ----- (6.8)}$$

la cual expresa que la cantidad de movimiento total de las partículas se conserva.

Por ejemplo:

Un automóvil que pesa 20 kN baja por una pendiente de 5° con una velocidad de 80 km/h cuando se aplican los frenos, se produce una constante de frenado (aplicada por la carretera sobre los neumáticos) de 7800 N. Determinese el tiempo necesario para que el automóvil se detenga.



Solución: Aplicamos el principio del impulso y del momentum. Como cada fuerza es de dirección y magnitud constantes, el impulso correspondiente es igual al producto de la fuerza y el intervalo de tiempo t.

$$m v_1 + \sum \text{Imp } 1-2 = m v_2$$

componentes x: $m v_1 + (W \text{ sen } 5^\circ)t - Ft = 0$

$$(20000 \text{ N}/9.81 \text{ m/s}^2)(22.2222 \text{ m/s}) + (20000 \text{ N sen } 5^\circ)t - 7800t = 0$$

$$t = 7.48 \text{ segundos.}$$

Veamos ahora aplicaciones sencillas de la conservación del momentum para un sistema de partículas. Si sobre las partículas de un sistema no actúa ninguna fuerza externa, los primeros miembros de las ecuaciones:

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{P}} \text{ ----- (6.9)}$$

y $\sum \vec{\tau} = \dot{\vec{L}} \text{ ----- (6.10)}$

son iguales a cero y estas ecuaciones se reducen a $\dot{\vec{P}} = \vec{0}$ y $\dot{\vec{L}} = \vec{0}$. Concluimos que:

$$\vec{P} = \text{constante y } \vec{L} = \text{constante. ----- (6.11)}$$

Las ecuaciones obtenidas expresan que el momentum lineal del sistema de partículas y su momentum angular respecto al punto fijo O se conservan.

En algunas aplicaciones, como en problemas en los que intervienen fuerzas centrales, la torca respecto a un punto fijo O de cada una de las fuerzas externas puede ser cero sin que ninguna de las fuerzas sea cero. En tales casos, aún se cumple la segunda de las ecuaciones 6.11; el momentum angular del sistema de partículas respecto al origen

O se conserva.

El concepto de la conservación de los momentos lineal y angular también pueden aplicarse al análisis del movimiento del centro de masa G. Por ejemplo, si la suma de las fuerzas externas es cero, se aplica la primera de las ecuaciones 6.11. Usando la ecuación $\bar{P} = m \bar{v}$, se escribe:

$$\bar{v} = \text{constante} \text{ ----- (6.12)}$$

la cual expresa que el centro de masa G del sistema se mueve en una línea recta y con una velocidad constante. Por otro lado, si la suma de las torcas respecto a G de las fuerzas externas es cero, se sigue de la ecuación 6.12 que el momento angular del sistema alrededor de su centro de masa se conserva:

$$L_G = \text{constante} \text{ ----- (6.13)}$$

Por ejemplo:

Se desea introducir un pilote de 200 kg en el suelo hasta que la resistencia a su penetración sea 100 kN. Cada golpe del martillo de 750 kg es el resultado de la caída libre de 1.2 m sobre el pilote. Determinese cuánto se introducirá el pilote en el suelo cuando se haya alcanzado la resistencia de 100 kN. Supóngase que el impacto es perfectamente plástico.

Solución:

Antes del impacto: Conservación de la energía:

$$\text{Martillo: } W_A = (750 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 7357.5 \text{ N.}$$

$$E_{c1} \text{ (Energía cinética)} = E_{c2} = (1/2)(m_A)(v_{A1})^2 = 0$$

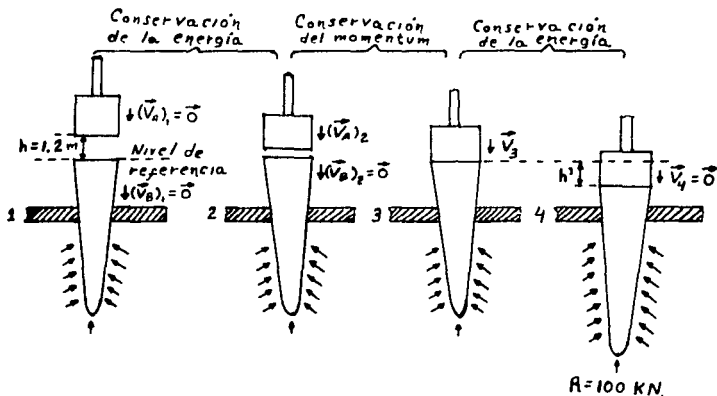
$$E_{p1} \text{ (Energía potencial)} = W_A \text{ y } = (7357.5 \text{ N})(1.2 \text{ m}) = 8829 \text{ J}$$

$$E_{c2} = (1/2)(m_A)(v_{A2})^2 = (1/2)(750 \text{ kg})(v_{A2})^2 = 375 \text{ kg } v_{A2}^2$$

$$E_{p2} = 0$$

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2} ; 0 + 8829 \text{ J} = 350 \text{ kg } v_{A2}^2$$

Se despeja v_{A2} y se hacen operaciones: $v_{A2} = 4.85 \text{ m/s}$



Choque: Conservación del momentum lineal: Como el choque es perfectamente plástico, el coeficiente de restitución (e) = 0, y el martillo y el pilote se mueven juntos después del impacto.

$$(m_A)(v_{A2}) + (m_B)(v_{B2}) = (m_A + m_B) v_3$$

$$(750 \text{ kg})(4.85 \text{ m/s}) + 0 = (750 \text{ kg} + 200 \text{ kg}) v_3$$

Se despeja v_3 y se hacen operaciones: $v_3 = 3.83 \text{ m/s}$

Después del impacto, conservación de la energía.

$$E_{c3} = (1/2)(m_A + m_B)(v_3)^2 = (1/2)(750 \text{ kg} + 200 \text{ kg})(3.83 \text{ m/s})^2$$

$$E_{c3} = 6967.73 \text{ J}; \quad E_{p3} = 0; \quad E_{c4} = 0$$

$$E_{p4} = E_{p_g} \text{ (gravitacional)} + E_{p_p} \text{ (pilote)}^3$$

Se le llama h' a la distancia total que se introduce el pilote, y R a la resistencia a la penetración del pilote.

$$E_{p4} = (W_A + W_B)(-h') + (1/2)(R)(h') = - [(750 + 200)(9.81)]N (h') + (1/2)(1 \times 10^5 \text{ N}) h'$$

$$E_{p4} = 40680.5 h'$$

$$E_{c3} + E_{p3} = E_{c4} + E_{p4}; \quad 6967.73 \text{ J} + 0 = 0 + 40680.5 h'$$

Se despeja h' y se hacen operaciones: $h' = 17.13 \text{ cm}$.

Veamos aplicaciones de la ley de la conservación del momentum angular:

3 *Análogamente a un cuerpo sujeto a un resorte de constante k y que se mueve desde una posición A_1 , correspondiente a una deformación x_1 del resorte, hasta una posición A_2 correspondiente a una deformación x_2 , el trabajo de la fuerza se obtiene restando el valor de la función $(1/2)(k x^2)$, correspondiente a la segunda posición del cuerpo, de su valor correspondiente a la primera posición. Esta función se representa por E_{p_p} y se conoce como "energía potencial del cuerpo respecto de la fuerza \vec{F} ".*

Quando no actúa ninguna fuerza externa sobre un cuerpo rígido ni sobre un sistema de cuerpos rígidos, los impulsos de las fuerzas externas son cero y el sistema de los momentos en el tiempo t_1 es equipolente al sistema de momentos en el tiempo t_2 . Sumando e igualando sucesivamente las componentes x , componentes y y torcas de los momentos a los tiempos t_1 y t_2 , concluimos que el momento total del sistema en cualquier dirección se conserva y que su momento angular total alrededor de cualquier punto se conserva.

Los problemas que incluyen la conservación del momento angular respecto a algún punto O se pueden resolver mediante el método general del impulso y el momento, es decir, se dibujan diagramas de momento e impulso. La ecuación 6.14 se obtiene entonces con la suma de las torcas alrededor de O . Como se vea en el ejemplo número 3, pueden escribirse dos ecuaciones adicionales al sumar e igualar las componentes x y y ; estas ecuaciones se utilizan para encontrar dos impulsos lineales desconocidos, como los impulsos de las componentes de la reacción en un punto fijo.

$$\bar{L}_1 = \bar{L}_2 \text{ ----- (6.14)}$$

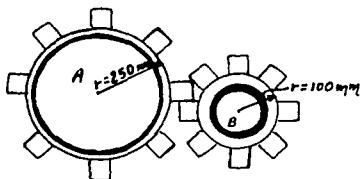
Ejemplo 1:

El engrane A tiene una masa de 10 kg y un radio de giro⁴ de 200 mm, mientras que el engrane B tiene una masa de 3 kg y un radio de giro de 60 mm. El sistema se encuentra en reposo cuando se aplica un par M de magnitud 6 N m al engrane B. Despreciando el rozamiento, determinese:

⁴ El radio de giro k representa la distancia a la que se debiera concentrar toda la masa del cuerpo si su momento de inercia respecto a un eje de giro no debiera cambiar.

a) El tiempo necesario para que la velocidad angular del engrane B alcance 600 rpm, y

b) La fuerza tangencial que el engrane B aplica al engrane A.



Solución:

a)

Se aplican los principios del impulso y del momentum lineal a cada engrane por separado. Como todas las fuerzas y el par son constantes, se obtienen sus impulsos al multiplicarlos por el tiempo desconocido t . Se calculan los momentos de inercia centroidales y las velocidades angulares finales:

Se observa que las velocidades de los engranes en sus periferias son iguales, se escribe:

$$r_A \omega_A = r_B \omega_B \quad \omega_A = \omega_B r_B / r_A = \omega_B (100 \text{ mm} / 250 \text{ mm}) = 0.4 \omega_B$$

Con una frecuencia de 600 rpm, tenemos:

$$\omega_B = 62.8 \text{ rad/s} \quad \rightarrow \quad \omega_A = 0.4 \omega_B = 25.1 \text{ rad/s}$$

$$I_A = m_A k_A = (10 \text{ kg})(0.2 \text{ m}) = 0.4 \text{ kg m}$$

$$I_B = m_B k_B = (3 \text{ kg})(0.08 \text{ m}) = 0.0192 \text{ kg m}$$

Principios del impulso y del momentum para el engrane A: Los sistemas de las cantidades de movimiento iniciales, impulsos y cantidades de movimiento finales se muestran en tres dibujos distintos.



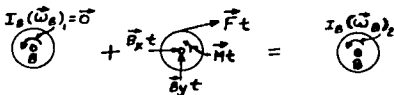
$$\text{Momenta sist}_{A1} + \text{Impul ext sist}_{B/A} = \text{Momenta sist}_{A2}$$

torcas respecto a A: $0 - F t r_A = - I_A(\omega_A)_2$

$$F t (0.25 \text{ m}) = (0.4 \text{ kg m}) (25.1 \text{ rad/s})$$

$$F t = 40.2 \text{ N s}$$

Principios del impulso y del momentum para el engrane B.



$$\text{Momenta sist}_{B1} + \text{Impul ext sist}_{A-B} = \text{Momenta sist}_{B2}$$

$$0 + \tau t - F t r_B = I_B(\omega_B)_2$$

$$(6 \text{ N m})t - (40.2 \text{ N s})(0.1 \text{ m}) = (0.0192 \text{ kg m}) (62.8 \text{ rad/s})$$

$$t = 0.871 \text{ s}$$

b)

recordando que $F t = 40.2 \text{ N s}$, escribimos:

$$F(0.871 \text{ s}) = 40.2 \text{ N s} \quad \rightarrow \quad F = + 46.2 \text{ N}$$

Por consiguiente, la fuerza aplicada por el engrane B al engrane A es:

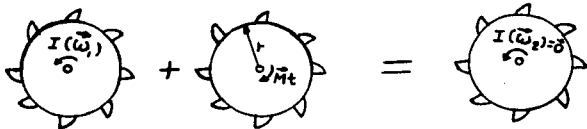
$$F = 46.2 \text{ N}$$

Aquí es interesante resaltar la importancia de este cálculo, dado que al conocer la fuerza aplicada, se puede determinar el esfuerzo cortante que soporta cada diente y así saber si el material con el que está construido es el correcto, o si las dimensiones son adecuadas, así como conocer el diámetro mínimo y longitud máxima de la flecha entre soportes que conecta el engrane y el motor (estos cálculos se realizan a partir del conocimiento de la potencia y las revoluciones por minuto del motor que proporciona el movimiento).

Ejemplo 2:

El rotor de una turbina de vapor gira con una frecuencia de 5400 rpm cuando repentinamente se suspende la alimentación de vapor. El rotor pesa 90 kg y tiene un radio de giro de 15 cm. Si el rozamiento cinético produce un par de magnitud $2.7 \text{ N}\cdot\text{m}$, encuentrese el tiempo necesario para que el rotor se detenga.

Solución:



Momentum sist: + Impuls ext sist: = Momentum sist

$$I \omega_1 - M v t = 0 \quad (1)$$

$$I = m a k = (90 \text{ kg}) (0.15 \text{ m}) = 2.025 \text{ kg m}$$

$$\omega_1 = (5400 \text{ rpm}) (1 \text{ min}/60 \text{ seg}) (2 \pi \text{ rad}/1 \text{ rev}) = 565.49 \text{ rad/seg}$$

De la ecuación (1) se tiene: $I \omega_1 = M v t$

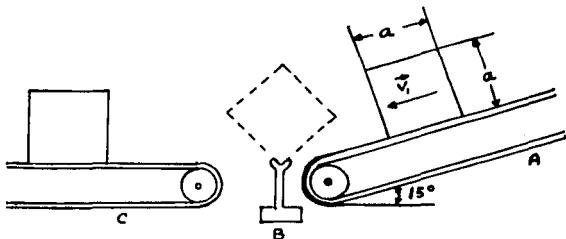
$$(2.025 \text{ kg m}) (565.49 \text{ rad/seg}) = (0.27 \text{ kg m}) t$$

$$t = \frac{1145.11 \text{ kg m /seg}}{2.7 \text{ kg m /seg}} (1 \text{ min}/60 \text{ seg}) = 7.08 \text{ min}$$

Por lo tanto, la turbina se detendrá en 7.08 min.

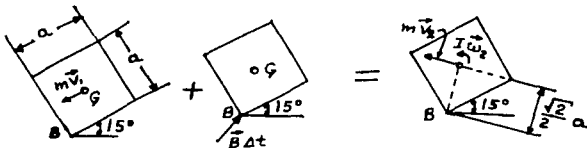
Ejemplo 3:

Un paquete cuadrado de 50 cm de lado, y 5 kg de masa, baja sobre una banda transportadora A con una velocidad v_1 constante. Al final de la banda transportadora, la esquina del paquete golpea contra un soporte rígido en B. Si se supone que el impacto en B es perfectamente plástico, calcúlese la velocidad mínima v_1 a la cual el paquete girará sobre B y alcanzará la banda transportadora C.



Solución:

Principios del impulso y del momento: Como el impacto entre el paquete y el soporte es perfectamente plástico, el paquete gira sobre B durante el impacto.



Momenta sist 1 + Impulso ext sist 1-2 = Momenta sist 2

$$(m v_1)(1/2 a) + 0 = (m v_2)(1/2 \sqrt{2} a) + I\omega_2$$

Como el paquete gira sobre B, se tiene:

$$v_2 = (\text{segmento GB})\omega_2 ; v_2 = (1/2)(\sqrt{2} a)\omega_2$$

Substituyendo esta expresión, junto con:

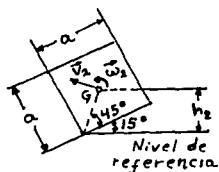
$$I = (1/6)(m a^2) + [(1/2)(\sqrt{2} a)]^2 = (2/3)(m a^2),$$

En la ecuación (1):

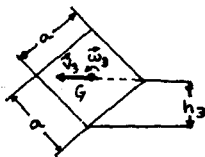
$$(m v_1)(1/2)(a) = m(1/2)(\sqrt{2} a \omega_2)(1/2)(\sqrt{2} a) + (2/3)(m a^2 \omega_2)$$

$$\text{Por lo tanto, se despeja y simplifica: } v_1 = (11/6)(a \omega_2) \quad (2)$$

Principio de conservación de la energía: Se aplica el principio de la conservación de la energía entre la posición 2 y la posición 3:



Posición 2: $E_{p2} = W h_2$; $E_{c2} = (1/2)(m v_2^2) + (1/2)(I \omega_2^2)$
 $E_{c2} = (1/2)[m(1/2 \sqrt{2} a \omega_2^2)^2] + (1/2)(2/3 m a^2)(\omega_2^2)$
 $E_{c2} = (7/12)(m a^2)(\omega_2^2)$



Posición 3: Puesto que el paquete debe alcanzar a la banda transportadora C, debe pasar por la posición 3, en la cual G está directamente arriba de B. También, como deseamos obtener la velocidad

mínima a la cual el paquete llegará a esta posición, se elige:
 $v_2 = 0$, $\omega_2 = 0$. Por consiguiente, $E_{c2} = 0$ y $E_{p2} = W h_2$.

Conservación de la energía: $E_{c2} + E_{p2} = E_{c3} + E_{p3}$
 $(7/12)(m a^2)(\omega_2^2) + W h_2 = 0 + W h_3$

Se despeja y simplifica la ecuación anterior:

$$\omega_2^2 = [(12 g)(h_3 - h_2)]/(7 a^2) \quad (3)$$

Se substituyen los valores calculados de h_2 y h_3 en la ecuación (3), y se obtiene:

$$\omega_2^2 = [(12 g)(0.707a - 0.612a)]/(7 a^2) = (0.163 g)/a$$

Se substituye ω_2 en la ecuación 2 y se simplifica:

$$v_1 = 0.403 \sqrt{g a}.$$

Substituyendo la longitud de la caja, se obtiene:

$$v_1 = 0.403 \sqrt{(9.81 \text{ m/s}^2)(0.5 \text{ m})},$$

por lo tanto:

$$v_1 = 0.894 \text{ m/s}$$

Es interesante notar que la velocidad mínima no es función de la masa de la caja.

Una de las aplicaciones más recientes de la ley de la conservación del momentum angular se refiere a satélites y cuerpos espaciales en general, sin embargo, para comprender mejor la cinética de los cuerpos rígidos en tres dimensiones estudiemos el movimiento de un giroscopio.

Un giroscopio (o giroscopo) consiste esencialmente en un rotor que puede girar libremente con respecto a su eje geométrico, cuando está montado en una suspensión Cardán (fig 6.4a). Un giroscopio puede tomar cualquier orientación pero su centro de masa debe permanecer fijo en el espacio. El giroscopio puede llevarse desde esta posición de referencia hasta cualquier posición arbitraria (fig 6.4b) por medio de los siguientes pasos:

1.-) Una rotación del aro exterior de ángulo ϕ sobre el plano XY alrededor del eje AA'.

2.-) Una rotación del aro interior de ángulo θ sobre el plano ZX alrededor de BB', y

3.-) Un giro del rotor un ángulo ψ con respecto a CC'.

Los ángulos ϕ , θ , y ψ se llaman *ángulos de Euler* y caracterizan completamente la posición del giroscopio en cualquier instante dado. Sus derivadas $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ definen las velocidades de *precesión*, de *nutación* y de *rotación* del giroscopio en el instante considerado, respectivamente.

Para definir la posición del giroscopio en cualquier instante se selecciona un sistema de referencia fijo OXYZ cuyo origen O se encuentra en el centro de masa del rotor. Para calcular las componentes de la velocidad angular y del momentum angular del giroscopio se usa un sistema de ejes giratorios Oxyz con origen en el punto O.

Así, la velocidad angular $\vec{\omega}$ del giroscopio respecto al sistema de referencia fijo OXYZ como la suma de las tres velocidades angulares parciales: precesión, nutación y rotación, representando por \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} los vectores unitarios a lo largo de los ejes de rotación y como \hat{K} el vector unitario a lo largo del eje fijo Z

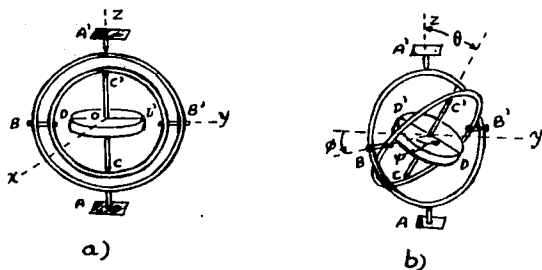


FIG. 6.3: Giroscopio ó giroscopo.

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{K} + \dot{\theta} \hat{j} + \dot{\psi} \hat{k} \quad \text{----- (6.15)}$$

Como las componentes vectoriales obtenidas para $\vec{\omega}$ en la ecuación (6.15) no son ortogonales, se puede descomponer el vector \hat{K} en sus componentes a lo largo de los ejes x y z

$$\hat{K} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{k}$$

Substituyendo esta ecuación en la ecuación (6.15) se obtiene:

$$\vec{\omega} = -\dot{\phi} \sin \theta \hat{i} + \dot{\theta} \hat{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{k} \quad \text{----- (6.16)}$$

Si se llama I al momento de inercia del rotor respecto a un eje de rotación, e I' al momento de inercia respecto al eje perpendicular que pasa por O . Como los ejes de rotación están unidos, no pueden girar sobre sí mismos y la velocidad angular del sistema será:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{k} + \dot{\theta} \hat{j}$$

Se substituye \hat{k} por sus componentes, y se tiene:

$$\vec{\omega} = -\dot{\phi} \sin \theta \hat{i} + \dot{\theta} \hat{j} + \dot{\phi} \cos \theta \hat{k}$$

$$\vec{L} = -I' \dot{\phi} \sin \theta \hat{i} + I' \dot{\theta} \hat{j} + I (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{k}$$

$$\sum \vec{\tau} = \dot{\vec{L}}(x,y,z) + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Donde \vec{L} es el momentum angular del cuerpo con respecto al sistema fijo OXYZ y $\dot{\vec{L}}(x,y,z)$ es la rapidez de cambio de \vec{L} con respecto al sistema giratorio O_{xyz} .

Considerando el caso en que el ángulo θ , la velocidad de precesión $\dot{\phi}$ y la velocidad de rotación $\dot{\psi}$ permanecen constantes, se tiene que la velocidad angular $\vec{\omega}$, su momentum angular \vec{L} y la velocidad $\vec{\omega}$ del sistema de referencia giratoria (fig. 6.4) se reducen respectivamente a:

$$\vec{\omega} = -\dot{\phi} \sin \theta \hat{i} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{k}$$

$$\vec{L} = -I' \dot{\phi} \sin \theta \hat{i} + I (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \hat{k}$$

$$\vec{\omega} = -\dot{\phi} \sin \theta \hat{i} + \dot{\psi} \cos \theta \hat{k}$$

como θ , $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ son constantes, el vector \vec{L} es constante en magnitud y dirección y su rapidez de cambio respecto al sistema giratorio es igual a cero, entonces:

$$\sum \vec{\tau} = \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior los valores de \bar{n} y \bar{L} , y haciendo operaciones, se tiene:

$$\sum \bar{r} = (I \omega_2 - I' \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\phi} \sin \theta \bar{j}$$

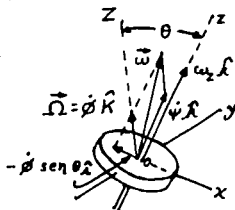


FIG. 6.3: Orientación de los vectores velocidad angular $\vec{\omega}$, momento angular \vec{L} y velocidad angular \vec{n} de un giroscopio

Como el centro de masa del giroscopio está fijo en el espacio, $\sum \bar{F} = \bar{0}$, dado que $\sum \bar{F} = m \bar{a}$. Se observa que las fuerzas que deben aplicarse para mantener el movimiento se reducen a un par de momento igual a $\sum \bar{r}$ y debe estar aplicado alrededor de un eje perpendicular a los ejes de precesión y rotación del giroscopio.

El giroscopio es un aparato cuya utilidad práctica radica en su propiedad de resistir las fuerzas externas que tienden a modificar la dirección de su eje de rotación, de modo que mantiene una posición constante a pesar del movimiento irregular del lugar donde este instalado, por lo que se usa en diversos instrumentos de navegación,

como los estabilizadores gigantes que contrarrestan el balanceo y cabeceo de los barcos; la brújula giroscópica, en que el eje de rotación del giroscopio, una vez alineado con el eje norte-sur de la Tierra, sirve de punto infalible de referencia, no afectado por las variaciones magnéticas; y en casi todos los sistemas automáticos de dirección (como los pilotos automáticos); conectado al mecanismo de dirección de proyectiles balísticos, aviones y buques, permite mantener un rumbo constante (fig. 6.4.).

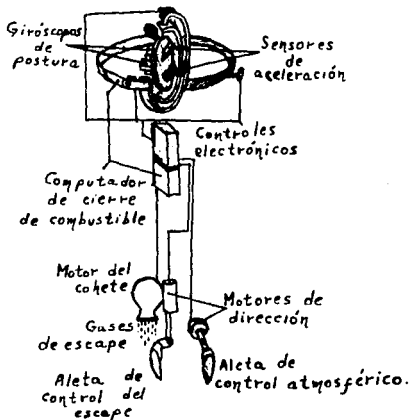


FIG. 6.4: La guía inercial permite enviar un cohete en dirección predeterminada sin señales de tierra. Se compone de dos sistemas: controles de vuelo (oscuro para la postura y controles de aceleración (claro) para la potencia. Los giroscopos actúan sobre el primer sistema: al percibir desviaciones del curso envían por los controles electrónicos cambios o correcciones de vuelo a las aletas de ambos sistemas. El control de aceleración cierra el combustible cuando sus sensores perciben que se ha alcanzado la velocidad deseada.

Consideremos ahora el movimiento de un cuerpo axisimétrico (ó cuerpo de revolución) no sujeto a una fuerza, excepto su propio peso, con respecto a su centro de masa. Ejemplos de tales movimientos son realizados por proyectiles si la resistencia del aire se desprecia, y por satélites artificiales y vehículos espaciales después de que han quemado el combustible de sus cohetes de lanzamiento.

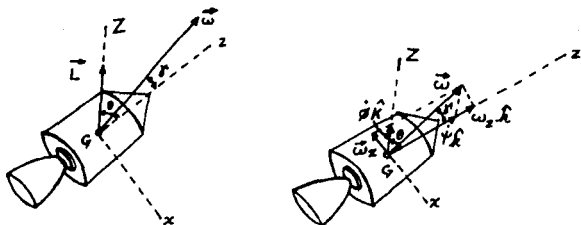


FIG. 6.5: Análisis vectorial de un cuerpo axisimétrico en movimiento.

Como la suma de las torcas de las fuerzas externas alrededor del centro de masa G del cuerpo es cero, la ecuación 6.12 nos da $\dot{\vec{L}} = \vec{0}$, se sigue que el momentum angular \vec{L} del cuerpo con respecto a G es constante. Entonces, la dirección de \vec{L} está fija en el espacio y puede utilizarse para definir el eje Z ó eje de precesión (figura 6.5). Seleccionando un sistema de ejes giratorios $Gxyz$ con el eje z a lo largo del eje de simetría del cuerpo y el eje x en el plano definido por los ejes Z y z , tenemos

$$L_x = -L \sin \theta \quad L_y = 0 \quad L_z = L \cos \theta \quad \text{---- (6.17)}$$

donde θ representa el ángulo formado por los ejes Z y z y L es la magnitud constante de la cantidad de movimiento angular del cuerpo alrededor de G . Como los ejes x , y y z son ejes principales de inercia del cuerpo considerado, podemos escribir

$$L_x = I' \omega_x \quad L_y = I' \omega_y \quad L_z = I \omega_z \quad \text{--- (6.18)}$$

donde I representa el momento de inercia del cuerpo alrededor de su eje de simetría e I' es su momento de inercia alrededor del eje transversal que pasa por G . De las ecuaciones 6.19 y 6.20 se concluye que

$$\omega_x = -L \operatorname{sen}\theta / I' \quad \omega_y = 0 \quad \omega_z = L \operatorname{cos}\theta / I \quad \text{--- (6.19)}$$

La segunda de las relaciones obtenidas muestra que la velocidad angular ω no tiene componente a lo largo del eje y , es decir, a lo largo de un eje perpendicular al plano Zz . Entonces, el ángulo formado por los ejes Z y z permanece constante y el cuerpo realiza una precesión estacionaria con respecto al eje Z .

Dividiendo la primera y la tercera de las relaciones 6.19 miembro a miembro y observando de la figura 6.6 que $-\omega_x/\omega_z = \tan \gamma$, obtenemos la siguiente relación entre los ángulos γ y θ que los vectores $\bar{\omega}$ y \bar{L} , respectivamente, forman con el eje de simetría del cuerpo:

$$\tan \gamma = (I/I')(\tan \theta) \quad \text{----- (6.20)}$$

Existen dos casos particulares de movimiento de un cuerpo axisimétrico no sujeto a fuerzas en los que no existe precesión:

1) Si el cuerpo se pone a girar alrededor de su eje de simetría, tenemos $\omega_x = 0$ y por la ecuación 6.18, $L_x = 0$; los vectores $\bar{\omega}$ y \bar{L} tienen la misma orientación y el cuerpo permanece girando con respecto a su eje de simetría (figura 6.6a) y

2) Si el cuerpo se pone a girar alrededor de un eje transversal tenemos $\omega_z = 0$ y de la ecuación 6.18, $L_x = 0$, nuevamente $\bar{\omega}$ y \bar{L} tienen la misma orientación y el cuerpo permanece girando con respecto al eje transversal dado (figura 6.6b).

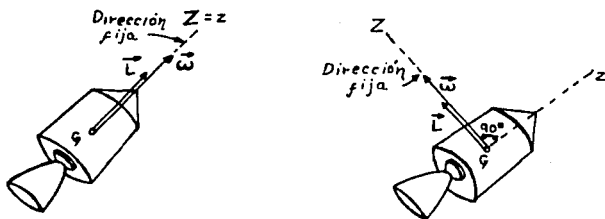


FIG. 6.6: Casos particulares de movimiento de un cuerpo axisimétrico no sujeto a fuerzas en los que no existe precesión.

Consideremos ahora el caso general representado en la figura 6.5, el movimiento de un cuerpo con respecto a un punto fijo (o con respecto a su centro de masa) puede representarse por el movimiento de un cono del cuerpo girando sobre un cono en el espacio. En el caso de la precesión uniforme o estacionaria los dos conos son circulares, ya que los ángulos γ y $\theta - \gamma$ que forma la velocidad angular $\bar{\omega}$ respectivamente con el eje de simetría del cuerpo y con el eje de precesión son constantes.

Deben distinguirse dos casos:

1) $I < I'$. Este es el caso de un cuerpo elongado, como el vehículo espacial de la figura 6.7. De la ecuación 6. 20 tenemos $\gamma < \theta$; el vector $\bar{\omega}$ se encuentra en el interior del ángulo ZGz ; el cono del espacio y el cono del cuerpo son tangentes externamente; la rotación y la precesión son ambas en sentido opuesto a las manecillas del reloj vistas desde el eje z positivo. Se dice que la precesión es directa.

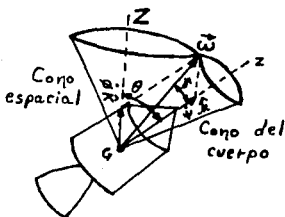


FIG. 6.7: Representación del movimiento de un cuerpo elongado respecto a un punto fijo como el movimiento de un cono del cuerpo sobre un cono en el espacio.

11) $I > I'$. Este es el caso de un cuerpo aplanado, como el satélite de la figura 6.8. De la ecuación 6.20 tenemos $\gamma > \theta$; como el vector $\bar{\omega}$ debe encontrarse fuera del ángulo ZGz , el vector $\psi\hat{K}$ (ψ es la velocidad de precesión y \hat{K} es el vector unitario en la dirección del eje z) tiene un sentido opuesto al del eje z ; el cono del espacio se encuentra en el interior del cono del cuerpo; la precesión y la rotación tienen sentidos opuestos y se dice que la precesión es *retrograda*.

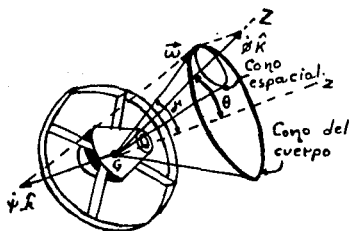
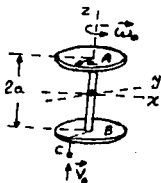


FIG. 6.8: Representación del movimiento de un cuerpo aplanado respecto a un punto fijo como el movimiento de un cono del cuerpo sobre un cono en el espacio.

Por ejemplo:

Se sabe que un satélite espacial de masa m es dinámicamente equivalente a dos discos delgados de masas iguales. Los discos son de radios $a = 800$ mm y están unidos rigidamente por una varilla de longitud $2a$. Inicialmente el satélite gira libremente alrededor de su eje de simetría con una frecuencia de 60 rpm. Un meteorito de masa $m_0 = m/1000$ que viaja con una velocidad v_0 de 2000 m/s relativa al satélite, golpea a éste y se queda incrustado en C. Determinense:

- La velocidad angular del satélite inmediatamente después del impacto.
- El eje de precesión del movimiento impuesto, y
- Las velocidades de precesión y de rotación del movimiento subsecuente.



Solución:

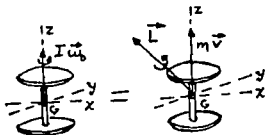
a) Se observa que los ejes mostrados son los ejes principales de inercia para el satélite y escribimos:

$$I = I_x = 1/2 ma^2; I' = I_x = I_y = 2[1/4(1/2 m)a^2 + (1/2 m)a^2] = 5/4 ma^2$$

Se considera que el satélite y el meteorito son un solo sistema. Como no actúan fuerzas externas sobre este sistema, las cantidades de movimiento antes y después del impacto son equipolentes. Si se toman las torcas alrededor de G , podemos escribir:

$$-a \hat{j} \times m_0 v_0 \hat{k} + I \omega_0 \hat{k} = \vec{L}$$

$$\vec{L} = -m_0 v_0 a \hat{i} + I \omega_0 \hat{k} \quad (1)$$



Si se substituyen los valores obtenidos para las componentes de \vec{L} y para los momentos de inercia en las ecuaciones

$$L_x = I_x \omega_x$$

$$L_y = I_y \omega_y$$

$$L_z = I_z \omega_z$$

escribimos:

$$-m_0 v_0 a = I' \omega_x = 5/4 m a^2 \omega_x \quad 0 = I' \omega_y \quad I \omega_0 = I \omega_z$$

$$\omega_x = - (4/5)(m_0 v_0 / (m a)) \quad \omega_y = 0 \quad \omega_z = \omega_0 \quad (2)$$

Para el satélite considerado, la frecuencia de rotación es de 60 rpm, $\omega_0 = 6.283 \text{ rad/s}$, $m_0/m = 1/1000$, $a = 0.800 \text{ m}$, y $v_0 = 2000 \text{ m/s}$; encontramos:

$$\omega_x = -2 \text{ rad/s}$$

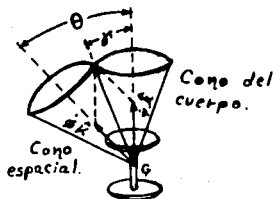
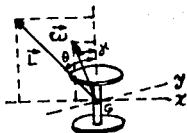
$$\omega_y = 0$$

$$\omega_z = 6.283 \text{ rad/s}$$

$$\omega = (\omega_x^2 + \omega_y^2)^{1/2} = 6.594 \text{ rad/s} \quad \tan \gamma = -\omega_x/\omega_z = +0.3183$$

$$\omega = 6.6 \text{ rad/s}$$

$$\gamma = 17.7^\circ$$



b)

Como en movimiento libre la dirección del momentum angular \vec{L} está fija en el espacio, el satélite tendrá precesión con respecto a esta dirección. El ángulo θ formado por el eje de precesión y el eje z es:

$$\tan \theta = -L_x/L_z = (m_0 v_0 a)/(I \omega_0) = (2 m_0 v_0)/m a \omega_0 = 0.796$$

$$\theta = 38.5^\circ$$

c)

Trazamos los conos en el espacio y en el cuerpo para el movimiento libre del satélite. Utilizando la ley de los senos, calculamos las velocidades de precesión y de rotación.

$$\omega / \sin \theta = \dot{\phi} / \sin \gamma = \dot{\psi} / \sin (\theta - \gamma)$$

$$\dot{\phi} = 3.225 \text{ rad/s}$$

$$\dot{\psi} = 3.759 \text{ rad/s}$$

CONCLUSIONES

Como se pudo observar en los capítulos 3 y 4, los objetivos en cuanto a construcción y funcionamiento del aparato que es la base del presente trabajo, se cumplieron. Pero es interesante hacer hincapié en los siguientes puntos:

a) Las diferencias (relativamente pequeñas) en las velocidades de las trayectorias de los collares se debieron a que se puede reducir la fricción entre las varillas horizontales y los collares, pero no se puede eliminar, sin embargo las desviaciones estándar de los datos, indican que el experimento se puede reproducir.

b) Las trayectorias observadas en los collares son ligeramente curvas, tendiendo a ir hacia afuera, por la fricción entre las varillas y los collares, y en los baleros de la barra vertical central, ambas modifican ligeramente el momentum lineal y el momentum angular, produciendo las pequeñas diferencias.

Una de las características más importantes de la ciencia, es el hecho de que puede modelar y predecir el comportamiento de fenómenos naturales. En la docencia este es un problema capital, dado que los estudiantes no ven la importancia de esto. El presente trabajo tiene además el valor de poder presentar matemáticamente algunos conceptos de la Física y compararlos con la realidad, observando que son muy semejantes. Una aplicación de este modelaje se aprecia en las animaciones por computadora de órbitas planetarias del capítulo II.

Desde el principio del desarrollo de modelos en el capítulo IV, se observa una congruencia en los resultados, viéndose que la velocidad es mayor en su componente trasversa, lo cual provoca que el collar tenga una trayectoria muy cercana al borde de la varilla, es decir, que el ángulo de la trayectoria respecto a la componente trasversa es muy pequeña. En la realidad se observa este fenómeno debido a que el resorte no podía comprimirse demasiado porque el

equilibrio en los ganchos es muy precario.

Se puede observar que la trayectoria es rectilínea independientemente del peso del collar, de la longitud de la varilla, del resorte, etc. porque al no haber fuerzas externas que provoquen una torca, el momentum angular se conserva. Aunque es necesario indicar que la componente trasversal de la velocidad es directamente proporcional al peso del cuerpo que cae, e inversamente proporcional a la longitud de la varilla (por su masa) y a la masa del collar, mientras que la componente radial es directamente proporcional a la constante del resorte y a su deformación, e inversamente proporcional a la masa del collar. Estos últimos son datos útiles para calibrar el aparato, si se desea hacer una práctica.

Se habrá notado que hay un cierto ángulo al momento de tomar la foto, debido a que no se alcanzaba la altura para tomarla de planta. No afecta los resultados, porque no son función de la perspectiva, sino sólo del número de apariciones del collar en la foto y de la distancia total recorrida.

En lo que respecta al método de la conservación del momentum angular y la conservación del momentum lineal, se ve que es de gran ayuda en problemas prácticos de Ingeniería, y no se les da la debida importancia en los cursos de Ingeniería.

BIBLIOGRAFIA.

- 1.-) M. Alonso & E. J. Finn. "FISICA" (Mecánica)
1ª edición, 1970.
Fondo Educativo Interamericano.
- 2.-) F. P. Beer & E.R. Johnston. "MECANICA VECTORIAL PARA INGENIEROS" (Dinámica)
4ª edición, 1985.
Ed. Limusa.
- 3.-) H. C. Bolívar. "VECTORES Y EL ESPACIO EUCLIDIANO TRIDIMENSIONAL"
5ª edición, 1986.
U. N. A. M.
- 4.-) A. C. Clarke. "EL HOMBRE Y EL ESPACIO"
1ª edición, 1979.
Colección Científica de Time - Life.
- 5.-) E. P. Popov. "MECANICA DE MATERIALES"
2ª edición, 1978.
Ed. Limusa.
- 6.-) C. Sagan & J. Norton. "LOS PLANETAS"
1ª edición, 1979.
Colección Científica de Time - Life.
- 7.-) R. T. Weiner & R. L. Sells. "ELEMENTARY CLASSICAL PHYSICS"
1ª edición, 1973.
Allyn and Bacon, Inc.