



01184

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**  
**Facultad de Ingeniería**

1  
2ej

**UN METODO PARA LA AGREGACION DE OPINIONES EN  
LA TOMA DE DECISIONES MULTIATRIBUTO  
CON VARIOS DECISORES**

**MANUELA FOSTER VEGA**

**TESIS DOCTORAL**

**PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE  
POSGRADO DE LA**

**FACULTAD DE INGENIERIA**



8  
4  
10  
E IN N SIND PO  
tas

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

MA



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

01184  
207

**UN METODO PARA LA AGREGACION DE OPINIONES  
EN LA TOMA DE DECISIONES MULTIATRIBUTO CON VARIOS DECISORES**

**MANUELA FOSTER VEGA**

**TESIS DOCTORAL**

**Presentada a la División de Estudios de  
posgrado de la**

**FACULTAD DE INGENIERIA  
de la  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**Como requisito para obtener  
el grado de**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**DOCTOR EN INVESTIGACION DE OPERACIONES**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F. NOVIEMBRE, 1991**

# CONTENIDO

## RESUMEN

## INTRODUCCION

|   |           |
|---|-----------|
|   | 1         |
| <b>I. La Naturaleza de la Toma de Decisiones</b>                                | <b>7</b>  |
| 1.1. Concepciones alternativas de la toma de decisiones                         | 8         |
| 1.1.1. El apoyo a la toma de decisiones a través de mediciones                  | 8         |
| 1.1.2. La toma de decisiones en el marco de la evaluación                       | 8         |
| 1.2. Parámetros básicos en la toma de decisiones                                | 13        |
| 1.3. La Toma de Decisiones con Múltiples Criterios                              | 16        |
| 1.3.1. Principales enfoques multiatributos                                      | 18        |
| 1.3.2. Modelos con incertidumbre  | 21        |
| <br>  |           |
| <b>II. La Toma de Decisiones con Múltiples Decisores</b>                        | <b>22</b> |
| 2.1. La Decisión de Grupo   | 22        |
| 2.2. Métodos para tomar decisiones de grupo                                     | 24        |
| 2.2.1. Técnicas de participación en grupo                                       | 25        |
| 2.2.2. El Proceso de Jerarquización Analítica en la toma de decisiones en grupo | 28        |
| a. Ventajas del PJA   | 29        |
| b. Descripción del método   | 31        |
| c. Utilización del PJA en grupos  | 35        |
| 2.2.3. Métodos de agregación de opiniones                                       | 36        |
| a. Combinación de distribuciones de probabilidad                                | 36        |
| 2.3. El Problema  | 41        |
| <br>  |           |
| <b>III El Método de Agregación de Opiniones</b>                                 | <b>43</b> |
| 3.1. Esquema del método de agregación   | 44        |
| 3.2. Desarrollo del método de agregación  | 46        |
| 3.2.1. Ponderación individual   | 46        |
| 3.2.2. Correlación entre los expertos   | 48        |
| 3.2.3. Etapa de agregación  | 52        |
| 3.2.4. Etapa de selección   | 54        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>IV. Evaluación del metodo</b>   | <b>57</b>  |
| 4.1. Utilidad del método   | 57         |
| 4.2. Ventajas y limitaciones   | 59         |
| 4.3. Análisis de sensibilidad  | 60         |
| 4.3.1. Análisis de casos extremos  | 60         |
| 4.3.2. Estabilidad de las soluciones óptimas                                   | 65         |
| 4.4. El método como función de selección social                                | 71         |
| <br>   |            |
| <b>V. Un Problema de Aplicación</b>  | <b>77</b>  |
| 5.1. Introducción  | 77         |
| 5.2. Las áreas revertidas contiguas a la población de Arraiján                 | 79         |
| 5.3. Antecedentes  | 80         |
| 5.4. Tareas iniciales  | 82         |
| 5.5. El problema   | 87         |
| 5.6. Estrategia de solución  | 87         |
| 5.6.1. Selección de expertos   | 87         |
| 5.6.2. Estructuración del problema   | 88         |
| a. Determinación de zonas de avalúo homogéneo y alternativas                   | 88         |
| b. Determinación de atributos  | 90         |
| 5.6.3. Etapa de ponderación  | 92         |
| 5.6.4. Etapa de agregación de opiniones  | 97         |
| 5.6.5. Etapa de selección  | 101        |
| 5.7. Análisis y conclusiones del ejemplo                                       | 101        |
| 5.8. Documentación complementaria  | 103        |
| <br>   |            |
| <b>CONCLUSIONES</b>  | <b>104</b> |
| <br>   |            |
| <b>APENDICE A. Resultados sobre valores y vectores característicos</b>         | <b>107</b> |
| <br>   |            |
| <b>APENDICE B. Aspectos relevantes del Proceso de Jerarquización Analítica</b> | <b>111</b> |
| <br>   |            |
| <b>REFERENCIAS</b>   | <b>125</b> |

## INTRODUCCION

Las decisiones se toman en casi todas las facetas de la vida, afectando el destino de muchas personas, grupos de interés, empresas u otras entidades, por lo que la elección del curso de acción que responda a la necesidad de la toma de la decisión, debe ser cuidadosa.

Durante las últimas décadas del presente siglo, se desarrolló una teoría de las decisiones que mide la eficiencia de una decisión a través del grado en el que sus consecuencias satisfacen el objetivo u objetivos especificados con anterioridad por la persona o grupo de personas que tomó la decisión. Esta teoría está vinculada principalmente a tres áreas: la teoría de las preferencias y de la utilidad, la teoría de las probabilidades y la teoría de la inferencia estadística.

Los conceptos de valor, utilidad, preferencias y curvas de indiferencia, atribuidos a Adam Smith, fueron utilizados por los economistas del siglo XIX. En 1871, Jevons en su libro *The theory of political economy*, explicó el concepto de utilidad cardinal, es decir, el de las escalas de preferencias. Luego en 1901, en *Principles of economics*, Marshall hace lo propio con el concepto de utilidad ordinal, es decir, el de órdenes de preferencias, por medio de las curvas de indiferencia. A pesar del lenguaje desarrollado aunque controvertible, acerca de la teoría de utilidad, no se le vinculaba al cálculo de las probabilidades conocido en esa época. Desde Pascal y Fermat esta se había desarrollado en forma continua hasta considerarse como una teoría integrada, con grandes posibilidades de aplicación.

J. M. Keynes en *Treatise on probability* (1921) y Jeffreys en *Theory of probability* (1939), sostenían el concepto de probabilidad como grado de creencia. Por el mismo tiempo F. Ramsey y B. De Finetti presentaron

el concepto de **probabilidad subjetiva**, según el cual cada individuo formula sus probabilidades de acuerdo con su disposición para aceptar apuestas imaginarias. El interés por este enfoque y por el argumento bayesiano en esta última década, se debe en gran parte a L. J. Savage quien publicó *The foundations of statistics* (1954) y *The foundations of statistical inference* (1962).

En 1944 el factor de incertidumbre se incorporó a la teoría de utilidad identificando la utilidad con el pago en un juego de azar en *The theory of games and economic behaviour* de Von Neumann y Morgenstein. Posteriormente, en 1950, Abraham Wald en *Statistical decision functions* presenta un análisis acerca del vínculo de la utilidad con la inferencia estadística, que hace resurgir el interés por el enfoque bayesiano. Este interés se plasma en varias obras publicadas por Howard Raiffa y Robert Schlaifer. El desarrollo de estos vínculos reforzó y habilitó a la teoría de decisiones para dar respuesta a los frecuentes problemas que se presentan en condiciones de incertidumbre.

La necesidad de tomar decisiones se origina por una situación de insatisfacción con las condiciones actuales o por el deseo de mantener la condición actual, ante la posibilidad de cambios desfavorables en el futuro. El decisor, motivado por estas circunstancias, usualmente se enfrenta a sistemas complejos formados por componentes interrelacionados que deben ser cuidadosamente analizados. El cambio en los valores y en la manera de pensar de las personas, ha convertido en problemas de poco interés a aquellos determinados por un solo criterio de selección. Lo real e importante es que los individuos y las organizaciones se enfrentan a situaciones que involucran **múltiples** objetivos, atributos o metas.

El estudio de los sistemas en los que la selección del curso de acción adecuado está determinado por varios criterios, le corresponde al

área de la *Toma de Decisiones con Múltiples Criterios* (TDMC) el cual está íntimamente ligado a otras áreas: *Toma de Decisiones Multiatributo*, si el número de alternativas -caracterizadas por un conjunto de atributos- es finito; *Teoría de Utilidad Multiatributo*, que procura la evaluación de la utilidad esperada de las alternativas; *Toma de Decisiones Multiobjetivo*, si el problema involucra un número infinito de alternativas dado un conjunto de objetivos que actúan como restricciones y/o metas, y la *Teoría de Selección Social* que analiza el problema general de hallar medios apropiados para incorporar las opiniones y puntos de vista de los individuos respecto a las alternativas, de manera que se maximice la satisfacción de la colectividad.

Una revisión de la literatura acerca de la TDMC muestra que además de su desarrollo en la Investigación de Operaciones, ha ofrecido grandes aportes en otros campos como la psicología social, la ciencia regional y la administración de negocios. En 1972 se realizó la primera conferencia internacional en TDMC en la se lanzó oficialmente, según se ha convenido, la hasta entonces no-organizada teoría de decisiones con múltiples criterios, constituyéndose en el área de investigación de operaciones de mayor rápido crecimiento en Europa en los últimos quince años.

Una situación que se presenta a menudo en los problemas de toma de decisiones, es aquella en la que la responsabilidad de la decisión descansa en un grupo de personas. Es la condición que impera en los grupos directivos de empresas, sociedades, sindicatos, en las comunidades que se rigen por decisiones que emanan de juntas comunales, en los patronatos, grupos familiares y en otra gran cantidad de organizaciones.

La tarea de tomar la decisión correcta se hace cada vez mas complicada para los grupos de decisores. Por ejemplo, la selección del ganador

del Premio Nobel en cualquier disciplina, de la persona idónea para ocupar una cierta posición o de la política de acción que debe adoptar alguna empresa, se dificultan por la existencia de varias alternativas bien calificadas, por la usual presencia de intereses encontrados por parte de los decisores y más aún, por la necesidad de considerar diversos atributos para la decisión. Es de gran importancia entonces, contar con métodos para tomar decisiones capaces de fusionar concertadoramente las variadas opiniones y puntos de vista de los decisores. Este trabajo va dirigido hacia la solución de un problema de fusiónamiento de opiniones.

Casi la totalidad de los métodos para la toma de decisiones en la presencia de múltiples atributos están dirigidos al caso de un único decisor. Lo usual es que la extensión al caso de varios decisores se efectúe añadiendo al proceso de captación de las opiniones individuales, una etapa de fusiónamiento de preferencias, que en la mayoría de los casos considera una ponderación de las mismas de acuerdo con la experiencia y/o posición jerárquica de los decisores.

Si las preferencias se manifiestan en forma numérica, el fusiónamiento se puede limitar a una promediación, ponderada o no, de tipo aritmética, geométrica, logarítmica, etc., de las opiniones. Algunas de estas formas de fusiónamiento carecen de justificación e interpretación. Sencillamente, ofrecen una solución agregada del problema. Si se desean ponderar las preferencias, no existe una técnica formal para determinar los factores de ponderación y las que se utilicen son, por lo mismo, bastante subjetivas.

En otros métodos, la opinión del grupo se alcanza luego de debates e intervenciones que van condicionando al decisor hacia una opinión de consenso -por ejemplo, la técnica Delphi-. Además de las desventajas propias de los métodos, si las condiciones en las que se dan los debates no son las mejores, estas formas no son nada aceptables.

En este trabajo se presenta un método para agregar opiniones que las pondera, no de acuerdo con el que las emite, sino tomando en cuenta a la propia opinión. Además, evita que los decisores sean sometidos a las presiones propias de las sesiones de intercambio de ideas y de los debates. El método ofrece una solución al problema de evaluar alternativas en la presencia de múltiples atributos y múltiples decisores, todos con igual importancia, tomando en consideración la relación que existe entre ellos.

El método que se plantea aprovecha las ventajas que ofrece el Proceso de Jerarquización Analítica (PJA) como técnica para la obtención de las opiniones individuales acerca de las alternativas y para desarrollar una forma de medir la correlación entre los decisores. Considerando que las opiniones de cada decisor son probabilidades subjetivas acerca del desempeño de las alternativas, utiliza el enfoque bayesiano como herramienta para la agregación de estas opiniones. Por cada decisor, el proceso conduce a una opinión agregada, cada una de las cuales puede ser, en alguna medida la opinión del grupo. El grado de desacuerdo de cada opinión agregada con respecto a las ordenaciones de las alternativas propuestas inicialmente por los decisores, determina finalmente la ponderación y ordenación del grupo.

Es decir, el método permite que cada decisor manifieste su punto de vista acerca del problema en cuestión sin presiones ni ingerencias externas y conduce a una opinión agregada del grupo, al combinar las opiniones individuales de los decisores. La utilización del enfoque bayesiano produce fusiones lineales ponderadas de las opiniones, cuyos factores de ponderación se interpretan como una medida de la cantidad de información adicional de que provee cada experto sobre la de los otros. Puesto que en el planteamiento del problema se pide una ordenación de las alternativas, condición necesaria pero no suficiente de la ponderación, este criterio se utiliza para la definición final

de la propuesta del grupo.

El trabajo se estructura de la siguiente manera: En el capítulo I se analiza el término toma de decisiones desde sus dos concepciones: Como la acción de elegir entre varias alternativas, apoyada por acciones de medición y como un proceso en el marco de la evaluación. Se discute el caso particular en el que la decisión está fundamentada en múltiples criterios y con mayor desglose, el caso de múltiples atributos.

El capítulo II se dedica a analizar el problema de la Toma de Decisiones con Múltiples Decisores. Se describen las clases de técnicas utilizadas para alcanzar una decisión fusionada del grupo de decisores y se analiza el papel actual del PJA como técnica para obtener opiniones de grupo y del enfoque bayesiano como método para la agregación de opiniones. A la luz de una serie de desventajas que presentan los métodos usuales para la toma de decisiones en grupo, se plantea la necesidad de un método que salve esos inconvenientes.

En el capítulo III se desarrolla un método de agregación, que responde a la problemática planteada en el capítulo anterior y se definen los elementos necesarios para su formulación detallada y completa. El capítulo IV se dedica a evaluar el método. Se analizan su utilidad, ventajas y limitaciones y se discute su sensibilidad al tipo de opinión que debe procesar y a los posibles cambios en las opiniones. Por último, se estudian sus propiedades, al definirse una función de bienestar social en la etapa de selección.

El trabajo se complementa con un capítulo (V) en el que se documenta un problema de aplicación real y de actualidad, y se le da solución utilizando el método propuesto, con la ayuda de dos paquetes de computación confeccionados como soporte del método.

**NATURALEZA DE LA TOMA DE DECISIONES**

Los problemas de toma de decisiones se presentan en casi todas las facetas de la vida. Las decisiones que se tomen para dar solución a estos problemas afectan a muchas personas, grupos de interés, empresas u otras entidades, por lo que la ejecución de la acción de decidir debe ser cuidadosa. La intensidad del impacto debido a los cambios ocasionados por las decisiones depende de su vinculación con aspectos significativos del sistema en el que se enmarca el problema.

Este capítulo presenta un marco de referencia general acerca de la toma de decisiones, desde sus dos concepciones usuales: como la acción de elegir entre varias alternativas y como el proceso que se realiza en el marco de la evaluación. Bajo esta última concepción, se describen las componentes principales del proceso de toma de decisiones y la forma como están interrelacionadas. Las características del problema de toma de decisiones determina el modelo de toma de decisión que se utilice; particularmente se discute el caso en el que la decisión está fundamentada en varios criterios, ya sea en los casos de múltiples objetivos o múltiples atributos. El capítulo concluye con el análisis de una taxonomía de los principales métodos utilizados para resolver problemas de toma de decisiones multiatributos.

## 1.1 CONCEPCIONES ALTERNATIVAS DE LA TOMA DE DECISIONES

El término *toma de decisiones* tiene varias concepciones:

### 1.1.1. El apoyo a la toma de decisiones a través de mediciones

En buena parte de la literatura, la toma de decisiones (o el análisis de decisiones) se interpreta como la acción de **elegir** entre varias alternativas. En este marco, la elección está apoyada por acciones de medición de las alternativas y/o de los atributos, a través de una función objetivo, una función de utilidad, una función de valor, entre otras. Es el caso, por ejemplo, de las programaciones lineal, dinámica, no lineal, los métodos de sobreclasificación y el proceso de jerarquización analítica.

La variedad de técnicas de medición se ha originado por la consideración de algunos parámetros, tales como: el riesgo o la incertidumbre en las preferencias, el número de atributos tomados en cuenta, el número de decisores, la independencia preferencial entre los atributos, y otra cantidad de aspectos. El resultado es una medida única para cada alternativa, la cual las convierte en elementos comparables cualitativamente para los efectos de la elección. Es oportuno señalar que la sola jerarquización de las alternativas no siempre es suficiente para tomar una decisión.

### 1.1.2. La toma de decisiones en el marco de la evaluación

En un sentido más amplio, la toma de decisiones se interpreta como el proceso complejo e iterativo que en general está constituido por las siguientes etapas: reconocimiento de la urgencia de un cambio; definición del problema de decisión; determinación de criterios y generación de alternativas; valoración de las consecuencias de las

alternativas; selección del curso de acción según un modelo de decisión; implantación y evaluación. Estas etapas se interrelacionan como se muestra en la figura 1, esquema que es válido en todo proceso de toma de decisiones. Sin embargo, cada componente debe desglosarse para ajustarse a las características particulares del problema de decisión a resolver. A continuación se hace una descripción de cada uno de estos componentes.

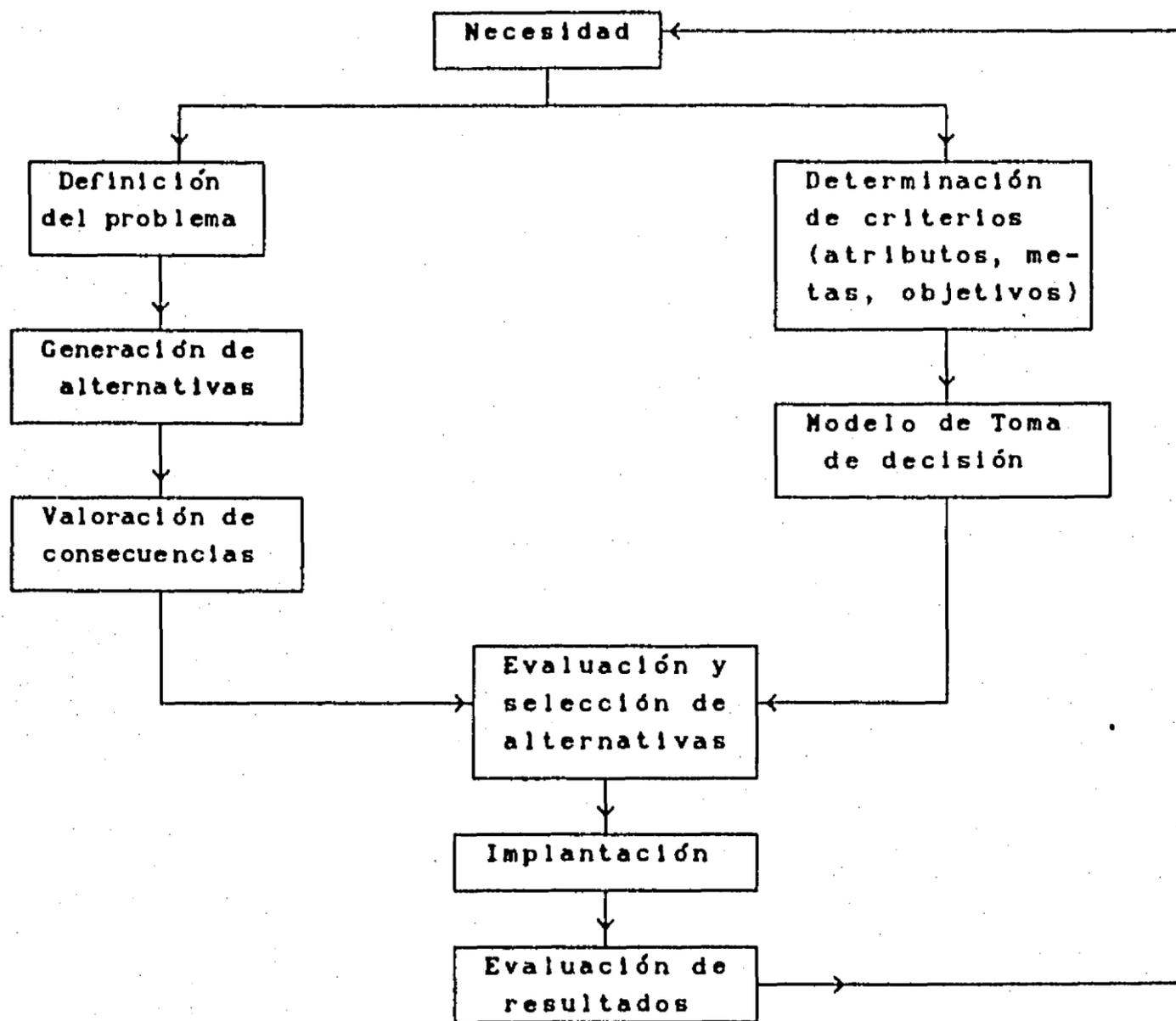


figura 1

Esquema del proceso de toma de decisiones

El proceso de toma de decisiones se inicia con la percepción de la necesidad de un cambio, con la existencia de un estado de no satisfacción con la situación actual o sencillamente con el deseo de conservar las condiciones actuales ante la evidencia de posibles cambios no favorables en el futuro. En otras palabras, surge la necesidad de tomar una decisión cuando existe una discrepancia entre lo que se tiene y lo que se desea, o entre lo favorable actual y lo que no se va a tener en un futuro.

Dada entonces la necesidad de resolver una situación problemática, un paso esencial en el proceso de decisión es la indagación y análisis crítico de las causas que originan el estado inaceptable del sistema. En algunos problemas de decisión sencillos, la realización exitosa de esta etapa de diagnóstico completa la solución del problema, dado que el entendimiento cabal de las causas de la dificultad, inmediatamente señala la acción adecuada para su superación. En la mayoría de casos complejos, esta etapa puede no indicar directamente la solución, pues las causas del problema pueden estar en diferentes niveles de afectación y su tratamiento requerir procedimientos más elaborados. La etapa de diagnóstico está inmersa en un proceso de análisis de la estructura del sistema en que se plantea el problema, desde su organización, componentes, jerarquías, funciones, limitaciones, alcances, políticas, entre otros. El resultado de todo este proceso es la completa formulación del problema a resolver.

Como se mencionó, el proceso de toma de decisiones se activa por la urgencia de satisfacer algunas necesidades que, en la realidad no siempre es posible lograr en su totalidad. En este proceso, una etapa fundamental es la dedicada al establecimiento de niveles esperados de aspiraciones en la satisfacción de esas necesidades, la determinación de tasas de sustituciones entre estos niveles y otros factores que también condicionan la solución al problema.

La base de la formulación de los **criterios de decisión** (i.e. los objetivos, metas, atributos, variables) que rodean a la definición del problema, está en la respuesta a algunas preguntas claves como: ¿Cuáles aspiraciones se tratan de alcanzar con las decisiones? ¿Cuáles son los intereses personales de grupo u organizacionales que prevalecen y a quiénes dentro de estos se debe satisfacer? ¿Qué prioridades tienen cada uno de estos intereses? ¿Cómo se puede medir si se ha alcanzado o no lo que se pretende? ¿Qué estándares se usarán para medir el logro de los propósitos y la satisfacción de los intereses?

Los **objetivos** son un conjunto de condiciones de mandato y de restricción de una decisión, adoptados por el tomador de decisiones, que le permiten llevar a cabo compromisos razonables acerca de las demandas inmediatas y potenciales hechas por el sistema.

Para medir el alcance de los objetivos de decisión se recurre a **categorías, factores o atributos**, que se usarán para diseñar el modelo adecuado para la solución del problema. Los atributos pueden ser del tipo SI o NO, o bien del tipo que admite una evaluación numérica en alguna clase de escala de medición. Salvo los correspondientes a sistemas físicos como los de medición de voltaje, intensidad, tiempo, velocidad, etc, en la práctica, los criterios de medición son subjetivos. La objetividad en la medición es una meta casi inalcanzable en sistemas humanos. De aquí que se puede encontrar que distintos decisores califiquen el alcance de un objetivo según cierto atributo, de manera distinta. Por otro lado, algunos criterios pueden tener mayor relevancia que otros, por lo que puede ser necesario definir relaciones de sustitución entre ellos.

Por lo general el decisor posee cierto conocimiento y experiencias que le permiten listar un conjunto de **alternativas**. Las alternativas o

cursos de acción son políticas diferentes a través de las cuales se pueden alcanzar los objetivos que se persiguen en la solución del problema. Cada alternativa conduce a uno o varios resultados que deben ser **valorados** de antemano según se formula en el modelo de decisión.

Un **modelo de decisión** es una estructura en cuyo contexto es posible realizar las actividades de análisis y evaluación de las posibles alternativas de solución al problema de decisión, y el estudio de sensibilidad de los resultados, a las desviaciones a las normas establecidas. Para esto, el modelo debe mostrar la relación entre las variables que intervienen en el problema, los criterios, las normas y restricciones y demás rasgos que definen el problema.

Con base en el modelo de decisión, las alternativas son sometidas a un proceso de **evaluación**, para el que se consideran todos los elementos que caracterizan al problema y que forman parte de la estructura del modelo. Al término de esta etapa se procede a la **selección** de la (o las) alternativa(s) que obtuvieron mejor calificación en la evaluación.

Al **implantar** la alternativa elegida, en el sistema, se producen resultados que deben satisfacer las necesidades originales. Se reinicia el proceso de **evaluación** en el cual se mide el grado en el que esa alternativa satisface tales necesidades. De la comparación de los resultados logrados y los niveles de satisfacción de los objetivos, indicados de antemano, se decide si dar por terminado el proceso de decisión o modificar el problema original pues no se logró lo esperado, e iniciarlo nuevamente.

## 1.2. PARAMETROS BASICOS EN LA TOMA DE DECISIONES

Cada problema de toma de decisiones presenta algunas características que lo distinguen de otros. En este sentido, los problemas de decisiones se pueden clasificar de acuerdo con las siguientes características del proceso de decisión, las cuales determinan la forma del modelo de toma de decisión que debe utilizarse (fig. 2). [Para un análisis detallado del tema ver Van Gigch, 1981 ]. A continuación se describen cada uno de estos componentes.

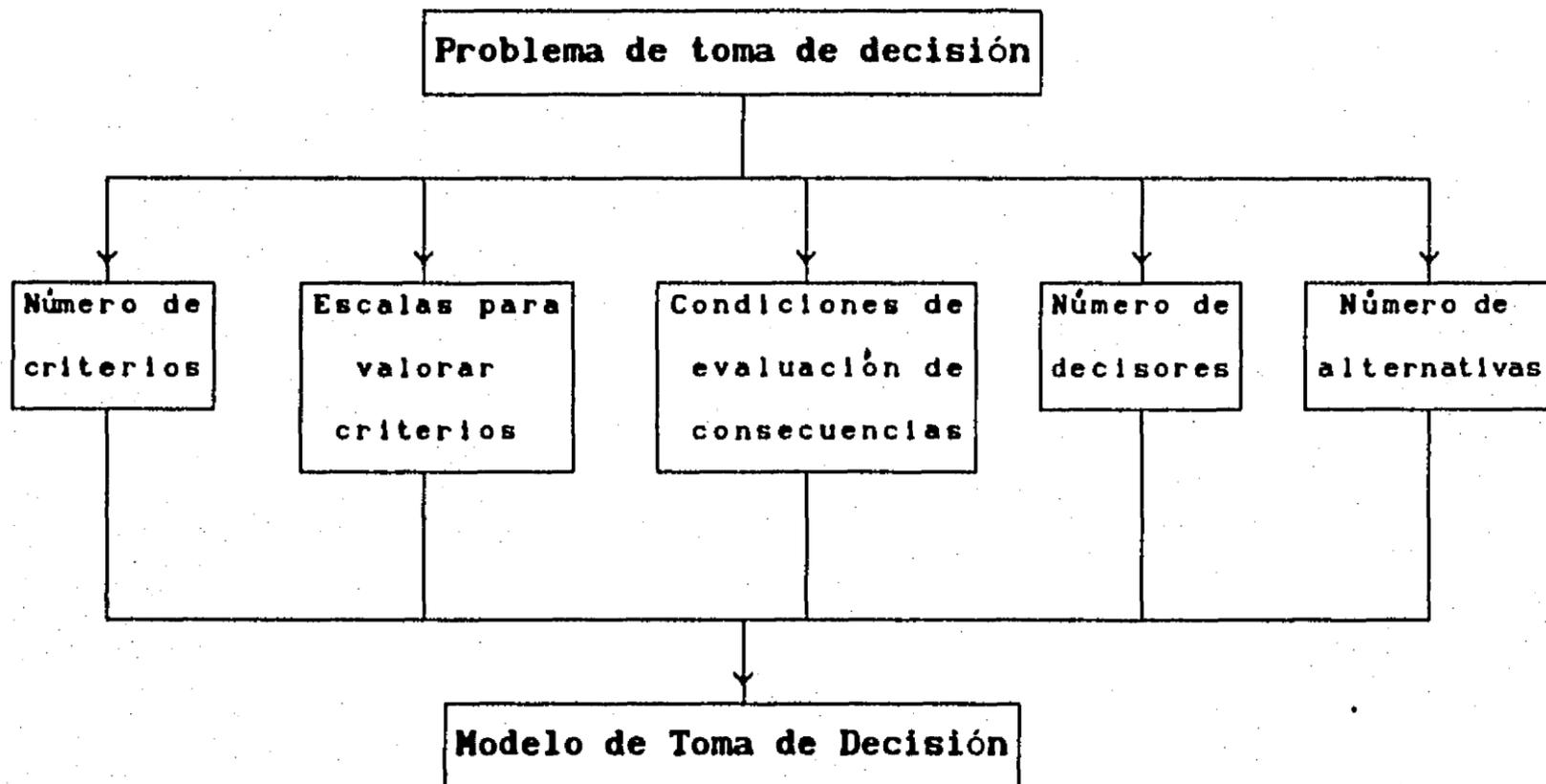


figura 2

Parámetros para la determinación del modelo de toma de decisión

- El número de criterios que fundamentan a la decisión.

El número de criterios (objetivos, atributos, metas) bajo los cuales

se efectúa la decisión, es una característica fundamental para la clasificación de los problemas de toma de decisiones. Los problemas basados en varios criterios son los más destacados. El uso del enfoque de sistemas para el análisis de problemas permite un mejor reflejo de la realidad que rodea al problema y en consecuencia, obliga a que tengan que considerarse múltiples criterios en la decisión.

■ *Las escalas de valores que se toman en cuenta para decidir.*

Los criterios que se utilicen para determinar la decisión, pueden ser medidos por medio de escalas nominales, ordinales, de proporcionalidad, por intervalos, etc. Claro está, que la(s) escala(s) que se use(n) depende del tipo de criterio que se desee valorar.

■ *Las condiciones bajo las cuales se evalúan las consecuencias de las alternativas*

Cuando el decisor evalúa los resultados a los que conducen las alternativas, actúa bajo una de las siguientes condiciones:

a) Puede predecir los resultados con certeza completa. Equivalentemente, es razonablemente correcto en sus apreciaciones, tiene un buen entendimiento de la situación actual y del funcionamiento del sistema. En estas condiciones, el decisor puede efectuar estimados reales y se dice que está decidiendo bajo **certeza**.

b) A pesar de que no puede predecir el resultado con absoluta certeza, conoce la distribución de probabilidad de los resultados. Puede usar esta distribución para hacer sus estimaciones y decidir bajo condiciones de **riesgo**.

c) El decisor no tiene conocimiento de las distribuciones de probabilidad de los resultados por falta de datos, por inestabilidad del sistema, etc., pero posee alguna estrategia que le permite llegar a un valor numérico de los resultados. Actúa bajo condiciones de **incertidumbre**. Es la situación que presentan la mayoría de los problemas de toma de decisiones.

■ *El número de personas que efectúa la decisión.*

La formulación de decisiones se complica con el número de personas que intervienen. El principal problema es la individualidad de los objetivos y la forma como se combinan y resuelven los posibles conflictos.

■ *El número de alternativas a considerar.*

El número de alternativas que conforman el conjunto de soluciones posibles al problema de decisión puede ser finito o infinito. Esta condición distingue a dos grandes áreas en la toma de decisiones en la presencia de varios criterios.

La combinación de dos o más de estas características han provocado el desarrollo de una amplia variedad de métodos para ayudar a la toma de la decisión. En secciones posteriores se presentan con cierto detalle los casos de problemas basados en varios criterios y los referentes a la existencia de múltiples decisores.

### 1.3. LA TOMA DE DECISIONES CON MULTIPLES CRITERIOS

Los esfuerzos para introducir el concepto de múltiples criterios dentro del proceso normativo de toma de decisiones se iniciaron en las últimas dos décadas. Zeleny, M. en uno de sus trabajos (1984), señala que las Ciencias Operacionales tales como la investigación de operaciones, la ciencia de la administración y el análisis de sistemas, han dedicado la mayor parte de su historia a problemas caracterizados por un solo criterio de selección. Indica además, que estas ciencias tratan con problemas de evaluación y búsqueda, relacionados con problemas simples de interés práctico limitado, a pesar de que todas las decisiones públicas y privadas, individuales y colectivas están caracterizadas por múltiples criterios, usualmente en conflicto. En muy pocos problemas de interés se encuentra un único criterio de selección. Individuos y organizaciones se enfrentan a múltiples objetivos, atributos o metas.

Los problemas en el área de la **toma de decisiones con múltiples criterios (TDMC)** son extensamente diversos. Sin embargo, aún dentro de la diversidad, todos los problemas que se consideran en ella, comparten algunas características comunes:

#### *Objetivos/atributos múltiples .*

Cada problema tiene objetivos/atributos múltiples que deben ser generados por el tomador de decisiones para la conformación del mismo.

#### *Conflicto entre criterios.*

Usualmente los múltiples criterios a considerar están en conflicto.

#### *Unidades de medición variadas.*

Los objetivos/atributos tienen diferentes unidades de medición.

### *Diseño/selección.*

Las soluciones a estos problemas son de diseño de la mejor alternativa o bien de selección de la mejor entre un número finito de ellas previamente especificado. Los procesos de TDMC se refieren al diseño/búsqueda de una alternativa que sea la más atractiva según todos los criterios.

El número de posibles alternativas de solución al problema de toma de decisión multicriterio, define dos grandes categorías: El área de la *Toma de decisiones multiobjetivo* que se dedica a los problemas con un número infinito de alternativas y el área de la *Toma de decisiones multiatributo* involucrada con los problemas con un número finito de alternativas. Convencionalmente, ambos grupos de problemas asumen un único decisor o al menos un conjunto de opiniones unificadas.

El propósito de los modelos de toma de decisiones multiobjetivos (TDMO) es el diseño de la alternativa, considerando las distintas interacciones dentro de las restricciones del diseño, que mejor satisfaga al decisor en su forma de alcanzar algunos niveles aceptables de un conjunto de objetivos cuantificables. Los métodos de TDMO comparten algunos rasgos : Un conjunto de objetivos cuantificables; un conjunto de restricciones bien definidas y un proceso para obtener alguna información implícita o explícita, acerca de las tasas de sustitución entre los objetivos establecidos cuantificables o no. Los problemas pertenecientes a esta área se resuelven utilizando programación matemática [Steuer, 1986].

El rasgo distinguible de los modelos para la toma de decisiones multiatributos (TDMA) es que usualmente existe un número limitado de alternativas predeterminadas. Estas están asociadas a un nivel de logro de los atributos (no necesariamente cuantificables) que sirven de base para la toma de las decisiones. La selección final de la

alternativa, se efectúa con la ayuda de comparaciones inter e intra atributos que pueden estar vinculadas a tasas de sustituciones implícitas o explícitas.

### 1.3.1. Principales enfoques multiatributos

Las opiniones de los decisores varían en forma y profundidad. Las preferencias se pueden indicar a través de los atributos o de las alternativas, y para cada uno de estos medios existen varias formas de ofrecer la información acerca de las preferencias.

Los métodos TDMA se introducen para enfrentarse a estas diversas situaciones en las opiniones. La figura 3 muestra una taxonomía (Ching-Lai y Yoon, 1981) de los métodos para la toma de decisiones multiatributos, cuya estructuración se ha efectuado en tres niveles:

- I. El tipo de información que requiere el decisor: ninguna información o información sobre los atributos o sobre las alternativas.
- II. Los rasgos sobresalientes de la información requerida.
- III. Los principales métodos en las ramas formadas de los niveles I y II.

Seguido se hace un comentario general acerca de la clasificación en el nivel I.

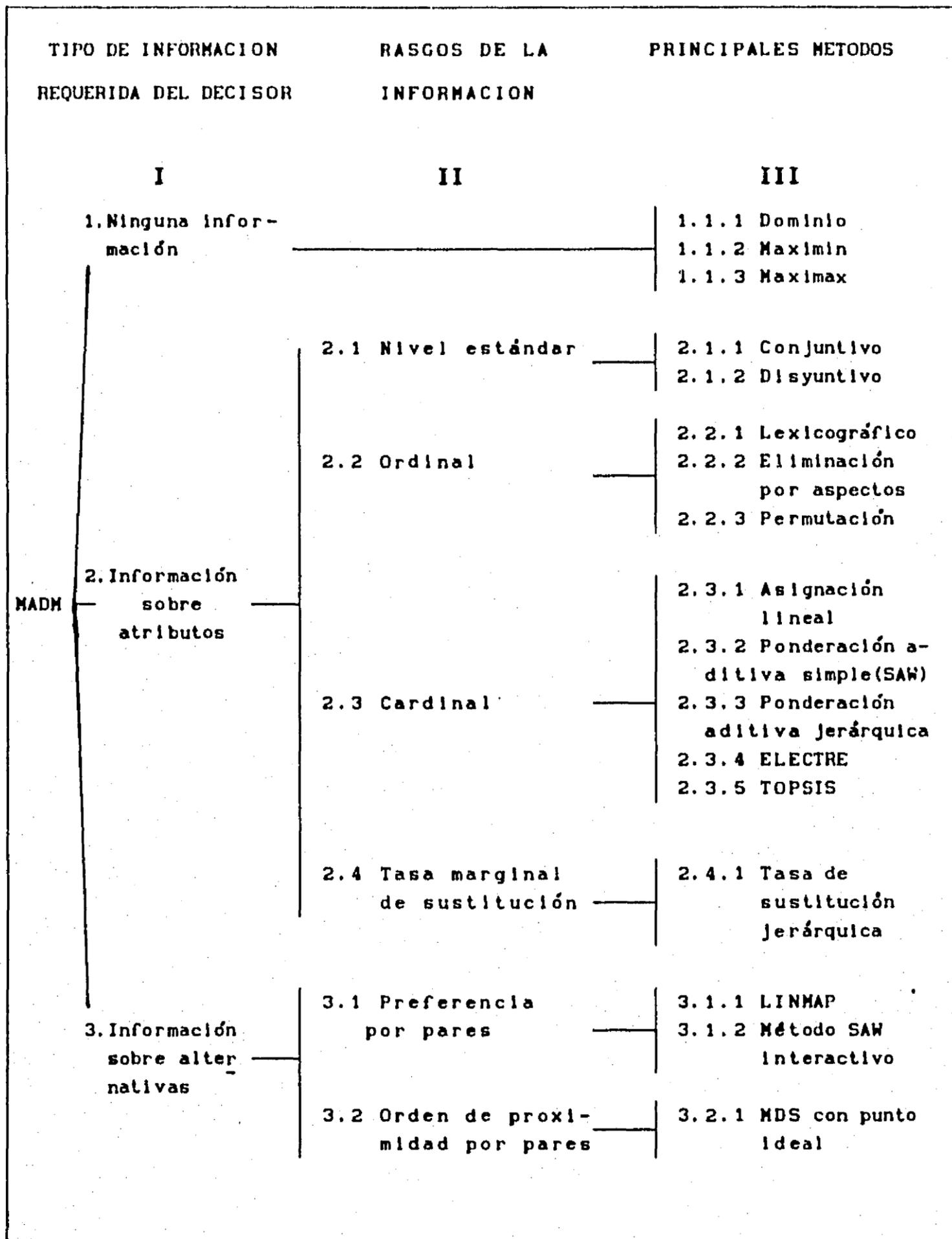


figura 3

Una taxonomía de los métodos de TDMA

## Métodos basados en información sobre los atributos

La información acerca de los atributos se puede expresar de varias formas:

1) en el nivel estándar de cada atributo: el decisor establece normas para ser aplicadas a los valores de ciertos atributos (p.e. el precio no debe exceder \$600,000.);

2) por preferencia ordinal acerca de la relativa importancia de cada atributo: los atributos se ordenan en término de importancia según una escala ordinal;

3) por preferencia cardinal sobre la relativa importancia de cada atributo: el decisor asigna pesos según la importancia de cada atributo, y

4) conforme la tasa marginal de sustitución entre atributos: el decisor establece la tasa marginal sobre la cual está dispuesto a sustituir un atributo por otro.

Los niveles estándar o la información de preferencia ordinal se utilizan en los modelos no compensatorios (no aceptan el manejo de niveles de intercambio entre atributos), mientras que los modelos compensatorios requieren de la preferencia cardinal o de la tasa de sustitución.

Uno de los métodos de esta categoría, clasificado como de ponderación aditiva jerárquica, y que exige una especial atención para los fines de este trabajo, es el *Proceso de Jerarquización Analítica* propuesto por Thomas L. Saaty, y del cual se hablará más adelante.

## Métodos basados en información sobre las alternativas

Los métodos de esta clase requieren que el decisor sea apto para indicar sus preferencias acerca de las alternativas. Esto se puede

realizar determinando superficies de indiferencia que muestren la combinación de valores de atributos igualmente preferidos, para luego, sobre esas superficies, localizar y comparar a las alternativas, o proponiendo una alternativa ideal que sirva de base para comparar a las alternativas vía una distancia.

### 1.3.2. Modelos con incertidumbre

Todos los métodos presentados son aplicables a modelos de selección con certeza que involucran alternativas multiatributos. La presencia de incertidumbre en un modelo multiatributo puede darse en dos formas: incertidumbre sobre las consecuencias de las acciones alternativas o incertidumbre acerca del valor de los atributos. La **Teoría de Utilidad Multiatributo** fue creada para tratar el primero de los casos: Se asigna una utilidad adecuada a cada posible consecuencia y se calcula la utilidad esperada de cada alternativa, el mejor curso de acción será tomar aquella alternativa con la mayor utilidad esperada. La dificultad de este método es la determinación de esa adecuada función de utilidad. Dos de sus proponentes, Keeney y Raiffa (1976), lo han descrito extensamente como una forma adecuada para ayudar en el proceso de decisión.

" La Teoría de Utilidad Multiatributo es el enfoque privilegiado de los investigadores americanos en análisis multicriterio, pero es mucho menos usada en Europa, excepto por los economistas para los que la teoría de utilidad es una herramienta clásica " (Vincke, 1986).

Las investigaciones para el tratamiento de incertidumbre acerca del valor de los atributos son muy escasas. En el capítulo III de este trabajo se presenta un método para la toma de decisiones fundamentado en la presencia de incertidumbre acerca del valor de los atributos y de las alternativas.

## CAPITULO II

### LA TOMA DE DECISIONES CON MULTIPLES DECISORES

El problema de toma de decisiones, en el caso en que son varias las personas con la responsabilidad de decidir, merece atención especial. Una vez que cada una de estas personas manifiesta su opinión acerca del problema de decisión, estas deben ser procesadas, de manera que se obtenga una decisión de grupo. En este capítulo se aborda este problema. Se presenta una revisión de los principales métodos utilizados para la fusión de opiniones, destacando sus ventajas y desventajas en el contexto de su clasificación de acuerdo con la forma como se manifiestan las opiniones por parte de los decisores. Considerando su importancia se presentan los principios del Enfoque Bayesiano como método para la agregación de opiniones y los métodos para decisiones de grupo, en especial el Proceso de Jerarquización Analítica.

En la revisión se señalan algunas desventajas que presentan los métodos usuales para la toma de decisiones de grupo y se induce a plantear la necesidad de hallar un método que dé solución a este tipo de problemas y que supere estas desventajas.

#### 2.1 LA DECISION DE GRUPO

El cambio de situación de la de un solo tomador de decisiones a la de múltiples decisores introduce una gran cantidad de complejidades en el análisis y solución de un problema de toma de decisiones. Del problema de seleccionar la alternativa preferida o de ordenar un

conjunto de ellas de acuerdo con la estructura de preferencia de un individuo, se pasa al de tomar en cuenta los conflictos preferenciales entre varios individuos, que tienen objetivos, metas e intereses diferentes.

Una **decisión de grupo** es usualmente entendida como la reducción de las preferencias individuales diferentes acerca de objetos de un conjunto dado, a una única preferencia colectiva o preferencia del grupo.

El origen de la **necesidad de agregar las opiniones** es diverso. Una situación podría ser la siguiente: Estando ante un problema complejo, el interesado en su solución (que llamaremos *decisor*) procura el consejo de un grupo de expertos, con el propósito de incorporar sus opiniones a la suya y producir una opinión actualizada. Otra situación distinta se presenta cuando un grupo de personas desea combinar sus opiniones a fin de obtener *una opinión del grupo*. Este caso se ejemplifica en el Problema del Jurado de Savage (1954) en el que un comité o parlamento necesita resumir posibles preferencias en conflicto, de sus miembros, al final de una jornada.

En ambos casos hay que destacar el hecho poco realista de que uno de los expertos tiene la verdad absoluta. Lo usual es que cada uno de los consultados cuente con información desconocida para el resto de los del grupo, que puede contribuir a una mejor opinión final.

Por otra parte, la gran variedad de situaciones que rodean a los problemas de fusiónamiento de preferencias, la manera como son emitidas las opiniones, el hecho de que los expertos estén aislados o no al momento de opinar, el número de criterios que fundamentan a la decisión, si los expertos se consideran igualmente importantes, entre otros, y la gran cantidad de métodos que se han desarrollado para considerar estos aspectos, parecen descartar la existencia de una forma racional única de lograr una opinión unificada. Aquí debemos

citar que Lehrer (1975, 1976, 1983) ha hecho grandes esfuerzos para probar que esta forma racional sí existe. La idea más generalizada es que cada método es adecuado a situaciones muy particulares de los problemas.

Obviamente, las dificultades que trae consigo la solicitud y representación de las opiniones de una persona, se heredarán en el caso en el que la consulta se hace a un grupo de ellas. De hecho, la forma en que se expresen las opiniones de cada miembro del grupo, de alguna manera influye en la determinación del método de agregación. De manera natural, la forma como se represente la opinión fusionada, debe ser la misma que presentan las opiniones particulares.

## 2.2 METODOS PARA TOMAR DECISIONES DE GRUPO

Los miembros de un grupo usan diversas técnicas para alcanzar una decisión final (Ching-Lai y Ming-Jeng, 1988), que se pueden agrupar en: la teoría de selección social, la teoría de juegos y el análisis de la opinión de expertos y/o de la participación en grupo.

A. **La teoría de selección social:** (Fishburn, 1971, 1973, 1974; Arrow, 1951; Blin y otros, 1975; Brightwell y Cook 1978; Cook y Seiford 1982; Armstrong, Cook y Seiford, 1982, entre otros). Esta teoría se centra en la votación, método utilizado para la toma de decisiones en grupo en una sociedad democrática, y cuyo resultado es considerado como una expresión de la voluntad de la mayoría. En este método, los criterios a considerar no aparecen explícitamente en el conteo de los votos emitidos, sino que se resumen en la mente del votante para construir una función de valor que moldeará su voto. El resultado depende del método de votación empleado, pudiéndose llegar a una paradoja conocida como el *Efecto Condorcet*.

B. **Teoría de Juegos:** Es una técnica matemática usada para analizar situaciones de conflicto entre los intereses propios y los valores de las personas. Los supuestos básicos de esta teoría matemática son simples pero los resultados son difíciles de aplicar a problemas de la vida real (Luce y Raiffa, 1967).

C. **El análisis de la opinión de expertos y/o de la participación en grupo:** La primera conduce a la toma de decisiones hacia el diseño de una alternativa. Específicamente, está relacionada con la construcción de objetos suplementarios, los cuales pueden ser nuevos diseños o nuevas técnicas de solución. La segunda vincula a grupos que tienen intereses comunes (como comunidades u organizaciones), hacia la toma de las decisiones.

Veamos con detalle estos dos grupos de técnicas.

#### 2.2.1. Técnicas de participación en grupo

Las técnicas de participación en grupo, se identifican como **MÉTODOS DE TOMA DE DECISIONES EN GRUPO.**

Por un lado, algunos de estos métodos procuran *opiniones de consenso o de compromiso*. Puede ocurrir que estos métodos sean aplicados en grupos bajo condiciones ideales:

El grupo de consultados es pequeño, bien informado, con objetivos comunes, altamente motivado y de acuerdo acerca de los aspectos básicos a ser tratados. Además, los integrantes están dispuestos a participar plenamente en un proceso cuyos resultados, en cierto modo, determinarán sus actividades futuras, sin importar las diferencias de preferencias involucradas en el proceso que condujo a los resultados. También idealmente, el grupo es suficientemente paciente para

reconsiderar los temas a fin de que, a través de iteraciones, las diferencias de preferencias remanentes sean debatidas y se alcance un acuerdo o al menos el rango de diferencias se reduzca.

Bajo este escenario es posible llegar a una buena decisión conjunta por consenso, pues los participantes son reunidos para trabajar alrededor de una preferencia común y el ambiente puede ayudar a construir una atmósfera creativa conforme van enriqueciéndose las ideas de unos con las de los otros.

Lo real es que a menudo los participantes tienen intereses, influencias y perspectivas desiguales; también, los conflictos intragrupalles usuales afectan e imposibilitan el poder adoptar alguna decisión adecuada. El procedimiento consensual basado en el intercambio de ideas con miras al logro de una preferencia común, demanda de los participantes habilidad para expresar la propia, independientemente de las de la mayoría y poder rechazar aquellas opiniones que considere no aceptables; sin estas aptitudes, algunos consultados pueden ver afectadas sus preferencias debido al poder (político, económico o de persuasión) que pueden tener otros.

Un método muy popular para alcanzar opiniones de grupo es la técnica **Delphi**. En esta, el grupo de decisores es consultado acerca de sus preferencias a través de entrevistas personales o de cuestionarios, para que posteriormente sus respuestas sean sometidas a análisis estadísticos por parte de un moderador. El proceso de cuestionar y resumir se repite en forma dirigida hacia la búsqueda de una opinión de consenso. Esta técnica adolece de algunos inconvenientes que se analizan en el apéndice B.

Por otro lado, se han propuesto métodos de fusiónamiento basados en la forma en la que las preferencias han sido expresadas, los que, por lo tanto, asumen que todos los miembros del grupo usan una forma común de

expresión. Los métodos basados en opiniones que se dan en forma numérica (ya sea en términos de ponderaciones o de ordenaciones) pueden ser estructurados en tres grandes grupos (Makarov y otros, 1987):

Los **métodos estadísticos**, que están basados en el supuesto de que las desviaciones de las preferencias de los expertos de la real son debidas a factores aleatorios; el problema es determinar la preferencia real con un error mínimo.

Los **métodos algebraicos** que involucran la especificación de una distancia en el conjunto de opiniones factibles. Aquí, la decisión final está definida como aquella para la cual la distancia a las preferencias de los expertos es mínima.

Los **métodos de escalamiento** que usan la información experta acerca del grado de diferencias entre los objetos, con el fin de definir un conjunto minimal o minimal cercano de criterios y preferencias de los objetos, en términos de los criterios que generan las diferencias.

Si las preferencias se manifiestan en forma de ponderaciones de las alternativas, los métodos usuales se limitan a ofrecer una promediación (ponderada algunas veces) de tipo aritmética o geométrica de las opiniones. Algunas de estas formas de combinar carecen de justificación e interpretación. Sencillamente ofrecen una *solución* al problema. En caso de ponderar las preferencias, no existe ninguna técnica formal para determinar los factores de ponderación, y las que se utilicen, son por lo mismo, muy subjetivas.

Las técnicas basadas en preferencias expresadas en términos de ordenamientos de las alternativas, tienen su atractivo, debido en gran parte a la mínima cantidad de información requerida. Cada experto solo necesita expresar la preferencia (o indiferencia) de una

alternativa sobre otra, no el grado de preferencia como lo requieren otros enfoques (p.e. la teoría de utilidad y el proceso de jerarquización analítica). Borda (1781) propuso uno de estos métodos (el hoy llamado método de Kendall (1962)). Otras técnicas aparecen en Grazie (1953), Condorcet (1785), Copeland (1951), Black (1958), Luce y Raiffa (1957) y Cook y Seiford (1982). Algunas de éstas son muy sensibles a pequeños cambios en las preferencias.

### 2.2.2. El Proceso de Jerarquización Analítica en la toma de decisiones en grupo (Saaty 1980 y 1982).

El Proceso de Jerarquización Analítica también es utilizado para la toma de decisiones en grupo, y se distingue de los demás métodos desarrollados para este fin, por la forma de participación de los miembros del grupo. Antes de discutir los detalles acerca de su utilización en problemas de decisiones con varios decisores, se presenta una descripción general del método.

El Proceso de Jerarquización Analítica (PJA) es un método de ayuda a la toma de decisiones desarrollado por Thomas Lorie Saaty en 1971 para dar solución a problemas de planeación de contingencias militares. Esta técnica ha probado ser una metodología útil en una gran variedad de problemas, que van desde problemas personales simples hasta problemas de decisiones complejas que involucran grandes sumas de dinero o el destino de algún país. Entre estas áreas se pueden mencionar: *planeación, decisiones secuenciales, diseño, finanzas, pronóstico, mercadeo, selección de portafolio, transporte, educación, ecología, medicina, leyes, transferencia de tecnología, sector público, sector hidráulico, comportamiento en competencias, control de vuelos e ingeniería.*

En 1988 Saaty publicó el libro *The Analytic Hierarchy Process*,

revisión y ampliación del libro con el mismo título publicado en 1980, en el cual expone el fundamento teórico del método, aparte de un gran número de artículos publicados por él y otros investigadores -en los que se profundiza en el fundamento axiomático del método, se extiende, se modifica y se vincula con otras teorías-.

El PJA es una técnica para la toma de decisiones usada para evaluar alternativas multiatributos con objetivos en conflicto entre uno o más actores. El proceso, siguiendo los lineamientos del enfoque de sistemas, involucra la descomposición jerárquica del problema total de evaluación en subproblemas que puedan ser fácilmente comprendidos y evaluados. La aplicación estándar del PJA asume que todas las alternativas son conocidas por el tomador de decisión en el momento de la evaluación.

#### a. Ventajas del PJA

El uso del Proceso de Jerarquización Analítica para la solución de problemas de toma de decisiones en la presencia de múltiples atributos, ofrece muchas ventajas, entre las cuales se mencionan las siguientes:

- i. Es conceptualmente *simple*, lo que permite su fácil utilización.
- ii. El proceso *simula la actividad de la mente* cuando se enfrenta a la necesidad de analizar una situación. Para un conocimiento detallado, la mente estructura realidades complejas en sus partes constitutivas, estas a su vez en otras y así, jerárquicamente. De esta manera se integra una gran cantidad de información y se forma una imagen completa acerca del sistema completo.
- iii. La necesidad de descomponer el problema en los elementos más

relevantes que intervienen, hace que las personas involucradas *afinen* su conceptualización acerca de él.

- iv. *Organiza* el problema de manera que permite pensar en no más de dos elementos a la vez.
- v. El PJA maneja la *consistencia lógica* al utilizar la habilidad humana para establecer relaciones entre objetos o ideas de manera coherente. Ofrece una manera para medir esa consistencia al momento de emitir opiniones.
- vi. Incorpora los aspectos *cualitativos* y *cuantitativos* del pensamiento humano : el cualitativo al definir el problema y su jerarquía y el cuantitativo al expresar las opiniones y las preferencias en forma consisa. El proceso está diseñado para integrar estas propiedades duales, de las cuales, la cualitativa es básica para tomar decisiones firmes en situaciones complejas en las que se necesite determinar prioridades y hacer intercambios.
- vii. Integra los *sentimientos* y los *valores personales* a la opinión, en una forma lógica.
- viii. Utiliza una *escala* que permite reflejar pequeñas diferencias entre las opiniones, identificar sus efectos en los resultados y, un aspecto sumamente importante, medir valores intangibles (bienestar, satisfacción, comodidad, adaptación, etc.) de manera semejante a las escalas desarrolladas para medir cualidades físicas, y que limitan la naturaleza de ideas con las que se puede tratar.
- ix. Es suficientemente *flexible* para permitir revisiones, ya sea en las opiniones o en la estructuración jerárquica que conforma el problema.

- x. Permite tomar en consideración las *prioridades relativas* que existen entre los componentes del sistema.
- xi. Conduce a un *estimado global* de la "bondad" de las alternativas.
- xii. Provee un marco para la participación en grupo, en la solución de un problema de toma de decisiones.

Entre estas ventajas, destacan las enumeradas con ii, iv, vi, vii, viii y xii, particularidades que distinguen al PJA de la mayoría de los otros métodos para la toma de decisiones multiatributos.

**b. Descripción del método [Véase aspectos en detalle en el apéndice B]**

El PJA es usado para derivar escalas proporcionales, a través de comparaciones por pares, las cuales pueden ser tomadas de mediciones actuales o de escalas fundamentales que reflejen la fuerza relativa de las preferencias y los sentimientos del decisor. Permite decisiones efectivas en problemas complejos, simplificando y aligerando el proceso natural de toma de decisiones, a través de tres principios que se aplican en la solución de los problemas:

El **principio de descomposición** conduce a la estructuración de una jerarquía que contiene los elementos básicos del problema. A este respecto, Saaty afirma: "Tal vez, la tarea más creativa en la toma de una decisión es la selección de los factores que son importantes para ella". En el Proceso de Jerarquización Analítica, los elementos básicos del problema se estructuran en niveles que representan la estructura del sistema en el que se enmarca el problema.

Al construir la jerarquía se debe considerar el ambiente que rodea al

problema, identificar los aspectos o atributos que describen a la solución, los actores asociados con el problema, las posibles alternativas de solución y así, cuanto factor relevante intervenga. Es claro que la estructuración de una jerarquía depende de la visión que se tenga del sistema, de la cantidad de información relativa al problema con la que se cuente y de las respuestas que se desean obtener con la solución del problema. Estos aspectos son indicadores de que dos decisores, normalmente construirán dos jerarquías diferentes para el mismo problema, y tendrán preferencias distintas aún sobre la base de la misma jerarquía.

En el PJA, invariablemente se ubicará al *objetivo general* del problema en el primer nivel de la jerarquía, y a las posibles *alternativas de solución* en el último nivel. Los niveles intermedios pueden variar dependiendo de la naturaleza del problema. Pueden corresponder, por ejemplo, a sub-objetivos, a los factores que afectan a estos sub-objetivos, a los actores que influyen en estos factores, a los objetivos de los actores y a los atributos que sirven de medio para medir el alcance de estos objetivos y que describen a las alternativas.

Los elementos en cada nivel pueden ser considerados como restricciones, refinamientos o descomposiciones de los elementos del nivel inmediato superior. La *jerarquía* se dice *completa* si todos los elementos en un nivel tienen a todos los elementos en el nivel que le sucede como descendientes. De otra manera, es *incompleta*. La construcción de la jerarquía permite tener una visión global de las relaciones complejas existentes en sistema y ayuda al decisor a determinar si los aspectos contenidos en cada nivel son del mismo orden de magnitud, es decir, si son comparables.

**El principio de opiniones comparadas.** El proceso primario de priorización se desarrolla para cada nivel, obteniéndose matrices de

comparaciones por pares acerca de la relativa importancia de los elementos de un nivel de la jerarquía respecto a los elementos en el nivel inmediato superior, de acuerdo con una escala (tabla 1). El método para determinar el grado en el que los elementos de un nivel en una jerarquía influyen en el siguiente nivel más alto y una forma de medir la consistencia de las opiniones del tomador de decisiones al llenar las matrices de comparaciones, se describen en el apéndice B.

El principio de síntesis de prioridades es usado para generar la prioridad compuesta o global de los elementos del nivel más bajo de la jerarquía, las alternativas, respecto al nivel más alto, el objetivo general del problema. Para esto, se sintetizan las prioridades obtenidas en las comparaciones por pares, esto es, se procesan de manera que se obtenga un único número que indique la prioridad de cada una de las acciones.

Las prioridades se sintetizan a partir del segundo nivel hacia abajo, multiplicando la matriz cuyas columnas respectivas son las prioridades locales de los elementos del nivel respecto a los criterios del nivel superior, por el vector de prioridades de estos criterios (la prioridad del objetivo general es uno). Esto produce al vector de prioridades de los elementos del nivel, el cual será usado para ponderar las prioridades locales de los elementos en el nivel siguiente, y así hasta determinar la prioridad global de las alternativas.

Así, si la jerarquía que representa el problema es de  $h$  niveles, si  $B_2$  es el vector de prioridades relativas de los elementos del segundo nivel respecto al objetivo general y si, en general,  $B_k$  es la matriz de prioridades locales de los elementos del nivel  $k$ , entonces el vector  $w$  de prioridades de las alternativas respecto al objetivo general es

$$w = B_h B_{h-1} \dots B_2$$

## La escala

| INTENSIDAD<br>DE<br>IMPORTANCIA | DEFINICION   | EXPLICACION   |
|---------------------------------|--|---|
| 1                               | Igual importancia  | Las dos actividades contribuyen de igual manera al objetivo.                                      |
| 3                               | Importancia moderada de una sobre la otra  | Experiencia y opinión moderadamente a favor de una actividad sobre la otra.                       |
| 5                               | Importancia esencial o fuerte  | Experiencia y opinión fuertemente a favor de una actividad sobre la otra.                         |
| 7                               | Importancia muy fuerte   | Una actividad es fuertemente favorecida y su dominio demostrado en la práctica.                   |
| 9                               | Extrema importancia  | La evidencia que favorece una actividad sobre la otra es del mayor orden posible de confirmación. |
| 2, 4,<br>6, 8                   | Juicio intermedio entre las opiniones adyacentes. Se puede utilizar decimales si la comparación de los elementos está muy cerrada respecto a lo indicado en la escala. |   |
| Recípro-<br>cas                 | Si se asigna $a_{ij}$ al comparar la actividad $i$ con la $j$ , entonces se asigna $1/a_{ij}$ al comparar la $j$ con la $i$ .  |   |

Tabla 1

Luego de esta descripción general del método, se analiza su utilización en los procesos de toma de decisiones en grupo.

### c. Utilización del PJA en grupos

En el Proceso de Jerarquización Analítica, la forma de participación de los consultados acerca de un problema de toma de decisiones, es en este sentido: En primer lugar, el grupo debe participar en la estructuración del problema, luego, cada miembro debe suministrar sus opiniones acerca de la ponderación de los elementos de los niveles de la jerarquía para que finalmente estas sean promediadas aritméticamente o sometidas a procesos de votación o de debates hasta lograr una ponderación de consenso o de compromiso. Saaty sugiere el uso de las técnicas de *lluvia de ideas* o *participación de ideas y conocimientos*, para determinar el objetivo central del problema y construir la jerarquía que representa la problemática.

La fragmentación de un problema complejo en diferentes niveles es particularmente útil para un grupo con gran variedad de perspectivas. Cada miembro puede presentar su punto de vista y definiciones, sin importar de cuál nivel se trate. Con estas participaciones, se establece, en un cierto sentido, acuerdos acerca de algunos aspectos del problema, de distintos órdenes de relevancia.

En la propuesta de Saaty, el grupo debe acordar la metodología que usará para el establecimiento y la síntesis de las opiniones que conformarán la matriz de comparaciones. Estas etapas son por naturaleza ruidosas e involucran persuasión y negociación, situaciones que se han analizado y criticado en párrafos anteriores. A pesar de todos estos inconvenientes, la determinación de los elementos de la matriz de comparaciones del grupo, se efectúa de alguna de estas formas:

- 1) Sometiendo el valor numérico de la comparación a un debate, hasta que se alcance consenso o compromiso.
- 2) Reuniendo las opiniones individuales en cuestionarios, para luego

someterlas a alguno de los procesos de unificación existentes, como el de la búsqueda del voto mayoritario sobre alguno de los valores propuestos, o el cálculo de la media geométrica de las opiniones.

Cualquiera sea la forma establecida, los votos o las opiniones particulares se pueden ponderar de acuerdo con el estatus, conocimiento, fama o experiencia del que lo emite. Si previo a la emisión de la opinión, los participantes tienen la oportunidad de dar a conocer su punto de vista acerca del asunto que se debate, estas ponderaciones no son necesarias. En las intervenciones cada uno pone de manifiesto sus conocimientos y experiencias, información que en forma indirecta acondicionará y conducirá a las opiniones del resto. De esta manera, la opinión de cada participante refleja indirectamente el peso de cada uno de los otros.

El otro grupo de técnicas que interesa, está relacionado con el análisis de las opiniones de los expertos:

### 2.2.3. Métodos de agregación de opiniones

Otras técnicas de fusiónamiento se califican como **MÉTODOS DE AGREGACION DE OPINIONES**; son las utilizadas para agregar opiniones expresadas como distribuciones de probabilidad de alguna cantidad incierta de interés.

#### a. Combinación de distribuciones de probabilidad

Si  $f_1, f_2, \dots, f_m$  son las respectivas funciones de densidad de una variable de interés ( $\theta$ ), según cada decisor, el problema de combinar estas distribuciones se traduce en el de determinar una función de

densidad  $f = T(f_1, \dots, f_m)$ , donde  $T$  es el operador de fusión.

Una parte significativa de la literatura sobre uso de expertos (sobre todo la de la década de los 80), estuvo dirigida a la búsqueda de una fórmula de fusionamiento apropiada  $T$ . Históricamente, el tema central ha sido la comparación de las bondades al tomar a  $T$  como la media aritmética o la media geométrica de las distribuciones de los consultados. Stone (1961) propuso y es atribuida a Laplace y Baharach (1979), la fusión lineal de opiniones

$$T(f_1, \dots, f_m) = \sum_{i=1}^m p_i f_i \quad (1)$$

con pesos  $p_i$  no negativos y tales que  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$

Mc Conway (1981) y Wagner (1982) han propuesto axiomas que sostienen el uso de esta forma de fusión, mientras que otro axioma debido a Madansky (1964), conduce, bajo condiciones adecuadas de regularidad, a la fusión logarítmica de opiniones

$$f = \prod_{i=1}^m f_i^{p_i} / \int \prod_{i=1}^m f_i^{p_i} \quad (2)$$

donde los pesos  $p_i$  son tales que la integral en el denominador es finita.

Muchas de las dificultades asociadas con el uso de (1) fueron superadas por esta última forma. A diferencia de la fusión lineal, la logarítmica es menos dispersa. Por lo tanto, es más creíble para indicar valores consensuales cuando se deben tomar decisiones y por ende, se le puede considerar más que una simple representación de las diversas opiniones de los miembros del grupo.

Inicialmente se tenía la esperanza de que un análisis cuidadoso de los axiomas que fundamentan las formas de fusión lineal y logarítmica, podrían conducir a la mejor solución, pero esta idea está siendo gradualmente abandonada en la medida en que los investigadores en esta línea han descubierto que pueden ser hallados otros conjuntos de axiomas que soporten otros esquemas de fusión. Winkler (1986a) puntualiza que "la visión general actual en la búsqueda de un único, para todo propósito, procedimiento objetivo para combinar ... es inútil". Cualquiera de los métodos que se han propuesto y se puedan proponer tienen su componente *ad hoc*.

La distribución de probabilidad que representa la opinión de una persona es la expresión de lo que subjetivamente ella aprecia, y está basada en cuanta experiencia a priori subjetiva tiene acerca del problema en mano. Expertos que han sido entrenados en la misma especialidad y tal vez en el mismo centro, naturalmente compartirán una cantidad razonable de esta información a priori. Sus opiniones actuales pueden variar porque no comparten todos la misma evidencia, o tal vez porque no interpretan de igual manera los datos comunes. Por esta razón, al momento de la fusión, cabe la consideración de correlación entre sus apreciaciones. Los pesos asignados a los expertos en las formas (1) y (2) son un elemento de discriminación entre los expertos, pero de una manera muy imprecisa y superficial. Este aspecto merece especial atención.

En algunas ocasiones existe un **decisor** al que el grupo de expertos debe rendir reporte y es el encargado de evaluarlos, determinar sus conjuntos de información a priori, la interdependencia de estos conjuntos, considerar su honestidad, etc. Si este personaje existe, el proceso de fusión no es un problema (Winkler 1968, 1981, Morris 1974, 1977). Una vez que ha determinado su distribución a priori  $\pi$  y la apropiada función de verosimilitud de los expertos  $l(f_1, \dots, f_m | \theta)$ , él puede tratar como datos a las opiniones emitidas y actualizar su

opinión a priori, vía el teorema de Bayes:

$$T(f_1, \dots, f_m)(\theta) = f(\theta | f_1, \dots, f_m) \propto \pi_1(f_1, \dots, f_m | \theta)$$

Este enfoque llamado *Bayesiano o de Modelación* fue configurado por Morris y desarrollado por Winkler, Lindley (1983), Agnew (1985) y otros. El operador de fusiónamiento es sencillamente la regla de Bayes y la distribución a posteriori del decisor es la distribución fusionada.

El decisor debe determinar su apreciación acerca de qué tan buenos son los expertos y cuánta información común poseen. En el lenguaje bayesiano, debe construir una función de verosimilitud. Esto se puede modelar de distintas maneras, aunque la selección de un modelo es a menudo complicada debido a la falta de evidencia relacionada con el desempeño de los expertos como predictores y la dificultad para precisar el grado en que los expertos comparten la información.

En caso de que por alguna circunstancia el decisor no pueda determinar específica y completamente su parecer acerca de las opiniones de los expertos, Genest y Schervish (1985) proponen, usando el paradigma bayesiano, una forma de fusiónamiento que no requiere la determinación completa de la función de verosimilitud.

Se supone que  $P_1, \dots, P_m$  son las funciones de probabilidad de los  $m$  expertos, sobre un espacio  $S$  y que un decisor los consulta acerca de la probabilidad de ocurrencia de un evento  $\mathcal{E}$  de  $S$ , con el propósito de actualizar la suya. Los expertos manifiestan su opinión representada por probabilidades  $x_1, x_2, \dots, x_m$  de  $\mathcal{E}$ , las cuales, para cada experto respectivo  $i$ , son valores de la variable aleatoria  $X_i$ , que representa su opinión acerca de la probabilidad del evento  $\mathcal{E}$ . De acuerdo con el Teorema de Bayes, el decisor actualiza su probabilidad a priori  $p$  de  $\mathcal{E}$

calculando la probabilidad a posteriori  $\bar{p}$  de  $\mathcal{E}$  dado  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$  así:

$$\bar{p}(\mathcal{E}) = \Pr(\mathcal{E}|\mathbf{X}=\mathbf{x}) = p(\mathcal{E}) \Pr(\mathbf{X}=\mathbf{x}|\mathcal{E}) / \Pr(\mathbf{X}=\mathbf{x})$$

El decisor debe indicar su probabilidad a priori y estar en disposición de especificar ciertos aspectos de la distribución marginal de  $\mathbf{X}$ , por ejemplo, algunos momentos. Además, puede asumir que el soporte de la distribución de  $\mathbf{X}$  es el cubo  $[0,1]^m$ .

Genest y Schervich demuestran que, dada la probabilidad a priori  $p(\mathcal{E})$  y el requerimiento de que  $E(X_1) = \dots = E(X_m) = p(\mathcal{E})$ , el promedio ponderado

$$\bar{p}(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i + (1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i) p(\mathcal{E})$$

con las restricciones adecuadas en los  $\lambda_i$  de manera que  $\bar{p}(\mathcal{E})$  sea una probabilidad, es la única función de los  $x_i$  garantizada para ser una probabilidad a posteriori de  $\mathcal{E}$ , cualquiera sea la distribución marginal de  $\mathbf{X}$ . Es decir, el modelo bayesiano conduce a una fusión lineal de las opiniones, ponderada por los  $\lambda_i$  que se interpretan como coeficientes de correlación múltiple de  $\mathcal{E}$  en  $\mathbf{X}$ , concepción válida para la determinación de  $\lambda$ . O sea, que si  $\Sigma$  es la matriz de covarianzas del vector  $\mathbf{X}$  y  $\delta$  el vector de covarianzas entre  $\mathcal{E}$  y  $\mathbf{X}$ , entonces  $\Sigma \lambda = \delta$ .

Otro aspecto sobresaliente en los problemas de agregación de opiniones se presenta cuando los expertos opinan acerca de varias variables de interés. Este caso es analizado por Lindley (1985) y por Agnew (1985), quien extiende el modelo general de Winkler (1968), claro precursor del enfoque bayesiano para la agregación de opiniones.

En algunas circunstancias, tales como las que se presentan en un jurado, en el que no existe un decisor, puede haber suficiente

afinidad en el grupo para justificar el supuesto de un decisor ficticio que represente la personalidad sintetizadora del grupo (el **supra bayesiano** de Keeney y Rayffa (1976)) y que realice las tareas inherentes al decisor.

La situación problemática en la aplicación del enfoque bayesiano se presenta cuando el Supra Bayesiano es solamente **virtual**, pues la delicada y principal acción de seleccionar la función de verosimilitud adecuada deberá caer en el grupo. Peor aún, la determinación de la distribución a priori del decisor deberá ser objeto de consenso; es decir, el problema de agregar opiniones cae en un círculo vicioso.

### 2.3. EL PROBLEMA

En esta revisión de los aspectos fundamentales de la toma de decisiones, particularmente aquellos referentes a decisiones con múltiples decisores, destacan algunos hechos que son de interés:

Los métodos para resolver problemas de toma de decisiones en grupo que pretenden obtener opiniones de consenso o de compromiso, caen en problemas de intereses personales algunas veces inflexibles, y problemas psicológicos y de relaciones humanas que alejan a las soluciones obtenidas de una opinión que realmente represente la de los miembros del grupo. Por otro lado, aquellos métodos que fusionan opiniones que se han dado en forma numérica, utilizan factores de ponderación asignados subjetivamente según la experiencia conocida o posición jerárquica de los expertos.

En la solución de problemas de toma de decisiones en grupo, la consideración de la correlación entre los expertos es nula.

Los métodos para la toma de decisiones en grupo consideran, en su mayoría, que las preferencias de los decisores son manifestadas de manera absolutamente certera, sin tomar en cuenta el grado de incertidumbre que estas tienen.

La no consideración de la incertidumbre en las opiniones en la solución de los problemas de decisiones en grupo, induce a pensar en la conexión existente entre los problemas de decisiones en grupo y los de agregación de opiniones, en el marco de la presencia de incertidumbre.

Bajo estas consideraciones, se plantea el siguiente problema de toma de decisiones multiatributo y multidecisores:

Un grupo de  $m$  expertos requiere ponderar y en consecuencia ordenar, un conjunto de  $n$  alternativas, las cuales se encuentran descritas en término de varios criterios, elementos de juicio sobre los que descansará la ponderación. Sin la existencia de algún tipo de influencias de un experto sobre la opinión del otro, se busca determinar una ponderación agregada de las manifestadas por los expertos, que represente la de todos y que tome en cuenta la relación que pudiera existir entre ellos.

En otras palabras, se desea un método que fusione las opiniones de un grupo de expertos acerca de las ponderaciones de ciertas alternativas tomando en consideración:

- la emisión aislada de las opiniones particulares
- los criterios que describen a las alternativas
- la componente de incertidumbre en las opiniones
- la relación existente entre los expertos.

En el siguiente capítulo se describe un método que da solución a este problema.

### CAPITULO III

#### EL METODO DE AGREGACION DE OPINIONES

Los métodos reportados por la literatura que resuelven problemas de toma de decisiones en grupo en busca de opiniones de consenso o de compromiso, presentan algunos inconvenientes que alejan a las soluciones que ofrecen, de una opinión realmente representativa. Las opiniones particulares se manifiestan, en algunas ocasiones, bajo ciertas influencias que distorsionan la verdadera opinión del experto. Las que se ofrecen en forma numérica se ponderan por factores que responden a la experiencia o posición jerárquica del que opina y son asignados de manera totalmente subjetiva. Además, no se considera en la agregación la correlación entre los expertos, con el objeto de evitar que una misma opinión sea considerada varias veces. En este marco, se plantea el problema:

Un grupo de  $m$  expertos requiere ponderar y en consecuencia ordenar, un conjunto de  $n$  alternativas, las cuales se encuentran descritas en término de varios criterios, elementos de juicio sobre los que descansará la ponderación. Sin la existencia de algún tipo de influencias de un experto sobre la opinión del otro, se busca determinar una ponderación agregada de las manifestadas por los expertos, que represente la de todos y que tome en cuenta la relación que pudiera existir entre ellos.

En este capítulo se presenta un método -que se valida y aplica en capítulos posteriores- y que da solución a este problema. En la primera sección se ofrece un esquema del método propuesto, y su desarrollo, en la segunda sección.

### 3.1 ESQUEMA DEL METODO DE AGREGACION

Un problema tipo en el que es útil el método que se propone, se presenta cuando el Director General de una dependencia del Estado debe decidir acerca de varias políticas de acción que pueden ser implementadas por su Dirección, con miras a satisfacer un objetivo determinado. Bajo la concepción de "decisiones consultadas", reúne a sus jefes de departamento con el propósito de que manifiesten sus opiniones en relación al problema, y le presenten una opinión fusionada. La petición puede ser la de seleccionar la mejor política de acuerdo con el objetivo o de jerarquizarlas para su implementación progresiva posterior.

La utilidad del método es más notoria en el momento en que el Director considera que las opiniones deben ser ofrecidas en forma aislada, pues le interesa que los representantes de los departamentos se manifiesten plenamente, condicionados únicamente por sus experiencias particulares. En términos generales, las situaciones globales de la Dirección ya son conocidas por él.

La aplicación del método se inicia con las fases de estructuración del problema y de obtención de las ponderaciones individuales de los expertos. Esta etapa, que en otras circunstancias puede ser cubierta utilizando cualquier otro método de ponderación de alternativas, usa el Proceso de Jerarquización Analítica, con el propósito de aprovechar sus múltiples ventajas (analizadas en el acápite a, sub-sección 2.2.2.), entre las que destaca el hecho de que colateralmente, la técnica suministra, en cada etapa de ponderación parcial, un índice de consistencia de las opiniones.

Seguido se mide la relación entre los expertos: El doble de los índices de consistencia, que son estimados de la varianza del error del experto al momento de opinar, son utilizados para definir una forma de medir la relación entre los expertos, aspecto importantísimo para el método de agregación.

La consideración de que las opiniones de los expertos son imprecisas y que representan la opinión subjetiva de cada experto respecto a las alternativas, permite utilizar el enfoque de Bayes para agregar las opiniones individuales y garantizar que la opinión agregada sea representativa de la de todos los expertos, pues, en este enfoque se utiliza toda la información que proporciona la muestra a través de la función de verosimilitud.

En la etapa de agregación, ante la situación de no existencia del "decisor" como personaje al que los expertos deben manifestar sus opiniones particulares, se presenta una forma alterna de utilizar el enfoque bayesiano, basada en la consideración de cada experto como Supra Bayesiano y las del resto de los expertos como personas que brindarán su opinión a fin de que este decisor *ad honorem* actualice la suya acerca del valor que interesa. Por otro lado, el enfoque bayesiano permite considerar, en las agregaciones, la relación entre los expertos, la cual se manifiesta en los factores de ponderación de las opiniones. Los factores de ponderación se deducen de los índices de correlación calculados con los productos del propio proceso de ponderación de cada experto.

De esta manera, la etapa de agregación produce  $m$  vectores de ponderaciones de las alternativas, entre las que se escoge la que propondrá el grupo, usando como criterio un índice de desacuerdo entre los ordenamientos producidos por las ponderaciones iniciales ofrecidas por los expertos y los producidos por las ponderaciones agregadas.

Veamos cada uno de estos aspectos formal y detalladamente.

## 3.2. DESARROLLO DEL METODO DE AGREGACION

### 3.2.1. Ponderación individual

El proceso de ponderación individual de las alternativas debe ser estructurado de manera que permita a los expertos, en un marco completo pero organizado, analizar y discriminar entre los múltiples criterios a considerar y concluir acerca de ellos en una forma sencilla. Esta forma de pensar debe ser accesible a todos los participantes sin necesidad de grandes esfuerzos y complicaciones.

El Proceso de Jerarquización Analítica proporciona este marco. Brinda una estructura efectiva para la toma de decisiones, al imponer una disciplina en el proceso de pensar del que lo utiliza. La necesidad de asignar un valor numérico a cada variable que interviene en el problema, ayuda al experto a mantener un patrón de pensamiento coherente y a poder llegar a una conclusión.

El PJA debe ser utilizado primeramente para estructurar el problema en forma conjunta por todos los expertos, básicamente en una jerarquía de propósito general, de criterios y alternativas.

Posteriormente, y siguiendo lo establecido por el PJA, cada experto en forma aislada establece sus preferencias acerca de los elementos de la jerarquía y sistematiza sus opiniones con el objeto de obtener un conjunto de prioridades relativas de los elementos considerados. En cada etapa de ponderación debe verificar que la razón de consistencia de sus opiniones está dentro de los márgenes especificados, para finalmente, determinar una decisión particular basada en los resultados obtenidos por etapa.

Con el uso del PJA se satisface el requerimiento de que todos los expertos usen una forma común de expresión y de que las ponderaciones

particulares obtenidas tengan un significado también unificado. Además, proporciona una medida de la varianza de los errores del experto al determinar la matriz de comparaciones por pares, en cada ocasión, en la que debe ponderar a los elementos de la jerarquización. Estas varianzas son el elemento básico para la determinación de la correlación entre expertos.

Como resultado de esta etapa de indagación de preferencias, cada experto  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , proporciona su vector de pesos normalizado

$$w_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in})^t$$

donde  $w_{ij}$  es, según su apreciación, la ponderación de la alternativa  $j$ . Estas opiniones, producto de la experiencia, del análisis de casos similares, del conocimiento del tema e inclusive de los sentimientos del experto  $i$ , se interpretan como probabilidades subjetivas de que la alternativa  $j$  sea la mejor para alcanzar el objetivo general del problema de decisión si las alternativas consideradas son relativamente comparables de manera que no se presente la posibilidad de que una de ellas tenga apreciación nula para los expertos. Si se presenta esta última situación, se puede solicitar a los expertos que revisen la estructuración del problema de manera que se analice la presencia irrelevante de la alternativa con apreciación nula.

Consideramos entonces que las alternativas son relativamente comparables e interpretamos a las opiniones de los expertos como probabilidades subjetivas acerca de la bondad de las alternativas para el logro del objetivo del problema de decisión.

Las opiniones emitidas por los expertos son imprecisas y reflejan una desviación -Benson y Nichols (1982) la califican como "sesgo motivacional"- del valor real, debido a algunos factores aleatorios. Entre estos se pueden mencionar, la incertidumbre que se presenta a

menudo en la información disponible y el hecho de que las preferencias se manifiestan en condiciones particulares de cada persona - estado de ánimo, interpretación de los datos, experiencias-.

Por estas razones, las opiniones  $w_{ij}$  de los expertos  $i=1, 2, \dots, m$ , respecto a la alternativa  $j$  se pueden considerar valores de las variables aleatorias  $W_{ij}$  que representan a las opiniones de los expertos y que toman valores en  $[0,1] \subset \mathbb{R}$ .

Se cuenta entonces, en este contexto y por alternativa, con  $m$  opiniones acerca de la probabilidad de que esta sea la mejor, en relación con las otras alternativas y con los criterios que se utilizaron para la evaluación.

### 3.2.2. Correlación entre los expertos

En este modelo, la correlación entre los expertos se expresa en términos de la correlación entre sus errores de estimación. Analicemos previamente algunos aspectos:

Durante el proceso de ponderación parcial por niveles del PJA, cada experto incurre en errores de estimación cuya varianza es calculada. Con base en estas estimaciones, se propone una forma para calcular la varianza del error de cada experto en el proceso de ponderación.

Se considera que la jerarquía que representa el problema de ponderación de las  $n$  alternativas es de  $N$  niveles, donde cada nivel  $i$  está constituido por los  $N_i$  elementos:  $e_1(i), e_2(i), \dots, e_{N_i}(i)$

En la ponderación de los elementos del nivel  $i$  respecto al elemento  $e_j(i-1)$  ( $j$ -ésimo elemento del nivel  $i-1$ ), se calcula el índice de consistencia

$$IC_j(i) = \frac{\lambda_{\max}(j) - N_i}{N_i - 1}$$

donde  $\lambda_{\max}(j)$  es el mayor característico de la matriz de comparaciones formada por las opiniones del experto y  $N_i$  es el número de elementos en el nivel  $i$ .

Dos veces este índice es un estimado de la varianza del error de consistencia en que incurre el experto al momento de opinar (ver el apéndice B). En el PJA esta estimación de la varianza se efectúa respecto a cada uno de los  $N_{i-1}$  elementos del nivel  $i-1$  y en general, en la ponderación de los elementos de cada nivel respecto a los del nivel inmediato superior. Es decir que, para cada nivel  $i=2, 3, \dots, N$ , el proceso de ponderación produce  $N_{i-1}$  estimaciones de la varianza del error del experto.

Se supone, como es usual, que el error del experto se distribuye normalmente con media 0 y varianza  $\sigma^2$ .

Deseamos estimar el valor de esta varianza con base en estas estimaciones. El procedimiento que se propone está basado en el modelo aleatorizado completo que se utiliza en el análisis de varianzas (Montgomery, 1984), usando como observaciones las estimaciones obtenidas en cada nivel de la jerarquía.

Cada observación, es decir, cada estimado de  $\sigma^2$ , está determinado por dos aspectos: el nivel al que pertenecen los elementos comparados y que dieron lugar a la estimación y el elemento del nivel inmediatamente superior respecto al que se efectuó la evaluación.

Así, cada varianza calculada se representa genéricamente por  $y_{ij}$  donde  $i = 2, 3, \dots, N$ , indica el nivel de la jerarquía y donde  $j$

toma valores dependiendo de  $i$ , indicando el elemento que se tomó como referencia para las comparaciones de los elementos del nivel  $i$ . Por ejemplo, si se considera el nivel  $i$ ,  $j$  toma valores de 1 a  $N_{i-1}$ .

Con esta notación, los estimados obtenidos se estructuran de la siguiente manera:

|                          |  | <b>Niveles</b>                     |                                    |     |  |  |
|--------------------------|--|------------------------------------|------------------------------------|-----|--|--|
|                          |  | 2                                  | 3                                  | ... | N                                      |  |
|                          |  | $y_{21}$                           | $y_{31}$                           | ... | $y_{N1}$                               |  |
|                          |  | $y_{22}$                           | $y_{32}$                           |     | $y_{N2}$                               |  |
|                          |  | ⋮                                  |                                    |     |  |  |
|                          |  | $y_{2N_1}$                         | $y_{3N_2}$                         | ... | $y_{N, N_{N-1}}$                       |  |
| <b>Totales por nivel</b> |  | $y_{2.}$<br>$= \sum_j y_{2j}$      | $y_{3.}$<br>$= \sum_k y_{3k}$      | ... | $y_{N.}$<br>$= \sum_t y_{Nt}$          | $y_{..} = \sum_i \sum_j y_{ij}$                |
| <b>Valores medios</b>    |  | $\bar{y}_{2.}$<br>$= y_{2.} / N_1$ | $\bar{y}_{3.}$<br>$= y_{3.} / N_2$ | ... | $\bar{y}_{N.}$<br>$= y_{N.} / N_{N-1}$ | $\bar{y}_{..} = y_{..} / \sum_{i=1}^{N-1} N_i$ |

En esta notación se sustituye un índice por un punto cuando se ha sumado sobre ese índice.

Estas observaciones pueden coincidir o no con el valor de  $\sigma^2$  en virtud de algunos errores, por lo tanto, cada valor  $y_{ij}$  se puede representar como la suma de  $\sigma^2$  -que se desea calcular-, de una cantidad  $\tau_i$  que representa la desviación del valor de  $\sigma^2$  debido al nivel en que se hizo la observación, es decir, debido al número de elementos comparados, y de  $\epsilon_{ij}$ , el error ocasionado por la evaluación en el nivel  $i$  respecto al elemento  $j$ . Por lo tanto, cada observación se puede escribir como:

$$y_{ij} = \sigma^2 + \tau_i + \epsilon_{ij}$$



Esta relación se puede medir a través de la que existe entre las variables aleatorias que describen los errores de consistencia de sus opiniones. Suponemos que para cada par de expertos  $i, k$ , el coeficiente de correlación  $\rho_{ik}$  entre estas variables es 1. Luego, la matriz de varianza-covarianza de los expertos tiene la forma

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 & \dots & \sigma_1 \sigma_m \\ \sigma_2 \sigma_1 & \sigma_2^2 & & \sigma_2 \sigma_m \\ \vdots & & & \\ \sigma_m \sigma_1 & \sigma_m \sigma_2 & \dots & \sigma_m^2 \end{bmatrix}$$

donde  $\sigma_i^2$  es la varianza del error del decisor  $i$ , primera componente del vector producto de las matrices anteriores.

### 3.2.3. Etapa de agregación

Debido a que las opiniones de los expertos representan sus probabilidades subjetivas acerca del desempeño de cada alternativa, se puede utilizar el enfoque de Bayes como método para agregar estas opiniones. Este enfoque requiere del personaje -el decisor- que actualiza su opinión gracias a la información que le suministran otros expertos.

Ya que la persona del decisor no existe como tal, se propone, en primera instancia que el experto  $\hat{i}$  sea el supra-bayesiano y que el resto de los  $m-1$  expertos le informe sus opiniones a fin de que él actualice la suya acerca de las alternativas.

Analizando por alternativa, se considera la ponderación de la alternativa  $j$ .

Sea entonces  $w_{\hat{1},j}^\wedge$  la probabilidad a priori de  $j$  del decisor  $\hat{1}$ ;  $W_{\hat{1}}^\wedge$  el vector  $(m-1)$  dimensional de las variables aleatorias  $W_{1,j}$  con  $1 = 1, 2, \dots, \hat{1}-1, \hat{1}+1, \dots, m$ ;  $\bar{w}_{\hat{1}}^\wedge$  el vector  $(w_{1,j}^\wedge, \dots, w_{\hat{1}-1,j}^\wedge, w_{\hat{1}+1,j}^\wedge, \dots, w_{m,j}^\wedge)$ , de valores de estas variables y sea  $p_{\hat{1},j}^\wedge$  la probabilidad a posteriori de  $j$  del decisor  $\hat{1}$ .

Dadas las condiciones del problema, lo usual es que el decisor "ad honorem" no tenga mayores conocimientos acerca del desempeño de los demás expertos como tales, por lo tanto, únicamente especifica que el vector de medias de las variables aleatorias  $W_{1,j}$  es de componentes iguales a  $w_{\hat{1},j}^\wedge$ . Entonces, de acuerdo con el resultado de Genest y Shervish, la probabilidad a posteriori de  $j$  para el decisor  $\hat{1}$  será

$$\bar{p}_{\hat{1},j}^\wedge = \Pr(j|W_{\hat{1}}^\wedge = w_{\hat{1}}^\wedge) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \hat{1}}}^m \lambda_{\hat{1}k}^\wedge w_{k,j} + \left(1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \hat{1}}}^m \lambda_{\hat{1}k}^\wedge\right) w_{\hat{1},j}^\wedge \quad (3)$$

$$\text{con } \sum_{\hat{1}} \lambda_{\hat{1}}^\wedge = \delta_{\hat{1}}$$

tal que  $\sum_{\hat{1}} \lambda_{\hat{1}}^\wedge \leq 1$  para asegurar que  $0 \leq p_{\hat{1},j}^\wedge \leq 1$  y donde  $\sum_{\hat{1}}^\wedge$  (matriz

de covarianzas de los expertos, sin considerar al decisor  $\hat{1}$ ) y  $\delta_{\hat{1}}^\wedge$  (vector de covarianzas entre  $\hat{1}$  y el resto de los expertos) se calculan de acuerdo con lo expuesto en la sub-sección anterior. La solución de esta última ecuación en términos de  $\lambda_{\hat{1}}^\wedge$  adecuadamente normalizados, brinda los factores de ponderación en la expresión que da el valor de  $\bar{p}_{\hat{1},j}^\wedge$ . Denotando por  $\mu_{\hat{1},j}^\wedge$  a la media de las opiniones  $w_{k,j}$  de todos los expertos distintos de  $\hat{1}$ , se propone acotar a  $\sum_{\hat{1}} \lambda_{\hat{1}}^\wedge$  por el número

$$\frac{M - 1}{M - |w_{ij}^{\wedge} - \mu_{ij}^{\wedge}|}$$

con el propósito de considerar, en la determinación de los factores de ponderación, la diferencia de opiniones entre el decisor y los expertos.

La repetición de este proceso para cada una de las alternativas, considerando como probabilidad a priori la ponderación correspondiente del mismo decisor  $\hat{i}$ , permite calcular un vector de ponderaciones agregadas de las alternativas, relativas al decisor  $\hat{i}$ , que será denotado por  $P(A|\hat{i})$ .

Considerando en cada ocasión a cada uno de los  $m$  expertos como suprabayesianos, se determinan  $m$  vectores de ponderaciones agregadas  $P(A|1), \dots, P(A|m)$ .

#### 3.2.4. Etapa de selección

Como resultado de la etapa de agregación se obtienen  $m$  vectores de ponderaciones agregadas de las alternativas. Cada uno de estos vectores es una opinión agregada de la de los expertos y en su medida son buenos candidatos para representar la opinión del grupo.

En el planteamiento del problema que se desea resolver se pide además, y como consecuencia de la ponderación que proponga el grupo, un ordenamiento de las alternativas, aspecto que no ha sido considerado por sí mismo. Cada uno de los decisores en su propuesta inicial ofrece un ordenamiento que debe y será considerado al momento de determinar la propuesta final. Para esto, se define el índice de desacuerdo de un ordenamiento relativo a un conjunto.

Sea  $I$  el conjunto de todas las  $n$ -uplas de números reales entre 1 y  $n$ ,  
 $I = \{ (n_1, n_2, \dots, n_n) / n_i \in [1, n] \}$ , y  $d$  la función distancia  
definida en  $I$ :

Si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in I$ , entonces

$$d(x, y) = \left( \sum (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

Si  $O$  es un elemento de  $I$  y si  $B \subset I$ , entonces, el índice de desacuerdo  
de  $O$  relativo a  $B$  se define como

$$i_B(O) = \sum_{y \in B} d(O, y)^2$$

Aplicando este concepto al problema, cada uno de los vectores  $w_i$ , para  
 $i = 1, 2, \dots, m$ , de prioridades de las alternativas, dados  
inicialmente por los decisores, determina un correspondiente elemento  
 $O_i$  de  $I$ , de la siguiente manera: Al mayor elemento componente del  
vector  $w_i$  se le asigna 1, al siguiente en orden descendente se le  
asigna 2 y así sucesivamente<sup>(3)</sup>. En caso de que hayan  $q$  componentes  
iguales en disputa de la posición  $h$ , a cada uno de ellos se le asigna  
el valor

$$h + (q - 1) / 2$$

o sea, que todos estos ocuparán la misma posición intermedia entre los  
lugares  $h, h+1, \dots, h+(q-1)$ . La componente de valor inmediatamente  
inferior a  $q$ , le corresponde la posición  $h+q$ , y así, hasta agotar las  
componentes del vector. Los elementos de  $I$  correspondientes a las  
ordenaciones dadas por todos los vectores  $w_i$ , forman el conjunto  $O$ .

---

3 Se puede convenir lo contrario: asignar 1 al menor valor, 2 al  
inmediatamente mayor y así sucesivamente. En este caso cambia el  
criterio de mínimo por el de máximo.

Usando el mismo procedimiento, las ordenaciones  $U_i$  de  $I$  correspondientes a los vectores  $p_i$  obtenidos por el método de agregación, forman el conjunto  $\mathcal{U}$ .

A partir del cálculo de los índices de desacuerdo de cada vector de  $\mathcal{U}$  respecto a  $O$ , se establece que el vector de ponderaciones que se seleccionará como representante de la opinión del grupo, es decir, como *solución óptima del problema*, será el correspondiente a la ordenación  $U_i^*$  de  $\mathcal{U}$  tal que

$$i_0(U_i^*) = \min_{U_i \in \mathcal{U}} i_0(U_i)$$

Si este mínimo es alcanzado por más de un vector, se puede seleccionar como solución, aquel que corresponda al decisor con varianza mínima, o bien, presentar este conjunto de soluciones óptimas a la instancia que hizo la consulta a los decisores, para su consideración. En cualquiera de los casos, la solución que se propone es buena, pues es, entre las opiniones agregadas obtenidas, la "más cercana" a las opiniones individuales propuestas por los expertos.

## CAPITULO IV

### EVALUACION DEL METODO

En este capítulo se realiza la importante tarea de evaluar al método de agregación, sin abandonar la opinión de la mayoría de los investigadores en el área de la toma de decisiones con múltiples decisores, de que todos los métodos diseñados para combinar opiniones, son aplicables a situaciones particulares de los problemas. En este sentido, se señala la utilidad del método, sus ventajas, limitaciones, y se discute su sensibilidad al tipo de opiniones que debe agregar y a los posibles cambios en las preferencias. Por último, se analizan algunas propiedades importantes que satisface.

#### 4.1 UTILIDAD DEL METODO

En la descripción del método de agregación debe haberse reflejado nuestra adhesión a la opinión generalizada de que "cada método para la toma de decisiones con múltiples decisores tiene su componente *ad hoc*" Este, es sumamente útil por su sencillez, lo que implica facilidad de uso, y también, por su aplicabilidad. Únicamente requiere que, utilizando el Proceso de Jerarquización Analítica, el grupo de expertos manifieste sus preferencias acerca de los elementos de la jerarquía que representa el problema.

El hecho de que el método precise de opiniones aisladas de los expertos, es una condición atractiva para diversas situaciones en las que puede aplicarse. Una de estas puede ser la de un grupo de personas, por ejemplo, accionistas de una compañía cuyas opiniones tienen igual peso, que debe llegar a una opinión conjunta acerca de un

conjunto de políticas que pueden ser puestas en ejecución en la compañía.

Otra puede ser la que se presenta cuando un individuo (p.e. el presidente de una empresa, un secretario de estado, el presidente de un país) debe decidir acerca de varias alternativas y pide la opinión de un grupo de expertos. En este marco, el método es aplicable en cualquiera de los niveles en que se realice la consulta:

Solicitud de las opiniones encontradas de los expertos para una posterior intervención del solicitante, aplicando el método y seleccionando la solución al problema.

Solicitud de las opiniones agregadas obtenidas por medio del método, para que, con base en estas, el solicitante decida la solución.

Solicitud a los expertos de la opinión agregada óptima.

## 4.2 VENTAJAS Y LIMITACIONES

El método hereda las ventajas que ofrece el Proceso de Jerarquización Analítica, como método utilizado para obtener las ponderaciones individuales de los expertos.

Fundamentalmente, no requiere de largas sesiones de debates, votaciones y rondas, por el contrario, es de fácil y rápida aplicación; obtiene preferencias más razonadas pues el PJA permite pensar en no más de dos elementos a la vez; tiene capacidad para medir valores intangibles y acepta la situación real de no transitividad en las preferencias. El método, considera la relación entre los expertos y ofrece un fusionamiento lineal de sus opiniones, bien fundamentado, ponderado por factores objetivos, productos del propio proceso de priorización.

Además, no limita superiormente el número de alternativas y de decisores que se pueden procesar. Es utilizable para cuando estos números son mayores que dos. La limitación la impondría el equipo de computación que se utilice para ayudar en los cálculos. Se sugiere que el caso extremo de dos alternativas se maneje con algún método de decisión por mayoría, y que el caso de dos decisores, se decida a través de intercambios personales de opinión.

El proceso de agregación no detecta la falta de calidad de alguna opinión, por esta razón, como condición inicial para su aplicación, se exige una selección adecuada de los expertos.

Por último, el método limita el grado de inconsistencia de la opiniones, por medio del índice de consistencia.

### 4.3 ANALISIS DE SENSIBILIDAD

El análisis de sensibilidad de un método consiste en el estudio del comportamiento de la solución óptima, bajo cambios en diferentes aspectos que lo caracterizan. En esta ocasión, el análisis de sensibilidad del método de agregación puede realizarse desde dos puntos de vista:

i) Analizando las soluciones que se obtienen al considerar distintos tipos de conjuntos de opiniones que pueden ser sometidos al proceso de agregación.

ii) Analizando la estabilidad de las soluciones óptimas, a cambios en las opiniones emitidas por los expertos.

#### 4.3.1. Análisis de casos extremos

Se considerarán conjuntos de opiniones que presenten características especiales (p.e. opiniones parecidas y opiniones muy diferentes), y se analizará la solución suministrada por el método de agregación. Se asumen pocos criterios, decisores y alternativas, para evidenciar más la diferencia entre los datos y facilitar el análisis visual conducente a la suposición de lo que "debe hacer el método".

Las tablas siguientes contienen los resultados (hipotéticos) obtenidos al consultar a once expertos acerca de la ponderación de cuatro alternativas descritas en términos de cinco criterios. El problema se representó en una jerarquía de tres niveles. Los datos se agruparon así: Los decisores A, B, C, D y E proporcionaron opiniones parecidas. Los decisores G, H, I, J, y K brindaron opiniones muy diferentes (entre ellos). Se añade la opinión de un experto G' con el mismo vector de pesos de G, pero con varianzas de errores muy altas.

| Varianzas<br>relativas a | Expertos |      |      |      |      |
|--------------------------|----------|------|------|------|------|
|                          | A        | B    | C    | D    | E    |
| Obj. general             | .02      | .13  | .001 | .02  | .08  |
| Criterio 1               | .018     | .02  | .09  | .12  | .1   |
| Criterio 2               | .1       | .0   | .2   | .067 | .155 |
| Criterio 3               | .0       | .07  | .084 | .026 | .0   |
| Criterio 4               | .05      | .008 | .17  | .14  | .006 |
| Criterio 5               | .01      | .04  | .05  | .008 | .017 |
| <b>Ponderación</b>       |          |      |      |      |      |
| Alternativa 1            | .609     | .62  | .604 | .58  | .6   |
| Alternativa 2            | .232     | .22  | .213 | .27  | .19  |
| Alternativa 3            | .11      | .10  | .07  | .11  | .185 |
| Alternativa 4            | .049     | .06  | .113 | .04  | .025 |

| Varianzas<br>relativas a | Expertos |     |      |      |      |      |
|--------------------------|----------|-----|------|------|------|------|
|                          | G        | G'  | H    | I    | J    | K    |
| Obj. general             | .017     | .4  | .03  | .002 | .01  | .08  |
| Criterio 1               | .02      | .28 | .02  | .008 | .12  | .0   |
| Criterio 2               | .0       | .32 | .09  | .2   | .036 | .165 |
| Criterio 3               | .1       | .3  | .0   | .071 | .023 | .024 |
| Criterio 4               | .03      | .29 | .004 | .19  | .14  | .006 |
| Criterio 5               | .016     | .31 | .11  | .06  | .005 | .001 |
| <b>Ponderación</b>       |          |     |      |      |      |      |
| Alternativa 1            | .127     |     | .52  | .1   | .06  | .3   |
| Alternativa 2            | .281     |     | .312 | .421 | .63  | .1   |
| Alternativa 3            | .129     |     | .015 | .436 | .2   | .3   |
| Alternativa 4            | .463     |     | .153 | .043 | .11  | .3   |

El método se aplicó a ciertos conjuntos de expertos, cuyas opiniones presentan características particulares que se señalan. Los resultados del proceso de agregación se muestran en la tabla correspondiente.

A) Grupo de cinco expertos con opiniones parecidas: Expertos A, B, C, D y E. El método produjo los siguientes vectores de pesos agregados:

| Ponderación agregada        | Expertos     |              |              |              |              |
|-----------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|                             | A            | B            | C            | D            | E            |
| Alternativa 1               | .607         | .607         | .605         | .605         | .609         |
| Alternativa 2               | .221         | .222         | .223         | .222         | .221         |
| Alternativa 3               | .096         | .096         | .107         | .113         | .116         |
| Alternativa 4               | .075         | .075         | .062         | .06          | .054         |
| <b>Índice de desacuerdo</b> | <b>1.414</b> | <b>1.414</b> | <b>1.414</b> | <b>1.414</b> | <b>1.414</b> |

Para este conjunto de opiniones similares, desde los puntos de vista de las ponderaciones de las alternativas y del ordenamiento que inducen sobre ellas (excepto el de C, con muy poca diferencia en los pesos de las alternativas 3 y 4), el método produjo igualmente, ponderaciones agregadas muy cerca del peso promedio (0.603, 0.225, 0.115, 0.057) y de los pesos comunes. Todas estas ponderaciones inducen el mismo ordenamiento (el producido por los decisores A, B, D y E), por lo tanto coinciden en su índice de desacuerdo. La homogeneidad de los datos originales conduce a que cualquiera de las opiniones agregadas pueda ser la solución escogida.

B) Grupo de cuatro expertos con opiniones parecidas y uno con opinión diferente: Expertos B, C, D, E y G. El método produjo los vectores de pesos agregados siguientes:

| Ponderación agregada        | Decisores |      |      |      |      |
|-----------------------------|-----------|------|------|------|------|
|                             | B         | C    | D    | E    | G    |
| Alternativa 1               | .587      | .568 | .557 | .591 | .545 |
| Alternativa 2               | .236      | .234 | .23  | .215 | .227 |
| Alternativa 3               | .094      | .106 | .105 | .107 | .079 |
| Alternativa 4               | .083      | .092 | .106 | .086 | .131 |
| <b>Indice de desacuerdo</b> | 5.66      | 5.66 | 7.98 | 5.66 | 7.98 |

En este caso, el método promedia las opiniones, sesgándose hacia la ponderación suministrada por los cuatro expertos con opiniones similares. Análogamente, el ordenamiento en las soluciones óptimas coincide con el producido por estos expertos. La ponderación producida al agregar el resto de las opiniones a la del decisor G (proponente de la opinión diferente), es una de las soluciones óptimas por una mínima diferencia entre los pesos de las alternativas 3 y 4. Se observa que las opiniones del resto se imponen sobre la del experto G con "la fuerza que les da su semejanza".

B') Grupo de los decisores del caso anterior con la diferencia de que el de la opinión diferente tiene varianzas de errores altas y muy distintas de las del grupo: Expertos B, C, D, E y G'.

| Ponderación agregada        | Decisores |      |      |      |      |
|-----------------------------|-----------|------|------|------|------|
|                             | B         | C    | D    | E    | G'   |
| Alternativa 1               | .537      | .535 | .585 | .528 | .548 |
| Alternativa 2               | .232      | .242 | .228 | .231 | .226 |
| Alternativa 3               | .103      | .113 | .095 | .11  | .094 |
| Alternativa 4               | .128      | .111 | .093 | .13  | .132 |
| <b>Indice de desacuerdo</b> | 7.98      | 5.66 | 5.66 | 7.98 | 7.98 |

La agregación de este conjunto de opiniones va dirigido hacia el análisis del papel de las varianzas de los errores en el método. El decisor G' suministra el mismo vector de pesos que G, pero con varianzas de errores significativamente distintas. Al aplicarse el método, destaca el hecho de que cambiaron los vectores de ponderación óptimos. El hecho de tener varianzas de errores distintas, en relación con las de los otros decisores, hacen que la correlación entre G' y el resto sea pequeña y por lo tanto que aumente el peso de su opinión en la agregación. Esto se refleja en el alejamiento de las ponderaciones agregadas de la común a los cuatro primeros expertos.

C) Grupo de cinco decisores con opiniones diferentes: Expertos G, H, I, J y K.

| Ponderación agregada | Decisores |      |      |      |       |
|----------------------|-----------|------|------|------|-------|
|                      | G         | H    | I    | J    | K     |
| Alternativa 1        | .303      | .191 | .299 | .3   | .313  |
| Alternativa 2        | .343      | .367 | .327 | .342 | .283  |
| Alternativa 3        | .165      | .285 | .139 | .139 | .124  |
| Alternativa 4        | .189      | .156 | .244 | .219 | .279  |
| Indice de desacuerdo | 14.6      | 13.2 | 14.6 | 14.6 | 14.39 |

En este caso, vale la pena comparar la solución obtenida por el método, con la ponderación promedio (0.221, 0.349, 0.216, 0.214), ante la falta de algún criterio evidente que induzca a pensar en el tipo de solución que debe producir el método. Las ponderaciones agregadas difieren del promedio, en valor y, en mayor grado, en los ordenamientos que producen sobre las alternativas. Esto confirma el papel de los factores de ponderación proporcionados por las varianzas de los errores.

De la comparación de los resultados obtenidos en cada ejemplo y los que se esperaba obtener dadas las características de los vectores de pesos que se deben agregar, se concluye que el método posee un **alto grado de eficiencia**. Las diferencias entre los vectores agregados producidos al considerar en su momento a cada experto como decisor, son mínimas, es decir, el método conduce a un vector de pesos agregado unificado.

#### 4.3.2. Estabilidad de las soluciones óptimas

Para el análisis del método en lo referente a la estabilidad de las soluciones óptimas, se tomará como punto de partida, los resultados obtenidos por Tatsuya Masuda (1990), acerca de la sensibilidad de las prioridades obtenidas a través del Proceso de Jerarquización Analítica.

Ubicándonos en las condiciones establecidas en el capítulo anterior, consideremos que el problema de decisión ha sido representado en una jerarquización de  $N$  niveles, donde cada nivel  $t$  está constituido por los  $N_t$  elementos  $e_1(t), e_2(t), \dots, e_{N_t}(t)$ . Sean además:

$w_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in})^t$  el vector de pesos proporcionados por el decisor  $i$ , acerca de las  $n$  alternativas bajo consideración,  $i = 1, \dots, m$ .

$I_{kj}$  conjunto de índices de elementos del nivel  $k$  conectados directamente con el elemento  $j$  del nivel  $k-1$ .

$p_{kj}^i = (p_{1j}, \dots, p_{N_j})^t$  el vector de pesos locales, para el decisor  $i$ , de los elementos del nivel  $k$  respecto al  $j$ -ésimo elemento del nivel  $k-1$ ,  $k = 2, 3, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, N-1$ .

$B_k^i = [p_{k1}^i, \dots, p_{k, N_k-1}^i]$  la matriz cuyas columnas son los vectores de pesos, para el decisor  $i$ , de los elementos del nivel  $k$  respecto a cada uno de los del nivel  $k-1$ .

$q_k^i = (q_{k1}^i, \dots, q_{k, N_k}^i)^t$  el vector de pesos compuestos de los elementos del nivel  $k$  respecto al objetivo general del problema. De aquí,  $w_i = q_N^i$ .

Para cada decisor  $i$ , a partir de las matrices  $B_k^i$  se define la matriz  $(\sum_k N_k \times \sum_k N_k$  por bloques) de accesibilidad de prioridades, de la siguiente manera:

Sea  $B^i$  la matriz por bloques  $\sum_k N_k \times \sum_k N_k$

$$B^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_2^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_3^i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_N^i \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_{N_1} & \underbrace{\hspace{1cm}}_{N_2} & \dots & \underbrace{\hspace{1cm}}_{N_{N-1}} & \underbrace{\hspace{1cm}}_{N_N} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} N_1 \\ \} N_2 \\ \} N_3 \\ \vdots \\ \} N_N \end{matrix}$$

La matriz (triangular inferior) de accesibilidad se define como

$$A^i = I + (B^i)^2 + \dots + (B^i)^{N-1}$$

donde  $I$  es la matriz identidad de orden  $\sum_k N_k$ .

Si  $A_{pq}^1$ ,  $p, q = 1, \dots, N$  denota a los bloques de  $A^1$ , entonces:

$$A_{pq}^1 = \begin{cases} 0 & \text{si } p < q \\ I & \text{si } p = q \\ B_p^1 \quad B_{p-1}^1 \dots B_{q+1}^1 & \text{si } p > q \end{cases}$$

Si  $p > q$ , las columnas respectivas de  $A_{pq}^1$  representan las prioridades compuestas de los elementos del nivel  $p$  respecto a los elementos del nivel  $q$ . La construcción de esta matriz permite visualizar en conjunto las posiciones de cada subcriterio o alternativa respecto a cada criterio, para la realización de análisis detallados.

Sea  $S = \{ Ph_1, \dots, Ph_s \}$  el conjunto de soluciones óptimas obtenidas al aplicar el método de agregación, y sea  $d \in \{h_g\}_{g=1, s}$ .

Supongamos que el decisor  $d$  tiene cierta duda acerca de la ponderación de los elementos del nivel  $k$  respecto al elemento  $j$  del nivel  $k-1$ . Es decir, duda de la constitución del vector  $p_{kj}^d$  y piensa cambiar su opinión. En estas circunstancias, resulta interesante analizar cómo el cambio en este vector de prioridades altera las de las alternativas para  $d$ , y en consecuencia, el resultado del proceso de agregar su opinión a la del resto de los decisores.

En términos generales, es obvio que un cambio notorio en las opiniones dará lugar a una alteración significativa de las opiniones agregadas, que puede conducir a otro conjunto de soluciones óptimas. Cabe preguntarse entonces: ¿Hasta dónde es posible alterar la opinión de  $d$  de manera que no se altere el ordenamiento de las soluciones óptimas? Consideremos que el decisor  $d$  cambia su vector de pesos  $p_{kj}^d$  al vector

$p_{kj}^d + \Delta p_{kj}^d$  (1), que el resto de los decisores no altera sus apreciaciones y que los cambios en los factores de ponderación para el cálculo de las probabilidades a posteriores son despreciables (2). Si se considera además la posibilidad de cambio del vector  $p_{kj}$  en su dominio

$$\{ p_{kj} \mid \sum_{i=1}^{N_k} p_i = 1, p_i \geq 0 \}$$

entonces, de acuerdo con Masuda, el vector de prioridades  $w_d$  de las alternativas, cambia al nuevo vector

$$w_d + \Delta w_d = w_d + q_{k-1,j} \Delta N_k \Delta p_{kj}$$

en la región convexa

$$\Gamma_N(p_{kj}) = \{ w_d \mid w_d = \sum_{i \in I_{kj}} \beta_i p_{ij}, \sum_{i=1}^{N_k} p_{ij} = 1, p_{ij} \geq 0 \}$$

donde  $\beta_i$  es el vector de orden  $N_k$  dado por

$$\beta_i = \Delta N_k [B_k]_i q_{k-1}$$

y la matriz  $[B_k]_i$  es el resultado de reemplazar la columna  $j$  de la matriz  $B_k$  por el vector fundamental  $e_i$  de dimensión  $N_k$ .

---

1 Puesto que el análisis se refiere al decisor  $d$ , para simplificar la notación se obviará el índice para el decisor, siempre que no produzca confusión.

---

2 Supuesto válido pues un cambio en las opiniones no implica necesariamente un cambio en los índices de consistencia.

Se puede deducir entonces, que la posibilidad de grandes cambios en  $w_d$ , producto de pequeños cambios en  $p_{kj}$ , depende del tamaño de la región convexa  $\Gamma_N(p_{kj})$  de puntos extremos  $\beta_1$ , para  $1 \in I_{kj}$ . El escalar

$$\alpha(p_{kj}) = \left[ \frac{1}{|I_{kj}| - 1} \sum_{1 \in I_{kj}} (\beta_1 - \bar{\beta})^t (\beta_1 - \bar{\beta}) \right]^{1/2}$$

llamado **coeficiente de sensibilidad de  $w_d$** , es un buen indicador del tamaño de la región convexa.

El conjunto S de soluciones óptimas se mantendrá, si los ordenamientos de las alternativas inducidos por  $p_{kj}$  y por los vectores de S no se alteran.

Por un lado, el orden producido por  $w_d$  no cambia, en la medida en que el coeficiente  $\alpha(p_{kj})$  sea suficientemente pequeño. Es decir, si los puntos extremos  $\beta_1$  están adecuadamente cercanos. Esto significa que las columnas  $1 \in I_{kj}$  en  $A_{Nk}$  (i.e. los pesos compuestos de las alternativas respecto a los elementos  $1$  en el nivel  $k$ ) no difieren mucho, y que el peso compuesto del elemento  $j$  del nivel  $k-1$  es pequeño. La primera condición se cumple si los elementos en el nivel  $k$  conectados directamente con el elemento  $j$  de  $k-1$  son relativamente homogéneos, de manera que no produzcan vectores de pesos con componentes muy diferentes.

También se puede mantener el ordenamiento producido por  $w_d$ , independientemente del cambio en  $p_{kj}$ , si en cada uno de los vectores  $\beta_1$ , el orden entre los valores de los componentes, es el mismo. En efecto, si  $u, v$  son dos alternativas y si para todo  $1 \in I_{kj}$  se tiene que  $\beta_{1u} < \beta_{1v}$  entonces,

$$w_{du} = \sum_{i \in I_{kj}} \beta_{iu} p_{ij} < \sum_{i \in I_{kj}} \beta_{iv} p_{ij} = w_{dv}$$

Por otro lado, se puede garantizar que los ordenamientos inducidos por las soluciones óptimas se mantienen, si se cumplen algunas otras condiciones.

En el caso del vector  $P_d$ , supongamos que los pesos agregados de las alternativas  $u$  y  $v$  (antes del cambio) satisfacen la relación  $\bar{p}_u < \bar{p}_v$ . Es decir que

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq d}}^{m-1} \lambda_{dl}^u w_{lu} + (1 - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq d}}^{m-1} \lambda_{dl}^u) w_{du} < \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq d}}^{m-1} \lambda_{dl}^v w_{lv} + (1 - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq d}}^{m-1} \lambda_{dl}^v) w_{dv}$$

donde  $\lambda_{dl}^u$  es el factor del decisor  $l$  cuando  $d$  es el decisor y se evalúa a la alternativa  $j$ .

Para mantener esta relación en el vector  $\tilde{P}_d$  que se obtiene con la nueva ponderación, es suficiente que

$$(1 - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq d}}^{m-1} \lambda_l^u) \Delta w_{du} < (1 - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq d}}^{m-1} \lambda_l^v) \Delta w_{dv}$$

o sea que

$$\Delta w_{du} < \Delta w_{dv}$$

y que, para la nueva ponderación  $\tilde{w}_d$ , se cumpla que,

$$| \mu_{dv} - \tilde{w}_{dv} | < | \mu_{du} - \tilde{w}_{du} |$$

donde  $\mu_d$  es la media de las opiniones de todos los decisores, excepto el decisor  $d$ , respecto a la alternativa (.).

En el caso de los otros vectores óptimos de S, consideremos al vector  $P_h$ ,  $h \neq d$ . La relación de orden respecto a u y v se mantiene en  $\tilde{P}_h$  si

$$\lambda_{hd}^u \Delta w_{du} < \lambda_{hd}^v \Delta w_{dv}$$

La satisfacción de estas condiciones garantiza la estabilidad de las soluciones óptimas. Cuando estas no se cumplen, el orden entre las alternativas puede cambiar, dependiendo de la forma como cambie  $p_{kj}$ .

En resumen, si el vector de pesos  $p_{kj}$  se altera en  $\Delta p_{kj}$  y se produce el cambio del vector de prioridades de las alternativas de  $w_d$  al vector  $\tilde{w}_d = w_d + \Delta w_d$ , entonces, el ordenamiento del conjunto de soluciones óptimas obtenido originalmente no se afecta, si se satisfacen las condiciones:

- $\alpha(p_{kj})$  suficientemente pequeño
- iguales ordenamientos en  $w_d$  y  $\Delta w_d$
- $|\mu_{dv} - \tilde{w}_{dv}| < |\mu_{du} - \tilde{w}_{du}|$  para todo par de alternativas u,v
- $\lambda_{hd}^u < \lambda_{hd}^v$  para todo decisor  $h \neq d$ .

#### 4.4. EL METODO COMO FUNCION DE SELECCION SOCIAL

Cualquier método dirigido hacia la selección de ordenamientos agregados o de consenso, a partir de preferencias dadas también en forma de ordenamientos, debe poseer ciertas propiedades naturales. Algunas de estas -los conocidos *axiomas de bienestar social*- fueron

propuestos originalmente por K. J. Arrow en 1951 y posteriormente discutidos y modificados por una gran cantidad de autores. Analizaremos algunas de estas propiedades en el contexto de nuestro método de agregación.

Definición: Sea  $A$  es el conjunto de las alternativas y  $P_i$  la relación de preferencia del experto  $i$  sobre el conjunto  $A$ , la cual define un orden débil. Es decir,  $P_i$  es asimétrica y negativamente transitiva. Una **función de selección social** es una función  $\mathcal{F}$  tal que para toda nupla  $D = (P_1, \dots, P_m)$  de órdenes débiles sobre  $A$ , asigna al par  $(A, D)$  un subconjunto  $\mathcal{F}(A, D)$  de  $A$ .  $\mathcal{F}(A, D)$  es el **conjunto de selección** de  $A$ , es el conjunto de las mejores alternativas de  $A$ .

Con base en esta definición se afirma que el método de agregación propuesto define una función de selección social.

Definición: Se llama **función de bienestar social** a la regla mediante la cual se establece un ordenamiento social para cada conjunto de ordenamientos.

El conjunto de relaciones de preferencias de los expertos define un conjunto de ordenamientos de las alternativas. Además, una de las etapas del método consiste en la selección del ordenamiento óptimo entre los inducidos por las ponderaciones agregadas obtenidas en la etapa de agregación. Por lo tanto, esta etapa se reduce a la aplicación de una función de bienestar social.

Sea  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ , el conjunto definido por (Gaiha y Gupta, 1977),

$$\mathcal{R} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / x_i \geq 0, \alpha_p \leq \sum_{i \in K_p} x_i \leq \beta_p, \forall K_p, p = 1, 2, \dots, n \right\}$$

donde  $K_p \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  de cardinalidad  $p$ ;  $\alpha_p = \frac{p(p+1)}{2}$  y

$$\beta_p = \frac{2np + p - p^2}{2}$$

Las figuras 4, 5 y 6 muestran el espacio  $\mathcal{R}$  para  $n = 2, 3$  y  $4$ . Los puntos extremos del poliedro corresponden a las ordenaciones completas (sin empates) y los puntos medios de los segmentos determinados por estos puntos extremos, a las ordenaciones con empates. El punto medio del poliedro corresponde al ordenamiento en el que todas las alternativas están empatadas.

Sean además  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{U}$  subconjuntos de  $\mathcal{R}$ , constituidos por las ordenaciones producidas, respectivamente, por las ponderaciones originales suministradas por los expertos y por las ponderaciones agregadas.

Se define  $F_{\mathcal{O}}$ , función de bienestar social respecto a  $\mathcal{O}$ , de  $\mathcal{R}^m$  en  $\mathcal{R}$ , tal que

$$F_{\mathcal{O}}(U_1, U_2, \dots, U_m) = \{U^*\} \subset \mathcal{R}$$

$$\text{donde } i_{\mathcal{O}}(U^*) = \sum_{O_i \in \mathcal{O}} d(U^*, O_i)^2 = \min_{i=1, m} i_{\mathcal{O}}(U_i)$$

Esta función satisface las siguientes condiciones de demostración inmediata:

Condición de herencia

Si  $\hat{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}$  entonces  $F_{\mathcal{O}}(\mathcal{U}) \cap \hat{\mathcal{U}} \supseteq F_{\mathcal{O}}(\hat{\mathcal{U}})$ . Es decir, si se hace una

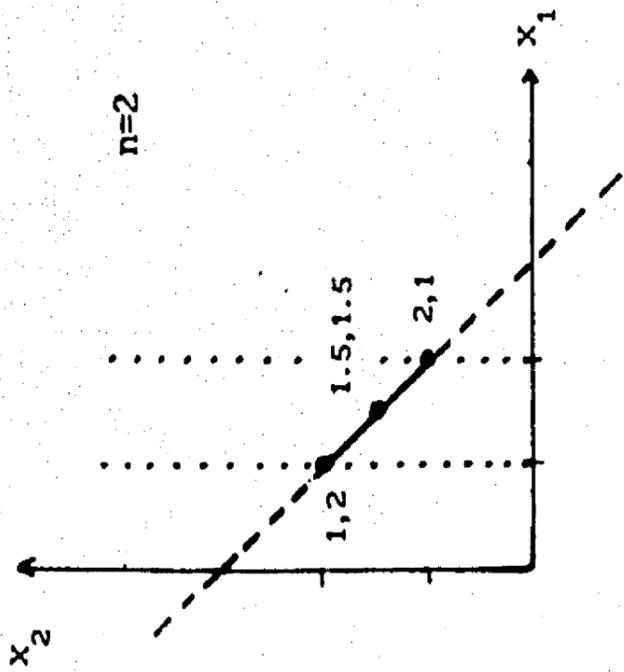


figura 4

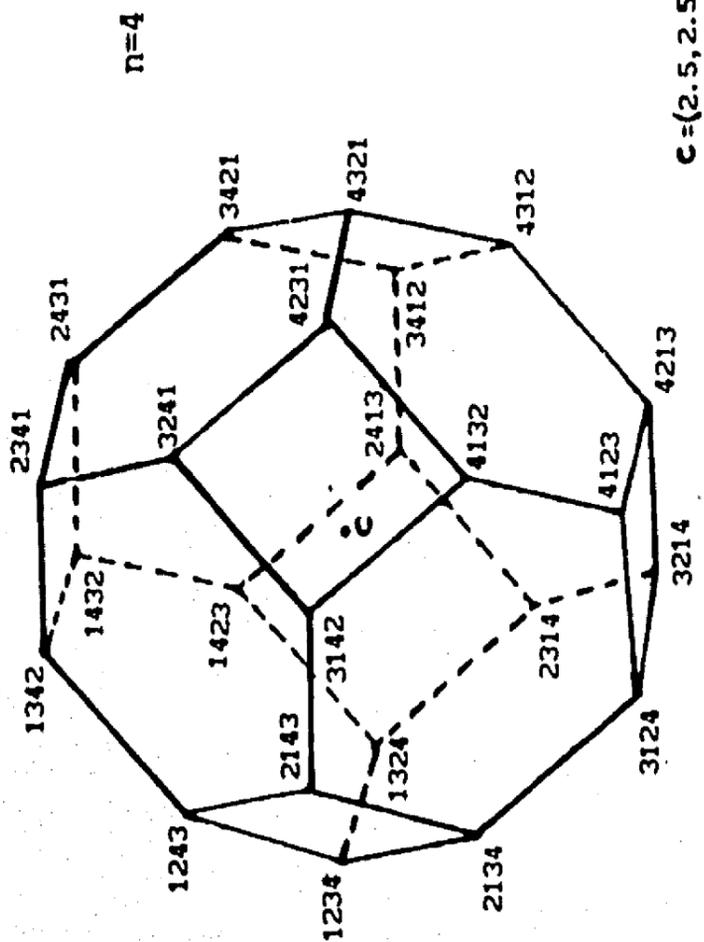


figura 6

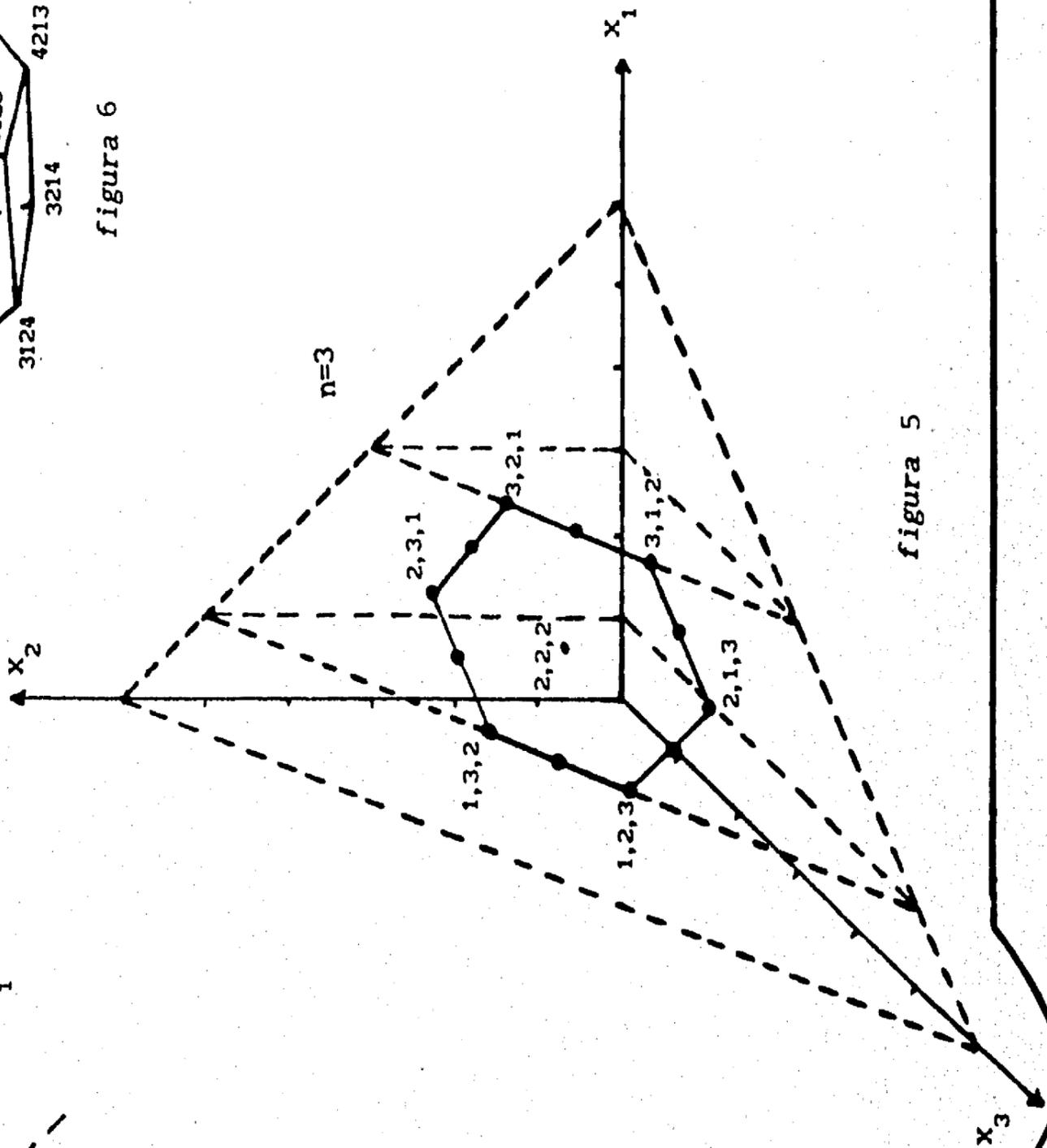


figura 5

selección de un conjunto  $\mathcal{U}$  y otra de un subconjunto de él, entonces los ordenamientos seleccionados de  $\mathcal{U}$  pertenecientes al subconjunto, serán seleccionados del subconjunto.

Condición de independencia de ordenamientos irrelevantes

Si  $F_0(\mathcal{U}) \subset \hat{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$  entonces  $F_0(\hat{\mathcal{U}}) = F_0(\mathcal{U})$ . Es decir, si un subconjunto de  $\mathcal{U}$  contiene todos los ordenamientos escogidos de  $\mathcal{U}$ , entonces la selección sobre el subconjunto es la misma que sobre el conjunto.

Condición de consistencia

Si  $\{O_1, O_2\}$  es una partición de  $O$  y si los mismos ordenamientos son seleccionados respecto a  $O_1$  y a  $O_2$ , entonces esos ordenamientos serán seleccionados respecto a  $O$ .

Condición de independencia de convenciones

El método de selección es independiente de la convención que se adopte para asignar las primeras posiciones en el ordenamiento a la alternativa con mayor o menor ponderación.

Condición de invariancia por transformaciones afines de escala

El método no se altera si se utiliza cualquier secuencia de pesos de la forma  $k, k+\alpha, k+2\alpha, \dots, k+(n-1)\alpha$ .

Además, la distancia  $d$ , a través de la cual se define la función de bienestar, satisface las siguientes propiedades:

Axioma 1:  $d(U, V) \geq 0$  ;  $d(U, V) = 0$  si  $U = V$

Axioma 2:  $d(U, V) = d(V, U)$

Axioma 3:  $d(U, W) \leq d(U, V) + d(V, W)$

que son las condiciones usuales para una métrica, y también satisface:

Axioma 4: Invariante por permutaciones

Si  $O'$  resulta de  $O$  por permutación de alternativas y  $U'$  resulta de  $U$  por la misma permutación, entonces

$$d(O', U') = d(O, U)$$

Axioma 5: Pareto

Si todos los ordenamientos de  $O$  coinciden en las primeras y últimas posiciones y difieren únicamente en  $k$  posiciones en el centro, entonces la selección respecto a  $O$  puede realizarse como si las  $k$  alternativas fueran las únicas bajo consideración. Esto es equivalente a que, si  $O''$  y  $U''$  resultan de  $O$  y  $U$  al agregarles la misma  $(n+1)^{\text{a}}$  alternativa, entonces

$$d(O'', U'') = d(O, U)$$

Estas condiciones constituyen una serie de propiedades deseables para la función de bienestar social que, en el método de agregación propuesto, define la forma de selección de la solución.

## CAPITULO V

### UN PROBLEMA DE APLICACION

El problema de aplicación que se describe a continuación constituye un proyecto de investigación que está siendo realizado por la Comisión de Ciencia y Tecnología del Instituto de Estudios Nacionales de la Universidad de Panamá, titulado " **Proyecto de Avalúo de los terrenos de las barriadas de ocupación espontánea establecidas en el sector oeste del área revertida de la Provincia de Panamá**". Este proyecto nace a raíz de la necesidad del gobierno de la República de Panamá de reglamentar las medidas urgentes adoptadas respecto a los bienes revertidos del Area del Canal, y del deber de la Universidad de Panamá de dar a conocer su punto de vista profesional en este problema de carácter nacional.

#### 5.1 INTRODUCCION

El problema de la satisfacción de la demanda habitacional para los sectores de escasos recursos es competencia, principalmente, del Estado y también de la empresa privada, ya que éstos son los agentes que supuestamente conducen la tarea de desarrollar al país.

La formación acelerada de asentamientos humanos espontáneos es un claro síntoma de que el problema habitacional del país está en niveles críticos. Más aún, esta situación es característica exclusiva de los países de más bajo nivel de desarrollo.

En el escenario de la historia de la urbanización en Panamá se ha presentado con frecuencia el oprobioso acto de las autoridades que intentan desalojar estas barriadas. Sin embargo, las más de las veces, el Gobierno ha fracasado en sus propósitos (la barriada espontánea más antigua -"Boca de la Caja"- resistió intentos de desalojo durante más de 40 años, hasta su legalización en 1984).

Recientemente, sin embargo, las autoridades lograron desalojar varias zonas que habían sido ocupadas por pobladores sin tierra y/o sin casa. Podemos citar, entre otras, San Cristóbal, en los terrenos (baldíos) de la Licorera Varela en la Vía Tocumen; La Paz, entre el Jardín de Paz y Panamá Viejo y la que se denominó "Ni un Paso Atrás", entre el antiguo crematorio y el río Matías Hernández, etc.

Una característica común de estos tres movimientos de toma de terrenos es que las tierras ocupadas eran de propiedad privada. Esto contrasta, por ejemplo, con los casos de la barriada "Nueva Esperanza", en Felipillo, en áreas que una vez utilizó el ingenio del mismo nombre, donde los "espontáneos" han extendido la barriada sobre unas 100 hectáreas, y el sector Oeste del Area Revertida en la provincia de Panamá, donde un proceso inédito de urbanización espontánea ha ocupado alrededor de 200 hectáreas.

Es importante destacar que, en la mayoría de casos de desalojo, los terrenos disputados continúan sin uso para el desarrollo, mucho tiempo después del acto. Aquí se puede citar el notorio ejemplo de "Loma de La Pava", vieja barriada espontánea detrás de la Cervecería Nacional, que fue desalojada hace más de quince años, sin que hasta ahora se haya hecho uso de estas tierras.

Estos actos de desalojo, aunados al hecho de que desde 1984 el Ministerio de Vivienda abandonó prácticamente las inversiones en vivienda popular, permiten pensar que los pobladores desalojados y los

nuevos "espontáneos" han dirigido sus esfuerzos hacia otra parte buscando líneas de menor resistencia, por ejemplo, en tierras estatales.

ESTA TERCERA NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

Esta situación impone la necesidad de hacer un análisis más lógico y racional del problema de las tomas de tierra: partiendo de la premisa de que estos eventos son consecuencia de la imposibilidad de realizar acciones oportunas por parte del Gobierno, corresponde a las autoridades llamar a la negociación, con la finalidad de recuperar el liderazgo que han perdido en este aspecto de la gestión de desarrollo, de manera que el proceso de urbanización pueda ser mínimamente racionalizado.

Ocasionalmente, estas tomas de terrenos pueden servir de base para realizar proyectos de autoconstrucción. No se requiere un estudio de demanda habitacional, por ejemplo, pues ésta se ha manifestado "con una explosión"; toda la estructura de servicios sería construida por la comunidad. El Estado y/o las empresas involucradas sólo tendrían que proveer equipos, materiales y directrices, a precios razonables y alguna otra ventaja suplementaria.

Se llama la atención al hecho de que en los últimos tiempos se están presenciando procesos de urbanización que no tienen antecedentes en la historia del país y que, por eso mismo, requieren de un tratamiento igualmente inédito. A continuación se referirá uno de estos casos.

## 5.2 LAS AREAS REVERTIDAS CONTIGUAS A LA POBLACION DE ARRARIJAN

En el Tratado del Canal de Panamá de 1977 (Tratado Torrijos-Carter) entre la República de Panamá y los Estados Unidos, el segundo se compromete (y así lo ha estado cumpliendo), a devolver

paulatinamente, a jurisdicción panameña, territorios ubicados en la antigua Zona del Canal. La Ley 1, del 14 de enero de 1991, "Por lo cual se adoptan medidas urgentes con respecto a bienes revertidos del Area del Canal" (documento a), declara como susceptible de arrendamiento, con opción de compra, entre otras, un área de 1040 hectáreas aproximadamente, con los siguientes límites: "Norte, Sitio de Defensa; Sur, distrito de Arraiján; Este, Sitio de Defensa (Fuerte Kobbe); Oeste, distrito de Arraiján"; y un área de 24 hectáreas aproximadamente, comprendida entre el Sitio de Defensa (Fuerte Kobbe), el Poblado de Veracruz y el Océano Pacífico.

Dentro de estos perímetros se dio, desde hace más de cinco años, un curioso proceso de toma de terrenos y de construcción de viviendas que, por el alto grado de organización de sus moradores y el tipo de infraestructura urbana establecida, induce -de manera casi inevitable- al Estado a corresponder con acciones novedosas y, si es posible, científicas, a esta acción armónica desarrollada por los miembros de estas comunidades.

Con base en las consideraciones anteriores, surge la idea de hacer un estudio de avalúo de estos terrenos donde se ubican catorce (14) barriadas, que se han ido formando espontáneamente, en un proceso continuo, que no ha dejado de crecer a lo largo de este último quinquenio. Estas barriadas ocupan, a la fecha, un poco más de 200 hectáreas.

### 5.3 ANTECEDENTES

En el documento **Estudio para el Diseño y Aplicación de Metodologías para el Avalúo de los Terrenos Revertidos del Area Canalera**, del Instituto de Estudios Nacionales (1987), se introdujo el llamado Modelo de Optimización Inducida (c).

Se trata de un modelo de programación entera de tipo transporte, cuya función objetivo es de costos, en el que el vector solución que minimiza estos costos es una estrategia de desarrollo urbano, pues el juego de valores que adquieren las variables es un programa de cantidades de diferentes tipos de vivienda.

Agregando restricciones para esas variables se puede inducir la solución hacia una estrategia o combinación de tipos de vivienda dados.

En el caso de las catorce barriadas a que se refiere este estudio, se puede aplicar el Modelo de Optimización Inducida para obtener los llamados "precios sombra", que responderían al valor de la tierra de acuerdo a lo que sobre ella se ha construido, en dependencia del carácter de la función objetivo (minimización de costos, maximización de utilidades u otros). Este modelo ha sido aplicado a partir de estrategias de desarrollo hipotéticas, pero puede ser utilizado para hacer asignaciones de precios en lugares en que las estructuras urbanas estén montadas.

No obstante, se ha decidido aplicar un nuevo método que se ajusta un poco más a las condiciones existentes, pues considera algunos criterios propios de la situación de terrenos con presencia de estructuras y algunos factores socio-económicos y políticos involucrados. Estas circunstancias hacen de este estudio de avalúo un caso muy particular.

Es, entonces, la segunda ocasión que, en Panamá, se trabaja con tecnología propia para asignar precios a terrenos. En ambos casos, la tecnología ha sido producida por especialistas en Investigación de Operaciones del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, asociados al Instituto de Estudios Nacionales de la Universidad de Panamá.

El modelo que se aplicará para el avalúo, incluye en su parte medular, la aplicación de un método de agregación de opiniones.

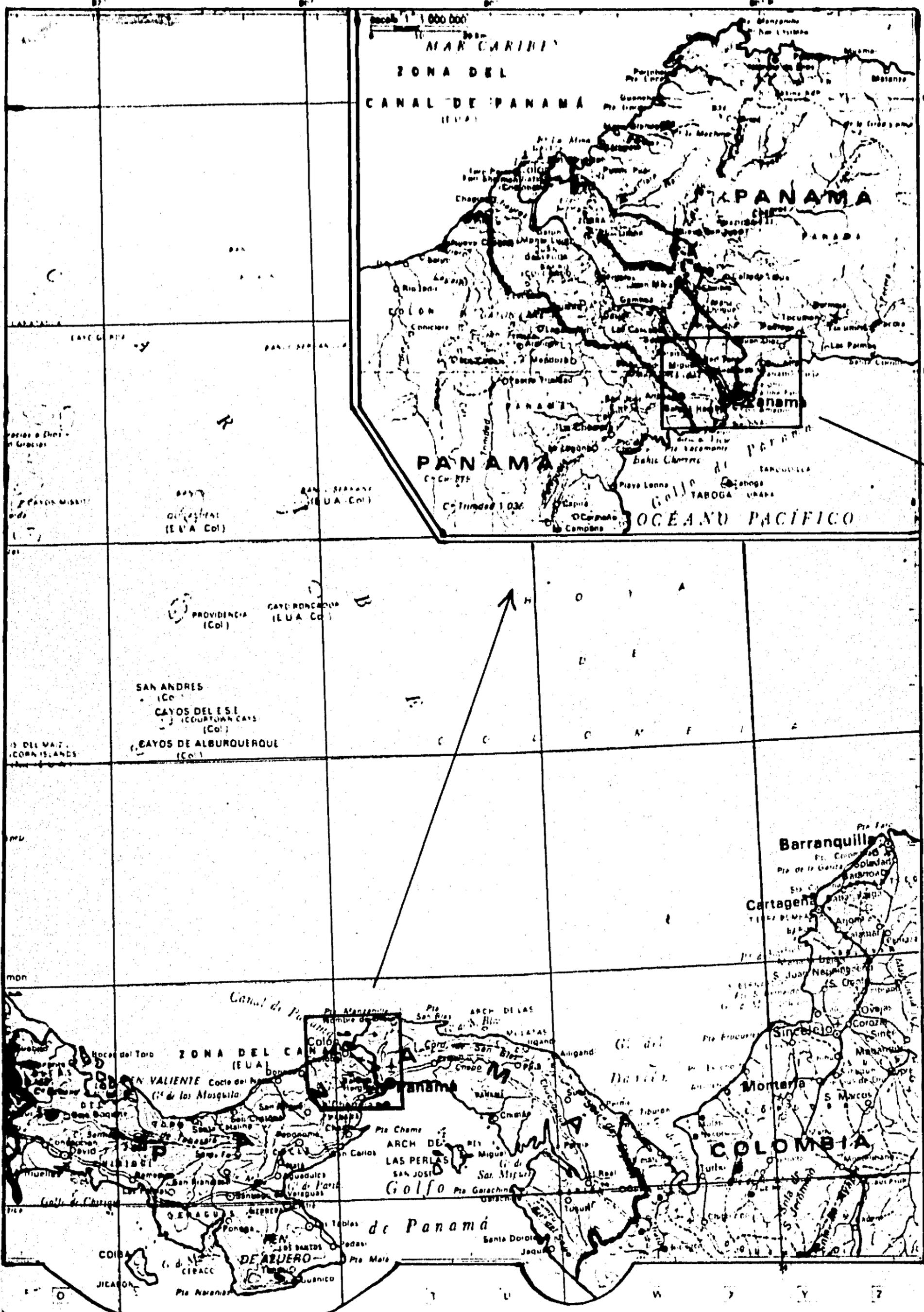
#### 5.4 TAREAS INICIALES

El estudio de un área de terreno exige, en la mayoría de los casos, la existencia de un mapa de dicha región. En el caso de los dos polígonos que nos ocupan, estos están bien demarcados y se cuenta con sus mapas pues la Ley 1 a la que se ha hecho referencia, los anexa. Pero, el estudio que se propone el proyecto necesita de una mayor precisión en cuanto a área acupada, más aún, necesita de una delimitación de las barriadas allí constituídas, y un poco más de detalle: la densidad de ocupación de cada una de ellas.

La forma como se fueron ocupando estos terrenos y constituyéndose en barriadas "sobre la marcha", de una manera cuidadosamente organizada, pero todo en un marco "ilegal", fueron algunas de las causas por las que no se contara con una demarcación gráfica "pública" de las áreas ocupadas y con mayor razón, de las barriadas. Esas mismas razones impedían el acceso a cualquier tipo de información proveniente de las personas que habitan estas zonas. Sus temores (justificados) obstaculizaron, en todo momento, la realización de las tareas propuestas en el proyecto.

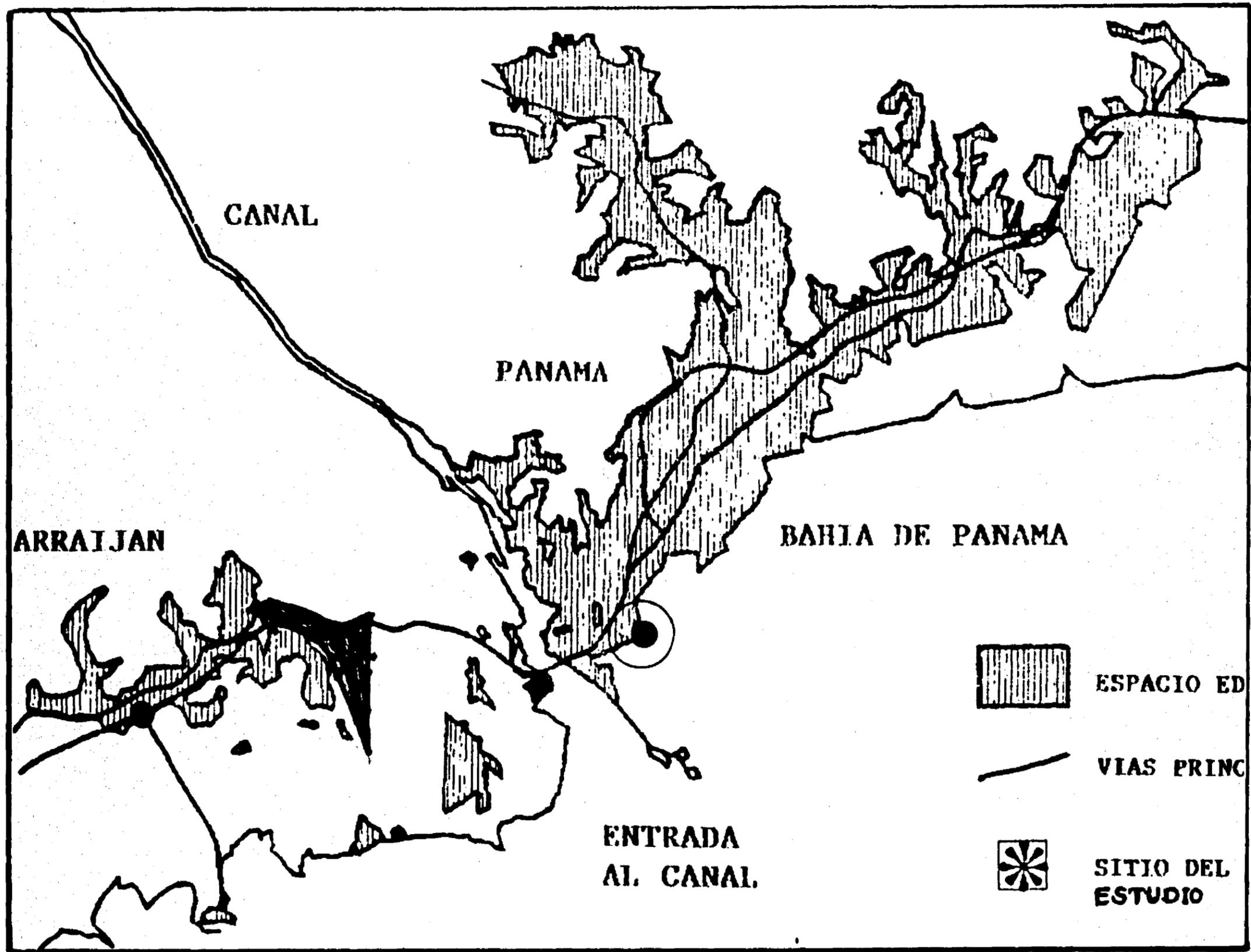
La consecución de un primer aproximado de mapas, fue lograda después de varios vuelos sobre el área en los que se tomaron una gran cantidad de vistas. Posteriormente, y después de varias juntas con los directivos de las asociaciones establecidas en el lugar, se proporcionó otros datos que fueron precisando la información necesaria para el estudio. Las figuras 7, 8 y 9 muestran, respectivamente, el Area del Canal en la República de Panamá, la ubicación de los polígonos objeto de estudio en esta área y un acercamiento de estos polígonos indicando los sitios de actual ocupación.

figura 7



# CIUDAD DE PANAMA

figura 8



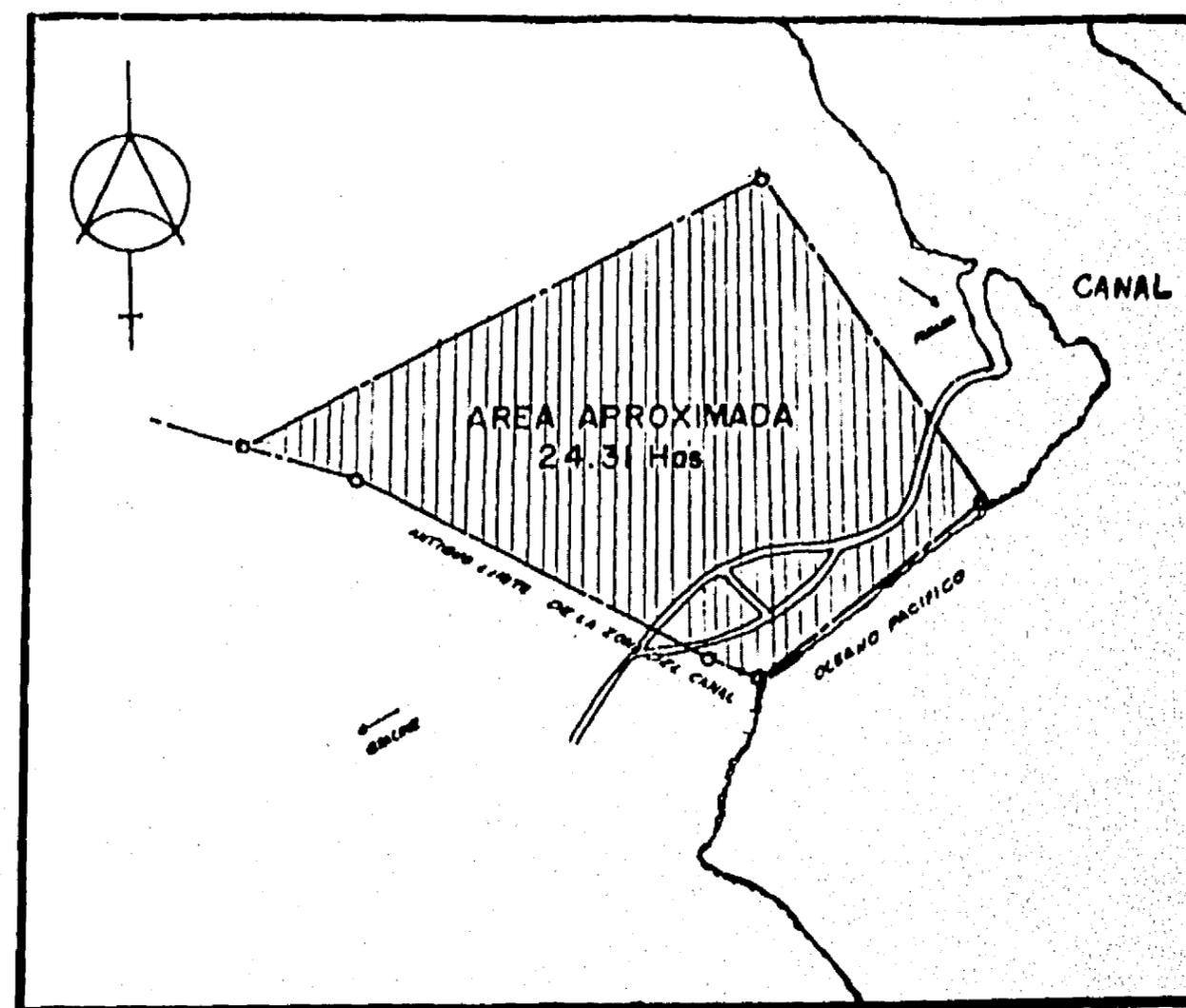
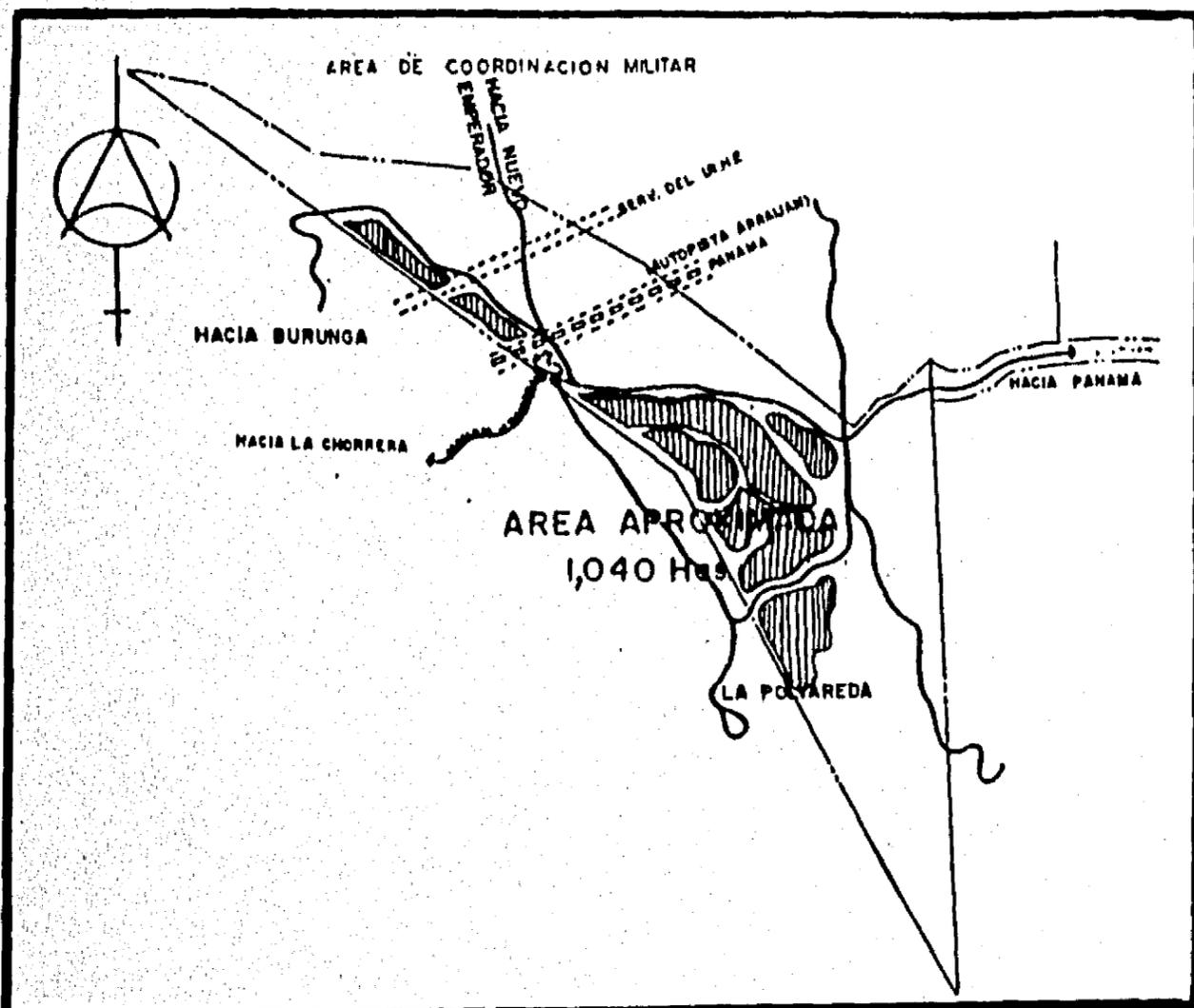
OS 507 643733

UP FECTORIA

05/02/91 13:36

P02

figura 9



**POLIGONO ARRAIJAN**

Ubicación: Arraiján, Ancón, Panamá.

Límites:

- Norte: Sitio de defensa (Nuevo Emperador).
- Sur: Arraiján.
- Este: Fuerte Kobbe.
- Oeste: Arraiján.

**POLIGONO VERACRUZ**

Ubicación: Veracruz, Ancón, Panamá.

Límites:

- Norte: Fuerte Kobbe.
- Sur: Litoral Pacífico.
- Este: Fuerte Kobbe y Vía a Veracruz.
- Oeste: Antiguo límite Zona del Canal-Veracruz.



**AREA OCUPADA**

En el siguiente cuadro se presentan registros preliminares de las 14 barriadas en su orden de formación, su extensión territorial y el tamaño promedio que se ha usado como norma para la lotificación.

CUADRO No. 1

Las barriadas en orden de formación y detalles fundamentales

| No. | Barriada de ocupación  | Año de inicio de la toma de los terrenos | Extensión aproximada en hectáreas | Tamaño del lote familiar en metros <sup>2</sup> |
|-----|------------------------|--|-----------------------------------|---|
| 1   | Dos mil                | 1985                                     | 22                                | 600   |
| 2   | Generación 2000        | 1985                                     | 23.5                              | 600   |
| 3   | El Progreso            | 1986                                     | 6                                 | 1000  |
| 4   | Panamá                 | 1986                                     | 24.3                              | 600   |
| 5   | Amor y Paz             | 1986                                     | 2                                 | 600   |
| 6   | Omar Torrijos          | 1987                                     | 7                                 | 600   |
| 7   | 7 de Septiembre        | 1987                                     | 50                                | 600   |
| 8   | La Paz                 | 1987                                     | 100                               | 600   |
| 9   | La Libertad            | 1987                                     | 4                                 | 600   |
| 10  | Los Pinos              | 1987                                     | 16.6                              | 600   |
| 11  | 1a. Etapa Torrijista   | 1987                                     | 4                                 | 600   |
| 12  | El Valle de las Rosas  | 1987                                     | 15.8                              | 600   |
| 13  | 20 de Diciembre        | 1990                                     | 0.6                               | 600   |
| 14  | El Cristal (Loma Cobá) | 1990                                     | 10                                | 500   |

## 5.5. EL PROBLEMA

El problema a resolver es de la asignación de precio -por metro<sup>2</sup>- a los terrenos señalados en los polígonos objeto de estudio. El hecho particular de que aproximadamente un 25% de estas tierras esté ocupada y la forma espontánea de ocupación, le dan al problema rasgos económico-sociales y políticos que lo hacen bastante especial. El análisis de estas condiciones llevaron al grupo de investigadores a la conclusión de que la tarea de decidir los precios de los terrenos no debería recaer en una sola persona. Más aún, que la decisión debería ser tomada por un grupo interdisciplinario de expertos, en el que no debería faltar representantes del gobierno, de la empresa privada y del conjunto de personas que habitan el lugar. Estas consideraciones ubican al problema en el **área de toma de decisiones multiatributos con varios decisores**, en el que se plantea la selección de una política de precios, basada en criterios independientes.

Estas características del problema, aunadas al hecho de que la heterogeneidad del grupo de expertos podía ser aprovechada si se les sometía a consultas aisladas, brindaron las condiciones adecuadas para incluir el método de agregación propuesto en el modelo de decisión.

## 5.6 ESTRATEGIA DE SOLUCION

### 5.6.1. Selección de expertos

A fin de que la decisión sea lo más justa y acertada posible, se solicitó la participación de expertos involucrados en el problema. Se integraron dos grupos ajenos de expertos: el identificado como de **expertos proponentes** y encargado de estructurar el problema y proponer las alternativas de solución y el de los **expertos evaluadores**, destinados para realizar el proceso de evaluación de las alternativas.

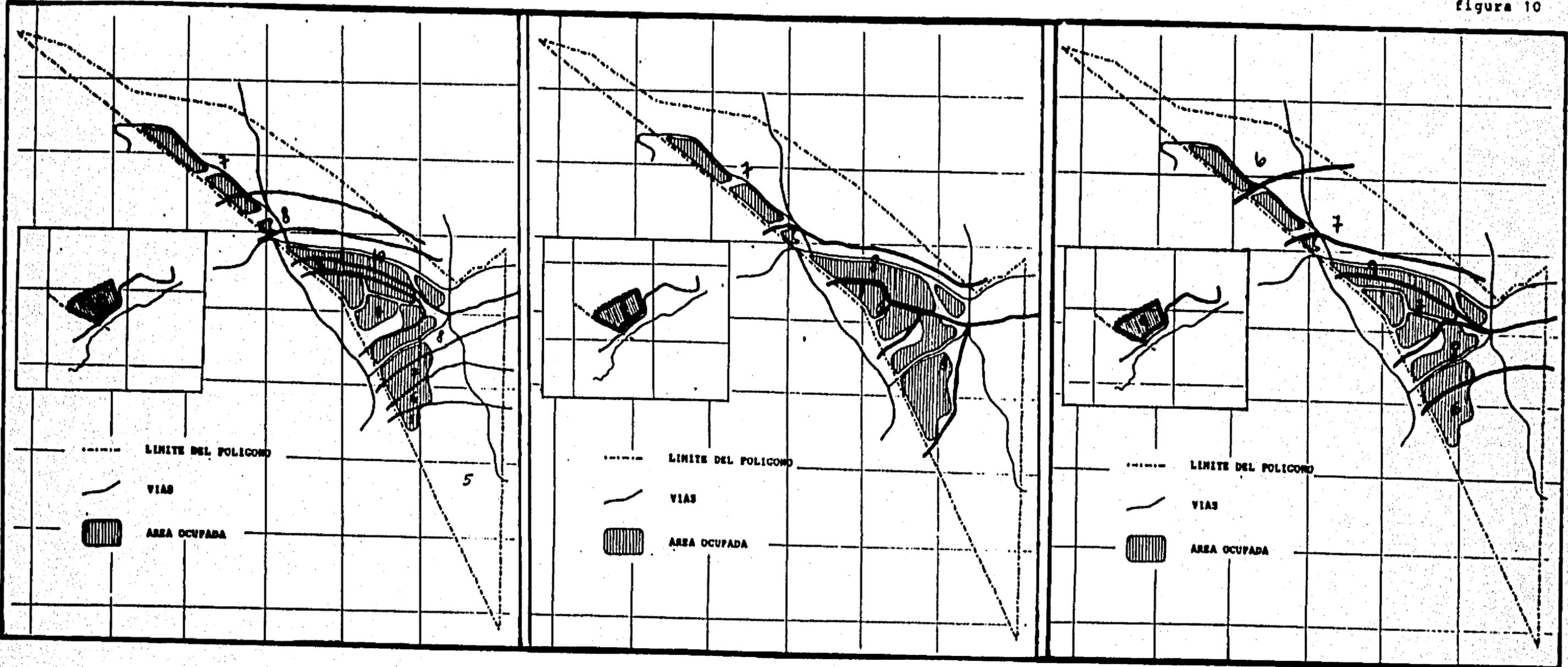
### 5.6.2. Estructuración del problema

La aplicación del método de agregación se inició en esta etapa. Inicialmente, a los grupos de expertos le fueron ofrecidas una serie de explicaciones acerca del funcionamiento del Proceso de Jerarquización Analítica como método para la toma de decisiones. Con esta visión, los expertos proponentes -un residente en el área, un arquitecto urbanista y un agrónomo- estructuraron el problema en una jerarquía de tres niveles: el del objetivo general del problema, el de los criterios sobre los que se hará la evaluación y el de las alternativas de solución.

#### a. Determinación de zonas de avalúo homogéneo y alternativas

Obviamente el avalúo de áreas considerables de terrenos no es uniforme. Es más, teóricamente, cada par de unidades de terrenos adyacentes admite avalúos diferentes por ser distintos. Sin embargo, se establecieron criterios de homogeneidad para facilitar la planificación. Se consideró como zona de avalúo homogéneo a cada una de las extensiones a las que se le asignan igual precio. Estas zonas debían ser especificadas en el área objeto de estudios.

En un principio se había concebido la idea de que las zonas de avalúo homogéneo fueran fijadas en conjunto y que sobre estas, cada uno de los expertos propusiera su conjunto alternativo de precios. Luego de una serie de discusiones infructuosas dirigidas hacia la determinación de estas zonas, se optó por aceptar que cada uno de los expertos propusiera su distribución particular del área. De esta manera, las alternativas ofrecidas por los expertos proponentes comprendían las zonas de avalúo homogéneo y los precios asignados a ellas. Estas alternativas constituyen la información básica primaria para el modelo y se muestran en la figura 10 (corresponden al arquitecto urbanista, al residente en el área y al agrónomo, respectivamente).



propuesta del urbanista

propuesta del residente en el área

propuesta del agrónomo

b. Determinación de los atributos

Las alternativas propuestas fueron evaluadas ala luz de los siguientes atributos de las tierras, los cuales también fueron determinados por los proponentes:

- Zonificación hecha por el Ministerio de Vivienda:

Se cuenta con un documento (4) donde se determinan usos de suelos con densidades o niveles.

- Inversión social de los moradores:

Estas comunidades se organizaron para satisfacer necesidades sociales, por medio de mejoras estructurales y realizaron, con autofinanciamiento, limpiezas, trazado de calles, lotificaciones, construcción de acueductos rurales (bombas de agua), campos de juegos, etc. Esto se ha traducido en gastos, cuyos detalles comprobados resposan en los archivos de las asociaciones establecidas y deberán ser deducidos de los valores asignados a los terrenos.

- Topografía:

Precisamente, estas áreas contienen terrenos bastantes quebrados y esto provocará diferencias notorias, aún entre globos de terrenos cercanos.

- Nivel de acceso a servicios:

La proximidad o lejanía a escuelas, fuentes de acceso de agua, centros de salud y otros establecimientos, el acceso a transporte y otras facilidades, son también factores que influirán en los precios de los terrenos.

- Presencia de estructuras:

Las viviendas, los trabajos adelantados de lo que será la infraestructura de servidumbre, los establecimientos, etc., constituyen otro criterio que se está utilizando para el avalúo.

La jerarquización completa de tres niveles que representa a la problemática de avalúo se muestra a continuación:

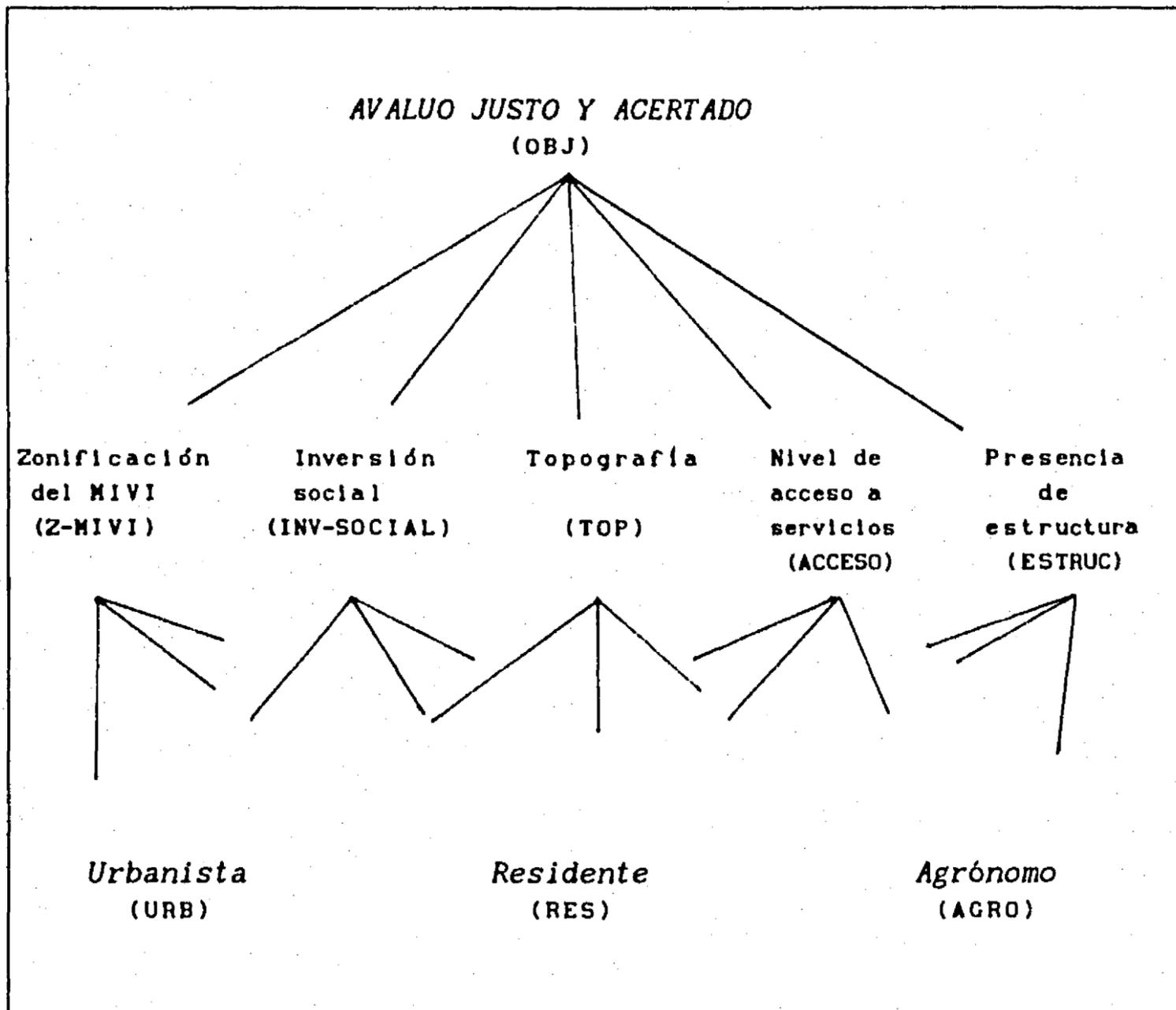


figura 11

### 5.6.3. Etapa de ponderación

El grupo de expertos evaluadores, integrado por un arquitecto, un agente de bienes raíces, un representante de la Oficina de Catastro Fiscal y un representante del Consejo de las Areas Revertidas, intervino en esta etapa. Cada uno de ellos debía ofrecer una ponderación de las alternativas propuestas por los proponentes.

La condición heterogénea de este segundo grupo de expertos, sin dejar de lado el factor unificador: "lograr un avalúo justo y acertado", permitió contar con distintos puntos de vista acerca del problema los cuales fortalecerían el proceso de toma de decisión. Esta situación podía ser aprovechada si cada evaluador manifestara su opinión sin la influencia de los otros, es decir, si lo hiciera en forma aislada.

Por estas consideraciones y siguiendo lo establecido en el método de agregación (sección 3.2.1 , cap. III), los evaluadores utilizaron el Proceso de Jerarquización Analítica para ponderar aisladamente a los elementos del segundo nivel de la jerarquía: los criterios establecidos y además, respecto a estos criterios, al conjunto de las alternativas propuestas.

Además, con el propósito de evitar algún tipo de sesgo que distorsionara las opiniones de los evaluadores, las ponderaciones fueron efectuadas sin que estos conocieran el origen de las propuestas. A continuación se presentan las matrices de comparaciones formadas por las respuestas de los evaluadores.

Experto 1 (Arquitecto)

| OBJ     | Z-MIVI | INV-SOC | TOP | ACCESO | ESTRUC |
|---------|--------|---------|-----|--------|--------|
| Z-MIVI  | 1      | 1/3     | 1/2 | 1/2    | 7      |
| INV-SOC | 3      | 1       | 1   | 2      | 9      |
| TOP     | 2      | 1       | 1   | 1      | 7      |
| ACCESO  | 2      | 1/2     | 1   | 1      | 7      |
| ESTRUC  | 1/7    | 1/9     | 1/7 | 1/7    | 1      |

| Z-MIVI | URB | RES | AGRO |
|--------|-----|-----|------|
| URB    | 1   | 3   | 6    |
| RES    | 1/3 | 1   | 2    |
| AGRO   | 1/6 | 1/2 | 1    |

| INV-SOC | URB | RES | AGRO |
|---------|-----|-----|------|
| URB     | 1   | 1/2 | 8    |
| RES     | 2   | 1   | 9    |
| AGRO    | 1/8 | 1/9 | 1    |

| TOP  | URB | RES | AGRO |
|------|-----|-----|------|
| URB  | 1   | 3   | 9    |
| RES  | 1/3 | 1   | 4    |
| AGRO | 1/9 | 1/4 | 1    |

| ACCESO | URB | RES | AGRO |
|--------|-----|-----|------|
| URB    | 1   | 1/4 | 6    |
| RES    | 4   | 1   | 8    |
| AGRO   | 1/6 | 1/8 | 1    |

| ESTRUC | URB | RES | AGRO |
|--------|-----|-----|------|
| URB    | 1   | 2   | 7    |
| RES    | 1/2 | 1   | 6    |
| AGRO   | 1/7 | 1/6 | 1    |

**Experto 2 (Agente de bienes raices)**

| OBJ     | Z-MIVI | INV-SOC | TOP | ACCESO | ESTRUC |
|---------|--------|---------|-----|--------|--------|
| Z-MIVI  | 1      | 3       | 1/8 | 1/3    | 1/3    |
| INV-SOC | 1/3    | 1       | 1/9 | 1/3    | 1/3    |
| TOP     | 8      | 9       | 1   | 6      | 5      |
| ACCESO  | 3      | 3       | 1/6 | 1      | 3      |
| ESTRUC  | 3      | 3       | 1/5 | 1/3    | 1      |

| Z-MIVI | URB | RES | AGRO |
|--------|-----|-----|------|
| URB    | 1   | 1/3 | 8    |
| RES    | 3   | 1   | 9    |
| AGRO   | 1/8 | 1/9 | 1    |

| INV-SOC | URB | RES | AGRO |
|---------|-----|-----|------|
| URB     | 1   | 3   | 7    |
| RES     | 1/3 | 1   | 5    |
| AGRO    | 1/7 | 1/5 | 1    |

| TOP  | URB | RES | AGRO |
|------|-----|-----|------|
| URB  | 1   | 1   | 1/5  |
| RES  | 1   | 1   | 1/5  |
| AGRO | 5   | 5   | 1    |

| ACCESO | URB | RES | AGRO |
|--------|-----|-----|------|
| URB    | 1   | 1/6 | 3    |
| RES    | 6   | 1   | 8    |
| AGRO   | 1/3 | 1/8 | 1    |

| ESTRUC | URB | RES | AGRO |
|--------|-----|-----|------|
| URB    | 1   | 1/3 | 1/5  |
| RES    | 3   | 1   | 1/3  |
| AGRO   | 5   | 3   | 1    |

**Experto 3 (Representante de Catastro Fiscal)**

| OBJ     | Z-MIVI | INV-SOC | TOP | ACCESO | ESTRUC |
|---------|--------|---------|-----|--------|--------|
| Z-MIVI  | 1      | 1/3     | 1/7 | 1/5    | 1/6    |
| INV-SOC | 3      | 1       | 1/4 | 1/2    | 1/2    |
| TOP     | 7      | 4       | 1   | 7      | 5      |
| ACCESO  | 5      | 2       | 1/7 | 1      | 1/5    |
| ESTRUC  | 6      | 2       | 1/5 | 5      | 1      |

| Z-MIVI | URB | RES | AGRO |
|--------|-----|-----|------|
| URB    | 1   | 1   | 1/4  |
| RES    | 1   | 1   | 1/4  |
| AGRO   | 4   | 4   | 1    |

| INV-SOC | URB | RES | AGRO |
|---------|-----|-----|------|
| URB     | 1   | 5   | 3    |
| RES     | 1/5 | 1   | 1/3  |
| AGRO    | 1/3 | 3   | 1    |

| TOP  | URB | RES | AGRO |
|------|-----|-----|------|
| URB  | 1   | 1/4 | 9    |
| RES  | 4   | 1   | 9    |
| AGRO | 1/9 | 1/9 | 1    |

| ACCESO | URB | RES | AGRO |
|--------|-----|-----|------|
| URB    | 1   | 5   | 7    |
| RES    | 1/5 | 1   | 2    |
| AGRO   | 1/7 | 1/2 | 1    |

| ESTRUC | URB | RES | AGRO |
|--------|-----|-----|------|
| URB    | 1   | 1/2 | 2    |
| RES    | 2   | 1   | 2    |
| AGRO   | 1/2 | 1/2 | 1    |

**Experto 4 (Representante del Consejo de las Areas Revertidas)**

| OBJ     | Z-MIVI | INV-SOC | TOP | ACCESO | ESTRUC |
|---------|--------|---------|-----|--------|--------|
| Z-MIVI  | 1      | 1/2     | 1   | 1/4    | 2      |
| INV-SOC | 2      | 1       | 3   | 1      | 4      |
| TOP     | 1      | 1/3     | 1   | 1/4    | 2      |
| ACCESO  | 4      | 1       | 4   | 1      | 3      |
| ESTRUC  | 1/2    | 1/4     | 1/2 | 1/3    | 1      |

| Z-MIVI | URB | RES | AGRO |
|--------|-----|-----|------|
| URB    | 1   | 1/3 | 1    |
| RES    | 3   | 1   | 2    |
| AGRO   | 1   | 1/2 | 1    |

| INV-SOC | URB | RES | AGRO |
|---------|-----|-----|------|
| URB     | 1   | 1/2 | 6    |
| RES     | 2   | 1   | 8    |
| AGRO    | 1/6 | 1/8 | 1    |

| TOP  | URB | RES | AGRO |
|------|-----|-----|------|
| URB  | 1   | 7   | 9    |
| RES  | 1/7 | 1   | 5    |
| AGRO | 1/9 | 1/5 | 1    |

| ACCESO | URB | RES | AGRO |
|--------|-----|-----|------|
| URB    | 1   | 3   | 4    |
| RES    | 1/3 | 1   | 1/3  |
| AGRO   | 1/4 | 3   | 1    |

| ESTRUC | URB | RES | AGRO |
|--------|-----|-----|------|
| URB    | 1   | 1/6 | 1/7  |
| RES    | 6   | 1   | 1/4  |
| AGRO   | 7   | 4   | 1    |

Las matrices de comparaciones suministradas debían ser procesadas -según el PJA- para determinar las ponderaciones de las alternativas. Para esto, se confeccionó el programa INVOPER1, que requiere, además de las matrices, el porcentaje máximo de inconsistencia aceptado y la diferencia máxima permitida durante el cálculo de los pesos por medio de la técnica de potencias de la matriz. El programa suministra:

- los vectores de pesos de los elementos comparados, que corresponden al vector propio de la matriz de comparación
- el valor  $\lambda_{max}$ , máximo valor propio de la matriz
- el índice de consistencia (CI) y la razón de consistencia (CR) de las opiniones al conformar la matriz
- la varianza del error en cada etapa del proceso de ponderación.

A continuación se muestra la tabla de los vectores de pesos de las alternativas de cada decisor, suministradas por INVOPER1.

|               | Decisores |     |     |     |
|---------------|-----------|-----|-----|-----|
|               | 1         | 2   | 3   | 4   |
| Alternativa 1 | .47       | .17 | .36 | .46 |
| Alternativa 2 | .46       | .31 | .52 | .34 |
| Alternativa 3 | .07       | .52 | .12 | .2  |

#### 5.6.4. Etapa de agregación de opiniones

La etapa de agregación requiere la matriz de covarianzas de los expertos. Las varianzas de los errores en los que incurrieron los expertos durante el proceso de ponderación, información necesaria para

la determinación de la matriz de covarianzas (sección 3.2.2., cap. III), se resumen en el siguiente cuadro:

| Varianzas calculadas<br>en el nivel ( ),<br>respecto a | Decisores |      |       |      |
|--|-----------|------|-------|------|
|  | 1         | 2    | 3     | 4    |
| (2), Objetivo general                                  | .046      | .184 | .282  | .056 |
| (3), Criterio 1  | .0        | .1   | .0    | .015 |
| (3), Criterio 2  | .033      | .054 | .033  | .019 |
| (3), Criterio 3  | .0025     | .0   | .21   | .2   |
| (3), Criterio 4  | .136      | .07  | .0067 | .21  |
| (3), Criterio 5  | .025      | .03  | .054  | .16  |

Como ayuda para el cálculo de la matriz de covarianzas y de los vectores de pesos agregados, se elaboró el programa INVOPER2. Las entradas para este programa son las varianzas de los errores en cada proceso de ponderación y los pesos de las alternativas correspondientes a cada experto. El programa calcula:

- la varianza del error de cada decisor
- la matriz de covarianzas de los expertos
- los factores de ponderación de las opiniones
- las ponderaciones agregadas de las alternativas para cada caso en el que se agregan las ponderaciones, es decir, cada vez que cambia el decisor en turno
- los índices de desacuerdo correspondientes a cada ordenamiento producido por las ponderaciones agregadas.

Se procede entonces al cálculo de las varianzas del error de cada experto, según el modelo aleatorizado completo descrito en la sección 3.2.2. Por ejemplo, la varianza del error del experto 1 es la primera componente del vector solución del sistema :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} .056 \\ .604 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que es 0.04265.

De acuerdo con estos resultados para todos los expertos, la matriz de covarianzas de los expertos resulta:

$$\begin{bmatrix} .04265 & .07076 & .08549 & .06140 \\ .07076 & .11740 & .14184 & .10187 \\ .08549 & .14184 & .17137 & .12308 \\ .06140 & .10187 & .12308 & .08840 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE COVARIANZAS

La etapa de agregación se efectúa considerando a cada uno de los expertos como el decisor. En primera instancia sea el experto 1 tal personaje.

Con base en la matriz de covarianzas se calculan los factores  $\lambda$ 's de ponderación de las opiniones de los expertos (sección 3.2.3), obteniéndose los resultados que aparecen en el siguiente cuadro.

| Decisor 1     | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $\lambda_4$ | $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4$ |
|---------------|-------------|-------------|-------------|---|
| ALTERNATIVA 1 | .436        | .246        | .1          | .218  |
| ALTERNATIVA 2 | .43         | .236        | .1          | .228  |
| ALTERNATIVA 3 | .44         | .258        | .1          | .202  |

Luego, la expresión (3) de la sección 3.2.3. que proporciona la ponderación agregada de la alternativa j cuando el decisor es el experto i (en este caso el experto 1), asume los valores:

$$P(1|1) = .31136$$

$$P(2|1) = .3952$$

$$P(3|1) = .2933$$

Considerando luego a los expertos 2, 3 y 4 como decisores, se obtienen los respectivos factores  $\lambda$ 's de ponderación y las ponderaciones agregadas que se muestran a continuación:

| Decisor 2     | $\lambda_1$ | $\lambda_3$ | $\lambda_4$ | $\lambda_2 = 1 - \lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_4$ |                  |
|---------------|-------------|-------------|-------------|---|------------------|
| ALTERNATIVA 1 | .135        | .489        | .18         | .196  | $P(1 2) = .3582$ |
| ALTERNATIVA 2 | .152        | .467        | .16         | .221  | $P(2 2) = .4379$ |
| ALTERNATIVA 3 | .111        | .517        | .2          | .172  | $P(3 2) = .2039$ |

| Decisor 3     | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $\lambda_4$ | $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4$ |                  |
|---------------|-------------|-------------|-------------|---|------------------|
| ALTERNATIVA 1 | .288        | .405        | .059        | .248  | $P(1 3) = .3208$ |
| ALTERNATIVA 2 | .29         | .42         | .065        | .225  | $P(2 3) = .4008$ |
| ALTERNATIVA 3 | .29         | .42         | .064        | .172  | $P(3 3) = .2784$ |

| Decisor 4     | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $\lambda_4$ | $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4$ |                  |
|---------------|-------------|-------------|-------------|---|------------------|
| ALTERNATIVA 1 | .08         | .49         | .205        | .225  | $P(1 4) = .3024$ |
| ALTERNATIVA 2 | .09         | .48         | .195        | .235  | $P(2 4) = .3727$ |
| ALTERNATIVA 3 | .11         | .47         | .182        | .238  | $P(3 4) = .3248$ |

### 5.6.5. Etapa de selección

Estos vectores de pesos inducen un ordenamiento de las alternativas que se compara con el que inducen las ponderaciones iniciales de los expertos. Para cada vector de pesos agregados se calcula su índice de desacuerdo relativo al conjunto 0 de los ordenamientos producidos inicialmente. Este número es un indicador de la cercanía del vector al conjunto 0. Los obtenidos en este problema se muestran a continuación.

INDICE DE DESACUERDO DEL VECTOR  $P(A|1) = .5277917$

INDICE DE DESACUERDO DEL VECTOR  $P(A|2) = .5277917$

INDICE DE DESACUERDO DEL VECTOR  $P(A|3) = .5277917$

INDICE DE DESACUERDO DEL VECTOR  $P(A|4) = 7.727407$

Esto conduce a la conclusión de que el ordenamiento producido por los tres primeros vectores de pesos agregados es el que está más de acuerdo con las propuestas iniciales de los expertos. Es decir, que la segunda alternativa de precios es la preferida, seguida de la primera y la tercera.

### 5.7. ANALISIS Y CONCLUSIONES DEL EJEMPLO

Las condiciones particulares del problema de avalúo de las áreas revertidas de la Provincia de Panamá, a saber:

- . casi un 25% de los terrenos ya estaban ocupados por residencias

particulares. Lo usual es que los avalúos se efectúen sobre baldíos o sobre terreno construido en el caso en que la construcción sea también sujeto del avalúo,

- . el área contaba con alguna infraestructura (calles, acueductos, comercios, entre otros) lograda por los propios residentes,
- . el aspecto social y político involucrado debido a la forma espontánea como se ocuparon estas tierras,
- . la necesidad de que la decisión no fuera tomada por "una persona" -por ejemplo, el gobierno- sino por un grupo de personas representativo de distintos sectores, entre ellos, el de los residentes,

exigían una serie de características del método que se utilizara para su solución.

El método debía manejar varios atributos. En este problema se debían considerar varios atributos de la tierra con el fin de que el avalúo fuera justo. Estos criterios generalmente son factores intangibles o no cuantitativos que tienen toda la importancia sobre la decisión.

El análisis de los aspectos sociales y políticos que rodeaban al problema requería la participación de varias personas, por lo tanto, el método de decisión debía ser capaz de agregar opiniones. Además, la composición heterogénea y de intereses encontrados del grupo que participaría en la decisión imponía la condición de que las opiniones se ofrecieran en forma aislada.

El Proceso de Jerarquización Analítica como método para la toma de decisiones con múltiples atributos satisfacía con creces las condiciones mencionadas. Puede ser aplicado individualmente y permite

el manejo de factores intangibles y su representación en una escala basada en relaciones en forma de razones.

Las condiciones del problema en lo referente a las características del grupo de expertos evaluadores no daba lugar a la existencia de un **decisor** que, entre otras cosas, le asigne peso a los expertos. El método de agregación aplicado era el adecuado puesto que suministra factores de ponderación **alejados de subjetividades** y representativos de la calidad de la opinión suministrada.

#### 5.8 DOCUMENTACION COMPLEMENTARIA

- (a) Gaceta Oficial. Año LXXXVIII. Panamá, R. de P., viernes 18 de enero de 1991. No. 21.707. Asamblea Legislativa, Ley No.1 (De 14 de enero de 1991), "Por la cual se adoptan medidas urgentes con respecto a bienes revertidos del Area del Canal"
- (b) Foster Vega, Manuela. Avances de tesis doctoral para optar al grado de Doctora en Investigación de Operaciones en la Universidad Nacional Autónoma de México. Inédito. México, agosto de 1990.
- (c) Estudio para el diseño y aplicación de metodologías para el avalúo de los terrenos revertidos del area canalera. Instituto de Estudios Nacionales de la Universidad de Panamá. Informe final. Panamá, septiembre de 1987.
- (d) Documento Zonificación de los terrenos revertidos del Area del Canal . Propuesta del MIVI (Ministerio de Vivienda), 1991.
- (e) Programa INVOPER1 en GWBASIC. Manuela Foster Vega, 1991.
- (f) Programa INVOPER2 en GWBASIC. Manuela Foster Vega, 1991.

## CONCLUSIONES

El procedimiento propuesto da respuesta al problema de toma de decisiones multiatributos y multidecisores, planteado como objetivo principal del trabajo. Utiliza el Proceso de Jerarquización Analítica para obtener las preferencias de cada decisor y el enfoque de Bayes para el fusionamiento de estas opiniones.

El uso del enfoque bayesiano exigió de antemano la identificación de la consulta a los decisores como la realización de experimentos aleatorios. Dado que este enfoque demanda la existencia de un personaje "el decisor" y la de un grupo de expertos que ofrecen su opinión a fin de que el primero actualice la suya, en el marco de nuestro problema se consideró a cada uno de los consultados como tal.

El índice de consistencia que proporciona el PJA en el proceso de ponderación es fundamental en el desarrollo del método pues representa la varianza de los errores en cada etapa del proceso de ponderación, permite estimar la varianza del error de cada decisor y determinar la matriz de covarianza de los decisores.

El resultado de Genest y Schervish (1985), fue de gran utilidad para calcular los vectores de ponderación agregados, cada uno de los cuales representa una buena solución al problema. La definición de un índice de desacuerdo entre los ordenamientos de las alternativas propuestos inicialmente por los decisores y los determinados por las opiniones fusionadas, permitió establecer un criterio para decidir cuál de estas últimas es la opinión del grupo.

El método propuesto es innovador y tiene un mejor desempeño que otros presentados en trabajos anteriores, pues:

Es de fácil y rápida aplicación.

Maneja la incertidumbre en los valores de los atributos y de las alternativas.

Utiliza una técnica para la solución de problemas de agregación de opiniones (enfoque bayesiano), para resolver un problema de toma de decisiones en grupo.

Fundamenta la forma de fusionamiento en el Teorema de Bayes.

Emplea el Proceso de Jerarquización Analítica con una visión distinta como método para tomar decisiones en grupo.

Considera la relación entre los decisores en la determinación de los factores de ponderación.

Ofrece una forma para estimar la varianza del error de cada decisor en el proceso de ponderación.

Ofrece un fusionamiento lineal ponderado de las opiniones, en el que los factores de ponderación carecen absolutamente de algún grado de subjetividad.

Permite la agregación de preferencias que han sido manifestadas sin sentir presiones ni influencias de otras opiniones.

Al utilizar el enfoque bayesiano para la determinación de la probabilidad a posteriori para un determinado decisor, se supuso que los valores medios de las variables que representan las opiniones de los expertos coincidía con la probabilidad a priori del decisor; en caso contrario cambiaría la forma de la expresión que da la probabilidad a posteriori y en consecuencia, los resultados que se obtengan.

La relación entre los expertos se determinó con base en las varianzas de sus errores de ponderación. Las varianzas permitieron calcular las matrices de covarianzas de los expertos, y estas a su vez, los factores de ponderación de las opiniones. Un cambio en la concepción de la covarianza entre los expertos, también conduciría a otros resultados.

El análisis de estas variantes podría abrir el camino para futuras investigaciones.

Finalizado el proceso de agregación, podría ser de vital importancia el hecho de que el grupo esté o no de acuerdo con la opinión agregada resultante, como una expresión de consenso. Este sería un tipo particular de problema de decisión conjunta vinculado al área de la estadística, tal vez con gran futuro como línea de investigación.

La utilización del método al problema de aplicación: **Proyecto de Avalúo de los terrenos de las barriadas de ocupación espontánea establecidas en el sector oeste del Area Revertida de la Provincia de Panamá**, fue acertada y resultó sumamente eficiente. Superadas las etapas más complejas de descomposición y estructuración de la jerarquía del problema y de generación de las alternativas por parte de los expertos proponentes y de la ponderación de la jerarquía por parte de los expertos evaluadores, el método de agregación suministró las respuestas deseadas sin intervenciones adicionales.

Finalmente se destaca que las pruebas realizadas con los programas de computación desarrollados para ayudar en los cálculos involucrados, revelan que es un método recomendable cuando el número de decisores es de 3 o más.

## A P E N D I C E A

### RESULTADOS SOBRE VALORES Y VECTORES CARACTERISTICOS

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Un *vector característico* (o vector propio o autovector) de  $A$  es un vector no nulo  $w$  tal que  $Aw = \lambda w$  para algún número  $\lambda$ , llamado *valor característico* (o valor propio o autovalor) de  $A$  correspondiente a  $w$ . Equivalentemente,  $w$  es un vector característico de  $A$  si es solución no nula de la ecuación  $(A - \lambda I)w = 0$ , para algún  $\lambda$ . La condición de no nulidad de  $w$  exige que la matriz  $A - \lambda I$  sea singular, es decir que  $\det(A - \lambda I) = 0$ , que equivale a la *ecuación característica* de grado  $n$

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Las raíces  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  de esta ecuación, cuya existencia está asegurada por el Teorema Fundamental del Algebra, son los valores característicos de  $A$ . Los vectores característicos se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones

$$A x_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Definición: Se llama *valor característico principal* de  $A$  al valor característico de  $A$  de mayor módulo, y se denota  $\lambda_{\max}$ .

Definición: La matriz cuadrada  $A$  es *recíproca positiva* si  $a_{ii} = 1$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $a_{ij} = 1/a_{ji}$  para todo  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Definición: Una matriz cuadrada es *consistente* si para todo  $i, j, k = 1, 2, \dots, n,$

$$a_{ik} = a_{ij} a_{jk}$$

Definición: Una matriz cuadrada es *irreducible* (por permutaciones) si no puede ser descompuesta en la forma

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}$$

donde  $A_1$  y  $A_3$  son matrices cuadradas .

Definición: Una matriz irreducible  $A$  es *primitiva* si y solo si existe un entero  $m \geq 1$  tal que  $A^m > 0$ . De otra manera se llama *no-primitiva*.

### ALGUNOS RESULTADOS

Sea  $A$  matriz cuadrada de orden  $n$ , entonces

i) traza de  $A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$  Si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son los valores característicos de  $A$ , entonces  $\sum_{i=1}^n \lambda_i =$  traza de  $A$ . En particular si para todo  $i, a_{ii} = 1$  entonces

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = n$$

ii) Si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son valores característicos de  $A$ , entonces  $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$  son valores característicos de  $A^k$ , para  $k$  número natural mayor que cero.

iii) Si  $A$  es una matriz recíproca positiva que tiene a  $n$  como valor característico, entonces el resto de los  $n-1$  valores característicos son iguales a cero.

iv) Toda matriz recíproca positiva es irreducible y primitiva.

### Existencia y unicidad del valor característico principal

La solución al problema de existencia y unicidad del valor característico para una matriz irreducible no negativa fue dada por Frobenius, G., generalizando un resultado de Perron, O. para el caso de una matriz positiva (ver Gantmacher, 1960).

#### Teorema 1: (Perron-Frobenius)

Sea  $A \geq 0$  una matriz irreducible. Entonces

i)  $A$  tiene un valor característico simple (sin multiplicidades) positivo real  $\lambda_{\max}$ , el cual no es excedido en módulo por cualquier otro valor característico de  $A$  (alguno puede ser complejo).

ii) El vector característico de  $A$  correspondiente a  $\lambda_{\max}$  tiene componentes positivas, y es esencialmente único (salvo multiplicación por una constante).

iii) El número  $\lambda_{\max}$ , llamado a veces *raíz de Perron de  $A$*  está dado por

$$\lambda_{\max} = \max_{x \geq 0} \min_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} = \min_{x \geq 0} \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}, \quad x > 0 \text{ arbitrario}$$

Teorema 2: Para una matriz primitiva A se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k e}{\|A^k\|} = cw$$

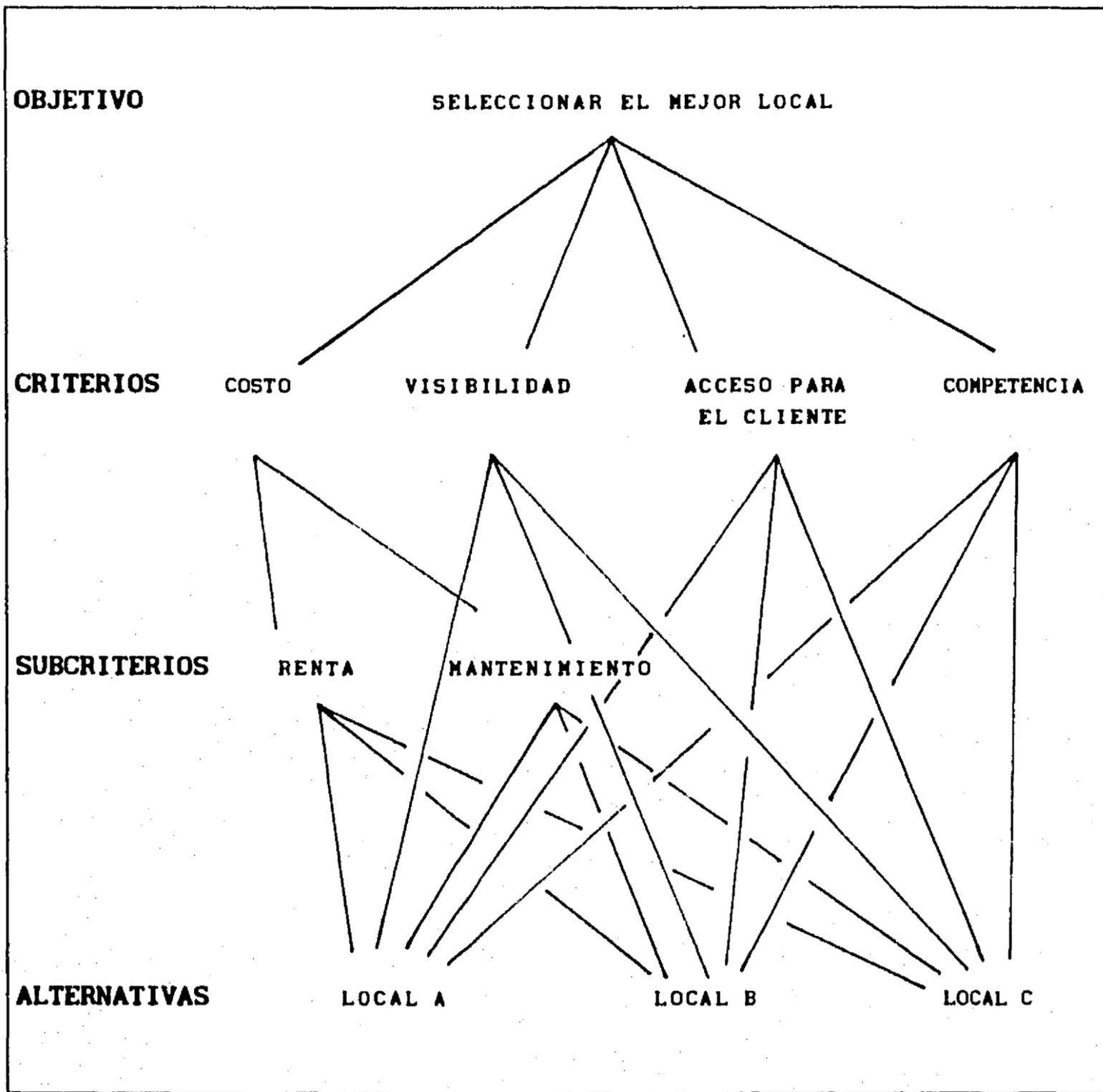
donde  $\|A\| = e^t A e$ ; e es el vector columna de componentes iguales a uno; c es una constante y w el vector propio correspondiente a  $\lambda_{\max}$ .

ASPECTOS RELEVANTES DEL PROCESO DE JERARQUIZACION ANALITICA

El Proceso de Jerarquización Analítica es un método para la ayuda a la toma de decisiones cuyo propósito general es cuantificar las prioridades relativas de los elementos de un conjunto dado. La aplicación del método se efectúa en tres etapas: diseño de una jerarquía, comparaciones por pares -y priorización parcial- y la etapa de síntesis de prioridades.

El método requiere que los elementos relevantes del problema de decisión se estructuren en una jerarquía que tiene el objetivo general del problema en el primer nivel, las alternativas de solución en el último nivel, y entre estos, los niveles constituidos por los otros elementos relevantes del problema. El método está basado en el principio de toma de decisiones que considera a la experiencia y conocimiento de las personas al menos igual de valiosa que los datos disponibles.

En la figura siguiente se muestra la jerarquía que representa el problema de decisión de un comerciante que desea determinar la mejor ubicación de un local para la venta de helados y pasteles al menudeo. Este negocio debe abastecer a la población joven y a las familias del sector. El comerciante cuenta con algunos sitios alternativos entre los que debe seleccionar el mejor, de acuerdo con su calificación respecto a ciertos criterios que, según su opinión, deben ser tomados en consideración para la elección.



Jerarquía para seleccionar un local

Para la segunda fase se determinan matrices de comparaciones por pares. Los elementos en un nivel de la jerarquía son comparados en términos relativos, acerca de su importancia o contribución a un criterio dado, perteneciente al nivel inmediato superior. Este proceso de comparaciones conduce a prioridades relativas o pesos de los elementos del nivel. Formalmente, y para cada nivel, este proceso primario de priorización se desarrolla de la siguiente manera:

Dados los  $n$  elementos de un nivel (por ejemplo el  $k$ -ésimo) de una jerarquía y un elemento  $e$  del nivel siguiente más alto, se comparan por pares los elementos del nivel  $k$  en relación al grado de influencia de uno sobre el otro respecto al elemento  $e$ . El decisor evalúa esa influencia de acuerdo a una escala numérica establecida y se coloca ese número en la entrada correspondiente de la matriz  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  de orden  $n$ , cuyas filas y columnas corresponden a los elementos del nivel. Esta matriz resulta ser recíproca puesto que si  $E$  es  $x$  veces más preferido que  $F$ , entonces  $F$  es  $1/x$  más preferido que  $E$ . Si  $\lambda_{\max}$  denota el máximo valor característico de  $A$ , el vector característico derecho (normalizado) correspondiente a este valor característico representa el vector de prioridades de los elementos del nivel. Los elementos del vector característico se denominan *prioridades locales* y corresponden al grado de influencia, factibilidad, importancia o contribución relativa, según el caso, de los elementos del nivel  $k$  respecto a  $e$ <sup>(1)</sup>. Más adelante se mostrará que  $\lambda_{\max}$  es una medida de la consistencia de las opiniones emitidas.

### Consistencia

La consistencia involucra dos aspectos: El primero se refiere a la agrupación de ideas u objetos, de acuerdo a su homogeneidad y relevancia. El segundo es la forma lógica de justificar la intensidad de relación entre objetos o ideas basada en un criterio particular.

Se dice que  $A$  es una *matriz consistente* si para todo  $i, j, k = 1, \dots, n$ , se satisface que

$$a_{ij} a_{jk} = a_{ik}$$

---

<sup>1</sup> Esta forma de calcular el vector de prioridades se conoce como el método del vector propio derecho.

en cuyo caso es suficiente conocer una de sus filas para determinar las entradas restantes.

Puesto que  $\lambda_{\max} \geq n$  y  $\lambda_{\max} = n$  si y solo si A es consistente (Teoremas 3 y 4 en este apéndice), la desviación de la consistencia se puede representar por  $(\lambda_{\max} - n)/(n - 1)$ , llamado el índice de consistencia (IC). Este número representa el promedio del resto de los valores característicos de la matriz. Dado que la suma de los valores característicos es n, este promedio debe ser igual a cero si la matriz es consistente. Por lo tanto, mientras más cerca esté  $\lambda_{\max}$  de n, mayor será la consistencia del decisor. Similarmente, Saaty define el índice aleatorio promedio (IAP) de matrices recíprocas generadas aleatoriamente con escala de 1 a 9.

El Laboratorio Nacional de Oak Ridge generó índices promedios IAP para matrices de orden 1 al 15 usando una muestra de tamaño 100 y como se esperaba, IAP aumentó conforme aumentó el orden de la matriz. Esta experiencia se repitió en el Colegio Wharton con una muestra de tamaño 500 para matrices de orden 1 al 11. La siguiente tabla presenta los resultados del Colegio para las matrices de orden 1 al 11 y los del Laboratorio Nacional para las de orden 12 al 15.

| n  | 1 | 2 | 3   | 4  | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   |
|----|---|---|-----|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| RI | 0 | 0 | .58 | .9 | 1.12 | 1.24 | 1.32 | 1.41 | 1.45 | 1.49 | 1.51 | 1.48 | 1.56 | 1.57 | 1.59 |

La razón del índice de consistencia (IC) y el promedio (IAP) correspondiente según el orden de la matriz, es llamada la razón de consistencia (RC),  $RC = IC/IAP$ . Una razón de consistencia de .10 ó menos es considerada aceptable, en caso contrario, se hace necesaria una revisión del problema y de las opiniones.

## El índice de consistencia y el error cuadrático medio de las opiniones

El índice de consistencia está relacionado con el error cuadrático medio en el que se incurre al conformar la matriz de comparaciones por pares. En efecto, en el proceso de comparación y evaluación por pares de los  $n$  elementos de un nivel -es decir, en la formación de la matriz  $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$  - el que opina puede introducir una serie de errores, producto de la falta de información adecuada, interpretaciones particulares de la información disponible, etc.

Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  los valores propios de  $A$ . Suponga que  $\lambda_1 = \lambda_{\max}$  y que  $w$  es su correspondiente vector característico. En las opiniones, todas las perturbaciones de interés pueden reducirse a la forma general  $a_{ij} = (w_i/w_j) \epsilon_{ij}$ , con  $\epsilon_{ij} > 0$

pues, por ejemplo,  $w_i/w_j + \alpha_{ij} = w_i/w_j (1 + (w_j/w_i) \alpha_{ij})$

Sea  $\mu = \frac{-1}{n-1} \sum_{i=2}^n \lambda_i$ . Puesto que  $\lambda_{\max} - 1 = \sum_{j \neq i} a_{ij} w_j/w_i$

se tiene que  $n \lambda_{\max} - n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} [a_{ij} w_j/w_i + a_{ji} w_i/w_j]$

O sea,  $\lambda_{\max} = 1 + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} [a_{ij} w_j/w_i + a_{ji} w_i/w_j]$

De donde

$$\mu = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = -1 + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} [a_{ij} w_j/w_i + a_{ji} w_i/w_j]$$

Sustituyendo  $a_{ij}$  por  $(w_i/w_j) \epsilon_{ij}$  se obtiene

$$\mu = -1 + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[ \epsilon_{ij} + \frac{1}{\epsilon_{ij}} \right]$$

Se tiene que si  $\epsilon_{ij} \rightarrow 1$ , es decir, si se tiende a la consistencia, entonces  $\mu \rightarrow 0$ . Además, si se escribe  $\epsilon_{ij} = 1 + \delta_{ij}$  con  $\delta_{ij} > -1$ , la ecuación anterior se expresará

$$\mu = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[ \delta_{ij}^2 - \frac{\delta_{ij}^3}{1+\delta_{ij}} \right]$$

Se asume que  $|\delta_{ij}| < 1$ , supuesto natural puesto que se analiza la estimación del error respecto al cero y  $\delta_{ij}$  está acotado inferiormente por  $-1$ . En consecuencia,  $\delta_{ij}^3 / (1+\delta_{ij})$  es muy pequeño comparado con  $\delta_{ij}^2$ , por lo tanto,  $2\mu$  estima a la varianza de los  $\delta_{ij}$ .

Teorema 3:  $\lambda_{\max} \geq n$ .

Prueba:

$$\mu = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[ \delta_{ij}^2 - \frac{\delta_{ij}^3}{1+\delta_{ij}} \right]$$

De donde, como  $\delta_{ij} > -1$ , se deduce que

$$\mu = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[ \delta_{ij}^2 / (1 + \delta_{ij}) \right] \geq 0$$

Teorema 4:  $\lambda_{\max} = n$  si y solo si A es consistente.

Prueba:

Del análisis de la última expresión del teorema anterior se tiene que A es consistente si  $\delta_{ij} = 0$  para todo  $i, j$ ; es decir, si  $\lambda_{\max} = n$ .

### La escala (Saaty 1977 y 1980)

Las opiniones emitidas por cualquier persona se toman cualitativamente y se traducen a valores numéricos absolutos de acuerdo a una escala. No se puede esperar consistencia "cardinal" pues los sentimientos y preferencias no se producen conforme a una fórmula, ni se puede esperar consistencia "ordinal" pues las opiniones personales no necesariamente son transitivas. Sin embargo, para beneficio de la consistencia en las opiniones, si se asigna el valor  $a_{ij}$  al comparar la actividad  $i$  con la  $j$ , se asigna el valor recíproco  $a_{ji} = 1/a_{ij}$  al comparar la  $j$  con la  $i$ .

### Justificación de la escala de 1 a 9

Los nombres de Ernest Heinrich Weber (1795-1878) y Gustav Theodor Fechner (1801-87) están ligados a experiencias sobre estímulos y respuestas. La justificación de la escala que utiliza el PJA está en la ley psicofísica de Weber- Fechner formulada en 1846, la cual lleva a la conclusión de que, para una secuencia de estímulos crecientes (como la secuencia de comparaciones por pares), las respuestas son de 1, 2, 3, ...

Por un lado, se requiere que el decisor maneje todos los valores de la escala al mismo tiempo, pero experimentos psicológicos (Miller, 1956) han mostrado que simultáneamente, un individuo no puede comparar más de  $7 \pm 2$  objetos sin llegar a confundirse. Esto induce a que la escala no tenga más de 9 valores. Por otro lado, la habilidad para hacer distinciones cualitativas está bien representada por cinco atributos: igual, débil, fuerte, muy fuerte y absoluto y, para mayor precisión se puede hacer uso de los cuatro atributos intermedios, lo cual hace que se requieran 9 valores. Este resultado, y el obtenido al aplicar la ley de Weber-Fechner, justifican que la escala de valores propuesta por Saaty (tabla 1) sea de 1 a 9.

## ¿Por qué un vector característico?

Considere el problema de asignar a  $n$  actividades denotadas  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , un conjunto de valores numéricos  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , de manera de reflejar la importancia relativa de las mismas. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que cada peso es positivo y que su suma es igual a uno, lo que permite darle a cada  $w_i$  la interpretación de "porcentaje de importancia".

Con el propósito de motivar el cálculo de los pesos relativos por medio de una matriz de comparaciones por pares de actividades, considere la siguiente discusión: Suponga que los valores  $w_1, w_2, \dots, w_n$  son conocidos (por algún medio) y que formamos la matriz recíproca  $A = [a_{ij}]$ , donde  $a_{ij} = w_i/w_j$  para toda  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Se puede observar que esta matriz es consistente pues

$$a_{ij} a_{jk} = a_{ik} \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n$$

y además que  $a_{ii} = 1$  para  $i = 1, 2, \dots, n$

Asimismo, observe que

$$a_{ij} w_j/w_i = 1 \quad \text{para todo } i, j$$

de donde

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j/w_i = n, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

o bien

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j = n w_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

que matricialmente equivale a la ecuación  $A w = n w$ , donde  $w$  es el vector  $(w_1, w_2, \dots, w_n)^t$ . En otras palabras,  $w$  es un vector característico de  $A$  y  $n$  su correspondiente valor característico.

Debido a las propiedades de este tipo de matrices, el resto de los valores característicos de A son iguales a cero.

Supongamos ahora que los valores  $w_i$ ,  $i = 1 \dots, n$  no son conocidos. Sea  $A = [a_{ij}]$  la matriz recíproca positiva de comparaciones por pares de actividades, donde  $a_{ij}$  representa la importancia relativa de  $C_i$  sobre  $C_j$ . En este caso, los elementos  $a_{ij}$  no están basados en una medición exacta y podrían desviarse de la razón ideal  $w_i/w_j$ . Sin embargo, la alteración de  $a_{ij}$  (en relación al valor real  $w_i/w_j$ ) en cantidades muy pequeñas, produce cambios también en cantidades muy pequeñas en los valores característicos (Wielandt, 1950). Es decir, pequeñas variaciones de  $a_{ij}$  mantienen al mayor valor característico  $\lambda_{max}$  próximo a  $n$  y los restantes valores característicos cercanos a cero.

Este hecho, aunado a la condición del vector real  $w$  como vector característico de la matriz  $[w_i/w_j]_{i,j}$ , conduce a afirmar que si los elementos  $a_{ij}$  están próximos a  $w_i/w_j$ , es decir,  $\lambda_{max}$  próximo a  $n$ , entonces el vector  $w$  solución de la ecuación

$$A w = \lambda_{max} w$$

es un buen estimador del vector de pesos  $w$ .

Conviene señalar que aunque esta ecuación tiene infinitas soluciones, se puede asegurar unicidad, alterando, sin mayores consecuencias, cualquiera de las soluciones  $w$ , y haciendo  $\delta = \sum_{i=1, n} w_i$  y reemplazando  $w$  por  $(1/\delta)w$ .

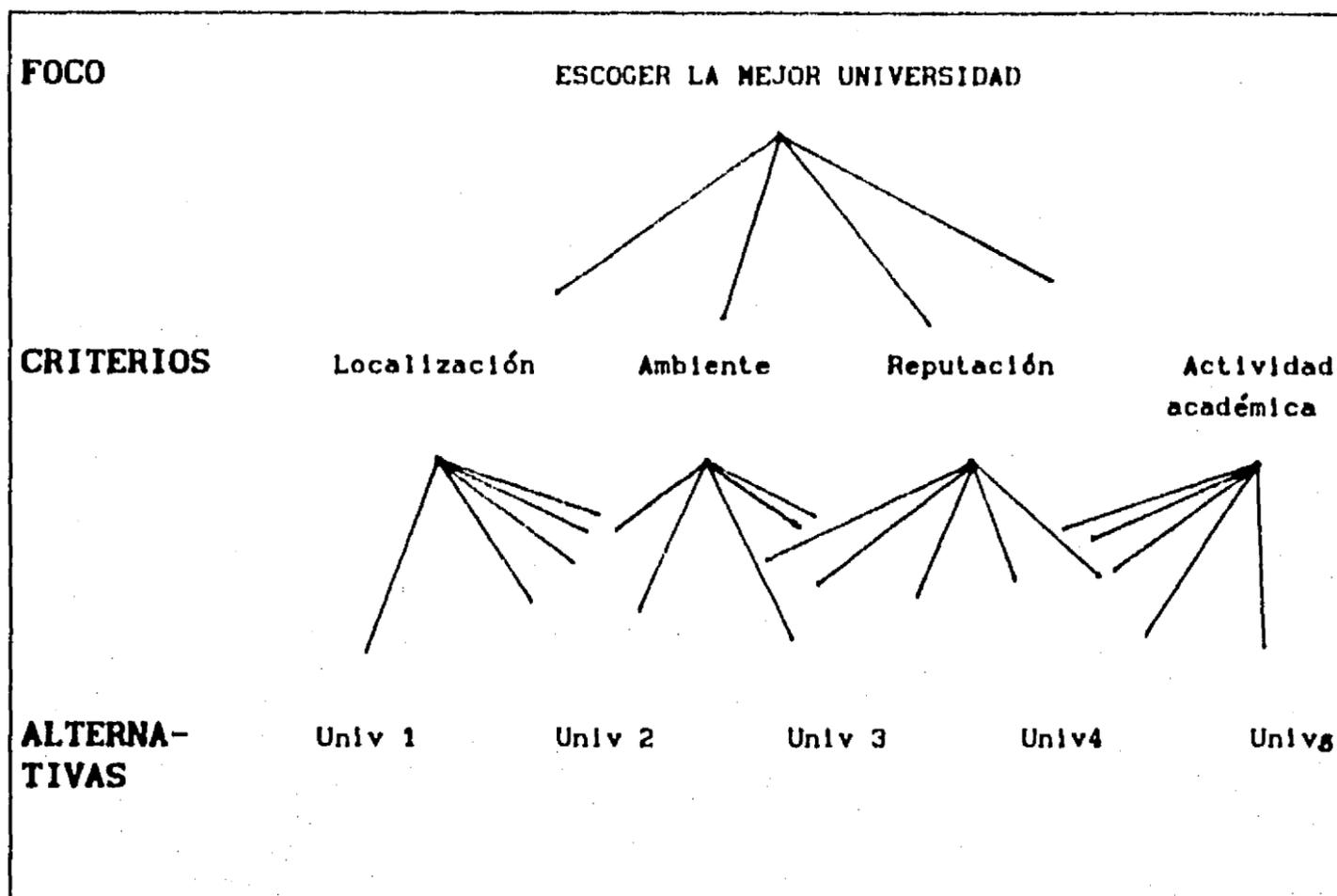
Esto asegura además que  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ . Para este nuevo vector  $w$ , la matriz  $\bar{A}$ , de entradas  $w_i/w_j$ , es consistente, y se llama *matriz consistente estimada de la matriz A*.

## Cálculo del vector característico principal

El cálculo actual del vector característico principal está basado en el teorema 2 del apéndice A, el cual afirma que el vector característico que corresponde a  $\lambda_{\max}$  es el límite del vector normalizado suma de las filas de las potencias sucesivas de la matriz primitiva A. Es por ello que, una forma computacional para obtener este vector es elevar la matriz a potencias, se calculan las sumas de las filas y se normaliza. El cálculo se detiene cuando la diferencia entre estas sumas en dos cálculos consecutivos sea más pequeña que un valor prefijado.

## Ejemplo ilustrativo

Considere la problemática de un estudiante preparatoriano que ha sido aceptado en cinco universidades y desea seleccionar la más adecuada de acuerdo a ciertos criterios básicos: localización, ambiente, reputación y la actividad académica que desarrolla. El criterio de costo de los estudios no se consideró, pues todas las universidades tienen costos semejantes. Basado en esta problemática, el estudiante formula la estructura jerárquica de los diversos componentes, como se muestra en la siguiente figura, donde puede observarse que el foco es ocupado por el objetivo del problema, esto es, la selección de la mejor universidad. También puede observarse que el segundo nivel de la jerarquía es ocupado por los criterios y el último por las alternativas o decisiones disponibles.



### Jerarquía para la selección de una universidad

El siguiente paso es el asociado al proceso de priorización tanto de los criterios como de las alternativas. En la priorización de los criterios respecto al objetivo o foco se procede a efectuar preguntas como: ¿ Qué tan importante es la localización de la universidad comparado con el ambiente ? ¿ Qué tan importante es la localización frente a la reputación o prestigio de la universidad? Todas estas preguntas están dirigidas hacia la obtención de la matriz de comparaciones por pares de los criterios respecto al objetivo de selección de la mejor universidad. Suponga que en este caso la matriz de comparaciones es:

| FOCO U OBJETIVO | Localización | Ambiente | Reputación | Actividad Académica |
|-----------------|--------------|----------|------------|---------------------|
| Localización    | 1            | 1/7      | 1/5        | 1/5                 |
| Ambiente        | 7            | 1        | 2          | 3                   |
| Reputación      | 5            | 1/2      | 1          | 1                   |
| Act. Académica  | 5            | 1/3      | 1          | 1                   |

Como puede observarse, la matriz anterior no es consistente. Sin embargo, es sencillo calcular su vector propio principal normalizado, así como el valor característico asociado (usando la técnica de potencias de la matriz). Específicamente

$$w = (\text{localización, ambiente, reputación, act.académica}) =$$

$$= (.054, .492, .238, .214)$$

$$\lambda_{\max} = 4.061 \text{ y razón de consistencia asociada RC} = .022.$$

Calculamos ahora las matrices de comparaciones por pares de las universidades respecto a cada uno de los criterios. Así, la matriz de comparación de las cinco universidades respecto al criterio de localización es:

| Localización | U1  | U2  | U3  | U4  | U5 |
|--------------|-----|-----|-----|-----|----|
| U1           | 1   | 1/4 | 1/3 | 1/3 | 7  |
| U2           | 4   | 1   | 2   | 3   | 7  |
| U3           | 3   | 1/2 | 1   | 3   | 6  |
| U4           | 3   | 1/3 | 1/3 | 1   | 4  |
| U5           | 1/7 | 1/7 | 1/6 | 1/4 | 1  |

Cuya vector de prioridades locales es:

$$a) (U1, U2, U3, U4, U5) = (.115, .402, .283, .163, .037)$$

$$\text{con } \lambda_{\max} = 5.42 \text{ y RC} = .09$$

En el caso de los criterios: b)ambiente, c)reputación y d)actividad académica, se obtuvieron, respectivamente, los siguientes vectores de prioridades locales :

$$b) (U1, U2, U3, U4, U5) = (.034, .539, .250, .121, .056)$$

$$c) (U1, U2, U3, U4, U5) = (.521, .235, .147, .038, .059)$$

d)  $(U_1, U_2, U_3, U_4, U_5) = (.564, .209, .132, .040, .055)$

Para obtener la prioridad global de los elementos del tercer nivel (universidades), se procede a multiplicar la matriz cuyas columnas son las prioridades locales de las universidades respecto a cada criterio, por el vector de prioridades de los criterios. Específicamente:

|         | CRITERIOS                        |      |  |      | Peso de los criterios | Peso global de las universidades |
|---------|----------------------------------|------|--|------|-----------------------|----------------------------------|
|         | 1                                | 2    | 3  | 4    |                       |                                  |
| Univ. 1 | .115                             | .034 | .521                                     | .564 | .053                  | .270                             |
| Univ. 2 | .402                             | .539 | .235                                     | .209 | .491                  | .387                             |
| Univ. 3 | .283                             | .250 | .147                                     | .132 | .238                  | .201                             |
| Univ. 4 | .163                             | .121 | .038                                     | .040 | .218                  | .086                             |
| Univ. 5 | .037                             | .056 | .059                                     | .055 |                       | .055                             |
|         | 1 = localización<br>2 = Ambiente |      | 3 = Prestigio<br>4 = Actividad académica |      |                       |                                  |

De aquí se concluye que la universidad 2 es la más preferida con una ponderación de 0.387, seguida de la universidad 1.

#### Deficiencias del método Delphi frente al PJA

El método Delphi (MD) es una técnica utilizada para alcanzar opiniones de consenso. En esta, un moderador somete las opiniones individuales, obtenidas de cuestionarios o de entrevistas personales, a análisis estadísticos conducentes a obtener opiniones de consenso. El proceso de coleccionar y resumir opiniones se repite hasta que el moderador considere que la opinión de consenso ha sido lograda. Comparada con el PJA y con otras técnicas que buscan opiniones de consenso, esta adolece de algunos inconvenientes:

i) El MD requiere de varias rondas de colección y resumen de opiniones. Estas pueden resultar tediosas, cansadas y hasta infructuosas.

ii) En la mayoría de los casos los consultados opinan sobre la base de un cuestionario confeccionado de antemano sin la ingerencia de ellos. Es decir, que los expertos pueden no participar en el análisis y selección de las variables involucradas en el problema.

iii) El MD exige la presencia de un personaje que revise las respuestas ofrecidas por los consultados. Esta persona desecha, selecciona, pondera y resume opiniones subjetivamente. Es decir, de alguna manera puede conducir hacia una opinión, determinando sus criterios particulares para la agregación.

## REFERENCIAS

- Aczel, J. y Saaty, T.L., 1983: Procedure for synthesizing ratio judgments. J. of Math. Psychology, vol 27, no.1, march, p.p. 93-102.
- Agnew, C.E., 1985: Multiple probability assessments by dependent experts. J. Amer. Statist. Assoc., 80, 343-347.
- Arrow, K. J., 1963: Social choice and individual values. Wiley, New York.
- Blin, J.M. y otros, 1975: Discriminant functions and majority voting. Management Science, vol 21 no. 5, 557-566.
- Box, G.E.P. y Tiao, G.C., 1973: Bayesian inference in statistical analysis. Addison and Wesley.
- Brightwell, S.A. y Cook, W.D., 1978: Unifying group decisions relating to cardinal preference ranking: With an applicatins to the operations of a military promotions board . Cahiers du Centre d'Etudes de Rech. Oper., vol 20, no. 1, 59-73.
- Cochrane, J.L., 1973: Multiple criteria decision making. Univ of South Carolina Press.
- Cook, W.D. y Seiford, L.M., 1982: On the Borda-Kendall consensus method for priority ranking problems. Manag. Science, vol 28, no. 6.
- Ching-Lai H. y Ming-Jeng L., 1988: Group decision making under multiple criteria. Lecture Notes in Eco. and Math. Syst, no. 281.

- Ching-Lai, H. y Yoon, K., 1981: Multiple attribute decision making -Methods and applications. Lecture Notes in Eco. and Math. Syst, no. 186.
- De Finetti, B., 1975: Theory of probability, vol 1, 2, John Wiley, New York.
- De Turk, D.M., 1987: The approach to consistency in the analytic hierarchy process. Math. Modelling, vol 9, no.3-5.
- Fechner, G., 1966: Elements of psychophysics. Vol 2, translated by Helmut E. Adler, Holt, Rinehart and Winston, N.Y.
- Fishburn, P.C., 1971: A comparative analysis of group decision methods. Behavioral Science, vol 16, 538-544.
- Fishburn, P. C., 1973: The theory of social choice. Princeton Univ. Press, N.J.
- Fishburn, P. C., 1974: Simple voting systems and majority rule. Behavioral Science, vol 19, 166-176.
- Foster, M., 1989: El proceso de jerarquización analítica en la toma de decisiones multiatributo. Revisión del estado del arte y perspectiva de investigación. DEPFI-UNAM, Mexico, D.F.
- French, S., 1980: Updating of belief in the light of someone else's opinion. J. R. Statist. Soc. Ser. A. 143, 43-48.
- Frobenius, G., 1912: Uber matrisen aus nicht negativen elementen. Sitzber, Akad. Wiss. Berlin, Phys. Math. Kl, p.p. 456-477.

- Gaiha, P. y Gupta, S.K., 1977: Adjacent vertices on a permutohedron. SIAM J. Appl. Math, vol 32, no. 2, 323-327.
- Genest, Ch. y McConway, K., 1990: Allocating the weights in the linear opinion pool. J. of Forecasting, 9, 53-73.
- Genest, Ch. y Schervish, M., 1985: Modelling expert judgments for bayesian updating. The Annals of Statistics, vol 13, no. 3, 1198-1212.
- Genest, Ch. y Zidek, J., 1986: Combining probability distributios: A critique and an annotated bibliography. Statistical Science, vol 1, no. 1, 114-148.
- Gray, P. 1948, book review: The Analytic Hierarchy Process and Decision Making for Leaders, by T.L. Saaty in Interfaces, vol 14, no.3 (may-june), p.p.97-99.
- Keeney, R.L. y Raiffa, H., 1976: Decisions with multiple objectives: Preferences and values trade-offs. Wiley, N.Y.
- Lehrer, K., 1975 : Social consensus and rational agnology. Synthese , 31, 141-160.
- Lehrer, K., 1976: When rational disagreements is impossible. Nous, 10, 327-332.
- Lehrer, K., 1983: Rationality as weighted averaging. Synthese, 57, 283-295.
- Lindgren, B.W., 1971: Elements of decision theory. Macmillan, N.Y.
- Lindley, D. V., 1983: Reconciliation of probability distributions. Oper. Res. 31, 866-880.

- Lindley, D. V., 1985: Reconciliation of discrete probability distribution. In Bayesian Statist. 2 (BERNARDO, J. M. et al, eds.) North Holland, 375-390.
- Luce, R.D. y Raiffa, H., 1967: Games and decisions. Introduction and critical survey. John Wiley and Sons.
- Madansky, A., 1964: Externally bayesian groups. RM-4141-PR. The Rand Corporation, Sta. Monica, CA.
- Makarov, I. M. y otros, 1987: The theory of choice and decision making. Mir Publishers. Moscow.
- Massam, B. H., 1988: Multi-criteria decision making (MCDM) techniques in planning. Progress in Planning, vol 30, part 1.
- Masuda, T., 1990: Hierarchical sensitivity analysis of priority used in the analytic hierarchy process. Int. Journal of Systems Science, vol 21, no. 2, p.p. 415-427.
- Miller, G.A., 1956: The magical number seven plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. Psychological Rev., vol 63, march, p.p. 81-97.
- Montgomery, D. 1984: Design and analysis of experiments. J. Wiley & Sons.
- Morris, P.A., 1974: Decision analysis expert use. Manag. Science, vol 20, no. 9, may.
- Morris, P. A., 1977: Combining expert judgements: a bayesian approach. Manag. Science, 23, 679-693.
- Perron, O., 1907: Zur theorie der matrizes. Math. Ann, vol 64,

p.p. 248-263.

- Saaty, T.L., 1977b: A scaling method for priorities in hierarchical structures. J. of Math. Psychology, vol 15, p.p. 234-281.
- Saaty, T.L., 1980: The analytic hierarchy process. M<sup>C</sup>Graw-Hill, New York.
- Saaty, T.L., 1982: Decision making for leaders. Lifetime Learning Publications. Belmont, Cal.
- Saaty, T.L., 1986b: Axiomatic foundation of the analytic hierarchy process. Management Science, vol 32, no.7, July, 841,855.
- Saaty, T. L. 1988: The analytic hierarchy process. McGraw Hill. New York.
- Saaty, R.W., 1987: The AHP -what it is and how it is used. Math. Modelling, vol 9 no.3-5.
- Savage, L.J., 1954: The foundations of Statistics. John Wiley, New York.
- Shim, Jung P., 1989: Bibliographical research on the analytic hierarchy process (AHP). Socio-Econ. Plann. Sci., vol 23, no. 23, 161-167.
- Steuer, R. E., 1986: Multiple criteria optimizations: Theory, computations and applications. Wiley & Sons.
- Stevens, S.S., 1957: On the psychophysics law. Psychological Reviews, vol 64, p.p. 153-181.

- Stone, M., 1961: The opinion pool. Annals Math. Statist., 32, 1339-1342.
- Van Gigch, J. P., 1981: Teoría general de sistemas aplicada. Ed. Trillas, Mexico.
- Vincke, P., 1986: Analysis of multicriteria decision aid in Europe. European J. of O. R., vol 25, 160-168.
- Wielandt, H., 1950: Unzerlegbare, nicht negative Matrizen. Mathematische Zeitschrift, vol 52, p.p. 642-648.
- Winkler, R.L., 1967: The assessment of prior distributions in bayesian analysis. J. of Amer. Statist. Assoc., 62, 776-800.
- Winkler, R.L., 1968: The consensus of subjective probability distributions. Manag. Science, 15, B61-B75.
- Winkler, R.L., 1981: Combining probability distributions from dependent information sources. Manag. Science, 27, 479-88.
- Yagar, R.R., 1979: An eigenvalue method for obtaining subjective probabilities. Behavioral Science, vol 24, no 6 (nov) p. 382-387.
- Zahedi, F., 1986: The analytic hierarchy process.-A survey of the method and its applications. Interfaces, 16, july-august p.p. 96-108.
- Zeleny, M., 1984: MCDM: Past decade and future trends, a sourcebook of multiple criteria decision making. Jai Press, London.