/10

2y

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

CONVERGENCIA DORADA
Un estudio del número de oro y la sucesión de fibonacci.

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

Adrián Fuentes de la Peña

México, D. F. Agosto 1991

FALLA DE ORIGEN

Presentación

Con el progreso de la matemática la interpretación de nuestro universo se ha modificado sensiblemente, no sólo en cuanto a su comportamiento mecánico (esto resulta obvio), también respecto a su geometría.

Hoy en día, y sirva esto de ejemplo, ciertas estructuras físicas sugieren fuertemente la presencia de formas fractales en la naturaleza, en claro contraste con aquéllas viejas interpretaciones fundamentadas en una geometría rígida y en una aritmética elemental basada tan sólo en los enteros positivos.

Sin duda esta discrepancia obedece a un determinado grado de evolución y desarrollo de la matemática, pero, no obstante la marcada diferencia, aquéllas interpretaciones fueron, como lo son ahora las nuestras, en alguna medida satisfactorias. Es como si la naturaleza reclamara matemáticas cada vez más complejas.

El ser humano juzga y ve lo que quiere, le acomoda o simplemente puede ver con los conocimientos que posee.

No obstante existe una idea que, por alguna razón, ha sobrevivido al paso del tiempo y desarrollo de la matemática, muy vieja y la vez actual: la supuesta "presencia" de la **razón áurea** en la naturaleza y en las artes como principio estético de proporcionalidad perfecta.[1]

Citemos, por ejemplo, la "misteriosa" y ciertamente singular disposición de los flosculos en el centro de una margarita, formando un arreglo en 55 espirales concéntricas: 21 de ellas girando en un sentido y 34 en el otro (compárese las relaciones entre los enteros 21, 34 y 55 con la **razón áurea**.)

Asímismo sorprende el hecho de que algunas pinturas antiguas como "Autorretrato" y "San Jerónimo" de Da Vinci y otras mucho más recientes como "La Parade" de Seurat o "Plaza de la Concordia" de Mondrian, presenten **proporciones áureas**.

El mismísimo Partenón de Atenas parece encajar en un **rectángulo áureo** casi perfecto, una vez reconstruido su ruinoso frontón.

En pleno siglo XX el uso sistemático y declaradamente consciente de las **proporciones áureas** destaca en los diseños del reconocido arquitecto francés Le Corbusier.

Estudios modernos sobre ciertos cuasicristales en la naturaleza y sobre la dimensionalidad de particulares formas fractales evocan nuevamente la presencia de la citada **razón áurea**.

La estrella de mar de cinco puntas, el caracol Nautilus e incluso las proporciones del cuerpo humano no dejan de sugerir alguna conexión con la **constante de oro**.

[1] La relación 1 : 1.618 es el valor aproximado de la **razón áurea**.

Agradecimientos

Quiero hacer patente mi sincero agradecimiento al M. C. José Alfredo Amor Montaño, asesor de la tesis, por la confianza incondicional que siempre depositó en mí. Asimismo, a todo el jurado calificador por su participación y prestancia.

No puedo dejar de nombrar al I. Q. José Luis Córdova Frunz por su excelente trabajo de mecanografiado, impresión y elaboración de figuras.

Por último, hago explícito mi agradecimiento a mi esposa Silvia que siempre me dispensó su confianza, su apoyo y su alegría.

Índice

Introducción

En la innumerabilidad del conjunto de los números irracionales existen elementos de distinguida calidad.

A través de siglos de estudio y de profunda reflexión, a fuerza de insistir, los grandes pensadores han dado con algunos cuantos: el **número de oro** es uno de ellos, quizá tan notable en Geometría como los son en Análisis los inmortales e y π.

Esta tesis versa fundamentalmente sobre el estudio del **número de oro** y no es, en definitiva, una antología sobre sus antecedentes históricos ni se hace mención explícita de su presencia en las artes; mucho menos pretende elevarlo a principio estético o exaltar la presunta "divinidad" de la que antaño fue objeto. Es, y debe ser entendida así, un estudio riguroso y puramente matemático de sus maravillosas propiedades geométrico-aritméticas, es una exploración exhaustiva en la **sucesión de Fibonacci** por encontrarle.

Si se ha insistido en utilizar el calificativo "áureo", que se considera justo aunque ciertamente extraño, ha sido por no contravenir toda una tradición matemática.

La presente tesis está dividida en dos grandes partes complementarias, cada una de las cuales incluye, a su vez, seis apartados orgánicamente dispuestos; de manera tal que frecuentemente se hace referencia explícita a determinados resultados de apartados anteriores.

El número de oro y la sucesión de Fibonacci (Parte 1) contiene los aspectos generales sobre los citados conceptos, presentándolos desde sus respectivas definiciones y de forma declaradamente independiente hasta el apartado 1.5 (no es, sino hasta 1.6 que se les vincula de manera explícita).

Convergencia dorada (Parte 2) funde en íntima relación al **número de oro** con la **sucesión de Fibonacci** a través del concepto de límite como medio unificador (esto se observa principalmente en los apartados 2.1 y 2.4).

Son justamente los procesos de convergencia la esencia misma de esta segunda parte, para la cual, cabe mencionar, se precisan conocimientos poco más especializados en matemáticas.

El número de oro en la geometría. Definición y propiedades geométricas (apartado 1.1) presenta, como cabe esperar, la geometría intrínseca del **número de oro**, desde su construcción con regla y compás hasta el estudio de ciertas curvas particulares: el árbelos, la elipse y la hipérbola.

La sucesión de Fibonacci. Definición y propiedades aritméticas (apartado 1.2) introduce el concepto de **número de Fibonacci** y aporta las relaciones aritméticas más sobresalientes, sentando así las bases mínimas para el desarrollo posterior de otros apartados.

Los coeficientes de Newton y los números de Fibonacci (apartado 1.3) establece algunos vínculos existentes, ciertamente notables, entre los enteros newtonianos y los **números de Fibonacci**. Se distingue especialmente el teorema 1.3.5.

Cuadros mágicos y determinantes (apartado 1.4) es de carácter diferente. Se construyen aquí cuadros mágicos de orden tres utilizando números de Fibonacci consecutivos y se demuestra la nulidad de ciertos determinantes.

A excepción de los demás apartados, la lectura de éste no se precisa de ningún modo y su inclusión debe ser considerada como una sencilla curiosidad matemática.

Divisibilidad (apartado 1.5) contiene resultados de gran importancia teórica y enuncia varios criterios de divisibilidad para los números de Fibonacci. Destaca por su gran belleza y perfección el teorema 1.5.6.

Potencias áureas (apartado 1.6) es donde por vez primera y en forma explícita se establecen relaciones entre el número de oro y la sucesión de Fibonacci, dando lugar a una conjunción imperecedera y abriendo un acceso natural a la segunda parte.

Límites y series infinitas (apartado 2.1) fortalece las relaciones entre el número de oro y la sucesión de Fibonacci mediante la toma de límites y establece la convergencia de algunas series especiales. Sobresalen en esta dirección los teoremas 2.1.2, 2.1.8, 2.1.9, 2.1.13 y 2.1.14.

Partes entera y decimal de las potencias áureas. El factor de oro (apartado 2.2) estudia el comportamiento de las representaciones decimales de las potencias enteras del número de oro y discute cómo obtener un número de Fibonacci arbitrario, supuesto conocido algún otro.

Cálculo de números de Fibonacci con índices grandes (apartado 2.3) es eminentemente operativo. Se establecen aquí algunas fórmulas sencillas en esta dirección y se muestra un procedimiento bastante confiable para estimar el número de cifras decimales que presentan los números de Fibonacci.

Desarrollos en fracción contínua simple infinita de las potencias áureas (apartado 2.4) demuestra que cualquier potencia entera del número de oro es solución a determinada ecuación cuadrática completa con coeficientes sobre la sucesión de Fibonacci, dando lugar a sus desarrollos continuados.

π y el número de oro. Sumas y productos infinitos (apartado 2.5) explicita mediante las funciones trigonométricas, las sumas y los productos infinitos relaciones entre las constantes π y φ. Contiene una tabla de valores de las funciones seno, coseno y tangente sobre diversos argumentos y se distingue por su elegancia el teorema 2.5.4.

La espiral áurea (apartado 2.6) retoma la parte geométrica incorporando los procesos de convergencia para la rectificación de la citada curva.

Las referencias bibliográficas donde el lector podrá realizar consultas más específicas sobre los diversos temas relacionados, se han incluido al final de esta tesis.

El Autor

Parte 1

El número de oro y la sucesión de Fibonacci

1.1 El número de oro en la geometría. Definición y propiedades geométricas.

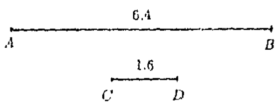
Dos magnitudes pueden ser comparadas esencialmente de dos formas posibles:

- restando una de la otra, o
- dividiendo una por la otra.

En el primer caso se habla de la *diferencia* y en el segundo del *cociente* de las magnitudes en cuestión.

Cuando la comparación es hecha por división, el cociente indica el número de veces que una de ellas contiene a la otra y es llamado *razón* de las magnitudes.

Sean, por ejemplo, los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de longitudes 6.4 y 1.6 respectivamente:



La *razón* de la magnitud mayor a la menor es:

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|} = \frac{6.4}{1.6} = 4$$

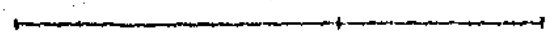
La *razón* de la magnitud menor a la mayor es:

$$\frac{|\overline{CD}|}{|\overline{AB}|} = \frac{1.6}{6.4} = 0.25$$

Definición 1.1.1

Supongamos que un punto P divide a un segmento $\overline{AB}$ en dos partes de diferente longitud.

Se dice que el punto P divide al segmento $\overline{AB}$ en *razón áurea* si la mayor de las partes contiene a la menor tantas veces como la mayor está contenida en el segmento[1]



Dicho de otro modo, el punto P divide al segmento $\overline{AB}$ en *razón áurea* si

$$\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AP}|}$$

en donde suponemos que $|\overline{AP}| > |\overline{PB}|$

Cabe mencionar que la llamada división de un segmento en *razón áurea* era conocida como división de un segmento en *media y extrema razón*. Ya Euclides, en su libro XIII de sus *Elementos*, habla en estos términos.

El teorema siguiente proporciona un artificio geométrico para la determinación del punto P, mediante el uso de la regla y el compás.

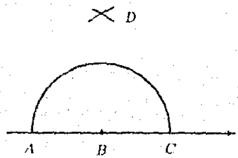
Teorema 1.1.1

Sea $\overline{AB}$ un segmento de recta arbitrario.

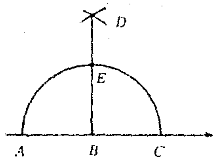
1. Trazar el rayo $\overrightarrow{AB}$. Con centro en B y radio $\overline{AB}$ cortar en C al rayo $\overrightarrow{AB}$.

[1] La división de un segmento de recta en tales partes fue en el medievo considerada como "*divina*" por observar "*armonía y perfección*" en lo asimétrico.

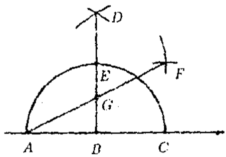
2. *Con centros en A y C trazar arcos de radio $\overline{AC}$ que se corten en D.*



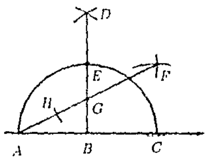
3. *Sea E el punto de corte entre el segmento $\overline{BD}$ y el arco trazado en 1.*



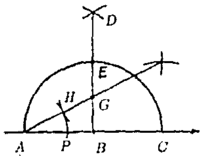
4. *Con centros en C y E trazar arcos de radio $\overline{AB}$ que se corten en F. Sea G el corte entre $\overline{AF}$ y $\overline{BE}$.*



5. *Con centro en G y radio $\overline{BG}$ cortar en H al segmento $\overline{AG}$.*



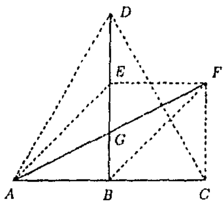
6. Con centro en A y radio $\overline{AH}$ cortar en P al segmento $\overline{AB}$



Se afirma que el punto P divide al segmento $\overline{AB}$ en razón áurea.

Demostración

Consideremos la siguiente figura:



Nuestro primer propósito es demostrar que el triángulo ABG es rectángulo y que la longitud del segmento $\overline{BG}$ es un medio de la longitud del segmento $\overline{AB}$.

En efecto, de acuerdo al procedimiento descrito, $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$ y $|\overline{AD}| = |\overline{CD}|$ (por ser radios de circunferencias iguales).

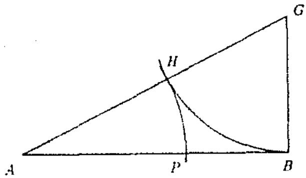
Luego, los triángulos ABD y CBD son necesariamente congruentes (por tener sus tres lados iguales).

Por tanto, el triángulo ABD es rectángulo y, en consecuencia, también lo es el triángulo ABG, como quería demostrarse.

Por otra parte, dado que los triángulos ABE y BCF son congruentes (pues ambos son rectángulos con catetos iguales), deducimos que $|\overline{AE}| = |\overline{BF}|$

Pero $|\overline{AB}| = |\overline{EF}|$, por ser radios de circunferencias iguales. Luego, el cuadrilátero $ABFE$ es un *paralelogramo*. Por tanto, G es el punto medio del segmento $\overline{BE}$ (pues las diagonales de un paralelogramo se bisectan). Entonces, $|\overline{BG}| = \frac{1}{2}|\overline{AB}|$, como quería demostrarse.

Ahora consideremos el triángulo ABG de la figura siguiente:



De acuerdo con el teorema de Pitágoras, $|\overline{AB}|^2 = |\overline{AG}|^2 - |\overline{BG}|^2$

Observemos ahora que $|\overline{AG}| = |\overline{AH}| + |\overline{HG}| = |\overline{AP}| + |\overline{BG}|$

Luego, $|\overline{AB}|^2 = |\overline{AP}|^2 + 2|\overline{AP}||\overline{BG}|$

Pero hemos demostrado que $|\overline{BG}| = \frac{1}{2}|\overline{AB}|$

Por tanto, $|\overline{AB}|^2 = |\overline{AP}|^2 + |\overline{AP}||\overline{AB}|$

Equivalentemente,

$$|\overline{AP}|^2 = |\overline{AB}|^2 - |\overline{AP}||\overline{AB}| = |\overline{AB}|(|\overline{AB}| - |\overline{AP}|) = |\overline{AB}||\overline{PB}|$$

De donde $\quad \dfrac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|} = \dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{AP}|}$

Nótese además que $|\overline{AP}| > |\overline{PB}|$

Luego, el punto P divide al segmento $\overline{AB}$ en *razón áurea.* ■

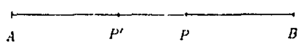
Teorema 1.1.2

Supongamos que un punto P divide a un segmento $\overline{AB}$ en razón áurea.

Sea P' el punto del segmento $\overline{AB}$ tal que $|\overline{AP'}| = |\overline{PB}|$.

Entonces P' divide también al segmento $\overline{AB}$ en razón áurea.

Demostración



Dado que $|\overline{AP'}| = |\overline{PB}|$, inferimos inmediatamente que $|\overline{AP}| = |\overline{P'B}|$.

Pero $\dfrac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|} = \dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{AP}|}$,

luego, $\dfrac{|\overline{P'B}|}{|\overline{AP'}|} = \dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{P'B}|}$ ■

El siguiente teorema establece la unicidad de los puntos P y P'

Teorema 1.1.3

Sea P el punto generado mediante el teorema 1.1.1 y sea P' el punto del segmento $\overline{AB}$ tal que $|\overline{AP'}| = |\overline{PB}|$

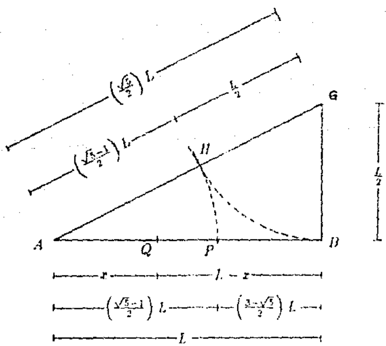
Entonces, P y P' son los únicos puntos del segmento $\overline{AB}$ que lo dividen en razón áurea.

Demostración

Sea L la longitud del segmento $\overline{AB}$ y sea Q un punto diferente de P que divide al segmento $\overline{AB}$ en *razón áurea*.

Demostraremos que Q necesariamente coincide con P'.

En efecto, razonemos sobre la siguiente figura:



Como Q divide al segmento $\overline{AB}$ en *razón áurea*, se tiene que

$$\frac{L-x}{x} = \frac{L}{L-x}$$

De donde $x^2 - 3Lx + L^2 = 0$

Resolviendo, $x = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) L$

Pero $x < L$, por tanto $x = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) L$

Luego, Q y P' deben coincidir ∎

Definición 1.1.2

Los puntos P y P' que dividen a un segmento $\overline{AB}$ en *razón áurea* son llamados *puntos de oro* del segmento.

Se dice que los *puntos de oro* trisectan al segmento en *partes áureas*.

Un resultado muy atractivo de la geometría plana afirma que la diagonal de un pentágono regular es trisectada en *partes áureas* por las diagonales del vértice comprendido.

Este singular hecho será demostrado en el teorema 1.1.14

Pasemos ahora a enunciar la definición central del presente trabajo:

Definición 1.1.3

Supongamos que un segmento de recta está dividido en *razón áurea*

Definimos el **número de oro**, que se le escribe con la letra griega ϕ, como el cociente que resulta de dividir la mayor de las partes del segmento por la menor.

Esto es, el **número de oro** es la **razón áurea**.

Teorema 1.1.4

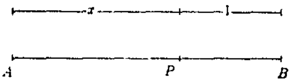
El número de oro es una constante irracional, cuyo valor es

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Demostración

Sea $\overline{AB}$ un segmento de recta dividido en *razón áurea* mediante un punto P.

Podemos suponer, sin perder generalidad, que el segmento $\overline{PB}$ es unitario



Por hipótesis, $x = \dfrac{x+1}{x}$
o, equivalentemente, $x^2 - x - 1 = 0$

Resolviendo, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Pero $\phi = x > 0$, entonces $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ∎

Resultará útil observar que:

$$\begin{aligned}
\phi^5 &= 5\phi + 3 \\
\phi^4 &= 3\phi + 2 \\
\phi^3 &= 2\phi + 1 \\
\phi^2 &= \phi + 1 \\
\phi^{-1} &= \phi - 1 \\
\phi^{-2} &= 2 - \phi \\
\phi^{-3} &= 2\phi - 3 \\
\phi^{-4} &= 5 - 3\phi
\end{aligned}$$

Dejamos al lector la verificación aritmética de estas igualdades, las cuales serán frecuentemente utilizadas en este apartado.

Teorema 1.1.5

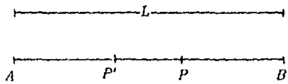
Sea $\overline{AB}$ un segmento de longitud L.

La trisección del segmento $\overline{AB}$ en partes áureas contiene, de izquierda a derecha, tres segmentos de longitudes $\phi^{-2}L$, $\phi^{-3}L$, $\phi^{-2}L$ respectivamente.

E inversamente, si el segmento $\overline{AB}$ está dividido por los puntos P' y P en tres partes de longitudes $\phi^{-2}L$, $\phi^{-3}L$ y $\phi^{-2}L$, entonces P' y P son los puntos de oro del segmento $\overline{AB}$.

Demostración

Sean P' y P los puntos de oro del segmento $\overline{AB}$



Como $\dfrac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|} = \phi$ y como $|\overline{PB}| = L - |\overline{AP}|$, encontramos que $|\overline{AP}| = \phi L - \phi|\overline{AP}|$

Es decir, $(\phi + 1)|\overline{AP}| = \phi L$

Pero $\phi + 1 = \phi^2$, entonces $|\overline{AP}| = \phi^{-1}L$

Análogamente se encuentra que $|\overline{P'B}| = \phi^{-1}L$

Luego, $|\overline{PB}| = L - |\overline{AP}| = L - \phi^{-1}L = (1 - \phi^{-1})L = \phi^{-2}L = |\overline{AP'}|$

En consecuencia, $|\overline{P'P}| = L - 2\phi^{-2}L = (1 - 2\phi^{-2})L = \phi^{-3}L$ ■

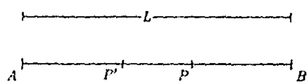
Nótese que $2\phi^{-2} + \phi^{-3} = 1$

Teorema 1.1.6

Sean P' y P, de izquierda a derecha, los puntos de oro de un segmento $\overline{AB}$. Entonces, el punto P' divide en razón aurea al segmento $\overline{AP}$

Demostración

Sea L la longitud del segmento $\overline{AB}$



De acuerdo con el teorema anterior,

$$|\overline{AP'}| = \phi^{-2}L, \quad |\overline{P'P}| = \phi^{-3}L \quad \text{y} \quad |\overline{AP}| = \phi^{-1}L$$

Luego,

$$\frac{|\overline{AP'}|}{|\overline{P'P}|} = \frac{\phi^{-2}L}{\phi^{-3}L} = \frac{\phi^{-1}L}{\phi^{-2}L} = \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{AP'}|} \qquad ■$$

El teorema anterior, de alguna manera, sugiere cierta "perfección" en la trisección en *partes áureas* de un segmento dado.

A continuación enunciamos un teorema de gran importancia.

Teorema 1.1.7

Sean a y b dos números reales tales que $ab > 0$.

Entonces, $\frac{a}{b} = \phi$ *si y solamente si* $ab = a^2 - b^2$.

Demostración

► Supongamos que $\frac{a}{b} = \phi$

Entonces, $a^2 - b^2 = b^2\phi^2 - b^2 = (\phi^2 - 1)b^2 = \phi b^2 = (\phi b)b = ab$ ■

► Supongamos que $ab = a^2 - b^2$

Entonces, $\frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2} = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1$

Sea $r = \frac{a}{b}$

Por tanto, $r^2 - r - 1 = 0$

Resolviendo, $r = \phi$ ó $r = -\phi^{-1}$

Pero, $ab > 0$, entonces $\frac{a}{b} = r > 0$

Luego, $r = \phi$, es decir, $\frac{a}{b} = \phi$ ■

Definición 1.1.4

Diremos que los números a y b (en ese orden) están en *razón áurea* si $\frac{a}{b} = \phi$

Teorema 1.1.8

Sean a y b un par de números reales.

Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. a *y* b *están en razón áurea.*

2. b *y* $a - b$ *están en razón áurea.*

3. $a + b$ *y* a *están en razón áurea.*

4. $b - a$ *y* $a - 2b$ *están en razón áurea.*

Por supuesto, existen otras combinaciones lineales de a y b que están en razón áurea.

Demostración

► Demostremos que 1. y 2. son afirmaciones equivalentes:

▷ Supongamos que $\frac{a}{b} = \phi$

Entonces, $\frac{b}{a-b} = \frac{1}{\frac{a-b}{b}} = \frac{1}{\frac{a}{b}-1} = \frac{1}{\phi-1} = \frac{1}{\phi^{-1}} = \phi$ ■

▷ Supongamos que $\frac{b}{a-b} = \phi$

Entonces, $b = \phi(a-b) = \phi a - \phi b$

De donde $\phi a = \phi b + b = (\phi+1)b = \phi^2 b$

Por tanto, $a = \phi b$, es decir, $\frac{a}{b} = \phi$ ■

► Demostremos que 1. y 3. son afirmaciones equivalentes:

▷ Supongamos que $\frac{a}{b} = \phi$

Entonces, $\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \phi^{-1} = \phi$ ■

▷ Supongamos que $\frac{a+b}{a} = \phi$

Entonces, $b = \phi a - a = (\phi - 1)a = \phi^{-1}a$

Luego, $\frac{a}{b} = \phi$ ■

► Demostremos que 1. y 4. son afirmaciones equivalentes:

▷ Supongamos que $\frac{a}{b} = \phi$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{a-2b} &= \frac{b-\phi b}{\phi b - 2b} = \frac{(1-\phi)b}{(\phi-2)b} \\ &= \frac{-\phi^{-1}}{\phi^{-1}-1} = -\frac{1}{1-\phi} = -\frac{1}{-\phi^{-1}} = \phi \end{aligned}$$ ■

▷ Supongamos que $\frac{b-a}{a-2b} = \phi$

Entonces, $(2\phi+1)b = (\phi+1)a$

Luego, $a = \frac{(2\phi+1)b}{\phi+1} = \frac{\phi^3 b}{\phi^2} = \phi b$

Por tanto, $\frac{a}{b} = \phi$ ■

En el apartado 1.6 presentamos una generalización a este teorema.

De allí que P sea punto de oro del segmento $\overline{RS}$ ∎

Por último, la razón de las áreas de los rectángulos $ABSR$ y $RSCD$ es

$$\frac{ab}{a(a-b)} = \frac{b}{a-b} = \phi$$ ∎

Teorema 1.1.10

Un rectángulo es áureo si y solamente si su área es igual a la diferencia de los cuadrados de sus dimensiones.

Demostración

La afirmación es una consecuencia directa del teorema 1.1.7 ∎

Teorema 1.1.11

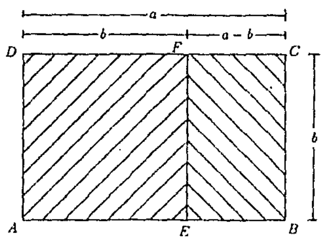
Un rectángulo áureo puede ser dividido en dos partes, una de las cuales es nuevamente un rectángulo áureo y la otra un cuadrado perfecto.

Recíprocamente, si un rectángulo puede ser dividido en dos partes, una de las cuales sea un rectángulo semejante a él y la otra un cuadrado perfecto, entonces es necesariamente áureo.

Demostración

► Sea $ABCD$ un *rectángulo áureo* y supongamos que $|\overline{AB}| = a$ y $|\overline{BC}| = b$

Sean E y F los puntos sobre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, de modo que $|\overline{AE}| = b = |\overline{DF}|$



Por construcción, el cuadrilátero $AEFD$ es un cuadrado.

Demostraremos que el rectángulo $EBCF$ es áureo.

En efecto, como $ABCD$ es un *rectángulo áureo*, $\frac{a}{b} = \phi$

Luego, de acuerdo con el teorema 1.1.8, $\frac{b}{a-b} = \phi$ ■

▶ Supongamos ahora que los rectángulos $ABCD$ y $EBCF$ son semejantes.

Demostraremos que el rectángulo $ABCD$ es *áureo*.

En efecto, por hipótesis, $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$

Por tanto, $ab = a^2 - b^2$

Luego, de acuerdo con el teorema 1.1.10, el rectángulo $ABCD$ es *áureo* ■

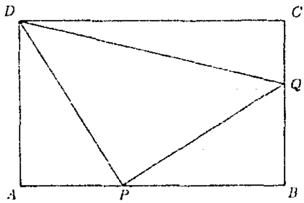
Teorema 1.1.12

Un rectángulo es áureo si y sólo si puede ser dividido en cuatro triángulos rectángulos tres de los cuales tengan la misma área.

Demostración

▶ Sea $ABCD$ un *rectángulo áureo*

Sea P el punto de oro del segmento $\overline{AB}$ más próximo al vértice A y sea Q el punto de oro del segmento $\overline{BC}$ más próximo al vértice C.



Demostraremos que el triángulo PQD es rectángulo y que los tres triángulos adyacentes a él tienen igual área.

En efecto, las pendientes de los segmentos $\overline{PD}$ y $\overline{PQ}$ son:

$$\begin{aligned} m_{\overline{PD}} &= -\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AP}|} = -\frac{|\overline{BC}|}{\phi^{-2}|\overline{AB}|} = -\phi^2\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|} = -\phi^2\phi^{-1} = -\phi \\ m_{\overline{PQ}} &= \frac{|\overline{BQ}|}{|\overline{PB}|} = \frac{\phi^{-1}|\overline{BC}|}{\phi^{-1}|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|} = \phi^{-1} \end{aligned}$$

Luego, el triángulo PQD es rectángulo ■

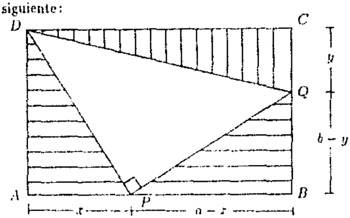
Designemos ahora con $\mathbf{A}$ el área del *rectángulo áureo* y con $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ y $\mathbf{A}_3$ las áreas de los triángulos APD, PBQ y QCD respectivamente.

Encontramos que $\quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3 = \dfrac{\mathbf{A}}{2\phi^2}$ ■

► Sea $ABCD$ cualquier rectángulo.

Sea P un punto del segmento $\overline{AB}$ y Q un punto del segmento $\overline{BC}$ tales que el triángulo PQD sea rectángulo y los triángulos APD, PBQ y QCD sean de igual área.

Supongamos, además, que $\mid \overline{AB} \mid = a$, $\mid \overline{BC} \mid = b$, $\mid \overline{AP} \mid = x$ y $\mid \overline{CQ} \mid = y$, tal y como se muestra en la figura siguiente:



Demostraremos que $\quad \dfrac{a}{b} = \phi$

En efecto, aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos que

$$\mid \overline{PD} \mid^2 + \mid \overline{PQ} \mid^2 = \mid \overline{QD} \mid^2$$

Pero $\quad b^2 + x^2 = \mid \overline{PD} \mid^2$, $(a-x)^2 + (b-y)^2 = \mid \overline{PQ} \mid^2 \quad$ y $\quad a^2 + y^2 = \mid \overline{QD} \mid^2$

Sustituyendo, $\quad b^2 + x^2 + (a-x)^2 + (b-y)^2 = a^2 + y^2$

Simplificando, $\quad (a-x)x = (b-y)b$

Ahora bien, como los triángulos APD, PBQ y QCD tienen igual área,

$$bx = (a-x)(b-y) = ay \qquad \text{(nótese que } \frac{a}{b} = \frac{x}{y}\text{)}$$

Luego, $\quad (a-x)^2 x = (a-x)(b-y)b = b^2 x$, $\;$ es decir, $\quad (a-x)^2 = b^2$; $\;$ de donde $\quad a - x = b$

Pero $\quad b - y = \dfrac{bx}{a-x}$, $\;$ de donde $\quad b = x + y$.

Entonces, $\quad 0 = bx - ay = (x+y)x - (b+x)y = x^2 - by$

esto es, $\quad x^2 = by \quad$ de donde

$$x^2 - y^2 = by - y^2 = y(b-y) = xy$$

Por tanto, de acuerdo al teorema 1.1.7, $\quad \dfrac{x}{y} = \phi = \dfrac{a}{b}$ ■

Observemos también que

$$a - x = b = \frac{x^2}{y} = \frac{x}{y}x = \phi x$$

Luego, $a = x + \phi x = (\phi + 1)x = \phi^2 x$, esto es, $x = \phi^{-2}|\overline{AB}| = \phi^{-2}a$

Por tanto, $y = \frac{bx}{a} = \phi^{-2}b = \phi^{-2}|\overline{BC}|$

Las últimas dos igualdades demuestran que los puntos P y Q son necesariamente ***puntos de oro*** de los segmentos a los que pertenecen.

El teorema siguiente establece una relación entre las funciones trigonométricas y el llamado ***número de oro***:

Teorema 1.1.13

$$\cos\ 36° = \frac{\phi}{2}$$

Demostración

Como $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ y $\operatorname{sen} 72° = \cos 18°$,
entonces, $2 \operatorname{sen} 36° \cos 36° = \cos 18°$.

Pero $\operatorname{sen} 36° = 2 \operatorname{sen} 18° \cos 18°$, de donde $4 \operatorname{sen} 18° \cos 36° = 1$.

Elevando al cuadrado, $16 \operatorname{sen}^2 18° \cos^2 36° = 1$

Por otra parte, $2 \operatorname{sen}^2 18° = 1 - \cos 36°$, pues $2 \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$

Por tanto, $8(1 - \cos 36°)\cos^2 36° = 1$

Haciendo $x = \cos 36°$ generamos la ecuación algebraica

$$8x^3 - 8x^2 + 1 = (2x - 1)(4x^2 - 2x - 1) = 0$$

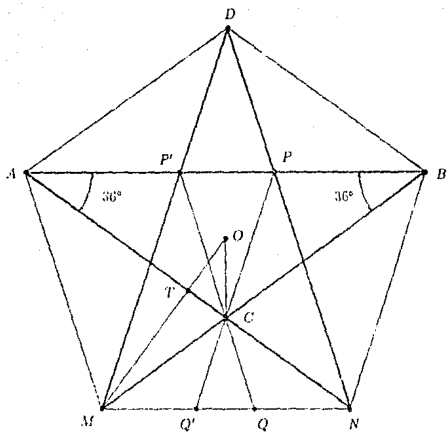
cuyas raíces son: $\frac{1}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, y $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

Pero $0 < \cos 36° \neq \frac{1}{2}$, entonces $x = \cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\phi}{2}$ ∎

Nota: Haciendo uso del teorema de Ptolomeo sobre un pentágono regular, puede encontrarse la razón de su diagonal a su lado, y de ahí deducir que $\cos 36° = \frac{\phi}{2}$

Teorema 1.1.14

1. La diagonal de un pentágono regular y su lado están en *razón áurea*
2. La diagonal de un pentágono regular es trisectada en *partes áureas* por las diagonales del vértice comprendido.
3. El apotema y el radio de un pentágono regular están en *razón semi-áurea.*



4. En la figura mostrada (*pentagrama místico*[2]) se satisfacen las siguientes relaciones:

4.1. $\dfrac{|\overline{AD}|}{|\overline{P'P}|} = \phi^2$

4.2. $\dfrac{|\overline{OM}|}{|\overline{OT}|} = 2\phi$

4.3. $\dfrac{|\overline{OM}|}{|\overline{OC}|} = \phi^2$

4.4. La razón de las áreas de los pentágonos exterior e interior es ϕ^4

4.5. Q' y Q son *los puntos de oro* del segmento $|\overline{MN}|$

Demostración

1. Aplicando la ley de los senos al triángulo ABC encontramos que

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{\operatorname{sen} 108^\circ}{\operatorname{sen} 36^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 72^\circ}{\operatorname{sen} 36^\circ} = \frac{2 \operatorname{sen} 36^\circ \cos 36^\circ}{\operatorname{sen} 36^\circ} = 2\cos 36^\circ = \phi$$

Pero $|\overline{AC}| = |\overline{AD}|$, entonces $\dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{AD}|} = \phi$ ∎

[2]Se dice que esta figura geométrica (la estrella de cinco puntas) fue tomada como signo religioso entre los pitagóricos. No obstante, no discutiremos aquí este supuesto hecho.

2. Tenemos que $\dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{AP}|} = \phi$, pues $|\overline{AD}| = |\overline{AP}|$ y, de acuerdo al inciso 2. del teorema 1.1.8, $\dfrac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|} = \phi$

Además, $|\overline{AP'}| = |\overline{PB}|$.

Por tanto P' y P son los *puntos de oro* del segmento $|\overline{AB}|$ ■

3. Si a denota el apotema y r el radio de un pentágono regular, se demuestra que $a = r\cos 36°$, de donde inferimos que $\dfrac{a}{r} = \dfrac{\phi}{2}$ ■

4.1. De acuerdo con lo demostrado en 2., $|\overline{P'P}| = \phi^{-3}|\overline{AB}|$.

Pero $|\overline{AD}| = |\overline{AP}| = \phi^{-1}|\overline{AB}|$, entonces $\dfrac{|\overline{AD}|}{|\overline{P'P}|} = \phi^2$ ■

4.4. El área del pentágono exterior dividida por el área del pentágono interior es

$$\frac{\frac{5}{4}|\overline{AD}|^2\cot 36°}{\frac{5}{4}|\overline{P'P}|^2\cot 36°} = \left(\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{P'P}|}\right)^2 = (\phi^2)^2 = \phi^4 \quad ■$$

Se aplicó la fórmula $A = \frac{5}{4}\ell^2\cot 36°$, en donde ℓ es el lado del pentágono.

4.3. El área de un pentágono regular en función del radio de la circunferencia que lo circunscribe está expresada por la fórmula

$$A = \frac{5}{2}r^2\operatorname{sen} 72°$$

Por tanto, $\phi^4 = \dfrac{\frac{5}{2}|\overline{OM}|^2\operatorname{sen} 72°}{\frac{5}{2}|\overline{OC}|^2\operatorname{sen} 72°} = \left(\dfrac{|\overline{OM}|}{|\overline{OC}|}\right)^2$,

de donde $\dfrac{|\overline{OM}|}{|\overline{OC}|} = \phi^2$ ■

4.2. Tenemos que $|\overline{OM}| = \phi^2|\overline{OC}|$.

De acuerdo con el punto 3., $\dfrac{|\overline{OT}|}{|\overline{OC}|} = \dfrac{\phi}{2}$, esto es, $|\overline{OT}| = \dfrac{\phi|\overline{OC}|}{2}$

Luego, $\dfrac{|\overline{OM}|}{|\overline{OT}|} = \dfrac{2\phi^2|\overline{OC}|}{\phi|\overline{OC}|} = 2\phi$ ■

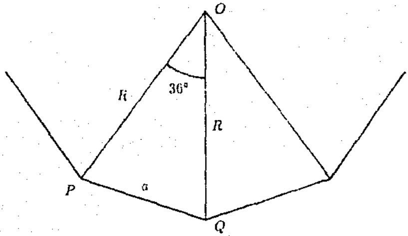
4.5. Basta con observar que los puntos M, N y C son vértices de un pentágono regular y aplicar lo demostrado en 2. ■

Teorema 1.1.15

Radio y lado de un decágono regular están en razón áurea.

Demostración

Sean R y a, respectivamente, radio y lado de un decágono regular.



Aplicando la ley de los cosenos al triángulo OPQ encontramos que

$$a^2 = 2R^2(1 - \cos 36°)$$

Pero, en virtud del teorema 1.1.13, $\cos 36° = \frac{\phi}{2}$. Sustituyendo

$$a^2 = 2R^2\left(1 - \frac{\phi}{2}\right) = 2R^2 - \phi R^2 = (2 - \phi)R^2 = \phi^{-2}R^2$$

De ahí que $\frac{R}{a} = \phi$ ∎

Teorema 1.1.16

Una recta secante corta a una circunferencia dada en los puntos A y B.

Supongamos que T es un punto sobre la circunferencia de modo que la recta tangente en T intersecte a la secante en un punto P tal que $|\overline{PT}| = |\overline{AB}|$.

Sea C el punto de la cuerda $\overline{AB}$ tal que $|\overline{PC}| = |\overline{PT}|$

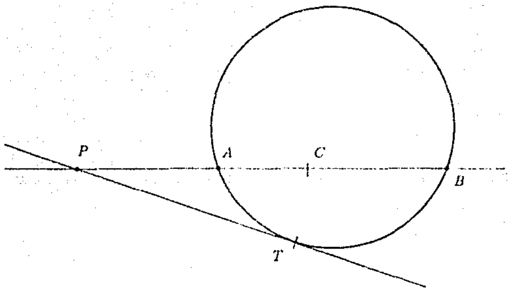
Se afirma que A y C son los puntos de oro del segmento $\overline{PB}$.

Demostración

La *potencia* del punto P respecto a la circunferencia dada, está definida como el producto de sus distancias a los puntos A y B, que resulta ser una constante sobre todas las rectas secantes que pasan por el punto P.

Cuando el punto P es exterior a la circunferencia, su potencia es igual al cuadrado de su distancia con relación al punto de contacto entre la circunferencia y la tangente que pasa por P.

Esto es, se demuestra que $|\overline{PT}|^2 = |\overline{PA}||\overline{PB}|$



Ahora bien, como $|\overline{PT}| = |\overline{AB}|$, se tiene que

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{PA}||\overline{PB}| = (|\overline{PB}| - |\overline{AB}|)|\overline{PB}| = |\overline{PB}|^2 - |\overline{AB}||\overline{PB}|$$

Equivalentemente, $\left(\frac{|\overline{PB}|}{|\overline{AB}|}\right)^2 - \frac{|\overline{PB}|}{|\overline{AB}|} - 1 = 0$

Resolviendo, $\frac{|\overline{PB}|}{|\overline{AB}|} = \phi$, es decir, A es *punto de oro* del segmento $\overline{PB}$ ∎

Además, $|\overline{AB}| = |\overline{PC}|$, de donde $|\overline{AC}| + |\overline{BC}| = |\overline{PA}| + |\overline{AC}|$

Cancelando, $|\overline{BC}| = |\overline{PA}|$ y, en consecuencia, C también es *punto de oro* del segmento $\overline{PB}$ ∎

Teorema 1.1.17

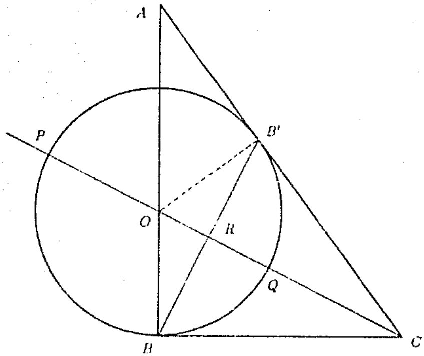
Sea ABC el triángulo rectángulo egipcio de dimensiones $|\overline{BC}| = 3$, $|\overline{AB}| = 4$, $|\overline{AC}| = 5$.

Sea O la intersección entre el cateto $|\overline{AB}|$ y la bisectriz del ángulo agudo C.

Con centro en O y radio $|\overline{OB}|$ se tiene una circunferencia tangente en B' con la hipotenusa $|\overline{AC'}|$, la cual es intersectada por la bisectriz en los puntos P y Q. Sea R la intersección del segmento $\overline{BB'}$ y la bisectriz.

Se afirma entonces que

1. *Q es punto de oro del segmento $|\overline{CP}|$*
2. $\frac{|\overline{OR}|}{|\overline{RQ}|} = \frac{\phi}{2}$
3. $|\overline{CP}| = 3\phi$
4. $|\overline{CQ}| = 3\phi^{-1}$



Demostración

Mencionemos primeramente que el hecho supuesto de que B' es el punto de tangencia entre la hipotenusa del triángulo ABC y la circunferencia, se demuestra a partir de la congruencia de los triángulos OBC y $OB'C$ (y de ahí que $|\overline{B'C}| = 3$).

Ahora bien, de acuerdo con el teorema de la bisectriz,

$$\frac{|\overline{OA}|}{|\overline{OB}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} = \frac{5}{3}$$

Pero $|\overline{OA}| + |\overline{OB}| = 4$, de donde $|\overline{OA}| = \frac{5}{2}$ y $|\overline{OB}| = \frac{3}{2}$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo OBC, resulta que

$$|\overline{OC}| = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Luego,

$$|\overline{QC}| = |\overline{OC}| - |\overline{OQ}| = \frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2} = 3\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 3\phi^{-1} \qquad \blacksquare$$

Entonces, $|\overline{CP}| = |\overline{QC}| + 3 = 3\phi^{-1} + 3 = 3(\phi^{-1} + 1) = 3\phi$ $\blacksquare$

y $\dfrac{|\overline{PQ}|}{|\overline{QC}|} = \dfrac{3}{3\phi^{-1}} = \phi$ $\blacksquare$

Obsérvese que este último hecho pudo haberse demostrado mediante el teorema anterior, pues $|\overline{B'C}| = |\overline{PQ}|$

Por otra parte, aplicando el teorema de la bisectriz al triángulo $B'BC$ encontramos que $|\overline{BR}| = |\overline{B'R}|$, de donde concluimos que los triángulos RBC y $R'BC$ son congruentes.

Luego, los segmentos $\overline{BB'}$ y $\overline{OC}$ son perpendiculares en el punto R

Por tanto, en virtud del teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}|\overline{BR}|^2 &= 9 - |\overline{RC}|^2 = 9 - (|\overline{RQ}| + |\overline{QC}|)^2 \\ &= 9 - (|\overline{RQ}| + 3\phi^{-1})^2 \\ &= \frac{9}{4} - |\overline{OR}|^2\end{aligned}$$

Entonces, $\quad \frac{9}{4} - |\overline{OR}|^2 = 9 - (|\overline{RQ}| + 3\phi^{1})^2$

pero, $\quad |\overline{OR}| = \frac{3}{2} - |\overline{RQ}|$

Luego, $\frac{9}{4} - \left(\frac{3}{2} - |\overline{RQ}|\right)^2 = 9 - (|\overline{RQ}| + 3\phi^{-1})^2$

Desarrollando los cuadrados y simplificando encontramos que

$$(1 + 2\phi^{-1})|\overline{RQ}| = 3(1 - \phi^{-2}) = 3[1 - (2 - \phi)] = 3(\phi - 1) = 3\phi^{-1}$$

De donde, $\quad |\overline{RQ}| = \frac{3\phi^{-1}}{1 + 2\phi^{-1}} = \frac{3}{\phi(1 + 2\phi^{-1})} = \frac{3}{\phi + 2}$

Entonces $\quad |\overline{OR}| = \frac{3}{2} - \frac{3}{\phi + 2} = \frac{3\phi}{2(\phi + 2)}$

y, en consecuencia, $\quad \frac{|\overline{OR}|}{|\overline{RQ}|} = \frac{\phi}{2} \quad \blacksquare$

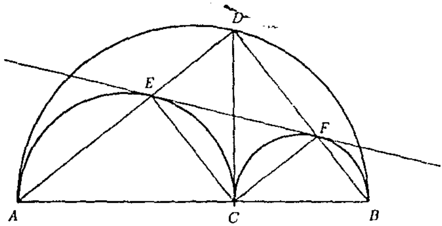
Definición 1.1.6

Sea C un punto arbitrario sobre un segmento $\overline{AB}$.

Sobre un mismo semiplano se trazan tres semicircunferencias de diámetros $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

La región plana comprendida entre las tres semicircunferencias es conocida con el nombre de *árbelos* (o navaja de zapatero).

Cuando el punto C divide en *razón áurea* al segmento $\overline{AB}$, diremos que el *árbelos* correspondiente es *áureo*.



En el *árbelos* de la figura los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son perpendiculares, mientras que los puntos E

y F son las intersecciones de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ con las semicircunferencias menores.

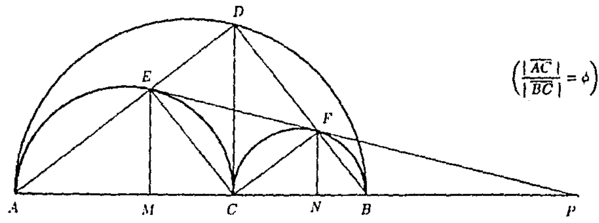
Obsérvese que el cuadrilátero $ECFD$ es un rectángulo. Más aún, se demuestra en Geometría que la recta que pasa por los puntos E y F es la tangente común a las semicircunfencias menores.

Teorema 1.1.18

El árbelos áureo de la figura que se muestra tiene las siguientes propiedades:

1. $\dfrac{|\overline{AE}|}{|\overline{CF}|} = \dfrac{|\overline{CE}|}{|\overline{BF}|} = \dfrac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} = \phi$
2. $\dfrac{|\overline{AD}|}{|\overline{BD}|} = \dfrac{|\overline{AE}|}{|\overline{CE}|} = \dfrac{|\overline{CF}|}{|\overline{BF}|} = \sqrt{\phi}$
3. $\dfrac{|\overline{AD}|}{|\overline{CD}|} = \phi, \quad \dfrac{|\overline{BD}|}{|\overline{CD}|} = \sqrt{\phi}$
4. $\dfrac{|\overline{BD}|}{|\overline{DF}|} = \phi, \quad \dfrac{|\overline{AD}|}{|\overline{AE}|} = \phi$
5. $\dfrac{|\overline{AC}|}{|\overline{AM}|} = \phi$
6. $\dfrac{|\overline{BC}|}{|\overline{CN}|} = \phi$
7. $\dfrac{|\overline{PB}|}{|\overline{BC}|} = \phi$

en donde suponemos que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son perpendiculares y éste último paralelo a los segmentos $\overline{ME}$ y $\overline{NF}$.



Demostración

1. Dado que el cuadrilátero $ECFD$ es un rectágulo, se infiere que los triángulos AEC y CFB son semejantes, pues tienen respectivamente paralelos sus tres lados.

   Observando entonces que $\dfrac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} = \phi$, se generan las igualdades deseadas. ■

2. De acuerdo con el teorema de Pitágoras

$$|\overline{AC}|^2 = |\overline{AD}|^2 - |\overline{CD}|^2$$
$$|\overline{BC}|^2 = |\overline{BD}|^2 - |\overline{CD}|^2$$

Luego,
$$|\overline{AC}|^2 - |\overline{BC}|^2 = |\overline{AD}|^2 - |\overline{BD}|^2 \quad \text{———(A)}$$

Por otra parte,
$$(|\overline{AC}| + |\overline{BC}|)^2 = |\overline{AD}|^2 + |\overline{BD}|^2$$

Esto es,
$$|\overline{AC}|^2 + 2|\overline{AC}||\overline{BC}| + |\overline{BC}|^2 = |\overline{AD}|^2 + |\overline{BD}|^2$$

Y, de acuerdo al teorema 1.1.7, $|\overline{AC}||\overline{BC}| = |\overline{AC}|^2 - |\overline{BC}|^2$.

Luego
$$|\overline{AC}|^2 + 2\left(|\overline{AC}|^2 - |\overline{BC}|^2\right) + |\overline{BC}|^2 = |\overline{AD}|^2 + |\overline{BD}|^2$$

es decir,
$$3|\overline{AC}|^2 - |\overline{BC}|^2 = |\overline{AD}|^2 + |\overline{BD}|^2 \quad \text{———(B)}$$

Combinando las igualdades (A) y (B) encontraremos que $2|\overline{AC}|^2 = 2|\overline{BD}|^2$

Por tanto $\boxed{|\overline{AC}| = |\overline{BD}|}$

Sustituyendo en (A) obtenemos que

$$2|\overline{BD}|^2 = |\overline{AD}|^2 + |\overline{BC}|^2$$

Luego,
$$\begin{aligned} 3|\overline{BD}|^2 &= \left(|\overline{AD}|^2 + |\overline{BD}|^2\right) + |\overline{BC}|^2 \\ &= |\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 \\ &= |\overline{AB}|^2 + \phi^{-2}|\overline{AC}|^2 \\ &= |\overline{AB}|^2 + \phi^{-2}|\overline{BD}|^2 \end{aligned}$$

Entonces,
$$(3 - \phi^{-2})|\overline{BD}|^2 = |\overline{AB}|^2$$

es decir,
$$\phi^2|\overline{BD}|^2 = |\overline{AB}|^2$$

Por tanto,
$$\begin{aligned} |\overline{BD}| &= \phi^{-1}|\overline{AB}| = \phi^{-1}(|\overline{AC}| + |\overline{BC}|) \\ &= \phi^{-1}(|\overline{BD}| + |\overline{BC}|) \\ &= \phi^{-1}|\overline{BD}| + \phi^{-1}|\overline{BC}| \end{aligned}$$

de donde $(1 - \phi^{-1})|\overline{BD}| = \phi^{-1}|\overline{BC}|$, esto es,

$$|\overline{BD}| = \frac{1}{\phi(1 - \phi^{-1})}|\overline{BC}| = \frac{1}{\phi - 1}|\overline{BC}| = \frac{1}{\phi^{-1}}|\overline{BC}|$$

lo cual nos lleva a concluir que $\boxed{|\overline{BD}| = \phi|\overline{BC}|}$

Luego, $$|\overline{CD}|^2 = |\overline{BD}|^2 - |\overline{BC}|^2 = \phi^2|\overline{BC}|^2 - |\overline{BC}|^2$$
$$= (\phi^2 - 1)|\overline{BC}|^2 = \phi|\overline{BC}|^2$$

de modo que $\boxed{|\overline{CD}| = \sqrt{\phi}|\overline{BC}|}$

Entonces, $$|\overline{AD}|^2 = |\overline{AC}|^2 + |\overline{CD}|^2 = |\overline{BD}|^2 + |\overline{CD}|^2$$
$$= \phi^2|\overline{BC}|^2 + \phi|\overline{BC}|^2 = (\phi + \phi^2)|\overline{BC}|^2$$
$$= \phi^3|\overline{BC}|^2$$

de donde $\boxed{|\overline{AD}| = \phi\sqrt{\phi}|\overline{BC}|}$

Por tanto, $\dfrac{|\overline{AD}|}{|\overline{BD}|} = \dfrac{\phi\sqrt{\phi}|\overline{BC}|}{\phi|\overline{BC}|} = \sqrt{\phi}$

Las demás igualdades se deducen de la semejanza que hay entre los triángulos ADB, AEC y CFB ■

3. De lo anterior se concluye que

$$\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{CD}|} = \frac{\phi\sqrt{\phi}|\overline{BC}|}{\sqrt{\phi}|\overline{BC}|} = \phi \qquad \text{y} \qquad \frac{|\overline{BD}|}{|\overline{CD}|} = \frac{\phi|\overline{BC}|}{\sqrt{\phi}|\overline{BC}|} = \sqrt{\phi} \qquad ■$$

4. De acuerdo con lo demostrado en el punto 2., $|\overline{AD}||\overline{CE}| = |\overline{BD}||\overline{AE}|$

Pero $|\overline{CE}| = |\overline{DF}|$, luego, $|\overline{AD}||\overline{DF}| = |\overline{BD}||\overline{AE}|$

Es decir, $\phi\sqrt{\phi}|\overline{BC}||\overline{DF}| = \phi|\overline{BC}||\overline{AE}|$

Por tanto, $\sqrt{\phi}|\overline{DF}| = |\overline{AE}|$, de donde $\phi|\overline{DF}|^2 + |\overline{CE}|^2 = |\overline{AE}|^2 + |\overline{CE}|^2$

Esto es, $$\phi|\overline{DF}|^2 + |\overline{DF}|^2 = (\phi + 1)|\overline{DF}|^2 = \phi^2|\overline{DF}|^2$$
$$= |\overline{AC}|^2 = |\overline{BD}|^2 = \phi^2|\overline{BC}|^2$$

Entonces $\boxed{|\overline{DF}| = |\overline{BC}|}$

Por otra parte, $|\overline{AE}|^2 + |\overline{EC}|^2 = |\overline{AE}|^2 + |\overline{DF}|^2 = |\overline{AC}|^2 = |\overline{BD}|^2$

Por tanto, $$|\overline{AE}|^2 = |\overline{BD}|^2 - |\overline{DF}|^2 = \phi^2|\overline{BC}|^2 - |\overline{BC}|^2$$
$$= (\phi^2 - 1)|\overline{BC}|^2 = \phi|\overline{BC}|^2$$

de donde $\boxed{|\overline{AE}| = \sqrt{\phi}|\overline{BC}|}$

De modo que

$$\frac{|\overline{BD}|}{|\overline{DF}|} = \frac{\phi|\overline{BC}|}{|\overline{BC}|} = \phi \quad \text{y} \quad \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AE}|} = \frac{\phi\sqrt{\phi}|\overline{BC}|}{\sqrt{\phi}|\overline{BC}|} = \phi \qquad ■$$

5. y 6. Dado que los triángulos AEC y CFB son semejantes, encontramos que

$$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} = \phi = \frac{|\overline{ME}|}{|\overline{NF}|}$$

y dado que los triángulos AME y EMC son también semejantes,

$$\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{EC}|} = \sqrt{\phi} = \frac{|\overline{ME}|}{|\overline{MC}|}$$

Pero, $|\overline{ME}|^2 + |\overline{MC}|^2 = |\overline{CE}|^2 = |\overline{BC}|^2$.

Entonces $\phi|\overline{MC}|^2 + |\overline{MC}|^2 = (\phi+1)|\overline{MC}|^2 = \phi^2|\overline{MC}|^2 = |\overline{BC}|^2$

Por tanto, $\boxed{|\overline{MC}| = \phi^{-1}|\overline{BC}|}$ y, en consecuencia,

$$\boxed{|\overline{ME}| = \frac{|\overline{BC}|}{\sqrt{\phi}}} \quad \text{y} \quad \boxed{|\overline{NF}| = \frac{|\overline{BC}|}{\phi\sqrt{\phi}}}$$

Luego,
$$\begin{aligned}
|\overline{AM}|^2 &= |\overline{AE}|^2 - |\overline{ME}|^2 = \phi|\overline{BC}|^2 - \phi^{-1}|\overline{BC}|^2\\
&= (\phi - \phi^{-1})|\overline{BC}|^2 = |\overline{BC}|^2
\end{aligned}$$

y
$$\begin{aligned}
|\overline{CN}|^2 &= |\overline{CF}|^2 - |\overline{NF}|^2\\
&= |\overline{EF}|^2 - |\overline{EC}|^2 - |\overline{NF}|^2\\
&= |\overline{CD}|^2 - |\overline{DF}|^2 - |\overline{NF}|^2\\
&= \phi|\overline{BC}|^2 - |\overline{BC}|^2 - \phi^{-3}|\overline{BC}|^2\\
&= (\phi - 1 - \phi^{-3})|\overline{BC}|^2\\
&= \phi^{-2}|\overline{BC}|^2
\end{aligned}$$

Entonces, $\boxed{|\overline{AM}| = |\overline{BC}|}$ y $\boxed{|\overline{CN}| = \phi^{-1}|\overline{BC}|}$, de ahí que

$$\boxed{\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AM}|} = \phi = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{CN}|}} \quad ■$$

7. Por el teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}
|\overline{PF}|^2 &= |\overline{PN}|^2 + |\overline{NF}|^2 = (|\overline{PB}| + |\overline{BN}|)^2 + |\overline{NF}|^2\\
&= (|\overline{PB}| + |\overline{BC}| - |\overline{CN}|)^2 + |\overline{NF}|^2\\
&= (|\overline{PB}| + |\overline{BC}| - \phi^{-1}|\overline{BC}|)^2 + \phi^{-3}|\overline{BC}|^2\\
&= (|\overline{PB}| + \phi^{-2}|\overline{BC}|)^2 + \phi^{-3}|\overline{BC}|^2\\
&= |\overline{PB}|^2 + 2\phi^{-2}|\overline{PB}||\overline{BC}| + \phi^{-4}|\overline{BC}|^2 + \phi^{-3}|\overline{BC}|^2\\
&= |\overline{PB}|^2 + 2\phi^{-2}|\overline{PB}||\overline{BC}| + \phi^{-2}|\overline{BC}|^2
\end{aligned}$$

Por otra parte $\quad |\overline{PF}|^2 = |\overline{PB}||\overline{PC}| = |\overline{PB}|(|\overline{PB}| + |\overline{BC}|) = |\overline{PB}|^2 + |\overline{PB}||\overline{BC}|$

Luego, $\quad |\overline{PB}|^2 + 2\phi^{-2}|\overline{PB}||\overline{BC}| + \phi^{-2}|\overline{BC}|^2 = |\overline{PB}|^2 + |\overline{PB}||\overline{BC}|$

Esto es,
$$\begin{aligned} |\overline{PB}||\overline{BC}| - 2\phi^{-2}|\overline{PB}||\overline{BC}| &= (1 - 2\phi^{-2})|\overline{PB}||\overline{BC}| \\ &= \phi^{-3}|\overline{PB}||\overline{BC}| \\ &= \phi^{-2}|\overline{BC}|^2 \end{aligned}$$

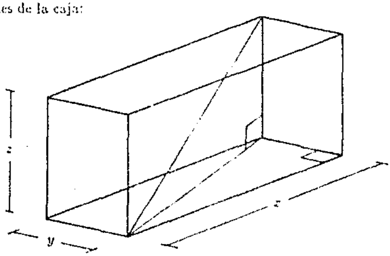
Por tanto, $\quad \phi^{-1}|\overline{PB}| = |\overline{BC}|$, $\quad$ es decir $\quad \dfrac{|\overline{PB}|}{|\overline{BC}|} = \phi \qquad \blacksquare$

Teorema 1.1.19

Si una caja rectangular tiene volumen unitario y su diagonal interior es de longitud 2 unidades, entonces necesariamente 4 de sus 6 caras laterales son rectángulos áureos y su superficie total es 4ϕ unidades cuadradas.

Demostración

Sean x, y, z las dimensiones de la caja:



Dado que el volumen de la caja es unitario, se satisface la relación

$$xyz = 1$$

Además se tiene que $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Podemos suponer, y esto sin perder generalidad, que alguna de las tres dimensiones de la caja es de longitud 1. Sea $z = 1$

Entonces, $\quad xy = 1 \quad$ y $\quad x^2 + y^2 = 3$

Luego, $\quad (x+y)^2 = 3 + 2xy = 5$, $\quad$ de donde $\quad x + y = \sqrt{5}$

Por tanto, $\quad x^2 + (\sqrt{5} - x)^2 = 3$, $\quad$ es decir, $\quad x^2 - \sqrt{5}\,x + 1 = 0$

Resolviendo, $x = \phi$ ó $x = -\phi^{-1}$

Pero $x > 0$, entonces $x = \phi$ y, en consecuencia, $y = \phi^{-1}$

De modo que 4 de las 6 caras laterales de la caja son rectángulos áureos ■

Por otra parte, la superficie total de la caja está determinada por la fórmula

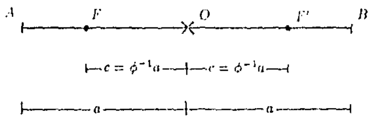
$$\begin{aligned} S &= 2(xy + yz + xz) = 2(1 + \phi^{-1} + \phi) \\ &= 2(\phi + \phi) = 4\phi \quad ■ \end{aligned}$$

Definición 1.1.7

Diremos que una elipse es *áurea* si su excentricidad es ϕ^{-1}

Obsérvese que las ecuaciones $x^2 + \phi y^2 = a^2$ y $\phi x^2 + y^2 = a^2$ corresponden a *elipses áureas*, ambas con centro en el origen, semieje mayor de longitud a, semieje menor de longitud $\phi^{-\frac{1}{2}}a$ y focos sobre el eje x la primera de ellas y sobre el eje y la segunda.

Es claro que los focos de una *elipse áurea* dividen en *razón áurea* a sus semiejes:



Teorema 1.1.20

Una elipse es áurea si y solamente si su rectángulo focal es un cuadrado.

Demostración

- Supongamos que una elipse es *áurea*, esto es, supongamos que $\dfrac{c}{a} = \phi^{-1}$

  Entonces, $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - \phi^{-2}a^2 = \left(1 - \phi^{-2}\right) a^2 = \phi^{-1}a^2$

  Por tanto, $\dfrac{2b^2}{a} = 2\phi^{-1}a = 2c$ ■

- Supongamos ahora que el rectángulo focal de una elipse es un cuadrado, esto es, supongamos que $\dfrac{2b^2}{a} = 2c$

  Entonces, $ac = b^2 = a^2 - c^2$ y, de acuerdo con el teorema 1.1.7,

$$\frac{a}{c} = \phi \quad ■$$

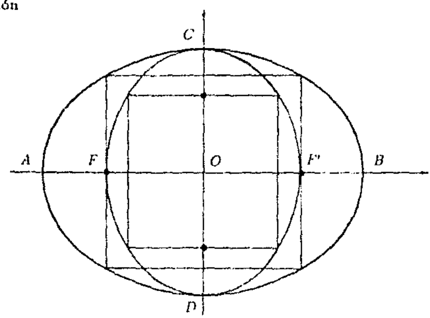
Teorema 1.1.21

Considérese la elipse áurea $x^2 + \phi y^2 = a^2$

Sean A y B sus vértices, C y D los extremos de su eje menor y F y F' sus focos. Se afirma que:

1. *La elipse con vértices en C y D y con extremos del eje menor en F y F' es áurea y su ecuación es* $\phi x^2 + y^2 = \phi^{-1}a^2$
2. *El área de la elipse* $x^2 + \phi y^2 = a^2$ *y el área de la elipse* $\phi x^2 + y^2 = \phi^{-1}a^2$ *están en razón áurea, como lo están las áreas de sus respectivos rectángulos focales.*

Demostración



Sean a, b y c $(a^2 - b^2 = c^2)$ los parámetros de la elipse $x^2 + \phi y^2 = a^2$ y sean a', b' y c' $(a'^2 - b'^2 = c'^2)$ los parámetros de la elipse con vértices en C y D y con extremos del eje menor en F y F'

Es claro que $a' = b = \phi^{-\frac{1}{2}}a$ y que $b' = c = \phi^{-1}a$

Por tanto, $c'^2 = \phi^{-1}a^2 - \phi^{-2}a^2 = (\phi^{-1} - \phi^{-2})\,a^2 = \phi^{-3}a^2$

Luego, la excentricidad de la elipse interior es

$$e' = \frac{c'}{a'} = \frac{\phi^{-\frac{3}{2}}a}{\phi^{-\frac{1}{2}}a} = \phi^{-1}$$

y, por tanto, es *áurea* ◼

Más aún, su ecuación es $\dfrac{x^2}{b'^2} + \dfrac{y^2}{a'^2} = 1$, es decir, $\phi x^2 + y^2 = \phi^{-1}a^2$ ■

Por otra parte, se sabe que el área de una elipse es π veces el producto de sus semiejes. Por tanto, la razón de las áreas de las elipses en cuestión es

$$\frac{\pi ab}{\pi a'b'} = \frac{a}{b'} = \frac{a}{\phi^{-1}a} = \phi \qquad \blacksquare$$

Más aún, la razón de las áreas de sus respectivos rectángulos focales es

$$\frac{4c^2}{4c'^2} = \frac{c^2}{c'^2} = \frac{\phi^{-2}a^2}{\phi^{-3}a^2} = \phi \qquad \blacksquare$$

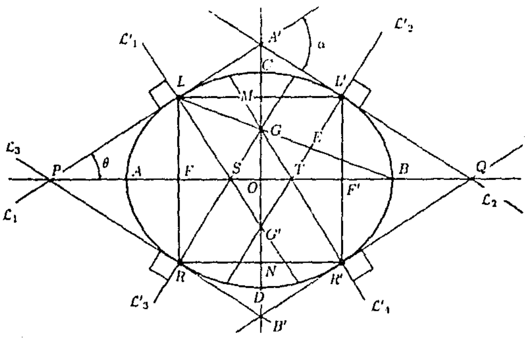
Teorema 1.1.22

Considérese la elipse áurea $x^2 + \phi y^2 = a^2$

Sean A y B sus vértices, C y D los extremos de su eje menor, F y F' sus focos y sean $\overline{LR}$ y $\overline{L'R'}$ sus dos cuerdas focales.

Designemos respectivamente con $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_4$ sus cuatro rectas tangentes en los puntos L, L', R y R', las cuales se intersectan dos a dos en los puntos P, Q, A' y B' y con $\mathcal{L}'_1$, $\mathcal{L}'_2$, $\mathcal{L}'_3$ y $\mathcal{L}'_4$ sus correspondientes rectas normales, las cuales se intersectan dos a dos en los puntos S, T, G y G'

Sean M y N, respectivamente, los puntos medios de los segmentos $\overline{LL'}$ y $\overline{RR'}$ y sea E la intersección del segmento $\overline{BL}$ con la recta $\mathcal{L}'_2$, tal y como se muestra en la figura;



Se satisfacen entonces las siguientes propiedades:

1. *Los puntos F' y B trisectan en partes áureas al segmento $\overline{OQ}$*
2. *Los puntos S y T trisectan en partes áureas al segmento $\overline{FF'}$*
3. *Los puntos M y G trisectan en partes áureas al segmento $\overline{OA'}$*
4. *Los puntos G y T dividen respectivamente en razón áurea a los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{OF'}$*
5. *Los puntos B, E, G y L son colineales.*

   Más aún, E y G trisectan en partes áureas al segmento $\overline{BL}$
6. *La elipse conjugada $\phi x^2 + y^2 = a^2$ tiene sus vértices en los puntos A' y B' y sus focos en los puntos M y N.*

   Más aún, las elipses áureas $x^2+\phi y^2 = a^2$ y $\phi x^2+y^2 = a^2$ se intersectan en los puntos L, L' R y R' formando un ángulo agudo $\gamma = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$
7. *Los ángulos θ y α indicados están dados por* $\theta = \arctan\left(\phi^{-1}\right)$ *y* $\alpha = \arctan(2)$

   y de ahí que $\arctan\left(\phi^{-1}\right) = \frac{1}{2}\arctan(2)$
8. *La elipse que pasa por los puntos P, B', Q y A' y la que pasa por los puntos S, G', T y G tienen excentricidad $\dfrac{1}{\sqrt{\phi}}$*

Demostración

Sea la *elipse áurea* $x^2 + \phi y^2 = a^2$ $(a = \phi c$ y $b = \phi^{-\frac{1}{2}}a)$

La ecuación de la semielipse superior es

$$y = \phi^{-\frac{1}{2}}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{(con signo positivo)}$$

Derivando, $$y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Entonces, $$y'(-c) = \frac{bc}{a\sqrt{a^2 - c^2}} = \frac{bc}{a\sqrt{b^2}} = \frac{c}{a} = \phi^{-1}$$

$$y'(c) = -\phi^{-1}$$

y de ahí que $$\tan\theta = \phi^{-1}$$

y $$\tan\alpha = \frac{\phi^{-1}+\phi^{-1}}{1-\phi^{-2}} = \frac{2\phi^{-1}}{\phi^{-1}} = 2 \qquad \blacksquare$$

Más aún, la ecuación de la recta tangente $\mathcal{L}_1$ está dada por

$$y = \phi^{-1}x + \phi c = \phi^{-1}x + a$$

y la ecuación de la recta tangente $\mathcal{L}_2$ está dada por

$$y = -\phi^{-1}x + \phi c = -\phi^{-1}x + a$$

Por tanto, $|\overline{OA'}| = a$

Un sencillo razonamiento mostrará entonces que la elipse $\phi x^2 + y^2 = a^2$ tiene sus vértices en los puntos A' y B' y sus focos en los puntos M y N ■

Por supuesto, las elipses $x^2 + \phi y^2 = a^2$ y $\phi x^2 + y^2 = a^2$ tienen rectángulo focal común.

Para encontrar el ángulo agudo γ entre estas elipses, observemos que la pendiente de la recta tangente a la elipse $x^2 + \phi y^2 = a^2$ en el punto L es ϕ^{-1} y que la pendiente de la recta tangente a la elipse $\phi x^2 + y^2 = a^2$ en el mismo punto es ϕ

Entonces, $\tan\gamma = \dfrac{\phi - \phi^{-1}}{1 + \phi^{-1}\phi} = \dfrac{1}{2}$ ■

Haciendo $y = 0$ en la ecuación de la recta $\mathcal{L}_2$ encontramos que $x = |\,\overline{OQ}\,| = \phi a$ ■

Luego,

$$\frac{|\,\overline{OQ}\,|}{|\,\overline{OB}\,|} = \phi \quad \text{y} \quad \frac{|\,\overline{F'Q}\,|}{|\,\overline{OF'}\,|} = \frac{\phi a - c}{c} = \phi\left(\frac{a}{c}\right) - 1 = \phi^2 - 1 = \phi \qquad ■$$

Demostremos ahora que el punto G divide en *razón áurea* al segmento $\overline{OM}$.

En efecto, las ecuaciones de las rectas normales $\mathcal{L}_3'$ y $\mathcal{L}_4'$ son, respectivamente, $y = \phi x + \phi^{-1}c$ y $y = -\phi x + \phi^{-1}c$ (es preciso considerar la ecuación de la semielipse inferior).

Luego, $|\,\overline{OG}\,| = \phi^{-1}c$ ■

Obsérvese además que la ecuación de la recta que pasa por los puntos $B = (a, 0)$ y $L = (-c, c)$ es

$$y = \frac{(a - x)c}{a + c}$$

la cual, naturalmente, satisface el punto $G = (0, \phi^{-1}c)$

Por otra parte, la ecuación de la recta normal $\mathcal{L}_2'$ es $y = \phi x - \phi^{-1}c$

Se encuentra que la intersección de las rectas $\mathcal{L}_2'$ y $\mathcal{L}_4'$ ocurre en el punto $T = (\phi^{-2}c, 0)$

Luego, T divide en *razón áurea* al segmento $\overline{OF'}$ ■

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\,\overline{BG}\,|^2 &= a^2 + \phi^{-2}c^2 = \phi^2c^2 + \phi^{-2}c^2 \\
&= (\phi^2 + \phi^{-2})\,c^2 = 3c^2 \\
|\,\overline{BL}\,|^2 &= (a + c)^2 + c^2 = (\phi c + c)^2 + c^2 \\
&= \phi^4c^2 + c^2 = (\phi^4 + 1)c^2 \\
&= 3(\phi + 1)c^2 = 3\phi^2c^2 \\
\text{Luego,} \quad \frac{|\,\overline{BL}\,|}{|\,\overline{BG}\,|} &= \frac{\sqrt{3}\,\phi c}{\sqrt{3}\,c} = \phi \qquad ■
\end{aligned}$$

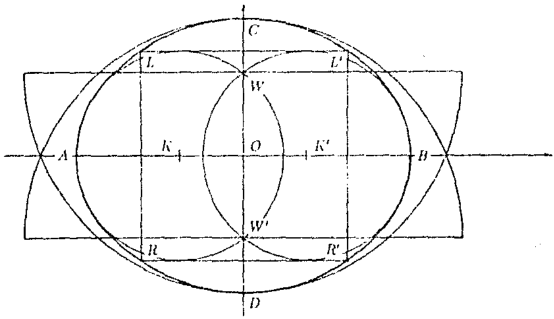
Para demostrar que E también es *punto de oro* del segmento $\overline{BL}$ podemos recurrir a la congruencia de triángulos.

Por último, observemos que la elipse que pasa por los puntos P, B', Q y A' tiene semiejes de longitudes ϕa y a, y de ahí que su excentricidad sea $\frac{1}{\sqrt{\phi}}$ ∎

Teorema 1.1.23

Considérese la elipse áurea $x^2 + \phi y^2 = a^2$. *Entonces*

1. *El semieje mayor y el radio de curvatura para los vértices, están en razón áurea.*
2. *El radio de curvatura para los extremos del eje menor y el semieje menor, están en razón áurea.*
3. *Las circunferencias de curvatura para los vértices se intersectan en los centros de curvatura para los extremos del eje menor*



En la figura K y K' son, respectivamente, los centros de curvatura para los vértices A y B, y W y W' los centros de curvatura para los puntos D y C.

Demostración

Sea la elipse $x^2 + \phi y^2 = a^2$

Derivando, $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{\phi}\sqrt{a^2 - x^2}}$, $\quad y'' = -\dfrac{a^2}{\sqrt{\phi}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$

La curvatura en el punto $x = x_0$ está dada por

$$K(x_0) = \frac{|\, y''(x_0)\,|}{\{1 + [y'(x_0)]^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

Haciendo $x = 0$ obtenemos
$$K(0) = \frac{1}{\sqrt{\phi}\, a} = \frac{1}{\phi b}$$

Luego, el radio de curvatura en el punto C es $\rho = \phi b$ ∎

Dado que la elipse $x^2+\phi y^2 = a^2$ no es derivable en $x = a$, consideraremos la elipse conjugada $\phi x^2 + y^2 = a^2$, que sí es derivable en $x = 0$

Sea la elipse $\phi x^2 + y^2 = a^2$

Derivando, $y' = -\dfrac{\phi x}{\sqrt{a^2 - \phi x^2}}$, $\quad y'' = -\dfrac{\phi a^2}{(a^2 - \phi x^2)^{\frac{3}{2}}}$

Haciendo $x = 0$ obtenemos $K(0) = \dfrac{\phi}{a}$

Luego, el radio de curvatura en el punto B es $\rho = \phi^{-1} a$ ∎

De modo que las coordenadas de los puntos K, K', W y W' de la figura son

$$\begin{aligned} K &= (-\phi^{-2}a, 0) \\ K' &= (\phi^{-2}a, 0) \\ W &= (0, \phi^{-1}b) \\ W' &= (0, -\phi^{-1}b) \end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones de las circunferencias de curvatura para los vértices A y B son

$$\begin{aligned} (x - \phi^{-2}a)^2 + y^2 &= \phi^{-2}a^2 \\ \text{y} \quad (x + \phi^{-2}a)^2 + y^2 &= \phi^{-2}a^2 \end{aligned}$$

las cuales, naturalmente, satisfacen los puntos W y W' ∎

Por supuesto, estas circunferencias son tangentes al rectángulo focal.

Definición 1.1.8

Diremos que una hipérbola es *áurea* si su excentricidad es ϕ

Obsérvese que la ecuación $x^2 - \phi^{-1}y^2 = a^2$ corresponde a una *hipérbola áurea* con centro en el origen, focos sobre el eje X y semieje de longitud a.

Teorema 1.1.24

Una hipérbola es áurea si y solamente si el rectángulo focal es un cuadrado.

Demostración

Es completamente análoga a la del teorema 1.1.20 ∎

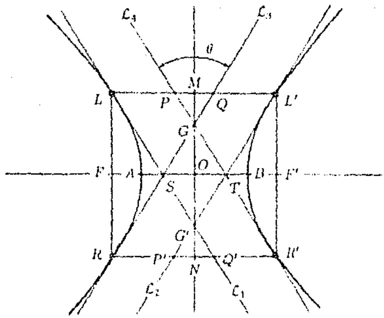
Teorema 1.1.25

Considérese la hipérbola áurea $x^2 - \phi^{-1}y^2 = a^2$

Sean A *y* B *sus vértices,* F *y* F' *sus focos y* $\overline{LR}$ *y* $\overline{L'R'}$ *sus dos cuerdas focales.*

Designemos con $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, *y* $\mathcal{L}_4$ *las cuatro rectas tangentes en los puntos* L, L', R *y* R' *respectivamente, las cuales se intersectan dos a dos en los puntos* G, G', S *y* T.

Sean P, Q, P' *y* Q' *las intersecciones de las rectas tangentes con los segmentos* $\overline{LL'}$ *y* $\overline{RR'}$ *y sean* M *y* N *respectivamente, los puntos medios de dichos segmentos, tal y como se muestra en la figura siguiente:*



Se afirma que:

1. *Los puntos* T *y* B *trisectan en partes áureas al segmento* $\overline{OF'}$ *(lo mismo con relación a los puntos* A *y* S *respecto al segmento* $\overline{OF}$*)*
2. *Los puntos* P *y* Q *trisectan en partes áureas al segmento* $\overline{LL'}$ *(lo mismo con relación a los puntos* P' *y* Q' *respecto al segmento* $\overline{RR'}$*)*
3. G *y* G' *dividen respectivamente en razón áurea a los segmentos* $\overline{OM}$ *y* $\overline{ON}$
4. $\theta = \arctan(2)$.

Demostración

Demostremos que T y B trisectan en partes áureas al segmento $\overline{OF'}$

En efecto, las ramas superiores de la hipérbola tienen por ecuación

$$y = +\phi^{\frac{1}{2}}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Derivando, $y' = \dfrac{\sqrt{\phi}\,x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

Haciendo $x = c$, encontramos que

$$y'(c) = \frac{\sqrt{\phi}\, c}{\sqrt{c^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{\phi}\, c}{\sqrt{a^2\phi^2 - a^2}} = \frac{c}{a} = \phi$$

Luego, la ecuación de la recta $\mathcal{L}_2$ es

$$y = \phi x - \phi c + c = \phi x - \phi^{-1}c$$

Haciendo $y = 0$, encontramos que $x = \phi^{-2}c$

Por tanto, T es *punto de oro* del segmento $\overline{OF'}$ y, como la hipérbola es *áurea*, B también lo es ∎

De manera similar se encuentra que la ecuación de la recta $\mathcal{L}_4$ es

$$y = -\phi x + \phi^{-1}c$$

Luego, G es *punto de oro* del segmento $\overline{OM}$ ∎

Haciendo $y = c$ en la ecuación para $\mathcal{L}_4$ encontramos que $x = -\phi^{-3}c$

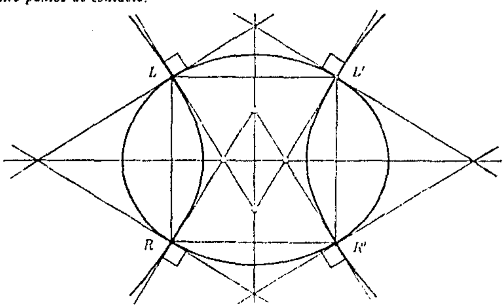
Entonces, $|\,\overline{PQ}\,| = 2\phi^{-3}c$ y como $|\,\overline{LL'}\,| = 2c$, P y Q son *puntos de oro* de $\overline{LL'}$ ∎

Por último, observemos que

$$\tan\theta = \frac{-\phi - \phi}{1 + (\phi)(-\phi)} = \frac{-2\phi}{1 - \phi^2} = \frac{-2\phi}{-\phi} = 2 \quad ∎$$

Teorema 1.1.26

***Las cónicas áureas** $x^2 + \phi y^2 = a^2$ (elipse) y $x^2 - \phi^2 y^2 = a^2$ (hipérbola) son ortogonales en sus cuatro puntos de contacto.*



Demostración

Es claro que los puntos de contacto ocurren sobre los vértices del rectángulo focal que tienen en común.

De acuerdo con la demostración del teorema 1.1.22, la pendiente de la recta tangente a la elipse en el punto L' es $m_1 = -\phi^{-1}$

De acuerdo con la demostración del teorema 1.1.25, la pendiente de la recta tangente a la hipérbola en el punto L' es $m_2 = \phi$

Luego, las cónicas son ortogonales ∎

Teorema 1.1.27

Si una elipse y una hipérbola comparten rectángulo focal, son ortogonales y la diferencia de sus excentricidades es la unidad, entonces son necesariamente áureas.

Demostración

Es claro que las cónicas en cuestión comparten focos.

Podemos suponer que los focos están ambos sobre el eje horizontal y equidistantes del origen.

Sea $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, con $a^2 - b^2 = c^2$, la ecuación de la elipse.
Sea $\beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$, con $\alpha^2 + \beta^2 = c^2$, la ecuación de la hipérbola.

Evidentemente las intersecciones ocurren para los valores $x = \pm c$

Derivando,
$$y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad \text{(elipse)}$$
$$y' = +\frac{\beta x}{\alpha\sqrt{x^2 - \alpha^2}} \qquad \text{(hipérbola)}$$

Para $x = c$,
$$y'(c) = -\frac{c}{a} \qquad \text{(elipse)}$$
$$y'(c) = +\frac{c}{\alpha} \qquad \text{(hipérbola)}$$

Como las cónicas son ortogonales en sus puntos de contacto, se cumple que

$$\left(-\frac{c}{a}\right)\left(+\frac{c}{\alpha}\right) = -1, \qquad \text{esto es,} \qquad c^2 = a\alpha$$

Sean e_E y e_H respectivamente, las excentricidades de la elipse e hipérbola.

Se observa que

$$e_H = \frac{c}{\alpha} = \frac{ac}{a\alpha} = \frac{ac}{c^2} = \frac{a}{c}, \quad \left(\text{es decir,} \quad e_H = \frac{1}{e_E}\right)$$

Luego, $e_H - e_E = \frac{a}{c} - \frac{c}{a} = \frac{a^2 - c^2}{ac} = 1$

Entonces, $ac = a^2 - c^2 = b^2$ y, de acuerdo con el teorema 1.1.7, $\frac{a}{c} = \phi$

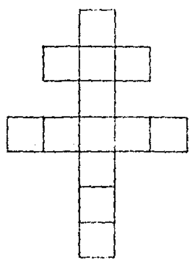
Por tanto, $e_E = \phi^{-1}$ y $e_H = \phi$ ■

Obsérvese que $\alpha = \frac{c^2}{a}$ y $\beta = \frac{bc}{a}$, de manera que la ecuación de la hipérbola toma la forma

$$a^2x^2 - b^2y^2 = c^4 = \left(a^2 - b^2\right)^2$$

Terminemos el presente apartado enunciando el siguiente problema:

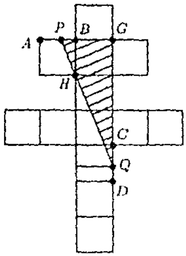
Encontrar una línea recta *oblicua* que divida la figura, la cual se supone está conformada por 13 unidades cuadradas, en dos partes de igual área.



La inesperada solución al problema se presenta en el siguiente y último teorema:

Teorema 1.1.28

En la figura que presentamos, P es el punto de oro del segmento $\overline{AB}$ más próximo a B y Q es el punto de oro del segmento $\overline{CD}$ más próximo a D



Se afirma que la recta que pasa por los puntos P y Q divide la figura en dos partes de igual área, esto es, en dos partes de 6.5 unidades cuadradas cada una.

Demostración

Demostremos primeramente que los puntos P, H y Q son colineales.

En efecto,

$$|\overline{PB}| = \phi^{-2}|\overline{AB}| = \phi^{-2} \qquad \text{y} \qquad |\overline{CQ}| = \phi^{-1}|\overline{CD}| = \phi^{-1}$$

Luego, las pendientes de los segmentos $\overline{HP}$ y $\overline{HQ}$ están determinadas respectivamente por

$$\begin{aligned} m_1 &= -\frac{1}{\phi^{-2}} = -\phi^2 \\ m_2 &= -(\phi^{-1}+2) = -(\phi+1) = -\phi^2 \end{aligned}$$

De manera que los puntos P, H y Q son colineales, como quería demostrarse.

Entonces, el área de la figura situada en el semiplano superior es

$$\begin{aligned} A &= 4 + \frac{1}{2}(\phi^{-2}+1)(3+\phi^{-1}) = 4 + \frac{1}{2}(3-\phi)(\phi+2) \\ &= 4 + \frac{1}{2}(6+\phi-\phi^2) \\ &= 4 + \frac{1}{2}(5) \\ &= 6.5 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Resulta pues evidente la riqueza geométrica del *número de oro*.

1.2 La sucesión de Fibonacci. Definición y propiedades aritméticas

Se dice que en la Edad Media el italiano Leonardo de Pisa (1175-1250), mejor conocido como *Fibonacci* (*"hijo de Bonacci"*), descubrió cierta sucesión de enteros particularmente interesante al estudiar un problema de reproducción de conejos bajo condiciones especiales.

Esta sucesión es actualmente conocida como la *sucesión de Fibonacci* y su estudio será de capital importancia en el presente trabajo.

Cada número de esta sucesión es *la suma* de los dos enteros inmediatos anteriores, iniciando con los enteros 0 y 1.

Formalmente se tiene la siguiente definición:

Definición 1.2.1

La sucesión infinita de enteros $U_0, U_1, U_2, U_3, \ldots$ definida por

$$U_n = \begin{cases} 0 & \text{, para } n = 0 \\ 1 & \text{, para } n = 1 \\ U_{n-2} + U_{n-1} & \text{, para } n \geq 2 \end{cases}$$

es conocida como *la sucesión de Fibonacci.*

Los elementos de esta sucesión son los **números de Fibonacci**, entendiendo que U_n denota al *n-ésimo* **número de Fibonacci.**

Extendiendo la sucesión hasta su término décimo quinto encontramos los siguientes elementos:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ \ldots$$ [3]

Resulta verdaderamente notable que *los números de Fibonacci*, según confirmaremos en próximos apartados, presenten vínculos fortísimos con el ya citado *número de oro.* Baste considerar la diferente naturaleza y contexto histórico de sus orígenes.

Por lo que respecta a este segundo apartado, es nuestro propósito el presentar algunas propiedades, ciertamente interesantes, de los *números de Fibonacci*, algunas de las cuales serán de suma utilidad para el desarrollo posterior del presente trabajo.

Iniciemos, pues, enunciando algunos teoremas:

Teorema 1.2.1

Para todo entero positivo n, se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $U_{2n+2} + U_{2n-2} = 3U_{2n}$
2. $U_{3n+3} - U_{3n-3} = 4U_{3n}$

[3] Debe aclararse que, de acuerdo con los hechos históricos, los dos primeros enteros de la sucesión propuesta por Fibonacci son la unidad. No obstante, para efectos de este trabajo y por razones de conveniencia, proponemos los enteros 0 y 1 como los primeros elementos de la sucesión. Nótese que la inclusión arbitraria del elemento $U_0 = 0$ no altera absolutamente la continuación natural de los siguientes elementos.

Demostración

Las igualdades anteriores son consecuencia directa de la definición 1.2.1.

En efecto,

1. $$\begin{aligned} U_{2n+2}+U_{2n-2} &= (U_{2n}+U_{2n+1})+(U_{2n}-U_{2n-1}) = 2U_{2n}+(U_{2n+1}-U_{2n-1}) \\ &= 2U_{2n}+U_{2n} = 3U_{2n} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} U_{3n+3}-U_{3n-3} &= (U_{3n+1}+U_{3n+2})-(U_{3n-1}-U_{3n-2}) = U_{3n+2}+U_{3n+1}-U_{3n-1}+U_{3n-2} \\ &= (U_{3n}+U_{3n+1})+(U_{3n-1}+U_{3n})-(U_{3n+1}-U_{3n})+(U_{3n}-U_{3n-1}) \\ &= 4U_{3n} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En el teorema 1.2.6 enunciaremos una generalización de este teorema.

Teorema 1.2.2

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$U_n^2 - U_{n-1}U_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

Demostración. (Inducción sobre n)

- El caso $n = 1$ se comprueba directamente.
- Supongamos que $U_k^2 - U_{k-1}U_{k+1} = (-1)^{k+1}$, para cierto entero $k \geq 1$
- Demostremos que $U_{k+1}^2 - U_kU_{k+2} = (-1)^{k+2}$

  En efecto, la hipótesis inductiva puede escribirse como sigue:

  $$(U_k + U_{k+1})U_k - (U_{k-1} + U_k)U_{k+1} = (-1)^{k+1}$$

  Esto es, $U_kU_{k+2} - U_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$

  Multiplicando por -1 la igualdad anterior,

  $$U_{k+1}^2 - U_kU_{k+2} = (-1)^{k+2} \quad \blacksquare$$

Teorema 1.2.3

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$5U_n^2 - (U_{n-1} + U_{n+1})^2 = \pm 4 \qquad \begin{pmatrix} +, \textit{ si } n \textit{ es impar} \\ -, \textit{ si } n \textit{ es par} \end{pmatrix}$$

Demostración

De acuerdo con el teorema anterior, $U_{n-1}U_{n+1} = U_n^2 + (-1)^n$

Multiplicando por 4, $(2U_{n-1})(2U_{n+1}) = 4\left[U_n^2 + (-1)^n\right]$

Equivalentemente, $[(U_{n-1} + U_{n+1}) - U_n][(U_{n-1} + U_{n+1}) + U_n] = 4\left[U_n^2 + (-1)^n\right]$

Efectuando las operaciones, $(U_{n-1} + U_{n+1})^2 - U_n^2 = 4U_n^2 + 4(-1)^n$

De donde encontramos que, $5U_n^2 - (U_{n-1} + U_{n+1})^2 = -4(-1)^n$ ∎

Teorema 1.2.4

Para todo entero positivo n y para cualquier entero no negativo k, se satisface la igualdad

$$U_{n+k} = U_k U_{n-1} + U_{k+1} U_n$$

En particular,

1. $U_{2n-1} = U_{n-1}^2 + U_n^2$
2. $U_{2n} = U_{n+1}^2 - U_{n-1}^2 = (U_{n-1} + U_{n+1})U_n$
3. $U_{2n+1} = U_n^2 + U_{n+1}^2$
4. $U_{3n} = U_n^3 + U_{n+1}^3 - U_{n-1}^3$

Demostración. (Inducción sobre k)

- Es claro que para $k = 0$ y $k = 1$ la igualdad se verifica.
- Supongamos pues que la igualdad se verifica para los valores particulares $k = m$ y k =m+1 en donde m es un entero no negativo.

  Esto es, supongamos que para cierto entero $m \geq 0$ se satisfacen las igualdades

$$\begin{aligned} U_{n+m} &= U_m U_{n-1} + U_{m+1} U_n \\ U_{n+m+1} &= U_{m+1} U_{n-1} + U_{m+2} U_n \end{aligned}$$

- Demostremos ahora que la igualdad también se verifica para $k = m + 2$

  Esto es, demostremos que

$$U_{n+m+2} = U_{m+2} U_{n-1} + U_{m+3} U_n$$

En efecto,

$$\begin{aligned} U_{n+m+2} &= U_{n+m} + U_{n+m+1} \\ &= U_m U_{n-1} + U_{m+1} U_n + U_{m+1} U_{n-1} + U_{m+2} U_n \\ &= (U_m + U_{m+1}) U_{n-1} + (U_{m+1} + U_{m+2}) U_n \\ &= U_{m+2} U_{n-1} + U_{m+3} U_n \end{aligned}$$ ∎

Teorema 1.2.5

Para todo entero positivo n y para cualquier entero no negativo $k \leq n$, se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $U_{n-k} = U_k U_{n+1} - U_{k+1} U_n$, *para k impar.*
2. $U_{n-k} = U_{k+1} U_n - U_k U_{n+1}$, *para k par.*

Demostración. (Inducción sobre k)

Demostraremos solamente la igualdad 1.

► Se observa que

- $$U_{n-1} = U_{n+1} - U_n$$
- $$\begin{aligned} U_{n-3} &= U_{n-1} - U_{n-2} = 2(U_{n-2} + U_{n-1}) - U_{n-1} - 3U_{n-2} \\ &= 2U_n - U_{n-1} - 3U_{n-2} = 2(U_{n-1} + U_n) - 3(U_{n-2} + U_{n-1}) \\ &= 2U_{n+1} - 3U_n \end{aligned}$$

Luego, la igualdad 1. se satisface para los valores $k = 1$ y $k = 3$

► Supongamos ahora que la igualdad 1 se verifica para los valores particulares $k = m$ y $k = m + 2$, en donde m es un entero positivo.

Esto es, supongamos que para cierto entero $m \geq 1$ se satisfacen las igualdades

$$\begin{aligned} U_{n-m} &= U_m U_{n+1} - U_{m+1} U_n \qquad (m \leq n) \\ U_{n-m-2} &= U_{m+2} U_{n+1} - U_{m+3} U_n \qquad (m + 2 \leq n) \end{aligned}$$

► Demostremos entonces que la igualdad 1 también se verifica para $k = m + 4$. Esto es, demostremos que

$$U_{n-m-4} = U_{m+4} U_{n+1} - U_{m+5} U_n \qquad (m + 4 \leq n)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} U_{n-m-4} &= U_{n-m-2} - U_{n-m-3} = U_{n-m-2} - (U_{n-m-1} - U_{n-m-2}) \\ &= 2U_{n-m-2} - U_{n-m-1} = 2_{n-m-2} - (U_{n-m} - U_{n-m-2}) \\ &= 3U_{n-m-2} - U_{n-m} \qquad \text{y, aplicando la hipótesis inductiva,} \\ U_{n-m-4} &= 3U_{m+2} U_{n+1} - 3U_{m+3} U_n - U_m U_{n+1} + U_{m+1} U_n \\ &= (3U_{m+2} - U_m) U_{n+1} - (3U_{m+3} - U_{m+1}) U_n \end{aligned}$$

Pero,

$$
\begin{aligned}
3U_{m+2} - U_m &= U_{m+2} + 2U_{m+2} - U_m \\
&= U_{m+2} + 2(U_{m+3} - U_{m+1}) - (U_{m+2} - U_{m+1}) \\
&= U_{m+3} - U_{m+1} = (U_{m+3} - U_{m+1}) + U_{m+3} \\
&= U_{m+2} + U_{m+3} = U_{m+4}, \qquad \text{y de ahí que} \\
3U_{m+3} - U_{m+1} &= U_{m+5} \quad (\text{sustitúyase } m \text{ por } m+1)
\end{aligned}
$$

Luego ,

$$U_{n-m-4} = U_{m+4}U_{n+1} - U_{m+5}U_n \qquad ■$$

Teorema 1.2.6

Para cualesquiera enteros positivos n y k, con $k \leq n$, se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $U_{n+k} - U_{n-k} = (U_{k-1} + U_{k+1})U_n$, *para k impar.*
2. $U_{n+k} + U_{n-k} = (U_{k-1} + U_{k+1})U_n$, *para k par.*
3. $U_{n+k} + U_{n-k} = (U_{n-1} + U_{n+1})U_k$, *para k impar.*
4. $U_{n+k} - U_{n-k} = (U_{n-1} + U_{n+1})U_k$, *para k par.*

Obsérvese que las igualdades del teorema 1.2.1 son, efectivamente, casos particulares de estas fórmulas. Más aún, haciendo $k = n$ se obtiene la igualdad 2 del teorema 1.2.4.

Demostración

Las fórmulas se deducen a partir de los teoremas 1.2.4 y 1.2.5 ■

Teorema 1.2.7

Para cualesquiera enteros positivos n y k, se satisface la igualdad

$$U_nU_{n+k} - U_{n+1}U_{n+k-1} = (-1)^{n+1}U_{k-1}$$

En particular :

1. $U_nU_{n+3} - U_{n+1}U_{n+2} = \pm 1$
2. $U_nU_{n+4} - U_{n+1}U_{n+3} = \pm 2$
3. $U_nU_{n+5} - U_{n+1}U_{n+4} = \pm 3$
4. $U_nU_{n+6} - U_{n+1}U_{n+5} = \pm 5$

tomando el signo positivo para n impar y negativo para n par.

Demostración

De acuerdo con el teorema 1.2.4,

$$\begin{aligned}
U_nU_{n+k} - U_{n+1}U_{n+k-1} &= U_n(U_kU_{n-1} + U_{k+1}U_n) - U_{n+1}(U_{k-1}U_{n-1} + U_kU_n) \\
&= U_{k+1}U_n^2 + U_kU_{n-1}U_n - U_{k-1}U_{n-1}U_{n+1} - U_kU_nU_{n+1} \\
&= U_{k+1}U_n^2 + U_k(U_{n-1} - U_{n+1})U_n - U_{k-1}U_{n-1}U_{n+1} \\
&= U_{k+1}U_n^2 - U_kU_n^2 - U_{k-1}U_{n-1}U_{n+1} \\
&= (U_{k+1} - U_k)U_n^2 - U_{k-1}U_{n-1}U_{n+1} \\
&= U_{k-1}U_n^2 - U_{k-1}U_{n-1}U_{n+1} \\
&= (U_n^2 - U_{n-1}U_{n+1})U_{k-1}
\end{aligned}$$

Y en virtud del teorema 1.2.2,

$$U_nU_{n+k} - U_{n+1}U_{n+k-1} = (-1)^{n+1}U_{k-1} \qquad \blacksquare$$

Teorema 1.2.8

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$U_{3n} = 5U_n^3 \pm 3U_n \qquad \left(\begin{array}{l} +,\ si\ n\ es\ par \\ -,\ si\ n\ es\ impar \end{array} \right)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
U_n^3 &= (U_{n+1} - U_{n-1})^3 \\
&= U_{n+1}^3 - U_{n-1}^3 - 3U_{n-1}U_{n+1}(U_{n+1} - U_{n-1}) \\
&= U_{n+1}^3 - U_{n-1}^3 - 3U_{n-1}U_nU_{n+1}
\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula 4 del teorema 1.2.4 y el teorema 1.2.2., obtenemos que

$$\begin{aligned}
U_n^3 &= U_{3n} - U_n^3 - 3U_n\left[U_n^2 - (-1)^{n+1}\right] \\
&= U_{3n} - 4U_n^3 + 3(-1)^{n+1}U_n
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$U_{3n} = 5U_n^3 + 3(-1)^nU_n \qquad \blacksquare$$

Teorema 1.2.9

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$U_{5n} = 25U_n^5 \pm 25U_n^3 + 5U_n \qquad \left(\begin{array}{l} +,\ si\ n\ es\ par \\ -,\ si\ n\ es\ impar \end{array} \right)$$

Demostración

En virtud de la igualdad 2. del teorema 1.2.6, encontramos que

$$U_{3n+k} + U_{3n-k} = (U_{k-1} + U_{k+1})U_{3n}, \quad \text{siempre que} \quad k \quad \text{sea par y} \quad k \leq 3n$$

Sea $k = 2n$. Entonces,

$$U_{5n} + U_n = (U_{2n-1} + U_{2n+1})U_{3n}$$

y, de acuerdo con las igualdades 1. y 3. del teorema 1.2.4,

$$U_{5n} + U_n = (U_{n-1}^2 + 2U_n^2 + U_{n+1}^2)U_{3n}$$

Aplicando ahora el teorema 1.2.2,

$$\begin{aligned} U_{5n} + U_n &= \left(U_{n-1}^2 + 2U_{n-1}U_{n+1} + U_{n+1}^2 + 2(-1)^{n+1}\right) U_{3n} \\ &= \left[(U_{n-1} + U_{n+1})^2 + 2(-1)^{n+1}\right] U_{3n} \end{aligned}$$

Pero, por el teorema 1.2.3, $(U_{n-1} + U_{n+1})^2 = 5U_n^2 + 4(-1)^n$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} U_{5n} + U_n &= \left[5U_n^2 + 4(-1)^n + 2(-1)^{n+1}\right] U_{3n} \\ &= \left[5U_n^2 + 2(-1)^n\right] U_{3n} \end{aligned}$$

Por último, aplicando el teorema 1.2.8, encontramos que

$$\begin{aligned} U_{5n} + U_n &= \left[5U_n^2 + 2(-1)^n\right]\left[5U_n^3 + 3(-1)^n U_n\right] \\ &= 25U_n^5 + 25(-1)^n U_n^3 + 6U_n \\ \text{Luego,} \quad U_{5n} &= 25U_n^5 + 25(-1)^n U_n^3 + 5U_n \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Pasemos a enunciar algunos teoremas que involucren series finitas:

Teorema 1.2.10

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = U_{n+2} - 1$$

Demostración. (Inducción sobre n)

- La fórmula se satisface para los primeros valores de n
- Supongamos que

$$\sum_{k=1}^{m} U_k = U_{m+2} - 1, \quad \text{para cierto entero} \quad m \geq 1$$

► Demostremos que

$$\sum_{k=1}^{m+1} U_k = U_{m+3} - 1$$

. En efecto,

$$\sum_{k=1}^{m+1} U_k = U_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} U_k = (U_{m+1} + U_{m+2}) - 1 = U_{m+3} - 1 \qquad \blacksquare$$

Teorema 1.2.11

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} U_{2k-1} = U_{2n}$$

Esto es, la suma de los primeros n números de Fibonacci con índice impar, es el número de Fibonacci con índice par $2n$

Demostración. (Inducción sobre n)

► La fórmula se satisface para los primeros valores de n

► Supongamos que

$$\sum_{k=1}^{m} U_{2k-1} = U_{2m}, \qquad \text{para cierto entero} \quad m \geq 1$$

► Demostremos que

$$\sum_{k=1}^{m+1} U_{2k-1} = U_{2(m+1)}$$

En efecto,

$$\sum_{k=1}^{m+1} U_{2k-1} = \sum_{k=1}^{m} U_{2k-1} + U_{2m+1} = U_{2m} + U_{2m+1} = U_{2m+2} = U_{2(m+1)} \qquad \blacksquare$$

Teorema 1.2.12

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} U_{2k} = U_{2n+1} - 1$$

Demostración. (Inducción sobre n)

- La fórmula se satisface para los primeros valores de n
- Supongamos que

$$\sum_{k=1}^{m} U_{2k} = U_{2m+1} - 1, \quad \text{para cierto entero} \quad m \geq 1$$

- Demostremos que

$$\sum_{k=1}^{m+1} U_{2k} = U_{2(m+1)+1} - 1$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} U_{2k} &= \sum_{k=1}^{m} U_{2k} + U_{2(m+1)} = (U_{2m+1} + U_{2m+2}) - 1 \\ &= U_{2m+3} - 1 = U_{2(m+1)+1} - 1 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 1.2.13

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} U_k = (-1)^{n+1} U_{n-1} + 1$$

Demostración. (Inducción sobre n)

- La fórmula se satisface para los primeros valores de n
- Supongamos que

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} U_k = (-1)^{m+1} U_{m-1} + 1, \quad \text{para cierto entero} \quad m \geq 1$$

- Demostremos que

$$\sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} U_k = (-1)^{m+2} U_m + 1$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}U_k &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}U_k+(-1)^{m+2}U_{m+1}\\ &= (-1)^{m+1}U_{m-1}+(-1)^{m+2}U_{m+1}\ +\ 1=(-1)^{m+2}(U_{m+1}-U_{m-1})+1\\ &= (-1)^{m+2}U_m\ +\ 1 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 1.2.14

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}U_{2k-1}=(-1)^{n+1}U_n^2$$

Esto es, el valor absoluto de la suma alternada de los primeros n números de Fibonacci con índice impar, es el cuadrado del n-ésimo número de Fibonacci.

Demostración. (Inducción sobre n)

- La fórmula se satisface para los primeros valores de n
- Supongamos que
$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}U_{2k-1}=(-1)^{m+1}U_m^2,\quad \text{para cierto entero}\quad m\geq 1$$
- Demostremos que
$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}U_{2k-1}=(-1)^{m+2}U_{m+1}^2$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}U_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}U_{2k-1}+(-1)^{m+2}U_{2m+1}\\ &= (-1)^{m+1}U_m^2+(-1)^{m+2}U_{2m+1}=(-1)^{m+2}(U_{2m+1}-U_m^2)\end{aligned}$$

Pero, de acuerdo con la igualdad 3. del teorema 1.2.4, $U_{2m+1}=U_m^2+U_{m+1}^2$

Por tanto, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}U_{2k-1}=(-1)^{m+2}U_{m+1}^2$ $\blacksquare$

Teorema 1.2.15

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}U_{2k}=(-1)^{n+1}U_nU_{n+1}$$

Demostración. (Inducción sobre n)

- La fórmula se satisface para los primeros valores de n
- Supongamos que

  $$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}U_{2k} = (-1)^{m+1}U_m U_{m+1}, \quad \text{para cierto entero} \quad m \geq 1$$

- Demostremos que

  $$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}U_{2k} = (-1)^{m+2}U_{m+1}U_{m+2}$$

  En efecto,

  $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}U_{2k} &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}U_{2k} + (-1)^{m+2}U_{2(m+1)} \\ &= (-1)^{m+1}U_m U_{m+1} + (-1)^{m+2}U_{2(m+1)} = (-1)^{m+2}(U_{2(m+1)} - U_m U_{m+1})\end{aligned}$$

  Pero, de acuerdo con la igualdad 2. del teorema 1.2.4, $U_{2(m+1)} = U_m U_{m+1} + U_{m+1}U_{m+2}$

  Por tanto, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}U_{2k} = (-1)^{m+2}U_{m+1}U_{m+2}$ ■

Teorema 1.2.16

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} U_{3k} = \frac{U_{3n+2} - 1}{2}$$

Demostración. (Inducción sobre n)

- La fórmula se satisface para los primeros valores de n
- Supongamos que

  $$\sum_{k=1}^{m} U_{3k} = \frac{U_{3m+2} - 1}{2}, \quad \text{para cierto entero} \quad m \geq 1$$

- Demostremos que

  $$\sum_{k=1}^{m+1} U_{3k} = \frac{U_{3m+5} - 1}{2}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} U_{3k} &= U_{3m+3}+\sum_{k=1}^{m} U_{3k} = U_{3m+3}+\frac{U_{3m+2}-1}{2} \\
&= \frac{2U_{3m+3}+U_{3m+2}-1}{2} = \frac{U_{3m+3}+(U_{3m+2}+U_{3m+3})-1}{2} \\
&= \frac{U_{3m+3}+U_{3m+4}-1}{2} = \frac{U_{3m+5}-1}{2} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 1.2.17

Para todo entero positivo n,se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_{3k-1} = \frac{U_{3n+1}-1}{2}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_{3k+1} = \frac{1}{2}U_{3(n+1)}-1$

Demostración. (Inducción sobre n)

Solamente demostraremos la igualdad 1. (la otra igualdad es una consecuencia inmediata de ésta y del teorema anterior).

- La fórmula se satisface para los primeros valores de n
- Supongamos que

$$\sum_{k=1}^{m} U_{3k-1} = \frac{U_{3m+1}-1}{2}, \quad \text{para cierto entero} \quad m \geq 1$$

- Demostremos que

$$\sum_{k=1}^{m+1} U_{3k-1} = \frac{U_{3m+4}-1}{2}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} U_{3k-1} &= U_{3m+2}+\sum_{k=1}^{m} U_{3k-1} = U_{3m+2}+\frac{U_{3m+1}-1}{2} \\
&= \frac{U_{3m+2}+(U_{3m+1}+U_{3m+2})-1}{2} = \frac{U_{3m+2}+U_{3m+3}-1}{2} \\
&= \frac{U_{3m+4}-1}{2} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 1.2.18

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}U_{3k} = \frac{(-1)^{n+1}U_{3n+1} + 1}{2}$$

Demostración. (Inducción sobre n)

- La fórmula se satisface para los primeros valores de n
- Supongamos que

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}U_{3k} = \frac{(-1)^{m+1}U_{3m+1} + 1}{2} \quad \text{para cierto entero positivo } m \geq 1$$

- Demostremos que

$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}U_{3k} = \frac{(-1)^{m+2}U_{3m+4} + 1}{2}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}U_{3k} &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}U_{3k} + (-1)^{m+2}U_{3m+3} \\
&= \frac{(-1)^{m+1}U_{3m+1} + 1}{2} + (-1)^{m+2}U_{3m+3} \\
&= \frac{(-1)^{m+1}U_{3m+1} + 1 + 2(-1)^{m+2}U_{3m+3}}{2} \\
&= \frac{(-1)^{m+2}(2U_{3m+3} - U_{3m+1}) + 1}{2} \\
&= \frac{(-1)^{m+2}(U_{3m+3} - U_{3m+1} + U_{3m+3}) + 1}{2} \\
&= \frac{(-1)^{m+2}(U_{3m+2} + U_{3m+3}) + 1}{2} \\
&= \frac{(-1)^{m+2}U_{3m+4} + 1}{2} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 1.2.19

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} U_{4k-3} = U_{2n-1}U_{2n}$$

Demostración. (Inducción sobre n)

- La fórmula se satisface para los primeros valores de n
- Supongamos que

$$\sum_{k=1}^{m} U_{4k-3} = U_{2m-1}U_{2m}\,, \quad \text{para cierto entero} \quad m \geq 1$$

- Demostremos que

$$\sum_{k=1}^{m+1} U_{4k-3} = U_{2m+1}U_{2m+2}$$

En efecto,

$$\sum_{k=1}^{m+1} U_{4k-3} = \sum_{k=1}^{m} U_{4k-3} + U_{4m+1} = U_{2m-1}U_{2m} + U_{4m+1}$$

Pero, de acuerdo con la igualdad 3. del teorema 1.2.4

$$U_{4m+1} = U_{2(2m)+1} = U_{2m}^2 + U_{2m+1}^2$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} U_{4k-3} &= U_{2m-1}U_{2m} + U_{2m}^2 + U_{2m+1}^2 \\
&= U_{2m}(U_{2m-1} + U_{2m}) + U_{2m+1}^2 \\
&= U_{2m}U_{2m+1} + U_{2m+1}^2 = U_{2m+1}(U_{2m} + U_{2m+1}) \\
&= U_{2m+1}U_{2m+2} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 1.2.20

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} U_k^2 = U_n U_{n+1}$$

Demostración. (Inducción sobre n)

- La fórmula se satisface para los primeros valores de n
- Supongamos que

$$\sum_{k=1}^{m} U_k^2 = U_m U_{m+1}\,, \qquad \text{para cierto entero} \quad m \geq 1$$

▶ Demostremos que

$$\sum_{k=1}^{m+1} U_k^2 = U_{m+1}U_{m+2}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} U_k^2 &= \sum_{k+1}^{m} U_k^2 + U_{m+1}^2 = U_m U_{m+1} + U_{m+1}^2 \\ &= U_{m+1}(U_m + U_{m+1}) = U_{m+1}U_{m+2} \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 1.2.21

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} U_k^3 = \frac{U_{3n+2} \pm 6U_{n-1} + 5}{10} \qquad \left(\begin{array}{l} +, \text{ si } n \text{ es impar} \\ -, \text{ si } n \text{ es par} \end{array} \right)$$

Demostración

En virtud del teorema 1.2.8

$$\sum_{k=1}^{n} 5U_k^3 = \sum_{k=1}^{n} \left(U_{3k} + 3(-1)^{n+1}U_k\right) = \sum_{k=1}^{n} U_{3k} + 3\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1}U_k$$

Aplicando las fórmulas de los teoremas 1.2.13 y 1.2.16,

$$\sum_{k=1}^{n} 5U_k^3 = \frac{U_{3n+2} - 1}{2} + 3(-1)^{n+1}U_{n-1} + 3 = \frac{U_{3n+2} + 6(-1)^{n+1}U_{n-1} + 5}{2}$$

De esta última igualdad se deduce la fórmula deseada $\blacksquare$

Teorema 1.2.22

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}U_{k+1} = \left\{ \begin{array}{ll} U_nU_{n+1} - 1, & \textit{si n es impar} \\ U_nU_{n+1}, & \textit{si n es par} \end{array} \right.$$

Demostración

En virtud del teorema 1.2.2,

$$\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}U_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \left\{U_k^2 - (-1)^{k+1}\right\} = \sum_{k=1}^{n} U_k^2 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}$$

Aplicando la fórmula del teorema 1.2.20,

$$\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}U_{k+1} = U_nU_{n+1} - \sum_{k+1}^{n}(-1)^{k+1}$$

Por último,observemos que

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ 1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}U_{k+1} = \begin{cases} U_nU_{n+1} - 1, & \text{si } n \text{ es impar} \\ U_nU_{n+1}, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Teorema 1.2.23

Para todo entero positivo n,se satisface la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} U_kU_{k+1} = \begin{cases} U_{n+1}^2, & \textit{si } n \textit{ es impar} \\ U_{n+1}^2 - 1, & \textit{si } n \textit{ es par} \end{cases}$$

Demostración

Observemos que

$$U_kU_{k+1} = (U_{k+1} - U_{k-1})U_{k+1} = U_{k+1}^2 - U_{k-1}U_{k+1}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} U_kU_{k+1} &= \sum_{k=1}^{n} U_{k+1}^2 - \sum_{k=1}^{n} U_{k-1}U_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} U_k^2 - \sum_{k=1}^{n} U_{k-1}U_{k+1} + U_{n+1}^2 - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n}(U_k^2 - U_{k-1}U_{k+1}) + U_{n+1}^2 - 1 \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula del teorema 1.2.2,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} U_kU_{k+1} &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} + U_{n+1}^2 - 1 \\ &= \begin{cases} U_{n+1}^2, & \text{si } n \text{ es impar} \\ U_{n+1}^2 - 1, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

1.3 Los coeficientes de Newton y los números de Fibonacci

Queremos distinguir en este apartado algunas relaciones notables entre los números de Fibonacci y los bien conocidos coeficientes newtonianos.

Recuérdese que si n y k son enteros no negativos tales que $n \geq k$, el **coeficiente de Newton** $\binom{n}{k}$ está definido como

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

en donde el signo ! denota la **función factorial**, que se define para los enteros no negativos mediante la igualdad

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, & \text{si } n \text{ es un entero positivo} \end{cases}$$

Son bien conocidas las siguientes fórmulas:

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}, \qquad \binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Para establecer el primer resultado, se disponen los coeficientes de Newton en un arreglo triangular[4] y se trazan diagonales ascendentes, tal y como se muestra en la siguiente figura:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & d_1 & & & & & & & & & & \\
\binom{0}{0} & d_2 & d_3 & & & & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & d_4 & d_5 & & & & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & d_6 & d_7 & & & & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & d_8 & d_9 & & & & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & d_{10} & d_{11} & & & & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & d_{12} & & & & & \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} & & & & & \\
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7} & & & & \\
\binom{8}{0} & \binom{8}{1} & \binom{8}{2} & \binom{8}{3} & \binom{8}{4} & \binom{8}{5} & \binom{8}{6} & \binom{8}{7} & \binom{8}{8} & & & \\
\binom{9}{0} & \binom{9}{1} & \binom{9}{2} & \binom{9}{3} & \binom{9}{4} & \binom{9}{5} & \binom{9}{6} & \binom{9}{7} & \binom{9}{8} & \binom{9}{9} & & \\
\binom{10}{0} & \binom{10}{1} & \binom{10}{2} & \binom{10}{3} & \binom{10}{4} & \binom{10}{5} & \binom{10}{6} & \binom{10}{7} & \binom{10}{8} & \binom{10}{9} & \binom{10}{10} & \\
\binom{11}{0} & \binom{11}{1} & \binom{11}{2} & \binom{11}{3} & \binom{11}{4} & \binom{11}{5} & \binom{11}{6} & \binom{11}{7} & \binom{11}{8} & \binom{11}{9} & \binom{11}{10} & \binom{11}{11} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

[4] Nos referimos precisamente al famoso triángulo de Pascal.

En esta figura, d_n denota la suma de los elementos sobre la n-ésima diagonal.

Demostraremos que, para todo entero positivo n, $d_n = U_n$

En efecto, puede comprobarse directamente que $d_1 = U_1$ y que $d_2 = U_2$

Observemos ahora que d_n está determinada por la igualdad

$$d_n = \begin{cases} \sum_{k=0}^{m} \binom{n-k-1}{k}, \text{ si } n = 2m+1 \text{ en donde } m \in \{0,1,2,\ldots\} \\ \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-k-1}{k}, \text{ si } n = 2m \quad \text{ en donde } m \in \{1,2,3,\ldots\} \end{cases}$$

Bastará demostrar que $d_n = d_{n-2} + d_{n-1}$, para cualquier entero $n \geq 3$

Caso 1: $n = 2t+1$ (y de ahí que $n-2 = 2(t-1)+1$ y que $n-1 = 2t$)

$$d_{n-2} = \sum_{k=0}^{t-1} \binom{n-k-3}{k} = \binom{n-3}{0} + \binom{n-4}{1} + \binom{n-5}{2} + \ldots + \binom{n-t-1}{t-2} + \binom{n-t-2}{t-1}$$

$$d_{n-1} = \sum_{k=0}^{t-1} \binom{n-k-2}{k} = \binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} + \binom{n-5}{3} + \ldots + \binom{n-t-1}{t-1}$$

Entonces,

$$d_{n-2} + d_{n-1} = \binom{n-2}{0} + \left[\binom{n-3}{0} + \binom{n-3}{1}\right] + \left[\binom{n-4}{1} + \binom{n-4}{2}\right] + \left[\binom{n-5}{2} + \binom{n-5}{3}\right] + \ldots + \left[\binom{n-t-1}{t-2} + \binom{n-t-1}{t-1}\right] + \binom{n-t-2}{t-1}$$

Pero, $\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}$, luego,

$$d_{n-2} + d_{n-1} = \binom{n-2}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{3} + \ldots + \binom{n-t}{t-1} + \binom{n-t-2}{t-1}$$

Por otra parte, $\binom{n-2}{0} = \binom{n-1}{0}$ si $n \geq 2$ y $\binom{n-t-2}{t-1} = \binom{n-t-1}{t}$ pues $n = 2t+1$

Por tanto,

$$\begin{aligned} d_{n-2} + d_{n-1} &= \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{3} + \ldots + \binom{n-t}{t-1} + \binom{n-t-1}{t} \\ &= \sum_{k=0}^{t} \binom{n-k-1}{k} = d_n \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Caso 2: $n = 2t$

Para este caso se procede mediante un razonamiento análogo. $\blacksquare$

Lo anterior nos conduce al siguiente teorema:

Teorema 1.3.1

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$U_n = \sum_{k=0}^{\alpha_n} \binom{n-k-1}{k}$$

en donde α_n es la parte entera de $\frac{n-1}{2}$

Otra interesante relación entre los *números de Fibonacci* y los citados coeficientes de Newton, se presenta en el siguiente teorema:

Teorema 1.3.2

Para todo entero positivo n, se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $$U_{3n} = \sum_{k=1}^{n} 2^k \binom{n}{k} U_k$$

2. $$U_{3n+1} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} U_{k+1}$$

Demostración (Inducción sobre n.)

Demostraremos las dos igualdades *simultáneamente*:

- Ambas igualdades se satisfacen para los primeros valores de n
- Supongamos ahora que ambas igualdades se satisfacen para un determinado valor entero $n = m \geq 1$

  Esto es, supongamos que, para cierto entero $m \geq 1$, se satisfacen las fórmulas

  1. $$U_{3m} = \sum_{k=1}^{m} 2^k \binom{m}{k} U_k$$

  2. $$U_{3m+1} = \sum_{k=0}^{m} 2^k \binom{m}{k} U_{k+1}$$

▶ Demostraremos que las igualdades se satisfacen necesariamente para $n = m + 1$.

Esto es, demostraremos que

1'. $$U_{3(m+1)} = \sum_{k=1}^{m+1} 2^k \binom{m+1}{k} U_k$$

2'. $$U_{3(m+1)+1} = \sum_{k=0}^{m+1} 2^k \binom{m+1}{k} U_{k+1}$$

En efecto,

1'. $$\sum_{k=1}^{m+1} 2^k \binom{m+1}{k} U_k = 2^{m+1} U_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} 2^k \binom{m+1}{k} U_k$$

Pero $$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}$$

Luego,
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} 2^k \binom{m+1}{k} U_k &= 2^{m+1} U_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} 2^k \binom{m}{k} U_k + \sum_{k=1}^{m} 2^k \binom{m}{k-1} U_k \\
&= 2^{m+1} U_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} 2^k \binom{m}{k} U_k + \sum_{k=0}^{m-1} 2^{k+1} \binom{m}{k} U_{k+1} \\
&= 2^{m+1} U_{m+1} + U_{3m} + 2 \sum_{k=0}^{m} 2^k \binom{m}{k} U_{k+1} - 2^{m+1} U_{m+1} \\
&= U_{3m} + 2U_{3m+1} = U_{3m+3} = U_{3(m+1)} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

2'.
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1} 2^k \binom{m+1}{k} U_{k+1} &= 1 + 2^{m+1} U_{m+2} + \sum_{k=1}^{m} 2^k \binom{m+1}{k} U_{k+1} \\
&= 1 + 2^{m+1} U_{m+2} + \sum_{k=1}^{m} 2^k \binom{m}{k} U_{k+1} + \sum_{k=1}^{m} 2^k \binom{m}{k-1} U_{k+1} \\
&= 1 + 2^{m+1} U_{m+2} + \sum_{k=0}^{m} 2^k \binom{m}{k} U_{k+1} - 1 + \sum_{k=0}^{m-1} 2^{k+1} \binom{m}{k} U_{k+2} \\
&= 2^{m+1} U_{m+2} + U_{3m+1} + \sum_{k=0}^{m} 2^{k+1} \binom{m}{k} U_{k+2} - 2^{m+1} U_{m+2} \\
&= U_{3m+1} + \sum_{k=0}^{m} 2^{k+1} \binom{m}{k} (U_k + U_{k+1}) \\
&= U_{3m+1} + \sum_{k=0}^{m} 2^{k+1} \binom{m}{k} U_k + \sum_{k=0}^{m} 2^{k+1} \binom{m}{k} U_{k+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} 2^k \binom{m+1}{k} U_{k+1} &= U_{3m+1} + 2\sum_{k=0}^{m} 2^k \binom{m}{k} U_k + 2\sum_{k=0}^{m} 2^k \binom{m}{k} U_{k+1} \\
&= U_{3m+1} + 2\sum_{k=1}^{m} 2^k \binom{m}{k} U_k + 2\sum_{k=0}^{m} 2^k \binom{m}{k} U_{k+1} \\
&= U_{3m+1} + 2U_{3m} + 2U_{3m+1} \\
&= U_{3m+1} + 2(U_{3m} + U_{3m+1}) \\
&= U_{3m+1} + 2U_{3m+2} \\
&= U_{3m+2} + (U_{3m+1} + U_{3m+2}) \\
&= U_{3m+2} + U_{3m+3} \\
&= U_{3m+4} = U_{3(m+1)+1} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Los siguientes y últimos teoremas resultan ser verdaderamente interesantes:

Teorema 1.3.3

Si n es un entero positivo par, entonces se satisface la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} 2^k \binom{n}{k} U_k = 0$$

Demostración (Inducción sobre n.)

- La igualdad se verifica para los primeros valores pares de n
- Supongamos ahora que, para cierto entero par $m \geq 2$, se verifica la igualdad

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} 2^k \binom{m}{k} U_k = 0$$

- Demostremos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+2} (-1)^{k+1} 2^k \binom{m+2}{k} U_k = 0$

En efecto,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+2} (-1)^{k+1} 2^k \binom{m+2}{k} U_k &= \sum_{k=2}^{m} (-1)^{k+1} 2^k \binom{m+2}{k} U_k + 2(m+2) + 2^{m+1}(m+2)U_{m+1} \\
&\quad -2^{m+2}U_{m+2} \\
&= \sum_{k=2}^{m} (-1)^{k+1} 2^k \binom{m+2}{k} U_k + 2^{m+1} m U_{m+1} - 2^{m+2} U_m + 2(m+2)
\end{aligned}
$$

Pero $\binom{m+2}{k} = \binom{m}{k-2} + 2\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}$.

Entonces,
$$\sum_{k=2}^{m}(-1)^{k+1}2^k\binom{m+2}{k}U_k = \sum_{k=2}^{m}(-1)^{k+1}2^k\binom{m}{k-2}U_k + 2\sum_{k=2}^{m}(-1)^{k+1}2^k\binom{m}{k-1}U_k + \sum_{k=2}^{m}(-1)^{k+1}2^k\binom{m}{k}U_k$$

Ahora bien, las series de esta última igualdad pueden escribirse como sigue:

- $$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{m}(-1)^{k+1}2^k\binom{m}{k-2}U_k &= \sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{k+3}2^{k+2}\binom{m}{k}U_{k+2}\\ &= 4\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{k+1}2^k\binom{m}{k}U_{k+2}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}2\sum_{k=2}^{m}(-1)^{k+1}2^k\binom{m}{k-1}U_k &= 2\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k+2}2^{k+1}\binom{m}{k}U_{k+1}\\ &= 4\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k}2^k\binom{m}{k}U_{k+1}\\ &= 4\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k}2^k\binom{m}{k}U_{k+2} - 4\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k}2^k\binom{m}{k}U_{k}\\ &= 4\left[\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{k}2^k\binom{m}{k}U_{k+2} \;-\; 1 - 2^{m-1}mU_{m+1}\right]\\ &\quad +4\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k+1}2^k\binom{m}{k}U_k\\ &= 4\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{k}2^k\binom{m}{k}U_{k+2} \;-\; 4 - 2^{m+1}mU_{m+1}\\ &\quad +4\left[\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^k\binom{m}{k}U_k + 2^mU_m\right]\\ &= -4\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{k+1}2^k\binom{m}{k}U_{k+2} + 4\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^k\binom{m}{k}U_k\\ &\quad +2^{m+2}U_m - 2^{m+1}mU_{m+1} \;-\; 4\\ &= -4\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{k+1}2^k\binom{m}{k}U_{k+2} + 2^{m+2}U_m - 2^{m+1}mU_{m+1} \;-\; 4\end{aligned}$$

- $$\sum_{k=2}^{m}(-1)^{k+1}2^k\binom{m}{k}U_k = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^k\binom{m}{k}U_k \;-\; 2m = -2m$$

Luego,

$$\sum_{k=2}^{m}(-1)^{k+1}2^k\binom{m+2}{k}U_k = 2^{m+2}U_m - 2^{m+1}mU_{m+1} - 2m - 4 = 2^{m+2}U_m - 2^{m+1}U_{m+1} - 2(m+2)$$

Por tanto, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+2}(-1)^{k+1}2^k\binom{m+2}{k}U_k = 0$, como quería demostrarse ∎

Teorema 1.3.4

Si n es un entero positivo impar, entonces se satisface la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^k\binom{n+1}{k}U_k = 2^{n+1}U_{n+1}$$

Demostración

Sea el impar $n = m - 1$, con m algún par positivo.

De acuerdo con el teorema anterior,

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^k\binom{m}{k}U_k = 0$$

Entonces, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k+1}2^k\binom{m}{k}U_k = 2^m U_m$

Esto es, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^k\binom{n+1}{k}U_k = 2^{n+1}U_{n+1}$ ∎

Teorema 1.3.5

Si n es un impar positivo y $n = 2t + 1$, entonces se satisface la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{n}{k}U_k = 5^t \qquad \text{(¡Una potencia perfecta de 5!)}$$

Demostración (Inducción sobre n)

- La igualdad se verifica para los primeros valores impares de n.
- Supongamos ahora que, para cierto impar $m = 2t + 1 \geq 1$, se verifica la igualdad

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k}U_k = 5^t$$

► Demostremos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+2}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m+2}{k}U_k = 5^{t+1}$

En efecto, $$\sum_{k=1}^{m+2}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m+2}{k}U_k = \sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m+2}{k}U_k+2^{m+1}U_{m+2}$$

Pero $\binom{m+2}{k} = \binom{m+1}{k-1} + \binom{m+1}{k}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+2}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m+2}{k}U_k &= \sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m+1}{k-1}U_k + \sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m+1}{k}U_k \\
&\quad +2^{m+1}U_{m+2} \\
&= \sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m+1}{k-1}U_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}2^{k}\binom{m+1}{k}U_k \\
&\quad +2^{m+1}U_{m+2}
\end{aligned}$$

Pero $m+1$ es par. Entonces, por el teorema 1.3.3,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+2}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m+2}{k}U_k &= \sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m+1}{k-1}U_k + 2^{m+1}U_{m+2} \\
&= \sum_{k=2}^{m+1}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m+1}{k-1}U_k + 2^{m+1}U_{m+2} + 1
\end{aligned}$$

Pero $\binom{m+1}{k-1} = \binom{m}{k-2} + \binom{m}{k-1}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{m+1}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m+1}{k-1}U_k &= \sum_{k=2}^{m+1}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k-2}U_k + \sum_{k=2}^{m+1}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k-1}U_k \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k+1}2^{k+1}\binom{m}{k}U_{k+2} + \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k}2^{k}\binom{m}{k}U_{k+1}
\end{aligned}$$

Ahora bien, las series de esta última igualdad pueden escribirse como sigue:

- $$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k+1}2^{k+1}\binom{m}{k}U_{k+2} &= 4\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k}U_{k+2} \\
&= 4\left[\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k}U_{k+2} - \frac{1}{2} - 2^{m-1}U_{m+2}\right] \\
&= 4\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k}U_{k+2} - 2^{m+1}U_{m+2} - 2
\end{aligned}$$

$$\bullet \quad \sum_{k=1}^{m}(-1)^k 2^k \binom{m}{k} U_{k+1} = -2\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k}(U_{k+2}-U_k)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k}U_k - 2\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k}U_{k+2}$$

$$= 2\cdot 5^t - 2\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k}U_{k+2}$$

Luego,

$$\sum_{k=2}^{m+1}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m+1}{k-1}U_k = 2\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k}U_{k+2} + 2\cdot 5^t - 2^{m+1}U_{m+2} - 2$$

Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{m+2}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m+2}{k}U_k = 2\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k}U_{k+2} + 2\cdot 5^t - 1$$

Esto es,

$$\sum_{k=1}^{m+2}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m+2}{k}U_k = 2\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k}U_k + 2\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k}U_{k+1}$$

$$+2\cdot 5^t - 1$$

$$= 2\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k}U_{k+1} + 4\cdot 5^t - 1$$

$$= 2\sum_{k=2}^{m+1}(-1)^{k}2^{k-2}\binom{m}{k-1}U_k + 4\cdot 5^t - 1$$

$$= -\sum_{k=2}^{m+1}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k-1}U_k + 4\cdot 5^t - 1$$

$$= -\left(\sum_{k=2}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k-1}U_k - 1 - 2^m U_{m+1}\right) + 4\cdot 5^t - 1$$

$$= -\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k-1}U_k + 2^m U_{m+1} + 4\cdot 5^t$$

$$= \frac{1}{2}\left(2^{m+1}U_{m+1}\right) - \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k-1}U_k + 4\cdot 5^t$$

Y, en virtud del teorema 1.3.4,

$$\sum_{k=1}^{m+2}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m+2}{k}U_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^k\binom{m+1}{k}U_k - \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k-1}U_k + 4\cdot 5^t$$

$$= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m+1}{k}U_k - \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k-1}U_k + 4\cdot 5^t$$

$$= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\left[\binom{m+1}{k} - \binom{m}{k-1}\right]U_k + 4\cdot 5^t$$

$$= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{m}{k}U_k + 4\cdot 5^t$$

$$= 5^t + 4\cdot 5^t = 5\cdot 5^t = 5^{t+1}, \qquad \text{como quería demostrarse} \qquad \blacksquare$$

Teorema 1.3.6

Si n es un impar positivo y $n = 2t+1$, entonces se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^k\binom{n}{k}U_{k+1} = 5^t + 1$

2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}2^k\binom{n}{k}U_{k-1} = 5^t - 1$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{n}{k}(U_{k-1} + U_{k+1}) = 1$

Demostración

De acuerdo al teorema 1.3.4, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^k\binom{n+1}{k}U_k = 2^{n+1}U_{n+1}$

Es decir, $$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{n+1}{k}U_k = 2^nU_{n+1}$$

Luego, $$2^nU_{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}2^{k-1}\binom{n+1}{k}U_k = 0$$

Esto es, $$2^nU_{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}2^{k}\binom{n+1}{k+1}U_{k+1} = 0$$

Por tanto, $$2^nU_{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}2^{k}\binom{n+1}{k+1}U_{k+1} = n+1$$

Pero $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. Entonces,

$$2^nU_{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}2^{k}\binom{n}{k}U_{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}2^{k}\binom{n}{k+1}U_{k+1} = n+1$$

Es decir, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^k\binom{n}{k}U_{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}2^k\binom{n}{k+1}U_{k+1} \;=\; 1$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}2^k\binom{n}{k+1}U_{k+1} &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k 2^{k-1}\binom{n}{k}U_k \\
&= -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{n}{k}U_k = -5^t \qquad \text{(teorema 1.3.5)}
\end{aligned}$$

Luego, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^k\binom{n}{k}U_{k+1} = 5^t + 1$ ■

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}(-1)^k 2^k\binom{n}{k}U_{k-1} &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k 2^k\binom{n}{k}U_{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k 2^k\binom{n}{k}U_{k+1} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k 2^k\binom{n}{k}U_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^k\binom{n}{k}U_k - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^k\binom{n}{k}U_{k+1} \\
&= 2\cdot 5^t - (5^t+1) = 5^t - 1 \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{n}{k}(U_{k-1}+U_{k+1}) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{n}{k}U_{k-1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{n}{k}U_{k+1} \\
&= \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{n}{k}U_{k-1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^k\binom{n}{k}U_{k+1} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(-1)^k 2^k\binom{n}{k}U_{k-1} + \frac{1}{2}(5^t+1) \\
&= -\frac{1}{2}(5^t-1) + \frac{1}{2}(5^t+1) = 1 \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 1.3.7

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$U_{6n} = \sum_{k=1}^{n} 2^{2k}\binom{2n}{2k-1}U_{2k-1}$$

Demostración

La igualdad puede demostrarse a partir de los teorema 1.3.2 (1) y 1.3.3 ■

1.4 Cuadros mágicos y determinantes

Consideremos los enteros sucesivos de 1 hasta 9 distribuidos en el interior de un cuadrado de nueve celdas, tal y como se muestra a continuación:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Cabe mencionar que esta distribución no es de ningún modo casual.

Observemos las virtudes del cuadrado:

1. $\begin{cases} 4+9+2=15 \\ 3+5+7=15 \\ 8+1+6=15 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4+3+8=15 \\ 9+5+1=15 \\ 2+7+6=15 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4+5+6=15 \\ 8+5+2=15 \end{cases}$

4. $\begin{cases} (4)(9)(2)+(3)(5)(7)+(8)(1)(6) = 72+105+48 = 225 = 15^2 \\ (4)(3)(8)+(9)(5)(1)+(2)(7)(6) = 96+45+84 = 225 = 15^2 \end{cases}$

Las igualdades 1, 2 y 3 establecen propiedades del cuadrado sobre renglones, columnas y diagonales respectivamente, todas ellas respecto a la suma; mientras que las igualdades 4 establecen propiedades sobre renglones y columnas, todas ellas respecto a la suma y al producto.

Por razones obvias se le considera **mágico** a este cuadrado.[5]

Por supuesto, la magia de un cuadrado numérico depende directamente de la complejidad y cantidad de las propiedades aritméticas que presente. Generalmente estas propiedades aritméticas se restringen a la suma y producto de los elementos sobre renglones, columnas y diagonales.

Respecto a un cuadrado numérico arbitrario, definimos las siguientes variables:

- R_i, *la suma* de los elementos sobre el i-ésimo renglón.
- C_i, *la suma* de los elementos sobre la i-ésima columna.

[5]Este es el llamado *Lo-Shu*, y se dice es el cuadrado mágico más antiguo que se conoce.

- D_1 *la suma* de los elementos sobre la diagonal principal externa.
- D_2 *la suma* de los elementos sobre la diagonal principal media.
- R'_i *el producto* de los elementos sobre el i-ésimo renglón.
- C'_i *el producto* de los elementos sobre la i-ésima columna.
- D'_1 *el producto* de los elementos sobre la diagonal principal externa.
- D'_2 *el producto* de los elementos sobre la diagonal principal media.

Con relación al cuadrado mágico presentado, se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $R_1 = R_2 = R_3 = C_1 = C_2 = C_3 = D_1 = D_2 = 15$
2. $R'_1 + R'_2 + R'_3 = C'_1 + C'_2 + C'_3 = 15^7$

(Se dice que el número 15 es la **constante mágica**.)

Se establece que un cuadrado numérico es *de orden n*, si contiene exactamente n^2 celdas, esto es, si está formado por n renglones y n columnas.

Por razones de gusto se conviene en restringir los números de un cuadrado mágico de orden n, a los enteros sucesivos de 1 hasta n^2.

No obstante, para efectos del presente trabajo, faltaremos a este convenio.

Considérense, por ejemplo, los siguientes cuadrados:

D	L	M
1	2	3
8	9	10
15	16	17

Julio 1990

J	V	S
15	16	17
22	23	24
29	30	31

Diciembre 1993

L	M	M
10	11	12
17	18	19
24	25	26

Enero 2000

Estos tres cuadrados de orden 3 han sido extraídos de las hojas de un calendario. Se afirma además que son **mágicos**, en el sentido de que satisfacen las siguientes propiedades aritméticas:[6]

1. $R_2 = C_2 = D_1 = D_2$
2. $R_1 + R_3 = C_1 + C_3 = R_2 + C_2 = D_1 + D_2$
3. $R_1, R_2, R_3, C_1, C_2, C_3, D_1$ y D_2 son múltiplos de tres.
4. El *determinante* correspondiente es igual a cero.

[6] Debe observarse que las cuatro propiedades involucran solamente las operaciones de suma y/o producto.

Puede demostrarse que todo cuadrado de orden 3 sobre cualquier hoja de calendario presenta las cuatro citadas propiedades. Los detalles de la demostración se dejan al lector, por no corresponder a los propósitos de este apartado.

Mencionemos que uno de nuestros particulares objetivos es el de construir **cuadrados mágicos** de orden 3, en cuyas celdas figuren exclusivamente **números de Fibonacci sucesivos.**

Para esto tomaremos como referencia básica al ya citado *Lo-Shu*.

La primer alternativa que se pensó, fue la de *sustituir* los elementos del *Lo-Shu* por los correspondientes **números de Fibonacci**, generando así el siguiente cuadrado:

3	34	1
2	5	13
21	1	8

Encontramos que éste satisface las siguientes propiedades:

* 1. $R_3 + C_1 = C_2 + D_1$
  2. $R_1 = C_3 + D_1$
  3. $2R_2 = C_2$
* 4. $2C_1 = R_3 + C_3$
  5. $4D_1 = R_1 + C_1$
* 6. $R_1' + R_2' + R_3' = C_1' + C_2' + C_3'$

Obsérvese que las igualdades marcadas con un asterisco son propiedades que *también* presenta el *Lo-Shu*. Es decir, las propiedades 1, 4 y 6 *se están heredando* de éste.

El teorema siguiente generaliza esta situación:

Teorema 1.4.1

Sea n un entero no negativo.

Respecto al cuadrado de la figura se satisfacen las siguientes propiedades:

U_{n+4}	U_{n+9}	U_{n+2}
U_{n+3}	U_{n+5}	U_{n+7}
U_{n+8}	U_{n+1}	U_{n+6}

• 1. $R_3 + C_1 = C_2 + D_1$

2. $R_1 = C_3 + D_1$

3. $2R_2 = C_2$

• 4. $2C_1 = R_3 + C_3$

5. $4D_1 = R_1 + C_1$

• 6. $R'_1 + R'_2 + R'_3 = C'_1 + C'_2 + C'_3$

7. $R'_3 - R'_1 - C'_2 + C'_3 = 2(-1)^n U_n \qquad (n \geq 1)$

8. $C'_2 - R'_3 - D'_2 + C'_3 = (-1)^n U_{n-1} \qquad (n \geq 1)$

Nótese que los elementos de este cuadrado son números de Fibonaci sucesivos, y que los sumandos derechos de sus índices corresponden precisamente a los enteros constitutivos del Lo-Shu.

Demostración

Realizaremos la demostración para el caso $n \geq 1$, dado que para $n = 0$ las seis primeras igualdades ya fueron confirmadas.

En efecto, aplicando el teorema 1.2.4, encontramos que

$$\begin{array}{lrcrcr}
\bullet & U_{n+1} & = & U_{n-1} & + & U_n \\
\bullet & U_{n+2} & = & U_{n-1} & + & 2U_n \\
\bullet & U_{n+3} & = & 2U_{n-1} & + & 3U_n \\
\bullet & U_{n+4} & = & 3U_{n-1} & + & 5U_n \\
\bullet & U_{n+5} & = & 5U_{n-1} & + & 8U_n \\
\bullet & U_{n+6} & = & 8U_{n-1} & + & 13U_n \\
\bullet & U_{n+7} & = & 13U_{n-1} & + & 21U_n \\
\bullet & U_{n+8} & = & 21U_{n-1} & + & 34U_n \\
\bullet & U_{n+9} & = & 34U_{n-1} & + & 55U_n
\end{array}$$

Luego,

$$\left\{\begin{array}{lll}
R_1 & = U_{n+4} + U_{n+9} + U_{n+2} & = 38U_{n-1} + 62U_n \\
R_2 & = U_{n+3} + U_{n+5} + U_{n+7} & = 20U_{n-1} + 32U_n \\
R_3 & = U_{n+8} + U_{n+1} + U_{n+6} & = 30U_{n-1} + 48U_n \\
 & & \\
C_1 & = U_{n+4} + U_{n+3} + U_{n+8} & = 26U_{n-1} + 42U_n \\
C_2 & = U_{n+9} + U_{n+5} + U_{n+1} & = 40U_{n-1} + 64U_n \\
C_3 & = U_{n+2} + U_{n+7} + U_{n+6} & = 22U_{n-1} + 36U_n \\
 & & \\
D_1 & = U_{n+4} + U_{n+5} + U_{n+6} & = 16U_{n-1} + 26U_n \\
D_2 & = U_{n+8} + U_{n+5} + U_{n+2} & = 27U_{n-1} + 44U_n
\end{array}\right.$$

De esto último se deducen las cinco primeras propiedades ∎

Efectuando las operaciones correspondientes, se encuentra que

$$\begin{cases} R'_1 &= U_{n+4}U_{n+9}U_{n+2} &= 102U_{n-1}^3 + 539U_{n-1}^2U_n + 945U_{n-1}U_n^2 + 550U_n^3 \\ R'_2 &= U_{n+3}U_{n+5}U_{n+7} &= 130U_{n-1}^3 + 613U_{n-1}^2U_n + 963U_{n-1}U_n^2 + 504U_n^3 \\ R'_3 &= U_{n+8}U_{n+1}U_{n+6} &= 168U_{n-1}^3 + 713U_{n-1}^2U_n + 987U_{n-1}U_n^2 + 442U_n^3 \\ \\ C'_1 &= U_{n+4}U_{n+3}U_{n+8} &= 126U_{n-1}^3 + 603U_{n-1}^2U_n + 961U_{n-1}U_n^2 + 510U_n^3 \\ C'_2 &= U_{n+9}U_{n+5}U_{n+1} &= 170U_{n-1}^3 + 717U_{n-1}^2U_n + 987U_{n-1}U_n^2 + 440U_n^3 \\ C'_3 &= U_{n+2}U_{n+7}U_{n+6} &= 104U_{n-1}^3 + 545U_{n-1}^2U_n + 947U_{n-1}U_n^2 + 546U_n^3 \\ \\ D'_1 &= U_{n+4}U_{n+5}U_{n+6} &= 120U_{n-1}^3 + 587U_{n-1}^2U_n + 957U_{n-1}U_n^2 + 520U_n^3 \\ D'_2 &= U_{n+8}U_{n+5}U_{n+2} &= 105U_{n-1}^3 + 548U_{n-1}^2U_n + 948U_{n-1}U_n^2 + 544U_n^3 \end{cases}$$

(para calcular los productos, basta considerar los coeficientes)

De lo anterior se desprenden las tres últimas propiedades ■

Para terminar, deseamos establecer una curiosa propiedad de *los determinantes de orden 3* cuyos elementos sean *números de Fibonacci sucesivos* dispuestos progresivamente

Consideremos, a manera de ejemplo, el más simple de tales *determinantes*:

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ U_4 & U_5 & U_6 \\ U_7 & U_8 & U_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 1[(5)(34) - (8)(21)] - 1[(3)(34) - (8)(13)] + 2[(3)(21) - (5)(13)] \\ &= (170 - 168) - (102 - 104) + 2(63 - 65) \\ &= 0 \end{aligned}$$

El hecho de que *el determinante* anterior sea *cero* no es un resultado casual.

El teorema siguiente establece que *todo determinante de orden 3 cuyos elementos sean números de Fibonacci sucesivos dispuestos progresivamente, es nulo.*

Teorema 1.4.2

Para todo entero positivo n, *se satisface la igualdad*

$$\begin{vmatrix} U_n & U_{n+1} & U_{n+2} \\ U_{n+3} & U_{n+4} & U_{n+5} \\ U_{n+6} & U_{n+7} & U_{n+8} \end{vmatrix} = 0$$

Demostración

De acuerdo con el teorema 1.2.4, *el determinante* puede escribirse

$$\begin{vmatrix} U_n & U_{n-1}+U_n & U_{n-1}+2U_n \\ 2U_{n-1}+3U_n & 3U_{n-1}+5U_n & 5U_{n-1}+8U_n \\ 8U_{n-1}+13U_n & 13U_{n-1}+21U_n & 21U_{n-1}+34U_n \end{vmatrix}$$

Basta observar que el tercer renglón *es una combinación lineal* de los otros; a saber, la suma del primer renglón con el cuádruplo del segundo ∎

Por supuesto, *todo determinante de orden 4 cuyos elementos sean números de Fibonacci sucesivos dispuestos progresivamente, es también nulo.*

En efecto, enunciamos el siguiente

Teorema 1.4.3

Para todo entero positivo n, *se satisface la igualdad*

$$\begin{vmatrix} U_n & U_{n+1} & U_{n+2} & U_{n+3} \\ U_{n+4} & U_{n+5} & U_{n+6} & U_{n+7} \\ U_{n+8} & U_{n+9} & U_{n+10} & U_{n+11} \\ U_{n+12} & U_{n+13} & U_{n+14} & U_{n+15} \end{vmatrix} = 0$$

Demostración

El determinante puede escribirse en la forma

$$\begin{vmatrix} U_n & U_{n-1}+U_n & U_{n-1}+2U_n & 2U_{n-1}+3U_n \\ 3U_{n-1}+5U_n & 5U_{n-1}+8U_n & 8U_{n-1}+13U_n & 13U_{n-1}+21U_n \\ 21U_{n-1}+34U_n & 34U_{n-1}+55U_n & 55U_{n-1}+89U_n & 89U_{n-1}+144U_n \\ 144U_{n-1}+233U_n & 233U_{n-1}+377U_n & 377U_{n-1}+610U_n & 610U_{n-1}+987U_n \end{vmatrix}$$

Se observa que el cuarto renglón *es una combinación lineal* de los dos anteriores; a saber, la diferencia del séptuplo del tercer renglón con el segundo ∎

Esta propiedad puede ser generalizada para *determinantes de orden* $k \geq 3$

Si $k = 2$, *el determinante*

$$\begin{vmatrix} U_n & U_{n+1} \\ U_{n+2} & U_{n+3} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}$$

1.5 Divisibilidad

En este apartado enunciaremos las principales propiedades de divisibilidad que presentan los **números de Fibonacci**.

Antes de entrar en materia, enunciaremos las siguientes definiciones:

Definición 1.5.1

Sean d y D, con $d \neq o$ y $D \geq d$, cualesquiera dos números enteros.

Se dice que d divide a D, escrito $d \mid D$, si existe el entero q tal que

$$D = dq$$

Por ejemplo, $7 \mid 91$, pues $91 = 7(13)$

Decir que d **divide a** D se considera equivalente a decir que D **es múltiplo de** d.

Definición 1.5.2

Sean a y b cualesquiera dos enteros no nulos.

El máximo común divisor de a y b, escrito (a, b), es el entero g tal que

1. $g \mid a$ y $g \mid b$
2. Si $d \mid a$ y $d \mid b$ $(d \neq g)$, entonces $d < g$

Obsérvese que la condición 1. hace de g un **divisor común** de a y b, mientras que 2. establece su **superioridad respecto a cualquier otro divisor común**.

Por ejemplo,$(1'272'600,\ 1'212'000) = 101$, pues ningún entero mayor que 101 los divide.

Definición 1.5.3

Diremos que los enteros a y b son **primos relativos** o **primos entre sí**, si su máximo común divisor es la unidad, es decir, si $(a, b) = 1$

Por ejemplo, 70 y 33

Obsérvese que los divisores positivos de 70 son 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 y 70, mientras que los divisores positivos de 33 son 1,3 11 y 33

Obsérvese también que 70 y 33 no son, en sí mismos, números primos.

Con relación al concepto de **divisibilidad** se demuestran en la Teoría de Números las siguientes propiedades:

1. Propiedad del cero

Todo entero diferente de cero divide a cero.

En símbolos, $a \mid 0$, para todo entero $a \neq 0$

2. Propiedad de las unidades

Todo entero se divide por las unidades.

En símbolos, $\pm 1 \mid a$, para todo entero a.

3. Propiedades reflexivas

Todo entero diferente de cero, se divide por sí mismo y por su inverso aditivo.

En símbolos $\pm a \mid a$, para todo entero $a \neq 0$

Los divisores ± 1 y $\pm a$ del entero a son llamados **divisores triviales** de a

Cuando los dos divisores triviales positivos de un entero $p > 1$ son sus únicos divisores positivos, se dice que p es **primo**.

Por ejemplo, los números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 y 37

4. Propiedad transitiva

Si un entero divide a otro y éste a un tercero, entonces el primero divide al tercero.

En símbolos, si $a \mid b$ y $b \mid c$, entonces $a \mid c$

5. Propiedad aditiva

Si un entero divide a otros dos, divide también a su suma y diferencia.

En símbolos, si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (b \pm c)$

6. Propiedades multiplicativas

Si un entero divide a otros dos, divide también a su producto. Más aún, si un entero divide a otro, divide a cualquiera de sus múltiplos.

En símbolos, si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid bc$
y si $a \mid b$, entonces $a \mid bc$, para todo entero c

7. Propiedad de linealidad

Si un entero divide a otros dos, divide también a cualquiera de sus combinaciones lineales (en particular a su suma, producto y diferencia).

En símbolos, si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (bx + cy)$, para cualesquiera enteros x y y

8. El algoritmo de la división

Sean d (divisor) y D (dividendo), con $d \neq 0$ y $D \geq d$. cualesquiera dos números enteros positivos.

Entonces existen los enteros positivos q (cociente) y r (residuo), con $0 \leq r < d$, tales que

$$D = qd + r$$

Por ejemplo, si $d = 23$ y $D = 136$, encontramos $q = 5$ y $r = 21$, pues

$$136 = 5(23) + 21$$

Se cumplen además las siguientes proposiciones:

1. $(a,b) \geq 1$, $(1,a) = 1$ y $(a,ab) = a$
2. $(a,b) = (b,a) = (a,b+ac)$, para cualquier entero c
3. Sea c un entero diferente de cero. Entonces:

   3.1 $(ac,bc) = c(a,b)$

   3.2 Si $(a,b) = 1$, $(a,bc) = (a,c)$

   3.3 Si $a \mid b$, $(a,b+c) = (a,c)$
4. Si $a \mid bc$ y $(a,b) = 1$, entonces $a \mid c$
5. Si $(b,c) = 1$ y $a \mid b$, entonces $(a,c) = 1$
6. $(a,a+1) = 1$, para cualquier entero $a \neq 0$
7. $a \mid b$ si y sólo si $(a,b) = a$
8. Si $a \mid (b+c)$ y $a \mid b$, entonces $a \mid c$

   Si $a \mid bc$ y $a \nmid b$, y a es primo, entonces $a \mid c$
9. Si $g = (a,b)$, existen entonces los enteros x_0 y y_0 tales que $g = ax_0 + by_0$

   Más aún, si $d \neq g$ es cualquier otra combinación lineal positiva de a y b, entonces $g < d$.

10. El algoritmo euclidiano para la determinación del M.C.D.

Sean d y D, con $d \neq 0$ y $D \geq d$, cualesquiera dos enteros positivos.

Haciendo aplicaciones sucesivas del algoritmo de la división, se generan las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rlcll}
0) & D & = & q_0 d + r_1 & (0 \leq r_1 < d) \\
1) & d & = & q_1 r_1 + r_2 & (0 \leq r_2 < r_1) \\
2) & r_1 & = & q_2 r_2 + r_3 & (0 \leq r_3 < r_2) \\
3) & r_2 & = & q_3 r_3 + r_4 & (0 \leq r_4 < r_3) \\
\cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\
i-1) & r_{i-2} & = & q_{i-1} r_{i-1} + r_i & (0 \leq r_i < r_{i-1}) \\
i) & r_{i-1} & = & q_i r_i &
\end{array}$$

Entonces, el máximo común divisor (*M.C.D.*) de los enteros d y D es r_t, el último residuo diferente de cero en este proceso de divisiones sucesivas.

Lo hasta aquí expuesto son los primeros resultados de un curso típico de Teoría de Números, con relación al tema de la divisibilidad.

Se han mencionado porque es deseable, para efectos del presente apartado, que el lector se familiarice con ellos, y, sobre todo, porque haremos uso de algunos de éstos.

De primera instancia es posible anticipar ya algunas propiedades interesantes respecto a la divisibilidad entre números de Fibonacci:

Teorema 1.5.1

Para todo entero positivo n, se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $U_n \mid U_{2n}$, *y el cociente que resulta de la división es* $U_{n-1} + U_{n+1}$
2. $U_n \mid U_{3n}$, *y el cociente que resulta de la división es* $(U_{n-1} + U_{n+1})^2 + (-1)^{n+1}$
3. $U_n \mid U_{5n}$, *y el cociente que resulta de la división es* $5(5U_{n-1}U_n^2U_{n+1} + 1)$
4. $U_{3n} \mid (U_n + U_{5n})$, *y el cociente que resulta de la división es*

$$U_{2n-1} + U_{2n+1} = (U_{n-1} + U_{n+1})^2 + 2(-1)^{n+1}$$

5. $U_{3n} \mid (U_{5n+1} - U_{n-1})$, *y el cociente que resulta de la división es*

$$U_{2n} + U_{2n+2}$$

Demostración

Estas propiedades se deducen fácilmente de los teoremas 2, 3, 4, 6, 7, 8 y 9 del apartado 1.2 ∎

Particularmente, las propiedades 1,2 y 3 serán generalizadas en el teorema 1.5.5

Es claro que en la sucesión de los enteros positivos, cualesquiera dos términos consecutivos son primos entre sí (proposición 6).

Lo correspondiente ocurre en ***la sucesión de Fibonacci***. En efecto:

Teorema 1.5.2

Números de Fibonacci consecutivos*, son primos entre sí.*

Demostración (Reducción al absurdo).

Supongamos que U_n y U_{n+1} *no son primos entre sí.*

Por tanto, debe existir el entero $d > 1$ tal que $d \mid U_n$ y $d \mid U_{n+1}$

En consecuencia, $d \mid U_{n-k}$ $(k \leq n)$, pues U_{n-k} es una combinación lineal de los enteros U_n y U_{n+1} (teorema 1.2.5)

En particular, $d \mid 1$ (defínase $k = n - 1$)

Por tanto, $d = 1$ ó $d = -1$

En cualquier caso esto contradice el hecho de que $d > 1$

Luego, U_n y U_{n+1} deben ser primos entre sí ∎

No únicamente U_n y U_{n+1} son entre sí primos, también los son U_n y U_{n+2}.

En efecto:

Teorema 1.5.3

Para todo entero positivo n, $(U_n, U_{n+2}) = 1$

Demostración

Como $U_n \mid U_n$, $(U_n, U_n + U_{n+1}) = (U_n, U_{n+1}) = 1$ (proposición 3.3 y teorema 1.5.2)

Esto es, $(U_n, U_{n+2}) = 1$ ∎

Obsérvese que, en general, no ocurre que $(U_n, U_{n+3}) = 1$

Hágase, por ejemplo, $n = 3$ ó $n = 6$

Teorema 1.5.4

Si un número de Fibonacci divide a otro, entonces es primo relativo con el antecesor y sucesor de éste.

Demostración

Supongamos que $U_n \mid U_m$, para determinados enteros n y m

Demostraremos que $(U_n, U_{m-1}) = 1 = (U_n, U_{m+1})$

Sea $g = (U_n, U_{m-1})$, en consecuencia, $g \mid U_n$ y $g \mid U_{m-1}$

Pero, por hipótesis, $U_n \mid U_m$

Luego, $g \mid U_m$ (por transitividad) y $g \mid U_{m-1}$

Y, como $(U_m, U_{m-1}) = 1$, $g = 1$ ◻

Análogamente se demuestra que $(U_n, U_{m+1}) = 1$ ■

El siguiente teorema es muy interesante:

Teorema 1.5.5

Para cualesquiera enteros positivos n *y* k, $U_n \mid U_{kn}$

En particular, si $n \mid m$, $U_n \mid U_m$

Demostración (Inducción sobre k)

- Para $k = 1$, la afirmación es trivial
- Supongamos que $U_n \mid U_{mn}$, para cierto entero positivo $m \geq 1$
- Demostremos que $U_n \mid U_{(m+1)n}$

  En efecto, aplicando el teorema 1.2.4, encontramos que

$$U_{(m+1)n} = U_{n+mn} = U_{mn}U_{n-1} + U_{mn+1}U_n$$

  Pero $U_n \mid U_{mn}$, entonces existe el entero q tal que $U_{mn} = qU_n$

  Luego, $U_{(m+1)n} = qU_{n-1}U_n + U_{mn+1}U_n = U_n(qU_{n-1} + U_{mn+1})$

  De donde $U_n \mid U_{(m+1)n}$, como quería demostrarse ◻

Obsérvese que el cociente que resulta de dividir $U_{(m+1)n}$ entre U_n es

$$qU_{n-1} + U_{mn+1}$$

en donde q es el cociente que resulta de dividir U_{mn} entre U_n

Muy en especial es de nuestro interés resolver el siguiente problema:

Dados cualesquiera dos números de Fibonacci, encontrar su M.C.D.

Revisemos primero tres casos particulares:

1. *Encontrar el M.C.D. de* U_{21} *y* U_{12}

   Los divisores positivos de $U_{21} = 10'946$ son:

   1, 2, 13, 26, 421, 842, 10'946

   Los divisores positivos de $U_{12} = 144$ son:

   1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144

   Luego, encontramos que $(U_{21}, U_{12}) = 2 = U_3$

   Obsérvese que $3 = (21, 12)$

2. *Encontrar el M.C.D. de* U_{20} *y* U_{15}

Los divisores positivos de $U_{20} = 6'765$ son:

$$1,\ 3,\ \underline{5},\ 11,\ 15,\ 33,\ 41,\ 55,\ 123,\ 165,\ 205,\ 451,\ 615,\ 1'353,\ 2'255,\ 6'765$$

Los divisores positivos de $U_{15} = 610$ son:

$$1,\ 2,\ \underline{5},\ 10,\ 61,\ 122,\ 305,\ 610$$

Luego, encontramos que $(U_{20}, U_{15}) = 5 = U_5$

Obsérvese que $5 = (20, 15)$

3. *Encontrar el M.C.D. de* U_{18} *y* U_{10}

Los divisores positivos de $U_{18} = 2'584$ son:

$$\underline{1},\ 2,\ 4,\ 8,\ 17,\ 19,\ 34,\ 38,\ 68,\ 76,\ 136,\ 152,\ 323,\ 646,\ 1'292,\ 2'584$$

Los divisores positivos de $U_{10} = 55$ son:

$$\underline{1},\ 5,\ 11,\ 55$$

Luego, encontramos que $(U_{18}, U_{10}) = 1 = U_2$

Obsérvese que $2 = (18, 10)$

La revisión de estos tres casos nos plantea la siguiente conjetura:

El M.C.D. de cualesquiera dos números de Fibonacci es también un número de Fibonacci. Más aún, el índice de éste, es el M.C.D. de los índices de aquéllos.

Esta interesante conjetura resulta ser afirmativa.

El siguiente teorema establece este hermoso resultado:

Teorema 1.5.6

Para cualesquiera enteros positivos m y n, se satisface la igualdad

$$(U_m, U_n) = U_{(m,n)}$$

En particular, U_m ***y*** U_n ***son primos entre sí, si y sólo sí*** m ***y*** n ***también lo son o su máximo común divisor es 2.***

Demostración

Si $m = n$, la igualdad se verifica trivialmente.

Supongamos pues, sin perder generalidad, que $m > n$

Aplicando el algoritmo euclidiano a los enteros m y n, generamos las igualdades

$$\begin{array}{rcll} m & = & q_0 n + r_1 & (0 \leq r_1 < n) \\ n & = & q_1 r_1 + r_2 & (0 \leq r_2 < r_1) \\ r_1 & = & q_2 r_2 + r_3 & (0 \leq r_3 < r_2) \\ r_2 & = & q_3 r_3 + r_4 & (0 \leq r_4 < r_3) \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ r_{i-2} & = & q_{i-1} r_{i-1} + r_i & (0 \leq r_i < r_{i-1}) \\ r_{i-1} & = & q_i r_i & \end{array}$$

en donde r_i es el M.C.D. de m y n

Como $m = q_0 n + r_1$, $(U_m, U_n) = (U_n, U_{r_1 + q_0 n})$

Pero, en virtud del teorema 1.2.4,

$$\begin{aligned} U_{n+k} &= U_k U_{n-1} + U_{k+1} U_n = U_{k+1} U_n + U_k (U_{n+1} - U_n) \\ &= (U_{k+1} - U_k) U_n + U_k U_{n+1} = U_{k-1} U_n + U_k U_{n+1} \end{aligned}$$

En particular, $\quad U_{r_1 + q_0 n} = U_{q_0 n - 1} U_{r_1} + U_{q_0 n} U_{r_1 + 1}$

Luego, $\quad (U_m, U_n) = (U_n, U_{q_0 n - 1} U_{r_1} + U_{q_0 n} U_{r_1 + 1})$

Ahora bien, si $a \mid b$, entonces $\quad (a, b + c) = (a, c)$

Por tanto, $\quad (U_m, U_n) = (U_n, U_{q_0 n - 1} U_{r_1})$, pues $U_n \mid U_{q_0 n} U_{r_1 + 1}$

Pero $U_n \mid U_{q_0 n}$ y, por el teorema 1.5.4, $(U_n, U_{q_0 n - 1}) = 1$

Por otra parte, si $(a, b) = 1$, entonces $(a, bc) = (a, c)$

Luego, $(U_m, U_n) = (U_n, U_{r_1})$

Procediendo de esta forma, encontraremos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (U_m, U_n) &= (U_n, U_{r_1}) \\ (U_n, U_{r_1}) &= (U_{r_1}, U_{r_2}) \\ (U_{r_1}, U_{r_2}) &= (U_{r_2}, U_{r_3}) \\ (U_{r_2}, U_{r_3}) &= (U_{r_3}, U_{r_4}) \\ \ldots & \quad \ldots \\ (U_{r_{i-2}}, U_{r_{i-1}}) &= (U_{r_{i-1}}, U_{r_i}) \end{aligned}$$

Por tanto, $\quad (U_m, U_n) = (U_{r_{i-1}}, U_{r_i}) = (U_{q_i r_i}, U_{r_i})$, pues $r_{i-1} = q_i r_i$

Pero $U_{r_1} \mid U_{q_1 r_1}$, entonces $U_{q_1 r_1} = qU_{r_1}$, para cierto entero q

Por tanto, $(U_m, U_n) = (qU_{r_1}, U_{r_1}) = U_{r_1}(q, 1) = U_{r_1}$

Pero $r_1 = (m, n)$, según el algoritmo euclidiano.

Luego, $(U_m, U_n) = U_{(m,n)}$, como quería demostrarse ■

Ahora bien, de acuerdo con el teorema 1.5.5, si $n \mid m$, entonces $U_n \mid U_m$

El recíproco de este hecho es válido también:

Teorema 1.5.7

Sean n y m, con $n \neq 2$, cualesquiera enteros positivos.

Si $U_n \mid U_m$, entonces $n \mid m$

Demostración

Obsérvese que $U_2 \mid U_3$, y sin embargo, $2 \nmid 3$ (de ahí que $n \neq 2$)

Nótese también que el caso $n = 1$ es trivial, pues $U_1 \mid U_m$ y $1 \mid m$, para todo entero $m > 0$

Dado que $U_n \mid U_m$, se sigue que $(U_n, U_m) = U_n$

Luego, de acuerdo con el teorema anterior, $U_n = U_{(n,m)}$

Por otra parte, resulta obvio que si $U_k = U_d$, con $k > 2$, entonces $k = d$

Por tanto, $n = (n, m)$ y, en consecuencia, $n \mid m$ ■

El siguiente teorema presenta algunos criterios de divisibilidad para los **números de Fibonacci**:

Teorema 1.5.8

Para todo entero positivo n, se satisfacen los siguientes criterios:

1. $2 \mid U_n$ *si y sólo si* $3 \mid n$ $(n > 2)$

   Esto es, U_n es par, únicamente cuando n es un múltiplo de 3

2. $3 \mid U_n$ *si y sólo si* $4 \mid n$ $(n > 3)$

   Esto es, U_n es múltiplo de 3, únicamente cuando n lo es de 4

3. $4 \mid U_n$ *si y sólo si* $6 \mid n$ $(n > 5)$
4. $5 \mid U_n$ *si y sólo si* $5 \mid n$ $(n > 4)$
5. $7 \mid U_n$ *si y sólo si* $8 \mid n$ $(n > 7)$
6. $8 \mid U_n$ *si y sólo si* $6 \mid n$ $(n > 5)$

   *Luego, todo **número de Fibonacci** múltiplo de 4, lo es también de 8*

7. $10 \mid U_n$ *sí y sólo si* $15 \mid n$ $(n > 14)$

Esto es, un número de Fibonacci termina en cifra cero, únicamente cuando su índice es un múltiplo de 15.

8. $11 \mid U_n$ *sí y sólo si* $10 \mid n$ $(n > 9)$

9. $12 \mid U_n$ *sí y sólo si* $12 \mid n$ $(n > 11)$

10. $13 \mid U_n$ *sí y sólo si* $7 \mid n$ $(n > 6)$

11. $17 \mid U_n$ *sí y sólo si* $9 \mid n$ $(n > 8)$

12. $19 \mid U_n$ *sí y sólo si* $18 \mid n$ $(n > 17)$

Nótese la simetría de los criterios 4 y 9

Demostración

Dada la similitud de las pruebas, sólo ilustraremos las correspondientes a los criterios 1, 4 y 7.

1. $2 \mid U_n$ si y sólo si $3 \mid n$ $(n > 2)$

- Supongamos que $2 \mid U_n$, es decir, supongamos que $U_3 \mid U_n$
  Luego, por el teorema 1.5.7, $3 \mid n$ ■
- Supongamos que $3 \mid n$
  Luego, por el teorema 1.5.5, $U_3 \mid U_n$, es decir, $2 \mid U_n$ ■

4. $5 \mid U_n$ si y sólo si $5 \mid n$ $(n > 4)$

- Supongamos que $5 \mid U_n$, es decir, supongamos que $U_5 \mid U_n$
  Luego, por el teorema 1.5.7, $5 \mid n$ ■
- Supongamos que $5 \mid n$
  Luego, por el teorema 1.5.5, $U_5 \mid U_n$, es decir $5 \mid U_n$ ■

7. $10 \mid U_n$ si y sólo si $15 \mid n$ $(n > 14)$

- Supongamos que $10 \mid U_n$
  Luego, existe el entero q tal que $U_n = 10q = 2(5q) = 5(2q)$
  Por tanto, $2 \mid U_n$ y $5 \mid U_n$
  Aplicando entonces los criterios 1 y 4 anteriores, inferimos que

$$3 \mid n \quad \text{y} \quad 5 \mid n$$

  Luego, $15 \mid n$ ■

► Supongamos que $15 \mid n$

Luego, por el teorema 1.5.5, $U_{15} \mid U_n$, es decir, $610 \mid U_n$

Por tanto, existe el entero q tal que $U_n = 610q = 10(61q)$

Luego, $10 \mid U_n$ ■

Consideremos ahora los primeros diez enteros positivos: $1, 2, 3, \ldots, 10$

No es difícil convencerse que, para cada uno de ellos, existe al menos un **número de Fibonacci** que se divide sin resto.

Concretamente:

$$1 \mid U_1, \;\; 2 \mid U_3, \;\; 3 \mid U_4, \;\; 4 \mid U_6, \;\; 5 \mid U_5, \;\; 6 \mid U_{12}, \;\; 7 \mid U_8, \;\; 8 \mid U_6, \;\; 9 \mid U_{12}, \;\; \text{y} \;\; 10 \mid U_{15}$$

Cabe pues preguntar si, dado cualquier entero positivo n, existe o no **un número de Fibonacci** que se divida por n

Es sorprendente que la respuesta a esta pregunta sea afirmativa.

Lo que equivale a decir que siempre existe un **número de Fibonacci** que es múltiplo exacto de cualquier entero positivo dado.

En efecto, enunciemos este resultado en el siguiente:

Teorema 1.5.9

Para cualquier entero positivo n, existe un ***número de Fibonacci****, cuyo índice no excede a n^2, que se divide por n.*

Por supuesto, este **número de Fibonacci** no es único (teorema 1.5.5)

Demostración

El caso $n = 1$ resulta ser trivial.

Sean $n > 1$ un entero positivo dado.

Denotemos con $r_n(x)$, en donde x es una variable entera, *el residuo que resulta de dividir x entre n.*

Por ejemplo, $r_3(29) = 2$ y $r_{10}(36) = 6$

Es claro que $r_n(x)$ presenta las siguientes propiedades:

1. Si $n > 1$, entonces $r_n(1) = 1$ (para $n = 1$, $r_n(1) = 0$)

2. Si $x < n$, entonces $r_n(x) = x$ (para $x = n$, $r_n(x) = 0$)

Demostremos una tercera propiedad:

3. Si $r_n(x-y)=0$, entonces $r_n(x)=r_n(y)$

En efecto, existen los enteros q_1 y q_2 (posiblemente nulos) tales que

$$\begin{aligned} x &= q_1 n + r_n(x) \quad (0 \leq r_n(x) < n) \\ y &= q_2 n + r_n(y) \quad (0 \leq r_n(y) < n) \end{aligned}$$

Observemos que el valor máximo posible para $r_n(x)$ es $n-1$, mientras que el valor mínimo posible para $r_n(y)$ es 0

Luego, la diferencia $r_n(x)-r_n(y)$ tiene un valor máximo igual a $n-1$

Por otra parte, el valor mínimo posible para $r_n(x)$ es 0, mientras que el valor máximo posible para $r_n(y)$ es $n-1$

Luego, la diferencia $r_n(x)-r_n(y)$ tiene un valor mínimo igual a $-(n-1)$

De este razonamiento, resulta la desigualdad $-(n-1) \leq r_n(x)-r_n(y) \leq n-1$

Obsérvese que ningún múltiplo positivo o negativo de n figura en el intervalo.

Pues bien, como $r_n(x-y)=0$, se sigue que $n \mid (x-y)$

Pero $x-y=(q_1-q_2)n+(r_n(x)-r_n(y))$, en donde el primer sumando es un multiplo de n

Luego, $n \mid (r_n(x)-r_n(y))$ y, en consecuencia, $r_n(x)-r_n(y)=0$ ∎

Una vez demostrada esta propiedad, pasemos a demostrar el teorema.

Consideremos para ello la siguiente sucesión infinita de pares ordenados:

$$(r_n(U_1), r_n(U_2)), \quad (r_n(U_2), r_n(U_3)), \quad (r_n(U_3), r_n(U_4)), \ \ldots$$

(El lector no debe confundir esta notación con la del M.C.D.)

Se observa inmediatamente que el número máximo posible de pares *diferentes* en esta sucesión es n^2, pues los únicos valores que puede tomar $r_n(x)$ son: $0, 1, 2, \ldots, n-1$

Por tanto, si consideramos los primeros n^2+1 pares de esta sucesión, encontraremos, con toda seguridad, al menos dos que son iguales.

Sea $(r_n(U_k), r_n(U_{k+1}))$ *el primero, de los* n^2+1 *pares, que se repite.*

Demostremos que este par es necesariamente $(1,1)$

En efecto, supongamos que $k>1$

Por tanto, debe existir el entero $d>k$, con $d \leq n^2+1$, tal que

$$(r_n(U_k), r_n(U_{k+1})) = (r_n(U_d), r_n(U_{d+1}))$$

Luego, $r_n(U_k)=r_n(U_d)$ y $r_n(U_{k+1})=r_n(U_{d+1})$

Por otra parte, existen los enteros q_k, q_d, q_{k+1} y q_{d+1} (posiblemente nulos) tales que

$$\begin{array}{rcll} U_k &=& q_k n + r_n(U_k) & (0 \leq r_n(U_k) < n) \\ U_d &=& q_d n + r_n(U_d) & (0 \leq r_n(U_d) < n) \\ U_{k+1} &=& q_{k+1} n + r_n(U_{k+1}) & (0 \leq r_n(U_{k+1}) < n) \\ U_{d+1} &=& q_{d+1} n + r_n(U_{d+1}) & (0 \leq r_n(U_{d+1}) < n) \end{array}$$

Por tanto, $U_k - U_d = (q_k - q_d)n$

$U_{k+1} - U_{d+1} = (q_{k+1} - q_{d+1})n$

Por lo cual, $n|(U_k - U_d)$ y $n|(U_{k+1} - U_{d+1})$

Entonces, $n|[(U_{k+1} - U_{d+1}) - (U_k - U_d)]$

Pero $(U_{k+1} - U_{d+1}) - (U_k - U_d) = U_{k-1} - U_{d-1}$

Luego, $n|(U_{k-1} - U_{d-1})$ y, en consecuencia, $r_n(U_{k-1} - U_{d-1}) = 0$

De lo anterior, concluimos que $r_n(U_{k-1}) = r_n(U_{d-1})$

Entonces, $(r_n(U_{k-1}), r_n(U_k)) = (r_n(U_{d-1}), r_n(U_d))$

En donde el par $(r_n(U_{k-1}), r_n(U_k))$ *antecede* al par $(r_n(U_k), r_n(U_{k+1}))$

Evidentemente esto es una contradicción.

Luego, $k = 1$

De esta manera, el par $(r_n(U_k), r_n(U_{k+1})) = (r_n(U_1), r_n(U_2)) = (r_n(1), r_n(1)) = (1, 1)$

es el primer par que se repite ∎

Supongamos ahora que la repetición ocurre en el m-ésimo término $(1 < m \leq n^2 + 1)$

Entonces, $(r_n(U_m), r_n(U_{m+1})) = (1, 1)$

De ahí que $r_n(U_m) = 1$ y $r_n(U_{m+1}) = 1$

Por tanto, existen los enteros q_m y q_{m+1} tales que

$$\begin{array}{rcl} U_m &=& q_m n + 1 \\ U_{m+1} &=& q_{m+1} n + 1 \end{array}$$

De donde

$$U_{m-1} = U_{m+1} - U_m = (q_{m+1} - q_m)n$$

Luego, $n \mid U_{m-1}$, en donde $0 \leq m - 1 \leq n^2$

De esta manera se exhibe la existencia de un número de Fibonacci que se divide por n, un entero positivo arbitrario. ∎

Resulta claro que este teorema no precisa *cuál es* el número de Fibonacci que se divide por el entero n dado, sólo establece que no es especialmente grande

Desde luego, reconocemos que la demostración es muy ingeniosa.

Teorema 1.5.10

Sea n un entero positivo dado y sea U_k el primer número de Fibonacci que se divide por n. Entonces, el siguiente número de Fibonacci que se divide por n es U_{2k}

Demostración (Reducción al absurdo)

Dado que $n \mid U_k$ y que $U_k \mid U_{2k}$, $n \mid U_{2k}$

Esto prueba que, efectivamente, U_{2k} se divide por n ∎

Demostraremos ahora que no hay ningún número de Fibonacci comprendido entre U_k y U_{2k}, que se divide por n

En efecto, para $n = 1$ la afirmación es obvia, pues los primeros dos números de Fibonacci que se dividen por 1 son U_1 y U_2

Sea pues, $n > 1$

Supongamos ahora que existe un número de Fibonaci U_m, con $k < m < 2k$, tal que $n \mid U_m$

Hágase $m = k + d$, con $0 < d < k$

Luego, $U_m = U_{k+d} = U_d U_{k-1} + U_{d+1} U_k$

De modo que $n \mid (U_d U_{k-1} + U_{d+1} U_k)$

Ahora bien, como $n \mid U_k$, $n \mid U_{d+1} U_k$

Luego, $n \mid U_d U_{k-1}$

Pero $n \nmid U_d$, pues $0 < d < k$ y U_k *es el primer* número de Fibonacci que se divide por n

Por tanto, $n \mid U_{k-1}$

Además, $n \mid U_k$, de donde n es un divisor común de U_k y de U_{k-1}

Pero U_k y U_{k-1} son primos entre sí.

Luego, $n = 1$ (afirmación que contradice el hecho de que $n > 1$)

Por tanto, no puede existir número de Fibonacci alguno comprendido entre U_k y U_{2k} que se divida por n ∎

De manera completamente análoga, puede demostrarse que U_{3k} es el tercer número de Fibonacci que se divide por un entero positivo n dado, si U_k es el primero de ellos.

Parece razonable suponer que, si U_k es el primer número de Fibonacci que se divide por un entero positivo n, entonces los siguientes números de Fibonacci que se dividen también por n son: U_{2k}, U_{3k}, U_{4k}, ...

El teorema siguiente establece que, en efecto, esta hipótesis es correcta.

Teorema 1.5.11

*Sea n un entero positivo dado y sea U_k el primer número de **Fibonacci** que se divida por n. Entonces, el conjunto $\{U_{mk}/m = 1,2,3,\ldots\}$ contiene a todos los números de **Fibonacci** que se dividen por n*

Demostración (Reducción al absurdo)

Es claro que $n \mid U_{mk}$, pues $n \mid U_k$ y $U_k \mid U_{mk}$

Esto prueba, efectivamente, que U_{mk} se divide por n

Ahora demostremos que éstos son todos los números de Fibonacci que se dividen por n

En efecto, para $n = 1$ el resultado es trivial

Sea $n > 1$

Supongamos que existe un número de Fibonacci U_d, con $mk < d < (m+1)k$, que se divide también por n

Escríbase $d = mk + h$, en donde $0 < h < k$

Por tanto, $U_d = U_h U_{mk-1} + U_{h+1} U_{mk}$

Entonces, $n \mid (U_h U_{mk-1} + U_{h+1} U_{mk})$

Pero $n \mid U_{h+1} U_{mk}$, pues $n \mid U_{mk}$ ya que, por hipótesis, $n \mid U_k$

Luego, $n \mid U_h U_{mk-1}$

Pero $n \nmid U_h$, pues $0 < h < k$ y U_k es el primer *número de **Fibonacci*** que se divide por n

Por tanto, $n \mid U_{mk-1}$

De esta manera, n es un divisor común de U_{mk-1} y U_{mk}

Pero, de acuerdo con el teorema 1.5.2, $(U_{mk-1}, U_{mk}) = 1$

Luego, $n = 1$, lo cual es, naturalmente, una contradicción ∎

En particular, podemos afirmar que:

- *Todos los números de **Fibonacci** múltiplos de 5 son:*

  $$U_5, U_{10}, U_{15}, U_{20}, U_{25}, \ldots$$

  *pues U_5 es el primer número de **Fibonacci** múltiplo de 5*
- *Todos los números de **Fibonacci** múltiplos de 7 son:*

  $$U_8, U_{16}, U_{24}, U_{32}, U_{40}, \ldots$$

  *pues U_8 es el primer número de **Fibonacci** múltiplo de 7*

- ***Todos los números de Fibonacci** múltiplos de* 10 *son:*

$$U_{15}, U_{30}, U_{45}, U_{60}, U_{75}, \ldots$$

pues U_{15} ***es el primer número de Fibonacci** múltiplo de* 10

- ***Todos los números de Fibonacci** múltiplos de* 11 *son:*

$$U_{10}, U_{20}, U_{30}, U_{40}, U_{50}, \ldots$$

pues U_{10} *es el primer número de* ***Fibonacci*** *múltiplo de* 11

Obsérvese, por mencionar sólo un caso, que U_{10} es simultáneamente múltiplo de 5, 7 y 11.

Señalamos oportunamente que, en general, dado un entero positivo n, el encontrar **el primer número de Fibonacci** que se divida por n, no es un problema trivial.

De hecho, hasta donde yo conozco, el problema no ha sido resuelto.[7]

Terminamos el presente apartado enunciando algunos resultados colaterales de la teoría hasta este punto desarrollada:

Teorema 1.5.12

1. *Para todo entero positivo n, se satisfacen las siguientes igualdades:*

1.1 $(U_n, U_{n-1}U_{n+1}) = 1$

1.2 $(U_n, U_{n-1} + U_{n+1}) = \begin{cases} 2, & \textit{si } n \textit{ es un múltiplo de } 3 \\ 1, & \textit{en cualquier otro caso} \end{cases}$

1.3 $(U_n, U_{n+3}) = \begin{cases} 2, & \textit{si } n \textit{ es un múltiplo de } 3 \\ 1, & \textit{en cualquier otro caso} \end{cases}$

1.4 $(U_{U_n}, U_{U_{n+1}}) = 1$

1.5 $(U_{U_{mn}}, U_{U_{kn}}) = U_{U_n}$, *siempre que* $(m,k) = 1$

2. *Si* n *es compuesto (no primo) y* $n \neq 4$, *entonces* U_n *también es compuesto.*

3. ***No existen números de Fibonacci** impares múltiplos de* 17 *ó* 19.

4. ***Todo número de Fibonacci** múltiplo de* 11 *lo es también de* 5

5. ***No existen números de Fibonacci** de la forma* $8t+4$, *es decir, que al dividirse por 8 dejen residuo* 4

[7]**Desde luego, existen algunos resultados interesantes en esta dirección. N. N., Vorobyov. Los números de Fibonacci, Colección Temas Matemáticos, LIMUSA, México 1988.**

Demostración

1.1 Como $(U_n, U_{n-1}) = 1$, entonces $(U_n, U_{n-1}U_{n+1}) = (U_n, U_{n+1}) = 1$ ∎

1.2 $(U_n, U_{n-1} + U_{n+1}) = (U_n, U_n + 2U_{n-1}) = (U_n, 2U_{n-1}) = (U_n, 2)$

Bastará entonces con aplicar el criterio 1 del teorema 1.5.8 ∎

1.3 $(U_n, U_{n+3}) = (U_n, U_n + 2U_{n+1}) = (U_n, 2U_{n+1}) = (U_n, 2)$ ∎

1.4 $(U_{U_n}, U_{U_{n+1}}) = U_{(U_n, U_{n+1})} = U_1 = 1$ ∎

1.5 $(mn, kn) = (m, k)n = n$

Luego, $(U_{mn}, U_{kn}) = U_{(mn,kn)} = U_n$

Entonces, $(U_{U_{mn}}, U_{U_{kn}}) = U_{(U_{mn}, U_{kn})} = U_{U_n}$ ∎

2. Para $n = 1$ la afirmación es válida.

Sea $n > 4$ un número compuesto.

Es claro que n posee necesariamente un divisor mayor que 2 y menor que n

Sea d, con $2 < d < n$, tal que $d \mid n$

Por tanto, $U_d \mid U_n$ (probaremos que $1 < U_d < U_n$)

Como $d > 2$, se sigue que $U_d > 1$

Además, como $d < n$, entonces $U_d < U_n$ ∎

El recíproco de este resultado no se cumple, pues $U_{19} = (37)(113)$

3. Supongamos que $17 \mid U_n$, y que U_n es impar.

Luego $9 \mid n$ y, en consecuencia, $3 \mid n$

De donde U_n es par (lo cual es contradictorio) ∎

4. Supongamos que $11 \mid U_n$

Entonces, $10 \mid n$ y, en consecuencia, $5 \mid n$

Por tanto, $5 \mid U_n$ ∎

5. Sea $U_n = 8t + 4$

Es claro entonces que $4 \mid U_n$

Luego, $6 \mid n$ y, en consecuencia, $8 \mid U_n$ (lo cual es contradictorio) ∎

1.6 Potencias Aureas

Hemos llegado a un punto fundamental en esta tesis.

A partir de ahora, el número de oro y la sucesión de Fibonacci serán conceptos *inseparables*.

Se ha hecho hasta aquí el mayor esfuerzo en presentarlos como conceptos *independientes*, con el propósito de que el lector pueda apreciar, en toda su belleza, su estrecha relación

Proseguir el estudio del uno sin el auxilio del otro, sería virtualmente imposible. Más aún, poco podría conseguirse.

Esperamos que el lector viva el encanto y poder de los resultados que en lo sucesivo le presentaremos.

Definición 1.6.1

Diremos que la sucesión infinita de números reales $x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots$ es una sucesión **tipo Fibonacci**, si sus dos primeros términos son cualesquiera constantes no simultáneamente cero y cada uno de sus términos sucesivos es la suma de los dos términos inmediatos anteriores.

Consideremos, a manera de ejemplo, las siguientes sucesiones:

1. $1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ 123,\ldots$

2. $-1/2,\ 1/2,\ 0,\ 1/2,\ 1/2,\ 1,\ 3/2,\ 5/2,\ 4,\ 13/2,\ldots$

3. $\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 5\sqrt{2},\ 8\sqrt{2},\ 13\sqrt{2},\ 21\sqrt{2},\ 34\sqrt{2},\ 55\sqrt{2},\ldots$

Por supuesto, podría hacerse un estudio sobre este tipo de sucesiones, sin embargo no lo haremos, por no corresponder esto a nuestros propósitos particulares.

Específicamente, el objetivo del presente apartado es hacer un estudio sobre las potencias enteras del **número de oro**.

Recomendamos revisar las definiciones 1.1.1, 1.1.3 y 1.1.4, así como los teoremas 1.1.4 y 1.1.8 del primer apartado.

Definición 1.6.2

Sea n cualquier entero.

A la sucesión infinita de potencias áureas $\phi^n,\ \phi^{n+1},\ \phi^{n+2},\ldots$ la llamaremos la sucesión de oro asociada a n

Tenemos el siguiente

Teorema 1.6.1 [8]

Toda sucesión de oro es una sucesión tipo Fibonacci.

Esto es, cualquier potencia entera del número de oro, es la suma de sus dos potencias inmediatas anteriores.

Demostración (Inducción sobre n)

- Dado que $\phi^2 = 1 + \phi$, la afirmación es válida para $n = 2$
- Supongamos que $\phi^k = \phi^{k-2} + \phi^{k-1}$, para cierto entero k
- Demostremos que

  1. $\phi^{k+1} = \phi^{k-1} + \phi^k$
  2. $\phi^{k-1} = \phi^{k-3} + \phi^{k-2}$

  En efecto,

  1. $\phi^{k+1} = \phi^k\phi = (\phi^{k-2} + \phi^{k-1})\phi = \phi^{k-1} + \phi^k$ ■
  2. $\phi^{k-1} = \phi^k\phi^{-1} = (\phi^{k-2} + \phi^{k-1})\phi^{-1} = \phi^{k-3} + \phi^{k-2}$ ■

Esta demostración amerita algunos comentarios:

1) Una vez establecida la base inductiva, el valor numérico de ϕ *no desempeña ningún papel.*

   Quiere decirse que si se sustituye ϕ *por cualquier otra constante,* la demostración del teorema puede llevarse a feliz término.

   Por supuesto, el hecho fundamental en la demostración está precisamente en la base inductiva.

2) Si un número real x satisface para cierto entero k la ecuación

$$x^k = x^{k-2} + x^{k-1}$$

   entonces, para cualquier entero n, se verifica la igualdad

$$x^n = x^{n-2} + x^{n-1}$$

   Pero ocurre que la ecuación

$$x^k = x^{k-2} + x^{k-1}$$

   solamente puede ser satisfecha por los valores $x = \phi$ ó $x = -\phi^{-1}$, pues ésta puede ser llevada a la forma

$$0 = x^2 - x - 1$$

   cuyas raíces son, precisamente, $x = \phi$ y $-\phi^{-1}$

---

[8] **Este teorema es, en última instancia, el responsable directo de la insólita relación entre el número de oro y la sucesión de Fibonacci.**

Recordemos ahora que al término de la demostración del teorema 1.1.4 se distinguieron las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{ll} \phi^{-1} = \phi - 1 & \phi^2 = \phi + 1 \\ \phi^{-2} = 2 - \phi & \phi^3 = 2\phi + 1 \\ \phi^{-3} = 2\phi - 3 & \phi^4 = 3\phi + 2 \\ \phi^{-4} = 5 - 3\phi & \phi^5 = 5\phi + 3 \end{array}$$

Cabe pues suponer, hecho por demás interesante, que *cualquier potencia áurea*, puede ser escrita ***linealmente*** en ϕ para determinados coeficientes enteros.

El teorema siguiente establece que, en efecto, esta hipótesis es correcta. Más aún, los coeficientes de estas formas lineales son ***números de Fibonacci***.

Teorema 1.6.2

Para todo entero positivo n, se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $\phi^n = U_n\phi + U_{n-1}$

2. $\phi^{-n} = U_n\phi - U_{n+1}$, si n es impar

3. $\phi^{-n} = U_{n+1} - U_n\phi$, si n es par

Demostración (Inducción sobre n)

Ofrecemos únicamente la demostración de la igualdad 1., esperando que, por analogía, el lector realice las correspondientes a las igualdades 2. y 3.

- Los casos $n = 1$ y $n = 2$ se verifican trivialmente.
- Supongamos que para cierto entero k, se satisfacen las igualdades

$$\begin{aligned} \phi^k &= U_k\phi + U_{k-1} \\ \phi^{k+1} &= U_{k+1}\phi + U_k \end{aligned}$$

- Demostremos que

$$\phi^{k+2} = U_{k+2}\phi + U_{k+1}$$

En efecto, sumando las igualdades y aplicando el teorema 1.6.1, encontramos que

$$\phi^{k+2} = (U_k + U_{k+1})\phi + (U_{k-1} + U_k) = U_{k+2}\phi + U_{k+1} \qquad \blacksquare$$

La demostración resultó ser muy sencilla, una vez que se asentó una base y una hipótesis inductiva *dobles*, para entonces aplicar el teorema 1.6.1

En particular:

$$\begin{array}{llll}
\phi^{-1} = \phi - 1 & & \phi^{1} = \phi \\
\phi^{-2} = 2 - \phi & & \phi^{2} = \phi + 1 \\
\phi^{-3} = 2\phi - 3 & & \phi^{3} = 2\phi + 1 \\
\phi^{-4} = 5 - 3\phi & & \phi^{4} = 3\phi + 2 \\
\phi^{-5} = 5\phi - 8 & & \phi^{5} = 5\phi + 3 \\
\phi^{-6} = 13 - 8\phi & & \phi^{6} = 8\phi + 5 \\
\phi^{-7} = 13\phi - 21 & & \phi^{7} = 13\phi + 8 \\
\phi^{-8} = 34 - 21\phi & & \phi^{8} = 21\phi + 13 \\
\phi^{-9} = 34\phi - 55 & & \phi^{9} = 34\phi + 21 \\
\phi^{-10} = 89 - 55\phi & & \phi^{10} = 55\phi + 34
\end{array}$$

Es preciso que el lector se percate del poder del teorema anterior.

¿Cuántos números, reales o complejos, conoce usted, cuyas potencias puedan escribirse linealmente en términos del mismo número utilizando tan sólo coeficientes enteros?

Le sugerimos intente encontrar enteros x y y tales que

1. $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}x + y$

2. $\left(\sqrt{3}\right)^4 = \sqrt{3}\,x + y$

3. $\pi^3 = \pi\,x + y$

Aseguramos que todo intento estará condenado irremediablemente al fracaso.

El teorema 1.6.2 ofrece una singular consecuencia:

Teorema 1.6.3

Para todo entero positivo n, se satisfacen las siguientes igualdades.

1. $\phi^n = \dfrac{(U_{n-1} + U_{n+1}) + U_n\sqrt{5}}{2}$

2. $\phi^{-n} = \dfrac{U_n\sqrt{5} - (U_{n-1} + U_{n+1})}{2}$, *si n es impar*

3. $\phi^{-n} = \dfrac{(U_{n-1} + U_{n+1}) - U_n\sqrt{5}}{2}$, *si n es par*

Demostración

Hágase $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ en los miembros derechos de las igualdades del teorema 1.6.2 ∎

Este teorema proporciona *directamente* la forma irracional de la n-ésima ***potencia áurea*** en términos de U_{n-1}, U_n y U_{n+1}, *tres números de Fibonacci consecutivos.*

Sólo queda resolver la cuestión de si son o no *irreducibles* las igualdades del teorema.

Teorema 1.6.4

Los miembros derechos de las igualdades del teorema 1.6.3 son irreducibles si n no es un múltiplo de 3

Cuando n es un múltiplo de 3, ϕ^n pierde su denominador 2

Demostración

Se sigue inmediatamente de la igualdad 1.2 del teorema 1.5.12 ∎

A continuación ofrecemos la forma irracional de las primeras diez *potencias áureas* de exponente positivo y negativo:

$$\phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad \phi^{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi^{-2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \qquad \phi^{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi^{-3} = \sqrt{5}-2 \qquad \phi^{3} = 2+\sqrt{5}$$

$$\phi^{-4} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \qquad \phi^{4} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi^{-5} = \frac{5\sqrt{5}-11}{2} \qquad \phi^{5} = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi^{-6} = 9-4\sqrt{5} \qquad \phi^{6} = 9+4\sqrt{5}$$

$$\phi^{-7} = \frac{13\sqrt{5}-29}{2} \qquad \phi^{7} = \frac{29+13\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi^{-8} = \frac{47-21\sqrt{5}}{2} \qquad \phi^{8} = \frac{47+21\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi^{-9} = 17\sqrt{5}-38 \qquad \phi^{9} = 38+17\sqrt{5}$$

$$\phi^{-10} = \frac{123-55\sqrt{5}}{2} \qquad \phi^{10} = \frac{123+55\sqrt{5}}{2}$$

Nótese que, en efecto, estas expresiones son *irreducibles*.

Ahora nos interesa establecer una fórmula que explicite U_n, el n–ésimo ***número de Fibonacci***, en términos de *potencias áureas*.

Teorema 1.6.5 (Fórmula de Binet)

Para cualquier entero no negativo n, se satisface la igualdad

$$U_n = \frac{\phi^n \pm \phi^{-n}}{\sqrt{5}} \quad \begin{pmatrix} +, & \text{si } n \text{ es impar} \\ -, & \text{si } n \text{ es par} \end{pmatrix}$$

Demostración

Sea n un entero positivo.

1. Si n es impar, de acuerdo con el teorema 1.6.3, tenemos que

$$\phi^n + \phi^{-n} = \frac{(U_{n-1} + U_{n+1}) + U_n\sqrt{5}}{2} + \frac{U_n\sqrt{5} - (U_{n-1} + U_{n+1})}{2} = U_n\sqrt{5} \qquad \blacksquare$$

2. Si n es par, de acuerdo con el teorema 1.6.3, tenemos que

$$\phi^n - \phi^{-n} = \frac{(U_{n-1} + U_{n+1}) + U_n\sqrt{5}}{2} - \frac{(U_{n-1} + U_{n+1}) - U_n\sqrt{5}}{2} = U_n\sqrt{5} \qquad \blacksquare$$

El caso $n = 0$ puede comprobarse directamente $\blacksquare$

Teorema 1.6.6

Para todo entero positivo n, se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $\phi^n - \phi^{-n} = U_{n-1} + U_{n+1}$, *si n es impar*
2. $\phi^n + \phi^{-n} = U_{n-1} + U_{n+1}$, *si n es par*
3. $\phi^n + \phi^{-n} = U_n\sqrt{5}$, *si n es impar*
4. $\phi^n - \phi^{-n} = U_n\sqrt{5}$, *si n es par*

Demostración

Es una consecuencia clara de los teoremas 1.6.3 y 1.6.5 $\blacksquare$

Los siguientes resultados ofrecen una poderosa generalización del teorema 1.1.8, presentado al inicio de esta tesis:

Teorema 1.6.7

Sean x y y dos números reales.

1. *Si $x/y = \phi$ entonces, para cualesquiera enteros positivos n y k, se satisface la igualdad*

$$\frac{U_{n+k}\, x + U_{n+k-1}\, y}{U_n\, x + U_{n-1}\, y} = \phi^k$$

2. *Si para determinados enteros positivos n y k se satisface la igualdad anterior, entonces $x/y = \phi$*

Demostración

1. Supongamos que $x/y = \phi$, esto es, $x = \phi\, y$

   Luego, $\dfrac{U_{n+k}\, x + U_{n+k-1}\, y}{U_n\, x + U_{n-1}\, y} = \dfrac{U_{n+k}\, \phi + U_{n+k-1}}{U_n\, \phi + U_{n-1}} = \dfrac{\phi^{n+k}}{\phi^n} = \phi^k$ ∎

   (Obsérvese la aplicación del teorema 1.6.2)

2. Supongamos ahora que n y k son enteros positivos tales que

$$\frac{U_{n+k}\, x + U_{n+k-1}\, y}{U_n\, x + U_{n-1}\, y} = \phi^k = U_k\, \phi + U_{k-1}$$

   Luego,

$$\begin{aligned}\frac{x}{y} &= \frac{U_k U_{n-1}\, \phi + U_{k-1} U_{n-1} - U_{n+k-1}}{U_{n+k} - U_{k-1} U_n - U_k U_n\, \phi} = \frac{U_k U_{n-1}\, \phi - U_k U_n}{U_k U_{n+1} - U_k U_n \phi} \\ &= \frac{U_{n-1}\phi - U_n}{U_{n+1} - U_n \phi} = \frac{(U_{n+1} - U_n)\phi - U_n}{U_{n+1} - U_n \phi} = \frac{U_{n+1}\, \phi - U_n(\phi + 1)}{U_{n+1} - U_n \phi} \\ &= \frac{U_{n+1}\, \phi - U_n\, \phi^2}{U_{n+1} - U_n \phi} = \frac{(U_{n+1} - U_n\, \phi)\phi}{U_{n+1} - U_n\, \phi} = \phi\end{aligned}$$ ∎

   Recuérdese que $\begin{cases} U_{n+k} &= U_{k-1} U_n + U_k U_{n+1} \\ U_{n+k-1} &= U_{k-1} U_{n-1} + U_k U_n \end{cases}$

Teorema 1.6.8

Sean x y y dos números reales.

1. *Si $x/y = \phi$ entonces, para cualquier entero positivo n y para cualquier impar positivo $k \leq n$, se satisface la igualdad*

$$\frac{U_{n-k}\, x - U_{n-k+1}\, y}{U_{n+1}\, y - U_n x} = \phi^k$$

2. *Si para determinado entero positivo n y determinado impar positivo $k \leq n$ se satisface la igualdad anterior, entonces $x/y = \phi$*

Demostración

Es análoga a la del teorema anterior ∎

Teorema 1.6.9

Sean x y y dos números reales.

1. *Si $x/y = \phi$ entonces, para cualquier entero positivo n y para cualquier par positivo $k \leq n$, se satisface la igualdad*

$$\frac{U_{n-k}\, x - U_{n-k+1}\, y}{U_n\, x - U_{n+1}\, y} = \phi^k$$

2. *Si para determinado entero positivo n y determinado par positivo $k \leq n$ se satisface la igualdad anterior, entonces $x/y = \phi$*

Demostración

Es análoga a la del teorema 1.6.7 ∎

Los siguientes teoremas contienen series finitas de ***potencias áureas***:

Teorema 1.6.10

Para todo entero positivo n, *se satisfacen las siguientes igualdades:*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \phi^{k} = \phi^{n+2} - 1$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \phi^{-(k+1)} = 1 - \phi^{-n}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \phi^{k+1} = 1 + (-1)^{n+1}$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \phi^{1-k} = 1 + (-1)^{n} \phi^{-(n+1)}$

Demostración

Hágase $x = \phi,\ \phi^{-1},\ -\phi,\ -\phi^{-1}$ en la fórmula

$$\sum_{k=0}^{n} x^{k} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (x \neq 1)$$

para obtener, respectivamente, las igualdades 1, 2, 3 y 4.

Teorema 1.6.11

Para todo entero positivo n, *se satisfacen las siguientes igualdades:*

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \phi^{2k-1} = \phi^{2n} - 1$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \phi^{1-2k} = 1 - \phi^{-2n}$

Demostración

Hágase $x = \phi^{2},\ \phi^{-2}$ en la fórmula indicada en el teorema anterior para obtener, respectivamente, las igualdades 1 y 2 ∎

Teorema 1.6.12

Para todo entero positivo n, *se satisfacen las siguientes igualdades:*

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \phi^{3k-2} = \frac{1}{2}(\phi^{3n} - 1)$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \phi^{1-3k} = \frac{1}{2}(1 - \phi^{-3n})$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\phi^{3k-1} = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^{n+1}\phi^{3n}\right]$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\phi^{2-3k} = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^{n+1}\phi^{-3n}\right]$

Demostración

Hágase $x = \phi^3,\ \phi^{-3},\ -\phi^3,\ -\phi^{-3}$ en la fórmula indicada en el teorema 1.6.10, para obtener, respectivamente, las igualdades 1, 2, 3 y 4 ■

Haciendo uso de la fórmula newtoniana $\displaystyle (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, y^k$

relacionaremos, a través de series finitas, los *coeficientes de Newton* con las ***potencias dureas:***

Teorema 1.6.13

Para todo entero positivo n, *se satisfacen las siguientes igualdades:*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{-k} = \phi^n$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{k} = \phi^{2n}$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1+\sqrt{5}\right)^k = \phi^{3n}$

Demostración

1. $\displaystyle \phi^{2n} = \left(\phi^2\right)^n = (\phi+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{n-k} = \phi^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{-k}$ ■

2. $\displaystyle \phi^{2n} = \left(\phi^2\right)^n = (1+\phi)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{k}$ ■

3. $\displaystyle \phi^{3n} = \left(\phi^3\right)^n = (1+2\phi)^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} \phi^{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1+\sqrt{5}\right)^k$ ■

   Debe observarse que $2^k\phi^k = \left(1+\sqrt{5}\right)^k$

Teorema 1.6.14

Para todo entero positivo n, *se satisfacen las siguientes igualdades:*

1. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\phi^k = (-1)^n\phi^{-n}$$

2. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\phi^{-k} = \phi^{-2n}$$

Demostración

1. $$\phi^{-n} = \left(\phi^{-1}\right)^n = [-(1-\phi)]^n = (-1)^n(1-\phi)^n = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\phi^k \qquad \blacksquare$$

2. $$\phi^{-n} = \left(\phi^{-1}\right)^n = (\phi-1)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\phi^{n-k} = \phi^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\phi^{-k} \qquad \blacksquare$$

En el apartado 1.3 se demostró que

1. Si n es par, $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^k\binom{n}{k}U_k = 0$ (teorema 1.3.3)

2. Si n es impar, $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{n}{k}(U_{k-1}+U_{k+1}) = 1$ (teorema 1.3.6 – 3)

Para terminar ofrecemos una demostración alternativa, comparativamente sencilla, de estos hechos:

Observemos que $\left(\sqrt{5}\right)^n = [-(1-2\phi)]^n = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k2^k\binom{n}{k}\phi^k$

Luego, $$\left(\sqrt{5}\right)^n = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}2^k\binom{n}{k}\phi^k, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k2^k\binom{n}{k}\phi^k, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Por otra parte, para cualquier entero positivo n,

$$\left(\sqrt{5}\right)^n = (1+2\phi^{-1})^n = \sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}\phi^{-k}$$

Por tanto, si n es impar,

$$0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}2^k\binom{n}{k}\phi^k - \sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}\phi^{-k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}2^k\binom{n}{k}\left[\phi^k + (-1)^k\phi^{-k}\right]$$

Luego, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^k\binom{n}{k}\left[\phi^k + (-1)^k\phi^{-k}\right] = 2$

Pero, de acuerdo con el teorema 1.6.6, $\phi^k + (-1)^k\phi^{-k} = U_{k-1} + U_{k+1}$, sea k par o impar.

Entonces, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^k\binom{n}{k}(U_{k-1} + U_{k+1}) = 2$

Es decir, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}2^{k-1}\binom{n}{k}(U_{k-1} + U_{k+1}) = 1$ ∎

Ahora bien, si n es par,

$$0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k2^k\binom{n}{k}\phi^k - \sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}\phi^{-k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k2^k\binom{n}{k}\left[\phi^k - (-1)^k\phi^{-k}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k2^k\binom{n}{k}\left[\phi^k - (-1)^k\phi^{-k}\right]$$

Pero, de acuerdo con el teorema 1.6.6, $\phi^k - (-1)^k\phi^{-k} = U_k\sqrt{5}$, sea k par o impar

Entonces, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k2^k\binom{n}{k}U_k = 0$ ∎

Parte 2

Convergencia Dorada

2.1 Límites y series infinitas

Deseamos estudiar el comportamiento del cociente irreducible $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ al aumentar el valor de n

Revisemos pues algunos casos particulares:

Valores impares de n	Valores pares de n
► Para $n = 1$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{1}{1} = 1$	► Para $n = 2$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{2}{1} = 1$
► Para $n = 3$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{3}{2} = 1.5$	► Para $n = 4$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{5}{3} = 1.666\ldots$
► Para $n = 5$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{8}{5} = 1.6$	► Para $n = 6$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{13}{8} = 1.625$
► Para $n = 7$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{21}{13} = 1.615\ldots$	► Para $n = 8$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{34}{21} = 1.619\ldots$
► Para $n = 9$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{55}{34} = 1.617\ldots$	► Para $n = 10$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{89}{55} = 1.618\ldots$

Esta tabla sugiere fuertemente un notable resultado:

Teorema 2.1.1

Sea n una variable entera y positiva.

Entonces, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) = \phi$

Más aún, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} < \phi$ *si* n *es impar, y* $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} > \phi$ *si* n *es par.*

Demostración

De acuerdo con la fórmula de Binet (teorema 1.6.5), se tiene que

$$U_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} \qquad \text{y} \qquad U_{n+1} = \frac{\phi^{n+1} - (-\phi)^{-(n+1)}}{\sqrt{5}}$$

Entonces, $$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\phi^{n+1} - (-\phi)^{-(n+1)}}{\phi^n - (-\phi)^{-n}} = \frac{1 - \dfrac{(-1)^{n+1}}{\phi^{2(n+1)}}}{\dfrac{1}{\phi} - \dfrac{(-1)^n}{\phi^{2(n+1)}}}$$

Por tanto, $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) = \frac{1-0}{\dfrac{1}{\phi}-0} = \frac{1}{\dfrac{1}{\phi}} = \phi,$$ como quería demostrarse ∎

Ahora probaremos que $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} < \phi$, siempre que n sea impar.[1]

En efecto:

- Para $n = 1$ la desigualdad es obvia.
- Supongamos que $\dfrac{U_{k+1}}{U_k} < \phi$, para cierto entero positivo k
- Demostraremos que $\dfrac{U_{k+3}}{U_{k+2}} < \phi$

  En efecto, dado que $U_{k+1} < U_k\phi$, se tiene que $\phi^{-1}U_{k+1} < U_k$

  Es decir, $(\phi - 1)U_{k+1} < U_k$

  Luego, $U_{k+1}\phi < U_k + U_{k+1} = U_{k+2}$

  Por tanto, $U_{k+1} < U_{k+2}\,\phi^{-1} = (\phi - 1)U_{k+2} = \phi\, U_{k+2} - U_{k+2}$

  Entonces, $U_{k+1} + U_{k+2} < \phi\, U_{k+2}$

  Esto es, $\dfrac{U_{k+3}}{U_{k+2}} < \phi$ ∎

  La otra desigualdad se demuestra de manera similar ∎

Obsérvese cómo el cociente $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ se aproxima fuertemente al número ϕ al aumentar n

De hecho, ya para $n = 10$, se obtiene el valor de ϕ *exacto* hasta el orden de las milésimas.

[1] Esta desigualdad puede también demostrarse con la fórmula de Binet, no obstante se ha preferido ofrecer una demostración inductiva *independiente*, la que suponemos más interesante.

El siguiente resultado generaliza el teorema anterior:

Teorema 2.1.2

Sea k un entero positivo y sea n una variable natural.

Entonces, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_{n+k}}{U_n}\right)=\phi^k$

Demostración (Inducción sobre k)

- El teorema 2.1.1 establece este resultado para el caso $k=1$

  Ahora bien,

$$\begin{aligned}\phi^2 &= 1+\phi = 1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_n}{U_n}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_n+U_{n+1}}{U_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_{n+2}}{U_n}\right)\end{aligned}$$

  Lo anterior establece el resultado para $k=2$

- Supongamos ahora que, para cierto entero positivo m, ocurre que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_{n+m}}{U_n}\right)=\phi^m \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_{n+(m+1)}}{U_n}\right)=\phi^{m+1}$$

- Demostremos que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_{n+(m+2)}}{U_n}\right)=\phi^{m+2}$

  En efecto, en virtud del teorema 1.6.1,

$$\begin{aligned}\phi^{m+2} &= \phi^m+\phi^{m+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_{n+m}}{U_n}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_{n+(m+1)}}{U_n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_{n+m}+U_{n+(m+1)}}{U_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_{n+(m+2)}}{U_n}\right) \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 2.1.3

Sea n una variable entera y positiva.

Entonces, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}-U_n\right)=0$

Más aún, $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}<U_n$ *si n es impar, y* $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}>U_n$ *si n es par.*

Demostración

Aplicando la fórmula de Binet (teorema 1.6.5), se encuentra que

$$\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - U_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}\phi^n}$$

Luego, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - U_n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\phi^n}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(0) = 0$ ■

Por otra parte, resulta claro que $\frac{1}{(-1)^{n+1}\phi^n} > 0$, si n es impar.

Luego, $0 < -(-1)^{-n}\phi^{-n} = -(-\phi)^{-n}$

Por tanto, $\phi^n < \phi^n - (-\phi)^{-n} = \sqrt{5}\, U_n$, como quería demostrarse ■

Lo anterior establece que $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$ es *asintóticamente igual* a U_n, por la izquierda cuando n es impar, y por la derecha cuando n es par.

Nótese que la convergencia a cero de la diferencia $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - U_n$ es razonablemente rápida:

Por ejemplo, para $n = 16$, $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - U_n = 0.00031\ldots$

Teorema 2.1.4

Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *una sucesión infinita, definida recursivamente como sigue:*

$$\begin{cases} a_1 = c, \; c \in [-1, +\infty) \\ a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \end{cases}$$

En tal caso,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \phi$$

Demostración

Observemos primeramente que todos, excepto quizás los dos primeros términos de la sucesión, son positivos.

Luego, en caso de existir el límite, éste es necesariamente positivo.

Sea $L = \lim_{n\to\infty} a_n$

Es claro que $L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + a_n} = \sqrt{1 + L}$

Luego, L satisface la ecuación cuadrática, $L^2 - L - 1 = 0$

Por tanto, $L = \phi$ ■

Nótese que para $c = \phi$, la sucesión a_n se estaciona.

Sea n un entero positivo.

Queremos estudiar el comportamiento de las raíces de la ecuación algebraica

$$(x+n)^n + n^n = (2x+n)^n$$

En primer lugar demostremos que esta ecuación posee una raíz real positiva única, para cada valor de n

En efecto, sea $\quad P(x) = (2x+n)^n - (x+n)^n - n^n$

De acuerdo con la fórmula del binomio de Newton, $P(x)$ puede escribirse en la forma

$$P(x) = -n^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} n^{n-k}(2^k - 1)x^k$$

Observemos que los n coeficientes de x^k son todos positivos.

De lo anterior se infiere que $P(x)$ presenta un sólo cambio de signo y, de acuerdo con la regla de Descartes, la ecuación $P(x) = 0$ tiene una raíz real positiva única. ∎

Presentamos ahora la mencionada raíz para los primeros valores de n:

- Para $n = 1$, la ecuación toma la forma $(x+1)^1 + 1 = (2x+1)^1$, cuya raíz real positiva es $x = 1$
- Para $n = 2$, la ecuación toma la forma $(x+2)^2 + 4 = (2x+2)^2$, cuya raíz real positiva es $x = 2/3$
- Para $n = 3$, la ecuación toma la forma $(x+3)^3 + 27 = (2x+3)^3$, cuya raíz real positiva es $x = 0.59352\ldots$

Resulta que al aumentar el valor de n, la sucesión de las raíces correspondientes tiene un límite muy singular:

Teorema 2.1.5

Sea n una variable entera y positiva.

Denotemos con x_n la raíz real positiva de la ecuación algebraica

$$(x+n)^n + n^n = (2x+n)^n$$

Se afirma que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ln\phi$$

Demostración

En efecto, la ecuación puede ser llevada a la forma

$$1+\left(\frac{x}{n}+1\right)^n = \left(\frac{2x}{n}+1\right)^n$$

Ahora bien, x_n satisface esta ecuación. Entonces,

$$1+\left(\frac{x_n}{n}+1\right)^n = \left(\frac{2x_n}{n}+1\right)^n$$

Por otra parte, se sabe que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(n)}{n}+1\right)^n = \exp\left(\lim_{n\to\infty} f(n)\right)$$

Luego,

$$1+\exp\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \exp\left(2\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

Sea

$$t = \exp\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

Por tanto ,

$$1+t = t^2, \text{de donde } t=\phi$$

Luego, $\lim_{n\to\infty} x_n = \ln\phi$ ∎

Recordemos ahora que la serie, o suma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, se define como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

Cuando este límite existe, se dice que la serie converge; en otro caso, la serie es divergente.

En lo sucesivo utilizaremos algunos resultados propios de la teoría de series infinitas, por lo cual recomendamos al lector acudir a la bibliografía citada, en caso de necesidad.

El teorema siguiente presenta una hermosa caracterización del número de oro:

Teorema 2.1.6

El número de oro es igual a la suma infinita de todas sus potencias enteras negativas.

Esto es:
$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{-n} = \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^3} + \frac{1}{\phi^4} + \frac{1}{\phi^5} + \dots$$

Más aún, ϕ es el único número real con esa propiedad.

Demostración

Haciendo $x = \phi^{-1}$ en la fórmula $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(|x| < 1)$, obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi^{-n} = \frac{1}{1-\phi^{-1}} = \frac{1}{\phi^{-2}} = \phi^2 = 1 + \phi$$

Luego, $\sum_{n=1}^{\infty} \phi^{-n} = \phi$, como quería demostrarse[2] ∎

Ahora bien, sea x un real tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x^{-n}$

Entonces, x satisface la ecuación

$$x = \frac{1}{1-x^{-1}} - 1$$

Equivalentemente, $x^2 - x - 1 = 0$, de donde $x = \phi$ ó $x = -\phi^{-1}$

Pero es claro que $x > 1$ ó $x < -1$ (en otro caso la serie sería divergente).

Luego, $x = \phi$ ∎

Teorema 2.1.7

1. *La suma infinita de todas las potencias impares negativas del número de oro, es igual a la unidad.*

   Esto es, $$\sum_{n=1}^{\infty} \phi^{-(2n-1)} = 1$$

2. *La suma infinita de todas las potencias pares negativas del número de oro, es igual a su inverso.*

   Esto es, $$\sum_{n=1}^{\infty} \phi^{-2n} = \phi^{-1}$$

[2]Esta misma igualdad puede deducirse a partir de las propiedades de las series telescópicas, definiendo $b_n = \phi^{-n}$

Demostración

Haciendo $x = \phi^{-1}$ en la fórmula $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$ $(|x| < 1)$, obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi^{-2n} = \frac{1}{1-\phi^{-2}} = \frac{1}{\phi^{-1}} = \phi$$

Luego, $\sum_{n=1}^{\infty} \phi^{-2n} = \phi - 1 = \phi^{-1}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \phi^{-(2n-1)} = 1$ ∎

De lo anterior y del hecho de que $1 < \phi < 2$, se sigue que *la parte entera* de ϕ es la suma infinita de sus potencias *impares* negativas, mientras que *su parte decimal* se obtiene con la suma infinita de sus potencias *pares* negativas.

Los siguientes dos teoremas permiten escribir ***cualquier potencia áurea*** en términos de ***potencias áureas negativas***:

Teorema 2.1.8

Sea k *un entero positivo. Entonces:*

$$\phi^k = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{U_{k+1}}{\phi^{2n-1}} + \frac{U_k}{\phi^{2n}} \right)$$

Demostración

De acuerdo con los teoremas 2.1.7-(2) y 1.6.2-(1), podemos escribir

$$\phi^k = \phi^{k+1}\phi^{-1} = \phi^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\phi^{-2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi^{k+1}}{\phi^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{U_{k+1}\phi + U_k}{\phi^{2n}}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{U_{k+1}}{\phi^{2n-1}} + \frac{U_k}{\phi^{2n}} \right), \quad \text{como quería demostrarse} \quad ∎$$

Teorema 2.1.9

Sea k *un entero positivo.*

1. *Si* k *es un impar de la forma* $k = 2t - 1$, $\phi^{-k} = \sum_{n=t}^{\infty} \phi^{-2n}$

2. *Si* k *es un par de la forma* $k = 2t$, $\phi^{-k} = \sum_{n=t}^{\infty} \phi^{-(2n+1)}$

Demostración

1. Sea $k = 2t - 1$, un impar positivo $(t = 1, 2, 3, \ldots)$

En virtud del teorema 2.1.7-(2), se tiene que

$$\phi^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\phi^{-2n} = \sum_{n=1}^{t}\phi^{-2n} + \sum_{n=t}^{\infty}\phi^{-2n} - \phi^{-2t}, \quad \text{es decir,}$$

$$\sum_{n=t}^{\infty}\phi^{-2n} = -\sum_{n=1}^{t}\phi^{-2n} + \phi^{-1} + \phi^{-2t} \quad \text{y, por el teorema 1.6.11,}$$

$$= -\phi^{-1}(1-\phi^{-2t}) + \phi^{-1} + \phi^{-2t}$$

$$= \phi^{-2t-1} + \phi^{-2t} = \phi^{-2t+1} \quad \text{(teorema 1.6.1)}$$

$$= \phi^{-k}, \quad \text{como quería demostrarse} \quad \blacksquare$$

2. Multiplíquese la igualdad anterior por ϕ^{-1} ■

En particular, se tienen los siguientes desarrollos:

- $\phi^{9} = \underbrace{\frac{55}{\phi} + \frac{34}{\phi^2}}_{n=1} + \underbrace{\frac{55}{\phi^3} + \frac{34}{\phi^4}}_{n=2} + \underbrace{\frac{55}{\phi^5} + \frac{34}{\phi^6}}_{n=3} + \ldots$

- $\phi^{-5} = \frac{1}{\phi^6} + \frac{1}{\phi^8} + \frac{1}{\phi^{10}} + \frac{1}{\phi^{12}} + \frac{1}{\phi^{14}} + \frac{1}{\phi^{16}} + \ldots$

- $\phi^{-6} = \frac{1}{\phi^7} + \frac{1}{\phi^9} + \frac{1}{\phi^{11}} + \frac{1}{\phi^{13}} + \frac{1}{\phi^{15}} + \frac{1}{\phi^{17}} + \ldots$

Obsérvese la armonía de estas series.

El teorema siguiente es muy especial:

Teorema 2.1.10

Si $|x| < \phi^{-1}$, *entonces*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} U_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_n x^n = \frac{x}{1 + x - x^2}$

Demostración

La igualdad 2. se obtiene sustituyendo x por $-x$ en 1. y multiplicando por -1. De manera que sólo demostraremos la igualdad 1.

Sea $|x| < \phi^{-1}$ y definamos $a_n = U_n x^n$. Entonces, si $x \neq 0$, encontramos que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = |x|\,\phi < 1 \quad \text{(teorema 2.1.1)}$$

Luego, según la prueba de la razón, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n x^n$$

converge para $|x| < \phi^{-1}$

Ahora bien, de acuerdo con la fórmula de Binet (teorema 1.6.5)

$$\begin{aligned}\sqrt{5}\, U_n x^n &= \left[\phi^n + (-1)^{n+1}\phi^{-n}\right] x^n = \phi^n x^n + (-1)^{n+1}\phi^{-n} x^n \\ &= (\phi x)^n + (-1)^{n+1}(x/\phi)^n\end{aligned}$$

Luego, $\quad \sqrt{5}\sum_{n=1}^{\infty} U_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(\phi x)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(x/\phi)^n$

Por otra parte, como $|x| < \phi^{-1}$, encontramos que $|\phi x| < 1$. Entonces podemos sustituir x por ϕx en la fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1)$$

Para obtener $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\phi x)^n = \frac{1}{1-\phi x} \qquad (|x| < \phi^{-1})$

De donde $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\phi x)^n = \frac{1}{1-\phi x} - 1 \qquad (|x| < \phi^{-1})$

Análogamente,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(x/\phi)^n = -\frac{1}{1+\phi^{-1}x} + 1 \qquad (|x| < \phi^{-1})$$

Por tanto,

$$\sqrt{5}\sum_{n=1}^{\infty} U_n x^n = \frac{1}{1-\phi x} - \frac{1}{1+\phi^{-1}x} = \frac{(\phi^{-1}+\phi)x}{1-(\phi-\phi^{-1})x - x^2} = \frac{\sqrt{5}\,x}{1-x-x^2}$$

Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}, \qquad \text{si } |x| < \phi^{-1} \qquad \blacksquare$$

Asignando valores adecuados a x en las fórmulas demostradas, se obtienen resultados inesperados:

Teorema 2.1.11

Se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U_n}{\phi^{2n}} = \phi$ 1'. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{2U_n}{\phi^{2n}} = \phi^{-1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{\phi^{3n}} = \frac{1}{3}$ 2'. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{U_n}{\phi^{3n}} = \frac{1}{5}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{\phi^{5n}} = \frac{1}{10}$ 3'. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{U_n}{\phi^{5n}} = \frac{1}{12}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{\phi^{7n}} = \frac{1}{28}$ 4'. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{U_n}{\phi^{7n}} = \frac{1}{30}$

Demostración

Hágase $x = \phi^{-2}, \phi^{-3}, \phi^{-5}, \phi^{-7}$ en la fórmula 1. del teorema anterior, para obtener, respectivamente, las igualdades 1, 2, 3 y 4 ∎

Para obtener las demás igualdades, dénse los mismos valores a x en la otra fórmula del mismo teorema ∎

Teorema 2.1.12

Si $|x| < \phi^{-1}$, *entonces* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} U_{2n}\, x^{2n} = \frac{x^2}{1-3x^2+x^4}$

En particular:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{2n}}{\phi^{4n}} = \frac{1}{4}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{2n}}{\phi^{6n}} = \frac{1}{15}$$

Demostración

Debe observarse que la serie 2. del teorema 2.1.10 es ***absolutamente convergente.***

Restando las series de este teorema encontramos que, para $|x| < \phi^{-1}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}[1+(-1)^n]\,U_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2} - \frac{x}{1+x-x^2} = \frac{2x^2}{1-3x^2+x^4}$$

Pero

$$\sum_{n=1}^{\infty}[1+(-1)^n]U_nx^n = \sum_{\substack{n=1\\ \text{(impares)}}}^{\infty}[1+(-1)^n]U_nx^n + \sum_{\substack{n=2\\ \text{(pares)}}}^{\infty}[1+(-1)^n]U_nx^n$$

$$= \sum_{\substack{n=2\\ \text{(pares)}}}^{\infty}[1+(-1)^n]U_nx^n = 2\sum_{\substack{n=2\\ \text{(pares)}}}^{\infty}U_nx^n$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}U_{2n}x^{2n} \qquad \blacksquare$$

(La reordenación de la serie queda validada por la convergencia absoluta.)

Puede observarse que

$$1/3 - 1/4 = 1/12 \qquad \text{y} \qquad 1/10 - 1/15 = 1/30$$

Lo anterior nos lleva a las siguientes igualdades:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_n}{\phi^{3n}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_{2n}}{\phi^{4n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{U_n}{\phi^{5n}}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_n}{\phi^{5n}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_{2n}}{\phi^{6n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{U_n}{\phi^{7n}}$

De hecho,se verifica la igualdad más general:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_n}{\phi^{kn}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_{2n}}{\phi^{(k+1)n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{U_n}{\phi^{(k+2)n}} \qquad (k>1)$

Para convencernos de esto último, bastaría demostrar que

$$U_n\phi^{2n} - U_{2n}\phi^n + (-1)^nU_n = 0$$

Y, en efecto,

$$U_n\phi^{2n} - U_{2n}\phi^n = U_n(U_{2n}\phi + U_{2n-1}) - U_{2n}(U_n\phi + U_{n-1}) = U_nU_{2n-1} - U_{n-1}\,U_{2n}$$

$$= U_n(U_{2n+1} - U_{2n}) - U_{n-1}\,U_{2n} = U_n\,U_{2n+1} - U_{n+1}U_{2n}$$

$$= -(-1)^nU_n, \qquad (\text{hágase } k = n+1 \text{ en el teorema 1.2.7}) \qquad \blacksquare$$

De hecho, puede demostrarse que $U_n\phi^{kn} - U_{kn}\phi^n = (-1)^{n+1}U_{(k-1)n}$

Ocurre que las series dadas en los teoremas 2.1.11 y 2.1.12 son, en realidad, casos particulares de un resultado más general:

Teorema 2.1.13

Para todo entero positivo $k > 1$, *se satisfacen las siguientes igualdades:*

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{\phi^{kn}} = \begin{cases} \dfrac{1}{(U_{k-1}+U_{k+1})-1} & \text{, si } k \text{ es impar} \\[2ex] \dfrac{1}{U_k\sqrt{5}\,-1} = \dfrac{U_k\sqrt{5}\,+1}{5U_k^2-1} & \text{, si } k \text{ es par} \end{cases}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{U_n}{\phi^{kn}} = \begin{cases} \dfrac{1}{(U_{k-1}+U_{k+1})+1} & \text{, si } k \text{ es impar} \\[2ex] \dfrac{1}{U_k\sqrt{5}\,+1} = \dfrac{U_k\sqrt{5}\,-1}{5U_k^2-1} & \text{, si } k \text{ es par} \end{cases}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{2n}}{\phi^{2kn}} = \begin{cases} \dfrac{1}{5U_k^2-5} & \text{, si } k \text{ es impar} \\[2ex] \dfrac{1}{5U_k^2-1} & \text{, si } k \text{ es par} \end{cases}$$

(Obsérvese que $\sum_1 \sum_2 = \sum_3$ *y* $\sum_1 - \sum_2 = 2\sum_3$*)*

Demostración

Como $k > 1$, $|\phi^{-k}| < \phi^{-1}$

Lo anterior permite la aplicación de los teoremas 2.1.10 y 2.1.11, para $x = \phi^{-k}$:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{\phi^{kn}} = \frac{\phi^{-k}}{1-\phi^{-k}-\phi^{-2k}} = \frac{1}{(\phi^k-\phi^{-k})-1}$$ y, por el teorema 1.6.6,

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(U_{k-1}+U_{k+1})-1}, & \text{si } k \text{ es impar} \\[2ex] \dfrac{1}{U_k\sqrt{5}\,-1}, & \text{si } k \text{ es par} \end{cases} \qquad \blacksquare$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{U_n}{\phi^{kn}} = \frac{1}{1+\phi^{-k}-\phi^{-2k}} = \frac{1}{(\phi^k-\phi^{-k})+1}$$ y, por el teorema 1.6.6,

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(U_{k-1}+U_{k+1})+1}, & \text{si } k \text{ es impar} \\[2ex] \dfrac{1}{U_k\sqrt{5}\,+1}, & \text{si } k \text{ es par} \end{cases} \qquad \blacksquare$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_{2n}}{\phi^{2kn}} = \frac{\phi^{-2k}}{1-3\phi^{-2k}+\phi^{-4k}} = \frac{1}{(\phi^{2k}-\phi^{-2k})-3}$$ y, por el teorema 1.6.6,

$$= \frac{1}{(U_{2k-1}+U_{2k+1})-3}$$

Ahora bien, de acuerdo con el teorema 1.2.4, se tiene que

$$\begin{aligned} U_{2k-1}+U_{2k+1} &= U_{k-1}^2+2U_k^2+U_{k+1}^2 = (U_{k-1}+U_{k+1})^2+2\left(U_k^2-U_{k-1}U_{k+1}\right) \\ &= (U_{k-1}+U_{k+1})^2+2(-1)^{k+1} \quad \text{(teorema 1.2.2)} \\ &= 5U_k^2-4(-1)^{k+1}+2(-1)^{k+1} \quad \text{(teorema 1.2.3)} \\ &= 5U_k^2-2(-1)^{k+1} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El siguiente resultado generaliza los teoremas 2.1.6 y 2.1.7-(2)

Teorema 2.1.14

Para todo entero positivo $k > 1$, se satisface la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\phi^{(k-1)n}} = \left(\phi^k+\phi-1\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_n}{\phi^{kn}} - 1$$

en donde la serie del miembro derecho puede calcularse mediante el teorema 2.1.13-(1).

En particular:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\phi^{3n}} = \frac{\phi^{-1}}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\phi^{5n}} = \frac{1+\phi^{-5}}{11}$$

Demostración

Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\phi^{(k-1)n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_n}{\phi^{kn}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_{n+1}}{\phi^{kn-1}}, \qquad \text{pues } U_{n+1}\phi+U_n=\phi^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_n}{\phi^{kn}}+\phi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_{n+1}}{\phi^{kn}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_n}{\phi^{kn}}+\phi\sum_{n=2}^{\infty}\frac{U_n}{\phi^{k(n-1)}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_n}{\phi^{kn}}+\phi^{k+1}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{U_n}{\phi^{kn}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\phi^{(k-1)n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{\phi^{kn}} + \phi^{k+1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{\phi^{kn}} - \frac{1}{\phi^k} \right)$$

$$= (\phi^{k+1} + 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{\phi^{kn}} - \phi$$

Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\phi^{(k-1)n}} = (\phi^k + \phi^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{\phi^{kn}} - 1 \qquad \blacksquare$$

Para el valor $k = 4$, encontramos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\phi^{3n}} = (4\phi + 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{\phi^{4n}} - 1$$

$$= \left(2\sqrt{5} + 3\right) \left(\frac{3\sqrt{5} + 1}{44} \right) - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{\phi^{-1}}{2} \qquad \blacksquare$$

(De alguna manera este resultado debiera sorprender, pues las potencias negativas de ϕ con exponente múltiplo de 3 no tienen denominadores (Teorema 1.6.4).)

Para el valor $k = 6$, encontramos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\phi^{5n}} = (9\phi + 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{\phi^{6n}} - 1$$

$$= \left(\frac{9\sqrt{5} + 17}{2} \right) \left(\frac{8\sqrt{5} + 1}{319} \right) - 1 = \frac{5\sqrt{5} - 9}{22} = \frac{1 + \phi^{-5}}{11} \qquad \blacksquare$$

Desde luego, para $k = 2$ y $k = 3$, se obtienen las series de los teoremas 2.1.6 y 2.1.7-(2)

Por otra parte, se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es ***telescópica***, si existe una sucesión $b_1, b_2, b_3, \ldots$ tal que, para todo entero positivo n, $a_n = b_n - b_{n+1}$

Se demuestra que una serie telescópica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si la sucesión $b_1, b_2, b_3, \ldots$ converge.

De hecho,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n \to \infty} b_n$$

Teorema 2.1.15

Se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{U_n U_{n+2}} = 1$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{U_{n+1} U_{n+2}} = 1$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{U_n U_{n+1}} = \phi^{-1}$

Demostración

1. Sea $b_n = 1/U_n U_{n+1}$. Entonces,

$$a_n = b_n - b_{n+1} = \frac{1}{U_n U_{n+1}} - \frac{1}{U_{n+1} U_{n+2}} = \frac{U_{n+2} - U_n}{U_n U_{n+1} U_{n+2}} = \frac{1}{U_n U_{n+2}}$$

Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{U_n U_{n+2}} = b_1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{U_n U_{n+1}} = b_1 = 1 \qquad \blacksquare$$

2. Sea $b_n = 1/U_{n+1}$. Entonces,

$$a_n = b_n - b_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_{n+2}} = \frac{U_{n+2} - U_{n+1}}{U_{n+1} U_{n+2}} = \frac{U_n}{U_{n+1} U_{n+2}}$$

Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{U_{n+1} U_{n+2}} = b_1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{U_{n+1}} = b_1 = 1 \qquad \blacksquare$$

3. Sea $b_n = U_{n+1}/U_n$. Entonces,

$$a_n = b_n - b_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{U_n} - \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}} = \frac{U_{n+1}^2 - U_n U_{n+2}}{U_n U_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{U_n U_{n+1}}$$

Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{U_n U_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) - b_1 = \phi - 1 = \phi^{-1} \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.1.16

Para todo entero positivo k, se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{U_{n+k-1} U_{n+k}} = \frac{1}{U_k \phi^k}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{n+k}}{U_{n+k-1} U_{n+k+1}} = \frac{1}{U_k U_{k+1}}$

Demostración

1. Para $k = 1$ se obtiene la fórmula 3 del teorema anterior.

Sea pues, $k > 1$

Definamos $b_n = U_n / U_{n+k-1}$. Entonces,

$$a_n = b_n - b_{n+1} = \frac{U_n}{U_{n+k-1}} - \frac{U_{n+1}}{U_{n+k}} = \frac{U_n U_{n+k} - U_{n+1} U_{n+k-1}}{U_{n+k-1} U_{n+k}}$$

y, por el teorema 1.2.7,

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}\, U_{k-1}}{U_{n+k-1}\, U_{n+k}}$$

Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} U_{k-1}}{U_{n+k-1} U_{n+k}} = b_1 - \lim_{n \to \infty} \frac{U_n}{U_{n+k-1}} = \frac{1}{U_k} - \frac{1}{\phi^{k-1}}, \qquad \text{pues } k > 1$$

$$= \frac{\phi^{k-1} - U_k}{U_k \phi^{k-1}} = \frac{U_{k-1}\phi + U_{k-2} - U_k}{U_k \phi^{k-1}}$$

$$= \frac{U_{k-1}\phi - U_{k-1}}{U_k \phi^{k-1}} = \frac{U_{k-1}\phi^{-1}}{U_k \phi^{k-1}} = \frac{U_{k-1}}{U_k \phi^k}$$

Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{U_{n+k-1} U_{n+k}} = \frac{1}{U_k \phi^k}, \quad \text{como quería demostrarse} \qquad \blacksquare$$

2. Definamos $b_n = 1/U_{n+k-1} U_{n+k}$. Entonces,

$$a_n = b_n - b_{n+1} = \frac{1}{U_{n+k-1} U_{n+k}} - \frac{1}{U_{n+k} U_{n+k+1}}$$

$$= \frac{U_{n+k} U_{n+k+1} - U_{n+k-1} U_{n+k}}{U_{n+k-1} U_{n+k} U_{n+k+1}}$$

$$= \frac{(U_{n+k+1} - U_{n+k-1}) U_{n+k}}{U_{n+k-1} U_{n+k} U_{n+k+1}} = \frac{U_{n+k}}{U_{n+k-1} U_{n+k+1}}$$

Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{n+k}}{U_{n+k-1} U_{n+k+1}} = b_1 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{U_{n+k-1} U_{n+k}} = b_1 = \frac{1}{U_k U_{k+1}} \qquad \blacksquare$$

Existen cantidad de fórmulas relacionadas con las series infinitas. Asignándoles valores adecuados frecuentemente se obtienen resultados particulares especialmente atractivos.

Los teoremas siguientes son todos de este tipo:

Teorema 2.1.17

Sea k un entero no negativo. Entonces,

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \phi^{-(2n+1)} = \phi^{k}$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \phi^{-(n+1)} = \phi^{2k+1}$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+k}{k} \phi^{1-n} = \phi^{-k}$

Demostración

Hágase $x = \phi^{-2}$, ϕ^{-1}, $-\phi^{-1}$, en la fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \qquad (|x| < 1)$$

para obtener, respectivamente, las igualdades 1, 2 y 3 ∎

Teorema 2.1.18

Se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\phi^{-2n} = 1$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \phi^{1-n} = 1$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\phi^n - 1}{\phi^{2n}}\right) = 1$

Demostración

1. Hágase $x = \phi^{-2}$ en la fórmula $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ $\quad (|x| < 1)$ ∎

2. Hágase $x = -\phi^{-1}$ en la fórmula $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $\quad (|x| < 1)$ ∎

3. Hágase $x = \phi^{-1}$ en la fórmula $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n}) = \frac{x}{1-x^2}$ $\quad (|x| < 1)$ ∎

Teorema 2.1.19

Se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\phi^{-n} = \phi^3$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n\phi^{-n} = \phi^{-3}$

Demostración

Hágase $x = \phi^{-1},\ -\phi^{-1}$, en la fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad (|x| < 1)$$

para obtener, respectivamente, las igualdades 1 y 2 ■

Teorema 2.1.20

Se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\phi^{-n} = \phi^5$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n^2\phi^{-n} = \phi^{-5}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\phi^{-2n} = \sqrt{5}$

Demostración

Hágase $x = \phi^{-1},\ -\phi^{-1},\ \phi^{-2}$, en la fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} \qquad (|x| < 1)$$

para obtener, respectivamente, las igualdades 1, 2 y 3 ■

Teorema 2.1.21

Se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\phi^n}{2^{n+1}}\right) = \phi^2$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}\phi^{2n}}\right) = \phi^{-1}$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-(1)^n}{2^{n+1}\phi^{3n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Demostración

Hágase $x = \phi,\ \phi^{-2},\ -\phi^{-3}$, en la fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2-x} \qquad (|x|<2)$$

para obtener, respectivamente, las igualdades 1, 2 y 3 ∎

Teorema 2.1.22

Se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\phi^n}\right) = 2\ln\phi$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n\phi^n}\right) = \ln\phi$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\phi^{2n}}\right) = \ln\phi$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)\phi^{2n-1}}\right) = \frac{3}{2}\ln\phi$

Demostración

Hágase $x = \phi^{-1},\ -\phi^{-1},\ \phi^{-2}$, en la fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \qquad (|x|<1)$$

para obtener, respectivamente, las igualdades 1,2 y 3 ∎

Para obtener 4, hágase $x = \phi^{-1}$ en la fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad (|x|<1) \quad ∎$$

Con esto damos por concluido este apartado.

2.2 Partes entera y decimal de las potencias áureas

El Factor de Oro

Si x es un número real, $[x]$ y $[\![x]\!]$ denotarán, en lo sucesivo, las partes ***entera*** y ***decimal*** de x, respectivamente.

Por ejemplo:

- ▷ Si $x = 1/3$, $[x] = 0$ y $[\![x]\!] = 0.333\,333\,333\,333\,333\ldots$
- ▷ Si $x = 1.2$, $[x] = 1$ y $[\![x]\!] = 0.200\,000\,000\,000\,000\ldots$
- ▷ Si $x = \sqrt{5}$, $[x] = 2$ y $[\![x]\!] = 0.236\,067\,977\,499\,789\ldots$
- ▷ Si $x = \pi$, $[x] = 3$ y $[\![x]\!] = 0.141\,592\,653\,589\,793\ldots$
- ▷ Si $x = 4$, $[x] = 4$ y $[\![x]\!] = 0.000\,000\,000\,000\,000\ldots$

Por supuesto, se observa que $[x] + [\![x]\!] = x$, en donde la función $[x]$ sólo toma valores enteros.

Se cumplen además las siguientes propiedades:

1. $[x] \leq x < [x] + 1$, $0 \leq [\![x]\!] < 1$ y $[m] = m$ para m un entero arbitrario.
2. $[x + m] = [x] + m$, siempre que m sea un entero.
3. Si $x > 0$ y no entero, $[-x] = -(1 + [x])$
4. $[x + \frac{1}{2}]$ es el entero más próximo a x.
   Si dos enteros son igualmente próximos a x, $[x + \frac{1}{2}]$ es el mayor de ellos.
5. $-[\frac{1}{2} - x]$ es el entero más próximo a x.
   Si dos enteros son igualmente próximos a x, $-[\frac{1}{2} - x]$ es el menor de ellos.

El propósito fundamental de este apartado, es el de establecer fórmulas para las partes ***entera*** y ***decimal*** de las potencias áureas.

Los siguientes dos teoremas son básicos en esta dirección:

Teorema 2.2.1

Para valores impares de n, $U_{n+1} < U_n\phi$ y $U_{n-1} + U_{n+1} < \phi^n < U_n\sqrt{5}$

Para valores pares de n, $U_{n+1} > U_n\phi$ y $U_n\sqrt{5} < \phi^n < U_{n-1} + U_{n+1}$

Más aún, para todo entero positivo n, $U_{n+1} < \phi^n$

Demostración

En realidad, las desigualdades

$U_{n+1} < U_n\phi$ y $\phi^n < U_n\sqrt{5}$ (n impar)
$U_{n+1} > U_n\phi$ y $\phi^n > U_n\sqrt{5}$ (n par)

ya fueron probadas en los teoremas 2.1.1 y 2.1.3 del apartado anterior ■

Demostremos que $U_{n-1} + U_{n+1} < \phi^n$, si n es impar.

En efecto, como $U_{n+1} < U_n\phi$, $U_{n-1} + U_{n+1} < U_n\phi + U_{n-1} = \phi^n$ ■

De igual manera, se demuestra que $U_{n-1} + Un + 1 > \phi^n$, si n es par ■

Por otra parte,como $1 < \phi$, tenemos que $U_n < U_n\phi$

Luego, $U_{n+1} = U_{n-1} + U_n < U_n\phi + U_{n-1} = \phi^n$ ■

Teorema 2.2.2

$U_{n-1} + U_{n+1}$ es el entero más próximo a ϕ^n, para todo entero $n > 1$

Esto es, $[\phi^n + \frac{1}{2}] = U_{n-1} + U_{n+1}$, si $n > 1$

Obsérvese, por otra parte, que no hay dos enteros igualmente próximos a ϕ^n, pues ϕ^n es siempre irracional.

Demostración

En virtud del teorema 1.6.3, encontramos que

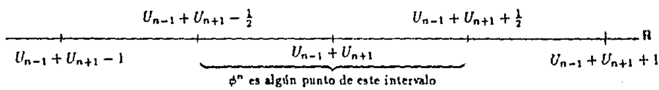
$$\phi^n - (U_{n-1} + U_{n+1}) = \frac{U_n\sqrt{5} - (U_{n-1} + U_{n+1})}{2} = \pm\frac{1}{\phi^n} \qquad \begin{pmatrix} +, \text{ si n es impar} \\ -, \text{ si n es par} \end{pmatrix}$$

De manera que, en cualquier caso, $|\phi^n - (U_{n-1} + U_{n+1})| = \dfrac{1}{\phi^n}$

Por otra parte, dado que $n > 1$, se verifica trivialmente la desigualdad $\dfrac{1}{\phi^n} < \dfrac{1}{2}$

Luego, $|\phi^n - (U_{n-1} + U_{n+1})| < \dfrac{1}{2}$

Geométricamente, lo anterior significa que $U_{n-1} + U_{n+1} - \dfrac{1}{2} < \phi^n < U_{n-1} + U_{n+1} + \dfrac{1}{2}$



Por tanto, $U_{n-1} + U_{n+1}$ es el entero más próximo a ϕ^n ■

El par de teoremas anteriores nos lleva al siguiente resultado:

Teorema 2.2.3

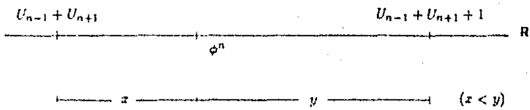
Para valores impares de n, $[\phi^n] = U_{n-1} + U_{n+1}$
Para valores pares de n, $[\phi^n] = U_{n-1} + U_{n+1} - 1$

Demostración

- Sea $n > 1$ un impar.

  Sabemos que $U_{n-1} + U_{n+1}$ es el entero más próximo a ϕ^n

  Por otra parte, $U_{n-1} + U_{n+1} < \phi^n$



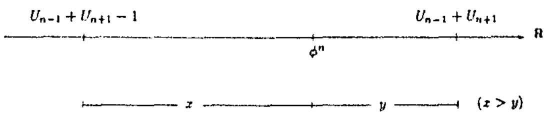
  Luego, $[\phi^n] = U_{n-1} + U_{n+1}$, como quería demostrarse ∎

  (El caso $n = 1$ puede comprobarse directamente)

- Sea n un par.

  Sabemos que $U_{n-1} + U_{n+1}$ es el entero más próximo a ϕ^n

  Por otra parte, $U_{n-1} + U_{n+1} > \phi^n$



  Luego, $[\phi^n] = U_{n-1} + U_{n+1} - 1$, como quería demostrarse ∎

Por supuesto, si n es un entero positivo, $[\phi^{-n}] = 0$ y $[\![\phi^{-n}]\!] = \phi^{-n}$

De acuerdo con la definición recursiva de la sucesión de Fibonacci, el cálculo de cualquiera de sus elementos no básicos, depende de los dos elementos inmediatos anteriores.

No obstante, es posible encontrar el $(n+1)$–*ésimo* número de Fibonacci conociendo tan sólo el $n-$*ésimo*. En efecto:

Teorema 2.2.4

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$[U_n\phi] = \begin{cases} U_{n+1} & , \textit{si } n \textit{ es impar} \\ U_{n+1} - 1 & , \textit{si } n \textit{ es par} \end{cases}$$

Demostración

En virtud del teorema 1.6.2, $\phi^n = U_n\phi + U_{n-1}$

Luego, $[\phi^n] = [U_n\phi] + U_{n-1}$ (proposición 2)

Por tanto, si n es impar,

$$U_{n-1} + U_{n+1} = [U_n\phi] + U_{n-1}$$

Esto es, $[U_n\phi] = U_{n+1}$, como quería demostrarse ∎

Para el caso en que n es par,

$$U_{n-1} + U_{n+1} - 1 = [U_n\phi] + U_{n-1}$$

Esto es, $[U_n\phi] = U_{n+1} - 1$ ∎

El teorema siguiente permite encontrar el $(n-1)$–*ésimo* número de Fibonacci en términos exclusivos del $n-$*ésimo*:

Teorema 2.2.5

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$[U_n\phi^{-1}] = \begin{cases} U_{n-1} & , \textit{si } n \textit{ es impar} \\ U_{n-1} - 1 & , \textit{si } n \textit{ es par} \end{cases}$$

Demostración

Como $\phi^{-1} = \phi - 1$, encontramos que $[U_n\phi^{-1}] = [U_n\phi] - U_n$

Luego, si n es impar, $[U_n\phi^{-1}] = U_{n+1} - U_n = U_{n-1}$ ■

Para el caso n par, $[U_n\phi^{-1}] = U_{n+1} - 1 - U_n = U_{n-1} - 1$ ■

Presentamos a continuación un ejemplo de cómo aplicar los teoremas 2.2.4 y 2.2.5:

▷ Sabiendo que $U_{17} = 1597$, encontrar U_{16} y U_{18}

Tenemos que $\phi \approx 1.618034$ y $\phi^{-1} \approx 0.618034$ (nótese que 17 es impar)

De manera que

$U_{16} = [1597(0.618034)] = [987.000298] = 987$, que es el valor correcto.

$U_{18} = [1597(1.618034)] = [2584.000298] = 2584$, que es el valor correcto.

Los cuatro próximos teoremas generalizan los resultados de los dos últimos.

En particular, los teoremas 2.2.8 y 2.2.9 permitirán, conocido el $n-$*ésimo* número de Fibonacci, encontrar *todos los demás hasta* U_{2n+1}

Teorema 2.2.6

Sea n un impar y supongamos que $U_k \leq U_{n+1}$. Entonces:

1. $[U_kU_n\phi] = U_kU_{n+1}$
2. $[U_kU_n\phi^{-1}] = U_kU_{n-1}$

Demostración

1. Bastará demostrar que $U_kU_{n+1} < U_kU_n\phi < U_kU_{n+1} + 1$. En efecto,

   ▶ $0 < \phi^{-n}$, para cualquier entero positivo n
   Ahora bien, como n es impar, $\phi^{-n} = U_n\phi - U_{n+1}$ (teorema 1.6.2-2)
   Luego, $0 < U_n\phi - U_{n+1}$ y, en consecuencia, $U_kU_{n+1} < U_kU_n\phi$ ■

   ▶ Se tiene que $U_k \leq U_{n+1} \leq U_{n-1} + U_{n+1} < \phi^n$ (teorema 2.2.1)
   Por tanto, $U_k\phi^{-n} < 1$. Pero $\phi^{-n} = U_n\phi - U_{n+1}$
   Luego, $U_kU_n\phi < U_kU_{n+1} + 1$ ■

2. Como $\phi^{-1} = \phi - 1$, $U_kU_n\phi^{-1} = U_kU_n\phi - U_kU_n$

   Entonces,
   $$\begin{aligned}[U_kU_n\phi^{-1}] &= [U_kU_n\phi] - U_kU_n \\ &= U_kU_{n+1} - U_kU_n \\ &= U_kU_{n-1} \quad ■\end{aligned}$$

Teorema 2.2.7

Sea n un par y supongamos que $U_k \leq U_{n+1}$. Entonces:

1. $[U_k U_n \phi] = U_k U_{n+1} - 1$
2. $[U_k U_n \phi^{-1}] = U_k U_{n-1} - 1$

Demostración

1. Bastará demostrar que $U_k U_{n+1} - 1 < U_k U_n \phi < U_k U_{n+1}$. En efecto,

   ► Se tiene que $U_k \leq U_{n+1} < \phi^n$ (teorema 2.2.1)
   Luego, $U_k \phi^{-n} < 1$. Pero $\phi^{-n} = U_{n+1} - U_n \phi$ (teorema 1.6.2-3)
   Por tanto, $U_k U_{n+1} - 1 < U_k U_n \phi$ ■

   ► $U_n \phi < U_{n+1}$, pues n es par (teorema 2.2.1)
   Luego, $U_k U_n \phi < U_k U_{n+1}$ ■

2. Como $\phi^{-1} = \phi - 1$, $U_k U_n \phi^{-1} = U_k U_n \phi - U_k U_n$

   Entonces,
$$\begin{aligned}[U_k U_n \phi^{-1}] &= [U_k U_n \phi] - U_k U_n \\ &= U_k U_{n+1} - 1 - U_k U_n \\ &= U_k U_{n-1} - 1 \quad ■\end{aligned}$$

Teorema 2.2.8

Sea k un entero del intervalo $0 \leq k \leq n+1$, n un entero positivo.

1. *Si n es impar,* $[U_n \phi^k] = U_{n+k}$
2. *Si n es par,* $[U_n \phi^k] = U_{n+k} - 1$

En particular,

$$[U_n \phi^n] = \begin{cases} U_{2n} & , \textit{si } n \textit{ es impar} \\ U_{2n} - 1 & , \textit{si } n \textit{ es par} \end{cases}$$

Demostración

1. Es claro que $U_k \leq U_{n+1}$.

   Por otra parte, $U_n \phi^k = U_k U_n \phi + U_{k-1} U_n$ (teorema 1.6.2-1)

   Luego,
$$\begin{aligned}[U_n \phi^k] &= [U_k U_n \phi] + U_{k-1} U_n = U_k U_{n+1} + U_{k-1} U_n \quad \text{(teorema 2.2.6-1)} \\ &= U_k (U_{n-1} + U_n) + (U_{k+1} - U_k) U_n \\ &= U_k U_{n-1} + U_{k+1} U_n = U_{n+k} \quad \text{(teorema 1.2.4)} \quad ■\end{aligned}$$

2. La demostración es análoga ■

Teorema 2.2.9

Sea k *un entero del intervalo* $0 \leq k \leq n$, n *un entero positivo*

$$[U_n\phi^{-k}] = \begin{cases} U_{n-k} & \text{, si } n \text{ y } k \text{ son de la misma paridad} \\ U_{n-k} - 1 & \text{, si } n \text{ y } k \text{ son de distinta paridad} \end{cases}$$

En particular, $[U_n\phi^{-n}] = 0$, *sea* n *par o impar.*

Demostración

► Supongamos que n y k son de la misma paridad.

Caso 1: n y k impares ($\phi^{-k} = U_k\phi - U_{k+1}$, teorema 1.6.2-2)

Entonces, $U_n\phi^{-k} = U_kU_n\phi - U_{k+1}U_n$

Luego,
$$\begin{aligned}[U_n\phi^{-k}] &= [U_kU_n\phi] - U_{k+1}U_n \\ &= U_kU_{n+1} - U_{k+1}U_n \quad \text{(teorema 2.2.6)} \\ &= U_{n-k} \quad \text{(teorema 1.2.5-1)} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Caso 2: n y k pares ($\phi^{-k} = U_{k+1} - U_k\phi$, teorema 1.6.2-3)

Entonces, $U_n\phi^{-k} = U_{k+1}U_n - U_kU_n\phi = U_{k+1}U_n + (-U_kU_n\phi)$

Luego,
$$\begin{aligned}[U_n\phi^{-k}] &= U_{k+1}U_n + [-U_kU_n\phi] = U_{k+1}U_n - (1 + [U_kU_n\phi]) \\ &= U_{k+1}U_n - (1 + U_kU_{n+1} - 1) \quad \text{(teorema 2.2.7)} \\ &= U_{n-k} \quad \text{(teorema 1.2.5-2)} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

► Si n y k son de distinta paridad, la demostración es análoga ■

► Demostremos ahora que $[U_n\phi^{-n}] = 0$, sea n par o impar.

En efecto, $0 \leq U_n\phi^{-n}$

Por otra parte, $U_n \leq U_{n+1} < \phi^n$, para cualquier n (teorema 2.2.1)

Luego, $U_n\phi^{-n} < 1$

De manera que $0 \leq U_n\phi^{-n} < 1$

Por tanto, $[U_n\phi^{-n}] = 0$ ■

Obsérvese que definiendo $k = n$ (y por tanto n y k tienen la misma paridad), encontraremos directamente la igualdad anterior ■

Veámos un ejemplo de cómo aplicar los teoremas 2.2.8 y 2.2.9:

▷ Sabiendo que $U_{15} = 610$, encontrar U_8 y U_{25}

Necesitaremos los valores: $\phi^{-7} \approx 0.034442$ y $\phi^{10} \approx 122.991870$

$U_8 = [U_{15}\phi^{-7}] = [21.009620] = 21$, que coincide con el valor real.

$U_{25} = [U_{15}\phi^{10}] = [75025.0407] = 75025$, que coincide con el valor real.

El hecho de que no pueda calcularse mediante el teorema 2.2.8 ningún **número de Fibonacci** superior a U_{2n+1}, en base a U_n, no es, desde luego, ninguna tragedia; pues la aplicación *sucesiva* de 2.2.8 permite el cálculo de U_m para $m > 2n+1$. Por ejemplo:

▷ Calcular U_{30}, sabiendo que $U_{10} = 55$

Primero encontremos un **número de Fibonacci** *intermedio*, digamos U_{15} :

$U_{15} = 1 + [U_{10}\phi^5] = 1 + [55(11.09017)] = 1 + [609.95935] = 610$

Ahora pasemos de U_{15} a U_{30} :

$U_{30} = [U_{15}\phi^{15}] = [610(1364.0007)] = [832040.4270] = 832040$

Observemos, por otra parte, que la fórmula del teorema 1.2.8

$$U_{3n} = 5U_n^3 + 3(-1)^n U_n$$

se presta justamente para calcular U_{30} en términos de U_{10} :

$$U_{30} = 5U_{10}^3 + 3U_{10} = 5(166375) + 3(55) = 831875 + 165 = 832040$$

Es preciso señalar que una pequeña discrepancia entre dos aproximaciones para una misma **potencia áurea**, puede conducir a resultados diferentes. Por ejemplo:

▷ Calcular U_{30}, conocido $U_{20} = 6765$

Se tiene que $U_{30} = 1 + [6765\phi^{10}]$

1. Tomando el valor $\phi^{10} = 122.99187$, encontraremos que
   $U_{30} = 1 + [832040.00055] = 832041$, que, como se observa, está excedido en una unidad.
2. Tomando el valor $\phi^{10} = 122.9918$, encontraremos que
   $U_{30} = 1 + [832039.5270] = 832040$, que coincide con el valor antes calculado.

Nótese que la diferencia entre los dos valores tomados para ϕ^{10} es tan sólo de siete cienmilésimas. (En realidad, el valor $\phi^{10} = 122.99187$ tiene excedida su quinta cifra decimal.)

En resumen: conocido uno cualquiera de los elementos de la **sucesión de Fibonacci**, puede encontrarse cualquier otro, multiplicándolo por un factor *adecuado*. Este factor es una **potencia áurea**, que presentará exponente positivo o negativo, según el elemento que quiera calcularse sea mayor o menor que éste.

De acuerdo a lo anterior, es lícito afirmar que ϕ ***es el factor de oro asociado a la sucesión de Fibonacci***.

Pasemos a enunciar algunos teoremas relacionados con la parte decimal de las **potencias áureas**:

Teorema 2.2.10

Para valores impares de n, ϕ^n y ϕ^{-n} tienen la misma parte decimal.

Esto es,

$$[\![\phi^{2n-1}]\!] = \phi^{-(2n-1)}$$

Más aún,

$$\lim_{n\to\infty} [\![\phi^{2n-1}]\!] = 0$$

Demostración

De acuerdo con el teorema 2.2.3, $[\![\phi^n]\!] = \phi^n - (U_{n-1} + U_{n+1})$

Pero $U_{n-1} + U_{n+1} = \phi^n - \phi^{-n}$ (teorema 1.6.6-1)

Luego, $[\![\phi^n]\!] = \phi^{-n}$, si n es impar ■

De manera que $\lim\limits_{n\to\infty} [\![\phi^n]\!] = \lim\limits_{n\to\infty} \phi^{-n} = 0$ ■

Este teorema tiene una singular consecuencia:

Teorema 2.2.11

Si n es impar, $\phi^n [\![\phi^n]\!] = 1$

Esto es, para cualquier entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\phi^{2n-1} [\![\phi^{2n-1}]\!] = 1$$

Demostración

Se sigue inmediatamente del teorema 2.2.10 ■

Teorema 2.2.12

Para valores pares de n, las partes decimales de ϕ^n y ϕ^{-n} suman la unidad.

Esto es,

$$[\![\phi^{2n}]\!] + \phi^{-2n} = 1$$

Más aún,

$$\lim_{n\to\infty} [\![\phi^{2n}]\!] = 1$$

Demostración

De acuerdo con el teorema 2.2.3, $[\![\phi^n]\!] = \phi^n - (U_{n-1} + U_{n+1} - 1)$

Pero $U_{n-1} + U_{n+1} = \phi^n + \phi^{-n}$ (teorema 1.6.6-2)

Luego, $[\![\phi^n]\!] + \phi^{-n} = 1$, si n es par ■

De manera que $\lim_{n\to\infty} [\![\phi^n]\!] = \lim_{n\to\infty} (1 - \phi^{-n}) = 1$ ■

En consecuencia, tenemos el siguiente

Teorema 2.2.13

Si n es par, $\phi^n[\![\phi^n]\!] = \phi^n - 1$

Esto es, para cualquier entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\phi^{2n}[\![\phi^{2n}]\!] = \phi^{2n} - 1$$

Demostración

Se sigue inmediatamente del teorema 2.2.12 ■

Resumiendo: el producto de una potencia áurea por su respectiva *parte decimal*, o bien es la unidad, o bien la propia potencia disminuída en la unidad, según se trate de potencia con exponente impar o par, respectivamente.

Teorema 2.2.14

Sea k un entero del intervalo $0 \leq k \leq n+1$, n un entero positivo.

1. *Si n es impar, $\phi^n[\![U_n\phi^k]\!] = U_k$*

2. *Si n es par, $\phi^n(1 - [\![U_n\phi^k]\!]) = U_k$*

En particular, están contenidas las igualdades obvias

$$\phi[\![\phi]\!] = 1 \qquad (n = 1,\ k = 1)$$

$$\phi[\![\phi^2]\!] = 1 \qquad (n = 1,\ k = 2)$$

(Obsérvese que ϕ^{-1}, ϕ y ϕ^2 presentan la misma parte decimal)

Demostración

1. De acuerdo con el teorema 2.2.8,

$$\begin{aligned}
[\![U_n\phi^k]\!] &= U_n\phi^k - U_{n+k} \\
&= U_n(U_k\phi + U_{k-1}) - (U_kU_{n-1} + U_{k+1}U_n) \qquad \text{(teoremas 1.6.2-1 y 1.2.4)} \\
&= U_k(U_n\phi - U_{n-1}) - (U_{k+1} - U_{k-1})U_n \\
&= U_k(U_n\phi - U_{n-1}) - U_kU_n \\
&= U_k(U_n\phi - U_{n-1} - U_n) \\
&= U_k(U_n\phi - U_{n+1}) \\
&= U_k\phi^{-n} \qquad \text{(teorema 1.6.2-2)} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2. La demostración es análoga. ■

Teorema 2.2.15

Sea k *un entero del intervalo* $0 \leq k \leq n$, n *un entero positivo.*

1. *Si* n *y* k *son de la misma paridad,* $\phi^n[\![U_n\phi^{-k}]\!] = U_k$

2. *Si* n *y* k *son de distinta paridad,* $\phi^n(1 - [\![U_n\phi^{-k}]\!]) = U_k$

Demostración

► Supongamos que n y k son de la misma paridad.

Caso 1: n y k impares

$$\begin{aligned}
[\![U_n\phi^{-k}]\!] &= U_n\phi^{-k} - U_{n-k} \qquad \text{(teorema 2.2.9)} \\
&= U_n(U_k\phi - U_{k+1}) - (U_kU_{n+1} - U_{k+1}U_n) \qquad \text{(teoremas 1.6.2-2 y 1.2.5-1)} \\
&= U_k(U_n\phi - U_{n+1}) \\
&= U_k\phi^{-n} \qquad \text{(teorema 1.6.2-2)} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Caso 2: n y k pares

$$\begin{aligned}
[\![U_n\phi^{-k}]\!] &= U_n\phi^{-k} - U_{n-k} \qquad \text{(teorema 2.2.9)} \\
&= U_n(U_{k+1} - U_k\phi) - (U_{k+1}U_n - U_kU_{n+1}) \qquad \text{(teoremas 1.6.2-3 y 1.2.5-2)} \\
&= U_k(U_{n+1} - U_n\phi) \\
&= U_k\phi^{-n} \qquad \text{(teorema 1.6.2-3)} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

► Si n y k son de distinta paridad, la demostración es análoga ■

Teorema 2.2.16

Para todo entero no negativo n, $[\![\phi^n]\!] = [\![U_n\phi^{-1}]\!]$

Demostración

► Sea n un impar. En tal caso:

$$\begin{aligned}
[\![U_n\phi^{-1}]\!] &= U_n\phi^{-1} - [U_n\phi^{-1}] = U_n\phi^{-1} - U_{n-1} \quad \text{(teorema 2.2.5)}\\
&= U_n(\phi - 1) - U_{n-1} = U_n\phi - U_{n+1} = \phi^{-n} \quad \text{(teorema 1.6.2-2)}\\
&= [\![\phi^n]\!] \quad \text{(teorema 2.2.11)} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

► Sea n un par. En tal caso:

$$\begin{aligned}
[\![U_n\phi^{-1}]\!] &= U_n\phi^{-1} - [U_n\phi^{-1}] = U_n\phi^{-1} - U_{n-1} + 1 \quad \text{(teorema 2.2.5)}\\
&= U_n(\phi - 1) - U_{n-1} + 1 = 1 - (U_{n+1} - U_n\phi) = 1 - \phi^{-n} \quad \text{(teorema 1.6.2-3)}\\
&= \frac{\phi^n - 1}{\phi^n} = \frac{\phi^n[\![\phi^n]\!]}{\phi^n}\\
&= [\![\phi^n]\!] \quad \text{(teorema 2.2.13)} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Terminemos con el siguiente

Teorema 2.2.17

Para valores impares de n, $\phi^n[\![\phi^{2n}]\!] = U_{n-1} + U_{n+1}$

Demostración

En virtud del teorema 2.2.12, $[\![\phi^{2n}]\!] = 1 - \phi^{-2n}$

Luego, $\phi^n[\![\phi^{2n}]\!] = \phi^n - \phi^{-n} = U_{n-1} + U_{n+1}$ (teorema 1.6.6-1) $\blacksquare$

2.3 Cálculo de números de Fibonacci con índices grandes

La definición recursiva de la sucesión de **Fibonacci** claramente se presta para el cálculo de sus elementos mediante un computador.

No se pretende aquí construir ningún algoritmo electrónicamente ejecutable (el diseño de uno de ellos sería un tarea trivial incluso para un principiante). En lugar de esto, proponemos un discreto formulario, razonablemente práctico, para el cálculo de **números de Fibonacci** con índices grandes.

De primera instancia, es evidente la utilidad de las siguientes fórmulas:[4]

1. $U_{2n-1} = U_{n-1}^2 + U_n^2$
2. $U_{2n} = U_{n+1}^2 - U_{n-1}^2$
3. $U_{2n+1} = U_n^2 + U_{n+1}^2$
4. $U_{3n} = 5U_n^3 + 3(-1)^n U_n$
5. $U_{5n} = 25U_n^5 + 25(-1)^n U_n^3 + 5U_n$
6. $U_{n+k} = U_k U_{n-1} + U_{k+1} U_n$

Para efecto de los siguientes ejemplos, supondremos conocidos los primeros diez **números de Fibonacci** (y solamente ellos):

► Calcular el término U_{35}

Haciendo $n = 7$ en la fórmula 5, encontramos directamente que

$$U_{35} = 25U_7^5 - 25U_7^3 + 5U_7 = 25(371'293) - 25(2'197) + 5(13) = 9'227'465$$

► Calcular el término U_{46}

Haciendo $n = 4$ y $n = 8$ en la fórmula 4, encontramos que

$$U_{12} = 5U_4^3 + 3U_4 = 5(27) + 3(3) = 144$$

$$U_{24} = 5U_8^3 + 3U_8 = 5(9'261) + 3(21) = 46'368$$

Ahora hágase $n = 11$ en la fórmula 2, para obtener

$$U_{22} = U_{12}^2 - U_{10}^2 = 20'736 - 3'025 = 17'711$$

Por último, aplicando nuevamente la fórmula 2 para $n = 23$, encontramos que

$$U_{46} = U_{24}^2 - U_{22}^2 = 2'149'991'424 - 313'679'521 = 1'836'311'903$$

[4] Todas ellas fueron demostradas a lo largo del Apartado 1.2 (Primera Parte).

► Calcular el término U_{49}

Haciendo $n = 9$ en la fórmula 5, encontramos que

$U_{45} = 25U_9^5 - 25U_9^3 + 5U_9 = 25(45'435'424) - 25(39'304) + 5(34) = 1'134'903'170$

Por otra parte, de acuerdo con el ejercicio anterior, $U_{46} = 1'836'311'903$

Definiendo entonces $n = 46$ y $k = 3$ en la fórmula 6, encontramos que

$U_{49} = U_3U_{45} + U_4U_{46} = 2(1'134'903'170) + 3(1'836'311'903) = 7'778'742'049$

► Calcular el término U_{72}

Haciendo $n = 10$ en la fórmula 1 y $n = 9$ en la fórmula 2, encontramos que

$U_{19} = U_9^2 + U_{10}^2 = 1'156 + 3'025 = 4'181$

$U_{18} = U_{10}^2 - U_8^2 = 3'025 - 441 = 2'584$

Ahora hágase $n = 18$ en la fórmula 3, para obtener

$U_{37} = U_{18}^2 + U_{19}^2 = 6'677'056 + 17'480'761 = 24'157'817$

Por otra parte, de acuerdo con el primer ejercicio, $U_{35} = 9'227'465$

Definiendo entonces $n = 36$ en la fórmula 2, encontramos que

$U_{72} = U_{37}^2 - U_{35}^2 = (U_{37} - U_{35})(U_{37} + U_{35}) = (14'930'352)(33'385'282) = 498'454'011'879'264$

La igualdad 6 anteriormente enlistada permite deducir una serie de fórmulas prácticas para el cálculo de **números de Fibonacci** con índices grandes, supuesto conocidos los primeros diez. Son las siguientes:

6.1	Si $10 \leq n < 20$, $U_n = 34U_{n-10}$	$+ 55U_{n-9}$
6.2	Si $20 \leq n < 30$, $U_n = 4'181U_{n-20}$	$+ 6'765U_{n-19}$
6.3	Si $30 \leq n < 40$, $U_n = 514'229U_{n-30}$	$+ 832'040U_{n-29}$
6.4	Si $40 \leq n < 50$, $U_n = 63'245'986U_{n-40}$	$+ 102'334'155U_{n-39}$
6.5	Si $50 \leq n < 60$, $U_n = 7'778'742'049U_{n-50}$	$+ 12'586'269'025U_{n-49}$

....

En todas estas fórmulas, la variable entera n está acotada inferior y superiormente. En realidad, la cota superior no es de ningún modo necesaria, sólo tiene la función de restringir el cálculo de los **números de Fibonacci** en términos de los primeros diez (los cuales pueden fácilmente memorizarse).

Quiere decirse que, en particular, la fórmula 6.3 es válida para cualquier entero $n \geq 30$

Resultaría sano que el lector demostrara la validez de estas fórmulas y extendiera la lista tanto como pueda.

Veamos algunos ejemplos:

- Calcular el término U_{25}

  En virtud de 6.2, se tiene que

  $U_{25} = 4'181U_5 + 6'765U_6 = 20'905 + 54'120 = 75'025$

- Calcular el término U_{33}

  En virtud de 6.3, se tiene que

  $U_{33} = 514'229U_3 + 832'040U_4 = 1'028'458 + 2'496'120 = 3'524'578$

- Calcular el término U_{45}

  En virtud de 6.4, se tiene que

  $U_{45} = 63'245'986U_8 + 102'334'155U_9 = 1'328'165'706 + 3'479'361'270 = 4'807'526'976$

Para terminar con este breve apartado, se desea establecer una fórmula, razonablemente confiable, mediante la cual se pueda estimar el número de cifras que presentan los **números de Fibonacci.** Para ello enunciamos el siguiente

Teorema 2.3.1

U_n es el entero más próximo a $\phi^n/\sqrt{5}$

De hecho, (teorema 2.1.3), $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}} - U_n\right) = 0$

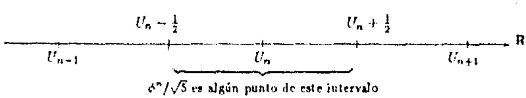
en donde $\phi^n/\sqrt{5} < U_n$ si n es impar, y $\phi^n/\sqrt{5} > U_n$ si n es par.

Demostración

De acuerdo con el teorema 1.6.5, $\left|\dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}} - U_n\right| = \dfrac{1}{\sqrt{5}\phi^n} < \dfrac{1}{2}$

Luego, $U_n - \dfrac{1}{2} < \dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}} < U_n + \dfrac{1}{2}$

Esto es,



Por tanto, U_n es el entero más próximo a $\phi^n/\sqrt{5}$ ■

Sea x un real positivo.

Denotemos con $\#(x)$, *el número de cifras enteras* del real x (escrito en sistema decimal).

Por ejemplo: $\#(60.3) = 2$, $\#(\sqrt{5}) = 1$, $\#(10^4) = 5$

Se demuestra que, en general, $\#(x) = 1 + [\log_{10} x]$, si $x > 0$, en donde los corchetes denotan *la parte entera.*

Por ejemplo:

- $\#(5) = 1 + [\log_{10} 5] = 1 + [0.6989\ldots] = 1 + 0 = 1$
- $\#(10\pi) = 1 + [\log_{10} 10\pi] = 1 + [1 + \log_{10} \pi] = 1 + 1 + 0 = 2$
- $\#(10^m) = 1 + [\log_{10} 10^m] = 1 + [m]$

  En particular:

  1. Si m es un entero no negativo, $\#(10^m) = m + 1$
  2. Si $n - 1 < m < n$ (n un entero positivo), $\#(10^m) = n$
     Por ejemplo: $\#(10^{\sqrt{2}}) = 2$, pues $1 < \sqrt{2} < 2$, (de hecho, $10^{\sqrt{2}} = 25.954553\ldots$)

Haciendo $x = U_n$, $(n > 0)$, en la igualdad

$$\#(x) = 1 + [\log_{10} x]$$

obtenemos: $\#(U_n) = 1 + [\log_{10} U_n]$

Por otra parte, U_n es *el entero más próximo a* $\phi^n/\sqrt{5}$. Más aún, U_n es *asintóticamente igual a* $\phi^n/\sqrt{5}$ (esto significa que al aumentar el valor de n, la diferencia $\phi^n/\sqrt{5} - U_n$ se aproxima cada vez más fuertemente a cero).

Sustituyendo U_n por $\phi^n/\sqrt{5}$, obtenemos la fórmula

$$\boxed{\#(U_n) \approx 1 + [0.20898764(n) - 0.349485001]}$$

la cual estima *el número de cifras* de U_n en términos del índice n

Pasemos a estudiar algunos ejemplos:

- Estimar el número de cifras del término U_{45}

  $\#(U_{45}) = 1 + [0.20898764(45) - 0.349485001] = 1 + [9.0519558799] = 1 + 9 = 10$

  De hecho, $U_{45} = 1'134'903'170$
- Estimar el número de cifras del término U_{50}

  $\#(U_{50}) = 1 + [0.20898764(50) - 0.349485001] = 1 + [10.099897] = 1 + 10 = 11$

  De hecho, $U_{50} = 12'586'269'025$

► Estimar el número de cifras del término U_{100}

$\#(U_{100}) = 1 + [0.20898764(100) - 0.349485001] = 1 + [20.549279] = 1 + 20 = 21$

De hecho, $U_{100} = 354'224'848'179'261'915'075$ (¡verifíquelo!)

Nótese hasta aquí la confiabilidad del procedimiento.

► Encontrar todos los números de Fibonacci con exactamente 100 cifras decimales.

Se quiere que $99 = \#(U_n) - 1 = [0.20898764(n) - 0.349485001]$

Luego, $99 < 0.20898764(n) - 0.349485001 < 100$

Entonces, $475.3845012 < n < 480.1694732$

Por tanto, $n \in \{476, 477, 478, 479, 480\}$

De manera que $U_{476}, U_{477}, U_{478}, U_{479}$ y U_{480} son los términos buscados.

► Hallar el más pequeño y el más grande de los números de Fibonacci con exactamente 10 cifras decimales.

Resolviendo $9 = \#(U_n) - 1 = [0.20898764(n) - 0.349485001]$

obtenemos la desigualdad, $9 < 0.20898764(n) - 0.349485001 < 10$

es decir, $44.73702369 < n < 49.52199565$

de donde, $n \in \{45, 46, 47, 48, 49\}$

Luego, U_{45} y U_{49} son los términos buscados.

De hecho, U_{44} tiene 9 cifras decimales, mientras que U_{50} tiene 11

► Encontrar un número de Fibonacci par, con exactamente 209 cifras decimales.

Resolviendo $208 = \#(U_n) - 1 = [0.20898764(n) - 0.349485001]$

obtenemos la desigualdad, $208 < 0.20898764(n) - 0.349485001 < 209$

es decir, $996.9464462 < n < 1001.731418$

de donde $n \in \{997, 998, 999, 1000, 1001\}$

Luego, U_{999} es el término buscado (nótese que 999 es el único múltiplo de 3).

2.4 Desarrollos en fracción continua simple infinita de las potencias áureas

Observemos cuidadosamente la curiosa cadena de igualdades siguiente:

$$\frac{105}{38} = 2+\frac{29}{38} = 2+\cfrac{1}{\frac{38}{9}} = 2+\cfrac{1}{1+\frac{9}{29}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{29}{9}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\frac{2}{9}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{9}{2}}}}$$

$$\frac{105}{38} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}$$

La última expresión obtenida es el **desarrollo en fracción continua simple finita (D.F.C.S.F.)** del racional 105/38

De manera semejante, se obtiene que

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}}$$

es el **D.F.C.S.F.** del racional 149/44 (¡verifíquelo!)

Formalmente, una **fracción continua simple finita**, es toda expresión racional de la forma

$$q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{1}{q_4+\ddots_{\,q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}}}$$

en donde la sucesión de denominadores parciales $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots, q_{n-1}, q_n$ son todos enteros positivos, excepto quizás el entero q_0, que es *la parte entera de la fracción.*

Utilizaremos en lo sucesivo la expresión $\langle q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots, q_{n-1}, q_n\rangle$, para designar la forma racional anterior.

En esta notación, los resultados obtenidos se escriben:

- $\dfrac{105}{38} = \langle 2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 2\rangle$
- $\dfrac{149}{44} = \langle 3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3\rangle$

Supongamos que $\dfrac{p}{q} = \langle q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4, \ldots,\ q_{n-1},\ q_n\rangle$

Para cada entero k del intervalo $0 \leq k \leq n$, se define w_k, el **k–ésimo convergente**, mediante la igualdad

- $w_k = \langle q_0,\ q_1,\ q_2, \ldots,\ q_k\rangle$

Así, para el desarrollo $105/38 = \langle 2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 2\rangle$, tenemos que

- $w_0 = \langle 2\rangle = 2$ (convergente cero)
- $w_1 = \langle 2,\ 1\rangle = 3$ (primer convergente)
- $w_2 = \langle 2,\ 1,\ 3\rangle = 11/4$ (segundo convergente)
- $w_3 = \langle 2,\ 1,\ 3,\ 4\rangle = 47/17$ (tercer convergente)
- $w_4 = \langle 2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 2\rangle = 105/38$ (cuarto convergente)

Se observa que, en general, el último convergente corresponde al propio racional, mientras que el convergente cero corresponde *a su parte entera*. Consecuentemente, *la parte decimal* está dada por $\langle q_0,\ q_1,\ q_2, \ldots,\ q_n\rangle$, que es el resto del desarrollo.

Es de nuestro particular interés extender el concepto de *fracción continua* simple al caso infinito:

Se demuestra en la Teoría de Números que los convergentes en un desarrollo continuado satisfacen las desigualdades estrictas

- $w_0 < w_2 < w_4 < w_6 < \ldots < w_1$
- $w_1 > w_3 > w_5 > w_7 > \ldots > w_0$

Además, • $w_{k+1} - w_k$ tiende a cero (alternadamente), conforme k aumenta.

De lo anterior se concluye que la sucesiones de convergentes, de índice par y de índice impar, tienen el mismo límite.

De esta manera, puede enunciarse la siguiente

Definición 2.4.1

Sea $q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots$ una sucesión infinita de enteros positivos, excepto quizás el entero q_0.

Definimos la **fracción continua simple infinita** correspondiente, escrita $\langle q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots \rangle$, mediante el siguiente límite:

$$\langle q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots \rangle = \lim_{n \to \infty} w_n$$

en donde w_n, el n**−ésimo convergente**, está dado por

$$w_n = \langle q_0, q_1, q_2, q_3 \ldots, q_n \rangle$$

Un caso muy especial se da cuando la sucesión infinita $q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots$ presenta aspecto periódico.

Esto es, cuando existe en la sucesión un conjunto finito de términos consecutivos que se repite continuamente.

Utilizaremos en tal caso una barra para indicar el periodo.

Así, escribiremos:

$$\begin{aligned} \langle 3, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots \rangle &= \langle 3, \overline{1, 2} \rangle = \langle 3, 1, \overline{2, 1} \rangle \\ \langle 5, 2, 3, 5, 2, 3, 5, 2, 3, \ldots \rangle &= \langle \overline{5, 2, 3} \rangle = \langle 5, \overline{2, 3, 5} \rangle \end{aligned}$$

Un resultado de importancia en la Teoría de Números establece que toda fracción continua simple infinita necesariamente converge a un irracional, el cual será raíz de una ecuación polinomial cuadrática con coeficientes enteros, si y solamente si la fracción continua es periódica.

Estudiemos un par de ejemplos:

▶ Hallar el valor de $\langle 1, \overline{2} \rangle = \langle 1, 2, 2, 2, \ldots \rangle$

Calculando los primeros convergentes, encontramos que

$w_0 = 1$

$w_1 = 1 + \dfrac{1}{2} = 1 + \dfrac{1}{1 + w_0}$

$w_2 = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{1 + w_1}$

$w_3 = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2}}} = 1 + \dfrac{1}{1 + w_2}$

...

En general, se demuestra por inducción que

$w_n = 1 + \dfrac{1}{1 + w_{n-1}}$

Si hacemos $L = \lim\limits_{n \to \infty} w_n$, encontramos que $L = 1 + \dfrac{1}{1 + L}$ $\quad (L > 1)$,
de donde $L = \sqrt{2}$

De manera que

$$\langle 1,\ \overline{2}\rangle = \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$$

Nótese que el convergente cero, $w_0 = 1$, corresponde *a la parte entera* de $\sqrt{2}$, de modo que *su parte decimal* está dada por el resto del desarrollo.

De hecho, si $x = \langle q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots\rangle$, $[x] = q_0$ y $[\![x]\!] = \langle q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots\rangle$

▸ **Hallar el desarrollo en fracción continua simple infinita (D.F.C.S.I.) de $\sqrt{5}$**

Se cuenta con la igualdad $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) = 1$

Luego, $\sqrt{5} = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$

Haciendo sustituciones iteradas, encontramos que

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\sqrt{5}+2}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\sqrt{5}+2}}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\sqrt{5}+2}}}} = \ldots$$

Por tanto, hemos encontrado que

$$\sqrt{5} = \langle 2,\ 4,\ 4,\ 4, \ldots\rangle = \langle 2,\ \overline{4}\rangle$$

Un resultado general se establece en el siguiente

Teorema 2.4.1

Para todo entero positivo n, $\sqrt{n^2+1} = \langle n,\ \overline{2n}\rangle$

Demostración

En efecto, de acuerdo con la identidad $(\sqrt{n^2+1}+n)(\sqrt{n^2+1}-n) = 1$ encontramos que

$$\sqrt{n^2+1} = n + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

Efectuando sucesivamente la sustitución obvia, encontramos que

$$\sqrt{n^2+1} = n + \cfrac{1}{2n + \cfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}} = n + \cfrac{1}{2n + \cfrac{1}{2n + \cfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}}} = \ldots$$

De manera que $\sqrt{n^2+1} = \langle n,\ 2n,\ 2n, \ldots\rangle = \langle n,\ \overline{2n}\rangle$ ∎

El objetivo de este apartado es encontrar el **D.F.C.S.I.** de las **potencias áureas**.

El resultado siguiente no puede ser más bello:

Teorema 2.4.2

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

Demostración

Sea $L = \langle \overline{1} \rangle$ (nótese que $L > 1$)

Demostremos que $L = \phi$

En efecto, esto es muy sencillo:

$$L = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}} = 1 + \frac{1}{L}$$

Luego, L satisface la ecuación cuadrática $L^2 - L - 1 = 0$

Así pues, $L = \phi$, como quería demostrarse ∎

Ahora bien, dado que $\phi^2 = 1 + \phi$ y $\phi^{-1} = \phi - 1$, se tiene que

$$\phi^2 = \langle 2, \overline{1} \rangle \qquad y \qquad \phi^{-1} = \langle 0, \overline{1} \rangle$$

Para generalizar el teorema anterior, esto es, para generar el **D.F.C.S.I.** de cualquier **potencia áurea**, son necesarios algunos resultados preliminares. Son los siguientes:

Teorema 2.4.3

Sea m un entero positivo.

En tal caso, los irracionales

$x_1 = \langle \overline{m} \rangle \qquad y \qquad x_2 = -\langle 0, \overline{m} \rangle$

satisfacen la ecuación cuadrática

$x^2 - mx - 1 = 0$

Demostración

Demostremos que $x_1 + x_2 = m$ y $x_1 x_2 = -1$

En efecto, sea $\xi = (\overline{m})$

Es claro que $x_2 = -\dfrac{1}{x_1}$ (y de ahí que $x_1 x_2 = -1$)

Luego, $x_1 + x_2 = x_1 - \dfrac{1}{x_1} = \xi - \dfrac{1}{\xi} = \left(m + \dfrac{1}{\xi}\right) - \dfrac{1}{\xi} = m$ ∎

Teorema 2.4.4

Sea m un entero mayor que la unidad.

En tal caso, los irracionales

$x_1 = (m, \overline{1, m-1})$ y $x_2 = (0, m, \overline{1, m-1})$

satisfacen la ecuación cuadrática

$x^2 - (m+1)x + 1 = 0$

Demostración

Demostremos que $x_1 + x_2 = m + 1$ y $x_1 x_2 = 1$

Sea

$$\xi = (\overline{1, m-1}) = 1 + \cfrac{1}{(m-1) + \cfrac{1}{\xi}}$$

Entonces, $m\xi + 1 = [(m-1)\xi + 1]\xi$

Por otra parte, se observa que

$$x_1 = m + \frac{1}{\xi} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{\xi}} = \frac{1}{x_1} \qquad (\text{y de ahí que } x_1 x_2 = 1)$$

De manera que

$$x_1 + x_2 = m + \frac{1}{\xi} + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{\xi}} = m + \frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{m\xi + 1} = m + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{(m-1)\xi + 1}$$

$$= m + \frac{m\xi + 1}{[(m-1)\xi + 1]\xi} = m + 1 \qquad ∎$$

Teorema 2.4.5

Sea n un impar positivo.

En tal caso, los irracionales

$x_1 = \phi^n$ *y* $x_2 = -\phi^{-n}$

satisfacen la ecuación cuadrática

$x^2 - (U_{n-1} + U_{n+1})x - 1 = 0$

Demostración

Es evidente que $x_1 x_2 = -1$

Por otra parte, de acuerdo con el teorema 1.6.6-1, se tiene que

$$x_1 + x_2 = \phi^n - \phi^{-n} = U_{n-1} + U_{n+1} \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.4.6

Sea n un par positivo

En tal caso, los irracionales

$x_1 = \phi^n$ *y* $x_2 = \phi^{-n}$

satisfacen la ecuación cuadrática

$x^2 - (U_{n-1} + U_{n+1})x + 1 = 0$

Demostración

Es completamente análoga a la anterior $\blacksquare$

Se tienen pues los elementos suficientes para generar el **D.F.C.S.I.** de cualquier **potencia áurea**:

Teorema 2.4.7

Sea n un entero positivo.

1. *Si n es impar,* $\phi^n = (\overline{U_{n-1} + U_{n+1}})$ *y* $\phi^{-n} = (0, \overline{U_{n-1} + U_{n+1}})$
2. *Si n es par,* $\phi^n = (U_{n-1} + U_{n+1} - 1, \overline{1, U_{n-1} + U_{n+1} - 2})$ *y*
$$\phi^{-n} = (0, U_{n-1} + U_{n+1} - 1, \overline{1, U_{n-1} + U_{n+1} - 2})$$

En otros términos (teorema 2.2.3):

1. *Si n es impar,* $\phi^n = (\overline{[\phi^n]})$ *y* $\phi^{-n} = (0, \overline{[\phi^n]})$
2. *Si n es par,* $\phi^n = ([\phi^n], \overline{1, [\phi^n] - 1})$ *y* $\phi^{-n} = (0, [\phi^n], \overline{1, [\phi^n] - 1})$

Demostración

Dada la similitud de las demostraciones, ofrecemos solamente la prueba del inciso 1.

Haciendo $m = U_{n-1} + U_{n+1}$ en el enunciado del teorema 2.4.3, encontramos que los irracionales

$$x_1 = \langle \overline{U_{n-1} + U_{n+1}} \rangle \qquad y \qquad x_2 = -\langle 0, \overline{U_{n-1} + U_{n+1}} \rangle$$

satisfacen la ecuación cuadrática

$$x^2 - (U_{n-1} + U_{n+1})x - 1 = 0$$

Pero, por otra parte, de acuerdo con el teorema 2.4.5, ϕ^n y $-\phi^{-n}$ también satisfacen esta ecuación.

Por tanto, debe ocurrir que $\phi^n = \langle \overline{U_{n-1} + U_{n+1}} \rangle$ y $\phi^{-n} = \langle 0, \overline{U_{n-1} + U_{n+1}} \rangle$ ∎

A continuación presentamos el D.F.C.S.I. de las primeras diez potencias áureas:

$$\phi^1 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}} \qquad \phi^2 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

$$\phi^3 = 4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}} \qquad \phi^4 = 6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \ddots}}}}$$

$$\phi^5 = 11 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{11 + \ddots}}}} \qquad \phi^6 = 17 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16 + \ddots}}}}$$

$$\phi^7 = 29 + \cfrac{1}{29 + \cfrac{1}{29 + \cfrac{1}{29 + \cfrac{1}{29 + \ddots}}}} \qquad \phi^8 = 46 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{45 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{45 + \ddots}}}}$$

$$\phi^9 = 76 + \cfrac{1}{76 + \cfrac{1}{76 + \cfrac{1}{76 + \cfrac{1}{76 + \ddots}}}} \qquad \phi^{10} = 122 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{121 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{121 + \ddots}}}}$$

Con esto hemos cumplido con el propósito fundamental de este apartado.

Ahora regresemos al caso finito:

Teorema 2.4.8

Para todo entero positivo n, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \langle 1, 1, 1, \ldots, 1 \rangle$ *con exactamente* n *unidades.*

Consecuentemente, $\phi = \langle \overline{1} \rangle$

Demostración (Inducción sobre n)

- ► El resultado es trivial para $n = 1$
- ► Supongamos que para cierto entero positivo k, ocurre que

$$\frac{U_{k+1}}{U_k} = \langle 1, 1, 1, \ldots, 1 \rangle \qquad \text{con exactamente } k \text{ unidades.}$$

- ► Demostremos que $\dfrac{U_{(k+1)+1}}{U_{k+1}} = \langle 1, 1, 1, \ldots, 1 \rangle$ con exactamente $(k+1)$ unidades.

En efecto,

$$\langle \underbrace{1, 1, 1, 1, \ldots, 1}_{(k+1) \text{ términos}} \rangle = 1 + \frac{1}{\langle \underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{k \text{ términos}} \rangle} = 1 + \frac{U_k}{U_{k+1}} = \frac{U_k + U_{k+1}}{U_{k+1}} = \frac{U_{k+2}}{U_{k+1}} \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.4.9

Para todo entero positivo n, $\dfrac{U_{n+2}}{U_n} = \langle 2, 1, 1, 1, \ldots, 1 \rangle$ *con exactamente* $(n-1)$ *unidades.*

Consecuentemente, $\phi^2 = \langle 2, \overline{1} \rangle$

Demostración

$$\langle 2, \underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{(n-1) \text{ términos}} \rangle = 2 + \frac{1}{\langle \underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{(n-1) \text{ términos}} \rangle} = 2 + \frac{1}{\dfrac{U_n}{U_{n-1}}} \qquad \text{(teorema anterior)}$$

$$= 2 + \frac{U_{n-1}}{U_n} = \frac{U_n + (U_{n-1} + U_n)}{U_n} = \frac{U_n + U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_{n+2}}{U_n} \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.4.10

Sea t un entero positivo $(t = 1, 2, 3, \ldots)$

1. *Si* $n = 3t$, $\dfrac{U_{n+3}}{U_n} = \langle 4, 4, 4, \ldots, 4 \rangle$ *con exactamente t cuatros.*
2. *Si* $n = 3t+1$, $\dfrac{U_{n+3}}{U_n} = \langle 4, 4, 4, \ldots, 4, 3 \rangle$ *con exactamente t cuatros.*
3. *Si* $n = 3t+2$, $\dfrac{U_{n+3}}{U_n} = \langle 4, 4, 4, \ldots, 4, 5 \rangle$ *con exactamente t cuatros.*

Consecuentemente, $\phi^3 = \langle \bar{4} \rangle$

Demostración (Inducción sobre t)

1. Supongamos que $n = 3t$ $(t = 1, 2, 3, \ldots)$

   ► Si $t = 1$ $(n = 3)$, $\dfrac{U_{n+3}}{U_n} = \dfrac{U_6}{U_3} = \dfrac{8}{2} = 4 = \langle 4 \rangle$

   Luego, la afirmación es válida para $t = 1$

   ► Supongamos ahora que para $t = k$ $(n = 3k)$, ocurre que
$$\frac{U_{n+3}}{U_n} = \frac{U_{3k+3}}{U_{3k}} = \langle 4, 4, 4, \ldots, 4 \rangle \quad \text{con exactamente } k \text{ cuatros}$$

   ► Demostremos que
$$\frac{U_{3k+6}}{U_{3k+3}} = \langle 4, 4, 4, 4, \ldots, 4 \rangle \quad \text{con exactamente } (k+1) \text{ cuatros}$$

   En efecto,
$$\langle \underbrace{4, 4, 4, 4, \ldots, 4}_{(k+1)\text{ términos}} \rangle = 4 + \frac{1}{\langle \underbrace{4, 4, 4, \ldots, 4}_{k\text{ términos}} \rangle} = 4 + \frac{U_{3k}}{U_{3k+3}} = \frac{4\,U_{3k+3} + U_{3k}}{U_{3k}}$$

   Por otra parte, se observa que
$$\begin{aligned} U_{3k+6} - 4\,U_{3k+3} &= U_{3k+4} + U_{3k+5} - 4\,U_{3k+3} = U_{3k+2} - 2\,U_{3k+3} + U_{3k+4} \\ &= U_{3k} + U_{3k+1} - 2(U_{3k+1} + U_{3k+2}) + U_{3k+2} + U_{3k+3} \\ &= U_{3k} - (U_{3k+1} + U_{3k+2}) + U_{3k+3} = U_{3k} \end{aligned}$$

   Luego,
$$4\,U_{3k+3} + U_{3k} = U_{3k+6}$$

   De manera que $\langle \underbrace{4, 4, 4, 4, \ldots, 4}_{(k+1)\text{ términos}} \rangle = \dfrac{U_{3k+6}}{U_{3k}}$ ∎

2. Supongamos que $n = 3t + 1 \qquad (t = 1, 2, 3, \ldots)$

- Si $t = 1 \qquad (n = 4), \qquad \dfrac{U_{n+3}}{U_n} = \dfrac{U_7}{U_4} = \dfrac{13}{3} = 4 + \dfrac{1}{3} = \langle 4, 3 \rangle$

  Luego, la afirmación es válida para $t = 1$

- Supongamos ahora que para $t = k \qquad (n = 3k + 1)$, ocurre que

$$\frac{U_{n+3}}{U_n} = \frac{U_{3k+4}}{U_{3k+1}} = \langle 4, 4, 4, \ldots, 4, 3 \rangle \qquad \text{con exactamente } k \text{ cuatros.}$$

- Demostremos que

$$\frac{U_{3k+7}}{U_{3k+4}} = \langle 4, 4, 4, 4, \ldots 4, 3 \rangle \qquad \text{con exactamente } (k+1) \text{ cuatros.}$$

  En efecto,

$$\underbrace{\langle 4, 4, 4, 4, \ldots, 4, 3 \rangle}_{(k+1) \text{ términos}} = 4 + \cfrac{1}{\underbrace{\langle 4, 4, 4, \ldots, 4, 3 \rangle}_{k \text{ términos}}} = 4 + \frac{U_{3k+1}}{U_{3k+4}} = \frac{4\,U_{3k+4} + U_{3k+1}}{U_{3k+4}}$$

  Por otra parte, se observa que

$$\begin{aligned} U_{3k+5} &= U_{3k+3} + U_{3k+4} = U_{3k+1} + 2U_{3k+2} + U_{3k+3} \\ &= U_{3k-1} + (U_{3k} + U_{3k+1}) + 2U_{3k+2} + U_{3k+2} = U_{3k-1} + 4U_{3k+2} \end{aligned}$$

  Pero, $\quad 4U_{3k+4} + U_{3k+1} = 4(U_{3k+2} + U_{3k+3}) + (U_{3k-1} + U_{3k})$

$$= (U_{3k-1} + 4U_{3k+2}) + (4U_{3k+3} + U_{3k})$$

  Luego, $\quad 4\,U_{3k+4} + U_{3k+1} = U_{3k+5} + U_{3k+6} = U_{3k+7}$

  De manera que $\underbrace{\langle 4, 4, 4, 4, \ldots, 4, 3 \rangle}_{(k+1) \text{ términos}} = \dfrac{U_{3k+7}}{U_{3k+4}} \qquad \blacksquare$

3. La demostración es análoga $\quad \blacksquare$

Teorema 2.4.11

Sea t un entero positivo $(t = 1, 2, 3, \ldots)$

1. *Si* $n = 5t, \qquad \dfrac{U_{n+5}}{U_n} = \langle 11, 11, 11, \ldots, 11 \rangle$ *con exactamente t onces.*
2. *Si* $n = 5t + 1, \quad \dfrac{U_{n+5}}{U_n} = \langle 11, 11, 11, \ldots, 11, 6 \rangle$ *con exactamente t onces.*
3. *Si* $n = 5t + 2, \quad \dfrac{U_{n+5}}{U_n} = \langle 11, 11, 11, \ldots, 11, 13 \rangle$ *con exactamente t onces.*
4. *Si* $n = 5t + 3, \quad \dfrac{U_{n+5}}{U_n} = \langle 11, 11, 11, \ldots, 11, 10, 2 \rangle$ *con exactamente t onces.*
5. *Si* $n = 5t + 4, \quad \dfrac{U_{n+5}}{U_n} = \langle 11, 11, 11, 11, \ldots, 11, 3 \rangle$ *con exactamente $(t+1)$ onces.*

Consecuentemente, $\phi^5 = \langle \overline{11} \rangle$

Demostración (Inducción sobre t)

A manera de ilustración, demostraremos únicamente las igualdades 1. y 4.

1. Supongamos que $n = 5t \quad (t = 1, 2, 3, \ldots)$

► Si $t = 1 \quad (n = 5)$, $\quad \dfrac{U_{n+5}}{U_n} = \dfrac{U_{10}}{U_5} = \dfrac{55}{5} = 11 = \langle 11 \rangle$

Luego, la afirmación es válida para $t = 1$

► Supongamos ahora que para $t = k \quad (n = 5k)$, ocurre que

$$\frac{U_{n+5}}{U_n} = \frac{U_{5k+5}}{U_{5k}} = \langle 11, 11, 11, \ldots, 11 \rangle \qquad \text{con exactamente } k \text{ onces.}$$

► Demostremos que

$$\frac{U_{5k+10}}{U_{5k+5}} = \langle 11, 11, 11, 11, \ldots, 11 \rangle \qquad \text{con exactamente } (k+1) \text{ onces.}$$

En efecto,

$$\langle \underbrace{11, 11, 11, 11, \ldots, 11}_{(k+1) \text{ términos}} \rangle = 11 + \frac{1}{\langle \underbrace{11, 11, 11, \ldots, 11}_{k \text{ términos}} \rangle} = 11 + \frac{U_{5k}}{U_{5k+5}} = \frac{11\, U_{5k+5} + U_{5k}}{U_{5k+5}}$$

Ahora bien, haciendo $k = 5$ en la fórmula 1 del teorema 1.2.6, obtenemos que

$$U_{n+5} - U_{n-5} = 11\, U_n \qquad (n \geq 5)$$

Sustituyendo n por $5k + 5$ en la igualdad anterior, encontramos que

$$U_{5k+10} = 11\, U_{5k+5} + U_{5k}$$

De manera que $\langle \underbrace{11, 11, 11, 11, \ldots, 11}_{(k+1) \text{ términos}} \rangle = \dfrac{U_{5k+10}}{U_{5k+5}}$ ∎

4. Supongamos que $n = 5t + 3 \quad (t = 1, 2, 3, \ldots)$

► Si $t = 1 \quad (n = 8)$, $\quad \dfrac{U_{n+5}}{U_n} = \dfrac{U_{13}}{U_8} = \dfrac{233}{21} = 11 + \dfrac{2}{21} = 11 + \dfrac{1}{10 + \dfrac{1}{2}} = \langle 11, 10, 2 \rangle$

Luego, la afirmación es válida para $t = 1$

► Supongamos ahora que para $t = k \quad (n = 5k + 3)$, ocurre que

$$\frac{U_{n+5}}{U_n} = \frac{U_{5k+8}}{U_{5k+3}} = \langle 11, 11, 11, \ldots, 11, 10, 2 \rangle \qquad \text{con exactamente } k \text{ onces}$$

► Demostremos que

$$\frac{U_{5k+13}}{U_{5k+8}} = \langle 11, 11, 11, 11, \ldots, 11, 10, 2 \rangle \qquad \text{con exactamente } (k+1) \text{ onces}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}(\underbrace{11,\ 11,\ 11,\ 11,\ldots,\ 11\ 10,\ 2}_{(k+1)\ \text{términos}}) &= 11+\frac{1}{(\underbrace{11,\ 11,\ 11,\ldots,\ 11,\ 10,\ 2}_{k\ \text{términos}})}\\ &= 11+\frac{U_{5k+3}}{U_{5k+8}}=\frac{11\,U_{5k+8}+U_{5k+3}}{U_{5k+8}}\end{aligned}$$

Ahora bien, haciendo $n = 5k+8$ en la fórmula

$$U_{n+5} - U_{n-5} = 11\,U_n \qquad (n \geq 5)$$

obtenemos que $U_{5k+13} = 11\,U_{5k+8} + U_{5k+3}$

De manera que $(\underbrace{11,\ 11,\ 11,\ 11,\ldots,\ 11}_{(k+1)\ \text{términos}},\ 10,\ 2) = \dfrac{U_{5k+13}}{U_{5k+8}}$ ∎

Los siguientes y últimos teoremas permiten encontrar las partes **entera y decimal** del cociente

$$U_{n+k}/U_n$$

Teorema 2.4.12

Sea k un impar. En tal caso, para cualquier entero $n \geq k$, se tiene que

$$\left[\frac{U_{n+k}}{U_n}\right] = U_{k-1} + U_{k+1} \qquad y \qquad \left[\!\left[\frac{U_{n+k}}{U_n}\right]\!\right] = \frac{U_{n-k}}{U_n}$$

Demostración

De acuerdo con el teorema 1.2.4, $\dfrac{U_{n+k}}{U_n} = U_k\left(\dfrac{U_{n-1}}{U_n}\right) + U_{k+1}$

Luego,

$$\left[\frac{U_{n+k}}{U_n}\right] = \left[U_k\left(\frac{U_{n-1}}{U_n}\right)\right] + U_{k+1}$$

Ahora demostremos que $\left[U_k\left(\dfrac{U_{n-1}}{U_n}\right)\right] = U_{k-1}$

Para conseguir esto, bastará demostrar que $U_{k-1} \leq U_k\left(\dfrac{U_{n-1}}{U_n}\right) < U_{k-1} + 1$

ó, equivalentemente, $U_{k-1}U_n \leq U_kU_{n-1} < U_{k-1}U_n + U_n$

Y, en efecto, de acuerdo con el teorema 1.2.5-1, se tiene que

$$\begin{aligned}0 \leq U_{n-k} &= U_kU_{n+1} - U_{k+1}U_n\\ &= U_kU_{n+1} - U_kU_n - U_{k+1}U_n + U_kU_n\\ &= U_k(U_{n+1} - U_n) - (U_{k+1} - U_k)U_n\\ &= U_kU_{n-1} - U_{k-1}U_n\end{aligned}$$

Por tanto, $U_{k-1}U_n \leq U_kU_{n-1}$ ∎

Ahora bien, como $U_{n-k} = U_k U_{n-1} - U_{k-1} U_n < U_n$, concluimos que

$$U_k U_{n-1} < U_{k-1} U_n + U_n \qquad \blacksquare$$

Por otra parte, dado que $[\![x]\!] = x - [x]$, encontramos que

$$\begin{aligned}
\left[\!\!\left[\frac{U_{n+k}}{U_n}\right]\!\!\right] &= \frac{U_{n+k}}{U_n} - (U_{k-1} + U_{k+1}) \\
&= \frac{U_{n+k} - (U_{k-1} + U_{k+1}) U_n}{U_n} \\
&= \frac{U_{n-k}}{U_n} \qquad \text{(teorema 1.2.6.-1)} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 2.4.13

Sea k un par. En tal caso, para cualquier entero $n \geq k+1$, se tiene que

$$\left[\frac{U_{n+k}}{U_n}\right] = U_{k-1} + U_{k+1} - 1 \qquad y \qquad \left[\!\!\left[\frac{U_{n+k}}{U_n}\right]\!\!\right] = 1 - \frac{U_{n-k}}{U_n}$$

Demostración

Es análoga a la anterior $\blacksquare$

2.5 π y el número de oro. Sumas y productos infinitos.

Con el auxilio de las funciones trigonométricas se establecen vínculos importantes entre el número de oro y el universal y no menos fascinante número π.

En particular se destacan las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\phi &= 2\cos(\pi/5) \\
\phi^3 &= \tan(2\pi/15)\tan(7\pi/15) = \tan(7\pi/30)\tan(13\pi/30) \\
\phi^{-3} &= \tan(\pi/10)\tan(\pi/5) = \tan(11\pi/30)\tan(\pi/30) \\
\sqrt{5} &= \tan(\pi/5)\tan(2\pi/5)
\end{aligned}$$

De hecho, se demostró en el teorema 1.1.13, que $\cos(\pi/5) = \phi/2$

Es de nuestro especial interés el extender la aplicación de las funciones trigonométricas sobre otros argumentos reales:

Teorema 2.5.1

Los valores de las funciones trigonométrica seno, coseno y tangente sobre los argumentos indicados, están contenidos en la tabla de la página 158.

Demostración

Dado que $\cos(\pi/5) = \phi/2$, se tiene que:

- $\operatorname{sen}(\pi/5) = \sqrt{1-\phi^2/4} = \frac{1}{2}\sqrt{4-\phi^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3-\phi}$ ■
- $\tan(\pi/5) = \frac{1}{2}\sqrt{3-\phi}/(\phi/2) = \sqrt{3-\phi}/\phi$ ■

Luego,

- $\operatorname{sen}(\pi/10) = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\phi/2)} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\phi} = 1/2\phi$ ■
- $\cos(\pi/10) = \sqrt{1-1/4\phi^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\phi^{-2}(4\phi^2-1)} = \frac{1}{2}\sqrt{\phi+2}$ ■
- $\tan(\pi/10) = (1/2\phi)/(\frac{1}{2}\sqrt{\phi+2}) = 1/\phi\sqrt{\phi+2}$ ■

Además,

- $\operatorname{sen}(\pi/20) = \sqrt{\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2}\sqrt{\phi+2})} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{\phi+2}}$ ■
- $\cos(\pi/20) = \sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{2}\sqrt{\phi+2})} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{\phi+2}}$ ■

	x	sen x	$\cos x$	$\tan x$
6°	$\frac{\pi}{30}$	$\frac{\sqrt{\phi+2}-\sqrt{3}}{\sqrt{\phi^2+\left(\sqrt{\phi+2}-\sqrt{3}\right)^2}}$	$\frac{\phi}{\sqrt{\phi^2+\left(\sqrt{\phi+2}-\sqrt{3}\right)^2}}$	$\frac{\sqrt{\phi+2}-\sqrt{3}}{\phi}$
9°	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{\phi+2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{\phi+2}}$	$\phi(2-\sqrt{\phi+2})$
12°	$\frac{\pi}{15}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\sqrt{\phi+2}+\sqrt{3}\,\phi\right)^2}}$	$\frac{\sqrt{\phi+2}+\sqrt{3}\phi}{\sqrt{1+\left(\sqrt{\phi+2}+\sqrt{3}\,\phi\right)^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\phi+2}+\sqrt{3}\,\phi}$
18°	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{1}{2\phi}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\phi+2}$	$\frac{1}{\phi\sqrt{\phi+2}}$
24°	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{\phi}{\sqrt{\phi^2+\left(\sqrt{\phi+2}+\sqrt{3}\right)^2}}$	$\frac{\sqrt{\phi+2}+\sqrt{3}}{\sqrt{\phi^2+\left(\sqrt{\phi+2}+\sqrt{3}\right)^2}}$	$\frac{\phi}{\sqrt{\phi+2}+\sqrt{3}}$
27°	$\frac{3\pi}{20}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3-\phi}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3-\phi}}$	$\frac{2-\sqrt{3-\phi}}{\phi}$
36°	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3-\phi}$	$\frac{\phi}{2}$	$\frac{\sqrt{3-\phi}}{\phi}$
42°	$\frac{7\pi}{30}$	$\frac{\sqrt{3}\phi-\sqrt{\phi+2}}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\phi-\sqrt{\phi+2}\right)^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\phi-\sqrt{\phi+2}\right)^2}}$	$\sqrt{3}\phi-\sqrt{\phi+2}$
48°	$\frac{4\pi}{15}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\phi-\sqrt{\phi+2}\right)^2}}$	$\frac{\sqrt{3}\phi-\sqrt{\phi+2}}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\phi-\sqrt{\phi+2}\right)^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}\phi-\sqrt{\phi+2}}$
54°	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\phi}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3-\phi}$	$\frac{\phi}{\sqrt{3-\phi}}$
63°	$\frac{7\pi}{20}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3-\phi}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3-\phi}}$	$\frac{2+\sqrt{3-\phi}}{\phi}$
66°	$\frac{11\pi}{30}$	$\frac{\sqrt{\phi+2}+\sqrt{3}}{\sqrt{\phi^2+\left(\sqrt{\phi+2}+\sqrt{3}\right)^2}}$	$\frac{\phi}{\sqrt{\phi^2+\left(\sqrt{\phi+2}+\sqrt{3}\right)^2}}$	$\frac{\sqrt{\phi+2}+\sqrt{3}}{\phi}$
72°	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\phi+2}$	$\frac{1}{2\phi}$	$\phi\sqrt{\phi+2}$
78°	$\frac{13\pi}{30}$	$\frac{\sqrt{\phi+2}+\sqrt{3}\phi}{\sqrt{1+\left(\sqrt{\phi+2}+\sqrt{3}\,\phi\right)^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\sqrt{\phi+2}+\sqrt{3}\,\phi\right)^2}}$	$\sqrt{\phi+2}+\sqrt{3}\,\phi$
81°	$\frac{9\pi}{20}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{\phi+2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{\phi+2}}$	$\phi(2+\sqrt{\phi+2})$
84°	$\frac{7\pi}{15}$	$\frac{\phi}{\sqrt{\phi^2+\left(\sqrt{\phi+2}-\sqrt{3}\right)^2}}$	$\frac{\sqrt{\phi+2}-\sqrt{3}}{\sqrt{\phi^2+\left(\sqrt{\phi+2}-\sqrt{3}\right)^2}}$	$\frac{\phi}{\sqrt{\phi+2}-\sqrt{3}}$

- $\tan(\pi/20) = \sqrt{(2-\sqrt{\phi+2})/((2+\sqrt{\phi+2})}$
$= \sqrt{(2-\sqrt{\phi+2})^2/((2+\sqrt{\phi+2})(2-\sqrt{\phi+2})}$
$= (2-\sqrt{\phi+2})/(\sqrt{\phi-2}) = \phi(2-\sqrt{\phi+2})$ ■

Nótese hasta aquí la aplicación de las identidades trigonométricas

- $\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x}\,, \qquad \cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$
- $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}(1-\cos x)}\,, \quad \cos\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\cos x)}$
- $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Por otra parte, a partir de la identidad

- $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

se demuestra que

- $\tan 3x = \tan x \tan(\pi/3 - x)\tan(\pi/3 + x)$

En particular, para $x = \pi/10$, se tiene que

- $\tan(3\pi/10) = \tan(\pi/10)\tan(7\pi/30)\tan(13\pi/30)$

en donde

- $\tan(\pi/10) = 1/\phi\sqrt{\phi+2}$ ■
- $\tan(3\pi/10) = 1/\tan(\pi/5) = \phi/\sqrt{3-\phi}$ ■

Por tanto,

- $\phi^3 = \tan(7\pi/30)\tan(13\pi/30) \qquad \text{(A)}$

Pero

- $\tan(13\pi/30) = \dfrac{\tan(7\pi/30)+\tan(\pi/5)}{1-\tan(7\pi/30)\tan(\pi/5)} = \dfrac{\tan(7\pi/30)+\dfrac{\sqrt{3-\phi}}{\phi}}{1-\dfrac{\sqrt{3-\phi}}{\phi}\tan(7\pi/30)}$

Sustituyendo esta última expresión en (A), se obtiene la igualdad

- $\phi^3 = \dfrac{\tan^2(7\pi/30)+\dfrac{\sqrt{3-\phi}}{\phi}\tan(7\pi/30)}{1-\dfrac{\sqrt{3-\phi}}{\phi}\tan(7\pi/30)}$

Definiendo $a = \phi^3$, $b = \sqrt{3-\phi}/\phi$ y $x = \tan(7\pi/30)$, la igualdad anterior toma la forma cuadrática

$$x^2 + b(a+1)x - a = 0$$

Resolviendo para x y sustituyendo los valores de las constantes a y b, encontraremos, después de una cuidadosa simplificación, que

- $\tan(7\pi/30) = \sqrt{3}\phi - \sqrt{\phi+2}$ $\blacksquare$

y de ahí que

- $\tan(13\pi/30) = \sqrt{3}\phi + \sqrt{\phi+2}$ $\blacksquare$

Ahora bien, haciendo $x = 7\pi/30$ en la identidad

- $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

obtendremos, después de algunas simplificaciones, que

- $\tan(7\pi/15) = \dfrac{\phi}{\sqrt{\phi+2}-\sqrt{3}}$ $\blacksquare$

Luego,

- $\tan(2\pi/15) = \dfrac{\phi}{\sqrt{\phi+2}+\sqrt{3}}$ $\blacksquare$

Los resultados complementarios se obtienen con suma facilidad a partir de las conocidas identidades

- $\operatorname{sen} x = \cos(\pi/2 - x)$
- $\cos x = \operatorname{sen}(\pi/2 - x)$
- $\tan x = 1/\tan(\pi/2 - x)$

y recordando que

- $\operatorname{sen} x = \dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$
- $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

De esta manera damos por concluída la demostración del teorema $\blacksquare$

Sustituyendo ϕ por $(1+5)/2$ en la expresión para $\operatorname{sen}(\pi/20)$, $\cos(3\pi/20)$ y $\tan(\pi/5)$ se obtienen los siguientes resultados :

- $\operatorname{sen}(\pi/20) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}$

- $\cos(3\pi/20) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}}$

- $\tan(\pi/5) = \dfrac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{1+\sqrt{5}}$

Nótese que 1,2 y 5 son enteros de Fibonacci.

Pasemos ahora a introducir el concepto de **producto infinito**.[5]

Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión de términos *positivos*.

Se define *el producto infinito* de los términos $a_1, a_2, a_3, \ldots$, escrito $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$, como

- $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k$

en donde $\prod_{k=1}^{n} a_k$, *el n−ésimo producto parcial*, está dado por

- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$

Cuando el límite anterior resulta ser un real *diferente de cero*, se dice que el producto infinito *converge*, en otro caso se dice *divergente*.

Por ejemplo, se puede demostrar que *el producto infinito* $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$ *converge* al racional 1/3, lo cual significa que 1/3 admite la representación infinita

- $\dfrac{1}{3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{5}{6}\right)\left(\dfrac{9}{10}\right)\left(\dfrac{14}{15}\right)\left(\dfrac{20}{21}\right)\cdots$

entendiendo esta última expresión *como un límite de productos parciales* y no como "un producto de infinitos factores".

Esto es, si P_n representa al n−ésimo producto parcial, $\dfrac{1}{3} = \lim_{n\to\infty} P_n$

[5] Para mayores referencias el lector deberá acudir a la bibliografía citada.

Obsérvese que, para este ejemplo en particular:

- $P_1 = (2/3) = 0.666\ldots$
- $P_2 = (2/3)(5/6) = 5/9 = 0.555\ldots$
- $P_3 = (2/3)(5/6)(9/10) = 1/2 = 0.5$
- $P_4 = (2/3)(5/6)(9/10)(14/15) = 7/15 = 0.4666\ldots$
- $P_5 = (2/3)(5/6)(9/10)(14/15)(20/21) = 4/9 = 0.444\ldots$
- $P_6 = (2/3)(5/6)(9/10)(14/15)(20/21)(27/28) = 9/21 = 0.428571\ldots$
- $P_7 = (2/3)(5/6)(9/10)(14/15)(20/21)(27/28)(35/36) = 5/12 = 0.41666\ldots$
- $P_8 = (2/3)(5/6)(9/10)(14/15)(20/21)(27/28)(35/36)(44/45) = 11/27 = 0.407407\ldots$
- $P_9 = (2/3)(5/6)(9/10)(14/15)(20/21)(27/28)(35/36)(44/45)(54/55) = 2/5 = 0.4$
- $P_{10} = (2/3)(5/6)(9/10)(14/15)(20/21)(27/28)(35/36)(44/45)(54/55)(65/66) = 13/33 = 0.3939\ldots$

Una condición *necesaria* (pero no *suficiente*) para que el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

converja, es que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ (esto ocurre en el ejemplo presentado).

Por otra parte, se demuestra que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1 \pm a_n)$ *converge* o *diverge* con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, para $0 \le a_n \le 1$

Un interesante resultado de la Variable Compleja es el desarrollo de la función $f(x) = x/\text{sen}\, x$ como producto infinito:

$$\text{(I)} \qquad \frac{x}{\text{sen}\, x} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2 - x^2}, \quad -\pi < x < \pi$$

que, valuada en $x = \pi/2$, produce la conocida fórmula de Wallis:

$$\text{(II)} \qquad \frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{16}{15}\right)\left(\frac{36}{35}\right)\left(\frac{64}{63}\right)\left(\frac{100}{99}\right)\cdots$$

En general, para $-k\pi < x < k\pi$ $(k > 1)$, se aplica la fórmula

$$\text{(III)} \qquad \frac{x}{\text{sen}\, x} = \prod_{n=1}^{k-1} \frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2 - x^2} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2 - x^2}$$

Se cuenta también con el producto infinito de Euler para la misma función:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cos(x/2^n)}$$

igualdad que, para $x = \pi/2$, produce la fórmula de Viete:

$$\text{(V)} \qquad \frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cos(\pi/2^{n+1})} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}} \cdots$$

Los próximos teoremas relacionarán a las constantes ϕ y π mediante los ***productos infinitos***:

Teorema 2.5.2

Se tienen los siguientes desarrollos:

1. $\dfrac{\pi\phi}{5} = \prod_{n=1}^{\infty} \dfrac{100n^2}{100n^2-1}$ 2. $\dfrac{9\pi\phi}{5} = \prod_{n=1}^{\infty} \dfrac{100n^2}{100n^2-81}$

3. $\dfrac{3\pi}{5\phi} = \prod_{n=1}^{\infty} \dfrac{100n^2}{100n^2-9}$ 4. $\dfrac{7\pi}{5\phi} = \prod_{n=1}^{\infty} \dfrac{100n^2}{100n^2-49}$

Demostración

Hágase $x = \pi/10,\ 9\pi/10,\ 3\pi/10,\ 7\pi/10$ en la fórmula (I) para obtener, respectivamente las igualdades 1, 2, 3 y 4

Debe observarse que $\begin{cases} \operatorname{sen}(\pi/10) = \operatorname{sen}(9\pi/10) = 1/2\phi \\ \operatorname{sen}(3\pi/10) = \operatorname{sen}(7\pi/10) = \phi/2 \end{cases}$ ∎

De manera que el irracional $\pi\phi/5 = 1.016640\ldots$ se extiende en producto como

- $$\frac{\pi\phi}{5} = \left(\frac{100}{99}\right)\left(\frac{400}{399}\right)\left(\frac{900}{899}\right)\left(\frac{1600}{1599}\right)\left(\frac{2500}{2499}\right)\left(\frac{3600}{3599}\right)\left(\frac{4900}{4899}\right)\left(\frac{6400}{6399}\right)\left(\frac{8100}{8099}\right)\left(\frac{10000}{9999}\right)\cdots$$

Los primeros diez convergentes de este desarrollo infinito son.

- $P_1 = \dfrac{100}{99} = 1.010101\ldots$
- $P_2 = \dfrac{40000}{39501} = 1.012632\ldots$
- $P_3 = \dfrac{4000000}{3945711} = 1.01378\ldots$
- $P_4 = \dfrac{6400000000}{6309191889} = 1.014392\ldots$

- $P_5 = \dfrac{16000000000000}{15766670530611} = 1.014798\ldots$
- $P_6 = \dfrac{6400000000000000}{6304916359963221} = 1.015080\ldots$
- $P_7 = \dfrac{640000000000000000}{630362964233873871} = 1.015288\ldots$
- $P_8 = \dfrac{4096000000000000000000}{4033692608132558900529} = 1.015446\ldots$
- $P_9 = \dfrac{409600000000000000000000}{403319462139081414017091} = 1.015572\ldots$
- $P_{10} = \dfrac{4096000000000000000000000000}{4032791301928675058756592009} = 1.015673\ldots$

El lector puede apreciar ahora cómo evoluciona este proceso.

Dividiendo las expresiones del teorema anterior, se encuentra que

- $\dfrac{1}{7}\phi^2 = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{100n^2-49}{100n^2-1}$
- $\dfrac{1}{3}\phi^2 = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{100n^2-9}{100n^2-1}$
- $\dfrac{9}{7}\phi^2 = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{100n^2-49}{100n^2-81}$
- $3\phi^2 = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{100n^2-9}{100n^2-81}$

Otro desarrollo en *producto infinito* para $\pi\phi/5$ se presenta en el siguiente

Teorema 2.5.3

Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *la sucesión definida recursivamente por*

$$a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{\phi+2}}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2+2a_n}$$

Se afirma que

$$\frac{\pi\phi}{5} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{\phi+2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\phi+2}}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\phi+2}}}}}\cdots$$

Demostración

A partir de la identidad $\cos(x/2) = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos x)}$, se demuestra por inducción que $a_n = \cos(\pi/(2^{n+1})5)$

Por otra parte, valuando en $x = \pi/10$ el producto infinito de Euler (IV), se obtiene que

$$\frac{\pi\phi}{5} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cos(\pi/(2^{n+1})5)}$$

que es lo que quería demostrarse ∎

Los valores decimales de los primeros cinco convergentes son los siguientes:

- $P_1 = 1.012465\ldots$
- $P_2 = 1.015595\ldots$
- $P_3 = 1.016379\ldots$
- $P_4 = 1.016575\ldots$
- $P_5 = 1.016624\ldots$

Nótese cómo el quinto producto parcial P_5 aproxima a $\pi\phi/5$ hasta el orden de las diezmilésimas.

Efectuemos ahora algunas manipulaciones aritméticas sobre los términos del producto infinito anterior:

- $$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2^5}(5+\sqrt{5})}}},$$

  en donde los exponentes 1 y 5 de las potencias de 2 pueden escribirse como

  $$1 = 2^1 - 1, \qquad 5 = 2^2 + 1$$

- $$\frac{1}{a_2} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2^3}+\sqrt{\frac{1}{2^9}(5+\sqrt{5})}}}},$$

  en donde los exponentes 1, 3 y 9 de las potencias de 2 pueden escribirse como

  $$1 = 2^1 - 1, \qquad 3 = 2^2 - 1, \qquad 9 = 2^3 + 1$$

- $$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2^3}+\sqrt{\frac{1}{2^7}+\sqrt{\frac{1}{2^{17}}(5+\sqrt{5})}}}}},$$

en donde los exponentes 1, 3, 7 y 17 de las potencias de 2 pueden escribirse como

$$1 = 2^1 - 1, \qquad 3 = 2^2 - 1, \qquad 7 = 2^3 - 1, \qquad 17 = 2^4 + 1$$

- En general, los exponentes de las potencias de 2 que figuran en el término $\dfrac{1}{a}$ son

$$2^1 - 1, \qquad 2^2 - 1, \qquad 2^3 - 1, \ldots, 2^n - 1, \qquad 2^{n+1} + 1$$

Lo anterior nos conduce al siguiente resultado:

Teorema 2.5.4

La constante $\pi\phi/5$ admite el siguiente desarrollo en producto infinito:

$$\frac{\pi\phi}{5} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2^3} + \sqrt{\frac{1}{2^7} + \ldots + \sqrt{\frac{1}{2^{2^n - 1}} + \sqrt{\frac{1}{2^{2^{n+1}+1}}(5 + \sqrt{5})}}}}}}$$

En particular, el denominador de la expresión bajo el signo de producto se aproxima a la unidad, al tender n hacia infinito.

Es posible también desarrollar la constante $\pi\phi/5$ mediante una serie infinita:

Teorema 2.5.5

La constante $\pi\phi/5$ admite el desarrollo en serie infinita

$$\frac{\pi\phi}{5} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{100n^2 - 1}$$

Demostración

La función $f(x) = \csc x$ tiene el desarrollo en serie

- $$\csc x = \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2 - n^2\pi^2}$$

Haciendo $x = \pi/10$ y observando que $\csc(\pi/10) = 2\phi$, encontramos el desarrollo indicado ■

De esta manera, $\pi\phi/5$ puede escribirse en la forma

- $$\frac{\pi\phi}{5} = 1 + 2\left(\frac{1}{99} - \frac{1}{399} + \frac{1}{899} - \frac{1}{1599} + \ldots\right)$$

En consecuencia

- $$[\![\pi\phi/5]\!] = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{100n^2-1}$$

....

Es bien común que el número π en combinación con otras constantes figure en cantidad de series de tipo armónico.

Sirvan de ejemplo las siguientes tres:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots = \frac{\pi}{4} \quad \text{(desarrollo de Leibniz)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = 1-\frac{1}{27}+\frac{1}{125}-\frac{1}{343}+\ldots = \frac{\pi^3}{32}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

Los siguientes teoremas contienen series de este tipo:

Teorema 2.5.6

Las series presentadas tienen el valor indicado:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100n^2-1} = \frac{10-\pi\phi\sqrt{\phi+2}}{20}$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{400n^2-1} = \frac{20-\pi\phi(2+\sqrt{\phi+2})}{40}$$

Demostración

1. La función $f(x)=\cot x$ tiene el desarrollo en serie

   - $$\cot x = \frac{1}{x}+2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2-n^2\pi^2}$$

   Haciendo $x=\pi/10$ y observando que $\cot(\pi/10)=\phi\sqrt{\phi+2}$, encontraremos el desarrollo indicado ■

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{400n^2-1} = -\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{100n^2-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n^2-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{(\pi\phi/5)-1}{2} - \frac{10-\pi\phi\sqrt{\phi+2}}{20}\right]$$

$$= \frac{10-\pi\phi\sqrt{\phi+2}}{40} - \frac{\pi\phi-5}{20} = \frac{20-\pi\phi(2+\sqrt{\phi+2})}{40} \qquad \blacksquare$$

(Obsérvese la aplicación de la igualdad 1. anterior y del teorema 2.2.5)

Teorema 2.5.7

El cuadrado de la constante $\pi\phi/5$ admite el desarrollo en serie infinita

$$\frac{\pi^2\phi^2}{25} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(10n-9)^2} + \frac{1}{(10n-1)^2}\right]$$

Esto es,

$$\frac{\pi^2\phi^2}{25} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{19^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{29^2} + \cdots$$

Demostración

La función $f(x) = \csc^2 x$ tiene el desarrollo en serie

- $$\csc^2 x = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{[x+(n-1)\pi]^2} + \frac{1}{(x-n\pi)^2}\right\}$$

Haciendo $x = \pi/10$ y observando que $\csc^2(\pi/10) = 4\phi^2$, encontramos que

$$4\phi^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{100}{\pi^2(10n-9)^2} + \frac{100}{\pi^2(10n-1)^2}\right]$$

Esto es,

$$\frac{\pi^2\phi^2}{25} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(10n-9)^2} + \frac{1}{(10n-1)^2}\right] \qquad \blacksquare$$

Terminemos este apartado con el siguiente

Teorema 2.5.8

Se tienen los siguientes desarrollos:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(10n-8)^2}+\frac{1}{(10n-2)^2}\right]=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{18^2}+\frac{1}{22^2}+\frac{1}{28^2}+\ldots=\frac{\pi^2\phi^2}{25(\phi+2)}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(10n-7)^2}+\frac{1}{(10n-3)^2}\right]=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{17^2}+\frac{1}{23^2}+\frac{1}{27^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{25\phi^2}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(10n-6)^2}+\frac{1}{(10n-4)^2}\right]=\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{24^2}+\frac{1}{26^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{25(\phi+2)}$$

Demostración

Hágase $x = \pi/5,\ 3\pi/10,\ 2\pi/5$ en el desarrollo para la función $f(x) = \csc^2 x$ para obtener, respectivamente, las igualdades 1,2 y 3 ∎

Nótese que para $x = \pi/2$, se obtiene el conocido desarrollo de $\pi^2/8$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$$

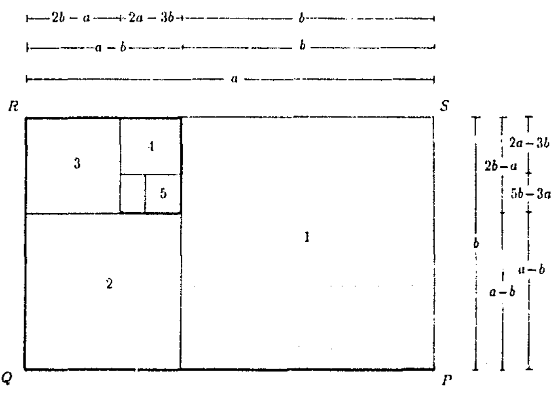
2.6 La espiral áurea

Queremos terminar esta tesis tal y como la iniciamos, esto es, con un apartado esencialmente geométrico.

Sea $PQRS$ un rectángulo áureo de lados a y b $(a/b = \phi)$

De acuerdo con el teorema 1.1.11, este rectángulo puede ser dividido en dos partes: un cuadrado perfecto y un rectángulo interior *también áureo*. Este último puede, a su vez, ser dividido de igual manera, de suerte tal que este proceso puede extender *sin límite*.[6]

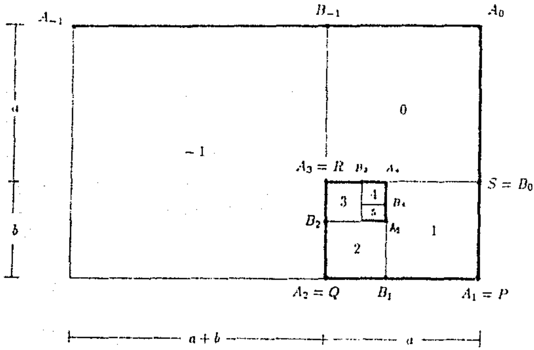
La figura siguiente muestra las etapas iniciales de este proceso de divisiones sucesivas:



Observe que la ubicación de los cuadrados responde al principio:
"derecha-abajo-izquierda-arriba"

[6]Si el rectángulo $PQRS$ dado *no es áureo*, el proceso *puede ser finito*. Considérese, por ejemplo, los rectángulos de lados U_{n+1} y U_n.

Es claro que el proceso anteriormente explicado puede desarrollarse regresivamente, inscribiendo el rectángulo $PQRS$ en otro *también áureo*, de manera que resulte *un cuadrado perfecto* complementario. Las dos primeras etapas de esta regresión se ilustran a continuación:



Note ahora que la ubicación de los cuadrados responde al criterio "*arriba-izquierda-abajo-derecha*" (regresivamente el principio dispositivo anterior)

Respecto a la nomenclatura de esta figura, se establece la siguiente

Definición 2.6.1

A la poligonal infinita $\ldots A_{-3}\ A_{-2}\ A_{-1}\ A_0\ A_1\ A_2\ A_3 \ldots$ la denominaremos **espiral áurea rectangular**.

Además, para cada entero arbitrario n: γ_n denotará el lado del n-ésimo cuadrado, ε_n denotará la longitud del segmento rectilíneo $\overline{A_n A_{n+1}}$, σ_n designará la longitud total de la espiral, tomada desde el vértice A_n hacia su interior, mientras que σ'_n representará la longitud de la espiral medida a partir del punto B_n

Teorema 2.6.1

Para cualquier valor entero de la variable n, se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $\gamma_n = a\phi^{-n}$
2. $\varepsilon_n = \phi\gamma_n = a\phi^{1-n}$
3. $\sigma_n = \phi^2\varepsilon_n = a\phi^{3-n}$
4. $\sigma'_n = 2\varepsilon_n = 2a\phi^{1-n}$

Demostración

Hagamos $\gamma_n = ax^{-n}$, en donde x es un real positivo por determinar.

De acuerdo con el proceso constructivo de la espiral, resulta claro que

$$\gamma_{n+2} = \gamma_n - \gamma_{n+1}$$

Por ejemplo, es fácil verificar que

$\gamma_0 = \gamma_{-2} - \gamma_{-1}$	(véase en horizontal)
$\gamma_1 = \gamma_{-1} - \gamma_0$	(véase en vertical)
$\gamma_2 = \gamma_0 - \gamma_1$	(véase en horizontal)
$\gamma_3 = \gamma_1 - \gamma_2$	(véase en vertical)

De esta forma, se encuentra que x satisface la ecuación

$$ax^{-(n+2)} = ax^{-n} - ax^{-(n+1)}$$

ó, equivalentemente, $x^2 - x - 1 = 0$ (de donde $x = \phi$)

Luego, hemos encontrado que $\gamma_n = a\phi^{-n}$ ■

De esta manera, resulta que $\varepsilon_n = \gamma_n + \gamma_{n+1} = (\phi^{-1} + 1)a\phi^{-n} = \phi\gamma_n = a\phi^{1-n}$ ■

La igualdad 3 la demostraremos por inducción:

- La fórmula es válida para el valor n=1

  En efecto, $\sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \sum_{n=1}^{\infty} a\phi^{1-n} = a\phi \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{-n}$

  Pero, de acuerdo con el teorema 2.1.6, $\sum_{n=1}^{\infty} \phi^{-n} = \phi$. Luego, $\sigma_1 = a\phi^2$

- Supongamos que, para cierto entero k, $\sigma_k = a\phi^{3-k}$

► Demostremos ahora que $\sigma_{k+1} = a\phi^{2-k}$ y que $\sigma_{k-1} = a\phi^{4-k}$

En efecto:

$\sigma_{k+1} = \sigma_k - \varepsilon_k = a\phi^{3-k} - a\phi^{1-k} = a\phi^{2-k}(\phi - \phi^{-1}) = a\phi^{2-k}$ ∎

$\sigma_{k-1} = \sigma_k + \varepsilon_{k-1} = a\phi^{3-k} + a\phi^{2-k} = a\phi^{4-k}(\phi^{-1} + \phi^{-2}) = a\phi^{4-k}$ ∎

Para demostrar 4, basta con observar que $\sigma'_n = \sigma_{n+1} + \gamma_{n+1}$ ∎

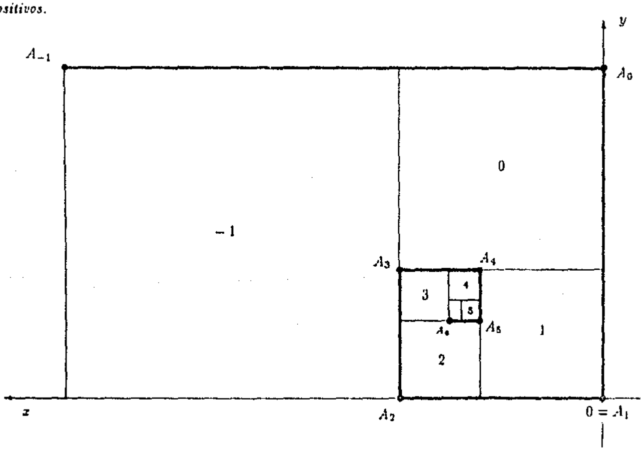
Teorema 2.6.2

Los vértices A_i de la espiral áurea rectangular están todos contenidos en un par de rectas perpendiculares, una de las cuales contiene a los vértices con índice impar y la otra a los vértices con índice par.

Más aún, el centro de la espiral[7] *es el punto de intersección de estas rectas.*

Demostración

Asumiremos, por comodidad, que los semiejes $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ indicados en la figura, son los semiejes *positivos.*



[7]Como "centro" debe entenderse el punto límite hacia el cual la sucesión de vértices converge. Utilizaremos el símbolo A_∞ para designarlo.

Respecto a este sistema encontramos, al desarrollar la espiral, que

- $A_1 = (0,\, 0)$
- $A_2 = (\varepsilon_1,\, 0)$
- $A_3 = (\varepsilon_1,\, \varepsilon_2)$
- $A_4 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3,\, \varepsilon_2)$
- $A_5 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3,\, \varepsilon_2 - \varepsilon_4)$
- $A_6 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_5,\, \varepsilon_2 - \varepsilon_4)$
- $A_7 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_5,\, \varepsilon_2 - \varepsilon_4 + \varepsilon_6)$
- $A_8 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_5 - \varepsilon_7,\, \varepsilon_2 - \varepsilon_4 + \varepsilon_6)$

....

- $A_{2n+1} = \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\varepsilon_{2k-1},\, \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\varepsilon_{2k}\right) \qquad (n \geq 0)$
- $A_{2n} = \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\varepsilon_{2k-1},\, \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\varepsilon_{2k}\right) \qquad (n \geq 1)$

- $A_{-1} = (\varepsilon_{-1},\, \varepsilon_0)$
- $A_0 = (0,\, \varepsilon_0)$
- $A_{-3} = (\varepsilon_{-1} - \varepsilon_{-3},\, \varepsilon_0 - \varepsilon_{-2})$
- $A_{-2} = (\varepsilon_{-1},\, \varepsilon_0 - \varepsilon_{-2})$
- $A_{-5} = (\varepsilon_{-1} - \varepsilon_{-3} + \varepsilon_{-5},\, \varepsilon_0 - \varepsilon_{-2} + \varepsilon_{-4})$
- $A_{-4} = (\varepsilon_{-1} - \varepsilon_{-3},\, \varepsilon_0 - \varepsilon_{-2} + \varepsilon_{-4})$

....

- $A_{-(2n-1)} = \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\varepsilon_{-(2k-1)},\, \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\varepsilon_{-2(k-1)}\right) \qquad (n \geq 0)$
- $A_{-2n} = \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\varepsilon_{-(2k-1)},\, \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\varepsilon_{-2(k-1)}\right) \qquad (n \geq 0)$

La recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por los puntos A_1 y A_3 tiene por ecuación: $\phi^{-1}x - y = 0$

La recta $\mathcal{L}_2$ que pasa por los puntos A_0 y A_2 tiene por ecuación: $\phi x + y = a\phi$

(obsérvese que estas rectas son perpendiculares)

▶ Demostremos que los puntos A_{2n+1} $(n \geq 0)$, están todos contenidos en $\mathcal{L}_1$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\varepsilon_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\varepsilon_{2k} &= \phi^{-1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a\phi^{2-2k} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a\phi^{1-2k} \\
&= a\phi\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\phi^{-2k} - a\phi\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\phi^{-2k} = 0 \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

▶ Demostremos que los puntos $A_{-(2n-1)}$ $(n \geq 0)$, están todos contenidos en $\mathcal{L}_1$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\varepsilon_{-(2k-1)} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\varepsilon_{-2(k-1)} &= \phi^{-1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a\phi^{2k} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a\phi^{2k-1} \\
&= a\phi^{-1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\phi^{2k} - a\phi^{-1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\phi^{2k} = 0 \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

▶ Demostremos que los puntos A_{2n} $(n \geq 1)$, están todos contenidos en $\mathcal{L}_2$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\phi\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\varepsilon_{2k-1} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\varepsilon_{2k} &= \phi\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a\phi^{2-2k} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a\phi^{1-2k} - (-1)^{n+1}\varepsilon_{2n} \\
&= a\phi(\phi+2)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\phi^{-2k} - (-1)^{n+1}a\phi^{1-2n}
\end{aligned}$$

Por otra parte, se puede demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\phi^{-2k} = \frac{1+(-1)^{n+1}\phi^{-2n}}{\phi+2}$$

(Hágase $x = -\phi^{-2}$ en la fórmula indicada en el teorema 1.6.10 y multiplíquese numerador y denominador de la expresión obtenida por ϕ^2)

De manera que

$$\begin{aligned}
\phi\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\varepsilon_{2k-1} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\varepsilon_{2k} &= a\phi\left[1+(-1)^{n+1}\phi^{-2n}\right] - (-1)^{n+1}a\phi^{1-2n} \\
&= a\phi + (-1)^{n+1}a\phi^{1-2n} - (-1)^{n+1}a\phi^{1-2n} = a\phi \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

▶ Demostremos que los puntos A_{-2n} $(n \geq 0)$, están todos contenidos en $\mathcal{L}_2$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\phi\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\varepsilon_{-(2k-1)} + \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\varepsilon_{-2(k-1)} &= \phi\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a\phi^{2k} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a\phi^{2k-1} + (-1)^{n}\varepsilon_{-2n} \\
&= a\phi(2\phi-1)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\phi^{2k} + (-1)^{n}a\phi^{1+2n}
\end{aligned}$$

Pero

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\phi^{2k} = \frac{1+(-1)^{n+1}\phi^{2n}}{3-\phi}$$

(Hágase $x = -\phi^2$ en la misma fórmula, multiplique ahora por ϕ^{-2})

Luego,

$$
\begin{aligned}
\phi\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\varepsilon_{-(2k-1)}+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\varepsilon_{-2(k-1)} &= \frac{a(2\phi-1)\left[1+(-1)^{n+1}\phi^{2n}\right]}{3-\phi}+(-1)^{n}a\phi^{1+2n} \\
&= \frac{a\phi(2\phi-1)\left[1+(-1)^{n+1}\phi^{2n}\right]}{\phi(3-\phi)}+(-1)^{n}a\phi^{1+2n} \\
&= a\phi\left[1+(-1)^{n+1}\phi^{2n}\right]-(-1)^{n+1}a\phi^{1+2n} \\
&= a\phi+(-1)^{n+1}a\phi^{1+2n}-(-1)^{n}a\phi^{1+2n}=a\phi \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Con lo anterior hemos demostrado que los vértices $\ldots A_{-5},\ A_{-3},\ A_{-1},\ A_1,\ A_3,\ A_5,\ldots$ están todos contenidos en la recta $y=\phi^{-1}x$ (respecto al sistema de ejes escogido) y que los vértices $\ldots A_{-6},\ A_{-4},\ A_{-2},\ A_0,\ A_2,\ A_4,\ A_6,\ldots$ están todos contenidos en la recta $y=-\phi x+a\phi$ (respecto al mismo sistema).

Resulta sencillo demostrar que el punto $\left(\frac{a\phi}{\sqrt{5}},\ \frac{a}{\sqrt{5}}\right)$ es la intersección de estas rectas.

Para terminar, demostremos que A_∞, *el centro de la espiral*, coincide con este punto:

En efecto, sea $A_\infty=(x,\ y)$. Entonces,

- $$
\begin{aligned}
x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\varepsilon_{2k-1} &= a\phi^2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\phi^{-2k}=a\phi^2\left(\frac{1}{\phi+2}\right) \\
&= \frac{a\phi}{1+2\phi^{-1}}=\frac{a\phi}{\sqrt{5}} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
y=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\varepsilon_{2k} &= a\phi\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\phi^{-2k}=a\phi\left(\frac{1}{\phi+2}\right) \\
&= \frac{a}{1+2\phi^{-1}}=\frac{a}{\sqrt{5}} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

(Nótese que $x/y=\phi$)

....

Por otra parte, se define *la espiral logarítmica (o equiangular)* como la curva cuya ecuación polar es de la forma

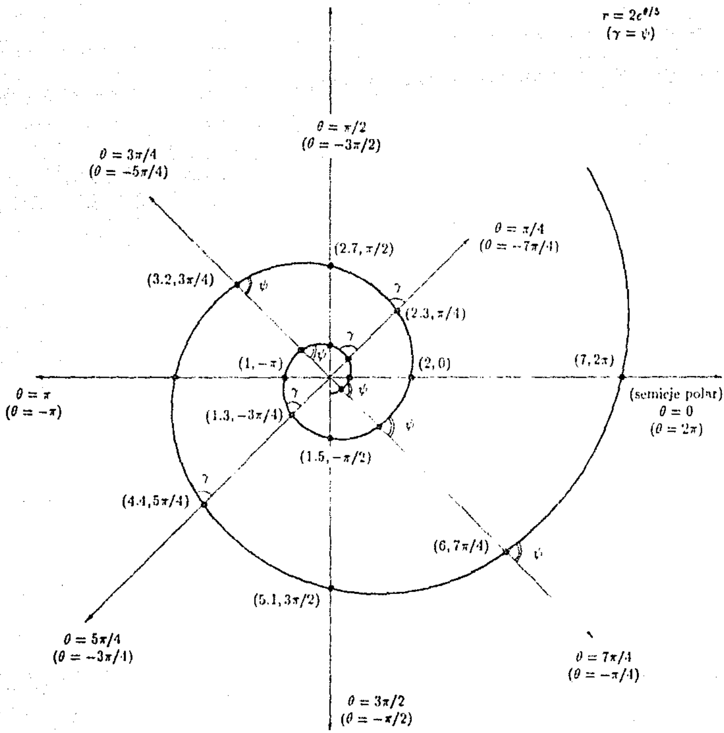
$$r(\theta)=\alpha e^{\beta\theta}$$

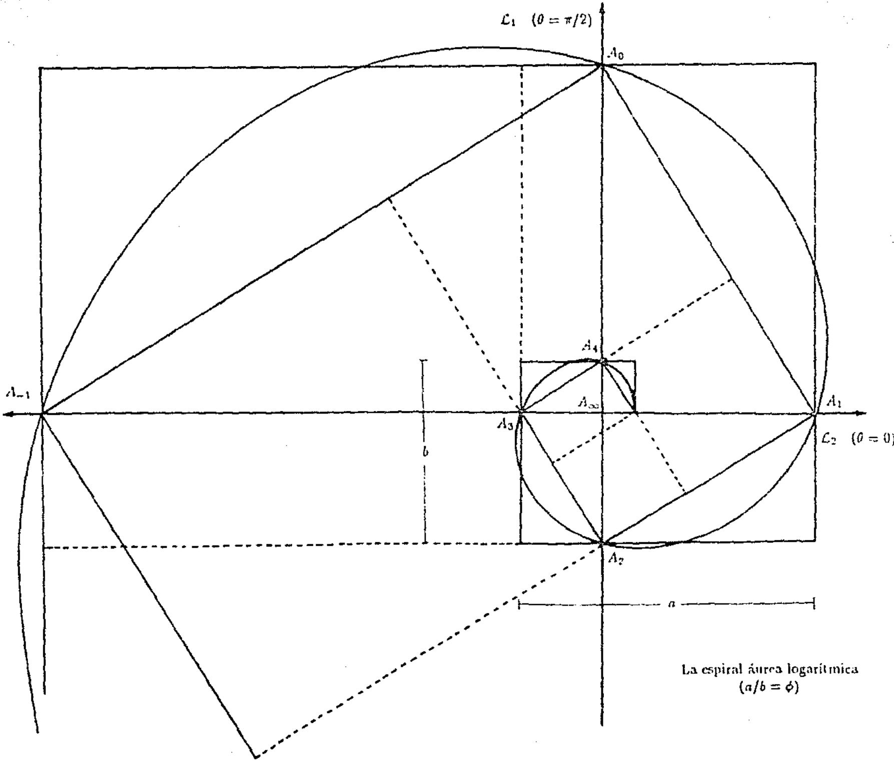
en donde α y β son determinadas constantes reales diferentes de cero.

La gráfica de la espiral logarítmica para la cual $\alpha=2$ y $\beta=1/5$ se muestra en la página 178.

Se puede demostrar que cualquier rayo θ intersecta a la curva en una infinidad de puntos, formando siempre un mismo ángulo. De hecho, cualesquiera dos rayos θ_1 y θ_2 intersectan a la espiral bajo el mismo ángulo, de ahí el término *equiangular*.

Tomaremos como base a *la espiral áurea rectangular* para definir *la espiral áurea logarítmica*, de manera que la primera constituya "la columna vertebral" de la segunda.





La espiral áurea logarítmica
($a/b = \phi$)

Definición 2.6.2

La espiral logarítmica que contiene a todos y cada uno de los vértices A_n ($n \in \mathbb{Z}$) de la espiral áurea rectangular, será llamada *espiral áurea logarítmica*.[8]

Teorema 2.6.3

La ecuación polar de la espiral áurea logarítmica está dada por

$$r(\theta) = \frac{a}{\sqrt{3-\phi}}\phi^{\frac{2}{\pi}\theta}$$

(Hemos tomado el punto A_∞ como polo y el semieje polar en la dirección de la recta $\mathcal{L}_2$.)

Demostración

Sea $A_n = (r_n,\ \theta_n)$, una representación polar del punto A_n

Dado que los puntos A_n están todos contenidos en las rectas perpendiculares $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, podemos escribir, para cualquier valor entero de n,

$$\theta_n = (1-n)\frac{\pi}{2}$$

Demostremos entonces que $\quad r_n = \dfrac{a\phi^{1-n}}{\sqrt{3-\phi}}$

- ▶ Dado que $\quad A_\infty = \left(\dfrac{a\phi}{\sqrt{5}},\ \dfrac{a}{\sqrt{5}}\right)$, encontramos que

$$r_1^2 = \left(\frac{a\phi}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{a^2(\phi+2)}{5} = \frac{a^2(\phi+2)}{(\phi+2)(3-\phi)} = \frac{a^2}{3-\phi}$$

  Luego, $\quad r_1 = \dfrac{a}{\sqrt{3-\phi}} \quad$ (resultado que está acorde con la expresión de r_n para $n = 1$)

- ▶ Supongamos que $\quad r_k = \dfrac{a\phi^{1-k}}{\sqrt{3-\phi}}$, para algún entero k

- ▶ Demostremos que

  1. $\quad r_{k+1} = \dfrac{a\phi^{-k}}{\sqrt{3-\phi}}$

  2. $\quad r_{k-1} = \dfrac{a\phi^{2-k}}{\sqrt{3-\phi}}$

[8] Esta definición está bien fundamentada, dado que, efectivamente, *existe* la espiral logarítmica que contiene a cada uno de los puntos A_n. Esto será demostrado precisamente dando la ecuación de la curva.

En efecto:

1. $$r_{k+1}^2 = \varepsilon_k^2 - r_k^2 = a^2\phi^{2(1-k)} - \frac{a^2\phi^{2(1-k)}}{3-\phi} = \frac{a^2\phi^{2(1-k)}\phi^{-2}}{3-\phi} = \frac{a^2\phi^{-2k}}{3-\phi} \qquad \blacksquare$$

2. $$r_{k-1}^2 = \varepsilon_{k-1}^2 - r_k^2 = a^2\phi^{2(2-k)} - \frac{a^2\phi^{2(1-k)}}{3-\phi} = \frac{a^2\phi^{2(1-k)}\phi^2}{3-\phi} = \frac{a^2\phi^{2(2-k)}}{3-\phi} \qquad \blacksquare$$

Nótese que $\dfrac{r_n}{r_{n+1}} = \phi$

El hecho de que la ecuación $r(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{3-\phi}}\phi^{\frac{2}{\pi}\theta}$ represente *una espiral logarítmica*, queda claro si escribimos

$$r(\theta) = \frac{a}{\sqrt{3-\phi}}e^{\left(\frac{2}{\pi}\ln\phi\right)\theta}$$

Más aún, cualquier espiral logaritmica

$$r(\theta) = \alpha e^{\beta\theta}$$

que contenga a los puntos A_n,[9] tiene como parámetros únicos

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{3-\phi}} \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{2}{\pi}\ln\phi$$

De manera que *la espiral áurea logarítmica* está bien definida[10] $\blacksquare$

Teorema 2.6.4

***La longitud total de la espiral áurea logarítmica**, medida desde uno cualquiera de los puntos $A_n = (r_n, \theta_n)$ y en dirección al punto A_∞, está dada por*

$$L_n = \frac{a\phi^{1-n}}{\ln(\phi+1)}\sqrt{\frac{\pi^2 + \ln^2(\phi+1)}{3-\phi}}$$

Obsérvese que $a\phi^{-1} = \varepsilon_n$, de modo que el cociente L_n/ε_n es una constante

Demostración

La longitud de la espiral está dada por la integral impropia

$$L_n = \int_{-\infty}^{\theta_n} \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2}\,d\theta$$

[9] De hecho basta con contener a cualesquiera dos puntos A_{n_0} y A_{n_1}

[10] Un tratamiento más riguroso exigiría definir *la espiral áurea logarítmica* mediante la ecuación del teorema 2.6.3, para posteriormente demostrar que contiene a todos y cada uno de los puntos A_n.

Hemos optado por hacer una presentación contraria por parecernos más natural, aunque ciertamente menos rigurosa.

en donde

$$r(\theta) = \frac{a}{\sqrt{3-\phi}}\phi^{\frac{2}{\pi}\theta} \quad , \qquad r'(\theta) = \frac{a^2\ln(\phi+1)}{\pi\sqrt{3-\phi}}\phi^{\frac{2}{\pi}\theta}$$

$$r^2(\theta) = \frac{a^2}{3-\phi}\phi^{\frac{4}{\pi}\theta} \quad , \qquad [r'(\theta)]^2 = \frac{a^2\ln^2(\phi+1)}{\pi^2(3-\phi)}\phi^{\frac{4}{\pi}\theta}$$

de manera que

$$r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2 = \frac{a^2}{3-\phi}\left(1+\frac{\ln^2(\phi+1)}{\pi^2}\right)\phi^{\frac{4}{\pi}\theta} = \frac{a^2}{\pi^2(3-\phi)}\left(\pi^2+\ln^2(\phi+1)\right)\phi^{\frac{4}{\pi}\theta}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
L_n &= \frac{a\sqrt{\pi^2+\ln^2(\phi+1)}}{\pi\sqrt{3-\phi}}\int_{-\infty}^{\theta_n}\phi^{\frac{2}{\pi}\theta}d\theta \\
&= \frac{a\sqrt{\pi^2+\ln^2(\phi+1)}}{\pi\sqrt{3-\phi}}\lim_{a\to-\infty}\int_a^{\theta_n}\phi^{\frac{2}{\pi}\theta}d\theta \\
&= \frac{a\sqrt{\pi^2+\ln^2(\phi+1)}}{\pi\sqrt{3-\phi}}\lim_{a\to-\infty}\frac{\pi}{\ln(\phi+1)}\phi^{\frac{2}{\pi}\theta}\Bigg|_{\theta=a}^{\theta=\theta_n} \qquad [\text{nótese que } 2\ln\phi=\ln(\phi+1)] \\
&= \frac{a\sqrt{\pi^2+\ln^2(\phi+1)}}{\sqrt{3-\phi}\ln(\phi+1)}\lim_{a\to-\infty}\left(\phi^{1-n}-\phi^{\frac{2a}{\pi}}\right) \\
&= \frac{a\phi^{1-n}}{\ln(\phi+1)}\sqrt{\frac{\pi^2+\ln^2(\phi+1)}{3-\phi}} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

en donde la constante $\dfrac{1}{\ln(\phi+1)}\sqrt{\dfrac{\pi^2+\ln^2(\phi+1)}{3-\phi}}$, *el coeficiente de* $a\phi^{1-n}=\varepsilon_n$, tiene un valor aproximado de 3

Teorema 2.6.5

El radio de curvatura ρ_n *de la espiral áurea logarítmica, calculado en el punto* $A_n=(r_n,\theta_n)$, *está dado por la fórmula*

$$\rho_n = \frac{\ln(\phi+1)}{\pi}L_n$$

Demostración

El radio de curvatura para la curva polar $r = r(\theta)$ se calcula con la fórmula

$$\rho = \frac{\left(r^2 + r'^2\right)^{3/2}}{|r^2 - rr' + 2r'^2|}$$

En nuestro caso particular:

$$\begin{aligned}
\left(r^2 + r'^2\right)^{3/2} &= \frac{a^3\left(\pi^2 + \ln^2(\phi+1)\right)^{3/2}}{\pi^3(3-\phi)^{3/2}}\phi^{\frac{6}{\pi}\theta} \\
r^2 - rr'' + 2r'^2 &= \frac{a^2}{3-\phi}\phi^{\frac{4}{\pi}\theta} - \frac{a^2\ln^2(\phi+1)}{\pi^2(3-\phi)}\phi^{\frac{4}{\pi}\theta} + \frac{2a^2\ln^2(\phi+1)}{\pi^2(3-\phi)}\phi^{\frac{4}{\pi}\theta} \\
&= \frac{a^2}{3-\phi}\phi^{\frac{4}{\pi}\theta} + \frac{a^2\ln^2(\phi+1)}{\pi^2(3-\phi)}\phi^{\frac{4}{\pi}\theta} = \frac{a^2\left(\pi^2 + \ln^2(\phi+1)\right)}{\pi^2(3-\phi)}\phi^{\frac{4}{\pi}\theta}
\end{aligned}$$

Última expresión que es positiva para cualquier valor de la variable θ

De manera que

$$\rho = \frac{a\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\phi+1)}}{\pi\sqrt{3-\phi}}\phi^{\frac{2}{\pi}\theta}$$

Haciendo $\theta = \theta_n = (1-n)\dfrac{\pi}{2}$, encontramos que

$$\rho_n = \frac{a\phi^{1-n}}{\pi}\sqrt{\frac{\pi^2 + \ln^2(\phi+1)}{3-\phi}} = \frac{\ln(\phi+1)}{\pi}L_n \qquad \blacksquare$$

en donde el valor de la constante $\dfrac{\ln(\phi+1)}{\pi}$ es aproximadamente igual a 0.3.

Con esto damos por concluida esta tesis.

Bibliografía

APOSTOL, Tom M.
Calculus (Vol. 1)
Reverté, España 1978

BERGAMINI, David
Matemáticas
Colección Científica de Time Life
Offset Multicolor, México 1979

BRONSHTEIN-SEMENDYAYEV
Handbook of Mathematics
Van Nostrand Reinhold Company, New York 1978

FUENTES, Adrián
Desarrollos en fracción continua simple infinita de las potencias enteras del número de oro.
Revista "Educación Matemática", Vol. 3, No. 1, Abril 1991,
Grupo Editorial Iberoamérica, México.

GEORGE, Arfken
Métodos matemáticos para físicos.
Diana, México 1981.

GHYKA, Matila C.
El número de oro.
Ritos y ritmos pitagóricos en el desarrollo de la civilización occidental.
Poseidón, Barcelona 1978.

GUELFOND, A. O.
Resolución de ecuaciones en números enteros.
Lecciones populares de matemáticas.
Mir, Moscú 1979.

HUNTLEY, H. E.
The Divine Proportion.
A Study in Mathematical Beauty.
Dover Publication, New York 1970.

MARKUSHEVICH, A.
Teoría de las funciones analíticas. (Tomo I)
Mir, Moscú 1978.

NIVEN, Iván — ZUCKERMANN, Herberts
Introducción a la teoría de los números.
Limusa, México 1976.

SHIVELY, Levi S.
Introducción a la geometría moderna.
C.E.C.S.A., México 1982.

SPIEGEL, Murray
Manual de fómulas y tablas matemáticas.
Serie Schaum,
McGraw-Hill, México 1988.

SPIVAK, Michael
Calculus (tomo 2)
Reverté, México 1978.

VOROBYOV, N. N.
Los números de Fibonacci.
Colección Temas Matemáticos.
Limusa, México 1988.