

54
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"DISEÑO DE EXPERIMENTOS: UNA INTRODUCCION"

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
A C T U A R I O

PRESENTA

AGUSTIN ROMAN AGUILAR

CIUDAD UNIVERSITARIA

OCTUBRE DE 1991

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INTRODUCCION

El objetivo de este trabajo es presentar, de una manera muy breve, los modelos más sencillos de diseño de experimentos que podrían ser estudiados en un curso introductorio sobre el tema.

Se asumirá que el lector posee conocimientos básicos de estadística como: estimación puntual, intervalos de confianza, máxima verosimilitud, etc.

En el capítulo 1 se señala la importancia de la experimentación, del diseño experimental y del modelado, además se puntualizan los conceptos básicos que se emplearán a lo largo de este trabajo.

En el capítulo 2 se describe, a través de un ejemplo, cómo surge el modelo con un criterio de clasificación (que es el más sencillo). Posteriormente se presenta el modelo, la prueba de hipótesis que es de interés, la tabla de análisis de varianza, los intervalos de confianza para los parámetros del modelo y los métodos de comparaciones múltiples más conocidos.

En el capítulo 3 se define el concepto de bloque experimental y, nuevamente a través de un ejemplo, se hace notar la importancia de los bloques. Después de presentar el modelo se realiza un análisis semejante al efectuado en el capítulo anterior.

En el capítulo 4 se describe y analiza el modelo con dos criterios de clasificación sin interacción, que aunque en la práctica se presenta muy esporádicamente, es útil para introducir el modelo que sí considera a la interacción y que es tratado en el capítulo 5, en donde se da este concepto y su interpretación, y se analiza el modelo.

INDICE

1	FUNDAMENTOS DEL DISEÑO DE EXPERIMENTOS	
1.1	Conceptos fundamentales	1
1.2	Importancia del diseño experimental	4
1.3	Importancia del modelo en el diseño experimental	6
2	MODELO COMPLETAMENTE AL AZAR CON UN CRITERIO DE CLASIFICACION	
2.1	Introducción	8
2.2	El modelo	14
2.3	La contestación de las hipótesis	17
2.4	La tabla de análisis de varianza	30
2.5	Construcción de intervalos de confianza para los parámetros del modelo	32
	Ejemplo 2.1	34

2.6 Métodos para la comparación de tratamientos	37
Método de la mínima diferencia significativa	38
Ejemplificación	40
Prueba de Tukey	41
Ejemplificación	44
Prueba Student-Newman-Keuls (SNK)	45
Ejemplificación	46
Prueba de Duncan	47
Ejemplificación	49
Contrastes ortogonales	50
Ejemplificación	57
Método de Scheffé	60
Ejemplo 2.7	62
3 EL DISEÑO DE BLOQUES	
3.1 Introducción	64
3.2 El modelo	67
3.3 La contrastación de las hipótesis	70
3.4 La tabla de análisis de varianza	83
Ejemplo 3.1	88
Ejemplo 3.2	90
3.5 Métodos para la comparación de tratamientos	92

4	MODELO COMPLETAMENTE AL AZAR CON DOS CRITERIOS DE CLASIFICACION SIN INTERACCION	
4.1	Introducción	95
4.2	El modelo	97
4.3	Las pruebas de hipótesis	99
4.4	La tabla de análisis de varianza	112
	Ejemplo 4.1	114
5	MODELO COMPLETAMENTE AL AZAR CON DOS CRITERIOS DE CLASIFICACION CON INTERACCION	
5.1	Introducción	117
5.2	El modelo	120
5.3	La prueba de hipótesis relativa a la interacción	122
5.4	La tabla de análisis de varianza de la prueba relativa a la interacción	133
5.5	Las pruebas de hipótesis relacionadas con los tratamientos de los factores de interés	134
	Ejemplo 5.1	137
	Ejemplo 5.2	140
	Ejemplo 5.3	141

Conclusiones

Bibliografía

CAPITULO 1

FUNDAMENTOS DEL DISEÑO DE EXPERIMENTOS

1.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

El conocimiento científico, a diferencia del conocimiento empírico, busca no sólo describir y plantear algunas tendencias de los fenómenos y objetos que estudia, sino que pretende conocer su esencia y sus causas a fin de poder explicarlos y predecirlos. Esto no implica que ambos tipos de conocimiento se contraponen, por el contrario, se complementan, pues en la construcción del conocimiento científico el investigador se basa en el conocimiento empírico y en determinado marco teórico de referencia para establecer hipótesis y teorías que expliquen lo más ampliamente posible a los fenómenos y que posteriormente corrobora con la información obtenida a través de la práctica

científica, es decir, la experimentación; o bien, la observación, actividad que se realiza cuando no es posible experimentar, como sucede en el estudio de fenómenos astronómicos o sociales. Esto indica el importante papel que, en la construcción de la ciencia, posee la experimentación.

Puede definirse a un *experimento* como el proceso mediante el cual se produce información sobre un fenómeno bajo condiciones controladas, por lo tanto a través de la experimentación se obtiene información en tales condiciones, mientras que la *observación* es la recopilación de datos bajo condiciones no controladas. Habitualmente la experimentación produce información más precisa y confiable.

Las principales características de un experimento son:

- (a) Objetivo(s)
- (b) Conjunto de suposiciones bajo las cuales se realiza
- (c) Grado de generalidad (o confiabilidad)
- (d) Costo

Se conoce como *unidad experimental* al objeto que se utiliza para obtener la información, y como *variable de respuesta* al atributo o característica de cada unidad que es registrado para conocer el resultado de la experimentación.

Dentro de las *condiciones o factores* que intervienen en un experimento se encuentran las que pueden ser *controladas*, que siempre son "finitas", pues se supone tienen un efecto determinante sobre la

respuesta y las que *no se controlan*, pueden ser una infinidad, ya sea por que se considera que no influyen significativamente en los resultados, o por que se desconocen. Los factores controlados que se mantienen fijos a lo largo del experimento se conocen como *condiciones experimentales* y aquellos que varían y cuyas consecuencias se desean estudiar se denominan *factores de interés*.

En general los factores de interés que se tienen en un experimento pueden ser cuantitativos o cualitativos, sin embargo, aún siendo del segundo tipo, adoptarán solo un número finito de valores o niveles, como se verá en los siguientes capítulos, pudiéndose considerar a todos ellos como *cualitativos*.

Cuando los factores de interés se consideran cuantitativos la técnica estadística que se emplea para su estudio se conoce como *análisis de regresión*, mientras que si se trata de factores cualitativos, como los que se manejarán en el presente trabajo, reciben el nombre de *modelos de diseño de experimentos* o *modelos de análisis de varianza*. Cuando hay factores de ambos tipos se estudian a través del *análisis de covarianza*.

Independientemente de la naturaleza de tales factores la variable de respuesta es numérica, pues se trata, como se mencionó anteriormente, de la medición de una característica o atributo de una unidad experimental, esto significa que tal variable tomará valores en \mathbb{R} .

Una *repetición* o *réplica* del experimento es la obtención de la

respuesta bajo el mismo estado de los factores. Dado que el investigador controla las condiciones es posible la repetición, lo que no sucede, por ejemplo, en el estudio de los fenómenos astronómicos, o sociales que no se pueden reproducir a voluntad. Si al realizar algunas repeticiones del experimento bajo condiciones similares se observa que los resultados que se obtienen son muy variables, existirá un factor que no se controló, pero que tiene un efecto importante en ellas.

1.2 IMPORTANCIA DEL DISEÑO EXPERIMENTAL

A fin de alcanzar los objetivos del experimento con la mayor efectividad posible, es decir, minimizando el costo, reduciendo la variabilidad y ampliando la generalidad, debe *diseñarse* o *planearse* el experimento. En el diseño se consideran, en forma anticipada, todos los elementos que se cree influyen significativamente sobre la respuesta y se establecen, de manera precisa, las etapas en que se han de desarrollar en el mismo.

Al diseñar un experimento se determina:

Ca) El o los objetivos que se persiguen

- (b) El marco teórico en que se ubica el experimento, que debe incluir la revisión de los conocimientos que sobre el tema de experimentación se posean, en caso de existir.
- (c) La población bajo estudio, que determina el alcance o la generalidad del experimento. Si se trabaja con toda la población los resultados que se obtengan, a través de deducción directa, serán concluyentes, pero si no es posible lo anterior debe aplicarse el muestreo para que los resultados sean representativos y así obtener inferencias sobre toda la población.
- (d) Las variables que intervienen en el experimento, incluyendo aquellas que pueden ser controladas, factores controlados, y sus niveles, así como la variable de respuesta. Se debe establecer claramente el procedimiento para la realización y el registro de las mediciones.
- (e) El número de repeticiones que habrá de realizarse.
- (f) La forma en que se analizará la información experimental, es decir, el modelo que se empleará, así como los supuestos bajo los cuales se realizará el análisis.
- (g) La manera en que se habrá de producir la información experimental, es decir, el proceso a seguir para la obtención de la respuesta.
- (h) La forma en que se habrán de reportar las conclusiones.

1.3 IMPORTANCIA DEL MODELO EN EL DISEÑO EXPERIMENTAL

Un *modelo* es una abstracción de la realidad que preserva las características más relevantes del fenómeno bajo estudio. Las características deseables en un modelo son:

C01 Simplicidad: para que se maneje e interprete con facilidad.

C02 Flexibilidad: para que pueda enriquecerse sin modificarlo radicalmente.

Los modelos que aquí se manejarán son *simbólicos*, o sea, aquéllos en donde la representación de las características de un objeto o fenómeno se realiza a través de símbolos, como ecuaciones.

El objetivo principal al *modelar*, asociar a un experimento particular un modelo, es establecer la relación entre la variable de respuesta y los factores que intervienen en su determinación.

La respuesta obtenida luego de realizar cada repetición de un experimento se llamara en adelante observación, y no debe confundirse con la observación de que se habló en la sección 1.1.

El modelo estadístico que se habra de adoptar en un experimento

debe ser establecido antes de realizar las observaciones, ya que de suceder lo contrario, es decir, realizar la experimentación sin tener en mente un modelo, puede obtenerse un conjunto de información que no sea útil para realizar inferencias sobre toda la población. Tal modelo puede ser alguno de los ya conocidos, y que en este trabajo se presentan, o bien, uno realizado de acuerdo a las necesidades y particularidades del problema en cuestión.

CAPITULO 2

MODELO COMPLETAMENTE AL AZAR CON UN CRITERIO DE CLASIFICACION

2.1 INTRODUCCION

Con frecuencia surge el problema de comparar "a" tratamientos, o niveles de algún factor de interés dentro de un experimento. Un ejemplo que hace necesarios el diseño y la realización de un experimento para llevar a cabo una comparación de este estilo es el que a continuación se describe.

Se tiene una droga que se supone aumenta el nivel de adrenalina en la sangre de ratones de laboratorio y se desea saber si diferentes concentraciones de la misma, tienen efectos significativamente distintos. El hecho de saber las diferencias de los efectos es el

objetivo a perseguir. Con ayuda de los conocimientos previos que se tengan se debe elegir la forma en que las a concentraciones serán aplicadas, así como la manera en que el nivel de adrenalina será registrado. Además se debe determinar: la población bajo estudio, es decir, las características de los animales de laboratorio que se emplearán; la cantidad de ratones que será usada; y el proceso que se habrá de seguir en el experimento.

Si Y denota a la variable de respuesta, que es en este caso el nivel de adrenalina en la sangre de un ratón, y si los factores que intervienen en el experimento se representan con letras mayúsculas, puede escribirse

$$Y = f(A, B, C, D, E, F, G, H, \dots)$$

lo que significa que Y está en función de un número infinito de condiciones o factores, dentro de los cuales se encuentran los controlados, que son en este caso:

A: Raza de los ratones

B: Edad

C: Sexo

D: Régimen alimenticio

E: Condiciones ambientales en las que se realiza el experimento

F: Concentración de la droga

y los no controlados (G, H, \dots) como pueden ser las desviaciones en las mediciones, en las condiciones ambientales, entre otras. Las

condiciones experimentales son A, B, C, D, E, pues el factor de interés que tomará a diferentes valores y cuyos efectos se desean comparar es F.

Resulta razonable suponer que el efecto sobre Y de los factores controlados es independiente del ejercido por los no controlados, es decir, que los efectos son separables, escribiéndose la variable de respuesta en tal situación como

$$Y = g(A,B,C,D,E,F) + \varepsilon(G,H,\dots) \quad 2.1.1$$

donde $g(A,B,C,D,E,F)$ es el efecto de los factores controlados y $\varepsilon(G,H,\dots)$ el de los no controlados. Este supuesto es conocido como *separabilidad aditiva*, y se aplicará en los modelos presentados en este trabajo. La separabilidad implica que el efecto que se produzca al tomar F los distintos niveles sólo se reflejará sobre $g(A,B,C,D,E,F)$.

El efecto $\varepsilon(E,F,G,\dots)$, que se abrevia simplemente con la letra ε y se denomina *error experimental* no se conoce con exactitud, es decir, es incierto, no obstante, su naturaleza debe ser la misma que la de Y, esto es, ε debe ser numérico (tomar valores en \mathbb{R}), por lo tanto, tiene sentido pensar en el error como una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad continua.

No hay que perder de vista que se está construyendo un modelo matemático y se desea, que, además de ajustarse a la realidad, sea lo más general posible, por lo tanto, debe considerarse que ε toma valores tanto positivos como negativos y no suponer que toma fundamen-

almente valores en uno de los dos sentidos. Esto se traduce como

$$P(\epsilon \geq 0) = P(\epsilon \leq 0) = 1/2$$

También resulta razonable pensar que las magnitudes de los errores positivos y negativos son parecidas y que en promedio son cero, lo que implica que la función de densidad de probabilidad de ϵ es simétrica alrededor de cero y que $E(\epsilon) = 0$.

Resumiendo lo que se ha discutido en relación al error experimental se debe tener

(a) $E(\epsilon) = 0$

(b) La densidad de ϵ debe ser continua

(c) La densidad de ϵ debe ser simétrica respecto a cero

Algunas densidades que cumplen con estas características son la uniforme, la triangular, la doble exponencial y la normal. Dado el hecho de que la función normal ha sido muy estudiada, que técnicamente es fácil de usar, para el curso del trabajo se considerará que ϵ se distribuye como normal con media cero. Nótese que esto implica un supuesto adicional: el que la densidad tiene como soporte a todos los reales.

Al observar la expresión $g(A, B, C, D, E, F)$ no debe pensarse en g como en una función que se pretende aproximar, como se hace en el análisis de regresión, sino que debe tenerse en mente que, en este caso, las cantidades $g(A, B, C, D, E, F_i)$ para $i=1, \dots, a$, obtenidas al tomar el factor de interés en los diferentes niveles, en otras

palabras, los resultados que se obtienen en los factores controlados al aplicar los a tratamientos, en el ejemplo un tratamiento es el suministro de una determinada concentración de la droga, que se desean comparar.

Si se denota con μ_i a $g(A,B,C,D,E,F_i)$, la expresión 2.1.1 se transforma en

$$Y_i = \mu_i + \varepsilon_i \quad i=1, \dots, a$$

esto es, la respuesta a esta aplicación tiene una parte determinística que es μ_i , que depende de la concentración del fármaco usada, y una parte aleatoria, que depende de las condiciones prevalecientes en los factores no controlados al realizar el experimento, lo cual implica que Y_i es una variable aleatoria pues hereda esta característica de ε_i . Cuando se administre la concentración i -ésima a n_i ratones se tendrá

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, a \\ j=1, \dots, n_i \end{array}$$

donde y_{ij} es la respuesta obtenida del j -ésimo ratón que recibe el i -ésimo tratamiento.

Como los factores no controlados, que son las fuentes de variabilidad de la respuesta son los mismos en todas las repeticiones del experimento, esto no quiere decir que al realizar cada repetición se encuentren en el mismo estado, puede considerarse que $V(\varepsilon_{ij}) = V(\varepsilon_{kl}) = \sigma^2$ (con $i \neq k$ o $j \neq l$), esto es, los errores tienen la misma varianza, constante pero desconocida.

Ya se mencionó que el objetivo central del experimento es saber si los a tratamientos tienen efectos distintos sobre la respuesta. Lo cual significa, en términos del modelo establecido, que se desea contrastar las hipótesis

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a \quad \text{vs.} \quad H_a: \mu_i \neq \mu_j \quad \text{para alguna } i \neq j$$

La expresión 2.1.1 puede analizarse aún más. Dado que a través del experimento los factores A,B,C,D y E permanecen fijos, y siendo F el único que varía, la respuesta puede escribirse como

$$Y = \mu(A,B,C,D,E) + \tau(F) + \varepsilon(G,H,\dots)$$

Donde a $\mu(A,B,C,D,E)$, que es constante y es una medición que estará presente en cualquier ratón cuyas características sean similares a las de los ratones empleados en este experimento, se le denota sencillamente con la letra μ y a $\tau(F_i)$ con τ_i , quedando la i -ésima respuesta como

$$Y_i = \mu + \tau_i + \varepsilon_i \quad i=1, \dots, a$$

al realizar n_i observaciones bajo el tratamiento i se tendrá

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, a \\ j=1, \dots, n_i \end{array}$$

y como $\mu_i = \mu + \tau_i$, una forma equivalente de escribir la prueba a realizar es

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a \quad \text{vs.} \quad H_a: \tau_i \neq \tau_j \quad \text{para alguna } i \neq j$$

Los tratamientos que se desean estudiar son aleatoriamente asignados al material experimental, con el propósito de lograr tanta uniformidad como sea posible entre los conjuntos de unidades experimentales a los que se aplica cada tratamiento. Es por esta razón que el modelo aquí presentado recibe el nombre de *completamente al azar*. Se le designa también como con un *criterio de clasificación* pues sólo un factor es analizado, por ejemplo: concentración de alguna droga usada en el combate de una enfermedad, porcentaje de fibra sintética aplicado en la fabricación de alguna tela, distintos métodos de producción empleados, etc.

Es necesario recordar que la prueba de hipótesis, y el análisis estadístico en general, se llevará a cabo con los datos experimentales con los que se cuenta, es decir, con información limitada. Si las observaciones se realizan bajo las mismas condiciones experimentales y de manera independiente, se tendrá una muestra de cada una de las poblaciones que se están comparando; por supuesto, las conclusiones serán más confiables en tanto mayor sea la cantidad de información experimental que se posea.

2.2 EL MODELO

Los resultados obtenidos en un experimento en el que se apliquen *a* tratamientos, o sea, se tienen *a* niveles en el factor de interés, y se

obtengan n_i observaciones dentro del tratamiento correspondiente son resumidos en una tabla como la siguiente.

Observación	1	2	3	...	n	$y_{i.}$	$\bar{y}_{i.}$
Tratamiento							
1	y_{11}	y_{12}	y_{13}	...	y_{1n_1}	$\sum_{j=1}^{n_1} y_{1j}$	$y_{1.}/n_1$
2	y_{21}	y_{22}	y_{23}	...	y_{2n_2}	$\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j}$	$y_{2.}/n_2$
...							
a	y_{a1}	y_{a2}	y_{a3}	...	y_{an_a}	$\sum_{j=1}^{n_a} y_{aj}$	$y_{a.}/n_a$
						$y_{..} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$	$\bar{y}_{..} = y_{..}/N$

donde

y es la variable de respuesta

y_{ij} es la j -ésima observación bajo el i -ésimo tratamiento

N es $\sum_{i=1}^a n_i$

$y_{..}$ es la suma de todas las observaciones

$\bar{y}_{..}$ es el promedio de las observaciones realizadas.

El modelo estadístico para este diseño es

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, a \\ j=1, \dots, n_i \end{matrix} \quad 2.2.1$$

donde

μ es un parámetro común a todos los tratamientos y es una media general de la variable de respuesta. Se conoce con el nombre de *media global*.

τ_i representa al *efecto del i-ésimo tratamiento* o desviación respecto de la media global bajo el i-ésimo tratamiento.

ε_{ij} es el *error experimental* de la observación correspondiente. Los errores se supondrán variables aleatorias con distribución normal, de media cero y varianza constante σ^2 , varianza constante para todas las observaciones. También se supondrá independencia entre ellas, es decir, $\text{cov}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}) = 0$ si $i \neq k$ ó $j \neq l$.

Puede considerarse al conjunto formado por todas las ε_{ij} como una muestra aleatoria, de tamaño N , de una población normal de media cero y varianza σ^2 .

La variable y_{ij} tendrá distribución normal con media $\mu + \tau_i$ y varianza σ^2 , y estas variables son independientes entre sí, pero el conjunto de las y_{ij} no necesariamente forman una muestra de una población. Cuando se tenga el mismo número de observaciones bajo cada tratamiento, es decir, cuando $n_1 = n_2 = \dots = n_a = n$ se dirá que el

modelo es balanceado y en tal caso $N=n \cdot a$.

2.3 LA CONTRASTACION DE LAS HIPOTESIS

De acuerdo al método de máxima verosimilitud contrastar las hipótesis

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a \quad \text{vs.} \quad H_a: \mu_i \neq \mu_j \quad \text{para alguna } i \neq j$$

o equivalentemente

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = \tau \quad \text{vs.} \quad H_a: \tau_i \neq \tau_j \quad \text{para alguna } i \neq j$$

al nivel de significancia α , implica determinar la región \mathcal{E} de rechazo, región que se debe obtener para contrastar un par de hipótesis por máxima verosimilitud, pues si se observa que Y , que representa a la información experimental con la que se cuenta, se encuentra en \mathcal{E} , entonces se rechazará H_0 . Esta región se calcula como

$$\mathcal{E} = \{ Y \mid \Lambda \leq k \}$$

con k de tal forma que

$$\begin{aligned} P(\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ cierta}) &= P(Y \in \mathcal{E} \mid H_0) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

y Λ es

$$\Lambda = \frac{\max_{\theta \in \omega_0} L(\theta|Y)}{\max_{\theta \in \Omega} L(\theta|Y)}$$

donde

θ representa al vector de parámetros involucrados en el modelo;

Ω es el espacio parametral, esto significa que Ω es igual a

$$\Omega = \{ (\mu, \tau_1, \dots, \tau_a, \sigma^2) \mid \mu, \tau_i \in \mathbb{R}; \sigma^2 \in \mathbb{R}^+ \};$$

ω_0 representa al conjunto de posibles parámetros bajo H_0 , es decir, cuando $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = \tau$, es claro que ω_0 es un subconjunto de Ω ;

$L(\theta|Y)$ es la función de verosimilitud.

Se ha señalado con anterioridad que cada y_{ij} tiene una distribución normal con media $\mu_i = \mu + \tau_i$ y varianza σ^2 , es decir,

$$f(y_{ij} | \mu, \tau_1, \dots, \tau_a, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_{ij} - (\mu + \tau_i))^2\right\},$$

por lo que la función de verosimilitud L es

$$\begin{aligned} L(\theta|Y) &= L(\mu, \tau_1, \dots, \tau_a, \sigma^2 | Y) \\ &= \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^{n_i} f(y_{ij} | \mu, \tau_1, \dots, \tau_a, \sigma^2) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-N/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - (\mu + \tau_i))^2\right\} \end{aligned} \quad 2.3.1$$

Maximizar esta función con $\theta \in \Omega$ es equivalente a evaluarla en los

estimadores máximo verosímiles de los parámetros del modelo, que estarán denotados por $\hat{\sigma}^2$, $\hat{\mu}$ y $\hat{\tau}_i$ ($i=1, \dots, a$).

Realizando los pasos apropiados para determinar $\hat{\sigma}^2$ se llega al siguiente resultado

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - (\hat{\mu} + \hat{\tau}_i))^2}{N}$$

que claramente establece que $\hat{\sigma}^2$ depende de $\hat{\mu}$ y de $\hat{\tau}_i$, $i=1, \dots, a$; de esto se concluye que maximizar L sea equivalente a minimizar S donde

$$S = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - (\mu + \tau_i))^2$$

Los valores de los parámetros donde se minimiza S están dados por la solución de las siguientes ecuaciones

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \mu} \right|_{\hat{\mu}, \hat{\tau}_i} = 0$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \tau_i} \right|_{\hat{\mu}, \hat{\tau}_i} = 0 \quad i=1, \dots, a$$

es decir, por la solución de las ecuaciones

$$-2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - (\hat{\mu} + \hat{\tau}_i)) = 0$$

$$-2 \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - (\hat{\mu} + \hat{\tau}_i)) = 0 \quad i=1, \dots, a$$

al simplificar se obtiene el sistema

$$\begin{aligned}
 n\hat{\mu} + n_1\hat{\tau}_1 + n_2\hat{\tau}_2 + \dots + n_a\hat{\tau}_a &= y.. \\
 n_1\hat{\mu} + n_1\hat{\tau}_1 &= y_1. \\
 n_2\hat{\mu} + n_2\hat{\tau}_2 &= y_2. \\
 &\vdots \\
 n_a\hat{\mu} + n_a\hat{\tau}_a &= y_a.
 \end{aligned}
 \tag{2.3.2}$$

Estas $a+1$ ecuaciones, conocidas como *ecuaciones normales*, no son linealmente independientes, la primera de ellas es igual a la suma de las a restantes, por lo que no se tiene una única solución, o sea, un valor único para $\hat{\mu}, \hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_a$, pues a cada condición impuesta para resolver el sistema, corresponderá un conjunto particular de estimadores. Sin embargo, algunos de los parámetros del modelo, o funciones de ellos sí son estimados de manera única, por ejemplo, al dividir la ecuación $i+1$ entre n_i se obtiene

$$\hat{\mu} + \hat{\tau}_i = \bar{y}_i.
 \tag{2.3.3}$$

que indica que, no obstante las estimaciones particulares que se tengan para $\hat{\mu}$ y para $\hat{\tau}_i$, su suma será igual a \bar{y}_i , por lo tanto se puede escribir

$$\hat{\mu}_i = \widehat{\mu + \tau}_i = \bar{y}_i.$$

este estimador es, además, insesgado pues

$$\begin{aligned}
E(\hat{\mu}_i) &= E(\bar{y}_{i.}) \\
&= E\left(\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right) \\
&= \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} E(y_{ij}) \\
&= \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \mu_i \\
&= \mu_i
\end{aligned}$$

En general las combinaciones lineales de la forma $\sum_{i=1}^a c_i \mu_i$ son estimadas por máxima verosimilitud, insesgadamente y de manera única por $\sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_{i.}$ y reciben el nombre de *funciones lineales linealmente estimables*. Esta afirmación se prueba al multiplicar la ecuación $i+1$ del sistema 2.3.2 por c_i/n_i , para $i=1, \dots, a$, y sumar las a ecuaciones resultantes, obteniéndose

$$\sum_{i=1}^a c_i (\hat{\mu} + \hat{\tau}_i) = \sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_{i.}$$

es decir

$$\sum_{i=1}^a c_i \hat{\mu}_i = \sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_{i.}$$

Ahora ya es posible obtener el estimador para σ^2

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2}{N}$$

que es sesgado. Un estimador insesgado es

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2}{N-a}$$

Al evaluar L en el conjunto de estimadores máximo verosímiles encontrados, representados por $\hat{\theta}$, se obtiene

$$\begin{aligned} L(\hat{\theta}|Y) &= \max_{\theta \in \Omega} L(\theta|Y) \\ &= \left[(2\pi)^{\frac{N}{2}} \hat{\sigma}^2 \right]^{-N/2} \text{Exp}(-N/2) \end{aligned}$$

Para maximizar L con $\theta \in \omega_0$ hay que observar que cuando se considera cierta H_0 , es decir, cuando $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = \tau$ el modelo se transforma en

$$\begin{aligned} y_{ij} &= \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \\ &= \mu + \tau + \varepsilon_{ij} \\ &= \mu^* + \varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

con $\mu^* = \mu + \tau$, y es conocido como *modelo reducido*, pues en él aparecen menos parámetros que en el modelo 2.2.1 que se conoce, a su vez, como *modelo completo*.

Siguiendo un proceso similar al empleado para encontrar $\hat{\theta}$ se obtiene que

$$\hat{\mu}^* = \bar{y}_{..}$$

$$\widehat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2}{N}$$

son los estimadores máximo verosímiles de los parámetros que en tal caso se tienen, denotados estos estimadores con $\widehat{\theta}_0$, y que la función de verosimilitud evaluada en ellos es

$$\begin{aligned} LC(\widehat{\theta}_0 | Y) &= \max_{\theta \in \omega_0} L(\theta | Y) \\ &= \left[(2\pi) \widehat{\sigma}_0^2 \right]^{-N/2} \text{Exp}(-N/2) \end{aligned}$$

La suma $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$ se conoce como SCE_{MR} y es la *suma de cuadrados del error en el modelo reducido*, ya que es una medida del error en el que se incurre al suponer válido este modelo.

A su vez la suma $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$ es una medida del error en el que se incurre al suponer válido el modelo completo y por esto se conoce como *suma de cuadrados del error en el modelo completo* y se simboliza como SCE_{MC} .

Regresando a la prueba de hipótesis, se tiene que se rechazará H_0

si

$$\Lambda = \frac{\max_{\theta \in \omega_0} LC(\theta | Y)}{\max_{\theta \in \omega} LC(\theta | Y)}$$

$$= \frac{\left[(2\pi) \widehat{\sigma}_0^2 \right]^{-N/2} \text{Exp}(-N/2)}{\left[(2\pi) \widehat{\sigma}^2 \right]^{-N/2} \text{Exp}(-N/2)}$$

$$= \left[\frac{\widehat{\sigma}_0^2}{\widehat{\sigma}^2} \right]^{-N/2} \leq k_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\widehat{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}_0^2} = \frac{\text{SCE}_{MC}}{\text{SCE}_{MR}} \leq k_2 \quad 2.3.4$$

con k_2 de tal forma que

$$P(\text{rechazar } H_0 | H_0 \text{ cierta}) = P(Y \in \mathcal{E} | H_0)$$

$$= P \left[\frac{\text{SCE}_{MC}}{\text{SCE}_{MR}} \leq k_2 \mid H_0 \right]$$

$$= \alpha$$

por lo tanto, se hace evidente la necesidad de encontrar la distribución, bajo H_0 , del cociente de 2.3.4.

Ya se ha señalado que cuando H_0 es cierta $y_{ij} = \mu^* + \varepsilon_{ij}$ por lo que su distribución, en tal caso, es $NC(\mu^*, \sigma^2)$, por lo tanto

$$\frac{1}{\sigma^2} (y_{ij} - \mu^*)^2 \sim \chi_{(1)}^2$$

esto, más la independencia entre las y_{ij} implican que

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \mu^*)^2 \sim \chi_{(N)}^2$$

cuando se estima μ^* con \bar{y} puede concluirse que

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \mu^*)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \text{SCE}_{MR} \sim \chi_{(N-1)}^2$$

Por otra parte, aún in suponer cierta H_0 , la variable

$$\frac{1}{\sigma^2} (y_{ij} - \mu_i)^2 \sim \chi_{(1)}^2$$

utilizando nuevamente el hecho de que las y_{ij} son independientes puede afirmarse que

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \mu_i)^2 \sim \chi_{(N)}^2$$

y al estimar cada μ_i con \bar{y}_i se obtiene

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \text{SCE}_{MC} \sim \chi_{(N-a)}^2$$

De lo anterior se observa que de haber independencia entre SCE_{MC} y SCE_{MR} su cociente, multiplicado por la constante adecuada, se distribuiría, bajo H_0 como $F_{(N-a, N-1)}$. Desafortunadamente entre estas dos sumas no hay independencia, hecho que se muestra al observar que la SCE_{MR} puede descomponerse de la forma siguiente

$$\begin{aligned}
SCE_{MR} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i..})^2 \\
&= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{i..})^2 \\
&= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{i..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 + 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{i..})(y_{ij} - \bar{y}_{i.}) \\
&= \sum_{i=1}^a n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{i..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 + 2 \sum_{i=1}^a \left[(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{i..}) \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.}) \right] \\
&= \sum_{i=1}^a n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{i..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 + 2 \sum_{i=1}^a \left[(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{i..})(n_i \bar{y}_{i.} - n_i \bar{y}_{i..}) \right] \\
&= \sum_{i=1}^a n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{i..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 \qquad 2.3.5
\end{aligned}$$

Como puede verse, la SCE_{MR} puede ser particionada en la suma $\sum_{i=1}^a n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{i..})^2$, que se conoce como *suma de cuadrados del error de la hipótesis H_0* , SCE_{H_0} , más la *suma de cuadrados del error del modelo completo*.

A la SCE_{H_0} se le denomina de tal forma ya que proporciona un criterio para decidir si se rechaza o no la hipótesis nula, pues como puede observarse, aunque siempre se incurre en un error menor cuando se supone válido el modelo completo en vez del reducido, la SCE_{MC} es siempre menor que la SCE_{MR} , estando estimada la diferencia entre ambos errores por la SCE , puede considerarse que si esta cantidad es pequeña, en ambos modelos se incide casi en el mismo error, por lo que no se ganaría mucho adoptando el modelo completo y por lo tanto no se rechazará H_0 , es decir, se tomará el modelo reducido, que es más sencillo; si por el contrario la SCE_{H_0} es grande se tendrá que el

modelo completo se ajusta mucho mejor a los datos experimentales que se tienen y entonces si se deberá rechazar la hipótesis nula.

Simbólicamente la ecuación 2.3.5 se escribe

$$SCE_{MR} = SCE_{Ho} + SCE_{MC} \quad 2.3.6$$

y se conoce como *partición fundamental en sumas de cuadrados*.

En esta identidad se observa claramente que entre la SCE_{MR} y la SCE_{MC} no hay independencia y que, por lo tanto, su cociente no se distribuye como F. Además el cociente de 2.3.4 es, por construcción, menor o igual a uno y, como es sabido, el recorrido de una variable aleatoria con distribución F es $(0, \infty)$.

La carencia de independencia entre la SCE_{MC} y SCE_{MR} obliga a buscar una región de rechazo equivalente a 2.3.4, en donde si se conozca la distribución de la estadística de prueba .

Regresando a las equivalencias para determinar \bar{y} y aplicando la nueva información con la que se cuenta, se tiene que

$$\frac{SCE_{MC}}{SCE_{MR}} \leq k_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{SCE_{MR}}{SCE_{MC}} \geq k_3$$

$$\Leftrightarrow \frac{SCE_{Ho} + SCE_{MC}}{SCE_{MC}} \geq k_3$$

$$\Leftrightarrow \frac{SCE_{Ho}}{SCE_{MC}} \geq k_4 \quad 2.3.7$$

Para conocer a la constante k_4 es necesario encontrar la distribución, bajo H_0 , de la estadística de prueba de 2.3.7.

Ya se había indicado que, bajo H_0 , $SCE_{MR}/\sigma^2 \sim \chi^2_{(N-1)}$ y que $SCE_{MC}/\sigma^2 \sim \chi^2_{(N-a)}$. Ahora bien, nuevamente bajo H_0 , la variable $n_i(\bar{y}_i - \mu^*)^2/\sigma^2$ se distribuye como $\chi^2_{(1)}$, implicando que

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a n_i (\bar{y}_i - \mu^*)^2 \sim \chi^2_{(a)}$$

al estimar μ^* con $\bar{y}_{..}$, puede afirmarse que, bajo H_0 ,

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a n_i (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2 = \frac{1}{\sigma^2} SCE_{Ho} \sim \chi^2_{(a-1)}$$

Dividiendo la identidad 2.3.6 entre σ^2 se obtiene

$$\frac{1}{\sigma^2} SCE_{MR} = \frac{1}{\sigma^2} SCE_{Ho} + \frac{1}{\sigma^2} SCE_{MC}$$

esto en términos de sus distribuciones es

$$\chi^2_{(N-1)} = \chi^2_{(a-1)} + \chi^2_{(N-a)}$$

Esta es una manera intuitiva de demostrar que, bajo H_0 , SCE_{Ho}/σ^2 y SCE_{MC}/σ^2 son variables aleatorias independientes, formalmente la demostración debe hacerse a través de formas cuadráticas, y que por lo tanto

$$\frac{\frac{1}{a-1} \frac{SCE_{Ho}}{\sigma^2}}{\frac{1}{N-a} \frac{SCE_{MC}}{\sigma^2}} = \frac{N-a}{a-1} \frac{SCE_{Ho}}{SCE_{MC}} \sim F_{(a-1, N-a)}$$

Para poder hacer uso de este hecho es necesario observar que

$$\frac{SCE_{Ho}}{SCE_{MC}} \geq k_4$$

es equivalente a

$$\frac{N-a}{a-1} \frac{SCE_{Ho}}{SCE_{MC}} \geq k \quad 2.3.8$$

Por lo tanto se rechaza H_0 si sucede 2.3.8, donde es claro que

$$k = F_{(a-1, N-a)}^{1-\alpha}$$

es decir, k es el cuantil de orden $1-\alpha$ de una distribución F con $a-1$ grados de libertad en el numerador y $N-a$ en el denominador.

A $\frac{N-a}{a-1} \frac{SCE_{Ho}}{SCE}$ se le nombra como valor calculado de F y se le denota simplemente con tal letra.

Resumiendo, se rechazará H_0 : la igualdad de las medias de los tratamientos, al nivel de significancia α si Y se encuentra en la región \mathcal{C} de rechazo donde

$$\mathcal{C} = \left\{ Y \mid \frac{N-a}{a-1} \frac{SCE_{Ho}}{SCE_{MC}} \geq F_{(a-1, N-a)}^{1-\alpha} \right\}$$

2.4 LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA

Para el modelo completamente al azar con un criterio de clasificación, es decir, en el modelo

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, a \\ j=1, \dots, n_i \end{matrix}$$

la *tabla de análisis de varianza* que contiene los elementos necesarios para realizar la prueba de igualdad de efectos de los tratamientos del factor de interés, para contrastar las hipótesis

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = \tau \quad \text{vs.} \quad H_a: \tau_i \neq \tau_j \quad \text{para alguna } i \neq j$$

es la siguiente

Fuente de variación	Suma de cuadrados del error (SCE)	Grados de libertad	Cuadrados medios del error (CME)	F
H_0	$\sum_{i=1}^a n_i (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$	$a-1$	$SCE_{H_0} / (a-1)$	$\frac{CME_{H_0}}{CME_{MC}}$
Modelo completo	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i..})^2$	$N-a$	$SCE_{MC} / (a-1)$	
Modelo reducido	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{...})^2$	$N-1$		

Como puede observarse se escribe, en la primera columna de la tabla, la fuente de variación, es decir, la descomposición en sumas de cuadrados del error. La segunda columna contiene a las sumas de cuadrados asociadas. Los grados de libertad de la variable χ^2 que se obtiene, bajo H_0 , al dividir cada SCE entre σ^2 , están en la tercera columna, mientras que en la columna cuatro se tienen los cuadrados medios del error, que se definen como el cociente de las SCE entre sus correspondientes grados de libertad. En la columna cinco se encuentra el valor calculado de F.

En algunas ocasiones se agrega a la tabla una sexta columna en donde se escribe el nivel de significancia descriptivo de la prueba que se denota con la letra p y que es la probabilidad de encontrar un valor tanto o más extremo de F.

Puede encontrarse en la literatura que en este modelo la SCE_{HO} se nombra como *suma de cuadrados debida a los tratamientos o entre tratamientos*, $SC_{Tratamientos}$, pues es una medida de las diferencias existentes entre los promedios de los tratamientos. La SCE_{MC} se conoce también como *suma de cuadrados debida al error, dentro de los tratamientos o residual*, SC_R , ya que las diferencias $y_{ij} - \bar{y}_i$ pueden deberse sólo al error aleatorio. Asimismo, la SCE_{MR} se denomina *suma total de cuadrados corregida por la media*, SC_T , dado que es una medida de la variabilidad total de las observaciones, no siempre sucede que la SCE_{MR} sea igual a la SC_T .

2.5 CONSTRUCCION DE INTERVALOS DE CONFIANZA PARA LOS PARAMETROS DEL MODELO

A fin de tener un panorama más completo del modelo estadístico, pueden determinarse intervalos de confianza para los parámetros del mismo.

Ya se mostró que $SCE_{MC}/\sigma^2 \sim \chi^2_{(N-a)}$ de este hecho se obtiene el intervalo siguiente para σ^2 al $(1-\alpha)100\%$ de confianza

$$\left[SCE_{MC}/\chi^2_{(1-\alpha/2, N-a)}, SCE_{MC}/\chi^2_{(\alpha/2, N-a)} \right]$$

Sin embargo, como $\sigma^2 \geq 0$, resultaría de gran utilidad tener un intervalo de la forma $[0, c]$ para este parámetro. Partiendo de

$$P \left[\chi^2_{(\alpha, N-a)} \leq SCE_{MC}/\sigma^2 < \infty \right] = 1-\alpha$$

se obtiene tal intervalo y éste es

$$\left[0, SCE_{MC}/\chi^2_{(\alpha, N-a)} \right]$$

Los intervalos de confianza para μ_i se basan en la construcción de una variable aleatoria t y la forma de obtenerlos se muestra a continuación.

Ya que $\bar{y}_i \sim N(\mu_i, \sigma^2/n_i)$ entonces $\sqrt{n_i}(\bar{y}_i - \mu_i)/\sigma$ tendrá una distribución $N(0,1)$, esta variable es independiente de SCE_{MC}/σ^2 que como ya se observó se distribuye como $\chi^2_{(N-a)}$, por lo tanto se puede afirmar que

$$\frac{(\bar{y}_i - \mu_i)}{\sqrt{SCE_{MC}/(N-a)(n_i)}} = \frac{(\bar{y}_i - \mu_i)}{\sqrt{CME_{MC}/n_i}} \sim t_{(N-a)}$$

de aquí se determina el intervalo para μ_i al $(1-\alpha)100\%$ de confianza que a continuación se muestra

$$\left[\bar{y}_i - t_{(1-\alpha/2, N-a)} \sqrt{CME_{MC}/n_i}, \bar{y}_i + t_{(\alpha/2, N-a)} \sqrt{CME_{MC}/n_i} \right]$$

aplicando la propiedad de simetría de la variable t el intervalo anterior se simplifica a

$$\left[\bar{y}_i \pm t_{(1-\alpha/2, N-a)} \sqrt{CME_{MC}/n_i} \right]$$

De un modo semejante puede obtenerse un intervalo para una combinación lineal de las medias, esto es, para $\sum_{i=1}^a c_i \mu_i$. Dado que $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_a$ son independientes entre sí, la variable $\sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_i$ se distribuye como $N\left(\sum_{i=1}^a c_i \mu_i, \sigma^2 \sum_{i=1}^a \frac{c_i^2}{n_i}\right)$, por lo que

$$\frac{\sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_i - \sum_{i=1}^a c_i \mu_i}{\sqrt{\sigma^2 \sum_{i=1}^a \frac{c_i^2}{n_i}}} \sim N(0,1)$$

Esta variable es independiente de $SCE_{MC}/\sigma^2 \sim \chi^2_{(N-a)}$, por lo tanto

$$\frac{\sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_i - \sum_{i=1}^a c_i \mu_i}{\sqrt{CME_{MC} \sum_{i=1}^a \frac{c_i^2}{n_i}}} \sim t_{(N-a)}$$

y de esto se determina el intervalo al $(1-\alpha)100\%$ de confianza para

$\sum_{i=1}^a c_i \mu_i$ que en seguida se muestra

$$\left[\sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_i \pm t_{(1-\alpha/2, N-a)} \sqrt{CME_{MC} \sum_{i=1}^a \frac{c_i^2}{n_i}} \right]$$

Aplicando este resultado fácilmente puede determinarse el siguiente intervalo para $\mu_i - \mu_j$ (que es un intervalo para $\tau_i - \tau_j$ pues $\mu_i - \mu_j = (\mu + \tau_i) - (\mu + \tau_j) = \tau_i - \tau_j$)

$$\left[(\bar{y}_i - \bar{y}_j) \pm t_{(1-\alpha/2, N-a)} \sqrt{CME_{MC} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} \right]$$

EJEMPLO 2.1

Se desea comparar la resistencia del concreto obtenido a través de cuatro diferentes técnicas de mezclado. Los datos siguientes, así

como los cálculos preliminares, corresponden a este experimento.

Técnica de mezclado	Resistencia (lb/in ²)				\bar{y}_i
1	3129	3000	2865	2890	2971.00
2	3200	3300	2975	3150	3156.25
3	2800	2900	2985	3050	2933.75
4	2600	2700	2600	2765	2666.25

$$\bar{y}_{..} = 2931.81$$

Aplicando el análisis estadístico ya presentado se obtuvo la tabla de análisis de varianza para la prueba de igualdad de los efectos, sobre el concreto, de las cuatro técnicas de mezclado.

Fuente de variación	SCE	Grados de libertad	CME	F
H ₀	489740.18	3	163246.73	12.7281
Mod. completo	153908.26	12	12825.69	
Mod. reducido	643648.44	15		

Al buscar en tablas se encuentra que $F_{(3,12)}^{0.05} = 3.49$, lo cual implica que $F > F_{(3,12)}^{0.05}$ y, por lo tanto, la hipótesis nula es rechazada al nivel 0.05. Esto significa que las técnicas de mezclado dan como resultado diferente resistencia en el concreto

resistencia.

Un intervalo al $(1-\alpha)100\%$ de confianza para σ^2 es

$$\left[0, 153908.26/\chi^2_{(\alpha,12)} \right]$$

si, como antes, se toma $\alpha = 0.05$ el intervalo resulta ser

$$\left[0, 7318.509 \right]$$

Considerando la magnitud de los datos de respuesta, puede considerarse que este intervalo no es demasiado grande, lo cual implica que no hay mucha variabilidad en ellos.

Fácilmente son calculados intervalos de confianza para μ_i , $i=1, \dots, 4$. Por ejemplo, un intervalo al $(1-\alpha)100\%$ de confianza para μ_2 se calcula como

$$\left[3156.25 \pm t_{(1-\alpha/2,12)} (56.6253) \right]$$

tomando nuevamente $\alpha = 0.05$ el intervalo es

$$\left[3032.8635, 3279.6365 \right]$$

Esto indica que con un 95% de confianza se puede afirmar que el verdadero valor de μ_2 se encuentra en este intervalo.

2.6 METODOS PARA LA COMPARACION DE TRATAMIENTOS

El rechazo de la hipótesis de igualdad entre las medias de los tratamientos, hipótesis nula o H_0 , conduce de manera natural a preguntarse, entre otras cosas, cuál de los tratamientos da mejores resultados, si dos tratamientos en particular tienen medias iguales, o bien, si algún tratamiento da mejores resultados que un tratamiento control. Los procedimientos encaminados a responder a éstas y otras interrogantes en las que un investigador podría estar interesado, son conocidos como *metodos de comparaciones múltiples* y los más utilizados, como

- a) Método de la mínima diferencia significativa
- b) Prueba de Tukey
- c) Prueba de Student-Newman-Keuls
- d) Prueba de Duncan
- e) Contrastes Ortogónales
- f) Contraste de Scheffé

se exponen en esta sección.

METODO DE LA MINIMA DIFERENCIA SIGNIFICATIVA

Cuando la hipótesis de igualdad entre las medias de los tratamientos es rechazada, la forma más simple de investigar en dónde se encuentran las diferencias es comparando pares de tratamientos, es decir, realizando pruebas de la forma

$$H_0: \mu_i = \mu_j \quad \text{vs.} \quad H_a: \mu_i \neq \mu_j$$

o equivalentemente

$$H_0: \tau_i = \tau_j \quad \text{vs.} \quad H_a: \tau_i \neq \tau_j$$

para todo i diferente de j , esto implica que hay $\binom{\alpha}{2}$ pruebas.

El procedimiento de la mínima diferencia significativa, desarrollado por Fisher, propone realizar este tipo de pruebas, con una región de rechazo como a continuación se indica.

Anteriormente (sección 2.3) se mostró que

$$\frac{(\bar{y}_i - \bar{y}_j) - (\mu_i - \mu_j)}{\sqrt{\text{CME}_{MC} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}} \sim t_{(N-\alpha)}$$

bajo H_0 , es decir si $\mu_i = \mu_j$

$$\frac{(\bar{y}_i - \bar{y}_j)}{\sqrt{\text{CME}_{MC} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \sim t_{(N-\alpha)}$$

Esto implica que cuando H_0 es cierta

$$\begin{aligned} & P \left[\bar{y}_i - \bar{y}_j \geq t_{(\alpha/2, N-\alpha)} \sqrt{\text{CME}_{MC} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \right] + P \left[\bar{y}_i - \bar{y}_j \leq -t_{(\alpha/2, N-\alpha)} \sqrt{\text{CME}_{MC} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \right] \\ &= P \left[|\bar{y}_i - \bar{y}_j| \geq t_{(\alpha/2, N-\alpha)} \sqrt{\text{CME}_{MC} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \right] \\ &= \alpha \end{aligned}$$

donde $t_{(\alpha/2, N-\alpha)}$ es el cuantil de orden $(1-\alpha/2)$ de una variable aleatoria t con $N-\alpha$ grados de libertad.

De aquí que la hipótesis $H_0: \tau_i = \tau_j$ sea rechazada al nivel de significancia α si

$$|\bar{y}_i - \bar{y}_j| \geq t_{(\alpha/2, N-\alpha)} \sqrt{\text{CME}_{MC} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

Cuando el modelo es balanceado la cantidad contra la cual se compara el valor absoluto de la diferencia entre las dos medias es

$$t_{(\alpha/2, N-\alpha)} \sqrt{2\text{CME}_{MC}/n}$$

y a esta cantidad, que es la misma para cualquier contrastación, se denomina *mínima diferencia significativa* (MDS).

EJEMPLIFICACION

La mínima diferencia significativa para el problema del ejemplo 2.1 con $\alpha = 0.05$, y dado que el diseño es balanceado, $n_i = 4 \quad i=1, \dots, 4$ es

$$\begin{aligned} \text{MDS} &= t_{(0.025, 12)} \sqrt{(2)(12825.688)/4} \\ &= (2.179) \left[\sqrt{6412.844} \right] \\ &= 174.49483 \end{aligned}$$

A continuación se compara $|\bar{y}_i - \bar{y}_j|$ para todo $i \neq j$ contra la MDS.

$$|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| = 185.25 > 174.4948 = \text{MDS}$$

$$|\bar{y}_1 - \bar{y}_3| = 37.25 < 174.4948 = \text{MDS}$$

$$|\bar{y}_1 - \bar{y}_4| = 304.75 > 174.4948 = \text{MDS}$$

$$|\bar{y}_2 - \bar{y}_3| = 222.50 > 174.4948 = \text{MDS}$$

$$|\bar{y}_2 - \bar{y}_4| = 490.00 > 174.4948 = \text{MDS}$$

$$|\bar{y}_3 - \bar{y}_4| = 267.50 > 174.4948 = \text{MDS}$$

puede observarse que la única hipótesis de igualdad de medias de un par de tratamientos que no se rechaza es $H_0: \tau_1 = \tau_3$. El resultado de este tipo de pruebas suele mostrarse de la forma siguiente

$$\tau_4 \quad \underline{\tau_3 \quad \tau_1} \quad \tau_2$$

la línea bajo τ_3 y τ_1 indica que la hipótesis nula respectiva no se rechazó, es decir, la diferencia entre ambas medias es declarada no significativa. En general se unirá con una línea el par de medias entre las cuales no se detectó diferencia significativa.

En este caso el resultado de la prueba y los datos experimentales, señalan que el tratamiento dos es diferente y superior al resto de los tratamientos y que los tratamientos tres y uno son estadísticamente iguales y superiores al tratamiento cuatro que es el peor. Por lo tanto, deberá recomendarse la técnica de mezclado dos, pues tal proceso da como resultado concreto más resistente. Si su aplicación resultara muy costosa, deberá entonces recomendarse emplear las técnicas de mezclado 1 o 3, en donde, como no hay evidencia suficiente para afirmar que dan resultados diferentes, puede emplearse la menos cara. La técnica 2 es significativamente menos recomendable pues el concreto obtenido a través de ella posee la menor resistencia.

PRUEBA DE TUKEY

Este método fue desarrollado por Tukey y sólo se aplica en modelos balanceados. Al igual que el anterior, propone la realización de pruebas de la forma

$$H_0: \mu_i = \mu_j \quad \text{vs.} \quad H_a: \mu_i \neq \mu_j$$

con i diferente de j , como antes se tienen $\binom{a}{2}$ pruebas, y se basa en el hecho de que la variable

$$q_{(p,\nu)} = \frac{\max_{i,j} |x_i - x_j|}{\sqrt{\chi_{(\nu)}^2 / \nu}}$$

donde $i, j \in \{1, \dots, p\}$, x_k se distribuye como $N(0,1)$ y $\chi_{(\nu)}^2$, como ji-cuadrada con ν grados de libertad tiene una distribución de rango estudentizado con parámetros p y ν .

En el modelo con un criterio de clasificación se sabe que

$\frac{(\bar{y}_i - \mu_i)}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$ para $i \in \{1, \dots, a\}$ y que $\frac{SCE_{MC}}{\sigma^2} \sim \chi_{(N-a)}^2$, por lo tanto

$$\begin{aligned} & \frac{\max_{i,j} \left[\frac{(\bar{y}_i - \mu_i)}{\sqrt{\sigma^2/n}} - \frac{(\bar{y}_j - \mu_j)}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right]}{\sqrt{SCE_{MC}/\sigma^2(N-a)}} \\ &= \frac{\max_{i,j} | \bar{y}_i - \bar{y}_j - (\mu_i - \mu_j) |}{\sqrt{CME_{MC}/n}} \sim q_{(a, N-a)} \end{aligned}$$

Bajo H_0 , cuando $\mu_i = \mu_j$, la expresión anterior se reduce a

$$\frac{\max_{i,j} \langle |\bar{y}_i - \bar{y}_j| \rangle}{\sqrt{\text{CME}_{MC}/n}} \sim q_{(\alpha, N-\alpha)}$$

y si $q_{(\alpha, N-\alpha)}^\alpha$ es el cuantil de orden $(1-\alpha)100\%$ de la distribución de rango estudentizado con parámetros α y $N-\alpha$, se puede afirmar que

$$P \left[\frac{\max_{i,j} \langle |\bar{y}_i - \bar{y}_j| \rangle}{\sqrt{\text{CME}_{MC}/n}} \leq q_{(\alpha, N-\alpha)}^\alpha \right] = 1-\alpha$$

lo que equivale a

$$P \left[\frac{|\bar{y}_i - \bar{y}_j|}{\sqrt{\text{CME}_{MC}/n}} \leq q_{(\alpha, N-\alpha)}^\alpha \right] = 1-\alpha$$

para todo $i \neq j$. Esta expresión es equivalente, a su vez, a

$$P \left[|\bar{y}_i - \bar{y}_j| \leq q_{(\alpha, N-\alpha)}^\alpha \sqrt{\text{CME}_{MC}/n} \right] = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P \left[|\bar{y}_i - \bar{y}_j| \geq q_{(\alpha, N-\alpha)}^\alpha \sqrt{\text{CME}_{MC}/n} \right] = \alpha$$

para todo $i \neq j$. De aquí que en este método se rechace $H_0: \mu_i = \mu_j$ si

$$|\bar{y}_i - \bar{y}_j| \geq q_{(\alpha, N-\alpha)}^\alpha \sqrt{\text{CME}_{MC}/n}$$

para todo $i \neq j$.

EJEMPLIFICACION

Para el problema del ejemplo 2.1 la cantidad contra la cual las diferencias entre los promedios de las observaciones deben ser comparadas es

$$q_{(4,12)}^{0.05} \sqrt{CME_{MC}/4} = (4.20)(55.62) \\ = 237.82616$$

Al realizar las comparaciones se observa lo siguiente

$$|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| = 185.25 < 237.8262 = q_{(4,12)}^{0.05} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$|\bar{y}_1 - \bar{y}_3| = 37.25 < 237.8262 = q_{(4,12)}^{0.05} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$|\bar{y}_1 - \bar{y}_4| = 304.75 > 237.8262 = q_{(4,12)}^{0.05} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$|\bar{y}_2 - \bar{y}_3| = 222.50 < 237.8262 = q_{(4,12)}^{0.05} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$|\bar{y}_2 - \bar{y}_4| = 490.00 > 237.8262 = q_{(4,12)}^{0.05} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$|\bar{y}_3 - \bar{y}_4| = 267.50 > 237.8262 = q_{(4,12)}^{0.05} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

estos resultados de manera abreviada son

$$\tau_4 \quad \underline{\tau_3 \quad \tau_1 \quad \tau_2}$$

e indican que las técnicas 1, 2 y 3 producen, en promedio, concreto con la misma resistencia, al menos no hay evidencia suficiente para rechazar esta afirmación, y son estadísticamente diferentes y superiores a la técnica 4 con la que se obtiene el concreto con menor resistencia.

Como puede observarse los resultados de esta prueba y los de la anterior son diferentes, esto se debe a que la prueba de Tukey es un poco más exigente para detectar diferencias.

PRUEBA DE STUDENT-NEWMAN-KEULS (SNK)

Esta prueba es similar a la prueba de Tukey sólo que la diferencia $|\bar{y}_i - \bar{y}_j|$ no se compara contra una constante, sino contra $q_{(p, N-\alpha)}^\alpha \sqrt{CME_{MC}/n}$ donde p es el número de medias que hay entre \bar{y}_i y \bar{y}_j , incluyendo a ambas, cuando se ha ordenado, de manera ascendente o descendente, a las α medias que se tienen, es decir, el número de medias en el rango. De esta forma p tomará los valores $p = 2, 3, \dots, \alpha$. Esta prueba sólo se aplica en casos balanceados.

EJEMPLIFICACION

En el ejemplo manejado en este capítulo, dado que $\alpha=4$, entonces p adoptará los valores 2,3 y 4.

p	$q_{(p, N-\alpha)}^{0.05}$	$q_{(p, N-\alpha)}^{0.05} \sqrt{\text{CME}_{MC}/n}$
2	3.08	174.4059
3	3.77	213.4773
4	4.20	237.8262

hay que recordar que en este ejemplo $N-\alpha=12$, $n=4$ y $\text{CME}_{MC}=12825.688$ las cuatro medias del problema ordenadas de modo ascendente son

$$\bar{y}_4 = 2666.25$$

$$\bar{y}_3 = 2933.75$$

$$\bar{y}_1 = 2971.00$$

$$\bar{y}_2 = 3156.25$$

y siguiendo este método se tienen que realizar las comparaciones

$$\bar{y}_2 - \bar{y}_4 = 490.00 > 237.8262 = q_{(4,12)}^{c, \alpha} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$\bar{y}_1 - \bar{y}_4 = 304.75 > 213.4773 = q_{(3,12)}^{c, \alpha} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$\bar{y}_3 - \bar{y}_4 = 267.50 > 174.4059 = q_{(2,12)}^{c, \alpha} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$\bar{y}_2 - \bar{y}_3 = 222.50 > 213.4773 = q_{(3,12)}^{c, \alpha} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$\bar{y}_1 - \bar{y}_3 = 37.25 < 174.4059 = q_{(2,12)}^{c, \alpha} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$\bar{y}_3 - \bar{y}_4 = 185.25 > 174.4059 = q_{(2,12)}^{c, \alpha} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

de manera abreviada los resultados son

$$\tau_4 \quad \underline{\tau_3 \quad \tau_1} \quad \tau_2$$

y como se observa son iguales a los resultados de la prueba MDS y, por lo tanto, se puede concluir de la misma forma.

PRUEBA DE DUNCAN

Esta prueba también es conocida como *prueba de rangos múltiples* y es similar en su aplicación a la prueba SNK, sólo que la estadística de prueba es

$$q_{(p, N-\alpha)}^{\alpha_p} \sqrt{CME_{MC}/n}$$

donde

$$\alpha_p = 1 - (1 - \alpha)^{p-1}$$

La razón de elegir este nivel de significancia, α_p , es la siguiente.

En un conjunto de p medias no se rechaza la igualdad entre ellas si y sólo si en subconjuntos de q medias, $q < p$, tampoco se da el rechazo. Esto implica que si $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_p$, entonces

$$\mu_1 = \mu_p \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2, \mu_2 = \mu_3, \dots, \mu_{p-1} = \mu_p$$

por lo que, si α_p es el nivel de significancia en la prueba $H_0^{(p)}: \mu_1 = \mu_p$, se tiene que

$$\begin{aligned} 1 - \alpha_p &= P(\text{no rechazar } H_0^{(p)}: \mu_1 = \mu_p \mid H_0^{(p)}) \\ &= P(\text{no rechazar } H_0^{(1)}: \mu_1 = \mu_2, H_0^{(2)}: \mu_2 = \mu_3, \dots, H_0^{(p-1)}: \mu_{p-1} = \mu_p \mid H_0^{(p)}) \quad 2.6.1 \end{aligned}$$

"considerando" que las $p-1$ pruebas $H_0^{(1)}, H_0^{(2)}, \dots, H_0^{(p-1)}$ son independientes, como lo sustenta Duncan, y observando que cuando $H_0^{(p)}$ es cierta se tiene $\mu_1 = \mu_2, \mu_2 = \mu_3, \dots, \mu_{p-1} = \mu_p$, la expresión 2.6.1 es igual

a

$$\prod_{i=1}^{p-1} P(\text{no rechazar } H_0^{(i)} \mid \mu_i = \mu_{i+1}) = (1 - \alpha)^{p-1}$$

por lo tanto

$$\alpha_p = 1 - (1 - \alpha)^{p-1}$$

Los valores de $q_{(p, N-\alpha)}^{\alpha p}$ necesarios para la realización de esta prueba se encuentran en la tabla VI del apéndice.

EJEMPLIFICACION

Con el problema mostrado en este capítulo p toma los valores 2, 3 y 4, como en la prueba anterior. Al tomar $\alpha=0.05$ se obtienen las siguientes cantidades

p	$q_{(p, N-\alpha)}^{\alpha p}$	$q_{(p, N-\alpha)}^{\alpha p} \sqrt{\frac{CME_{MC}}{n}}$
2	3.08	172.40585
3	3.23	182.89964
4	3.33	188.56217

Las cuatro medias que se tienen ordenadas en forma ascendente son

$$\bar{y}_4 = 2666.25$$

$$\bar{y}_3 = 2933.75$$

$$\bar{y}_1 = 2971.00$$

$$\bar{y}_2 = 3156.25$$

y al realizar las comparaciones puede verse que

$$\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{4.} = 490.00 > 188.56217 = q_{(4,12)}^{\alpha p} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$\bar{y}_{1.} - \bar{y}_{4.} = 304.75 > 182.89964 = q_{(3,12)}^{\alpha p} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{4.} = 267.50 > 172.40585 = q_{(2,12)}^{\alpha p} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{3.} = 222.50 > 182.89964 = q_{(3,12)}^{\alpha p} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$\bar{y}_{1.} - \bar{y}_{3.} = 37.25 < 172.40585 = q_{(2,12)}^{\alpha p} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{4.} = 185.25 > 172.40585 = q_{(2,12)}^{\alpha p} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

nuevamente los resultados son

$$\tau_4 \quad \underline{\tau_3 \quad \tau_1} \quad \tau_2$$

y la interpretación que debe dárseles es la misma que aquella que se dió a lo obtenido en la prueba MDS.

CONTRASTES ORTOGONALES

Cuando la hipótesis general de igualdad entre las medias de los tratamientos es rechazada, se podría tener interés, no sólo en comparar

pares de medias, sino en probar si existen relaciones como

$$\mu_3 = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_4) / 3$$

que es igual a probar si

$$3\mu_3 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_4 = 0$$

En general se podría estar interesado en probar si una combinación lineal de las medias de los tratamientos es igual a cero, es decir, en saber si

$$\psi_1 = \sum_{i=1}^a c_i \mu_i$$

es igual a cero. Esto es equivalente a probar si

$$\psi = \sum_{i=1}^a c_i \tau_i$$

es igual a cero, siempre que $\sum_{i=1}^a c_i = 0$.

Lo hasta aquí expuesto conduce al establecimiento del concepto de *contraste*, que es una combinación lineal ψ de la forma

$$\psi = \sum_{i=1}^a c_i \tau_i$$

donde

$$\sum_{i=1}^a c_i = 0$$

y a es el número de tratamientos dentro de un experimento.

Un estimador insesgado de un contraste ψ es

$$\hat{\psi} = \sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_i.$$

pues al obtener la esperanza de $\hat{\psi}$, donde $\hat{\psi}$ es una variable aleatoria con distribución normal, se observa que

$$\begin{aligned} E(\hat{\psi}) &= E\left[\sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^a c_i E(\bar{y}_i) \\ &= \sum_{i=1}^a c_i (\mu + \tau_i) \\ &= \mu \sum_{i=1}^a c_i + \sum_{i=1}^a c_i \tau_i \\ &= \sum_{i=1}^a c_i \tau_i \\ &= \psi \end{aligned}$$

Cuando se dice que se prueba el contraste ψ en realidad se está probando la hipótesis

$$H_0^{\psi}: \psi = 0$$

Surge, entonces, la pregunta ¿cuántos contrastes deben ser probados? Para responder a esta interrogante será de utilidad el siguiente concepto: Dos contrastes con coeficientes $\{c_i\}$ y $\{d_i\}$ son ortogonales si

$$\sum_{i=1}^a c_i d_i = 0$$

Se dice que un conjunto es de contrastes ortogonales si los contrastes contenidos en él son ortogonales dos a dos.

El conjunto de los vectores formados por los coeficientes de todos los posibles contrastes, esto es, el conjunto

$$\mathcal{E} = \left\langle (c_1, c_2, \dots, c_a) \in \mathbb{R}^a \mid \sum_{i=1}^a c_i = 0 \right\rangle$$

es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^a de dimensión $a-1$. Un conjunto de $a-1$ de estos vectores, correspondientes a igual número de contrastes ortogonales, es una base del subespacio, por lo que el vector de coeficientes de cualquier contraste es una combinación lineal de ellos. Esto indica que será suficiente probar sólo un conjunto de $a-1$ contrastes ortogonales. La manera de elegirlos no es única, por ejemplo, si $a=4$,

$$\langle \tau_2 - \tau_3, -2\tau_1 + \tau_2 + \tau_3, -\tau_1 - \tau_2 - \tau_3 + 3\tau_4 \rangle$$

$$\langle \tau_1 - \tau_4, \tau_2 - \tau_3, -\tau_1 - \tau_2 - \tau_3 + \tau_4 \rangle$$

son conjuntos con tres contrastes ortogonales. Las características propias del problema bajo estudio indicarán, en general, el conjunto que deberá probarse.

Puede también cuestionarse el por qué elegir contrastes ortogonales y no simplemente $a-1$ contrastes cuyos vectores sean linealmente independientes, y que por lo tanto formen también una base de \mathcal{E} . La razón de esta elección es que si dos contrastes ψ_1 y ψ_2 son ortogonales, entonces sus estimadores, $\hat{\psi}_1$ y $\hat{\psi}_2$ respectivamente, son estadísticamente independientes. Algunos hechos de utilidad para mostrar

tal independencia son:

(a) El estimador $\hat{\psi}$ tiene distribución normal con media ψ , esto se mostró anteriormente y su varianza es

$$\begin{aligned} V(\hat{\psi}) &= V\left(\sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^a c_i^2 V(\bar{y}_i) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^a \frac{c_i^2}{n_i} \end{aligned}$$

(b) Como $\bar{y}_i \sim N(\mu + \tau_i, \sigma^2/n)$ entonces $(\bar{y}_i, -\tau_i) \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} V(\bar{y}_i, -\tau_i) &= E[(\bar{y}_i, -\tau_i)^2] - [E(\bar{y}_i, -\tau_i)]^2 \\ &= E[(\bar{y}_i, -\tau_i)^2] - \mu^2 \end{aligned}$$

de esto se concluye que:

$$E[(\bar{y}_i, -\tau_i)^2] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

(c) Cuando $i \neq j$

$$\begin{aligned} E[(\bar{y}_i, -\tau_i)(\bar{y}_j, -\tau_j)] &= E(\bar{y}_i, -\tau_i) \cdot E(\bar{y}_j, -\tau_j) \\ &= \mu^2 \end{aligned}$$

(ya que $(\bar{y}_i, -\tau_i)$ y $(\bar{y}_j, -\tau_j)$ son independientes.

Para mostrar que $\hat{\psi}_1$ y $\hat{\psi}_2$ son independientes, dado que estos estimadores tienen distribución normal, basta probar que $\text{Cov}(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2) = 0$,

lo que a continuación se realiza.

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2) &= E\left[(\hat{\psi}_1 - E\hat{\psi}_1) \cdot (\hat{\psi}_2 - E\hat{\psi}_2)\right] \\
 &= E\left[(\hat{\psi}_1 - \psi_1) \cdot (\hat{\psi}_2 - \psi_2)\right] \\
 &= E\left[\left(\sum_{i=1}^a c_{1i}(\bar{y}_i - \tau_i)\right)\left(\sum_{i=1}^a c_{2i}(\bar{y}_i - \tau_i)\right)\right] \\
 &= E\left[\left(\sum_{i=1}^a c_{1i}(\bar{y}_i - \tau_i)\right)\left(\sum_{i=1}^a c_{2i}(\bar{y}_i - \tau_i)\right)\right] \\
 &= E\left[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^a c_{1i} c_{2j} (\bar{y}_i - \tau_i)(\bar{y}_j - \tau_j)\right] \\
 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^a c_{1i} c_{2j} E[(\bar{y}_i - \tau_i)(\bar{y}_j - \tau_j)] \\
 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^a c_{1i} c_{2j} E[(\bar{y}_i - \tau_i)(\bar{y}_j - \tau_j)] + \sum_{i=1}^a c_{1i} c_{2i} E[(\bar{y}_i - \tau_i)^2] \\
 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^a c_{1i} c_{2j} \mu^2 + \sum_{i=1}^a c_{1i} c_{2i} (\mu^2 + \sigma^2/n_i) \\
 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^a c_{1i} c_{2j} \mu^2 + \sum_{i=1}^a c_{1i} c_{2i} \sigma^2/n_i \\
 &= \mu^2 \sum_{i=1}^a c_{1i} \sum_{j=1}^a c_{2j} + \sigma^2 \sum_{i=1}^a c_{1i} c_{2i}/n_i \\
 &= \sigma^2 \sum_{i=1}^a c_{1i} c_{2i}/n_i \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

esta cantidad es igual a cero por ser ψ_1 y ψ_2 ortogonales.

Para probar un contraste, es decir, para probar la hipótesis

$H_0: \psi = 0$, hay que recordar que $\hat{\psi} \sim N(\psi, \sigma^2 \sum_{i=1}^a \frac{c_i}{n_i})$ y, por lo tanto,

$$\frac{(\hat{\psi} - \psi)^2}{\sigma^2 \sum_{i=1}^a \frac{c_i}{n_i}} \sim \chi^2_{(1)}$$

Esta variable es independiente de $\frac{SCE_{MC}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(N-a)}$, por lo que

$$\frac{(\hat{\psi} - \psi)^2}{CME_{MC} \sum_{i=1}^a \frac{c_i}{n_i}} \sim F_{(1, N-a)}$$

y bajo H_0 se tiene

$$\frac{(\hat{\psi})^2}{CME_{MC} \sum_{i=1}^a \frac{c_i}{n_i}} \sim F_{(1, N-a)} \quad 2.6.2$$

A la cantidad

$$\frac{(\hat{\psi})^2}{\sum_{i=1}^a \frac{c_i}{n_i}}$$

se le denomina *suma de cuadrados del error del contraste* ψ , SCE_{ψ} , y puesto que, bajo H_0 , $SCE_{\psi}/\sigma^2 \sim \chi^2_{(1)}$, se tiene que $SCE_{\psi} = CME_{\psi}$. Usando esta notación la expresión 2.6.2 queda como

$$\frac{CME_{\psi}}{CME_{MC}} \sim F_{(1, N-a)}$$

Partiendo del hecho de que

$$P \left[\frac{CME_{\psi}}{CME_{MC}} > F_{(1, N-\alpha)}^{1-\alpha} \right] = \alpha$$

se deduce que se rechazará el contraste ψ cuando

$$\frac{CME_{\psi}}{CME_{MC}} > F_{(1, N-\alpha)}^{1-\alpha}$$

Las hipótesis a probar a través de los contrastes deben ser establecidas antes de examinar los datos experimentales, a fin evitar un incremento considerable del error tipo I, rechazar una hipótesis cuando ésta es cierta, pues si se observase, por ejemplo, que \bar{y}_1 es mayor que \bar{y}_2 , podría entonces plantearse la hipótesis $H_0: \mu_1 = \mu_2$ que tenderá a ser rechazada, sin embargo, la diferencia señalada podría deberse tanto a una real discrepancia en los tratamientos respectivos, como al error experimental, en cuyo caso el rechazo de H_0 representará un error del tipo I.

EJEMPLIFICACION

Supóngase que en las técnicas de mezclado de concreto se desea saber si

$$\tau_1 = \frac{\tau_3 + \tau_4}{2}$$

$$\tau_2 = \frac{\tau_1 + \tau_3 + \tau_4}{3}$$

$$\tau_3 = \tau_4$$

lo que da lugar a probar los contrastes ortogonales

$$\psi_1 = 2\tau_1 - \tau_3 - \tau_4$$

$$\psi_2 = -\tau_1 + 3\tau_2 - \tau_3 - \tau_4$$

$$\psi_3 = \tau_3 - \tau_4$$

Los estimadores y los CME correspondientes a cada contraste, así como la F calculada en cada caso, son

$$\hat{\psi}_1 = 2(2971) - (2933.75) - (2666.25) = 342.00$$

$$\hat{\psi}_2 = -(2971) + 3(3156.25) - (2933.75) - (2666.25) = 897.75$$

$$\hat{\psi}_3 = (2933.75) - (2666.25) = 267.50$$

$$CME_{\psi_1} = \frac{(342.00)^2}{(1/4)(6)} = 77976.00$$

$$F = \frac{77976.000}{12825.688} = 6.079673$$

$$CME_{\psi_2} = \frac{(897.75)^2}{(1/4)(12)} = 268651.69$$

$$F = \frac{268651.690}{12825.688} = 20.946376$$

$$CME_{\psi_3} = \frac{(267.50)^2}{(1/4)(2)} = 143112.50$$

$$F = \frac{143112.500}{12825.688} = 11.158271$$

Al buscar en tablas se encuentra que $F_{(1,12)}^{c.p.} = 4.75$ por lo que las tres hipótesis planteadas son rechazadas al nivel 0.05. Las pruebas

$$H_{01}: \psi_1 = 2\tau_1 - \tau_3 - \tau_4 = 0 \quad \text{vs.} \quad H_{a1}: \psi_1 \neq 0$$

$$H_{02}: \psi_2 = -\tau_1 + 3\tau_2 - \tau_3 - \tau_4 = 0 \quad \text{vs.} \quad H_{a2}: \psi_2 \neq 0$$

$$H_{03}: \psi_3 = -\tau_1 + 3\tau_2 - \tau_3 - \tau_4 = 0 \quad \text{vs.} \quad H_{a3}: \psi_3 \neq 0$$

son agregadas a la tabla de análisis de varianza como se muestra enseguida.

Fuente de variación	SCE	Grados de libertad	CME	F
H_0	489740.18	3	163246.73	12.7281
Contrastes ortogonales				
$\psi_1 = 2\tau_1 - \tau_3 - \tau_4$	77976.00	1	77976.00	6.0796
$\psi_2 = -\tau_1 + 3\tau_2 - \tau_3 - \tau_4$	268651.69	1	268651.69	20.9463
$\psi_3 = \tau_3 - \tau_4$	143112.50	1	143112.50	11.1582
Mod. completo	153908.26	12	12825.69	
Mod. reducido	643648.44	15		

Como se observa $SCE_{H_0} = SCE_{\psi_1} + SCE_{\psi_2} + SCE_{\psi_3}$. Puede demostrarse que esto sucede en general para cualquier conjunto de $a-1$ contrastes

ortogonales.

La interpretación de los resultados depende de los contrastes que se hayan planteado, por ejemplo, del rechazo del contraste ψ_1 de este problema se puede concluir que no hay evidencia suficiente como para afirmar que en promedio las técnicas de mezclado de concreto 3 y 4 dan el mismo resultado que la técnica 1.

METODO DE SCHEFFE

Ya se ha señalado la importancia de plantear de antemano los contrastes a probar dentro de un experimento, sin embargo esto no siempre es posible. Además se podría tener interés en más de $\alpha-1$ comparaciones entre las medias de los tratamientos, pruebas de contrastes. El método de Scheffé proporciona un método para realizar todas y cada una de las comparaciones posibles, con un nivel de error tipo I de, al menos, α .

Puede demostrarse lo siguiente

$$\sup_{\psi} \langle \text{SCE}_{\psi} \rangle = \text{SCE}_{H_0}$$

utilizando esto, y el hecho de que $\text{CME}_{H_0} / \text{CME}_{MC}$ bajo H_0 , la hipótesis general de igualdad entre los efectos de los tratamientos, se

distribuye como $F_{(\alpha-1, N-\alpha)}$ puede afirmarse que, cuando H_0 es cierta,

$$\frac{\frac{\text{Sup } \langle \text{SCE}_\psi \rangle}{\psi} \frac{\alpha-1}{\text{CME}_{MC}}}{\psi} = \text{Sup}_\psi \left\{ \frac{\text{SCE}_\psi}{\text{CME}_{MC}} \right\} \frac{1}{\alpha-1} \sim F_{(\alpha-1, N-\alpha)}$$

por lo tanto, bajo H_0 ,

$$P \left[\text{Sup}_\psi \left\{ \frac{\text{SCE}_\psi}{\text{CME}_{MC}} \right\} \frac{1}{\alpha-1} \geq F_{(\alpha-1, N-\alpha)}^{1-\alpha} \right] = \alpha$$

lo que equivale a que, bajo H_0 ,

$$P \left[\frac{\text{SCE}_\psi}{\text{CME}_{MC}} \frac{1}{\alpha-1} \geq F_{(\alpha-1, N-\alpha)}^{1-\alpha} \right] = \alpha$$

para todo ψ , de aquí que se pueda probar cualquier número de contrastes. Una nueva equivalencia de esta última expresión es, cuando H_0 es cierta,

$$P \left[|\hat{\psi}| \geq \sqrt{\text{CME}_{MC}(\alpha-1) F_{(\alpha-1, N-\alpha)}^{1-\alpha} \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{c_i^2}{n_i}} \right] = \alpha$$

para todo ψ .

Por lo tanto, se rechazará $\psi = 0$, al nivel α de significancia si

$$|\hat{\psi}| \geq \sqrt{\text{CME}_{MC}(\alpha-1) F_{(\alpha-1, N-\alpha)}^{1-\alpha} \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{c_i^2}{n_i}}$$

EJEMPLO 2.7

Supóngase que en el problema del ejemplo 2.1 se desea saber si

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \mu_3 \\ \mu_1 + \mu_3 &= \mu_2 + \mu_4 \\ \mu_3 &= \mu_4 \\ 2\mu_3 &= \mu_1 + \mu_4\end{aligned}$$

esto implica probar los contrastes

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \tau_1 - \tau_3 \\ \psi_2 &= \tau_1 - \tau_2 + \tau_3 - \tau_4 \\ \psi_3 &= \tau_3 - \tau_4 \\ \psi_4 &= -\tau_1 + 2\tau_3 - \tau_4\end{aligned}$$

El valor numérico del estimador, así como la estadística de prueba para cada contraste se muestran a continuación

$\hat{\psi}$		Estadística de prueba
$\hat{\psi}_1 = 37.25$	<	259.1186
$\hat{\psi}_2 = 82.25$	<	366.4491
$\hat{\psi}_3 = 267.50$	>	259.1186
$\hat{\psi}_4 = 230.25$	<	448.8066

Como puede observarse el único contraste que es rechazado, al

nivel 0.05, es $\hat{\psi}_3$. Como en los contrastes ortogonales la interpretación de los resultados depende de las hipótesis planteadas.

De los métodos de comparaciones múltiples descritos, el más utilizado es el de contrastes de Scheffe pues, como se indicó, permite realizar cuantas comparaciones se desee, además estas comparaciones no se tienen que plantear antes de realizar el experimento, como en contrastes ortogonales, sino que pueden ser sugeridas por la información experimental. Otra razón por la que el procedimiento de contrastes ortogonales no es muy usado es que en ocasiones encontrar un conjunto de contrastes ortogonales no es muy fácil.

De las pruebas de Tukey, SNK y Duncan la más empleada es la de Tukey, en tanto que la menos utilizada es la prueba de Duncan, pues a cada momento aparecen nuevas tablas para su realización que mejoran a las anteriores.

CAPITULO 3

EL DISEÑO DE BLOQUES

3.1 INTRODUCCION

El diseño que en este capítulo se presenta es usado cuando se desea saber si α distintos tratamientos, o niveles de algún factor de interés, tienen efectos diferentes, es decir, se desea contrastar las hipótesis

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_\alpha \quad \text{vs.} \quad H_a: \tau_i \neq \tau_j \quad \text{para alguna } i \neq j$$

donde τ_i es el efecto del i -ésimo tratamiento, pero existen factores que, si bien, no son de fundamental interés, se sabe que son

importantes, que pueden afectar a la evaluación de la respuesta y que pueden introducir en ella variabilidad no deseada, y se pretenden eliminar o controlar más que estudiar.

Un *bloque experimental* representa un conjunto, relativamente homogéneo, de condiciones o unidades experimentales en las cuales se habrá de aplicar diferentes tratamientos o niveles de algún factor de interés. Ejemplos de bloques son: las parcelas, en experimentos agrícolas; los lotes de materia prima, que tienden a ser homogéneos, en la industria; y, dado que en los laboratorios los resultados suelen variar de un día a otro, los días podrían, en tal caso, constituir los bloques.

Un problema en el que claramente se observa la necesidad de los bloques es el siguiente: Supóngase que se desea comparar el desgaste de cuatro tipos diferentes de llantas para automóviles: A, B, C y D (en este caso un tratamiento consiste en el uso de un tipo particular de llanta) y se tienen disponibles cuatro autos para realizar la comparación. Un procedimiento que en un principio podría ocurrirse para hacer esto consiste en emplear un mismo tipo de llanta en cada uno de ellos como se muestra en la tabla

Automóvil			
1	2	3	4
A	B	C	D
A	B	C	D
A	B	C	D
A	B	C	D

Este procedimiento es muy inadecuado, pues el desgaste de un neumático se debe no solo a su tipo, sino también a las características propias del auto en que es usado, los distintos caminos por los que este circula, etc. y en la asignación propuesta no se puede saber qué tanto del desgaste de un tipo particular de llanta se debe a las condiciones del automóvil en que fue probada, es decir, las diferencias entre las llantas no pueden ser separadas de las diferencias entre los autos. Si las divergencias entre los coches son significativas, contribuirán a la variabilidad en el desgaste, dando como resultado que el error experimental refleje al error en sí y a la variabilidad entre ellos. La separación de los efectos señalados, neumáticos y autos, así como la remoción de la variabilidad entre automóviles, se puede lograr si se trata a éstos como bloques experimentales y aleatoriamente se asignan llantas a cada una de las posiciones, delantera izquierda, delantera derecha, trasera izquierda y trasera derecha, de cada auto, quedando, por ejemplo, la siguiente distribución

Automóvil			
1	2	3	4
B	C	A	D
C	A	C	D
A	D	B	A
D	B	D	C

Una vez que la respuesta ha sido obtenida, el desgaste de cada

llanta, se debe analizar como se indica en este capítulo.

Los bloques que en este modelo se utilizan son *completos*, esto significa que en cada uno de ellos se aplican todos los tratamientos. Por lo tanto, si un bloque es un conjunto de unidades experimentales, éste debe estar formado por, al menos, tantos elementos como tratamientos se deseen comparar. Esto implica que el modelo que se analizara es balanceado, es decir, se tendrá el mismo número de observaciones bajo cada tratamiento. Cuando en cada bloque no se aplican todos los tratamientos se dice que son *incompletos* y el análisis de tal caso no se contempla en este trabajo.

También se dice que los bloques son *aleatorizados*, ya que el orden en el cual se aplicarán los tratamientos dentro de ellos es determinado de manera aleatoria.

2 EL MODELO

Los resultados obtenidos en un experimento con un diseño de bloques donde se tienen a tratamientos y b bloques, pueden ser registrados en una tabla como la siguiente $N=a \cdot b$.

	Bloques				$y_{.j}$	$\bar{y}_{.j}$
	1	2	...	b		
Tratamientos						
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1b}	$\sum_{j=1}^b y_{1j}$	$y_{1.}/b$
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2b}	$\sum_{j=1}^b y_{2j}$	$y_{2.}/b$
...						
a	y_{a1}	y_{a2}	...	y_{ab}	$\sum_{j=1}^b y_{aj}$	$y_{a.}/b$
$y_{.j}$	$\sum_{i=1}^a y_{ij}$	$\sum_{i=1}^a y_{ij}$...	$\sum_{i=1}^a y_{ij}$	$y_{..} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij}$	
$\bar{y}_{.j}$	$y_{.1}/a$	$y_{.2}/a$...	$y_{.b}/a$	$\bar{y}_{..} = y_{..}/N$	

donde

y_{ij} es la observación realizada en el j -ésimo bloque bajo el i -ésimo tratamiento

$\bar{y}_{i.}$ es el promedio de las observaciones efectuadas bajo el tratamiento i

$\bar{y}_{.j}$ es el promedio de las observaciones realizadas dentro del bloque j .

El modelo estadístico para este diseño es

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, a \\ j=1, \dots, b \end{matrix} \quad 3.2.1$$

donde

μ es la media global

τ_i es el efecto del i -ésimo tratamiento

β_j es el efecto del j -ésimo bloque

ϵ_{ij} es el error experimental de la observación correspondiente.

Los errores se supondrán variables aleatorias independientes, es decir, ϵ_{ij} es independiente de ϵ_{kl} si $i \neq k$ ó $j \neq l$, con distribución normal, de media cero y varianza constante σ^2 , varianza constante para todas las observaciones que se tengan.

El modelo 3.2.1 es completamente aditivo, es decir, el efecto del i -ésimo tratamiento (τ_i) sobre la respuesta es constante, independientemente del bloque en el cual es aplicado, igualmente, el efecto del j -ésimo bloque (β_j) es el mismo no obstante los tratamiento que en él se apliquen.

Como puede observarse cada y_{ij} tendrá una distribución normal con media $\mu + \tau_i + \beta_j$ y varianza σ^2 .

Como se indicó en la introducción, el interés de este modelo es probar la igualdad de los efectos de los diferentes niveles del factor de interés, promediados sobre los bloques. Desde luego no se plantea la igualdad entre bloques ya que por construcción constituyen conjuntos de condiciones experimentales diferentes.

3.3 LA CONTRASTACION DE LA HIPOTESIS

Para contrastar las hipótesis

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a \quad \text{vs.} \quad H_a: \tau_i \neq \tau_j \quad \text{para alguna } i \neq j$$

por el método de máxima verosimilitud generalizado al nivel de significancia α , es necesario encontrar la región \mathcal{C} de rechazo que se calcula como

$$\mathcal{C} = \{ Y \mid \Lambda \leq k \}$$

con Λ igual a

$$\Lambda = \frac{\max_{\theta \in \omega_0} L(\theta | Y)}{\max_{\theta \in \Omega} L(\theta | Y)}$$

donde

θ representa al vector de parámetros involucrados en el modelo;

Ω es el espacio parametral, en otras palabras,

$$\Omega = \{ (\mu, \tau_1, \dots, \tau_a, \beta_1, \dots, \beta_b, \sigma^2) \mid \mu, \tau_i, \beta_j \in \mathbb{R}; \sigma^2 \in \mathbb{R}^+ \};$$

ω_0 representa al conjunto de posibles parámetros bajo H_0 , es decir, cuando $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = \tau$, es claro que ω_0 es un subconjunto de Ω ;

$L(\underline{\theta}|Y)$ es la función de verosimilitud.

y k es de tal forma que

$$\begin{aligned} P(\text{rechazar } H_0 | H_0 \text{ cierta}) &= P(Y \in \mathcal{B} | H_0) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Anteriormente se indicó que $y_{ij} \sim N(\mu + \tau_i + \beta_j, \sigma^2)$, esto es,

$$f(y_{ij} | \mu, \tau_1, \dots, \tau_a, \beta_1, \dots, \beta_b, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \text{Exp}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y_{ij} - (\mu + \tau_i + \beta_j))^2\right]$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} L(\underline{\theta}|Y) &= L(\mu, \tau_1, \dots, \tau_a, \beta_1, \dots, \beta_b, \sigma^2 | Y) \\ &= \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b f(y_{ij} | \mu, \tau_1, \dots, \tau_a, \beta_1, \dots, \beta_b, \sigma^2) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-N/2} \text{Exp}\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - (\mu + \tau_i + \beta_j))^2\right] \end{aligned}$$

Maximizar la verosimilitud con $\underline{\theta} \in \Omega$ es equivalente a evaluar esta función en los estimadores máximo verosímiles de los parámetros del modelo, que estarán denotados por $\hat{\sigma}^2$, $\hat{\mu}$, $\hat{\tau}_i$ y $\hat{\beta}_j$.

Puede obtenerse con facilidad el siguiente resultado

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - (\hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j))^2}{N}$$

que establece que $\hat{\sigma}^2$ depende de $\hat{\mu}$, de $\hat{\tau}_i$ ($i=1, \dots, a$) y de $\hat{\beta}_j$ ($j=1, \dots, b$) por lo tanto, maximizar L es equivalente a minimizar S donde

$$S = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - (\hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j))^2$$

La solución de las siguientes ecuaciones, llamadas *normales*, es el punto donde se minimiza S

$$\frac{\partial S}{\partial \mu} \Big|_{\hat{\mu}, \hat{\tau}_i, \hat{\beta}_j} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tau_i} \Big|_{\hat{\mu}, \hat{\tau}_i, \hat{\beta}_j} = 0 \quad i=1, \dots, a$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_j} \Big|_{\hat{\mu}, \hat{\tau}_i, \hat{\beta}_j} = 0 \quad j=1, \dots, b$$

después de derivar se obtienen las ecuaciones

$$-2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - (\hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j)) = 0$$

$$-2 \sum_{j=1}^b (y_{ij} - (\hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j)) = 0 \quad i=1, \dots, a$$

$$-2 \sum_{i=1}^a (y_{ij} - (\hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j)) = 0 \quad j=1, \dots, b$$

y al simplificar se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones normales

$$N\hat{\mu} + b\hat{\tau}_1 + b\hat{\tau}_2 + \dots + b\hat{\tau}_a + a\hat{\beta}_1 + a\hat{\beta}_2 + \dots + a\hat{\beta}_b = y_{..}$$

$$b\hat{\mu} + b\hat{\tau}_1 + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \dots + \hat{\beta}_b = y_{1.}$$

$$b\hat{\mu} + b\hat{\tau}_2 + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \dots + \hat{\beta}_b = y_{2.}$$

⋮

$$b\hat{\mu} + b\hat{\tau}_a + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \dots + \hat{\beta}_b = y_{a.}$$

$$a\hat{\mu} + \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \dots + \hat{\tau}_a + a\hat{\beta}_1 = y_{.1}$$

$$a\hat{\mu} + \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \dots + \hat{\tau}_a + a\hat{\beta}_2 = y_{.2}$$

⋮

$$a\hat{\mu} + \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \dots + \hat{\tau}_a + a\hat{\beta}_b = y_{.b}$$

Estas $a+b+1$ ecuaciones no son linealmente independientes, pues la primera de ellas es igual a la suma desde la segunda hasta la ecuación $a+1$ y a la suma de las últimas b ecuaciones, por lo tanto no habrá estimadores únicos para los parámetros del modelo. Sin embargo sí se puede estimar de manera única a $\mu + \tau_1 + \beta_j$ y esto se muestra al multiplicar la primera ecuación del sistema por $(-1/N) = (-1/ab)$, la ecuación $i+1$ por $1/b$ y la ecuación $a+j+1$ por $1/a$ y sumar los resultados, obteniéndose:

$$\begin{aligned}
& \left[-\hat{\mu} - (1/a)(\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \dots + \hat{\tau}_a) - (1/b)(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \dots + \hat{\beta}_b) = \bar{y}_{..} \right] \\
& + \left[\hat{\mu} \qquad \qquad \qquad + \hat{\tau}_1 \qquad \qquad \qquad + (1/b)(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \dots + \hat{\beta}_b) = \bar{y}_{i.} \right] \\
& + \left[\hat{\mu} + (1/a)(\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \dots + \hat{\tau}_a) \qquad \qquad \qquad + \hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j} \right] \\
\hline
& \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j = \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}
\end{aligned}$$

por lo tanto se puede afirmar que

$$\widehat{\mu + \tau_i + \beta_j} = \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$$

Este estimador es insesgado pues

$$\begin{aligned}
EC\widehat{\mu + \tau_i + \beta_j} &= E \left[\frac{1}{b} \sum_{j=1}^b y_{ij} + \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a y_{ij} - \frac{1}{ab} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij} \right] \\
&= \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b ECy_{ij} + \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a ECy_{ij} - \frac{1}{ab} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b ECy_{ij} \\
&= \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b (\mu + \tau_i + \beta_j) + \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a (\mu + \tau_i + \beta_j) - \frac{1}{ab} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\mu + \tau_i + \beta_j) \\
&= \mu + \tau_i + \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \beta_j + \mu + \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a \tau_i + \beta_j - \mu - \frac{1}{ab} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \tau_i - \frac{1}{ab} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_j \\
&= \mu + \tau_i + \beta_j
\end{aligned}$$

Las funciones lineales linealmente estimables en este modelo son las combinaciones de la forma

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b c_{ij} (\mu + \tau_i + \beta_j)$$

estimadas, insesgadamente, por el método de máxima verosimilitud y de manera única por

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b c_{ij} (\bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})$$

Utilizando el estimador $\mu + \tau_i + \beta_j$ se determina σ^2

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - (\bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}))^2}{N}$$

que es un estimador sesgado, un estimador insesgado de este parámetro está dado por:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - (\bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}))^2}{N-a}$$

Al evaluar la verosimilitud en el conjunto de estimadores encontrados, que se representan con $\hat{\theta}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} LC(\hat{\theta}|Y) &= \max_{\theta \in \Omega} LC(\theta|Y) \\ &= \left[(2\pi) \hat{\sigma}^2 \right]^{-N/2} \text{Exp}(-N/2) \end{aligned}$$

Para maximizar L con $\theta \in \omega_0$, se debe que observar que el modelo 3.2.1, o sea

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

que es el *modelo completo*, bajo H_0 , es decir cuando $\tau_1 = \dots = \tau_a = \tau$,

se transforma en

$$\begin{aligned} y_{ij} &= \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \\ &= \mu + \tau + \beta_j + \varepsilon_{ij} \\ &= \mu^* + \beta_j + \varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

con $\mu^* = \mu + \tau$, el cual es el *modelo reducido*.

Como se observa este último es el modelo completo del capítulo anterior, modelo completamente al azar con un criterio de clasificación, por lo que, siguiendo un procedimiento semejante al que se empleó en ese capítulo para maximizar la verosimilitud y encontrar $\hat{\theta}$, se obtiene:

$$\widehat{\mu^* + \beta_j} = \bar{y}_{.j}$$

y

$$\widehat{\sigma_0^2} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{.j})^2}{N}$$

son los estimadores máximo verosimiles de los parámetros que en tal caso se tienen.

Al evaluar la verosimilitud en los estimadores calculados bajo H_0 es decir en $\hat{\theta}_0$, se observa que

$$\begin{aligned} L(\hat{\theta}_0 | Y) &= \max_{\theta \in \omega_0} L(\theta | Y) \\ &= \left[(2\pi)^{-N/2} \widehat{\sigma_0^2}^{-N/2} \right] \text{Exp}(-N/2) \end{aligned}$$

En este modelo la suma $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{.j})^2$ es la *suma de cuadrados del error en el modelo reducido*, SCE_{MR} , pues se trata de una medida del error en el que se incurre al suponer valido tal modelo, en tanto que la suma $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - (\bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}))^2$ es la *suma de cuadrados del error en el modelo completo*, SCE_{MC} , pues es, a su vez, una estimación del error en el que se incide al suponer cierto tal modelo, tambien se le designa como *suma de cuadrados debida al error*, SC_E , o *suma de cuadrados residual*, SC_R .

Ahora es posible continuar con la obtención de Λ , rechazandose H_0 si

$$\Lambda = \frac{\max_{\theta \in \omega_0} L(\theta|Y)}{\max_{\theta \in \Omega} L(\theta|Y)} = \frac{\left[(2\pi) \widehat{\sigma}_0^2 \right]^{-N/2} \text{Exp}(-N/2)}{\left[(2\pi) \widehat{\sigma}^2 \right]^{-N/2} \text{Exp}(-N/2)} \leq k_1$$

$$\left[\frac{\widehat{\sigma}_0^2}{\widehat{\sigma}^2} \right]^{-N/2} = \left[\frac{SCE_{MR}}{SCE_{MC}} \right]^{-N/2} \leq k_1$$

$$\frac{SCE_{MC}}{SCE_{MR}} \leq k_2 \quad 3.3.1$$

Para conocer a la constante k_2 es necesario conocer la distribución, bajo H_0 , del cociente de 3.3.1, pues k_2 es tal que

$$P(\text{rechazar } H_0 | H_0 \text{ cierta}) = P(Y \in \mathcal{E} | H_0)$$

$$= P \left[\frac{\text{SCE}_{MC}}{\text{SCE}_{MR}} \leq k_2 \mid H_0 \right]$$

$$= \alpha$$

Bajo la hipótesis nula $y_{ij} \sim N(\mu^* + \beta_j, \sigma^2)$ (con $\mu^* = \mu + \tau$) por lo tanto

$$\frac{1}{\sigma^2} (y_{ij} - (\mu^* + \beta_j))^2 \sim \chi_{(1)}^2$$

recordando que las y_{ij} son independientes entre sí, puede afirmarse que

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - (\mu^* + \beta_j))^2 \sim \chi_{(N)}^2$$

si se estima $\mu^* + \beta_j$ con su correspondiente $\bar{y}_{.j}$ se obtiene

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{.j})^2 = \frac{1}{\sigma^2} \text{SCE}_{MR} \sim \chi_{(N-b)}^2$$

La variable

$$\frac{1}{\sigma^2} (y_{ij} - (\mu + \tau_i + \beta_j))^2 \sim \chi_{(1)}^2$$

aún sin suponer H_0 , por lo que

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - (\mu + \tau_i + \beta_j))^2 \sim \chi_{(N)}^2$$

al estimar $\mu + \tau_i + \beta_j$, $i=1, \dots, a$ $j=1, \dots, b$, con $\bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$ se obtiene

también una variable aleatoria con distribución χ^2 , esto es,

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 = \frac{1}{\sigma^2} SCE_{MC} \sim \chi^2_{(a-1)},$$

con los grados de libertad que posteriormente se indicarán.

De lo anterior se concluye que, si SCE_{MC} y SCE_{MR} son independientes, entonces su cociente, multiplicado por la constante apropiada, se distribuirá como una función F. Desafortunadamente tal independencia no existe, pues puede verse que:

$$\begin{aligned} SCE_{MR} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{.j})^2 \\ &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..} + \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \\ &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) \cdot (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) \\ &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + b \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \end{aligned} \quad 3.3.2$$

La suma $b \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$ es la suma de cuadrados del error de la hipótesis H_0 (SCE_{H_0}), y su distribución, bajo la hipótesis nula, es $\chi^2_{(a-1)}$ pues, cuando la hipótesis nula es cierta, $y_{ij} \sim NC(\mu^* + \beta_j, \sigma^2)$ y por lo tanto

$$\bar{y}_{i.} \sim N(\mu^*, \sigma^2/b)$$

con $\mu^* = \mu^* + \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \beta_j$, esto implica que:

$$\frac{b}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \mu^*)^2 \sim \chi_{(a)}^2$$

al estimar con $\bar{y}_{..} \approx \mu^*$ se concluye que:

$$\frac{b}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = \frac{SCE_{Ho}}{\sigma^2} \sim \chi_{(a-1)}^2$$

Como puede verse, el tercer sumando en que se descompone la SCE_{MR} es cero, hecho que a continuación se demuestra

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - (\bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})) \cdot (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})$$

$$= \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) \left[\sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) \left[\sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{i.}) - \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) \left[b\bar{y}_{i.} - b\bar{y}_{i.} - b\bar{y}_{..} + b\bar{y}_{..} \right]$$

$$= 0$$

La identidad 3.3.2 simbólicamente es

$$SCE_{MR} = SCE_{MC} + SCE_{Ho}$$

3.3.3

e indica claramente que SCE_{MC} y SCE_{MR} no son independientes, y por lo tanto el cociente SCE_{MC}/SCE_{MR} no se distribuye como F, además, dicho cociente es, por construcción, menor o igual a uno, en tanto que una variable aleatoria con distribución F tiene dominio $(0, \infty)$. Sin embargo, las variables aleatorias que se obtienen al dividir las sumas SCE_{MC} y SCE_{HO} entre σ^2 sí son independientes. Esta afirmación se justifica intuitivamente considerando que, dividiendo la expresión 3.3.3 entre σ^2 , se tiene

$$\frac{1}{\sigma^2} SCE_{MR} = \frac{1}{\sigma^2} SCE_{MC} + \frac{1}{\sigma^2} SCE_{HO}$$

y, en términos de sus distribuciones, y por la propiedad de suma de las funciones χ^2 esto es

$$\chi^2_{(N-b)} = \chi^2_{(a)} + \chi^2_{(a-1)}$$

Restando a los grados de libertad de SCE_{MR}/σ^2 los de SCE_{HO}/σ^2 , se obtienen los correspondientes a SCE_{MC} :

$$\begin{aligned} (N-b) - (a-1) &= ab - b - a + 1 \\ &= (a-1) \cdot (b-1) \end{aligned}$$

Aprovechando la información antes obtenida, puede encontrarse una región de rechazo equivalente a 3.3.1 en donde la distribución de la estadística de prueba es conocida:

$$\frac{SCE_{MC}}{SCE_{MR}} \leq k_2$$

$$\frac{SCE_{MR}}{SCE_{MC}} \geq k_3$$

$$\frac{SCE_{MC} + SCE_{Ho}}{SCE_{MC}} \geq k_3$$

$$\frac{SCE_{Ho}}{SCE_{MC}} \geq k_4$$

$$\frac{\frac{SCE_{Ho}}{(a-1)}}{SCE_{MC}} = \frac{CME_{Ho}}{CME_{MC}} \geq k$$

3.3.4

nuevamente, los CM se definen como la SC entre sus correspondientes grados de libertad. Como debe suceder que

$$P \left[\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \right] = P \left[\frac{CME_{Ho}}{CME_{MC}} \geq k \mid H_0 \right]$$

$$= \alpha$$

debe tomarse k como

$$k = F_{(a-1), (a-1)(a-1)}^{1-\alpha}$$

esto es debido a que, como SCE_{MR} y SCE_{Ho} son independientes, se tiene

$$\frac{\frac{1}{\sigma^2} \frac{SCE_{Ho}}{(a-1)}}{\frac{1}{\sigma^2} \frac{SCE_{MC}}{(a-1)(b-1)}} = \frac{CME_{Ho}}{CME_{MC}} \sim F_{(a-1), (a-1)(b-1)}$$

En resumen: Se rechazará la hipótesis de igualdad de los efectos de los tratamientos al nivel de significancia α si Y se encuentra en la región \mathcal{C} de rechazo donde

$$\mathcal{C} = \left\{ Y \mid \frac{CME_{Ho}}{CME_{MC}} \geq F_{(a-1), N-a}^{1-\alpha} \right\}$$

3.4 LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA

Aunque ya se tienen los elementos necesarios para realizar la prueba de hipótesis, principal objetivo de este análisis, resulta interesante observar que la suma $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$ conocida como *suma total de cuadrados corregida por la media*, SC_T , que es una medida de la variabilidad total de las y_{ij} , puede descomponerse como a continuación se

muestra

$$\begin{aligned}
 SC_T &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 \\
 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \left[(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}) \right]^2 \\
 &= b \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2 \\
 &\quad + 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) + 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}) \\
 &\quad + 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}) \\
 &= b \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2 \quad 3.3.5
 \end{aligned}$$

esto sucede así pues los tres últimos sumandos son cero como a continuación se demuestra.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) &= \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) \\
 &= \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(b\bar{y}_{..} - b\bar{y}_{..}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

la demostración de que $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})$ es cero se encuentra en la sección anterior.

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}) \\
&= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) (-\bar{y}_{i.} + \bar{y}_{..}) + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) (y_{ij} - \bar{y}_{.j}) \\
&= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) (y_{ij} - \bar{y}_{.j}) \\
&= \sum_{j=1}^b \left[(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) \sum_{i=1}^a (y_{ij} - \bar{y}_{.j}) \right] \\
&= \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) (a\bar{y}_{.j} - a\bar{y}_{..}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Como se observa la SC_T puede descomponerse en: la SCE_{H_0} , llamada también *suma de cuadrados debida a los tratamientos o entre tratamientos*, $SC_{\text{Tratamientos}}$, mas la suma $a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$ conocida como *suma de cuadrados debida a los bloques o entre bloques*, SC_{Bloques} , ya que se trata de una medida de las diferencias existentes entre las medias de los bloques, mas la SCE_{MC} también conocida como *suma de cuadrados del error*, SC_E , o *suma de cuadrados residual*, SC_R . Esto significa que la variabilidad total es la suma de la variabilidad debida a las distintas fuentes, tanto de tratamientos, bloques y residual.

En términos de los grados de libertad de las variables aleatorias que se obtienen al dividir cada SC entre σ^2 y suponiendo cierta H_0 , también se da la relación 3.3.5. Esto se muestra observando lo

siguiente:

Anteriormente se indicó que, bajo la hipótesis nula,

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - (\mu^* + \beta_j))^2 \sim \chi^2_{(N)}$$

al estimar $\mu^* + \beta_j$ (para todo j) con $\bar{y}_{..}$, se puede afirmar que

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \frac{SC_T}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(N-1)}$$

Asimismo, cuando hay igualdad entre los efectos de los tratamientos,

$\bar{y}_{.j} \sim N(\mu^* + \beta_j, \sigma^2/a)$, por lo que, en tal situación,

$$\frac{a}{\sigma^2} \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - (\mu^* + \beta_j))^2 \sim \chi^2_{(b)}$$

y cuando se estima con $\bar{y}_{..}$ a $\mu^* + \beta_j$, para todo j ,

$$\frac{a}{\sigma^2} \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 = \frac{1}{\sigma^2} SC_{\text{Bloques}} \sim \chi^2_{(b-1)}$$

Ya se había señalado que, bajo H_0 ,

$$\frac{1}{\sigma^2} SCE_{H_0} \sim \chi^2_{(a-1)}$$

y que

$$\frac{1}{\sigma^2} \text{SCE}_{MC} = \chi^2_{(a-1)(b-1)}$$

Por lo tanto, considerando los grados de libertad de las variables indicadas, la igualdad 3.3.5 es

$$N-1 = (a-1) + (b-1) + (a-1)(b-1)$$

La identidad 3.3.5 se conoce como *partición fundamental en sumas de cuadrados* y simbólicamente es

$$\text{SC}_T = \text{SCE}_{Ho} + \text{SC}_{\text{Bloques}} + \text{SCE}_{MC}$$

En la *tabla de análisis de varianza* se incorpora esta partición, y toda la información se resume de la manera siguiente.

En el modelo de bloques completos aleatorizados, es decir, en el modelo

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, a \\ j=1, \dots, b \end{array}$$

la tabla de análisis de varianza que se obtiene al contrastar las hipótesis

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a \quad \text{vs.} \quad H_a: \tau_i \neq \tau_j \quad \text{para alguna } i \neq j$$

es decir, al realizar la prueba de igualdad de los efectos de los

diferentes niveles del factor de interés es la siguiente:

Fuente de variación	Suma de cuadrados (SC)	Grados de libertad	Cuadrados medios (CM)	F
Tratamientos	$b \sum_{i=1}^a (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2$	$a-1$	$\frac{SC_{Trat}}{a-1}$	$\frac{CM_{Trat}}{CM_E}$
Bloques	$a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$	$b-1$	$\frac{SC_{Bloques}}{b-1}$	
Error (Modelo completo)	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - (\bar{y}_i + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}))^2$	$(a-1)(b-1)$	$\frac{SC_E}{(a-1)(b-1)}$	
Total	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$	$N-1 = ab-1$		

EJEMPLO 3.1

Se desea comparar el efecto de cuatro tratamientos químicos sobre la resistencia de un tipo particular de tela. Dado que puede haber diferencias importantes de un rollo de tela a otro, se decide usar un diseño de bloques en el que éstos serán, precisamente, los rollos. Se seleccionan cinco rollos y se aplican los cuatro tratamientos, en orden aleatorio, a una parte de cada uno de ellos. Los resultados obtenidos son ---

Tratamiento químico	Rollo					y_i	\bar{y}_i
	1	2	3	4	5		
1	73	68	74	71	67	353	70.6
2	73	67	75	72	70	357	71.4
3	75	68	78	73	68	362	72.4
4	73	71	75	75	69	363	72.6
y	294	274	302	291	274	y = 1435	
$\bar{y}_{.j}$	73.5	68.5	75.5	72.7	68.5	$\bar{y}_{..} = 71.75$	

y la tabla de análisis de varianza obtenida al contrastar las hipótesis

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 \quad \text{vs.} \quad H_a: \tau_i \neq \tau_j \quad \text{para alguna } i \neq j$$

es la siguiente

Fuente de variación	Suma de cuadrados (SC)	Grados de libertad	Cuadrados medios (CM)	F
Tratamientos (H_0)	12.95	3	4.32	2.374
Rollos (Bloques)	157.00	4	39.25	
Error (Modelo Completo)	21.80	12	1.82	
Total	191.75	19		

Al buscar en tablas se encuentra que $F_{(3,12)}^{0.05} = 3.49$ por lo tanto no se rechaza la hipótesis de igualdad de los efectos de los tratamientos.

Esto significa que con los cuatro tratamientos químicos se obtiene tela con resistencia semejante, es decir, no hay evidencia suficiente para afirmar que uno de los procesos químicos da mejores resultados, promediado sobre los diferentes bloques o rollos.

EJEMPLO 9.2

Se está realizando un experimento acerca del tiempo de enfocamiento del ojo humano, medido en décimas de segundo. Se deseaba conocer el efecto que sobre este tiempo tiene la distancia que hay entre el objeto y el ojo. Cuatro diferentes distancias fueron de interés y se dispuso de cuatro personas para el experimento. Ya que pudiera haber diferencias entre los individuos, se decidió usar un diseño de bloques. Los datos obtenidos fueron

Distancia	Individuo					$y_{i.}$	$\bar{y}_{i.}$
	1	2	3	4	5		
4	10	6	6	6	6	34	6.8
6	7	6	6	1	6	26	5.2
8	5	3	3	2	5	18	3.6
10	6	4	4	2	3	19	3.8
$y_{.j}$	28	19	19	11	20	$y_{..} = 97.00$	
$\bar{y}_{.j}$	7	4.75	4.75	2.75	5	$\bar{y}_{..} = 4.85$	

La tabla de análisis de varianza que se obtiene al probar la igualdad en el tiempo de enfocamiento del ojo humano a las cuatro diferentes distancias es

Fuente de variación	Suma de cuadrados (SC)	Grados de libertad	Cuadrados medios (CM)	F
Distancias (H_0)	32.95	3	10.983	8.614
Individuos (bloques)	36.30	4	9.075	
Error (Modelo Completo)	15.30	12	1.275	
Total	84.55	19		

En este problema la F calculada es mayor que $F_{(3,12)}^{0.95} = 3.49$, por lo que se rechaza la igualdad entre los tratamientos, es decir, se concluye que la distancia tiene un efecto significativo sobre el tiempo de enfocamiento; promediado sobre los distintos individuos. Se podría desear saber ahora cuál es la distancia desde la cual el tiempo de enfocamiento es mayor o donde hay diferencias significativas en tal tiempo.

3.5 METODOS PARA LA COMPARACION DE TRATAMIENTOS

Cuando la hipótesis de igualdad de los efectos de los tratamientos es rechazada, seguramente se tendrá interés en saber en dónde se encuentran las diferencias. A fin de responder a esta pregunta pueden aplicarse los *métodos de comparaciones múltiples* expuestos en la sección 2.5, considerando que ahora se tienen b observaciones dentro de cada tratamiento, anteriormente se tenían n observaciones, y que los grados de libertad de la SCE_{MC} son $(a-1)(b-1)$.

Para ilustrar lo anterior se aplicará la prueba SNK al problema del ejemplo 3.2.

EJEMPLIFICACION

Como se tienen cuatro tratamientos, p tomará los valores 2, 3 y 4. Recordando que $N-a = 16$ y considerando un nivel de significancia de 0.05, se calculan las siguientes cantidades necesarias para la realización de la prueba

P	$q_{(p, N-\sigma)}^{0.05}$	$q_{(p, N-\sigma)}^{0.05} \sqrt{\frac{CME_{MC}}{n}}$
2	3.00	1.515
3	3.65	1.843
4	4.05	2.045

las cuatro medias del problema ordenadas de modo ascendente se muestran enseguida

$$\bar{y}_3 = 3.6$$

$$\bar{y}_4 = 3.8$$

$$\bar{y}_2 = 5.2$$

$$\bar{y}_1 = 6.8$$

y de acuerdo a este método se deben realizar las comparaciones

$$\bar{y}_1 - \bar{y}_3 = 3.2 > 2.045 = q_{(4,1\sigma)}^{c,0.05} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$\bar{y}_2 - \bar{y}_3 = 1.6 < 1.843 = q_{(3,1\sigma)}^{c,0.05} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$\bar{y}_4 - \bar{y}_3 = 0.2 < 1.515 = q_{(2,1\sigma)}^{c,0.05} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$\bar{y}_1 - \bar{y}_4 = 3.0 > 1.843 = q_{(3,1\sigma)}^{c,0.05} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$\bar{y}_2 - \bar{y}_4 = 1.4 < 1.515 = q_{(2,1\sigma)}^{c,0.05} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

$$\bar{y}_1 - \bar{y}_2 = 1.6 > 1.515 = q_{(2,1\sigma)}^{c,0.05} \sqrt{CME_{MC}/4}$$

como se observa los resultados son

$$\frac{\tau_3 \quad \tau_4 \quad \tau_2}{\tau_1}$$

Esto significa que el tiempo de enfocamiento desde las distancias 2, 3 y cuatro no es significativamente diferente, por el contrario, si hay una diferencia significativa entre estos tiempos y el tiempo de enfocamiento desde la distancia 1, que, como se observa en los datos, se considera mayor.

CAPITULO 4

MODELO COMPLETAMENTE AL AZAR CON DOS CRITERIOS DE CLASIFICACION SIN INTERACCION

4.1 INTRODUCCION

En un experimento con este modelo se desea investigar si distintos niveles de dos factores de interés A y B tienen efectos significativamente diferentes, es decir, se desea realizar las pruebas de hipótesis

$$H_{0\tau}: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = \tau \quad \text{vs.} \quad H_a: \tau_i \neq \tau_j \quad \text{para algún } i \neq j$$

y

$$H_{0\beta}: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = \beta \quad \text{vs.} \quad H_a: \beta_i \neq \beta_j \quad \text{para algún } i \neq j$$

donde

τ_i es el efecto del i -ésimo tratamiento o nivel del primer factor τ , para $i=1, \dots, a$

β_j es el efecto del j -ésimo tratamiento del segundo factor β para $j=1, \dots, b$

Además se debe considerar o tener certeza de que no hay interacción entre ambos factores o, en caso de existir, no es de interés.

La no interacción significa que el efecto de A no depende del nivel de B que se considere y es el investigador quien decide, con base al marco teórico de referencia, si hay o no interacción o la importancia que esta tendrá en la experimentación. Cuando se sepa que ambos factores interactúan o se tenga duda al respecto, debe usarse el *modelo completamente al azar con dos criterios de clasificación con interacción* que en el siguiente capítulo se presenta.

Los modelos con dos criterios se ubican dentro de los llamados modelos factoriales, conocidos así ya que cada nivel de un factor, tratamiento, es aplicado en combinación con todos los niveles de los demás factores. Por ejemplo, para el caso de dos factores, o criterios de clasificación, si uno de ellos tienen cuatro niveles y el otro tres, se deberán aplicar a las unidades experimentales las doce posibles combinaciones de tratamientos.

El poder probar en un sólo experimento si los distintos niveles de dos factores tienen efectos significativamente distintos sobre la

respuesta, y en caso de que esto suceda investigar cuales niveles dan mejores resultados, implica un ahorro en la investigación, pues no se tiene que realizar un experimento para cada factor de interes.

El modelo se dice *completamente al azar* pues es de manera aleatoria como se asigna cada combinación de tratamientos a las unidades experimentales.

4.2 EL MODELO

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos en un experimento que tiene un modelo completamente al azar con dos criterios de clasificación, A y B o τ y β sin interacción, con a y b tratamientos o niveles para el primero y el segundo factor respectivamente y n observaciones en cada combinación de tratamientos (se analizará sólo el modelo balanceado). Con $y_{i..}$ se denota al total de las observaciones realizadas bajo el tratamiento i del primer factor, y con $\bar{y}_{i..}$ a su promedio. Análogamente $y_{.j.}$ es el total de las observaciones que son realizadas bajo el tratamiento j del segundo factor de interés y $\bar{y}_{.j.}$ es su promedio. N es el total de observaciones, esto significa que $N=abn$.

	Factor B			$y_{i...}$	$\bar{y}_{i...}$
	1	2	b		
Factor A	y_{111}	y_{121}	y_{1b1}	$\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{1jk}$	$y_{1.}/bn$
	y_{112}	y_{122}	y_{1b2}		
1	\vdots	\vdots	\vdots		
	y_{11n}	y_{12n}	y_{1bn}		
	y_{211}	y_{221}	y_{2b1}	$\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{2jk}$	$y_{2.}/bn$
	y_{212}	y_{222}	y_{2b2}		
2	\vdots	\vdots	\vdots		
	y_{21n}	y_{22n}	y_{2bn}		
	\vdots	\vdots	\vdots		
	y_{a11}	y_{a21}	y_{ab1}	$\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ajk}$	$y_{a.}/bn$
	y_{a12}	y_{a22}	y_{ab2}		
a	\vdots	\vdots	\vdots		
	y_{a1n}	y_{a2n}	y_{abn}		
$y_{.j.}$	$\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n y_{i1k}$	$\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n y_{i2k}$	$\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n y_{ibk}$	$y_{...} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}$	
$\bar{y}_{.j.}$	$y_{.1.}/an$	$y_{.2.}/an$	$y_{.b.}/an$	$\bar{y}_{...} = y_{...}/N$	

El modelo estadístico de este diseño es

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$$

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, a \\ j &= 1, \dots, b \\ k &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad 4.2.1$$

donde

μ es la media global

τ_i es el efecto del i -ésimo nivel del primer factor.

β_j es el efecto del j -ésimo nivel del segundo factor.

ϵ_{ijk} es el error experimental de la observación correspondiente.

Los errores se supondrán variables aleatorias independientes entre sí, con distribución normal, de media cero y varianza constante σ^2 , constante para todas las observaciones.

Como puede observarse cada y_{ijk} se distribuye como normal con media $\mu + \tau_i + \beta_j$ y varianza σ^2 .

4.3 LAS PRUEBAS DE HIPOTESIS

Como se mencionó antes, hay dos posibles pruebas a realizar en este modelo, sin embargo, sólo se desarrollará la prueba de $H_{0\tau}$, es decir, se contrastarán las hipótesis

$$H_{0\tau}: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = \tau \quad \text{vs.} \quad H_a: \tau_i \neq \tau_j \quad \text{para algún } i \neq j$$

pues la prueba de $H_{0\beta}$ se realiza de modo completamente análogo.

Para contrastar las hipótesis señaladas por el método de razón de verosimilitud generalizado, es necesario encontrar la región \mathcal{C} la cual es

$$\mathcal{C} = \{ Y \mid \Lambda \leq k \}$$

y Λ se calcula como

$$\Lambda = \frac{\max_{\theta \in \omega_{O_T}} L(\theta | Y)}{\max_{\theta \in \Omega} L(\theta | Y)}$$

donde

θ representa al vector de parámetros involucrados en el modelo;

Ω es el espacio parametral. esto significa que Ω es igual a

$$\Omega = \{ (\mu, \tau_1, \dots, \tau_a, \beta_1, \dots, \beta_b, \sigma^2) \mid \mu, \tau_i, \beta_j \in \mathbb{R}; \sigma^2 \in \mathbb{R}^+ \}$$

ω_{O_T} representa al conjunto de posibles parámetros bajo H_{O_T} , es

decir, cuando $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = \tau$ (es claro que ω_{O_T} es un subconjunto de Ω);

$L(\theta | Y)$ es la verosimilitud.

y k es de tal forma que

$$\begin{aligned} P(\text{rechazar } H_{O_T} \mid H_{O_T} \text{ cierta}) &= P(Y \in \mathcal{C} \mid H_{O_T}) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Como $y_{ijk} \sim N(\mu + \tau_i + \beta_j, \sigma^2)$, es decir,

$$f(y_{ijk} | \underline{\theta}) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \text{Exp}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y_{ijk} - \mu + \tau_i + \beta_j)^2\right]$$

se tiene que

$$\begin{aligned} L(\underline{\theta}|Y) &= L(\mu, \tau_1, \dots, \tau_a, \beta_1, \dots, \beta_b, \sigma^2 | Y) \\ &= \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^n f(y_{ijk} | \mu, \tau_1, \dots, \tau_a, \beta_1, \dots, \beta_b, \sigma^2) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-N/2} \text{Exp}\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \mu + \tau_i + \beta_j)^2\right] \end{aligned}$$

Maximizar esta función con $\underline{\theta} \in \Omega$ es equivalente a evaluarla en los estimadores máximo verosímiles de los parámetros del modelo, que se representarán con $\hat{\sigma}^2$, $\hat{\mu}$, $\hat{\tau}_i$ y $\hat{\beta}_j$. Puede determinarse con facilidad que el estimador de σ^2 es

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j)^2}{N}$$

lo cual implica que maximizar L es equivalente a minimizar S donde

$$S = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \mu + \tau_i + \beta_j)^2$$

y para realizar esto hay que encontrar la solución a las ecuaciones siguientes, llamadas *ecuaciones normales*:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \mu} \right|_{\hat{\mu}, \hat{\tau}_i, \hat{\beta}_j} = 0$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \tau_i} \right|_{\hat{\mu}, \hat{\tau}_i, \hat{\beta}_j} = 0 \quad i=1, \dots, a$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \beta_j} \right|_{\hat{\mu}, \hat{\tau}_i, \hat{\beta}_j} = 0 \quad j=1, \dots, b$$

después de derivar se obtienen las ecuaciones

$$-2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j)) = 0$$

$$-2 \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j)) = 0 \quad i=1, \dots, a$$

$$-2 \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j)) = 0 \quad j=1, \dots, b$$

y al simplificar se tiene el sistema

$$n\hat{\mu} + bn\hat{\tau}_1 + bn\hat{\tau}_2 + \dots + bn\hat{\tau}_a + an\hat{\beta}_1 + an\hat{\beta}_2 + \dots + an\hat{\beta}_b = y_{\dots}$$

$$bn\hat{\mu} + bn\hat{\tau}_1 + n\hat{\beta}_1 + n\hat{\beta}_2 + \dots + n\hat{\beta}_b = y_{1..}$$

$$bn\hat{\mu} + bn\hat{\tau}_2 + n\hat{\beta}_1 + n\hat{\beta}_2 + \dots + n\hat{\beta}_b = y_{2..}$$

$$\vdots$$

$$bn\hat{\mu} + bn\hat{\tau}_a + n\hat{\beta}_1 + n\hat{\beta}_2 + \dots + n\hat{\beta}_b = y_{a..}$$

$$an\hat{\mu} + n\hat{\tau}_1 + n\hat{\tau}_2 + \dots + n\hat{\tau}_a + an\hat{\beta}_1 = y_{.1.}$$

$$an\hat{\mu} + n\hat{\tau}_1 + n\hat{\tau}_2 + \dots + n\hat{\tau}_a + an\hat{\beta}_2 = y_{.2.}$$

$$\vdots$$

$$an\hat{\mu} + n\hat{\tau}_1 + n\hat{\tau}_2 + \dots + n\hat{\tau}_a + an\hat{\beta}_b = y_{.b.}$$

Como se observa, este sistema es semejante al que se tenía en el capítulo anterior y, como antes, las $a+b+1$ ecuaciones que lo forman no son linealmente independientes, por lo tanto, no habrá estimadores únicos para los parámetros del modelo. Sin embargo, al igual que en el capítulo 3, si se puede estimar a $\mu+\tau_i+\beta_j$ de manera única, sólo que ahora se debe multiplicar la primera ecuación del sistema por $(-1/N) = (-1/abn)$, la ecuación $i+1$ por $1/bn$ y la ecuación $a+j+1$ por $1/an$ y sumar los resultados, obteniéndose

$$\begin{array}{r} \left[-\hat{\mu} - (1/a)(\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \dots + \hat{\tau}_a) - (1/b)(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \dots + \hat{\beta}_b) = \bar{y}_{i\dots} \right] \\ + \left[\hat{\mu} \qquad \qquad \qquad \hat{\tau}_i \qquad \qquad \qquad + (1/b)(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \dots + \hat{\beta}_b) = \bar{y}_{i\dots} \right] \\ + \left[\hat{\mu} + (1/a)(\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \dots + \hat{\tau}_a) \qquad \qquad \qquad + \hat{\beta}_j = \bar{y}_{\dots j} \right] \\ \hline \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j = \bar{y}_{i\dots} + \bar{y}_{\dots j} - \bar{y}_{\dots} \end{array}$$

por lo tanto se puede afirmar que

$$\widehat{\mu + \tau_i + \beta_j} = \bar{y}_{i\dots} + \bar{y}_{\dots j} - \bar{y}_{\dots}$$

Fácilmente puede demostrarse que este estimador es insesgado, esto es

$$\begin{aligned} E(\widehat{\mu + \tau_i + \beta_j}) &= E(\bar{y}_{i\dots} + \bar{y}_{\dots j} - \bar{y}_{\dots}) \\ &= \mu + \tau_i + \beta_j \end{aligned}$$

y con esto es posible determinar $\widehat{\sigma^2}$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\bar{y}_{i\dots} + \bar{y}_{\dots j} - \bar{y}_{\dots}))^2}{N}$$

éste es un estimador sesgado, un estimador insesgado es

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}))^2}{N-b-a+1}$$

Al evaluar la verosimilitud en el conjunto de estimadores encontrados, que se representan con $\hat{\theta}$, se obtiene

$$\begin{aligned} L(\hat{\theta}|Y) &= \max_{\theta \in \Omega} L(\theta|Y) \\ &= \left[(2\pi)^{\frac{N}{2}} \hat{\sigma}^2 \right]^{-N/2} \text{Exp}(-N/2) \end{aligned}$$

Para maximizar L con $\theta \in \omega_0$, es decir bajo $H_{0\tau}$, se sigue un procedimiento análogo al que se utilizó en el capítulo 2 cuando se maximizó la verosimilitud en el modelo completo, con un criterio de clasificación, pues puede observarse que cuando $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = \tau$, el modelo 4.2.1 (modelo completo) se convierte en

$$\begin{aligned} y_{ijk} &= \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ijk} \\ &= \mu + \tau + \beta_j + \epsilon_{ijk} \\ &= \mu^* + \beta_j + \epsilon_{ijk} \end{aligned}$$

con $\mu^* = \mu + \tau$ y es conocido como *modelo reducido por la hipótesis $H_{0\tau}$* , y, como se aprecia, es semejante al modelo completo del capítulo referido, obteniéndose que

$$\widehat{\mu^* + \beta_j} = \bar{y}_{.j.}$$

y

$$\sigma_{OT}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{.j.})^2}{N}$$

son los estimadores máximo verosímiles de los parámetros que en tal caso se tienen.

En este modelo la suma de cuadrados del error en el modelo reducido por la hipótesis H_{OT} , SCE_{MRT} , es $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{.j.})^2$, mientras que la suma de cuadrados del error en el modelo completo, SCE_{MC} , suma de cuadrados debida al error, SC_E , o suma de cuadrados residual, SC_R , es $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}))^2$

Al evaluar la verosimilitud en los estimadores calculados considerando cierta H_{OT} , denotados por $\hat{\theta}_{OT}$, se observa que

$$\begin{aligned} L(\hat{\theta}_{OT} | Y) &= \max_{\theta \in \omega_{OT}} L(\theta | Y) \\ &= \left[(2\pi)^{-N/2} \hat{\sigma}_{OT}^2 \right]^{-N/2} \text{Exp}(-N/2) \end{aligned}$$

Usando la información anterior ya es posible obtener Λ , rechazándose H_{OT} si

$$\Lambda = \frac{\max_{\sigma^2, \tau} L(\theta|Y)}{\max_{\sigma^2} L(\theta|Y)} = \frac{\left[(2\pi) \widehat{\sigma^2}_{OT} \right]^{-N/2} \text{Exp}(-N/2)}{\left[(2\pi) \widehat{\sigma^2} \right]^{-N/2} \text{Exp}(-N/2)} \leq k_1$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\widehat{\sigma^2}_{OT}}{\widehat{\sigma^2}} \right]^{-N/2} = \left[\frac{\text{SCE}_{MRT}}{\text{SCE}_{MC}} \right]^{-N/2} \leq k_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{SCE}_{MC}}{\text{SCE}_{MRT}} \leq k_2 \quad 4.3.1$$

Al tratar de encontrar la distribución, bajo H_{OT} , del cociente de 4.3.1, necesaria para conocer a k_2 , se determina lo siguiente.

Bajo la hipótesis nula $y_{ijk} \sim N(\mu^* + \beta_j, \sigma^2)$, con $\mu^* = \mu + \tau$, por lo tanto

$$\frac{1}{\sigma^2} (y_{ijk} - (\mu^* + \beta_j))^2 \sim \chi^2_{(1)}$$

tomando en cuenta que las y_{ij} son independientes entre sí, puede afirmarse que

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\mu^* + \beta_j))^2 \sim \chi^2_{(nb)}$$

si se estima $\mu^* + \beta_j$ con la correspondiente $\bar{y}_{.j}$, se obtiene

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{.j})^2 = \frac{1}{\sigma^2} \text{SCE}_{MRT} \sim \chi^2_{(N-b)}$$

Por otra parte la variable

$$\frac{1}{\sigma^2} (y_{ijk} - (\mu + \tau_i + \beta_j))^2 \sim \chi_{(1)}^2$$

por lo que:

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\mu + \tau_i + \beta_j))^2 \sim \chi_{(abn)}^2$$

al estimar $\mu + \tau_i + \beta_j$ ($i=1, \dots, a$ $j=1, \dots, b$) con $\bar{y}_i \dots \bar{y}_j, \bar{y} \dots$ se obtiene también una variable aleatoria con distribución χ^2 , aún sin suponer cierta H_{OT} , o sea:

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\bar{y}_i \dots \bar{y}_j, \bar{y} \dots))^2 = \frac{1}{\sigma^2} SCE_{MC} \sim \chi_{(1)}^2,$$

De los resultados anteriores se concluye que, si SCE_{MC} y SCE_{MRT} son independientes, entonces su cociente, al multiplicarlo por la constante apropiada, se distribuye como función F. Sin embargo esto no sucede pues puede verse que

$$\begin{aligned} SCE_{MRT} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{.j.})^2 \\ &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_i \dots \bar{y}_j + \bar{y}_i \dots \bar{y}_j - \bar{y} \dots + \bar{y} \dots - \bar{y}_i \dots - \bar{y} \dots)^2 \\ &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\bar{y}_i \dots \bar{y}_j, \bar{y} \dots))^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\bar{y}_i \dots - \bar{y} \dots)^2 \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\bar{y}_i \dots \bar{y}_j, \bar{y} \dots)) \cdot (\bar{y}_i \dots - \bar{y} \dots) \\ &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\bar{y}_i \dots \bar{y}_j, \bar{y} \dots))^2 + bn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_i \dots - \bar{y} \dots)^2 \\ &= SCE_{MC} + SCE_{Hot} \end{aligned}$$

4.3.2

lo que indica que SCE_{MC} y SCE_{MR_T} no son independientes, la demostración de que el tercer sumando, obtenido al elevar al cuadrado, es cero es semejante a la que aparece en el capítulo anterior. Como se observa la suma $bn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_i \dots - \bar{y} \dots)^2$ se denomina *suma de cuadrados del error de la hipótesis* H_{OT} , SCE_{HOR} , pero también se conoce como *suma de cuadrados debida al primer factor*, se denota SC_T o SC_A . La distribución, bajo H_{OT} , de $\frac{1}{\sigma^2} SCE_{HOR}$ es $\chi^2_{(a-1)}$, ya que cuando la hipótesis nula es cierta $y_{ijk} \sim N(\mu^* + \beta_j, \sigma^2)$ y, por lo tanto,

$$\bar{y}_i \dots \sim N(\mu^*, \sigma^2/bn)$$

con $\mu^* = \mu^* + \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \beta_j$, esto implica que

$$\frac{bn}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a (\bar{y}_i \dots - \mu^*)^2 \sim \chi^2_{(a)}$$

al estimar a μ^* con $\bar{y} \dots$ se concluye que

$$\frac{bn}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a (\bar{y}_i \dots - \bar{y} \dots)^2 = \frac{1}{\sigma^2} SCE_{HOR} \sim \chi^2_{(a-1)}$$

La misma identidad 4.3.2 indica, intuitivamente, que SCE_{MC} y SCE_{HOR} son independientes, pues al ser dividida entre σ^2 , se obtiene

$$\frac{1}{\sigma^2} SCE_{MR_T} = \frac{1}{\sigma^2} SCE_{MC} + \frac{1}{\sigma^2} SCE_{HOR}$$

y escribiendo esta igualdad en términos de las distribuciones de sus componentes se tiene

$$\chi^2_{(N-b)} = \chi^2_{(.)} + \chi^2_{(a-1)}$$

Restando a los grados de libertad de SCE_{MRT} los de SCE_{Hor} se obtienen los correspondientes a SCE_{MC} :

$$(N-b) - (a-1) = N - b - a + 1$$

La carencia de independencia entre SCE_{MC} y SCE_{MRT} se observa también en el hecho de que su cociente toma siempre valores menores o iguales a uno, mientras que una variable aleatoria con distribución F tiene dominio $(0, \infty)$.

Regresando a la determinación de la región de rechazo y aplicando la información que se ha obtenido puede determinarse una región equivalente a 4.3.1. cuya estadística de prueba tenga una distribución conocida:

$$\frac{SCE_{MC}}{SCE_{MRT}} \leq k_2$$

$$\frac{SCE_{MRT}}{SCE_{MC}} \geq k_3$$

$$\frac{SCE_{MC} + SCE_{Hor}}{SCE_{MC}} \geq k_3$$

$$\frac{SCE_{Hor}}{SCE_{MC}} \geq k_4$$

$$\frac{\frac{SCE_{Hor}}{a-1}}{\frac{SCE_{MC}}{N-b-a+1}} = \frac{CME_{Hor}}{CME_{MC}} \geq k$$

Como k debe ser tal que

$$P \left[\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \right] = P \left[\frac{CME_{\text{HOT}}}{CME_{\text{MC}}} \geq k \mid H_0 \right] \\ = \alpha$$

debe tomarse a esta constante como

$$k = F_{(a-1), (N-b-a+1)}^{1-\alpha}$$

esto es debido a que, como $SCE_{\text{MR}\tau}$ y SCE_{HOT} son independientes,

$$\frac{CME_{\text{HOT}}}{CME_{\text{MC}}} \sim F_{(a-1), (N-b-a+1)}$$

El resultado de esta prueba se resume de la siguiente forma: Se rechaza la hipótesis de igualdad de los efectos de los tratamientos del factor τ de interés, $H_{0\tau}$, al nivel de significancia α , si Y se encuentra en \mathcal{C} , donde:

$$\mathcal{C} = \left\{ Y \mid \frac{CME_{\text{HOT}}}{CME_{\text{MC}}} \geq F_{(a-1), (N-b-a+1)}^{1-\alpha} \right\}$$

La región de rechazo que se obtiene al contrastar las hipótesis

$$H_{0\beta}: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = \beta \quad \text{vs.} \quad H_a: \beta_i \neq \beta_j \quad \text{para algún } i \neq j$$

es

$$\mathcal{R} = \left\{ Y \mid \frac{CME_{H_0\beta}}{CME_{MC}} \geq F_{(b-1), (N-b-a+1)}^{1-\alpha} \right\}$$

donde:

$$CME_{H_0\beta} = SCE_{H_0\beta} / (b-1)$$

siendo la *suma de cuadrados del error de la hipótesis* $H_{0\beta}$, $SCE_{H_0\beta}$, también conocida como *suma de cuadrados debida al segundo factor*, denotada SC_{β} o SC_B , igual a

$$SCE_{H_0\beta} = bn \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y} \dots)^2$$

y para obtenerla se sigue un proceso análogo al que se aplicó en la prueba de H_{0T} . En tal proceso se encontrará que al considerar cierta la hipótesis $H_{0\beta}$ el modelo 4.2.1 se transforma en

$$\begin{aligned} y_{ijk} &= \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \\ &= \mu + \tau_i + \beta + \varepsilon_{ijk} \\ &= \mu^* + \tau_i + \varepsilon_{ijk} \end{aligned}$$

donde $\mu^* = \mu + \beta$, y es conocido como *modelo reducido bajo la hipótesis* $H_{0\beta}$: $C(MR\beta)$.

4.4 LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA

Aunque ya se tienen los elementos necesarios para la realización de las dos pruebas de interés, como en el capítulo anterior puede observarse que la suma $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y} \dots)^2$, que es una estimación de la variabilidad total de las y_{ijk} y se conoce como *suma total de cuadrados corregida por la media*, SC_T , se descompone como

$$\begin{aligned}
 SC_T &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y} \dots)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\bar{y}_i \dots - \bar{y} \dots + \bar{y}_{.j} - \bar{y} \dots + y_{ijk} - \bar{y}_i \dots - \bar{y}_{.j} + \bar{y} \dots)^2 \\
 &= bn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_i \dots - \bar{y} \dots)^2 + an \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y} \dots)^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_i \dots - \bar{y}_{.j} + \bar{y} \dots)^2 \\
 &\quad + 2n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_i \dots - \bar{y} \dots)(\bar{y}_{.j} - \bar{y} \dots) \\
 &\quad + 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\bar{y}_i \dots - \bar{y} \dots)(y_{ijk} - \bar{y}_i \dots - \bar{y}_{.j} + \bar{y} \dots) \\
 &\quad + 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{.j} - \bar{y} \dots)(y_{ijk} - \bar{y}_i \dots - \bar{y}_{.j} + \bar{y} \dots) \\
 &= bn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_i \dots - \bar{y} \dots)^2 + an \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y} \dots)^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_i \dots - \bar{y}_{.j} + \bar{y} \dots)^2
 \end{aligned}$$

la demostración de que las sumas de los términos cruzados son cero, es similar a la que se hizo en el capítulo anterior. Esta identidad, que simbólicamente es

$$SC_T = SCE_{H_0\tau} + SCE_{H_0\beta} + SCE_{MC}$$

es la *partición fundamental en sumas de cuadrados* e indica, como en el diseño de bloques, que la variabilidad total es la suma de la variabilidad debida a las distintas fuentes que se tienen (tratamiento τ , tratamiento β y residual).

La *tabla de análisis de varianza* presenta la información necesaria para la realización de las pruebas, abarcando la partición fundamental en sumas de cuadrados, como enseguida se muestra.

En el modelo completamente al azar con dos criterios de clasificación sin interacción, es decir, en el modelo

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ijk} \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, a \\ j=1, \dots, b \\ k=1, \dots, n \end{array}$$

al probar la igualdad de los efectos de los tratamientos de los factores de interés, esto es, al contrastar las parejas de hipótesis

$$H_{0\tau}: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = \tau \quad \text{vs.} \quad H_a: \tau_i \neq \tau_j \quad \text{para algún } i \neq j$$

y

$$H_{0\beta}: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = \beta \quad \text{vs.} \quad H_a: \beta_i \neq \beta_j \quad \text{para algún } i \neq j$$

se obtiene la tabla de análisis de varianza siguiente

Fuente de variación	Suma de cuadrados del error (SCE)	Grados de libertad	Cuadrados medios (CME)	F
$H_{0\tau}$	$bn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i...} - \bar{y}_{...})^2$	$a-1$	$\frac{SCE_{H_{0\tau}}}{a-1}$	$\frac{CME_{H_{0\tau}}}{CME_{MC}}$
$H_{0\beta}$	$an \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2$	$b-1$	$\frac{SCE_{H_{0\beta}}}{b-1}$	$\frac{CME_{H_{0\beta}}}{CME_{MC}}$
MC	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\bar{y}_{i...} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}))^2$	$N-b-a+1$	$\frac{SCE_{MC}}{N-b-a+1}$	
Total	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2$	$N-1 = abn-1$		

EJEMPLO 4.1

Los siguientes datos corresponden a un experimento con dos criterios de clasificación (o factores de interés) en donde se sabe que no hay interacción entre ellos.

	Factor β			$y_{i...}$	$\bar{y}_{i...}$
	1	2	3		
Factor τ					
1	570	1063	565		
	565	1060	510		
	583	1043	590	6569	729.888
2	528	988	526		
	547	1026	538		
	521	1004	532	6210	690.000
$y_{.j.}$	3314	6204	3261	$y_{...} = 12779.000$	
$\bar{y}_{.j.}$	552.33	1034	543.5	$\bar{y}_{...} = 709.944$	

Al probar la igualdad de los efectos de los tratamientos del factor τ y la igualdad de los efectos de los tratamientos del factor β se obtiene la siguiente tabla de análisis de varianza.

Fuente de variación	Suma de cuadrados del error (SCE)	Grados de libertad	Cuadrados medios (CME)	F
$H_{0\tau}$	7160.05	1	7160.05	16.199
$H_{0\beta}$	945342.00	2	472671.00	1069.401
MC	6187.94	14	441.99	
Total	958690.00	17		

Considerando un nivel de significancia de 0.05 se rechaza la hipótesis $H_{0\tau}$ pues $CME_{H_{0\tau}}/CME_{MC} > F_{(1,14)}^{0.05}$ y también se rechaza la

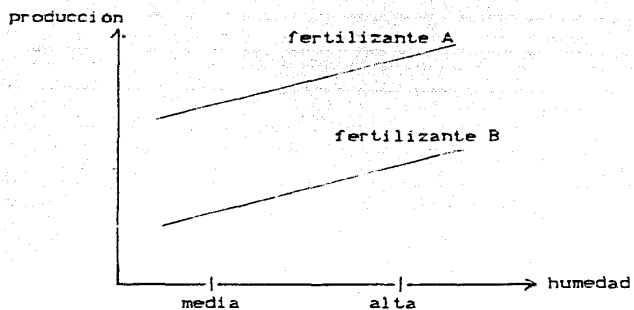
hipótesis $H_{0\beta}$ pues en este caso $CME_{H_0\beta} / CME_{MC} > F_{(1,14)}^{0.95}$. Esto implica que tanto los tratamientos del factor τ , como los tratamientos del factor β , afectan de modo significativamente diferente a la respuesta.

CAPITULO 5

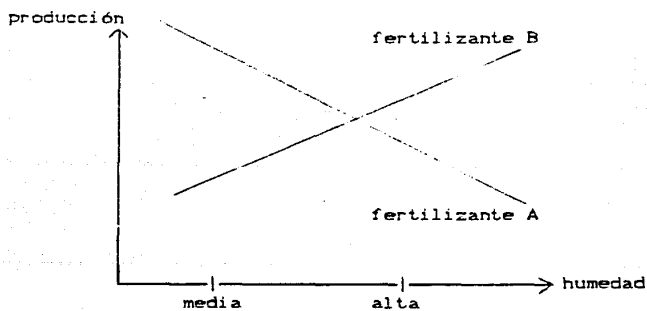
MODELO COMPLETAMENTE AL AZAR CON DOS CRITERIOS DE CLASIFICACION CON INTERACCION

5.1 INTRODUCCION

Cuando se ha determinado que un fertilizante A es mejor que un fertilizante B en la producción de un tipo específico de cereal y, por otra parte, se ha observado que un alto grado de humedad es más conveniente para este cultivo que una humedad media, es muy razonable suponer que la combinación de fertilizante A con humedad alta resultará óptima. Si este fuera el caso, los resultados podrían esquematizarse como enseguida se ilustra.

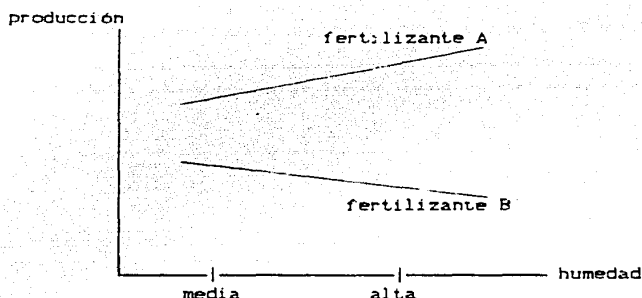


Sin embargo podría suceder que, contrariamente a lo esperado, la combinación de fertilizante B con humedad alta fuese mejor que la combinación anterior como se muestra en la grafica siguiente



si esto ocurriese habria entonces *interacción*, es decir, el efecto del fertilizante A depende de las condiciones de humedad prevalecientes en

el terreno en que es aplicado. Otra situación que podría presentarse, en donde es evidente que el fertilizante B y la humedad interactúan, sería



Para obtener información sobre posibles interacciones entre fertilizante y humedad debe diseñarse un experimento en el que ambos factores varíen simultáneamente, en vez de dejar fijo uno y variar el otro. Precisamente esa es la idea del *modelo completamente al azar con dos criterios de clasificación con interacción*. En un experimento con un diseño de este estilo es posible, además de investigar probables interacciones, probar si los distintos tratamientos o niveles de los factores tienen efectos diferentes sobre la respuesta. En el ejemplo podría probarse si, en realidad, los dos tipos de fertilizante tienen efectos diferentes y también si los dos niveles de humedad afectan de manera distinta a la producción del cereal. Sin embargo la primera prueba que debe realizarse es la

relativa a la interacción, pues en caso de existir no se puede hablar del mejor fertilizante sin considerar a la humedad, ni del mejor grado de humedad sin tomar en cuenta el fertilizante que se aplique.

Como en el modelo del capítulo anterior debe asignarse de manera aleatoria la combinación de tratamientos que se habrá de usar en cada unidad experimental, a fin de lograr la mayor uniformidad posible entre los conjuntos de unidades a los que se aplicará cada combinación.

5.2 EL MODELO

La tabla en donde se registran los resultados de un experimento con un diseño completamente al azar con dos criterios de clasificación con interacción es similar a la tabla 4.1, como en el caso anterior se analizará el modelo balanceado, sólo que ahora será de utilidad escribir la suma de las observaciones realizadas bajo cada combinación de tratamientos como enseguida se muestra.

Factor B

	1	2	...	b	$y_{i...}$	$\bar{y}_{i...}$
Factor A						
	y_{111}	y_{121}		y_{1b1}		
	y_{112}	y_{122}		y_{1b2}		
1	\vdots	\vdots		\vdots		
	y_{11n}	y_{12n}		y_{1bn}		
	$y_{11\cdot}$	$y_{12\cdot}$		$y_{1b\cdot}$	$\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{1jk}$	$y_{1...}/bn$
	y_{a11}	y_{a21}		y_{ab1}		
	y_{a12}	y_{a22}		y_{ab2}		
a	\vdots	\vdots		\vdots		
	y_{a1n}	y_{a2n}		y_{abn}		
	$y_{a1\cdot}$	$y_{a2\cdot}$		$y_{ab\cdot}$	$\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ajk}$	$y_{a...}/bn$
$y_{\cdot j}$	$\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n y_{i1k}$	$\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n y_{i2k}$		$\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n y_{ibk}$	$y_{\dots} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}$	
$\bar{y}_{\cdot j}$	$y_{\cdot 1}/an$	$y_{\cdot 2}/an$		$y_{\cdot b}/an$	$\bar{y}_{\dots} = y_{\dots}/N$	

El modelo estadístico para este diseño es

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ijk} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, a \\ j=1, \dots, b \\ k=1, \dots, n \end{matrix} \quad 5.2.1$$

donde

μ es la media global
 τ_i es el efecto del i-ésimo nivel del primer factor o factor A
 β_j es el efecto del j-ésimo nivel del segundo factor o factor B
 γ_{ij} es la interacción entre los niveles respectivos
 ϵ_{ijk} es el error experimental de la observación correspondiente.

Los errores se supondrán variables aleatorias independientes entre sí, con distribución normal, de media cero y varianza constante σ^2 , varianza constante para todas las observaciones.

Como puede observarse cada y_{ijk} se distribuirá como normal con media $\mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij}$ y varianza σ^2 .

5.3 LA PRUEBA DE HIPOTESIS RELATIVA A LA INTERACCION

Con esta prueba se pretende investigar si en un experimento cuyo modelo sea el presentado en la sección anterior existe, entre un nivel i del primer factor y un nivel j del segundo factor de interés, para toda i y para toda j, una interacción real. Esto implica que las

hipótesis a contrastar son:

$$\begin{aligned}
 H_{0\gamma}: \gamma_{11} = \gamma_{12} = \dots = \gamma_{1b} & \quad \text{vs.} \quad H_{a\gamma}: \gamma_{ij} \neq \gamma_{kl} \quad \text{con } i \neq k \text{ o } j \neq l \\
 \gamma_{21} = \gamma_{22} = \dots = \gamma_{2b} \\
 \vdots \\
 \gamma_{a1} = \gamma_{a2} = \dots = \gamma_{ab}
 \end{aligned}$$

Como antes la región \mathcal{C} de rechazo se calcula como

$$\mathcal{C} = \{ Y \mid \Lambda \leq k \} \dagger$$

donde Λ es igual a

$$\Lambda = \frac{\max_{\theta \in \omega_{0\gamma}} L(\theta | Y)}{\max_{\theta \in \Omega} L(\theta | Y)}$$

y

θ representa al vector de parámetros involucrados en el modelo;

Ω es el espacio parametral, esto significa que Ω es igual a

$$\Omega = \{ (\mu, \tau_1, \dots, \tau_a, \beta_1, \dots, \beta_b, \gamma_{11}, \dots, \gamma_{ab}, \sigma^2) \mid \mu, \tau_i, \beta_j, \gamma_{ij} \in \mathbb{R}; \sigma^2 \in \mathbb{R}^+ \}$$

$\omega_{0\gamma}$ representa al conjunto de posibles parámetros bajo $H_{0\gamma}$, es decir, cuando $\gamma = \gamma_{11} = \dots = \gamma_{ab}$, donde $\omega_{0\gamma}$ es un subconjunto de Ω y que en él no se imponen restricciones para el resto de los parámetros);

$L(\theta | Y)$ es la verosimilitud.

y k es de tal forma que

$$P(\text{Rechazar } H_{0Y} | H_{0Y} \text{ cierta}) = P(Y \in \Theta | H_{0Y}) \\ = \alpha$$

Como $y_{ijk} \sim N(\mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij}, \sigma^2)$, es decir,

$$f(y_{ijk} | \Theta) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \text{Exp}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y_{ijk} - (\mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij}))^2\right]$$

se obtiene que

$$L(\Theta | Y) = L(\mu, \tau_1, \dots, \tau_a, \beta_1, \dots, \beta_b, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{ab}, \sigma^2 | Y) \\ = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^n f(y_{ijk} | \mu, \tau_1, \dots, \tau_a, \beta_1, \dots, \beta_b, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{ab}, \sigma^2) \\ = (2\pi\sigma^2)^{-N/2} \text{Exp}\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij}))^2\right]$$

Ya se ha señalado que maximizar la función de verosimilitud con $\Theta \in \Omega$ es equivalente a evaluar L en estimadores máximo verosímiles de los parámetros del modelo (representados por σ^2 , $\hat{\mu}$, $\hat{\tau}_i$, $\hat{\beta}_j$ y $\hat{\gamma}_{ij}$). Con facilidad puede verificarse que

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j + \hat{\gamma}_{ij}))^2}{N}$$

lo cual implica que, nuevamente, para encontrar los estimadores de los

otros parámetros se tiene que minimizar S donde:

$$S = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij}))^2$$

y para realizar esto hay que encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones normales, obtenido de la forma ya conocida

$$\begin{aligned} n\hat{\mu} + bn\hat{\tau}_1 + \dots + bn\hat{\tau}_a + an\hat{\beta}_1 + \dots + an\hat{\beta}_b + n\hat{\gamma}_{11} + \dots + n\hat{\gamma}_{ab} &= y \dots \\ bn\hat{\mu} + bn\hat{\tau}_i + n\hat{\beta}_1 + \dots + n\hat{\beta}_b + n\hat{\gamma}_{i1} + \dots + n\hat{\gamma}_{ib} &= y_{i \dots} \quad i=1, \dots, a \\ an\hat{\mu} + n\hat{\tau}_1 + \dots + n\hat{\tau}_a + an\hat{\beta}_j + n\hat{\gamma}_{1j} + \dots + n\hat{\gamma}_{aj} &= y_{\dots j} \quad j=1, \dots, b \\ n\hat{\mu} + n\hat{\tau}_i + n\hat{\beta}_j + n\hat{\gamma}_{ij} &= y_{ij} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, a \\ j=1, \dots, b \end{matrix} \end{aligned}$$

Estas $a+b+ab+1$ ecuaciones no son linealmente independientes pues la primera de ellas es igual a la suma de las a ecuaciones indicadas en el segundo renglón, a la suma de las b ecuaciones indicadas en el tercer renglón y a la suma de las ab ecuaciones del cuarto renglón; por lo tanto, no se tienen estimadores únicos para los parámetros del modelo. No obstante, del cuarto renglón se observa que, independientemente de la condición impuesta para resolver el sistema siempre sucede que

$$\hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j + \hat{\gamma}_{ij} = \bar{y}_{ij} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, a \\ j=1, \dots, b \end{matrix}$$

por lo tanto, se puede afirmar:

$$\overline{\mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij}} = \bar{y}_{ij}, \quad \begin{matrix} i=1, \dots, a \\ j=1, \dots, b \end{matrix}$$

Este estimador es insesgado pues

$$\begin{aligned} E(\overline{\mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij}}) &= E\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{ijk} \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(y_{ijk}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij}) \\ &= \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij} \end{aligned}$$

Utilizando el resultado anterior se determina $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2}{N}$$

como antes, este estimador, máximo verosímil, es sesgado, siendo un estimador insesgado

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2}{N - ab}$$

resulta claro que para que pueda existir $\hat{\sigma}^2$ deben haber al menos dos observaciones en cada combinación de tratamientos.

Al evaluar la verosimilitud en los estimadores encontrados, que

se representan con $\hat{\theta}$, se obtiene:

$$L(\hat{\theta}|Y) = \max_{\theta \in \Omega} L(\theta|Y) \\ = \left[(2\pi)^{-N/2} c^2 \right]^{-N/2} \text{Exp}(-N/2)$$

Para maximizar L con $\theta \in \omega_{0\gamma}$, hay que notar que bajo la hipótesis nula el *modelo completo*, es decir, el modelo 5.2.1, se transforma en

$$y_{ijk} = \mu^0 + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ijk} \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, a \\ j=1, \dots, b \\ k=1, \dots, n \end{array}$$

donde $\mu^0 = \mu + \gamma$, y se conoce como *modelo reducido por la hipótesis de no interacción*, $H_{0\gamma}$. Como puede observarse, es igual al modelo completo del diseño con dos criterios de clasificación sin interacción, por lo tanto es inmediato corroborar que en tal caso

$$\mu^0 + \tau_i + \beta_j = \bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y} \dots$$

y que

$$\hat{\sigma}_{0\gamma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y} \dots))^2}{N}$$

A la cantidad $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y} \dots))^2$ se le denomina, en el diseño con dos criterios y con interacción, *suma de cuadrados del*

error en el modelo reducido por la hipótesis $H_{0\gamma}$, $SCE_{MR\gamma}$, a diferencia de la suma $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$ que es la suma de cuadrados del error en el modelo completo, SCE_{MC} , suma de cuadrados del error, SC_E , o suma de cuadrados residual, SC_R . Al evaluar la verosimilitud en estos estimadores, representados por $\hat{\theta}_{0\gamma}$, se obtiene

$$L(\hat{\theta}_{0\gamma} | Y) = \max_{\theta \in \omega_{0\gamma}} L(\theta | Y) \\ = \left[(2\pi) \hat{\sigma}_{0\gamma}^2 \right]^{-N/2} \text{Exp}(-N/2)$$

Conociendo ya $L(\hat{\theta} | Y)$ y $L(\hat{\theta}_{0\gamma} | Y)$ es posible continuar con la obtención de λ , rechazándose la hipótesis nula si

$$\lambda = \frac{\max_{\theta \in \omega_{0\gamma}} L(\theta | Y)}{\max_{\theta \in \Omega} L(\theta | Y)} = \frac{\left[(2\pi) \hat{\sigma}_{0\gamma}^2 \right]^{-N/2} \text{Exp}(-N/2)}{\left[(2\pi) \hat{\sigma}^2 \right]^{-N/2} \text{Exp}(-N/2)} \leq k_1$$

$$\frac{\left[\hat{\sigma}_{0\gamma}^2 \right]^{-N/2}}{\left[\hat{\sigma}^2 \right]^{-N/2}} = \left[\frac{SCE_{MR\gamma}}{SCE_{MC}} \right]^{-N/2} \leq k_1$$

$$\frac{SCE_{MC}}{SCE_{MR\gamma}} \leq k_2$$

5.3.1

A continuación se intenta determinar la distribución, bajo $H_{0\gamma}$, del cociente de 5.3.1 a fin de conocer a k_2 . Cuando la hipótesis

nula es cierta $y_{ijk} \sim NC(\mu^0 + \tau_i + \beta_j, \sigma^2)$ (donde $\mu^0 = \mu + \gamma$) por lo que

$$\frac{1}{\sigma^2} (y_{ijk} - (\mu^0 + \tau_i + \beta_j))^2 \sim \chi_{(1)}^2$$

y, recordando que las y_{ijk} son independientes entre sí, puede afirmarse que

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\mu^0 + \tau_i + \beta_j))^2 \sim \chi_{(N)}^2$$

En el capítulo anterior se mostró que al estimar a $\mu^0 + \tau_i + \beta_j$ con $\bar{y}_i \dots + \bar{y}_j \dots - \bar{y} \dots$ se obtiene el siguiente resultado

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\bar{y}_i \dots + \bar{y}_j \dots - \bar{y} \dots))^2 = \frac{1}{\sigma^2} \text{SCE}_{\text{MRY}} \sim \chi_{(N-a-b+1)}^2$$

Por otra parte, y aún sin considerar cierta H_0 , la variable

$$\frac{1}{\sigma^2} (y_{ijk} - (\mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij}))^2 \sim \chi_{(1)}^2$$

por lo tanto

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij}))^2 \sim \chi_{(N)}^2$$

al estimar con \bar{y}_{ij} a $\mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij}$ se obtiene

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2 = \frac{1}{\sigma^2} \text{SCE}_{\text{MC}} \sim \chi_{(N-ab)}^2$$

De estos resultados se concluye que si SCE_{MC} y SCE_{MRy} son independientes, entonces la estadística de prueba de la expresión 5.3.1, multiplicada por la constante apropiada, se distribuye como función F. Desafortunadamente tal independencia no existe, pues puede verse que

$$\begin{aligned}
 SCE_{MRy} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 \\
 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} + \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} + \bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 \\
 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 \\
 &\quad + 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) \\
 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 + n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 \\
 &= SCE_{MC} + SCE_{Hoy} \tag{5.3.2}
 \end{aligned}$$

ya que la suma de los productos cruzados es cero como a continuación se muestra

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) &= \\
 &= 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}) \\
 &= 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})(n\bar{y}_{ij.} - n\bar{y}_{ij.}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Como se observa la suma $n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij} - (\bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y} \dots))^2$ es la suma de cuadrados del error de la hipótesis H_{0Y} . La identidad 5.3.2 indica claramente que SCE_{MC} y SCE_{MRY} no son independientes, y por lo tanto su cociente no se distribuye como F, pero sí lo son SCE_{MC} y SCE_{H0Y} . Esta afirmación puede justificarse intuitivamente, como se ha venido haciendo.

La distribución, bajo H_{0Y} , de SCE_{H0Y}/σ^2 es $\chi^2_{(ab-a-b+1)}$, pues recordando que bajo la hipótesis nula $y_{ijk} \sim NC(\mu^0 + \tau_i + \beta_j, \sigma^2)$ puede fácilmente verificarse que

$$\bar{y}_{ij} \sim NC(\mu^0 + \tau_i + \beta_j, \sigma^2/n)$$

y por lo tanto

$$\frac{n}{\sigma^2} (\bar{y}_{ij} - (\mu^0 + \tau_i + \beta_j))^2 \sim \chi^2_{(1)}$$

de esto se concluye que

$$\frac{n}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij} - (\mu^0 + \tau_i + \beta_j))^2 \sim \chi^2_{(ab)}$$

Al estimar a $\mu^0 + \tau_i + \beta_j$ con $\bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y} \dots$ se tiene también una variable con distribución χ^2 y cuyos grados de libertad se obtienen restando a los grados de libertad de SCE_{MRY}/σ^2 los de SCE_{MC}/σ^2 , resultando:

$$\frac{n}{\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij} - (\bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y} \dots))^2 = \frac{1}{\sigma^2} SCE_{H0Y} \sim \chi^2_{(ab-a-b+1)}$$

Regresando a la expresión 5.3.1 se determina que

$$\frac{SCE_{MC}}{SCE_{MRY}} \leq k_2$$

$$\frac{SCE_{MRY}}{SCE_{MC}} \geq k_3$$

$$\frac{SCE_{MC} + SCE_{Hoy}}{SCE_{MC}} \geq k_3$$

$$\frac{SCE_{Hoy}}{SCE_{MC}} \geq k_4$$

$$\frac{\frac{SCE_{Hoy}}{a-1}}{\frac{SCE_{MC}}{N-ab}} = \frac{CME_{Hoy}}{CME_{MC}} \geq k$$

Observando la expresión anterior resulta claro que la constante k debe ser

$$k = F^{1-\alpha}_{(ab-a-b+1, (N-ab))}$$

ya que, como SCE_{MC} y SCE_{Hoy} son independientes, entonces

$$\frac{CME_{Hoy}}{CME_{MC}} \sim F_{(ab-a-b+1, (N-ab))}$$

En resumen: Se rechaza la hipótesis de la existencia de una real interacción entre un nivel i del primer factor y un nivel j del

segunda factor, para todo i y para todo j , si Y se encuentra en

$$\mathcal{E} = \left\{ Y \mid \frac{CME_{H_0Y}}{CME_{MC}} \geq F_{(ab-a-b+1), (n-ab)}^{1-\alpha} \right\}$$

5.4 LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA DE LA PRUEBA RELATIVA A LA INTERACCION

Considerando el modelo

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ijk} \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, a \\ j=1, \dots, b \\ k=1, \dots, n \end{array}$$

completamente al azar con dos criterios de clasificación, la tabla de análisis de varianza que contiene los elementos necesarios para contrastar las hipótesis

$$H_{0\gamma}: \gamma = \gamma_{11} = \dots = \gamma_{1b} \quad \text{vs.} \quad H_{a\gamma}: \gamma_{ij} \neq \gamma_{kl} \quad \text{con } i \neq k \text{ o } j \neq l$$

es la que a continuación se muestra.

Fuente de variación	Suma de cuadrados del error (SCE)	Grados de libertad	Cuadrados medios (CME)	F
$H_{0\gamma}$	$n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - (\bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}))^2$	$ab - a - b + 1$	$\frac{SCE_{Hoy}}{ab - a - b + 1}$	$\frac{CME_{Hoy}}{CME_{MC}}$
MC	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$	$N - ab$	$\frac{SCE_{MC}}{N - ab}$	
MR	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}))^2$	$N - a - b + 1$		

5.5 LAS PRUEBAS DE HIPOTESIS RELACIONADAS CON LOS TRATAMIENTOS DE LOS FACTORES DE INTERES

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, en un experimento con un diseño con dos criterios de clasificación con interacción es posible, además de efectuar la prueba de interacción, probar si los distintos niveles o tratamientos de los dos factores de interés tienen efectos significativos sobre la respuesta. Esto se debe hacer considerando los dos posibles casos que se podrían tener:

a) Cuando se determina que hay interacción entre un nivel i del primer factor, τ , y un nivel j del segundo factor, β , no se puede

hablar del mejor nivel de τ sin tomar en cuenta el nivel de β que se aplique, y viceversa. En tal caso debe considerarse como condición experimental alguno de los factores, β por ejemplo, y entonces analizar el efecto de los distintos niveles del otro factor, en este caso τ . Esto implica que se habrán de analizar b modelos con un criterio de clasificación, uno para cada nivel de β . Los resultados se habrán de reportar diciendo: "cuando se aplica el nivel j , $j=1, \dots, b$, de β , el mejor nivel de τ es ...", con $k \in \{1, \dots, a\}$.

b) Si, por el contrario, la hipótesis $H_{0\gamma}$ no es rechazada no se deben, entonces, analizar los datos con un modelo sin interacción, Cap. 4, pues si se realizó la prueba es por que se tenía duda acerca de la existencia de la interacción, esto implica que si se tenía interés en ella, y el no haber rechazado $H_{0\gamma}$ pudo deberse a los datos particulares del experimento con que se contaba, esto es, no se sabe con probabilidad 1 que no hay interacción. Además al estimar se pierde información y se estaría usando tal información después de haberla perdido. La solución es que, en tal caso, se realicen las pruebas de los efectos de los tratamientos comparando los CME de la hipótesis nula correspondiente ($H_{0\tau}$ o $H_{0\beta}$) contra los CME_{MC}, obtenidos al considerar la SCE_{MC} del modelo que sí toma en cuenta a la interacción, o sea $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$, en vez de usar la suma correspondiente al modelo sin interacción, es decir, $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - (\bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}))^2$. Cuando no se rechace $H_{0\gamma}$ puede emplearse una sola tabla para mostrar los elementos necesarios para

que en el modelo

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ijk} \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, a \\ j=1, \dots, b \\ k=1, \dots, n \end{array}$$

se contrasten las parejas de hipótesis

$$H_{0\gamma}: \gamma = \gamma_{11} = \dots = \gamma_{1b} \quad \text{vs.} \quad H_{a\gamma}: \gamma_{ij} \neq \gamma_{kl} \quad \text{con } i \neq k \text{ o } j \neq l$$

$$H_{0\tau}: \tau = \tau_1 = \dots = \tau_a \quad \text{vs.} \quad H_{a\tau}: \tau_i \neq \tau_j \quad \text{para alguna } i \neq j$$

$$H_{0\beta}: \beta = \beta_1 = \dots = \beta_b \quad \text{vs.} \quad H_{a\beta}: \beta_i \neq \beta_j \quad \text{para alguna } i \neq j$$

como a continuación se muestra.

Fuente de variación	Suma de cuadrados del error (SCE)	Grados de libertad	Cuadrados medios (CME)	F
$H_{0\tau}$	$bn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..} - \bar{y} \dots)^2$	$a-1$	$\frac{SCE_{H0\tau}}{a-1}$	$\frac{CME_{H0\tau}}{CME_{MC}}$
$H_{0\beta}$	$an \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j.} - \bar{y} \dots)^2$	$b-1$	$\frac{SCE_{H0\beta}}{b-1}$	$\frac{CME_{H0\beta}}{CME_{MC}}$
$H_{0\gamma}$	$n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y} \dots)^2$	$ab-a-b+1$	$\frac{SCE_{H0\gamma}}{ab-a-b+1}$	$\frac{CME_{H0\gamma}}{CME_{MC}}$
MC	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$	$N-ab$	$\frac{SCE_{MC}}{N-ab}$	
Total	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y} \dots)^2$	$N-1$		

La $SCE_{H0\tau}$ también es la suma de cuadrados debida al primer

tratamiento o tratamiento τ , SCE_{τ} , a su vez, la $SCE_{\text{Ho}\beta}$ es la suma de cuadrados debida al segundo tratamiento o tratamiento β , SCE_{β} . Asimismo la $SCE_{\text{Ho}\gamma}$ es la suma de cuadrados debida a la interacción, se denota SC_{γ} o SC_{AB} , y, como ya se indicó, la SCE_{MC} se conoce también como suma de cuadrados del error, SC_E , o suma de cuadrados residual, SC_R .

Como en los modelos anteriores la variabilidad total de las y_{ijk} es la suma de la variabilidad debida a las diferentes fuentes, que en este caso son: tratamiento τ , tratamiento β , interacción y residual.

EJEMPLO 5.1

Los dos más importantes factores que intervienen en un proceso químico son la presión y la temperatura. Se seleccionan tres niveles de cada uno de ellos y se realiza un experimento factorial a fin de estudiar el efecto que tienen sobre la respuesta. Se realizan dos observaciones bajo cada combinación de presión y temperatura y son obtenidos los siguientes resultados.

	Presión			$y_{i...}$	$\bar{y}_{i...}$
	200	215	230		
Temperatura					
baja	560 568 570	1051 1066 1062	1392 1370 1376		
y_{1j}	1718	3179	4138	9035	1003.86
media	580 550 579	1070 1046 1049	1388 1372 1353		
y_{2j}	1709	3165	4113	8987	998.55
alta	546 575 599	1045 1053 1066	1370 1401 1352		
y_{2j}	1720	3164	4123	9007	1000.77
$y_{.j}$	5147	9508	12374	$y_{...} = 27029$	
$\bar{y}_{.j}$	571.88	1056.4	1374.8	$\bar{y}_{...} = 1001.07$	

La primera prueba que se realizó fue, como se indicó anteriormente, la relativa a la interacción, y en ella se observó que la hipótesis $H_{0\gamma}$ no es rechazada. Luego de esto, se probaron las hipótesis de igualdad de los efectos de las diferentes temperaturas y de igualdad de los efectos de los tres niveles de presión que se tienen. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla siguiente, ya que no existe interacción puede usarse una sola tabla para las

tres pruebas.

Fuente de variación	Suma de cuadrados del error (SCE)	Grados de libertad	Cuadrados medios (CME)	F
$H_{O\tau}$	129.33	2	64.66	0.23
$H_{O\beta}$	2943030.00	2	1471515.00	5449.28
$H_{O\gamma}$	45.99	4	11.99	0.04
MC	4860.70	18	270.03	
Total	2948066.00	26		

Como $CME_{H_{O\gamma}}/CME_{MC} < 2.93 = F_{(4,18)}^{0.05}$ no se rechaza la hipótesis de no interacción entre los dos factores de interés en este experimento, es decir, no hay interacción entre los tres niveles de temperatura y los tres niveles de presión estudiados.

En la prueba de $H_{O\tau}$, como $CME_{H_{O\tau}}/CME_{MC} < 0.239 = F_{(2,18)}^{0.05}$ no se rechaza la hipótesis de igualdad de los efectos de los tratamientos del factor A, es decir, las tres temperaturas no afectan de manera significativamente distinta a la respuesta. En la prueba de $H_{O\beta}$, por el contrario, ese mismo cuantil es menor que $CME_{H_{O\beta}}/CME_{MC}$, por lo tanto, si se rechaza la hipótesis de igualdad de los efectos de los tratamientos del factor B, esto significa que los tres niveles de presión afectan de modo diferente a la respuesta. Por supuesto se deseará saber ahora dónde se encuentran las diferencias que son significativas y para tal efecto pueden aplicarse los métodos de comparaciones múltiples expuestos en el capítulo 2. Como ejemplo se

aplicará la prueba de Tukey a este problema.

EJEMPLO 5.2

Considerando un nivel de $\alpha=0.05$, la cantidad contra la cual se deben comparar las diferencias entre los promedios es

$$q_{(3,24)}^{0.05} \sqrt{CME_{MC}/9} = 3.53 \sqrt{4860.7/9} \\ = 82.036$$

esto es porque se tienen 3 tratamientos y nueve observaciones bajo cada uno, es decir, 27 observaciones en total, y al realizar las comparaciones se observa que:

$$|\bar{y}_{.1} - \bar{y}_{.2}| = 4361 > q_{(3,24)}^{0.05} \sqrt{CME_{MC}/9} = 82.036$$

$$|\bar{y}_{.1} - \bar{y}_{.3}| = 7227 > q_{(3,24)}^{0.05} \sqrt{CME_{MC}/9} = 82.036$$

$$|\bar{y}_{.2} - \bar{y}_{.3}| = 2866 > q_{(3,24)}^{0.05} \sqrt{CME_{MC}/9} = 82.036$$

de manera resumida esto es

$$\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3$$

lo que significa que los tres niveles de presión que se están

analizando afectan de modo significativamente a la respuesta, como puede observarse en los datos entre más alta es la presión se obtienen mejores resultados.

EJEMPLO 5.5

En un laboratorio de microbiología se está realizando la siguiente investigación acerca de la fijación del nitrógeno: Se sabe que el microorganismo *Rhizobium phaseol* fija en el suelo a este elemento, que fortalece y ayuda al crecimiento de las plantas. De acuerdo a la clasificación que se tiene en catálogo se presentan tres cepas de *Rhizobium phaseol*, y para su sobrevivencia y reproducción se necesita un medio favorable o medio de cultivo. Este medio puede presentar otros microorganismos que compitan con el de interés. Una forma de eliminar tal competencia es esterilizar el medio y así evitar la presencia de otros microorganismos.

Tomando en cuenta lo anterior, los investigadores llevaron a cabo un experimento tomando como medio de cultivo a la composta formada a partir de desechos sólidos industrializados. Los factores de interés que se consideraron fueron las cepas, 3 diferentes, y la

esterilización o no del medio de cultivo. El objetivo fue determinar qué cepa y que tratamiento al medio de cultivo son los más eficientes para la reproducción de *Rhizobium phaseol*.

Las cepas consideradas fueron

1. Cepa 136 (FM 136)
2. Cepa 137 (FM 137)
3. Cepa 139 (FM 139)

y los tratamientos para la composta fueron

1. Composta esterilizada
2. Composta no esterilizada

Una vez que se esterilizó parte de la composta, se inoculó una cantidad de microorganismos homogénea de cada cepa a la composta esterilizada y a la composta no esterilizada.

La variable de respuesta fue el número de microorganismos por gramo de composta.

Se decidió realizar tres repeticiones y 15 días después se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla siguiente

	Tipo de composta		$y_{i...}$	$\bar{y}_{i...}$
	1	2		
Tipo de cepa				
	3750	220		
1	4250	185		
	2950	250		
y_{1j}	10950	655	11605	1934.16
	500	230		
2	510	215		
	555	200		
y_{2j}	1565	645	2210	368.33
	1985	210		
3	1790	235		
	1525	250		
y_{2j}	5300	695	5995	999.16
$y_{.j}$	17815	1995	$y_{...} = 19810$	
$\bar{y}_{.j}$	1979.44	221.66	$\bar{y}_{...} = 1100.55$	

Como no se sabe si hay o no interacción se realizó la prueba correspondiente y en ella se observó lo siguiente

Fuente de variación	Suma de cuadrados del error (SCE)	Grados de libertad	Cuadrados medios (CME)	F
cepas	7448019.15	2		
composta	13904022.57	1		
interaccion	7435886.03	2	3717943.01	45.914
MC	917716.66	12	80976.38	
total	29759644.42	17		

para tener mayor información pueden agregarse en la tabla de la prueba relativa a la interacción las sumas de cuadrados debidas a las diversas fuentes de variabilidad, como en este ejemplo.

Como se puede verse en la tabla existe fuerte evidencia para rechazar la hipótesis de no interacción, por lo tanto, se debe fijar uno de los dos factores (se debe considerar como condición experimental) y analizar los datos así obtenidos con el modelo con un criterio de clasificación. En este caso el factor que se decidió fijar es el tipo de composta, pues es de mayor interés el tipo de cepa.

Cuando la composta es del tipo 1 se tienen los datos siguientes

Tipo de cepa	$\bar{y}_i.$			
1	3750	4250	2950	3650.00
2	500	510	555	521.66
3	1985	1790	1525	1766.66

$$\bar{y}_{..} = 2931$$

y la tabla de análisis de varianza de la prueba de igualdad de efectos de las cepas es

Fuente de variación	SCE	Grados de libertad	CME	F
H_0	14883439.56	2	7441719.78	46.11
Mod. completo	958332.68	6	161388.78	
Mod. reducido	15851772.24	8		

Considerando un nivel de $\alpha=0.01$ se observa que $F > F_{(2,6)}^{c, \alpha}$ y, por lo tanto, se tuvo una fuerte evidencia para rechazar H_0 , es decir, se concluye que sí existen diferencias entre las cepas.

Para investigar en dónde se encuentran las diferencias se decidió usar el método de Scheffé y probar los contrastes

$$H_0^{(1)}: \tau_2 - \tau_3 = 0 \quad \text{vs.} \quad H_a^{(1)}: \tau_2 - \tau_3 \neq 0$$

$$H_0^{(2)}: \tau_3 - \tau_1 = 0 \quad \text{vs.} \quad H_a^{(2)}: \tau_3 - \tau_1 \neq 0$$

al calcular las estadísticas de prueba se observó que

Contraste	Estadística de prueba
ψ_1	7.20
ψ_1	16.45

y al comparar con el correspondiente cuantil se obtuvieron los siguientes resultados, al nivel 0.01:

$$\frac{\tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_1}{\dots}$$

observando esto y los datos experimentales, se concluye que la mejor cepa es la primera, es decir, la cepa FM 136, mientras que las cepas 2 y 3 son estadísticamente iguales.

Al considerar como condición experimental a la composta del tipo 2 se tienen los siguientes datos

Tipo de cepa	\bar{y}_i			
1	220	185	250	218.33
2	230	215	200	215.00
3	210	235	250	231.66
			$\bar{y}_{..} =$	221.66

y la tabla de análisis de varianza, para probar la igualdad en las cepas es, en este caso,

Fuente de variación	SCE	Grados de libertad	CME	F
H_0	446.668	2	233.334	0.413
Mod. completo	3383.333	6	563.889	
Mod. reducido	3850.000	8		

Considerando un nivel de $\alpha=0.01$, se observa que $F < F_{(2,8)}^{c,\alpha}$ y, por lo tanto, a este nivel no hay evidencia suficiente para rechazar la hipótesis de igualdad de los efectos de los diferentes tipos de cepas, esto es, cuando la composta no se esteriliza, las tres cepas son estadísticamente iguales.

CONCLUSIONES

Aunque existen, además de los presentados, otros modelos muy sencillos de diseño de experimentos que podrían ser material para un curso introductorio, se considera el material brevemente expuesto en este trabajo sirve de base para entender cualquiera de esos modelos, y otros más elaborados, y prepara al estudiante para enfrentar problemas prácticos a los que se enfrente.

BIBLIOGRAFIA

GOMES ROMERO, J. "El Método Experimental",

(1985), Harla, México.

HICKS, C.P. "Fundamental Concepts of Design of Experiments",

2a. Ed. (1973). Holt, Richard and Winston, New York.

MILLER, R.G. Jr. "Simultaneous Statistical Inference",

(1966) Mc. Graw-Hill.

MONTGOMERY, D.C. "Design and Analysis of Experiments"

2a. Ed. (1984). Wiley, New York.

ROJAS SORIANO, R. "El Proceso de la Investigación Científica"

3a. Ed. (1985). Trillas, Mexico.

DUNN O. J. AND CLARK V. A. "Analysis of Variance and Regression."

(1974). Wiley, New York.

Encyclopedia of Statistical Sciences.

(1980). Wiley, New York.