

FAC. CIENCIAS

42

2g

El método lagrangiano  
en un modelo de ecuaciones  
primitivas aplicado a la atmósfera  
de la República Mexicana

Físico

Jorge Mendoza González

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

1991



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# C O N T E N I D O.

## CAPITULO I. INTRODUCCION

a) parámetros considerados . . . . .	1-2
b) Estaciones de Observación . . . . .	3-4
c) Región de interés en el Continente para este trabajo . . . . .	5

## CAPITULO II. DINAMICA DEL MODELO DE ECUACIONES PRIMITIVAS PARA UN SOLO NIVEL.

a) Consideración de superficie libre . . . . .	6
b) Ecuaciones de momento y continuidad . . . . .	7-8

## CAPITULO III. TECNICAS DE PREDICCION NUMERICA DE TIEMPO.

a) Estructura de la malla o rejilla. . . . .	11
b) Esquema de integración de tiempo Matsuno. . . . .	12-17
c) Esquema de advección semi-lagrangiano . . . . .	12-17
d) Método de diferencias finitas . . . . .	18-36

## CAPITULO IV. INVARIANTES DEL MODELO.

a) La vorticidad potencial . . . . .	37-41
b) Profundidad de la superficie libre $z$ . . . . .	42-45
c) $\ln ( z^2 / 2 )$ . . . . .	42-45
d) parámetro de energía total. . . . .	46-49

## CAPITULO V. ESPECIFICACION DE CAMPOS INICIALES/ INICIALIZACION.

a) Inicialización Estática . . . . .	50-68
b) Inicialización Dinámica . . . . .	69-70

## CAPITULO VI. RESULTADOS Y CONCLUSIONES.

a) Interpretación de mapas observados/pronos. . . . .	71-90
b) Conclusiones . . . . .	97-98

BIBLIOGRAFIA . . . . .	99-101
------------------------	--------

OBJETIVO: En este trabajo de tesis se trata de probar la eficacia del método semi-lagrangiano dentro de un modelo de ecuaciones primitivas para pronóstico de tiempo, el cual será aplicado a la atmósfera de la República Mexicana.

## I. INTRODUCCION

Dada la necesidad del conocimiento de la dinámica atmosférica, científicos de todo el mundo han ideado una serie de modelos físico-matemáticos los cuales les permiten conocer a partir de condiciones conocidas su comportamiento futuro, para esto se estudian parámetros tales como:

Temperatura  $T$

Viento  $V_H$  en sus componentes

a)  $u$  zonal

b)  $v$  meridional

Geopotencial  $\Phi = zg$  donde

$z$  es la altura geopotencial

$g$  es la aceleración de la Gravedad

Depresión del punto de rocío, el cual representa una medida de la humedad

$$D = T - T_d \quad \text{donde}$$

T es la temperatura

$T_d$  temperatura del punto de rocío

D es la depresión del punto de rocío

Así como la presión atmosférica a diferentes niveles, entre otros.

Ante tal situación es de vital importancia la consideración de estaciones de radiosondeo para la recopilación de datos a diferentes niveles en la atmósfera; éstas se encuentran distribuidas a través de todo el mundo en diferentes sitios de interés.

Para la República Mexicana éstas se encuentran en ciudades como la de México, Veracruz, Mérida, Sonora, Chihuahua, Monterrey, Laredo, Isla Socorro y Ensenada entre otras de acuerdo al siguiente esquema:

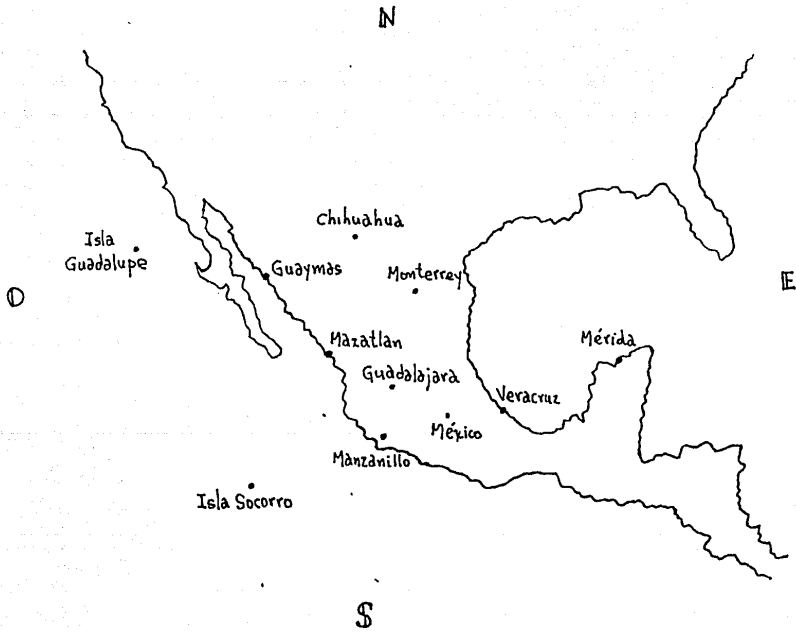


Figura I.1 algunas estaciones de radiosondeo

A continuación se utilizará un modelo semi-lagrangiano de ecuaciones primitivas para un solo nivel, cuya hipótesis principal es la conservación de la vorticidad potencial, el cual involucra las ecuaciones de movimiento de un fluido atmosférico, incomprensible, no viscoso y homogéneo sobre una esfera rotando similar al movimiento del planeta tierra. Además se tiene la hipótesis de un equilibrio hidrostático donde el análisis desarrollado en un plano XY para las componentes del viento no dependan del eje Z eliminándose las componentes sobre este eje y en consecuencia no aparecen derivadas sobre Z en las ecuaciones a utilizar; por otro lado se tiene la necesidad de la inclusión del parámetro físico  $f$  denominado el parámetro de Coriolis, el cual está dado por la siguiente relación.

$$f = 2\Omega \sin \alpha \quad ; \text{donde}$$

$\Omega$  es la velocidad de rotación de la tierra  
 $\alpha$  es la latitud del lugar de referencia.

La descripción de este modelo está en gran parte basado sobre las siguientes referencias; Matnur, M.B. (1970), Krishnamurti and Pearce (1977), Krishnamurti (1979), Krishnamurti (1987) y Kok-seng Yap (1987).

para este trabajo se consideran el geopotencial y las componentes de los vientos zonal y meridional mencionadas. Por consiguiente necesitaremos indicar algunas condiciones de frontera, así como las iniciales para que el modelo de flujo pueda ser utilizado para la predicción numérica de tiempo a un plazo de 12 horas.

De mayor importancia es el hecho de que este modelo se desarrolla como herramienta de aprendizaje para la predicción numérica de tiempo en la región IV meteorológica, así como parte de las regiones de  $20^{\circ}\text{S}$  a  $34^{\circ}\text{N}$ .  
(ver figura 1.2)



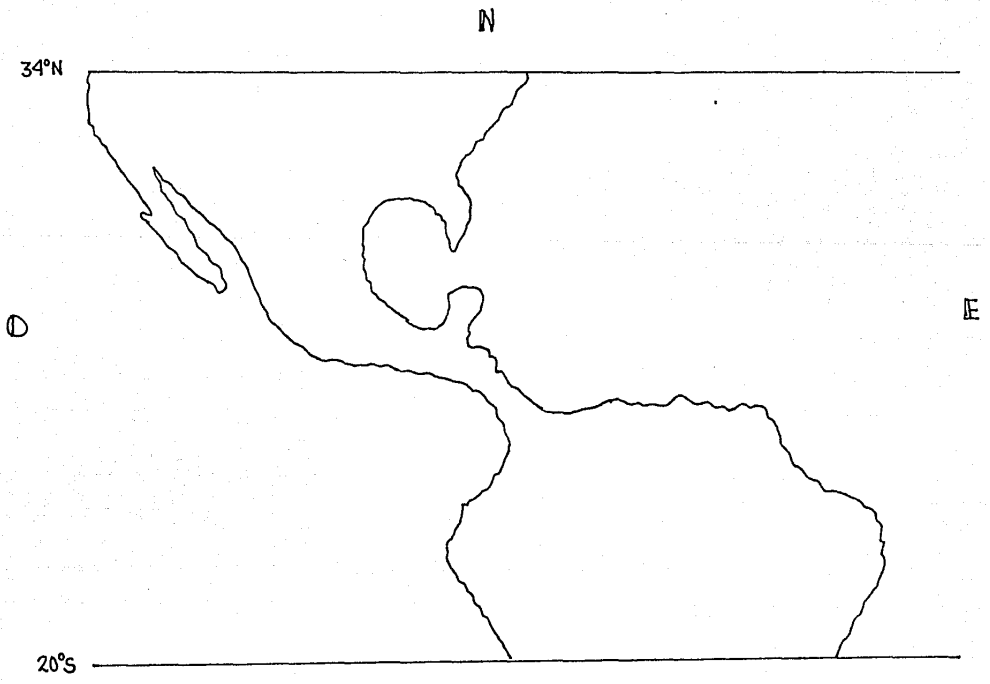


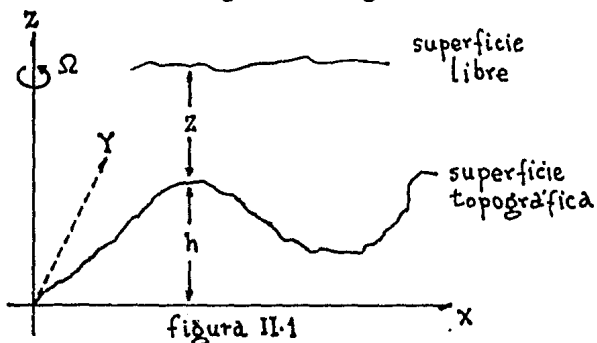
FIGURA I.2

REGION ATMOSFERICA DE INTEGRACION EN EL CONTINENTE AMERICANO

## II. DINAMICA DEL MODELO DE ECUACIONES PRIMITIVAS PARA UN SOLO NIVEL

Describiremos la dinámica del modelo de ecuaciones primitivas de un sólo nivel o divergente.

Se considera una superficie libre como se muestra en la siguiente figura.



- donde  $h$  representa la altura del fondo topográfico
- $z$  la profundidad de la superficie libre medida desde el tope de la superficie topográfica o altura
  - $x$  la coordenada hacia el este
  - $y$  la coordenada hacia el norte

Este modelo tambien es conocido por los siguientes nombres.

- a) Ecuaciones de aguas someras
- b) Ecuaciones de marea de Laplace
- c) Modelo barotrópico divergente

El modelo es descrito por tres ecuaciones de movimiento para las variables desconocidas  $u, v$  y  $z$  mencionadas, las cuales se presentan a continuación.

Ecuaciones de Momento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial(z+h)}{\partial x} + fv \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial(z+h)}{\partial y} - fu \quad (2.2)$$

Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} = -z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.3)$$

En la construcción lagrangiana las tres ecuaciones anteriores pueden escribirse en la siguiente forma:

$$\frac{Du}{Dt} = -g \frac{\partial(z+h)}{\partial x} + fv \quad (2.4)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -g \frac{\partial(z+h)}{\partial y} - fu \quad (2.5)$$

$$\frac{Dz}{Dt} = -z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.6)$$

donde  $\frac{D}{Dt}$  es el operador derivada total

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

para la solución de estas ecuaciones diremos que el término advectivo será tratado a través de un esquema semi-lagrangiano, propuesto por Krishnamurti (1969) y Mathur (1970), mientras que la integración de tiempo será efectuada a través del esquema Matsuno, el cual consiste del ensayo de un paso adelantado seguido por un paso atrasado dando lugar a la técnica conocida como Predictor-Corrector.

Dentro del modelo se analizarán las invariantes del mismo, que son:

La vorticidad potencial  $\left( \frac{w+f}{z} \right)$  y como consecuencia todas sus potencias.

La profundidad de la superficie libre media  $z$  y como consecuencia  $\ln(z^2/2)$ , y finalmente El parámetro de energía  $z(K+[gz/2]+gh)$ , donde  $K = (u^2+v^2)/2$  es la energía cinética y,  $(K+[gz/2]+gh)$  representa la energía total por unidad de masa.

puesto que la divergencia esta presente en el modelo se tienen ondas de gravedad inerciales, estas ondas forman parte del sistema físico - debido a ciertos desbalances en los campos iniciales, para lo cual se proponen términos correctivos en las ecuaciones de momento y continuidad, como se ilustrará en el capítulo III.

Las técnicas de especificación de datos iniciales conocido como inicialización se hará después del análisis requerido, para finalizar con los resultados experimentales.

### III. TECNICAS DE PREDICCIÓN NUMERICA DE TIEMPO

Para la predicción numérica existen 4 técnicas.

- a) Estructura de la malla o rejilla
- b) Esquema de integración de tiempo Matsuno
- c) Esquema de advección semi-lagrangiano
- d) Método de diferencias finitas

que se describen en seguida:

- a) La malla consta de trazos regulares de latitud/longitud como se ilustra a continuación.

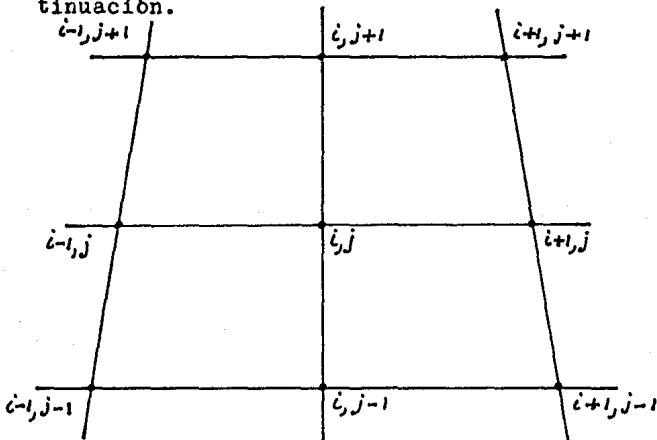


figura III.1

b),c) Si A,B y C representan las funciones de forzamiento de las ecuaciones de momento zonal y meridional y la de continuidad respectivamente, entonces podemos escribir las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6) como :

$$\frac{Du}{Dt} = -g \frac{\partial(z+h)}{\partial x} + fv = A \quad (3.1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -g \frac{\partial(z+h)}{\partial y} - fu = B \quad (3.2)$$

$$\frac{Dz}{Dt} = -Z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = C \quad (3.3)$$

Donde A y B representan aceleraciones y C el producto de la altura por la divergencia.

Ahora suponemos que las parcelas de aire localizadas en algún punto P en un tiempo t, llegan a un punto Q de la malla en un tiempo  $t+\Delta t$  ( ver figura III.2 )

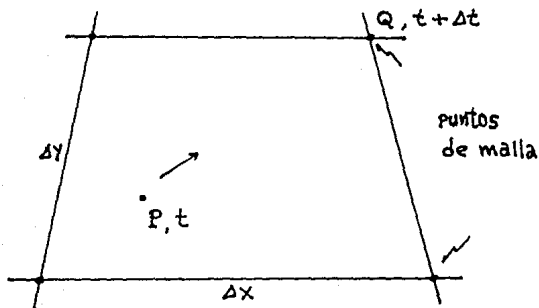


figura III.2 sección de malla  
 $\Delta x \neq \Delta y$



puesto que la posición de p no se conoce, hacemos aproximaciones sucesivas de la posición de p usando el valor del punto Q en el tiempo t.

Para mostrar esto procedemos de la siguiente manera:

Sea la siguiente ecuación de movimiento horizontal

$$x_f - x_i = ut + \frac{1}{2}at^2$$

donde  $x_f$  es la posición de la parcela de aire en el punto Q

$x_i$  es la posición de la parcela de aire en el punto P

$u$  es la componente zonal del viento

$t$  es el tiempo

$a$  es aceleración de la parcela de aire

$$o' \quad X_Q - X_P = u / Q_t \Delta t + \frac{1}{2} A / Q_t \Delta t^2$$

donde  $X_Q$  es la posición de la parcela de aire en el punto Q

$X_P$  es la posición de la parcela de aire en el punto P

$/Q_t$  representa la evaluación en el punto Q al tiempo t

Ahora como estamos buscando la posición del punto P; si consideramos el origen en el punto  $X_Q$  entonces  $X_Q = 0$  y tenemos:

$$-X_P = u / Q_t \Delta t + \frac{1}{2} A / Q_t \Delta t^2 \quad o'$$

$$X_P = -u / Q_t \Delta t - \frac{1}{2} A / Q_t \Delta t^2$$

donde A representa la aceleración en la dirección zonal.

Similarmente para el movimiento meridional

$$Y_P = -v / Q_t \Delta t - \frac{1}{2} B / Q_t \Delta t^2$$

donde B representa la aceleración en la dirección meridional.

Si X y Y representan las distancias zonal y meridional de P hasta Q ; entonces una primera aproximación de la posición de P al tiempo t tiene la siguiente expresión

$$X = -u / Q_t - \frac{1}{2} A / Q_t \Delta t^2 \quad (3.4)$$

$$Y = -v / Q_t - \frac{1}{2} B / Q_t \Delta t^2 \quad (3.5)$$

con la primera aproximación de la posición de P ; la primera aproximación de los valores u , v , A y B en P son determinados usando el esquema de interpolación de Lagrange con nueve puntos. (ver figura III.1)

Si  $\mathcal{F}$  representa la función de interpolación que puede ser cualquiera de las variables u , v , z , A , B , C entonces de este esquema resulta:

$$\mathcal{F}(P) = \sum_{\substack{j=J-1 \\ i=I-1 \\ j=J+1 \\ i=I+1}} W_{ij} \mathcal{F}_{ij} \quad (3.6)$$

donde  $W_{ij}$  representa la función de peso en este esquema de interpolación y esta definida como:

$$W_{ij} = \prod_{\substack{k=I+1 \\ k \neq i}}^{k=J+1} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \prod_{\substack{\ell=J+1 \\ \ell \neq j}}^{\ell=I+1} \frac{y - y_\ell}{y_j - y_\ell} \quad (3.7)$$

Usando los valores de la primera aproximación para  $u$ ,  $v$ ,  $A$  y  $B$  en la posición  $p$  al tiempo  $t$ ; obtenemos una segunda aproximación como sigue:

$$x = -u / p_t - \frac{1}{2} A / p_t \Delta t^2 \quad (3.8)$$

$$y = -v / p_t \Delta t - \frac{1}{2} B / p_t \Delta t^2 \quad (3.9)$$

Esta nueva posición de  $p$  permite obtener los valores de  $u$ ,  $v$ ,  $z$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $p$  al tiempo  $t$ .

Y conociendo esto, los valores  $u$ ,  $v$ ,  $z$  en el punto  $Q$  al tiempo  $t + \Delta t$  se calculan usando el método - - predictor-Corrector del esquema de integración de tiempo Matsuno ; donde el paso predictor consiste del ensayo de un paso hacia adelante y esta dado por:

paso predictor

$$u_{Q_{t+\Delta t}} = u/P_t + A/P_t \Delta t \quad (3.10)$$

$$v_{Q_{t+\Delta t}} = v/P_t + B/P_t \Delta t \quad (3.11)$$

$$z_{Q_{t+\Delta t}} = z/P_t + C/P_t \Delta t \quad (3.12)$$

Conocidos  $u$ ,  $v$  y  $z$  en  $Q_{t+\Delta t}$  se calculan  $A, B$  y  $C$  en  $Q_{t+\Delta t}$  mediante el paso Corrector que consiste en un paso retrasado en el tiempo y esta dado como:

paso Corrector

$$u_{Q_{t+\Delta t}} = u/P_t + A/P_{Q_{t+\Delta t}} \Delta t \quad (3.13)$$

$$v_{Q_{t+\Delta t}} = v/P_t + B/P_{Q_{t+\Delta t}} \Delta t \quad (3.14)$$

$$z_{Q_{t+\Delta t}} = z/P_t + C/P_{Q_{t+\Delta t}} \Delta t \quad (3.15)$$

- d) Método de diferencias finitas usado en el cálculo de las funciones de forzamiento A , B y C

En esta sección definiremos en principio lo que es una diferencia finita centrada , una adelantada y una atrasada , para lo cual procedemos de la manera siguiente :

Consideremos una función adelantada en desarrollo de Taylor a dos términos:

$$G(x+\Delta x) = G(x) + \frac{\partial G(x)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} \Delta x^2$$

y el desarrollo atrasado

$$G(x-\Delta x) = G(x) - \frac{\partial G(x)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} \Delta x^2$$

efectuando la resta  $G(x+\Delta x) - G(x-\Delta x)$

y despejando el término  $\frac{\partial G(x)}{\partial x}$  , tenemos

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x} = \frac{G(x+\Delta x) - G(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

que es una diferencia centrada para la primera derivada . (ver figura III.3)

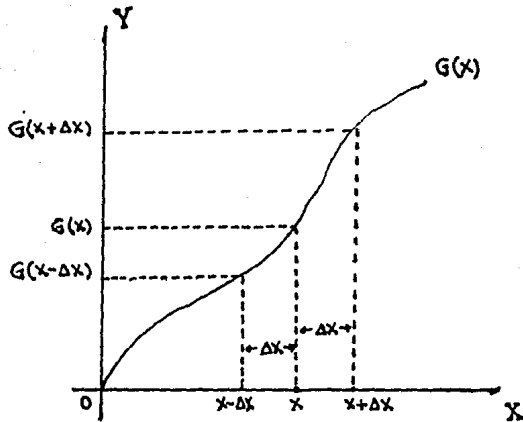


figura III.3

Observando la expresión para la diferencia finita centrada inducimos que las diferencias finitas -- adelantada y atrasada tienen la siguiente forma:

Diferencia finita adelantada

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x} = \frac{G(x+\Delta x) - G(x)}{\Delta x}$$

Diferencia finita atrasada

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x} = \frac{G(x) - G(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

Si consideramos las coordenadas  $ij$  de nuestra malla en las expresiones indicadas, estas tomarían la siguiente forma

Diferencia finita centrada

$$\frac{G(i+1, j) - G(i-1, j)}{2\Delta x}$$

Diferencia finita adelantada

$$\frac{G(i+1, j) - G(i, j)}{\Delta x}$$

Diferencia finita atrasada

$$\frac{G(i, j) - G(i-1, j)}{\Delta x}$$

donde  $x = i$ ,  $j = \text{cte.}$

Si efectuamos la suma  $G(x+\Delta x) + G(x-\Delta x)$  y despejamos el término  $\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2}$ , obtenemos:



$$\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} = \frac{G(x+\Delta x) + G(x-\Delta x) - 2G(x)}{\Delta x^2}$$

que es una representación para la segunda derivada

en coordenadas  $ij$  resulta

$$\frac{G_{i+1,j} + G_{i-1,j} - 2G_{ij}}{\Delta x^2}$$

Estos desarrollos para la variable  $X$ , aplicados a la variable  $Y$  en coordenadas  $ij$  resultan

$$\frac{G(i,j+1) - G(i,j-1)}{2\Delta y} \quad \text{centrada}$$

$$\frac{G(i,j+1) - G_{ij}}{\Delta y} \quad \text{adelantada}$$

$$\frac{G(i,j) - G(i,j-1)}{\Delta y} \quad \text{atrasada}$$

$$\frac{G_{i,j+1} + G_{i,j-1} - 2G_{ij}}{\Delta y^2} \quad \text{2a derivada}$$

Habiendo especificado estas diferencias finitas continuamos con nuestro desarrollo.

En el cálculo de las funciones de forzamiento, el término de fuerza del gradiente de presión en las ecuaciones de momento A y B, y el término de la divergencia en la ecuación de continuidad C son aproximadas a través de una diferenciación finita estandar centrada.

Este método de aproximación nos da mayor precisión, sin embargo conduce al corte de soluciones que son asociadas con dos ondas a la distancia entre los puntos de malla.

La causa de este corte es debida al uso de una estructura horizontal de rejilla no-escalonada para la especificación de las variables predichas.

para superar esto se aplica un término de corrección para las ecuaciones de momento y continuidad.

Estos términos se especifican a continuación mediante el siguiente proceso unidimensional para su posterior generalización bidimensional

Ecuación de momento

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} = -g \frac{\partial z^{(n)}}{\partial x} \quad (3.16)$$

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial z^{(n)}}{\partial t} = -z^{(n)} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} \quad (3.17)$$

donde los superíndices denotan los pasos de tiempos en los cuales los términos son evaluados.

considerando puntos espaciados de la siguiente manera en nuestra malla .(ver figura III.4)

$\bullet$   $2i-1$                        $\bullet$   $2i$                        $\bullet$   $2i+1$

figura III.4

En diferencias centradas nuestras ecuaciones son :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{zi} = -g \left( \frac{Z_{zi+1} - Z_{zi-1}}{2\Delta x} \right)$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)_{zi} = -Z_{zi} \left( \frac{u_{zi+1} - u_{zi-1}}{2\Delta x} \right)$$

si en la expresión

$$G(x+\Delta x) = G(x) + \frac{\partial G(x)}{\partial x} \Delta x$$

hacemos  $x + \Delta x = n$  y

$$x = n-1 ;$$

entonces  $G(n) = G(n-1) + \frac{\partial G(n-1)}{\partial x} \Delta x$

nuestras ecuaciones se pueden escribir como:

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} = -g \frac{\partial z^{(n)}}{\partial x} = -g \left( \frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial x} \Delta t \right) \quad (3.18)$$

donde  $G = \frac{\partial z}{\partial x}$  y

$$\frac{\partial z^{(n)}}{\partial t} = -z^{(n)} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} = -z^{(n)} \left( \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x} \Delta t \right) \quad (3.19)$$

donde  $G = \frac{\partial u}{\partial x}$

derivando (3.18) respecto de  $x$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{(n)} = -g \left( \frac{\partial^2 z^{(n-1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 z^{(n-1)}}{\partial x^2} \Delta t \right)$$

si hacemos  $n = n - 1$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{(n-1)} = -g \left( \frac{\partial^2 z^{(n-2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 z^{(n-2)}}{\partial x^2} \Delta t \right) \quad (3.20)$$

derivando (3.19) respecto de  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z^{(n)}}{\partial t} = -z^{(n)} \left( \frac{\partial^2 u^{(n-1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u^{(n-1)}}{\partial x^2} \Delta t \right) -$$

$$\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x} \left( \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x} \Delta t \right)$$

si hacemos  $n = n-1$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial t} = -z^{(n-1)} \left( \frac{\partial^2 u^{(n-2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u^{(n-2)}}{\partial x^2} \Delta t \right) -$$

$$\frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial x} \left( \frac{\partial u^{(n-2)}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u^{(n-2)}}{\partial x} \Delta t \right) \quad (3.21)$$

sustituyendo (3.21) en (3.18)

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} = -g \left[ \frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial x} - z^{(n-1)} \left\{ \frac{\partial^2 u^{(n-2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u^{(n-2)}}{\partial x^2} \Delta t \right\} - \frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial x} \left\{ \frac{\partial u^{(n-2)}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u^{(n-2)}}{\partial x} \Delta t \right\} \right]$$

simplificando

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} = -g \left[ \frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial x} - z^{(n-1)} \left\{ \frac{\partial^2 u^{(n-1)}}{\partial x^2} \right\} - \frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial x} \left\{ \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x} \right\} \right] \quad (3.22)$$

sustituyendo (3.20) en (3.19)

$$\frac{\partial z^{(n)}}{\partial t} = -z^{(n)} \left[ \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x} - g \left\{ \frac{\partial^2 z^{(n-2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 z^{(n-2)}}{\partial x^2} \Delta t \right\} \right]$$

simplificando

$$\frac{\partial z^{(n)}}{\partial t} = -z^{(n)} \left[ \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x} - g \left\{ \frac{\partial^2 z^{(n-1)}}{\partial x^2} \Delta t \right\} \right] \quad (3.23)$$

Ahora derivando (3.16) respecto de  $x$ , tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

su forma correcta en diferencias finitas es

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \right) = -g \left( \frac{z_{i+1} + z_{i-1} - 2z_i}{\Delta x^2} \right)$$

La forma incorrecta de escribir esta ecuación es tomando el siguiente desarrollo donde en lugar de tomar  $\Delta x$  tomamos una distancia entre los puntos de la malla de  $2\Delta x$

De la expresión para la segunda derivada

$$\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} = \frac{G(x+\Delta x) + G(x-\Delta x) - 2G(x)}{\Delta x^2}$$

hacemos  $\Delta x = 2\Delta x$



$$\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} = \frac{G(x+2\Delta x) + G(x-2\Delta x) - 2G(x)}{(2\Delta x)^2}$$

con  $x = i$  y  $\Delta x = 1$

$$\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} = \frac{G_{i+2} + G_{i-2} - 2G_i}{4\Delta x^2}$$

entonces la expresión para el término incorrecto de la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

en diferencias finitas es

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \right) = -g \left( \frac{z_{i+2} + z_{i-2} - 2z_i}{4\Delta x^2} \right)$$

Si desarrollamos la divergencia en una serie Taylor, la expresión  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n$  toma la forma

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n = \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x} \Delta t$$

ahora en diferencias finitas y considerando que

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x} \Delta t = -g \frac{\partial^2 z^{(n-1)}}{\partial x^2} \Delta t$$

es:

$$\frac{u_{i+1}^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}}{2\Delta x} = \frac{u_{i+1}^{(n-1)} - u_{i-1}^{(n-1)}}{2\Delta x} - g \frac{\partial^2 z^{(n-1)}}{\partial x^2} \Delta t \quad \text{incorrecto}$$

donde  $-g \frac{\partial^2 z^{(n-1)}}{\partial x^2}$  se considera la forma incorrecta, la cual puede corregirse de la manera siguiente

$$\frac{u_{i+1}^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}}{2\Delta x} = \frac{u_{i+1}^{(n-1)} - u_{i-1}^{(n-1)}}{2\Delta x} - g \frac{\partial^2 z^{(n-1)}}{\partial x^2} \Delta t \text{ incorrecto}$$

$$+ g \frac{\partial^2 z^{(n-1)}}{\partial x^2} \Delta t \text{ incorrecto} - g \frac{\partial^2 z^{(n-1)}}{\partial x^2} \Delta t \text{ correcto}$$

Para corregir la ecuación (3.22) el término con segunda derivada debe corregirse restando la forma incorrecta y sumando la forma correcta, es decir:

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} = -g \frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial x} + g \frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial x} \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x} \Delta t +$$

$$g z^{(n-1)} \Delta t \frac{\partial^2 u^{(n-1)}}{\partial x^2} +$$

$$g z^{(n-1)} \Delta t \left\{ -\frac{\partial^2 u^{(n-1)}}{\partial x^2} \text{ incorrecto} + \frac{\partial^2 u^{(n-1)}}{\partial x^2} \text{ correcto} \right\} \quad (3.24)$$

como  $\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} = -g \frac{\partial z^{(n)}}{\partial x}$  y

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} = -g \frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial x} + g \frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial x} \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x} \Delta t$$

$$+ g z^{(n-1)} \frac{\partial^2 u^{(n-1)}}{\partial x^2} \Delta t \quad (3.22)$$

entonces igualando (3.16) y (3.22)

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} = \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} \quad \delta'$$

$$\begin{aligned} -g \frac{\partial z^{(n)}}{\partial x} &= -g \frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial x} + g \frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial x} \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x} \Delta t \\ &+ g z^{(n-1)} \frac{\partial^2 u^{(n-1)}}{\partial x^2} \Delta t \end{aligned} \quad (3.25)$$

por lo tanto sustituyendo (3.25) en (3.24) resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} &= -g \frac{\partial z^{(n)}}{\partial x} + g z^{(n-1)} \Delta t \cdot \\ &\left\{ -\frac{\partial^2 u^{(n-1)}}{\partial x^2} \text{ incorrecto} + \frac{\partial^2 u^{(n-1)}}{\partial x^2} \text{ correcto} \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

similarmente corrigiendo (3.23) tenemos

$$\frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t} = -Z^{(n)} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} + g Z^{(n)} \Delta t \left\{ -\frac{\partial^2 Z^{(n-1)}}{\partial x^2} \text{ incorrecto} + \frac{\partial^2 Z^{(n-1)}}{\partial x^2} \text{ correcto} \right\} \quad (3.27)$$

Las representaciones en diferencias finitas son:

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} i = -g \left( \frac{Z_{i+1}^{(n)} - Z_{i-1}^{(n)}}{2\Delta x} \right) + g Z_i^{(n-1)} \Delta t \cdot \left\{ - \left( \frac{u_{i+2}^{(n-1)} + u_{i-2}^{(n-1)} - 2u_i^{(n-1)}}{4\Delta x^2} \right) + \left( \frac{u_{i+1}^{(n-1)} + u_{i-1}^{(n-1)} - 2u_i^{(n-1)}}{\Delta x^2} \right) \right\} \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t} i = -Z_i^{(n)} \left( \frac{u_{i+1}^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}}{2\Delta x} \right) + g Z_i^{(n)} \Delta t \cdot \left\{ - \left( \frac{Z_{i+2}^{(n-1)} + Z_{i-2}^{(n-1)} - 2Z_i^{(n-1)}}{4\Delta x^2} \right) + \left( \frac{Z_{i+1}^{(n-1)} + Z_{i-1}^{(n-1)} - 2Z_i^{(n-1)}}{\Delta x^2} \right) \right\} \quad (3.29)$$

Estos son los remedios apropiados para el problema

Las ecuaciones ilustradas en este proceso proveen las correcciones necesarias para remover las ondas que actúan a la distancia entre los puntos de malla.

Generalizando los resultados obtenidos unidimensionalmente, haciendo las siguientes consideraciones tenemos

sea  $n = n+1$  en  $\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t}$  y  $\frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t}$

h la altura de la superficie topográfica

e introducimos los términos  $fv$  y  $fu$

entonces

Ecuaciones de momento

Zonal

$$\frac{Du^{(n+1)}}{Dt} = -g \frac{\partial(Z+h)^{(n+1)}}{\partial x} + fv^{(n+1)} + gZ^{(n)} \Delta t.$$

(3.30)

$$\left\{ - \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2 \text{ incorrecto}} + \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2 \text{ correcto}} \right\}$$

Meridional

$$\frac{Dv}{Dt}^{(n+1)} = -g \frac{\partial(z+h)^{(n+1)}}{\partial y} + fu + g z^{(n)} \Delta t . \quad (3.31)$$

$$\left\{ -\frac{\partial^2 v^{(n)}}{\partial y^2} \text{ incorrecto} + \frac{\partial^2 v^{(n)}}{\partial y^2} \text{ correcto} \right\}$$

Ecuación de Continuidad

$$\frac{Dz}{Dt}^{(n+1)} = -z^{(n+1)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^{(n+1)} + g z^{(n+1)} \Delta t .$$

$$\left[ \left( \frac{\partial^2 z^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z^{(n)}}{\partial y^2} \right) \text{ incorrecto} + \right. \quad (3.32)$$

$$\left. \left( \frac{\partial^2 z^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z^{(n)}}{\partial y^2} \right) \text{ correcto} \right]$$

donde como se mencionó al principio de este desarrollo, los superíndices denotan los pasos de tiempo en los cuales los términos son evaluados.

Este desarrollo general de términos fue apoyado en : Krishnamurti (1977) , Kanamitsu (1975), Kok-Seng-yap (1987).

Cabe mencionar que este tipo de correcciones en latitudes tropicales es de vital importancia.



#### IV. INVARIANTES DEL MODELO

- a) Una de las invariantes de este modelo es la vorticidad potencial, dada por

$$\left( \frac{\xi + f}{z} \right) \quad \text{y todas sus potencias}$$

donde  $f$  es el parámetro de coriolis  
 $z$  es altura y ;

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

para demostrar esto formamos la ecuación de vorticidad (circulación del aire) de la siguiente manera

derivando la ecuación (2.2) respecto de  $X$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g(z+h)}{\partial y \partial x} + f \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

y la ecuación (2.1) respecto de  $Y$  tenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 g(z+h)}{\partial y \partial x} - f \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (4.2)$$

haciendo la resta (4.1) - (4.2) y reagrupando

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ & v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ & - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + f \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

como  $f$  no es función de  $x$  ni de  $t$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\xi + f) + u \frac{\partial}{\partial x} (\xi + f) + v \frac{\partial}{\partial y} (\xi + f) + (\xi + f) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \\ \text{or} \\ & \frac{\partial}{\partial t} (\xi + f) + \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} (\xi + f) + (\xi + f) \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_H = 0 \quad (4.3) \end{aligned}$$

usando la ecuación de continuidad en su forma divergente

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} z = -z \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_H \quad (4.4)$$

podemos reescribir la ecuación (4.3) como sigue :

multiplicando (4.3) por z

$$z \frac{\partial}{\partial t} (s+f) + z \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} (s+f) = -z (s+f) \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_H \quad (4.5)$$

y (4.4) por (s+f) obtenemos :

$$(s+f) \frac{\partial z}{\partial t} + (s+f) \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} z = -z (s+f) \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_H \quad (4.6)$$

naciendo la resta (4.5) - (4.6) resulta

$$z \frac{\partial}{\partial t} (s+f) + z \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} (s+f) - (s+f) \frac{\partial z}{\partial t} - (s+f) \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} z = 0$$

que podemos expresar como

$$z \frac{d}{dt} (s+f) - (s+f) \frac{dz}{dt} = 0$$

dividiendo esta expresión entre  $z^2$  tenemos la derivada de un cociente, es decir

$$\frac{z \frac{d}{dt} (s+f) - (s+f) \frac{dz}{dt}}{z^2} = 0$$

o'

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{s+f}{z} \right) = 0 \quad (4.7)$$

que podemos escribir también como

$$\left( \frac{d}{dt} + \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} \right) \left( \frac{\xi+f}{z} \right) = 0 \quad (4.8)$$

multiplicando (4.7) por el factor

$$\frac{1}{n} \left( \frac{\xi+f}{z} \right)^{n-1} \quad \text{resulta}$$

$$\frac{1}{n} \left( \frac{\xi+f}{z} \right)^{n-1} \frac{d}{dt} \left( \frac{\xi+f}{z} \right) = 0$$

o

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\xi+f}{z} \right)^n = 0 \quad (4.9)$$

Esta ecuación establece que todas las potencias de la vorticidad potencial de una parcela de aire siguiendo el movimiento se conservan. asimismo se establece que a través de un dominio cerrado, la vorticidad potencial promedio y todas sus potencias son conservadas

b),c) Otros dos invariantes del modelo son la profundidad de la superficie libre media  $z$  y  $\text{Ln} ( z^2/2 )$

Para mostrar esto notamos que la ecuación de continuidad (2.3) la podemos expresar como sigue

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot z \vec{V}_H = 0 \quad (4.10)$$

que integrando sobre un dominio cerrado, tomaria la siguiente forma

$$\iint_{YX} \frac{\partial z}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot z \vec{V}_H = 0$$

considerando que la parte divergente se anula en este dominio , queda

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{YX} z \, dx \, dy = 0 \quad (4.11)$$

puesto que la altura del terreno no cambia con el tiempo (4.11) puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{yx} (Z+h) dx dy = 0 \quad (4.12)$$

si multiplicamos la ecuación (4.4) por la altura  $z$  resulta

$$z \frac{\partial z}{\partial t} + z^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_H + z \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} z = 0$$

ó

$$\frac{\partial z^2}{\partial t} + z^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_H + \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} z^2 = 0$$

multiplicando por el factor  $z/z^2$

$$\frac{z}{z^2} \frac{\partial z^2}{\partial t} + z \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_H + \frac{z}{z^2} \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} z^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{z^2}{2} + \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} \ln \frac{z^2}{2} + 2 \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_H = 0$$

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{z^2}{2} + 2 \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_H = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln \frac{z^2}{2} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_H = 0$$

e integrando sobre un dominio cerrado

$$\frac{1}{2} \iint_{YX} \frac{d}{dt} \ln \frac{z^2}{2} dx dy + \iint_{YX} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_H = 0$$

puesto que el término divergente se anula en el dominio , tenemos

$$\frac{1}{2} \iint_{YX} \frac{d}{dt} \ln \frac{z^2}{2} dx dy = 0 \quad \sigma$$



$$\frac{d}{dt} \iint_{YX} \text{Ln} \left( \frac{Z^2}{2} \right) dx dy = 0 \quad (4.13)$$

Las ecuaciones (4.12) y (4.13) establecen que sobre un dominio cerrado, las cantidades.

$$\iint_{YX} (Z+h) dx dy \quad y$$

$$\iint_{YX} \text{Ln} \left( \frac{Z^2}{2} \right) dx dy$$

resultan invariantes en el modelo.

- d) Otro invariante del modelo es el parámetro de energía total  $z ( K + \frac{1}{2}gz + gh )$  ; donde  $K = \frac{1}{2} ( u^2 + v^2 )$  es la energía cinética y  $( K + [gz/2] + gh )$  representa la energía total por unidad de masa.

Para mostrar esto multiplicamos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} u - fv = -g \frac{\partial(z+h)}{\partial x} \quad (2.1)$$

por la componente zonal  $u$

$$u \frac{\partial u}{\partial t} + u \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} u - fvu = -ug \frac{\partial(z+h)}{\partial x} \quad (4.14)$$

y la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} v + fu = -g \frac{\partial(z+h)}{\partial y} \quad (2.2)$$

por la componente meridional  $v$

$$v \frac{\partial v}{\partial t} + v \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} v + fvu = -vg \frac{\partial(z+h)}{\partial y} \quad (4.15)$$

sumando (4.14) con (4.15) y reagrupando términos, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \vec{V}_H \cdot \nabla \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + g \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla}(z+h) = 0$$

ó

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} K = - \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} g(z+h) \quad (4.16)$$

Esta expresión (4.16) es la que gobierna la razón de cambio en el tiempo de la energía cinética para el modelo.

Ahora si multiplicamos la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

por  $(K + gz + gh)$  ;

la ecuación

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} K + \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} g(z+h) = 0 \quad (4.16)$$

por  $z$

y sumando ambos resultados obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} z \left( K + \frac{1}{2} g z + g h \right) + \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} K z + K z \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_H \\ & + g(z+h) \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} z + g z(z+h) \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_H + \\ & z \vec{V}_H \cdot \vec{\nabla} g(z+h) = 0 \end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} z \left( K + \frac{1}{2} g z + g h \right) + \vec{\nabla} \cdot K z \vec{V}_H + \\ & \vec{\nabla} \cdot g z(z+h) \vec{V}_H = 0 \quad (4.17) \end{aligned}$$

La integración de (4.17) sobre un dominio cerrado implica

$$\iint_{YX} \frac{\partial}{\partial t} z \left( K + \frac{1}{2} g z + g h \right) + \vec{\nabla} \cdot K z \vec{V}_H + \vec{\nabla} \cdot g z (z+h) \vec{V}_H \, dx \, dy = 0$$

Puesto que los términos divergentes se anulan dentro de la integral, entonces resulta

$$\iint_{YX} \frac{\partial}{\partial t} z \left( K + \frac{1}{2} g z + g h \right) \, dx \, dy = 0$$

que podemos escribir como

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{YX} z \left( K + \frac{1}{2} g z + g h \right) \, dx \, dy = 0 \quad (4.18)$$

Esta integral establece que el promedio total en el dominio del parámetro de energía  $z(K + \frac{1}{2}gz + gh)$  es un invariante del modelo. Este parámetro tiene unidades de  $m^3/s^2$ .

## V. ESPECIFICACION DE CAMPOS INICIALES/ INICIALIZACION

Nuestro punto de arranque consiste en la especificación de las componentes de los vientos  $u$  ,  $v$  en los puntos de la malla ; las cuales son obtenidas a través del análisis objetivo de las estaciones de observación.

A continuación describiremos la inicialización estática, obteniendo el desarrollo matemático correspondiente, donde podamos aprovechar los datos proporcionados por las estaciones y por consiguiente emitir un juicio sobre la predicción de las condiciones de tiempo en un plazo aproximado de 12 horas.

### a) Inicialización Estática

Las técnicas de inicialización para el modelo se basan en la ecuación de balance no-lineal la cual se obtiene mediante el siguiente procedimiento.

sean las ecuaciones de momento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial z}{\partial x} + fv \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial z}{\partial y} - fu \quad (5.2)$$

derivando (5.1) respecto de X ; (5.2)  
respecto de Y y sumando obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} +$$

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} +$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + g \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - f \frac{\partial v}{\partial x} +$$

$$f \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(5.3)

utilizando la propiedad  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  de la ecuación de continuidad, así como sus derivadas para la eliminación de algunos términos; obtenemos después de reorganizar

$$\nabla^2 \zeta = \vec{\nabla} \cdot f \vec{\nabla} \psi + 2J \left( \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \quad (5.4)$$

que es la llamada ley de balance no-lineal.

Si en (5.4) es cancelado el término

$$2J \left( \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \quad \text{resulta}$$

$$\nabla^2 \zeta = \vec{\nabla} \cdot f \vec{\nabla} \psi \quad (5.5)$$

que es la llamada ley de balance lineal

si además en (5.5)  $f$  es constante e igual a  $f_0$  obtenemos la llamada ley del viento geostrofico

$$\nabla^2 \zeta = f_0 \nabla^2 \psi \quad (5.6)$$



Normalmente se usa la ecuación del viento geostrofico para definir las condiciones de frontera cuando se resuelve la ecuación de balance no-lineal para el campo de altura  $z$  desde el campo de la función corriente  $\psi$ .

El método de obtener el campo de la función corriente de los campos de los vientos sigue el método expuesto a continuación.

#### Definición del concepto de función corriente

Dado un campo de velocidad  $\vec{V}$  podemos descomponerlo en una parte no-divergente o rotacional  $\vec{V}_\psi$  y en una parte divergente  $\vec{V}_\chi$ ; esto es

$$\vec{V} = \vec{V}_\psi + \vec{V}_\chi$$

tal que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_\psi = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V}_\chi = 0$$

para un campo de velocidad bidimensional  $\vec{V}_H$  la parte no-divergente del flujo puede expresarse en términos de una función corriente escalar  $\psi$ ; tal que

$$\vec{V}_{H\psi} = iu + jv = k \times \nabla\psi =$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = -i \frac{\partial\psi}{\partial y} + j \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

de donde en coordenadas cartesianas

$$u_\psi = - \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad ; \quad v_\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

en forma de función corriente la vorticidad  $\zeta$  puede expresarse como sigue

de la parte no-divergente

$$s = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad ; \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

derivando u y v

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

sustituyendo

$$s = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) =$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \psi \quad \sigma'$$

$$s = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \nabla^2 \psi \quad (5.7)$$

anora pasaremos a la especificación del campo inicial de la función corriente.

Dado un campo de viento horizontal y teniendo las componentes zonal y meridional  $u$  y  $v$  respectivamente, podemos construir el campo de la función corriente a través de la relación (5.7), en esta solución primero calculamos la vorticidad  $\zeta$  a través del arreglo  $i = 1, 2, \dots, L$  y  $j = 1, 2, \dots, M-1$  como se muestra en la siguiente figura V.1

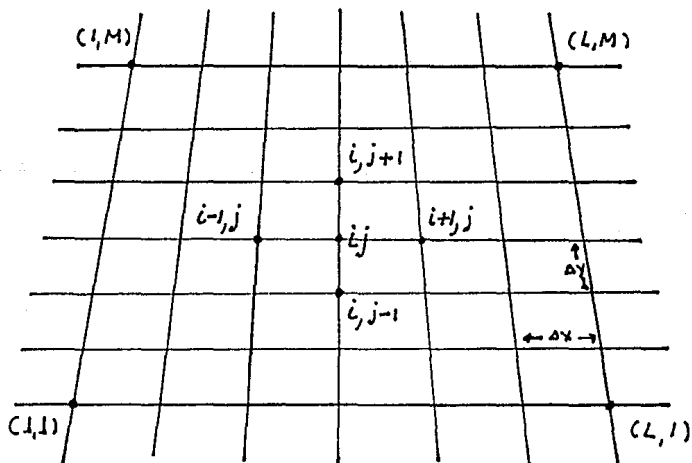


figura V.1 malla  $\Delta x, \Delta y$

usando la aproximación de diferencias finitas centradas

$$\xi(ij) = \frac{v(i+1,j) - v(i-1,j)}{\Delta x} - \frac{u(i,j+1) - u(i,j-1)}{\Delta y}$$

Las condiciones de ciclicidad en la frontera se suponen en la dirección zonal

Los valores límite en el sur y norte se obtienen a través de extrapolación lineal

para resolver la ecuación de poisson  $\nabla^2 \psi = \xi$  para  $\psi$  sobre los puntos de malla, necesitamos conocer los valores de  $\psi$  en la frontera, su derivada normal o una combinación de las dos.

En la técnica descrita a continuación, imponemos la condición que el flujo normal neto de masa hacia afuera del dominio es cero .

este flujo se puede expresar como:

$$M_F = \oint_{\ell} V_n dl$$

donde  $V_n$  es la velocidad normal hacia afuera y esta dada por :

$$V_n = \begin{cases} -v & \text{en la frontera sur} \\ -u & \text{en la frontera oeste} \\ +v & \text{en la frontera norte} \\ +u & \text{en la frontera este} \end{cases}$$

para imponer la condición de que no existe flujo neto de masa fuera del dominio, hacemos la suposición que la velocidad normal hacia afuera  $V_n$  se puede ajustar para que el flujo neto de masa sea cero; esto es :

$$\oint_{\ell} V_n^c dl = 0$$

donde  $V_n^c$  es la velocidad normal hacia afuera ajustada corregida

uno de los métodos en los cuales esto puede hacerse es el que permite a  $V_n^c$  tomar los siguientes valores

$$V_n^c = V_n + \epsilon / |V_n| \quad (5.8)$$

donde  $|V_n|$  es el valor absoluto de la rapidez del viento normal

$\epsilon$  es el factor de corrección

En esta forma la corrección de cada punto de la malla es linealmente proporcional a la velocidad del viento normal hacia afuera

si nosotros integramos (5.8) sobre los puntos de la frontera, obtenemos.

$$\oint_{\ell} V_n^c dl = \oint_{\ell} V_n dl + \oint_{\ell} \epsilon / |V_n| dl = 0$$

de donde:

$$\epsilon = - \frac{\oint_{\ell} V_n dl}{\oint_{\ell} |V_n| dl}$$

o escribiendo en forma de diferencias finitas

$$\epsilon = - \frac{\sum v_n \Delta l}{\sum |v_n| \Delta l}$$

donde la suma va a todos los puntos de la frontera y  $\Delta l$  es el correspondiente tamaño de la malla en el punto correspondiente.

Conociendo la velocidad normal hacia afuera, los límites de la función corriente se pueden calcular mediante las relaciones

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

donde  $u$  y  $v$  ahora tomarán los valores de la velocidad normal corregida hacia afuera.



esta relación sin embargo requiere que la función corriente sea conocida en algún punto; para esto suponemos que en el punto  $i = 1, j = M$  ;

$$\psi = 0 .$$

Mostraremos en el siguiente ejemplo el cálculo de los valores de la función corriente en la frontera norte. Para esto, suponemos que los valores de la función corriente en el punto  $i$  se conocen sobre la frontera.

Podemos obtener los valores de la función corriente en el punto  $(i+1)$  haciendo la siguiente aproximación

Para la frontera norte con  $v$

en el punto  $(1, M)$ , hacemos que  $\psi_{1, M} = 0$  por diferencia adelantada tenemos :

$$v = \frac{\psi_{i+1, M} - \psi_{i, M}}{\Delta l}$$

$$\text{ó} \quad \psi_{i+1, M} = v \Delta l + \psi_{i, M} \quad (5.9)$$

tomando el promedio de  $v$

$$v = \frac{V_n^c{}_{i,M} + V_n^c{}_{i+1,M}}{2}$$

y sustituyendo en (5.9)

$$\psi_{i+1,M} = \psi_{i,M} + \left[ \frac{V_n^c{}_{i,M} + V_n^c{}_{i+1,M}}{2} \right] \Delta \ell \quad (5.10)$$

puesto que ya conocemos los valores de la función corriente en la frontera, podemos resolver la ecuación de Poisson  $\nabla^2 \psi(x,y) = \xi(x,y)$  a través de varios métodos.

El método descrito a continuación es la teoría secuencial sobre relajación. En este método se hacen aproximaciones sucesivas para los valores de  $\psi(x,y)$  sobre todos los puntos de la malla.

Los detalles del método secuencial a través de la relajación se desarrollan a continuación.

supongamos que la m-ésima estimación iterativa de la función corriente  $\psi_{ij}$  es conocida y que tenemos una malla con espacios  $\Delta x = \Delta y$ .

La aproximación de segundo orden en diferencias finitas para el laplaciano de la función corriente  $\psi$  en el punto  $ij$  de la malla está dado por :

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

$$\nabla^2 \psi = \left( \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} - 2\psi_{ij}}{\Delta x} \right) + \left( \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 2\psi_{ij}}{\Delta y} \right)$$

ó

$$\nabla^2 \psi = \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 4\psi_{ij}}{\Delta x^2}$$

que tomando la m-ésima iteración nos queda

$$(\nabla^2 \psi)_{ij}^m = \frac{1}{\Delta x^2} \left( \psi_{i+1,j}^m + \psi_{i-1,j}^m + \psi_{i,j+1}^m + \psi_{i,j-1}^m - 4\psi_{ij}^m \right) \quad (5.11)$$

esta aproximación de la vorticidad generalmente difiere de los valores dados por  $S_{ij}$ , supongamos que esta diferencia sea  $R_{ij}^m$  y lo llamamos residuo, entonces.

$$(\nabla^2 \psi)_{ij}^m = S_{ij} + R_{ij}^m \quad \sigma$$

$$R_{ij}^m = (\nabla^2 \psi)_{ij}^m - S_{ij} \quad (5.12)$$

sustituyendo (5.11) en (5.12)

$$R_{ij}^m = \frac{\psi_{i+1,j}^m + \psi_{i-1,j}^m + \psi_{i,j+1}^m + \psi_{i,j-1}^m - 4\psi_{ij}^m}{\Delta x^2} - S_{ij}$$

El objetivo de la aproximación sucesiva consiste en reducir el residuo  $R_{ij}$  a un valor pequeño aceptable, puesto que la solución ideal con  $R_{ij}$  puede no lograrse

para este fin suponemos que la estimación  $(m+1)$ -ésima de  $\psi_{ij}$  existe tal que la sustitución de estos valores dentro de (5.12) provoque que los valores de  $R_{ij}^m$  sea cero, es decir

$$\frac{\psi_{i+1,j}^m + \psi_{i-1,j}^m + \psi_{i,j+1}^m + \psi_{i,j-1}^m - 4\psi_{ij}^{m+1}}{\Delta x^2} - \xi_{ij} = 0 \quad (5.13)$$

haciendo la resta (5.12) - (5.13) y despejando el término  $\psi_{ij}^{m+1}$  tenemos.

$$\psi_{ij}^{m+1} = \psi_{ij}^m + \frac{1}{4} R_{ij}^m \Delta x^2 \quad (5.14)$$

es de notarse que este desarrollo para reducir el residuo en el punto  $ij$  a cero incrementaría el residuo en los cuatro puntos del alrededor por un valor exactamente igual a la corrección para  $\psi_{ij}^m$ . Esto surge debido a la dependencia del residuo en cualquier punto  $ij$  con sus cuatro - puntos de alrededor.

existen algunas formas de hacer que el residuo en todos los puntos de la malla converjan más rápido a un valor aceptable. Uno de ellos consiste del uso de los nuevos valores de  $\psi$  en los puntos precedentes como ellos son obtenidos, es decir

$$\psi_{i-1,j}^{m+1} \text{ y } \psi_{i,j-1}^{m+1} \quad \text{en lugar de}$$

$$\psi_{i-1,j}^m \text{ y } \psi_{i,j-1}^m \quad \text{para determinar}$$

$R_{ij}$  esto es :

$$R_{ij} = \frac{\psi_{i+1,j}^m + \psi_{i-1,j}^{m+1} + \psi_{i,j+1}^m + \psi_{i,j-1}^{m+1} - 4\psi_{ij}^m}{\Delta X^2} - s_{ij} \quad (5.15)$$

Este método de dar una convergencia más rápida es conocida como relajación secuencial.

Si el residuo posee el mismo signo sobre algunos puntos de la malla como en el caso del cálculo de la función corriente; podemos hacer las estimaciones sobre-relax, esto es agregar una corrección más grande, es decir

$$\psi_{ij}^{m+1} = \psi_{ij}^m + \delta \frac{R_{ij}}{4} \Delta x^2 \quad 0.5 \leq \delta \leq 2 \quad (5.16)$$

donde el coeficiente de relajación  $\delta$  se determina por la raíz mas pequeña de la ecuación

$$\omega^2 t^2 - 4\omega + 1 = 0$$

donde  $\omega = \frac{\delta}{4}$  y  $t = \cos \frac{\pi}{L} + \cos \frac{\pi}{M}$

donde  $L$  y  $M$  representan el número de puntos de la malla en las direcciones zonal y meridional respectivamente .

Para nuestra malla donde  $\Delta x \neq \Delta y$  usualmente  $\psi$  se aproxima mediante la siguiente relación

$$\psi_{ij}^{m+1} = \psi_{ij}^m + \delta \frac{R_{ij}}{4} \Delta x \Delta y$$

en este cálculo se requiere una estimación sobre los valores de la tolerancia sobre  $\psi$ .

Usualmente  $\psi$  es del orden de  $10^7 \text{ m}^2/\text{s}$

$\Delta\psi$  es del orden de  $10^6 \text{ m}^2/\text{s}$  y

$\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$  es del orden de  $10 \text{ m}/\text{s}$

una tolerancia de error de  $10^3 \text{ m}^2/\text{s}$

sobre  $\psi$  es aceptable .



## b) INICIALIZACION DINAMICA

para una mejora adicional en el balance del campo geopotencial " Altura - Viento " que ha sido deducido a través de la inicialización estática procedemos a considerar un proceso de inicialización dinámica.

Este proceso utiliza como base las ecuaciones de aguas someras y vincula una integración adelantada- retradada de las ecuaciones para los campos  $u$  ,  $v$  y  $z$  obtenidos de la inicialización estática.

Las ecuaciones primitivas son integradas hacia adelante y hacia atras utilizando pequeños pasos de tiempo de unos pocos minutos que satisfacen el criterio CFL (Courant-Friedrichs-Levy)

El propósito del ejercicio es de momento dejar que se ajusten los campos de movimiento y presión para un equilibrio que puede partir también de las llamadas "Leyes de Balance".

Los campos de movimiento ajustados varían despreciablemente de el campo inicial; los grandes cambios son en el ajuste de los campos de presión en las latitudes bajas .

Las condiciones de frontera especificadas para el modelo durante la inicialización dinámica consisten de una continuidad cíclica en la dirección zonal y condiciones de frontera abiertas en la dirección norte-sur .

VI. RESULTADOS

Y

CONCLUSIONES

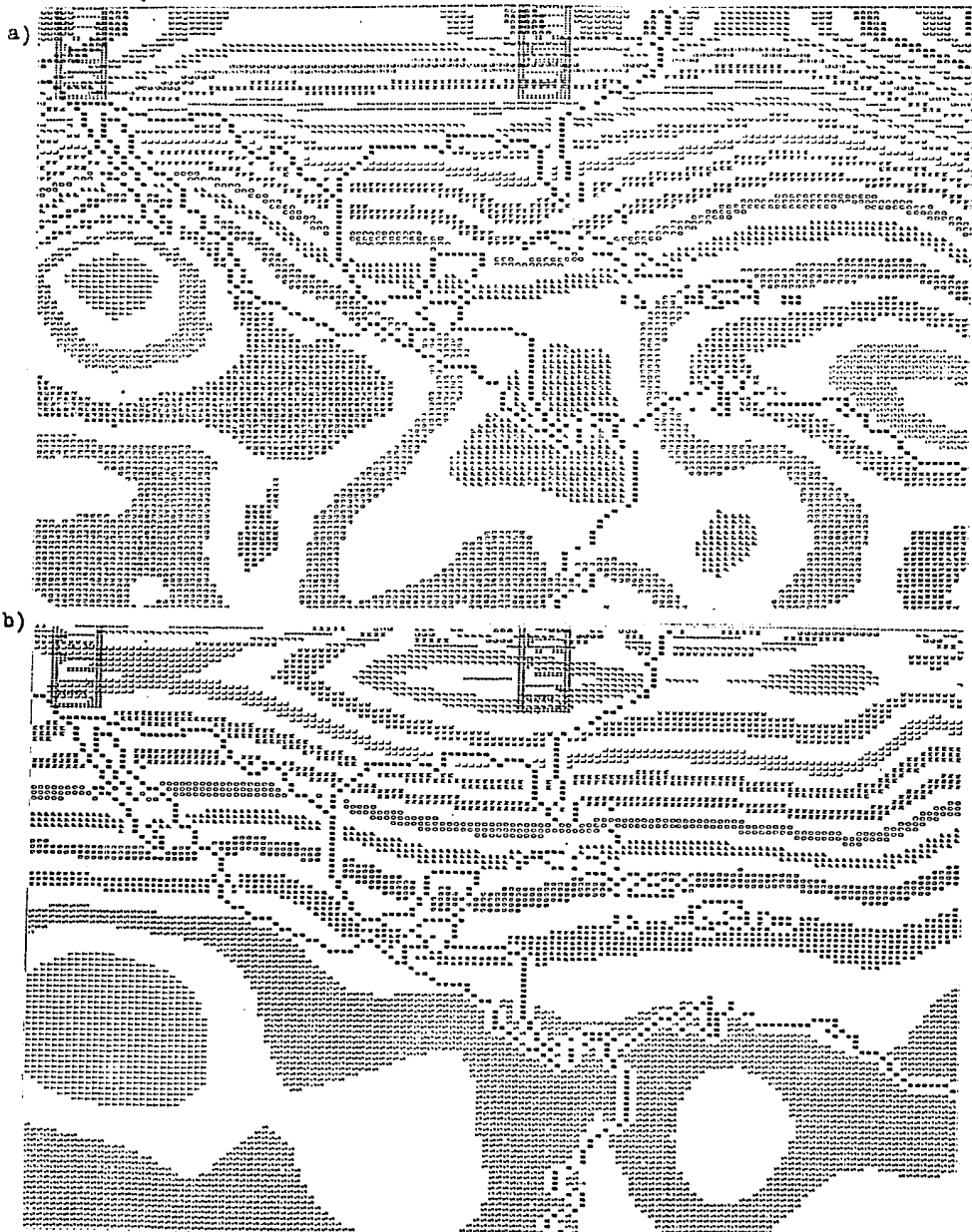
El modelo propuesto anteriormente se corrió cada 12 horas e integró en una región que va de 20°S a 34°N de latitud y de 60°W a 120°W de longitud, a partir del día primero de mayo de 1979 a las 00Z y concluyó el día 3 del mismo mes a las 12Z, para el nivel de 500mb, el paso de tiempo utilizado fué de 14 minutos según el criterio de Courant-Friedrichs-Levy para el tamaño de malla de 2 grados aproximadamente ; la estabilidad se alcanzó para un paso de tiempo menor el cual fué de 5 minutos.

A continuación haremos una comparación subjetiva de los resultados.

En la figura VI.1 inciso a) se tiene el mapa observado a 500mb para el día 1° de mayo de 1979 a las 00Z en el cual se observa la alta semi-permanente del pácifico al oeste de la República Mexicana y la alta semipermanente del Atlántico al este de la misma, aproximadamente frente a las costas de Venezuela; una vaguada con dirección nor-este que atraviesa la península de Florida y llega casi a la península de Yucatán, así como una zona de baja presión al noroeste de la República Mexicana. En la parte de Centroamérica entre Costa Rica y Panamá se observa una zona de baja presión, una parte de ella se encuentra segregada entre Colombia y Brasil, aproximadamente.

En el mapa pronosticado inciso b) figura VI.1 se observan los mismos rasgos anteriormente descritos con las siguientes características. La alta del pácifico ha bajado de latitud notablemente en la dirección sur, la alta del Atlántico se ha desplazado hacia el este también de manera considerable, la vaguada con inclinación noreste que atraviesa la península de Florida y Yucatán se ha mantenido en la misma posición que el observado desplazado muy poco hacia el sur, la baja del sureste de la República Mexicana ha incrementado su valor y se encuentra más al este del observado; en la parte de Centroamerica y este de Venezuela se ve que la altura geopotencial se ha incrementado en el modelo.

En la tabla VI.1 tenemos los rangos de valores para la altura geopotencial observada y pronosticada, donde los valores para la observada van desde  $0.5556 \times 10^4$  hasta  $0.5914 \times 10^4$  y  $0.5565 \times 10^4$  hasta  $0.5923 \times 10^4$  y para la pronosticada desde  $0.5541 \times 10^4$  hasta  $0.5550 \times 10^4$  y  $0.5550 \times 10^4$  hasta  $0.5885 \times 10^4$  denotando con letras alfabéticas los rangos determinados con A menor que B menor que C, etc. las cuales aparecen en los mapas correspondientes.



Rangos de valores obtenidos para la altura  
geopotencial correspondientes a los mapas I FIG.VI.1

- a) Observado  
b) Pronosticado

a)

MAPA CORREGIDO? 30 JULIO DAT ... DE BUENOS AIRES 1950

COTAS 30 JULIO 1950 30 JULIO 1950

ESTACION	30 JULIO 1950	30 JULIO 1950
1	1000	1000
2	1000	1000
3	1000	1000
4	1000	1000
5	1000	1000
6	1000	1000
7	1000	1000
8	1000	1000
9	1000	1000
10	1000	1000
11	1000	1000
12	1000	1000
13	1000	1000
14	1000	1000
15	1000	1000
16	1000	1000
17	1000	1000
18	1000	1000
19	1000	1000
20	1000	1000
21	1000	1000
22	1000	1000
23	1000	1000
24	1000	1000
25	1000	1000
26	1000	1000
27	1000	1000
28	1000	1000
29	1000	1000
30	1000	1000
31	1000	1000
32	1000	1000
33	1000	1000
34	1000	1000
35	1000	1000
36	1000	1000
37	1000	1000
38	1000	1000
39	1000	1000
40	1000	1000
41	1000	1000
42	1000	1000
43	1000	1000
44	1000	1000
45	1000	1000
46	1000	1000
47	1000	1000
48	1000	1000
49	1000	1000
50	1000	1000
51	1000	1000
52	1000	1000
53	1000	1000
54	1000	1000
55	1000	1000
56	1000	1000
57	1000	1000
58	1000	1000
59	1000	1000
60	1000	1000
61	1000	1000
62	1000	1000
63	1000	1000
64	1000	1000
65	1000	1000
66	1000	1000
67	1000	1000
68	1000	1000
69	1000	1000
70	1000	1000
71	1000	1000
72	1000	1000
73	1000	1000
74	1000	1000
75	1000	1000
76	1000	1000
77	1000	1000
78	1000	1000
79	1000	1000
80	1000	1000
81	1000	1000
82	1000	1000
83	1000	1000
84	1000	1000
85	1000	1000
86	1000	1000
87	1000	1000
88	1000	1000
89	1000	1000
90	1000	1000
91	1000	1000
92	1000	1000
93	1000	1000
94	1000	1000
95	1000	1000
96	1000	1000
97	1000	1000
98	1000	1000
99	1000	1000
100	1000	1000

b)

MAPA CORREGIDO? 30 JULIO DAT ... DE BUENOS AIRES 1950

COTAS 30 JULIO 1950 30 JULIO 1950

ESTACION	30 JULIO 1950	30 JULIO 1950
1	1000	1000
2	1000	1000
3	1000	1000
4	1000	1000
5	1000	1000
6	1000	1000
7	1000	1000
8	1000	1000
9	1000	1000
10	1000	1000
11	1000	1000
12	1000	1000
13	1000	1000
14	1000	1000
15	1000	1000
16	1000	1000
17	1000	1000
18	1000	1000
19	1000	1000
20	1000	1000
21	1000	1000
22	1000	1000
23	1000	1000
24	1000	1000
25	1000	1000
26	1000	1000
27	1000	1000
28	1000	1000
29	1000	1000
30	1000	1000
31	1000	1000
32	1000	1000
33	1000	1000
34	1000	1000
35	1000	1000
36	1000	1000
37	1000	1000
38	1000	1000
39	1000	1000
40	1000	1000
41	1000	1000
42	1000	1000
43	1000	1000
44	1000	1000
45	1000	1000
46	1000	1000
47	1000	1000
48	1000	1000
49	1000	1000
50	1000	1000
51	1000	1000
52	1000	1000
53	1000	1000
54	1000	1000
55	1000	1000
56	1000	1000
57	1000	1000
58	1000	1000
59	1000	1000
60	1000	1000
61	1000	1000
62	1000	1000
63	1000	1000
64	1000	1000
65	1000	1000
66	1000	1000
67	1000	1000
68	1000	1000
69	1000	1000
70	1000	1000
71	1000	1000
72	1000	1000
73	1000	1000
74	1000	1000
75	1000	1000
76	1000	1000
77	1000	1000
78	1000	1000
79	1000	1000
80	1000	1000
81	1000	1000
82	1000	1000
83	1000	1000
84	1000	1000
85	1000	1000
86	1000	1000
87	1000	1000
88	1000	1000
89	1000	1000
90	1000	1000
91	1000	1000
92	1000	1000
93	1000	1000
94	1000	1000
95	1000	1000
96	1000	1000
97	1000	1000
98	1000	1000
99	1000	1000
100	1000	1000

TABLA VI.1

La comparación objetiva de los resultados  
esta dada de la siguiente manera.

pronóstico para el 1º/05/79 para las 00z  
con tiempo = 300 segundos

Habilidad persistencia/Modelo = 50.59m

RECM Modelo = 38.87m

RECM persistencia = 19.20m

Cambio Signo = 64.17 %

Correlación pronóstico/Observado = 0.896

Correlación persistencia = 0.972



La Altura Geopotencial  
a) Observada      b) Pronósticada

Año 1979, mes 05, día 01, hora 12Z nivel 500mb  
Mapas II

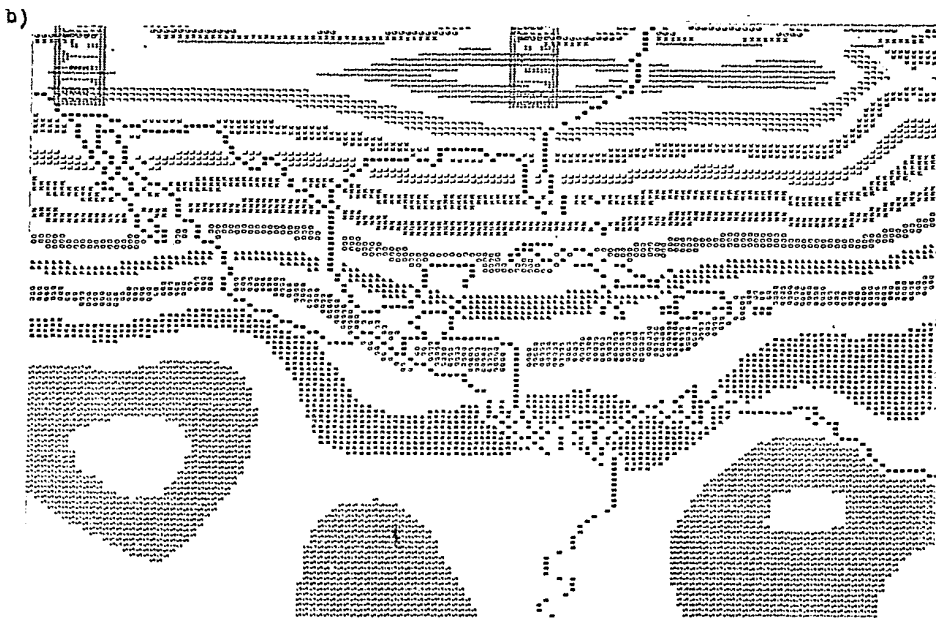
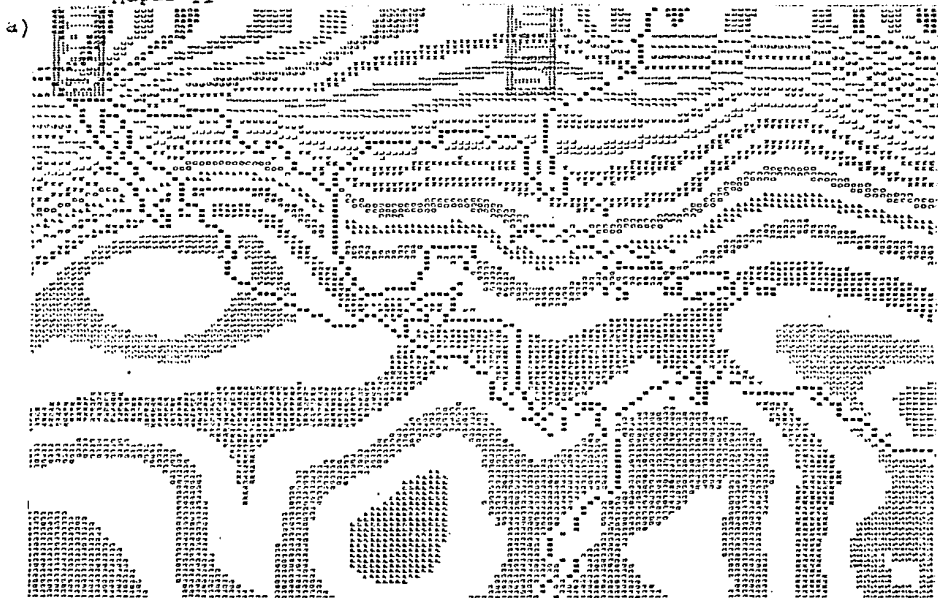
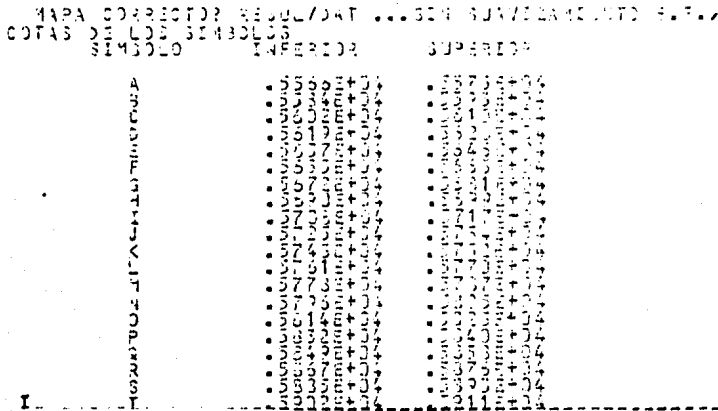


FIGURA VI.2

Rangos de valores obtenidos para la altura  
geopotencial correspondientes a los mapas II. FIG. VI.2

- a) Observado
- b) pronosticado

a)



b)

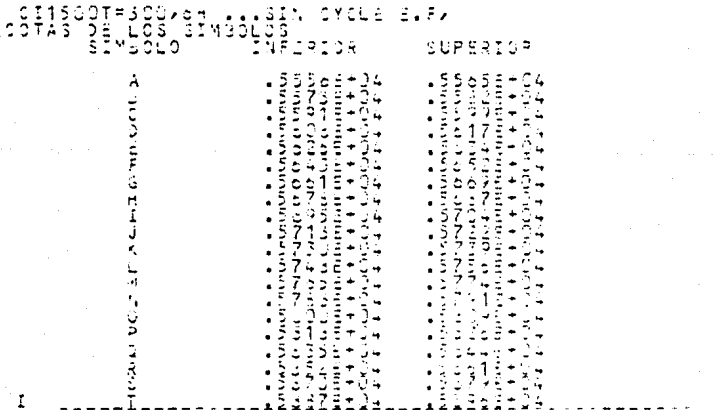


TABLA VI.2

En la figura VI.2 inciso a) se tiene el mapa observado a 500mb para el día 1º de mayo de 1979 a las 12Z donde se observa que la alta del Páccifico penetra a la República Mexicana a la altura de las costas de Guerrero y Jalisco, la vaguada con dirección noreste se ha desplazado hacia el este sobre el territorio Cubano, la alta del Atlántico se ha desplazado similarmente en la dirección este, la zona de baja presión al noroeste de la República Mexicana también ha sufrido un desplazamiento considerable hacia el este; en Centroamérica ha habido un aumento de presión y en la parte este de Cuba se observa la aparición de una cuña o cresta.

En el mapa pronosticado inciso b) figura VI.2 se observan las siguientes características. La alta del Páccifico ha bajado de latitud hacia el sur, la alta del Atlántico se ha desplazado en la dirección sureste de manera considerable, la vaguada observada a la altura de Cuba se ha desplazado hacia el este tendiendo a desaparecer; la cresta observada al este de Cuba se introduce más hacia el Océano Atlántico, se observa una zona de baja en la parte este de Norteamérica abarcando parte del Océano Atlántico; los sistemas observados en la parte de Centroamérica han sufrido un desplazamiento considerable hacia el sur.

La tabla VI.2 muestra los valores de geopotencial correspondientes a estas descripciones a) observado b) pronosticado.

La comparación objetiva de estos resultados  
esta dada de la siguiente manera.

Pronóstico para el 1<sup>o</sup>/05/79 para las 12Z  
con tiempo = 300 segundos

Habilidad persistencia/Modelo = 54.06m

RECM Modelo = 38.67m

RECM persistencia = 17.77m

Cambio Signo = 48.55 %

Correlación pronóstico/Observado = 0.861

Correlación persistencia = 0.976

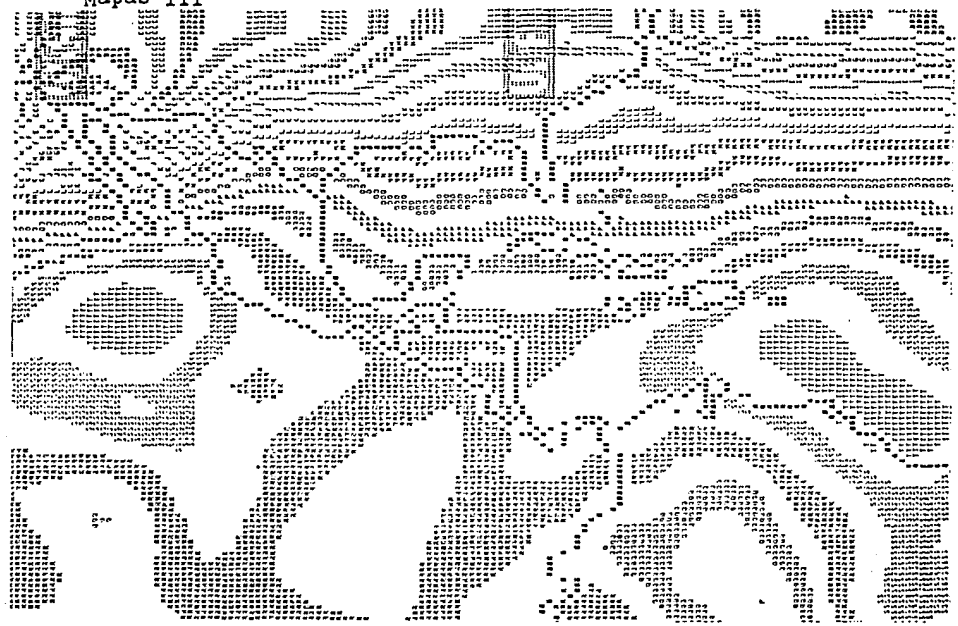
La Altura Geopotencial

a) Observada      b) Pronósticada

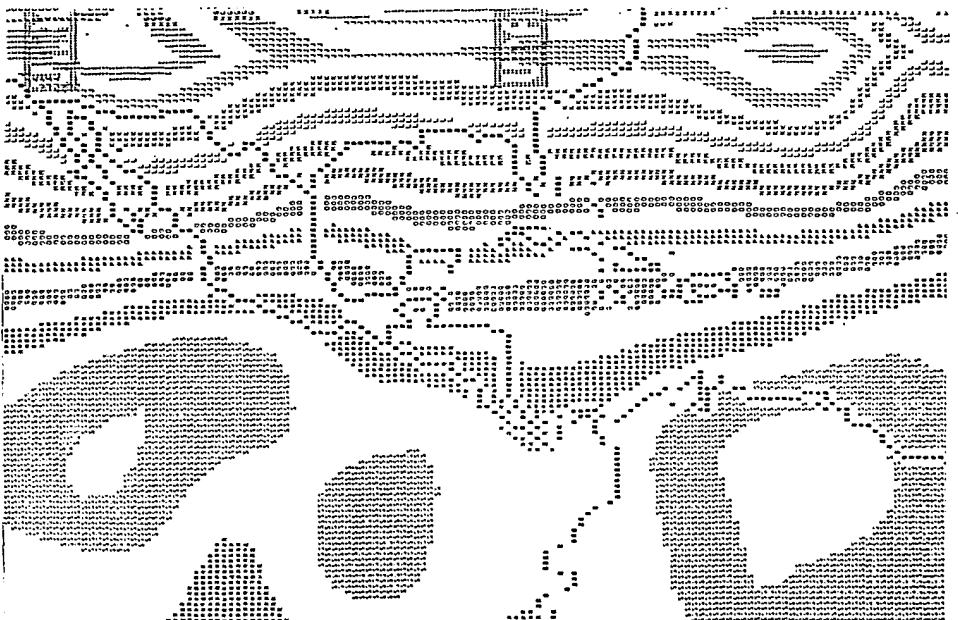
Año 1979, mes 05, día 02, hora 00Z nivel 500mb

Mapas III

a)



b)





En la figura VI.3 se tiene el mapa observado en el inciso a) para el día 2 de Mayo de 1979 a las 00Z en el nivel de 500mb donde se observa lo siguiente. La alta semipermanente del pácifico se ha desplazado en la dirección oeste tendiendo a abandonar la República Mexicana y a su vez con un ligero desplazamiento hacia el sur en relación con lo observado en las 12 horas anteriores, la alta semipermanente del Atlántico al este de la República Mexicana ha sufrido un desplazamiento en la dirección norte tendiendo a formar una nueva cresta al este de Cuba, la vaguada observada entre la península de Florida y la península de Yucatán aparece ahora un poco desplazada hacia el oeste, la zona de baja localizada al noroeste de la República Mexicana se encuentra un poco desplazada en la dirección este, el geopotencial en la parte suroeste de Centroamerica se incrementó durante estas 12 horas, se observa una baja aproximadamente en Sudamerica.

En el mapa pronóstico inciso b) figura VI.3 observamos lo siguiente. La zona de alta ha disminuido su latitud hacia el sur de una manera considerable con una parte segregada hacia el suroeste de Costa Rica y Panamá, similarmente la alta del Atlántico al este de la República Mexicana se ha desplazado abarcando gran parte del territorio sudamericano en su parte este, así como menor latitud, la baja localizada al noroeste de la República Mexicana ha descendido su latitud casi formando una vaguada en la dirección norte a la altura de la península de Baja California.

Se observa la semiormación de una cresta a la altura de las costas de Matamoros y Brownsville asi como una vaguada en la dirección noreste y una baja hacia el este de la Unión Americana sobre el Atlántico, en la parte de Centroamerica las características pronosticadas son similares a las observadas asi como hacia la dirección norte.

La tabla VI.3 muestra los rangos de valores de geopotencial correspondientes para estas descripciones.

La comparacion objetiva para estos resultados esta dada de la siguiente manera.

Pronóstico para el 2/05/79 para las 00Z  
con tiempo = 300 segundos

Habilidad persistencia/Modelo = 51.93m

RECM Modelo = 39.80m

RECM Persistencia = 19.13m

Cambio Signo = 54.35 %

Correlación pronóstico/Observado = 0.868

Correlación persistencia = 0.970



La Altura Geopotencial

a) Observada      b) Pronosticada

Año 1979, mes 05, día 02, hora 12Z nivel 500mb  
Mapas IV

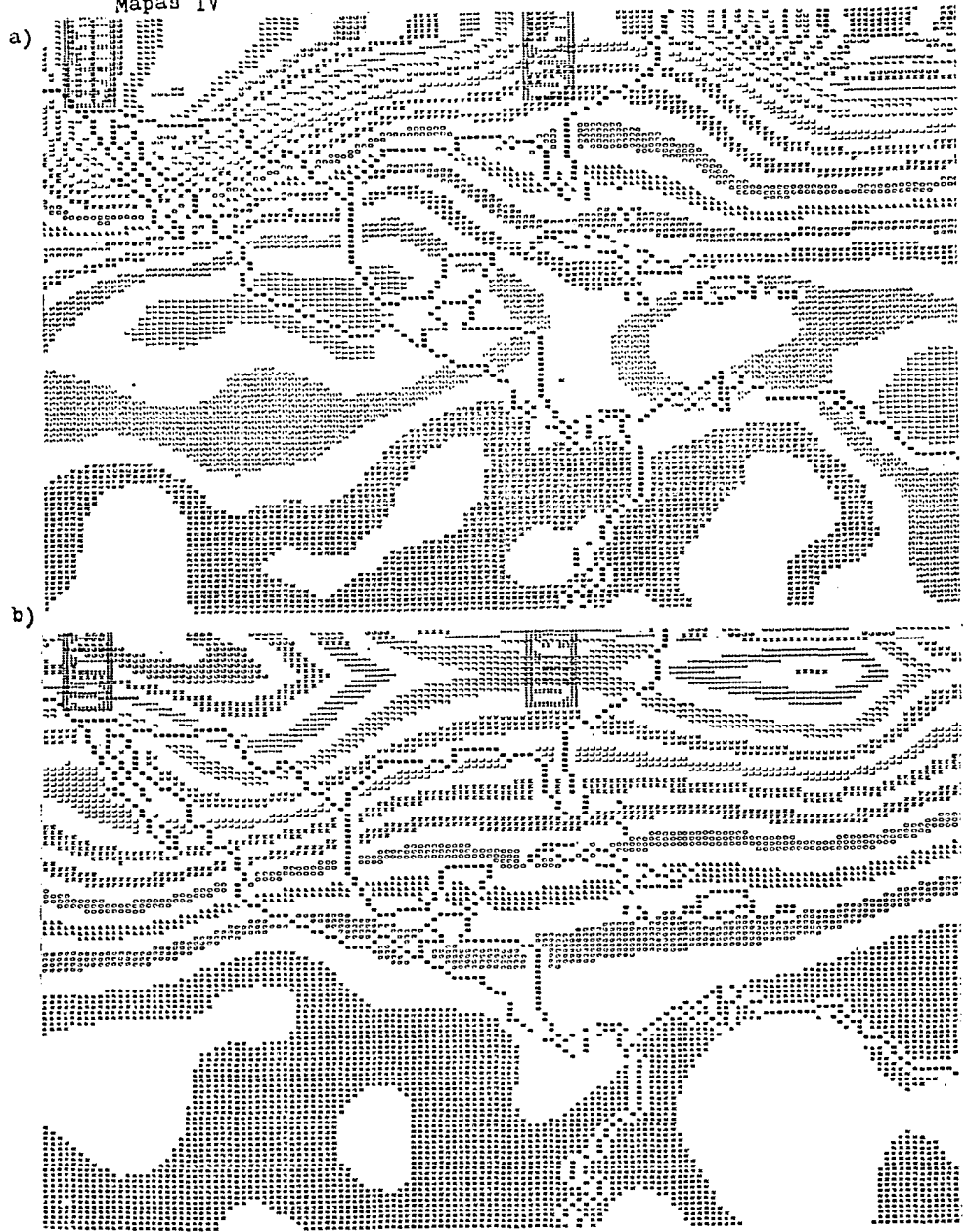


FIGURA VI.4

Rangos de valores obtenidos para la altura geopotencial correspondientes a los mapas IV. FIG.VI.4

- a) Observado
- b) Pronosticado

a)

MAPA CORRECTOR RESULTADO ... GOBIERNO VIENTOS S.E.

COTAS 2000 1500 1000 500 0

SIMBOLO INFO RANGOS

COTAS	SIMBOLO	INFO	RANGOS
2000	•	1000-1500	1000-1500
1500	•	500-1000	500-1000
1000	•	0-500	0-500
500	•	-500-0	-500-0
0	•	-1000-500	-1000-500

I

b)

COTAS 2000 1500 1000 500 0

SIMBOLO INFO RANGOS

COTAS	SIMBOLO	INFO	RANGOS
2000	•	1000-1500	1000-1500
1500	•	500-1000	500-1000
1000	•	0-500	0-500
500	•	-500-0	-500-0
0	•	-1000-500	-1000-500

I

TABLA VI.4

En la figura VI.4 se tiene el mapa observado en el inciso a) para el día 2 de mayo de 1979 a las 12z en el nivel de 500mb donde se observan las siguientes características. La alta del pácifico se ha extendido en gran parte a través de la República Mexicana en su parte sur, la alta del Atlántico se ha extendido en la dirección oeste tendiendo a unirse a la alta del pácifico, la vaguada localizada entre las penínsulas de Florida y Yucatán se ha desplazado a la altura de Cuba, se observa a la altura del Golfo de México la semiformación de una cresta aproximadamente en la dirección norte, la baja localizada al noroeste de la República Mexicana sufrió un desplazamiento hacia el sur, se observa un aumento de geopotencial en las costas al este de Venezuela.

En el mapa pronosticado de la figura VI.4 en el inciso b) se observan las siguientes transformaciones. La zona de alta del pácifico ha abandonado por completo la República Mexicana sufriendo un descenso de latitud hacia el sur de manera considerable, la alta al este de la República Mexicana en el Atlántico similarmente ha sido desplazada en la dirección sur, la baja del noroeste de la República Mexicana se encuentra ahora sobre territorio Norteamericano en su parte oeste, la baja localizada al este de la Unión Americana ha permanecido casi estable y en la zona de Centroamérica ha disminuido un poco el geopotencial tendiendo las isolíneas a desplazarse en la dirección norte

Los valores de geopotencial obtenidos para estos resultados se encuentran localizados en la tabla VI.4 con las mismas características de las anteriores.

La comparación objetiva es de la siguiente manera.

Pronóstico para el día 2/05/79 para las 12Z  
con tiempo = 300 segundos

Habilidad persistencia/Modelo = 46.88m

RECM Modelo = 44.90m

RECM Persistencia = 23.85m

Cambio Signo = 48.87 %

Correlación pronóstico/Observado = 0.805

Correlación persistencia = 0.953

La Altura Geopotencial

a) Observada      b) pronosticada

Año 1979, mes 05, día 03, hora 00Z nivel 500mb  
Mapas V



FIGURA VI.5

Rangos de valores obtenidos para la altura  
geopotencial correspondientes a los mapas V. FIG.VI.5

- a) Observado
- b) Pronóstico

a)

MAPA CORRECTO? RESULTADO ... SIN SUAVIZADO D.E.F.

COTAS DE LOS SIMBOLOS INTERIORES SUPERIOR

Simbolo	Interior	Superior
A	•••••	•••••
B	•••••	•••••
C	•••••	•••••
D	•••••	•••••
E	•••••	•••••
F	•••••	•••••
G	•••••	•••••
H	•••••	•••••
I	•••••	•••••
J	•••••	•••••
K	•••••	•••••
L	•••••	•••••
M	•••••	•••••
N	•••••	•••••
O	•••••	•••••
P	•••••	•••••
Q	•••••	•••••
R	•••••	•••••
S	•••••	•••••
T	•••••	•••••
U	•••••	•••••
V	•••••	•••••
W	•••••	•••••
X	•••••	•••••
Y	•••••	•••••
Z	•••••	•••••

b)

MAPA CORRECTO? RESULTADO ... SIN SUAVIZADO D.E.F.

COTAS DE LOS SIMBOLOS INTERIORES SUPERIOR

Simbolo	Interior	Superior
A	•••••	•••••
B	•••••	•••••
C	•••••	•••••
D	•••••	•••••
E	•••••	•••••
F	•••••	•••••
G	•••••	•••••
H	•••••	•••••
I	•••••	•••••
J	•••••	•••••
K	•••••	•••••
L	•••••	•••••
M	•••••	•••••
N	•••••	•••••
O	•••••	•••••
P	•••••	•••••
Q	•••••	•••••
R	•••••	•••••
S	•••••	•••••
T	•••••	•••••
U	•••••	•••••
V	•••••	•••••
W	•••••	•••••
X	•••••	•••••
Y	•••••	•••••
Z	•••••	•••••

TABLA VI.5

En la figura VI.5 inciso a) se tiene el mapa observado para el día 3 de mayo de 1979 a las 00Z en el nivel de 500mb donde se hacen las siguientes observaciones, La alta del Pacífico ha descendido de geopotencial y se encuentra desplazada en la dirección de norte a sur; la alta del Atlántico se ha desplazado en la dirección noroeste hacia la República Mexicana; - Centroamérica se encuentra ahora ocupada en parte por la alta del Pacífico desplazada hacia latitudes bajas; la baja del noroeste de la República Mexicana se ha desplazado hacia el sur formando una vaguada en la dirección norte; la cresta del Golfo de México se ha desplazado hacia el norte; se observa la formación de una leve cresta en la dirección noreste en las vecindades al este de la península de Florida.

En el mapa pronosticado inciso b) Fig. VI.5 se observan los siguientes cambios. Se manifiesta una alta en la parte sur de la República Mexicana sobre el Pacífico unida a la alta del Atlántico al este de la República Mexicana abarcando parte de territorio sudamericano, se observa una vaguada al norte de la República Mexicana desde las costas de Guerrero hasta las de Mazatlán aproximadamente; la baja del noroeste se encuentra ahora sobre territorio Norteamericano; la baja el este de la Unión Americana se ha desplazado en la dirección sur formando una vaguada en la dirección norte.

se observa la formación de una cresta a la altura de la península de Miami Florida en la dirección norte.

Los valores de geopotencial para estos resultados se encuentran dados en la tabla VI.5 similar a los anteriores.

La comparación objetiva es la siguiente.

Pronóstico para el 3/05/79 para las 00Z  
con tiempo = 300 segundos

Habilidad persistencia/Modelo = 60.03m

RECM Modelo = 39.40m

RECM Persistencia = 15.75m

Cambio Signo = 61.27 %

Correlación Pronóstico/Observado = 0.854

Correlación persistencia = 0.978



La Altura Geopotencial

a) Observada    b) Pronósticada

Año 1979, mes 05, día 03, hora 12Z nivel 500mb

Mapas VI

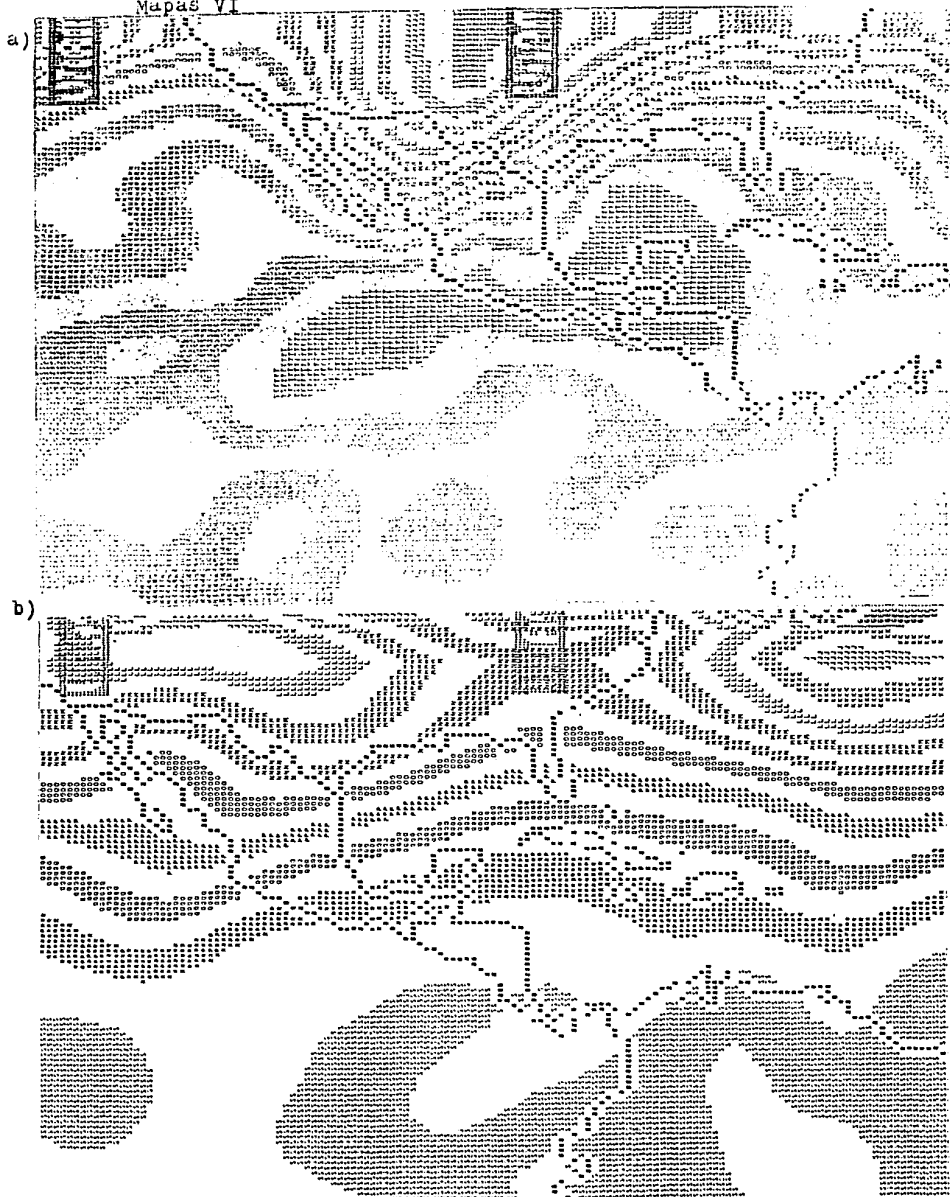


FIGURA VI.6

Rangos de valores obtenidos para la altura  
geopotencial correspondientes a los mapas VI,FIG.VI.6

a) Observado

b) Proaosticado

a)

b)

COTAS	5500T	5000	4500	4000	3500	3000	2500	2000	1500	1000	500	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

TABLA VI.6

En la figura VI.6 inciso a) se tiene el mapa observado para el día 3 de mayo de 1979 a las 12Z en el nivel de 500mb donde se hacen las siguientes observaciones. La alta del pácifico y la alta del Atlántico se han extendido de manera que han formado un solo sistema, Centroamerica se encuentra ahora dentro de la zona de alta antes mencionada, la baja del noroeste de la República Mexicana se sigue desplazando hacia el sur formando una cresta muy pronunciada en la dirección norte, la cresta del Golfo de México ha sufrido un leve desplazamiento en la dirección este, se observa una baja en territorio Norteamericano.

En el mapa pronosticado inciso b) figura VI.6 se observa lo siguiente. Una baja en territorio Norteamericano que tiende a unirse con otra hacia el este del mismo territorio sobre el Atlántico, se observa una ligera vaguada en las costas de Jalisco sobre el pácifico, se observa que la península de Yucatán se encuentra en una alta que abarca hasta América del sur con una parte segregada al suroeste de la República Mexicana.

Los valores de geopotencial para estos resultados se encuentran dados en la tabla VI.6.

La comparación objetiva es la siguiente;

Pronóstico para el 3/05/79 para las 12z  
con tiempo = 300 segundos

Habilidad persistencia/Modelo = 5.31m

RECM Modelo = 36.19m

RECM Persistencia = 38.22m

Cambio signo = 58.78 %

Correlación pronóstico/Observado = 0.888

Correlación persistencia = 0.876

CONCLUSIONES: En base a lo expuesto al principio de este trabajo , de las necesidades del conocimiento de la dinámica atmosférica por el hombre ; en esta tesis se ha principiado el desarrollo y prueba de un modelo como lo es el de ecuaciones primitivas, tratado mediante un método semi-lagrangiano y aplicado en la atmósfera de la República Mexicana .

En este primer intento de pronosticar el estado de tiempo vía el campo de geopotencial; mediante un esquema semi-lagrangiano con condiciones de frontera cíclica en la dirección zonal y fronteras abiertas en la dirección norte-sur; se ha encontrado un amplio camino por recorrer, ya que en esta primera fase no se han obtenido resultados del todo satisfactorios lo cual lo demuestran los mapas comparables con sus respectivos análisis objetivos.

Los resultados reportados cada 12 horas a partir del día 1<sup>o</sup> de mayo de 1979 a las 00Z y hasta el día 3 de mayo de 1979 a las 12Z mostraron que únicamente en las últimas 12 horas se logró un resultado mejor que la persistencia.

En relación a lo anteriormente expuesto se pueden citar algunas de las posibles causas; como por ejemplo la época del año con la cual se trabajó donde se tuvo una gran persistencia, siendo de interés la consideración de otras épocas. Se puede deber al esquema de interpolación semi-lagrangiano utilizado que suaviza mucho los campos ( ver Ritchie 1985 ); al tipo de malla o física utilizada.

Sin embargo estos resultados preliminares son estimulantes para realizar algunas modificaciones como el considerar otros parámetros tales como la temperatura  $T$  dentro del modelo; usar un esquema que no interpole u otro tipo de interpolación; una malla  $C$  con parámetros separados  $u, v, \phi$ ; o un esquema implícito que permitan al modelo ser más eficiente.

BIBLIOGRAFIA

- Mathur M.B., 1970 : A note on an improved quasi-lagrangian advective scheme for primitive equations. Mon. Wea. Rev., 98 , 214-219
- Matsuno, T., 1966 : Numerical integration of primitive equations by a simulated backward difference method. J. Met. Soc. Japan, 44, 76-84 .
- Haltiner, G.J. and R.T. Williams, 1980 : Numerical prediction and dynamic meteorology second edition, published by wiley and sons, 477 pp.
- Kanamitsu, M. 1975 : On numerical prediction over a global tropical belt. Report No. 75-1, department of meteorology, Florida state University, Tallahassee, Florida, 32306, 282pp
- Krishnamurti, T.N., 1969 : An experiment in numerical prediction in equatorial latitudes. Quart. J. Roy. Met. Soc., 95, 594-620
- Krishnamurti, T.N. and R.P. Pearce, 1977 : Lectures on forecasting of tropical weather, including tropical cyclons, with particular relevance to africa, chapter 4 and 5, WMO publication No. 364, 428 pp

Krishnamurti, T.N., 1979 : Compendium of meteorology for use by class I and II meteorological personnel, vol.11, part 4-tropical meteorology WMO publication no. 364, 428 pp

Krishnamurti, T.N., R.J.Pasch and P.Ardanny, 1980: Prediction of african waves and specification of Squall lines. Tellus, 32, 215-231

Krishnamurti, T.N., 1987: Workbook on numerical prediction for the tropics I. To be published by world meteorological organization.

Krishnamurti, T.N., Arun Kumar and Xiang Li, 1987 : Results of extensive integration with simple NWP Models over the tropics during FGGE (submitted to tellus for publication)

Kok-Seng Yap : Documentation on two simple tropical models. Report No.26 Tropical Meteorology programme report series. Department of meteorology Florida state university (Tallahassee, Florida, USA)

Analisis Vectorial: Murray R. Spiegel 1970. Mc.Graw-Hill



Harold Ritchie .- Eliminating the interpolation associated with the semi-lagrangian - - scheme. seventh conference on numerical weather prediction.

June 17-20 1985

Montreal , P.Q. , Canada .